n-dimensionale Polarkoordinaten

Proseminar Mathematik - Themen zur Analysis

Wintersemester 2012/2013

Simon Bischof; 06.12.2012

1 Motivation

Wenn mehrdimensionale Integrale in der Vorlesung eingeführt werden, d.h.

$$f(x)dx \qquad (x \in \mathbb{R}^n, M \subseteq \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}), \tag{1}$$

ist eine der ersten Funktionen, die integriert wird, $f \equiv 1$. Damit wird der Inhalt (je nach Dimension Fläche, Volumen,...) berechnet.
Für einfache Mengen wie den n-dimensionalen Würfel ist das mithilfe des Satzes von Fubini noch leicht machbar (man bekommt den Inhalt 1). Für eine weitere regelmäßige Menge, die n-dimensionale Kugel $D(R)^n := \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \cdots + x\_n^2 \leq R^2\}$, ist das ganze ungleich komplizierter. Fubini liefert

$$\tag{2}$$

Nach Einführung der Polarkoordinaten lässt sich das Integral mithilfe der Substitutionsregel

$$\tag{3}$$

viel einfacher berechnen.

2 Grundlegendes

2.1 Vorgehensweise

Die Polarkoordinaten werden als Funktion P_n vom „Polarkoordinatenraum“ in den kartesischen Raum induktiv definiert. Dabei dienen die bekannten Polarkoordinaten im Fall $n = 2$ als Induktionsanfang. Außerdem werde ich immer noch den Fall $n = 3$ explizit angeben, bei dem sich die bekannten Kugelkoordinaten ergeben.
Darauf werden einige Eigenschaften der Funktion P_n bewiesen, insbesondere wird auch die Funktionaldeterminante berechnet, die für die Substitutionsregel (3) wichtig ist.

2.2 einige Definitionen

- Es sei im Folgenden stets $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, denn für $n = 1$ sind die Polarkoordinaten nicht definiert.
- e_n bezeichne den n-ten kanonischen Einheitsvektor. Soweit nichts anderes gesagt ist, sei $e_n \in \mathbb{R}^n$, also $e_n = (0, \ldots, 0, 1)^T$.
- Als Skalarprodukt werde immer das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ verwendet, $|| \bullet ||$ sei im Folgenden die euklidische Norm.

3 P_n: Definition und Eigenschaften

3.1 Definition

$P_2 : [0, \infty) \times [0, 2\pi]$ wird direkt definiert durch $P_2(r, \varphi_1) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi_1 \\ r\sin\varphi_1 \end{pmatrix}$.
Veranschaulichung:
Nun wird für $n > 2$ die Funktion $P_n : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]^{n-2}$ induktiv definiert:

$$P_n(r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) = \begin{pmatrix} P_{n-1}(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}) \cdot \cos\varphi_{n-1} \\ r \cdot \sin\varphi_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \cos\varphi_{n-1} \begin{pmatrix} P_{n-1}(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}) \\ 0 \end{pmatrix} + r\sin\varphi_{n-1} e_n$$

Ausgeschrieben ergibt sich:

$$P_n(r,\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_{n-1}) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cdot\ldots\cdot\cos\varphi_{n-1} \\ r\sin\varphi_1\cos\varphi_2\cdot\ldots\cdot\cos\varphi_{n-1} \\ r\sin\varphi_2\cdot\ldots\cdot\cos\varphi_{n-1} \\ r\sin\varphi_3\cdot\ldots\cdot\cos\varphi_{n-1} \\ \vdots \\ r\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} \\ r\sin\varphi_{n-1} \end{pmatrix}$$

Im Falle $n = 3$ ergeben sich daher die bekannten Kugelkoordinaten

$$P_3(r,\varphi_1,\varphi_2) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi_1\cos\varphi_2 \\ r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ r\sin\varphi_2 \end{pmatrix}$$

3.2 $||P_n(r,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})||$

Im Falle $n = 2$ ergibt sich durch direktes Ausrechnen:
$||P_2(r,\varphi_1)||^2 = ||\begin{pmatrix} r\cos\varphi_1 \\ r\sin\varphi_1 \end{pmatrix}||^2 = r^2\cos^2\varphi_1 + r^2\sin^2\varphi_1 = r^2\cdot(\cos^2\varphi_1+\sin^2\varphi_1) = r^2.$
Wegen $r \geq 0$ gilt also $||P_2(r,\varphi_1)|| = r$.

