Aufgaben zum Lambdakalkül

Aufgabe 1

Das SKI-Kalkül verwendet die Kombinatoren S = λx. λy. λz. x z (y z), K = λx. λy. x und I = λx. x. Zusätzlich lassen sich die Kombinatoren C = λf. λx. λy. f y x und B = λf. λg. λx. f (g x) definieren.

1. Zeigen Sie S K $\overset{\eta,\beta}{=}$ K I, indem Sie zeigen:
   S K x y $\Rightarrow^*$ Z und K I x y $\Rightarrow^*$ Z für den gleichen Term Z.

2. Der Kombinator Ψ ist wie folgt definiert: Ψ = λf. λg. λx. λy. f (g x) (g y).

   (a) Geben Sie den allgemeinsten Typ von Ψ an.

   (b) Zeigen Sie C I x y $\Rightarrow^*$ y x.

   (c) Der Kombinator C' sei definiert durch C' = B (B C) C.
   Zeigen Sie: C' f x y z $\Rightarrow^*$ f z x y.

   (d) Der Kombinator S kann dargestellt werden als C' (B (Ψ I) (C I)).
   Zeigen Sie, dass tatsächlich C' (B (Ψ I) (C I)) x y z $\Rightarrow^*$ x z (y z).

Aufgabe 2

Die Church-Booleans waren wie folgt definiert: c_{true}=(λt. λf. t) und c_{false}=(λt. λf. f), die Church-Integer als c_n=(λs. λz. s^n z).

1. Geben Sie einen Lambdaterm "not" an, der die Negation eines gegebenen Church-Booleans berechnet.

2. Geben Sie nun (z.B. mithilfe von "not") einen Lambdaterm "even" an, der zurückgibt, ob ein gegebener Church-Integer gerade ist.

3. Schreiben Sie einen Lambdaterm "max", der das Maximum von zwei gegebenen Church-Integern berechnet. Sie dürfen die Funktion "less_eq" verwenden, wobei "less_eq n m" angibt, ob $n \leq m$ gilt.

4. Der Kombinator B sei definiert durch B = (λf. λg. λx. f (g x)). Zeigen Sie, dass (λa. λb. λc. B B B max max a b c) das Maximum von 3 Zahlen berechnet. Sie dürfen dazu verwenden, dass $\max(a, b, c) = \max(\max(a, b), c)$.