n-dimensionale Polarkoordinaten

Proseminar Mathematik - Themen zur Analysis

Wintersemester 2012/2013

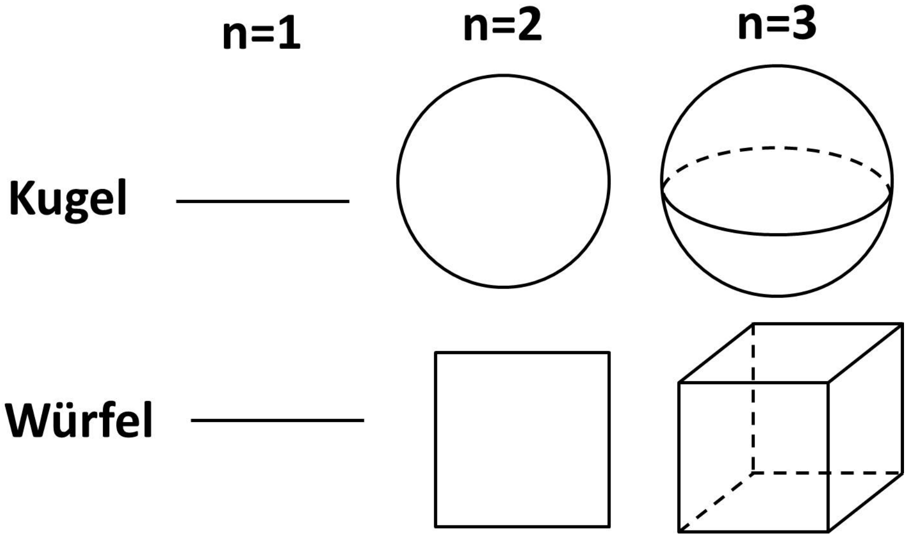
Simon Bischof; 06.12.2012

1 Motivation

Wenn mehrdimensionale Integrale in der Vorlesung eingeführt werden, d.h.

$$\int\limits_M f(x)dx \qquad (x \in \mathbb{R}^n, M \subseteq \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}), \tag{1}$$

ist eine der ersten Funktionen, die integriert wird, $f \equiv 1$. Damit wird der Inhalt (je nach Dimension Fläche, Volumen,...) berechnet.



Für einfache Mengen wie den n-dimensionalen Würfel ist das mithilfe des Satzes von Fubini noch leicht machbar (man bekommt den Inhalt 1). Für eine weitere regelmäßige Menge, die n-dimensionale Kugel $D(R)^n := \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le R^2\}$, ist das ganze ungleich komplizierter. Fubini liefert

$$\int\limits_{D(R)^n} d(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_0^R \int\limits_0^{\sqrt{R^2 - x_1^2}} \int\limits_0^{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}} \ldots dx_3 dx_2 dx_1.$$

Nach Einführung der Polarkoordinaten lässt sich das Integral mithilfe der Substitutionsregel

$$\int\limits_{g(A)} f(v)dv = \int\limits_A f(u) |\det(J_g(u))| du, \qquad g : A \to g(A) \text{injektiv.} \tag{2}$$

viel einfacher berechnen.

2 Grundlegendes

2.1 Vorgehensweise

Die Polarkoordinaten werden als Funktion P_n vom „Polarkoordinatenraum“ in den kartesischen Raum induktiv definiert. Dabei dienen die bekannten Polarkoordinaten im Fall $n = 2$ als Induktionsanfang. Außerdem werde ich immer noch den Fall $n = 3$ explizit angeben, bei dem sich die ebenfalls bekannten Kugelkoordinaten ergeben.
Darauf werden einige Eigenschaften der Funktion P_n bewiesen, insbesondere wird auch die Funktionaldeterminante berechnet, die für die Substitutionsregel (2) wichtig ist.
Bemerkung: n-dimensionale Polarkoordinaten lassen sich auch auf eine leicht andere Art

und Weise definieren, so dass sie auch im Fall $n = 1$ definiert sind. Außerdem ergeben sich dabei noch andere Vereinfachungen (Gleichbehandlung aller Winkelvariablen). Nachteil ist, dass sich dann für $n = 2$ und $n = 3$ nicht die bekannten Polar- bzw. Kugelkoordinaten ergeben.

