n-dimensionale Polarkoordinaten

Proseminar Mathematik - Themen zur Analysis

Wintersemester 2012/2013

Simon Bischof; 29.11.2012

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Motivation

Wenn mehrdimensionale Integrale in der Vorlesung eingeführt werden, d.h.

$$\int\limits_M f(x)dx \qquad (x \in \mathbb{R}^n, M \subseteq \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}),$$

ist eine der ersten Funktionen, die integriert wird, $f \equiv 1$. Damit wird der Inhalt (je nach Dimension Fläche, Volumen,$\cdots$) berechnet.
Für einfache Flächen wie den n-dimensionalen Würfel ist mithilfe des Satzes von Fubini noch leicht machbar (man bekommt den Inhalt 1). Für eine weitere regelmäßige Fläche, die n-dimensionale Kugel $D^n := \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \cdots + x\_n^2 \leq 1\}$, ist das ganze ungleich komplizierter. Fubini liefert

$$.$$

Nach Einführung der Polarkoordinaten lässt sich das Integral mithilfe der Substitutionsregel

viel einfacher berechnen.

Kapitel 2

Vorgehensweise

Die Polarkoordinaten werden als Funktion P_n vom „Polarkoordinatenraum“ in den kartesischen Raum induktiv definiert. Dabei dienen die bekannten Polarkoordinaten im Fall $n = 2$ als Induktionsanfang. Außerdem werde ich immer noch den Fall $n = 3$ explizit angeben, bei dem sich die bekannten Kugelkoordinaten ergeben.
Darauf werden einige Eigenschaften der Funktion P_n bewiesen, insbesondere wird auch die Funktionaldeterminante berechnet, die für die Substitutionsregel wichtig ist.

Kapitel 3

P_n: Definition und Eigenschaften

1 Definition

2 $||P_n(r, \phi_1, \cdots, \phi_{n-1})||$

3 Funktionalmatrix und -determinante

Kapitel 4

Integralberechnungen

1 Inhalt der n-dimensionalen Kugel

2 Sonstiges

Kapitel 5

Verallgemeinerungen

1 „Ellipsoidkoordinaten“

2 verallgemeinerte Zylinderkoordinaten