Ebenso ist $(n = 3)$: $||P_3(r,\varphi_1,\varphi_2)||^2 = ||\begin{pmatrix} r\cos\varphi_1\cos\varphi_2 \\ r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ r\sin\varphi_2 \end{pmatrix}||^2 = r^2\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2 + r^2\sin^2\varphi_1\cos^2\varphi_2 + r^2\sin^2\varphi_2 = r^2\cos^2\varphi_2 + r^2\sin^2\varphi_2 = r^2$, also wieder $||P_3(r,\varphi_1,\varphi_2)|| = r$.

Der Beweis, dass tatsächlich $||P_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})|| = r$ für alle n gilt, erfolgt mit vollständiger Induktion:
Induktionsanfang: Für $n = 2$ wurde dies oben schon gezeigt. ✓
Induktionsvoraussetzung: Es sei $||P_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})|| = r$.
Induktionsschritt: Es ist leicht einzusehen, dass $(P_n(r,\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_{n-1}),0)\cdot(r\sin\varphi_{n-1}e_n) = 0$. Also gilt mit dem Satz des Pythagoras:
$||P_{n+1}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_n)||^2 = \cos^2\varphi_n\cdot||P_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})||^2 + \sin^2\varphi_n\cdot||r\cdot e_n||^2 = r^2\cos^2\varphi_n + r^2\sin^2\varphi_n = r^2$ ✓

3.3 Funktionalmatrix und -determinante

Zuerst untersuchen wir die 2- und 3-dimensionalen Polarkoordinaten. Für P_2 ist, wie direkt nachzurechnen,
$J_{P_2}(r,\varphi_1) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -r\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & r\cos\varphi_1 \end{pmatrix}$. Die Fuktionaldeterminante ist

$$\det(J_{P_2}(r,\varphi_1)) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -r\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & r\cos\varphi_1 \end{pmatrix} = r\cos^2\varphi_1 + r\sin^2\varphi_1 = r(\cos^2\varphi_1+\sin^2\varphi_1) = r.$$

Im Fall $n = 3$ ist
$J_{P_3}(r,\varphi_1,\varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1\cos\varphi_2 & -r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 & -r\cos\varphi_1\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_1\cos\varphi_2 & r\cos\varphi_1\cos\varphi_2 & -r\sin\varphi_1\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & 0 & r\cos\varphi_2 \end{pmatrix}$ und mit Sarrus

$$\det(J_{P_3}(r,\varphi_1,\varphi_2)) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi_1\cos\varphi_2 & -r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 & -r\cos\varphi_1\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_1\cos\varphi_2 & r\cos\varphi_1\cos\varphi_2 & -r\sin\varphi_1\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & 0 & r\cos\varphi_2 \end{pmatrix}$$
$$= r^2\cos^2\varphi_1\cos^3\varphi_2 + r^2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2\cos\varphi_2 + r^2\sin^2\varphi_1\cos^3\varphi_2 + r^2\cos^2\varphi_1\sin^2\varphi_2\cos\varphi_2$$
$$= r^2\cos\varphi_2(\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_1\cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_1\sin^2\varphi_2)$$

$= r^2 \cos\varphi_2(\cos^2\varphi_1(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2) + \sin^2\varphi_1(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2))$
$= r^2 \cos\varphi_2(\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1) = r^2\cos\varphi_2$.
Wir berechnen nun für allgemeines n die Spalten der Funktionalmatrix separat.
Da $\cos\varphi_n$ und $\sin\varphi_n$ nicht von r oder φ_k $(k = 1, \dots, n-1)$ abhängt und $P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ nicht von φ_n, gilt:

$$\partial_r P_{n+1}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_n) = \partial_r(P_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) \cdot \cos\varphi_n) + \partial_r(r\sin\varphi_n e_{n+1}) = \partial_r P_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) \cdot \cos\varphi_n + \sin\varphi_n e_{n+1} = \begin{pmatrix} \partial_r P_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) \cdot \cos\varphi_n \\ \sin\varphi_n \end{pmatrix}$$

$$\partial_{\varphi_k} P_{n+1}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_n) = \partial_{\varphi_k}(P_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) \cdot \cos\varphi_n) + \partial_{\varphi_k}(r\sin\varphi_n e_{n+1}) = \partial_{\varphi_k} P_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) \cdot \cos\varphi_n = \begin{pmatrix} \partial_{\varphi_k} P_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) \cdot \cos\varphi_n \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (k = 1,\dots,n-1)$$