2.2 einige Definitionen

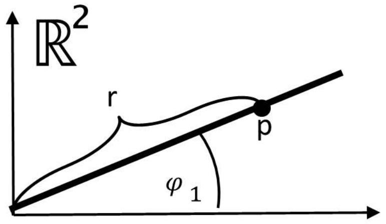
- Es sei im Folgenden stets $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, denn für $n = 1$ sind die Polarkoordinaten nicht definiert.
- e_n bezeichne den n-ten kanonischen Einheitsvektor. Soweit nichts anderes gesagt ist, sei $e_n \in \mathbb{R}^n$, also $e_n = (0, \ldots, 0, 1)^T$.
- Als Skalarprodukt werde immer das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ verwendet, $|| \bullet ||$ sei im Folgenden die euklidische Norm.
- Für Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ bezeichne $|A|$ das Volumen von A gemäß (1) mit $f \equiv 1$.

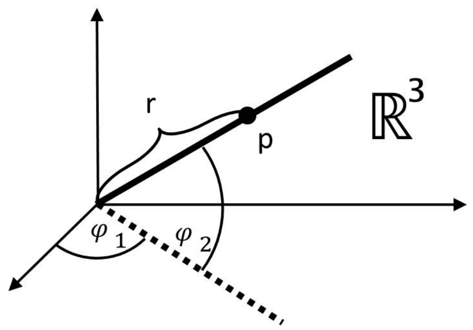
3 P_n: Definition und Eigenschaften

3.1 Definition

$P_2 : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ wird direkt definiert durch $P_2(r, \varphi_1) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi_1 \\ r\sin\varphi_1 \end{pmatrix}$.
Nun wird für $n > 2$ die Funktion $P_n : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]^{n-2} \to \mathbb{R}^n$ induktiv definiert:

$$P_n(r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) = \begin{pmatrix} P_{n-1}(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}) \cdot \cos\varphi_{n-1} \\ r \cdot \sin\varphi_{n-1} \end{pmatrix}$$
$$= \cos\varphi_{n-1} \begin{pmatrix} P_{n-1}(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}) \\ 0 \end{pmatrix} + r\sin\varphi_{n-1} e_n$$





Ausgeschrieben ergibt sich:

$$P_n(r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cdot \ldots \cdot \cos\varphi_{n-1} \\ r\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \cdot \ldots \cdot \cos\varphi_{n-1} \\ r\sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \cdot \ldots \cdot \cos\varphi_{n-1} \\ r\sin\varphi_3 \cos\varphi_4 \cdot \ldots \cdot \cos\varphi_{n-1} \\ \vdots \\ r\sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1} \\ r\sin\varphi_{n-1} \end{pmatrix}$$

Im Falle $n = 3$ ergeben sich daher die bekannten Kugelkoordinaten

$$P_3(r, \varphi_1, \varphi_2) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \\ r\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \\ r\sin\varphi_2 \end{pmatrix}$$

3.2 $||P_n(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1})||$

Im Falle $n = 2$ ergibt sich durch direktes Ausrechnen:
$||P_2(r, \varphi_1)||^2 = || \begin{pmatrix} r\cos\varphi_1 \\ r\sin\varphi_1 \end{pmatrix} ||^2 = r^2\cos^2\varphi_1 + r^2\sin^2\varphi_1 = r^2 \cdot (\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1) = r^2.$
Wegen $r \geq 0$ gilt also $||P_2(r, \varphi_1)|| = r$.

Ebenso ist $(n = 3)$: $||P_3(r, \varphi_1, \varphi_2)||^2 = || \begin{pmatrix} r\cos\varphi_1\cos\varphi_2 \\ r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ r\sin\varphi_2 \end{pmatrix} ||^2 = r^2\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2 + r^2\sin^2\varphi_1\cos^2\varphi_2 + r^2\sin^2\varphi_2 = r^2\cos^2\varphi_2 + r^2\sin^2\varphi_2 = r^2$, also wieder $||P_3(r, \varphi_1, \varphi_2)|| = r$.

Der Beweis, dass tatsächlich $||P_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})|| = r$ für alle n gilt, erfolgt mit vollständiger Induktion:
Induktionsanfang: Für $n = 2$ wurde dies oben schon gezeigt. ✓
Induktionsvoraussetzung: Es sei $||P_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})|| = r$.
Induktionsschritt: Es ist leicht einzusehen, dass $(P_n(r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), 0) \cdot (r\sin\varphi_{n-1}e_n) = 0$. Also gilt mit dem Satz des Pythagoras:
$||P_{n+1}(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)||^2 = \cos^2\varphi_n \cdot ||P_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})||^2 + \sin^2\varphi_n \cdot ||r \cdot e_n||^2 = r^2\cos^2\varphi_n + r^2\sin^2\varphi_n = r^2$ ✓

