

n -dimensionale Polarkoordinaten

Zusammenfassung

Simon Bischof

1 Grundlegendes

Es sei $|M| := \int_M 1 dx$ ($x \in \mathbb{R}^n, M \subseteq \mathbb{R}^n$) der Inhalt von M .

Substitutionsregel:

$$\int_{g(A)} f(v) dv = \int_A f(g(u)) |\det(J_g(u))| du, \quad g: A \rightarrow g(A) \text{ injektiv.}$$

Im Folgenden sei stets $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)^T$ und $\|\bullet\|$ die euklidische Norm.
Es sei $D(R)^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2\}$ die n -dimensionale Kugel mit Radius R .

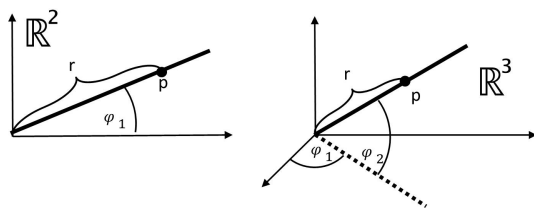
2 P_n : Definition und Eigenschaften

2.1 Definition

Es ist $P_2: [0, \infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $P_2(r, \varphi_1) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi_1 \\ r \sin \varphi_1 \end{pmatrix}$.

Für $n > 2$ ist $P_n: [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^n$ induktiv definiert:

$$\begin{aligned} P_n(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) &= \begin{pmatrix} P_{n-1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) \cdot \cos \varphi_{n-1} \\ r \cdot \sin \varphi_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \cos \varphi_{n-1} \begin{pmatrix} P_{n-1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) \\ 0 \end{pmatrix} + r \sin \varphi_{n-1} e_n \end{aligned}$$



Ausgeschrieben ergibt sich:

$$P_n(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cdot \dots \cdot \cos \varphi_{n-1} \\ r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cdot \dots \cdot \cos \varphi_{n-1} \\ r \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \cdot \dots \cdot \cos \varphi_{n-1} \\ \vdots \\ r \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1} \\ r \sin \varphi_{n-1} \end{pmatrix}$$

Im Falle $n = 3$ ergeben sich die bekannten Kugelkoordinaten

$$P_3(r, \varphi_1, \varphi_2) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ r \sin \varphi_2 \end{pmatrix}$$

2.2 $\|P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})\|$

Für $n = 2$: $\|P_2(r, \varphi_1)\|^2 = r^2$, wegen $r \geq 0$ gilt also $\|P_2(r, \varphi_1)\| = r$.

Mit dem Satz des Pythagoras folgt:

$\|P_{n+1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n)\|^2 = \cos^2 \varphi_n \cdot \|P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})\|^2 + \sin^2 \varphi_n \cdot \|r \cdot e_{n+1}\|^2 = r^2$, also $\|P_{n+1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n)\| = r$.

2.3 Funktionalmatrix und -determinante

Es ist $J_{P_2}(r, \varphi_1) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -r \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & r \cos \varphi_1 \end{pmatrix}$ und $\det(J_{P_2}(r, \varphi_1)) = r$.

Außerdem ist $J_{P_3}(r, \varphi_1, \varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & -r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & -r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & -r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \end{pmatrix}$ und $\det(J_{P_3}(r, \varphi_1, \varphi_2)) = r^2 \cos \varphi_2$.

Für allgemeines n sind die Spalten der Funktionalmatrix:

$$\partial_r P_{n+1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = \begin{pmatrix} \partial_r P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cdot \cos \varphi_n \\ \sin \varphi_n \end{pmatrix}$$

$$\partial_{\varphi_k} P_{n+1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = \begin{pmatrix} \partial_{\varphi_k} P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cdot \cos \varphi_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, \dots, n-1)$$

$$\partial_{\varphi_n} P_{n+1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = \begin{pmatrix} -P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cdot \sin \varphi_n \\ r \cos \varphi_n \end{pmatrix}$$

Es ist nun

$$\det(J_{P_{n+1}}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n)) = \det(J_{P_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})) \cdot r \cos^{n-1} \varphi_n.$$

Damit und mit $\det(J_{P_2}(r, \varphi_1)) = r$ folgt rekursiv:

$$\det(J_{P_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})) = |\det(J_{P_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}))| = r^{n-1} \prod_{i=2}^{n-1} \cos^{i-1} \varphi_i.$$

3 Inhalt der n -dimensionalen Kugel

Sei $A := [0, R] \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]^{n-2}$. Dann ist $P_n(A) = D(R)^n$. Mit Substitutionsregel:

$$\begin{aligned} \int_{D(R)^n} dx &= \int_A |\det(J_{P_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}))| d(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \\ &= \int_0^R r^{n-1} dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \cdot \prod_{i=2}^{n-1} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{i-1} \varphi_i d\varphi_i \right) \end{aligned}$$

Es ist $|D(R)^2| = \pi R^2$, $|D(R)^3| = \frac{4\pi}{3} R^3$ und

$$|D(R)^n| = \begin{cases} \frac{\pi^q R^{2q}}{q!}; & n = 2q, q \in \mathbb{N} \\ \frac{2^{q+1} \sqrt{\pi^q} R^{2q+1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2q+1)} & n = 2q+1, q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

4 Quellen

- Königsberger, Analysis 2 (S. 18f, 91f, 225-227, 287f)
- HM-Vorlesung von Herrn Dr. Herzog (WS 2010/11, SS 2011)

5 Materialien zum Vortrag

Handout und Ausarbeitung finden sich jeweils als *.tex und *.pdf unter https://github.com/ratefuchs/Proseminar_Mathematik.