$$\partial_{\varphi_n} P_{n+1}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_n) = \partial_{\varphi_n}(P_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) \cdot \cos\varphi_n) + \partial_{\varphi_n}(r\sin\varphi_n e_{n+1}) = -(P_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) \cdot \sin\varphi_n + r\cos\varphi_n e_{n+1} = \begin{pmatrix} -P_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) \cdot \sin\varphi_n \\ r\cos\varphi_n \end{pmatrix}$$

Behauptung:

$$\det(J_{P_{n+1}}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_n)) = \det(J_{P_n}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})) \cdot r\cos^{n-1}\varphi_n \tag{4}$$

Denn für $\cos\varphi_n = 0$ ist wegen $\partial_{\varphi_1} P_{n+1}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_n) = 0$ schon $\det(J_{P_{n+1}}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_n)) = 0$.
Für $\cos\varphi_n \neq 0$ schließlich addiert man das $r\sin\varphi_n(\cos\varphi_n)^{-1}$-fache der ersten zur letzten Spalte. Da $r\partial_r P_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) = P_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$, geht diese in $r(\cos\varphi_n)^{-1}e_n$ über. Wenn man nach der letzten Spalte dann entwickelt, entsteht in der Restmatrix gerade $\cos\varphi_n J_{P_n}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$.
Also ist $\det(J_{P_{n+1}}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_n)) = r(\cos\varphi_n)^{-1}\det(\cos\varphi_n J_{P_n}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})) = r(\cos\varphi_n)^{n-1}\det(J_{P_n}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}))$. Daher gilt (4). Damit und mit $\det(J_{P_2}(r,\varphi_1)) = r$ folgt rekursiv:
Es gilt $\det(J_{P_n}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})) = |\det(J_{P_n}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}))| = r^{n-1}\prod\limits_{i=2}^{n-1}\cos^{n-1}\varphi_i$.

4 Integralberechnungen

4.1 Die Gammafunktion Γ

Um das Volumen der Kugel auszurechnen, benötigt man die Gammafunktion
$\Gamma : \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}_0) \to \mathbb{R}$ (sie ist auf ganz $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ erklärt, was wir hier aber nicht brauchen).
Einige wichtige Eigenschaften werden hier ohne Beweis angegeben:

- $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(z)$
- $\Gamma(1) = 1 \Rightarrow \Gamma(k) = (k-1)! \quad (k \in \mathbb{N})$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \Rightarrow \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot (n-\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \quad (n \in \mathbb{N})$
- und $\int\limits_0^1 (1-t)^{w-1} \cdot t^{z-1} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$ (siehe z.B. Königsberger, Analysis 2, Kapitel 6.6):

4.2 Inhalt der n-dimensionalen Kugel

Sei κ_n der Inhalt der n-dimensionalen Kugel $D(R)^n$. Sei $A := [0,R]\times[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]^{n-2}$. Dann ist $P_n(A) = D(R)^n$. Nun ist aber P_n auf A nicht injektiv.
Allerdings ist $\{x \in A | \exists y \in A : x \neq y \wedge P_n(x) = P_n(y)\}$ eine Lebesgue-Nullmenge. Also darf man die Substitutionsregel (3) anwenden. Sie liefert

$$\int\limits_{D(R)^n} dx = \int\limits_A |\det(J_{P_n}(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}))| da = \int\limits_A r^{n-1}\prod_{i=2}^{n-1}\cos^{n-1}\varphi_i d(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$$

$$\overset{(2)}{=} \int\limits_0^R r^{n-1}dr \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1 \cdot \prod_{i=2}^{n-1}\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{i-1}\varphi_i d\varphi_i\right) \tag{5}$$

Wir berechnen die Faktoren von (5) einzeln: Zuerst ist $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1 = 2\pi$ und $\int\limits_0^R r^{n-1}dr = \left[\frac{r^n}{n}\right]_0^R = \frac{R^n}{n}$. Außerdem:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\varphi_n d\varphi_n = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\varphi_n}^{\,n-1} d\varphi_n$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_n = \arcsin\xi \\ d\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi \end{pmatrix} = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-\xi^2}^{\,n-2} d\xi = 2\int\limits_0^1 \sqrt{1-\xi^2}^{\,n-2} d\xi$$

$$\begin{pmatrix} \xi = \sqrt{t} \\ d\xi = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt \end{pmatrix} = \int\limits_0^1 (1-t)^{\frac{n-2}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int\limits_0^1 (1-t)^{\frac{n}{2}-1} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

Im zweidimensionalen ist damit $\kappa_2 = \int\limits_0^R r dr \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_1 = \frac{R^2}{2}\cdot 2\pi = \pi R^2$.