3.3 Funktionalmatrix und -determinante

Zuerst untersuchen wir die 2- und 3-dimensionalen Polarkoordinaten. Für P_2 ist, wie direkt nachzurechnen,
$J_{P_2}(r, \varphi_1) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -r\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & r\cos\varphi_1 \end{pmatrix}$. Die Fuktionaldeterminante ist

$$\det(J_{P_2}(r, \varphi_1)) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -r\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & r\cos\varphi_1 \end{pmatrix} = r\cos^2\varphi_1 + r\sin^2\varphi_1 = r(\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1) = r.$$

Im Fall $n = 3$ ist
$J_{P_3}(r, \varphi_1, \varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1\cos\varphi_2 & -r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 & -r\cos\varphi_1\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_1\cos\varphi_2 & r\cos\varphi_1\cos\varphi_2 & -r\sin\varphi_1\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & 0 & r\cos\varphi_2 \end{pmatrix}$ und mit Sarrus
$$\det(J_{P_3}(r, \varphi_1, \varphi_2)) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi_1\cos\varphi_2 & -r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 & -r\cos\varphi_1\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_1\cos\varphi_2 & r\cos\varphi_1\cos\varphi_2 & -r\sin\varphi_1\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & 0 & r\cos\varphi_2 \end{pmatrix}$$
$= r^2\cos^2\varphi_1\cos^3\varphi_2 + r^2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2\cos\varphi_2 + r^2\sin^2\varphi_1\cos^3\varphi_2 + r^2\cos^2\varphi_1\sin^2\varphi_2\cos\varphi_2$
$= r^2\cos\varphi_2(\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_1\cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_1\sin^2\varphi_2)$
$= r^2\cos\varphi_2(\cos^2\varphi_1(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2) + \sin^2\varphi_1(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2))$
$= r^2\cos\varphi_2(\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1) = r^2\cos\varphi_2$.
Wir berechnen nun für allgemeines n die Spalten der Funktionalmatrix separat.
Zur Vereinfachung der Rechnung setzen wir $\bar{P}_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = \begin{pmatrix} P_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \cos\varphi_n$.
Da $\cos\varphi_n$ und $\sin\varphi_n$ nicht von r oder φ_k $(k = 1, \ldots, n-1)$ abhängen und $P_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ nicht von φ_n, gilt:

$\partial_r P_{n+1}(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \partial_r(\bar{P}_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \cdot \cos\varphi_n) + \partial_r(r\sin\varphi_n e_{n+1}) = \partial_r\bar{P}_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \cdot \cos\varphi_n + \sin\varphi_n e_{n+1} = \begin{pmatrix} \partial_r P_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \cdot \cos\varphi_n \\ \sin\varphi_n \end{pmatrix}$

$\partial_{\varphi_k} P_{n+1}(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \partial_{\varphi_k}(\bar{P}_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \cdot \cos\varphi_n) + \partial_{\varphi_k}(r\sin\varphi_n e_{n+1}) =$

$$\partial_{\varphi_k}\bar{P}_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})\cdot\cos\varphi_n = \begin{pmatrix}\partial_{\varphi_k}P_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})\cdot\cos\varphi_n\\ 0\end{pmatrix} \qquad (k=1,\dots,n-1)$$

$\partial_{\varphi_n}P_{n+1}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_n) = \partial_{\varphi_n}(\bar{P}_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})\cdot\cos\varphi_n) + \partial_{\varphi_n}(r\sin\varphi_n e_{n+1}) = -(\bar{P}_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})\cdot\sin\varphi_n + r\cos\varphi_n e_{n+1} = \begin{pmatrix}-P_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})\cdot\sin\varphi_n\\ r\cos\varphi_n\end{pmatrix}$

Behauptung:

$$\det(J_{P_{n+1}}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_n)) = \det(J_{P_n}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}))\cdot r\cos^{n-1}\varphi_n \tag{3}$$

Für $\cos\varphi_n = 0$ ist wegen $\partial_{\varphi_1}P_{n+1}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_n) = 0$ schon $\det(J_{P_{n+1}}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_n)) = 0$.
Für $\cos\varphi_n \neq 0$ schließlich addiert man das $r\sin\varphi_n(\cos\varphi_n)^{-1}$-fache der ersten zur letzten Spalte. Da $r\partial_r P_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) = P_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$, geht diese in $r(\cos\varphi_n)^{-1}e_n$ über. Wenn man nach der letzten Spalte dann entwickelt, entsteht in der Restmatrix gerade $\cos\varphi_n J_{P_n}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$.
Also ist $\det(J_{P_{n+1}}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_n)) = r(\cos\varphi_n)^{-1}\det(\cos\varphi_n J_{P_n}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})) = r(\cos\varphi_n)^{n-1}\det(J_{P_n}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}))$. Daher gilt (3). Damit und mit $\det(J_{P_2}(r,\varphi_1)) = r$ folgt rekursiv:
Es gilt $\det(J_{P_n}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})) = |\det(J_{P_n}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}))| = r^{n-1}\prod_{i=2}^{n-1}\cos^{i-1}\varphi_i$.

