n-dimensionale Polarkoordinaten

Zusammenfassung

Simon Bischof

1 Grundlegendes

Es sei $|M| := \int\limits_M 1dx \qquad (x \in \mathbb{R}^n, M \subseteq \mathbb{R}^n)$ der Inhalt von M.
Substitutionsregel:

$$\int\limits_{g(A)} f(v)dv = \int\limits_A f(u)|\det(J_g(u))|du, \qquad g: A \to g(A)\text{injektiv}.$$

Im Folgenden sei stets $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)^T$ und $|| \bullet ||$ die euklidische Norm.
Es sei $D(R)^n := \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2\}$ die n-dimensionale Kugel mit Radius R.

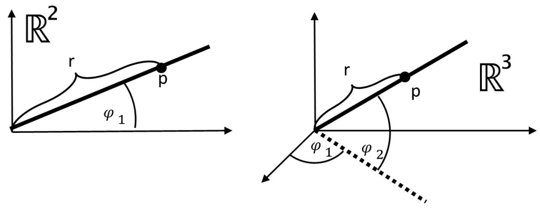
2 P_n: Definition und Eigenschaften

2.1 Definition

Es ist $P_2 : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $P_2(r, \varphi_1) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi_1 \\ r\sin\varphi_1 \end{pmatrix}$.
Für $n > 2$ ist $P_n : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]^{n-2} \to \mathbb{R}^n$ induktiv definiert:

$$P_n(r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) = \begin{pmatrix} P_{n-1}(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}) \cdot \cos\varphi_{n-1} \\ r \cdot \sin\varphi_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \cos\varphi_{n-1} \begin{pmatrix} P_{n-1}(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}) \\ 0 \end{pmatrix} + r\sin\varphi_{n-1} e_n$$



Ausgeschrieben ergibt sich:

$$P_n(r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi_1\cos\varphi_2 \cdot \ldots \cdot \cos\varphi_{n-1} \\ r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \cdot \ldots \cdot \cos\varphi_{n-1} \\ r\sin\varphi_2\cos\varphi_3 \cdot \ldots \cdot \cos\varphi_{n-1} \\ \vdots \\ r\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} \\ r\sin\varphi_{n-1} \end{pmatrix}$$

Im Falle $n = 3$ ergeben sich die bekannten Kugelkoordinaten

$$P_3(r, \varphi_1, \varphi_2) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi_1\cos\varphi_2 \\ r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ r\sin\varphi_2 \end{pmatrix}$$

2.2 $||P_n(r,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})||$

Für $n=2: ||P_2(r,\varphi_1)||^2 = r^2$, wegen $r \geq 0$ gilt also $||P_2(r,\varphi_1)|| = r$.
Mit dem Satz des Pythagoras folgt:
$||P_{n+1}(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)||^2 = \cos^2\varphi_n \cdot ||P_n(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})||^2 + \sin^2\varphi_n \cdot ||r \cdot e_{n+1}||^2 = r^2$, also $||P_{n+1}(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)|| = r$.

2.3 Funktionalmatrix und -determinante

Es ist $J_{P_2}(r,\varphi_1) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -r\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & r\cos\varphi_1 \end{pmatrix}$ und $\det(J_{P_2}(r,\varphi_1)) = r$.
Außerdem ist $J_{P_3}(r,\varphi_1,\varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1\cos\varphi_2 & -r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 & -r\cos\varphi_1\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_1\cos\varphi_2 & r\cos\varphi_1\cos\varphi_2 & -r\sin\varphi_1\sin\varphi_2 \end{pmatrix}$ und $\det(J_{P_3}(r,\varphi_1,\varphi_2)) = r^2\cos\varphi_2$.
Für allgemeines n sind die Spalten der Funktionalmatrix:

$$\partial_r P_{n+1}(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_n) = \begin{pmatrix} \partial_r P_n(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}) \cdot \cos\varphi_n \\ \sin\varphi_n \end{pmatrix}$$

$$\partial_{\varphi_k} P_{n+1}(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_n) = \begin{pmatrix} \partial_{\varphi_k} P_n(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}) \cdot \cos\varphi_n \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (k=1,\ldots,n-1)$$

$$\partial_{\varphi_n} P_{n+1}(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_n) = \begin{pmatrix} -P_n(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}) \cdot \sin\varphi_n \\ r\cos\varphi_n \end{pmatrix}$$

Es ist nun

$$\det(J_{P_{n+1}}(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)) = \det(J_{P_n}(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})) \cdot r\cos^{n-1}\varphi_n.$$

Damit und mit $\det(J_{P_2}(r,\varphi_1)) = r$ folgt rekursiv:
$\det(J_{P_n}(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})) = |\det(J_{P_n}(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}))| = r^{n-1}\prod_{i=2}^{n-1}\cos^{i-1}\varphi_i$.

3 Inhalt der n-dimensionalen Kugel

Sei $A := [0,R]\times[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]^{n-2}$. Dann ist $P_n(A) = D(R)^n$. Mit Substitutionsregel:

$$\int\limits_{D(R)^n} dx = \int\limits_A |\det(J_{P_n}(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}))| d(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$$

$$= \int\limits_0^R r^{n-1}dr \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1 \cdot \prod_{i=2}^{n-1}\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{i-1}\varphi_i d\varphi_i\right)$$

Es ist $|D(R)^2| = \pi R^2$, $|D(R)^3| = \frac{4\pi}{3}R^3$ und

$$|D(R)^n| = \begin{cases} \frac{\pi^q R^{2q}}{q!}; & n=2q, q\in\mathbb{N} \\ \frac{2^{q+1}\sqrt{\pi}^q R^{2q+1}}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2q+1)} & n=2q+1, q\in\mathbb{N} \end{cases}$$

4 Quellen

- Königsberger, Analysis 2 (S. 18f, 91f, 225-227, 287f)
- HM-Vorlesung von Herrn Dr. Herzog (WS 2010/11, SS 2011)

5 Materialien zum Vortrag

Handout und Ausarbeitung finden sich jeweils als *.tex und *.pdf unter https://github.com/ratefuchs/Proseminar_Mathematik.