In $\mathbb{R}^3$ ist $\kappa_3 = \int\limits_0^R r dr \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_1 \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi_2 d\varphi_2 = \frac{R^3}{3}\cdot 2\pi \cdot [\sin\varphi_2]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{3}R^3$. Nun zum allgemeinen Teil:

$\kappa_n = 2\pi\frac{R^n}{n}\prod\limits_{k=2}^{n-1}\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{k-1}\varphi_k d\varpi_k\right) = 2\pi\frac{R^n}{n}\cdot\sqrt{\pi}^{\,n-2}\cdot\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})}\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)}\cdot\ldots\cdot\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

$$= \begin{cases} \frac{2\sqrt{\pi}^n R^n}{(q-1)!\cdot n}; & n = 2q, q\in\mathbb{N} \\ \frac{2^{q+1}\sqrt{\pi}^{n-1}R^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot n}; & n = 2q+1, q\in\mathbb{N} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi^q R^{2q}}{q!}; & n = 2q, q\in\mathbb{N} \\ \frac{2^{q+1}\sqrt{\pi}^q R^{2q+1}}{1\cdot 3\cdot(2q+1)} & n = 2q+1, q\in\mathbb{N} \end{cases}$$

4.3 Sonstiges

5 Verallgemeinerungen

Selsbstverständlich lassen sich auch viele Variationen und Verallgemeinerungen zu den Polarkoordinaten finden. Zwei hilfreiche Verallgemeinerungen werden hier kurz angedeutet.

5.1 „Ellipsoidkoordinaten“

Seien $a_1, \dots, a_n > 0$ fest. Die Menge $M^n := \{x \in \mathbb{R}^n | \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1\}$ ist ein n-dimensionales Ellipsoid mit den Halbachsen $a_1, \dots, a_n$. Im Spezialfall $a_1 = \dots = a_n := r$ wird M^n zu einer n-dimensionalen Kugel mit Radius r.
Mithilfe einer modifizierten Form von P_n, nämlich

$$Q_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_1 r \cos\varphi_1 \cdot \dots \cdot \cos\varphi_{n-1} \\ a_2 r \sin\varphi_1 \cdot \dots \cdot \cos\varphi_{n-1} \\ a_3 r \sin\varphi_2 \cdot \dots \cdot \cos\varphi_{n-1} \\ \vdots \\ a_n r \sin\varphi_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \cdot P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}),$$

lässt sich der Inhalt von M^n leicht berechnen. Wegen $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ gilt:
$|\det(J_{Q_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}))| = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot |\det(J_{P_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}))|$.

5.2 verallgemeinerte Zylinderkoordinaten

Man kann die Polarkoordinaten und die kartesischen Koordinaten kombinieren. Das bekannteste Beispiel sind die Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$, deren erste zwei Komponenten 2-dimensionale Polarkoordinaten sind und deren dritte Komponente eine kartesische Koordinate ist. Die $(n+k)$-dimensionalen Zylinderkoordinaten verallgemeinern diese. Dabei stehe n wie bisher für die Dimension der Polarkoordinaten und k für die Dimension der Zylinderkoordinaten. Für $k = 0$ ergeben sich die n-dimensionalen Polarkoordinaten.
Wir definieren $Q_{n,k} : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]^{n-2} \times \mathbb{R}^k$ durch

$$Q_{n,k}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) = \begin{pmatrix} P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+k} \end{pmatrix}.$$

Für die Jacobimatrix gilt

$$J_{Q_{n,k}}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) = \begin{pmatrix} J_{P_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix}$$

(wobei $I_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ Einheitsmatrix). Aufgrund der Blockform ist $\det(J_{Q_{n,k}}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, x_{n+1}, \dots, x_{n+k})) = \det(J_{P_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})) \cdot \det I_k = \det(J_{P_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}))$.