4 Integralberechnungen

4.1 Die Gammafunktion Γ

Um das Volumen der Kugel auszurechnen, benötigt man die Gammafunktion
$\Gamma:\mathbb{R}\setminus(-\mathbb{N}_0)\to\mathbb{R}$ (sie ist auf ganz $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N}_0)$ erklärt, was wir hier aber nicht brauchen).
Einige wichtige Eigenschaften werden hier ohne Beweis angegeben:

- $\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$
- $\Gamma(1) = 1 \Rightarrow \Gamma(k) = (k-1)! \quad (k\in\mathbb{N})$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \Rightarrow \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot(n-\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n\sqrt{\pi}\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1) \quad (n\in\mathbb{N})$
- und $\int_0^1 (1-t)^{w-1}\cdot t^{z-1}dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$ (siehe z.B. Königsberger, Analysis 2, Kapitel 6.6)

4.2 Inhalt der n-dimensionalen Kugel

Sei $\kappa_n := |D(R)^n|$, mit $R>0$ fest. Sei $A := [0,R]\times[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]^{n-2}$. Dann ist $P_n(A) = D(R)^n$. Nun ist aber P_n auf A nicht injektiv.
Allerdings ist $\{x\in A|\exists y\in A: x\neq y\wedge P_n(x) = P_n(y)\}$ eine Lebesgue-Nullmenge. Also darf man die Substitutionsregel (2) anwenden. Sie liefert

$$\int_{D(R)^n} dx = \int_A |\det(J_{P_n}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}))| d(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) = \int_A r^{n-1}\prod_{i=2}^{n-1}\cos^{n-1}\varphi_i d(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$$

$$\overset{Fubini}{=} \int_0^R r^{n-1}dr\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi_1\cdot\prod_{i=2}^{n-1}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{i-1}\varphi_i d\varphi_i\right) \tag{4}$$

Wir berechnen die Faktoren von (4) einzeln: Zuerst ist $\int_0^{2\pi} d\varphi_1 = 2\pi$ und $\int_0^R r^{n-1}dr = \left[\frac{r^n}{n}\right]_0^R = \frac{R^n}{n}$. Außerdem:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\varphi_n d\varphi_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\varphi_n}^{\,n-1} d\varphi_n$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi_n &= \arcsin\xi \\ d\varphi_n &= \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi\end{aligned}\right| = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-\xi^2}^{\,n-2} d\xi = 2\int_0^1 \sqrt{1-\xi^2}^{\,n-2} d\xi$$

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \sqrt{t} \\ d\xi &= \frac{1}{2\sqrt{t}}dt\end{aligned}\right| = \int_0^1 (1-t)^{\frac{n-2}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 (1-t)^{\frac{n}{2}-1} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

Im zweidimensionalen ist damit $\kappa_2 = \int_0^R r dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_1 = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi = \pi R^2$.

In $\mathbb{R}^3$ ist $\kappa_3 = \int_0^R r dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_1 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi_2 d\varphi_2 = \frac{R^3}{3} \cdot 2\pi \cdot [\sin\varphi_2]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{3}R^3$.

Nun zum allgemeinen Teil:

$$\kappa_n = 2\pi\frac{R^n}{n}\prod_{k=2}^{n-1}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{k-1}\varphi_k d\varphi_k\right) = 2\pi\frac{R^n}{n} \cdot \sqrt{\pi}^{\,n-2} \cdot \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)} \cdot \ldots \cdot \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$= \begin{cases} \frac{2\sqrt{\pi}^n R^n}{(q-1)!\cdot n}; & n = 2q, q \in \mathbb{N} \\ \frac{2^{q+1}\sqrt{\pi}^{n-1} R^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot n}; & n = 2q+1, q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi^q R^{2q}}{q!}; & n = 2q, q \in \mathbb{N} \\ \frac{2^{q+1}\sqrt{\pi}^q R^{2q+1}}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2q+1)} & n = 2q+1, q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

4.3 Sonstiges

Nun können wir auch andere Funktionen integrieren. Beispielsweise sei $f(x) = x_n\sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}$. Dann ist $\int_{D(R)^n} f(x)dx = \int_A r^2 \sin\varphi_{n-1} r^{n-1} \prod_{i=2}^{n-1} \cos^{n-1}\varphi_i d(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$.
Dies lässt sich dann wie vorher ausrechnen.

5 Verallgemeinerungen

Selsbstverständlich lassen sich auch viele Variationen und Verallgemeinerungen zu den Polarkoordinaten finden. Zwei hilfreiche Verallgemeinerungen werden hier kurz angedeutet.

5.1 „Ellipsoidkoordinaten“

Seien $a_1, \ldots, a_n > 0$ fest. Die Menge $M^n := \{x \in \mathbb{R}^n | \frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1\}$ ist ein n-dimensionales Ellipsoid mit den Halbachsen $a_1, \ldots, a_n$. Im Spezialfall $a_1 = \ldots = a_n := r$ wird M^n zu einer n-dimensionalen Kugel mit Radius r.
Mithilfe einer modifizierten Form von P_n, nämlich

$$Q_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_1 r\cos\varphi_1\cdot\ldots\cdot\cos\varphi_{n-1}\\ a_2 r\sin\varphi_1\cdot\ldots\cdot\cos\varphi_{n-1}\\ a_3 r\sin\varphi_2\cdot\ldots\cdot\cos\varphi_{n-1}\\ \vdots\\ a_n r\sin\varphi_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{pmatrix}\cdot P_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}),$$

lässt sich der Inhalt von M^n leicht berechnen. Es ist dann für $A := [0,1]\times[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]^{n-2}$: $Q_n(A) = M^n$. Wegen $\det(BC) = \det(B)\det(C)$ gilt:
$|\det(J_{Q_n}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}))| = a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\cdot|\det(J_{P_n}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}))|$.
Damit ist auch $|M^n| = \int\limits_{M^n} dx = \int\limits_A |\det(J_{Q_n}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}))| d(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) = a_1a_2\dots a_n\int\limits_A |\det(J_{P_n}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}))| d(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) = a_1a_2\dots a_n|D(1)^n|$.

5.2 verallgemeinerte Zylinderkoordinaten

Man kann die Polarkoordinaten und die kartesischen Koordinaten kombinieren. Das bekannteste Beispiel sind die Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$, deren erste zwei Komponenten 2-dimensionale Polarkoordinaten sind und deren dritte Komponente eine kartesische Koordinate ist. Die $(n+k)$-dimensionalen Zylinderkoordinaten verallgemeinern diese. Dabei stehe n wie bisher für die Dimension der Polarkoordinaten und k für die Dimension der Zylinderkoordinaten. Für $k=0$ ergeben sich die n-dimensionalen Polarkoordinaten.
Wir definieren $Q_{n,k} : [0,\infty)\times[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]^{n-2}\times\mathbb{R}^k$ durch

$$Q_{n,k}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1},x_1,\dots,x_k) = \begin{pmatrix} P_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})\\ \\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ x_1\\ \vdots\\ x_k\end{pmatrix}.$$

Für die Jacobimatrix gilt

$$J_{Q_{n,k}}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1},x_1,\dots,x_k) = \begin{pmatrix} J_{P_n}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) & 0\\ 0 & I_k\end{pmatrix}$$

(wobei $I_k\in\mathbb{R}^{k\times k}$ Einheitsmatrix). Aufgrund der Blockform ist
$\det(J_{Q_{n,k}}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1},x_1,\dots,x_k)) = \det(J_{P_n}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}))\cdot\det I_k = \det(J_{P_n}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}))$.
Seien $R,l_1,l_2,\dots,l_k > 0$, $A := D(R)^n\times[0,l_1]\times[0,l_2]\times\ldots\times[0,l_k]$ und $B := [0,\infty)\times[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]^{n-2}\times[0,l_1]\times[0,l_2]\times\ldots\times[0,l_k]$. Dann ist $Q_{n,k}(B) = A$ und somit

$$|A| = \int\limits_A d(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1},x_1,\dots,x_k)$$

$$= \int\limits_B |\det(J_{Q_{n,k}}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1},x_1,\dots,x_k))| d(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1},x_1,\dots,x_k)$$

$$= \int\limits_B |\det(J_{P_n}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}))| d(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1},x_1,\dots,x_k) = l_1l_2\dots l_k\cdot|D(R)^n|.$$