

# **$n$ -dimensionale Polarkoordinaten**

**Proseminar Mathematik - Themen zur Analysis**

**Wintersemester 2012/2013**

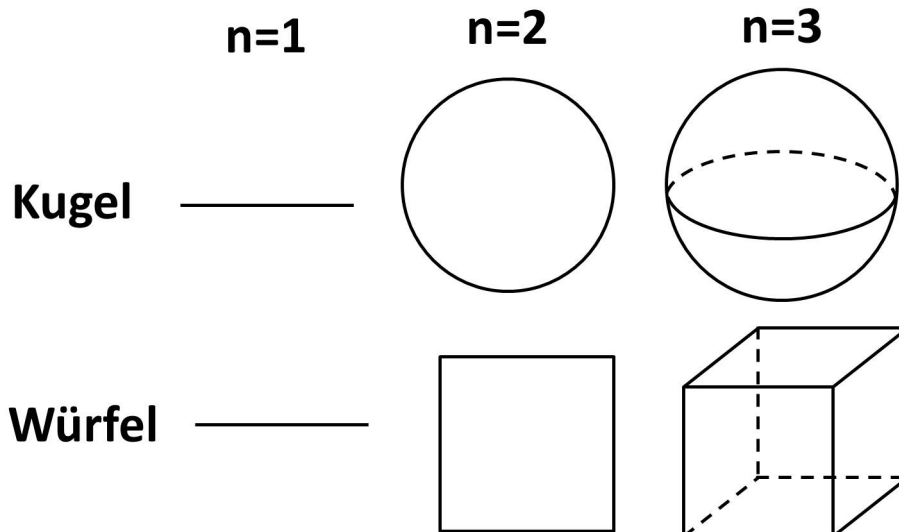
Simon Bischof; 06.12.2012

# 1 Motivation

Wenn mehrdimensionale Integrale in der Vorlesung eingeführt werden, d.h.

$$\int_M f(x) dx \quad (x \in \mathbb{R}^n, M \subseteq \mathbb{R}^n, f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}), \quad (1)$$

ist eine der ersten Funktionen, die integriert wird,  $f \equiv 1$ . Damit wird der Inhalt (je nach Dimension Fläche, Volumen,...) berechnet.



Für einfache Mengen wie den  $n$ -dimensionalen Würfel ist das mithilfe des Satzes von Fubini noch leicht machbar (man bekommt den Inhalt 1). Für eine weitere regelmäßige Menge, die  $n$ -dimensionale Kugel  $D(R)^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2\}$ , ist das ganze ungleich komplizierter. Fubini liefert

$$\int_{D(R)^n} d(x_1, \dots, x_n) = \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2 - x_1^2}} \int_0^{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}} \dots dx_3 dx_2 dx_1.$$

Nach Einführung der Polarkoordinaten lässt sich das Integral mithilfe der Substitutionsregel

$$\int_{g(A)} f(v) dv = \int_A f(u) |\det(J_g(u))| du, \quad g: A \rightarrow g(A) \text{ injektiv.} \quad (2)$$

viel einfacher berechnen.

## 2 Grundlegendes

### 2.1 Vorgehensweise

Die Polarkoordinaten werden als Funktion  $P_n$  vom „Polarkoordinatenraum“ in den kartesischen Raum induktiv definiert. Dabei dienen die bekannten Polarkoordinaten im Fall  $n = 2$  als Induktionsanfang. Außerdem werde ich immer noch den Fall  $n = 3$  explizit angeben, bei dem sich die ebenfalls bekannten Kugelkoordinaten ergeben.

Darauf werden einige Eigenschaften der Funktion  $P_n$  bewiesen, insbesondere wird auch die Funktionaldeterminante berechnet, die für die Substitutionsregel (2) wichtig ist.

Bemerkung:  $n$ -dimensionale Polarkoordinaten lassen sich auch auf eine leicht andere Art

und Weise definieren, so dass sie auch im Fall  $n = 1$  definiert sind. Außerdem ergeben sich dabei noch andere Vereinfachungen (Gleichbehandlung aller Winkelvariablen). Nachteil ist, dass sich dann für  $n = 2$  und  $n = 3$  nicht die bekannten Polar- bzw. Kugelkoordinaten ergeben.

## 2.2 einige Definitionen

- Es sei im Folgenden stets  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , denn für  $n = 1$  sind die Polarkoordinaten nicht definiert.
- $e_n$  bezeichne den  $n$ -ten kanonischen Einheitsvektor. Soweit nichts anderes gesagt ist, sei  $e_n \in \mathbb{R}^n$ , also  $e_n = (0, \dots, 0, 1)^T$ .
- Als Skalarprodukt werde immer das Standardskalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$  verwendet,  $\|\bullet\|$  sei im Folgenden die euklidische Norm.
- Für Mengen  $A \subset \mathbb{R}^n$  bezeichne  $|A|$  das Volumen von  $A$  gemäß (1) mit  $f \equiv 1$ .

## 3 $P_n$ : Definition und Eigenschaften

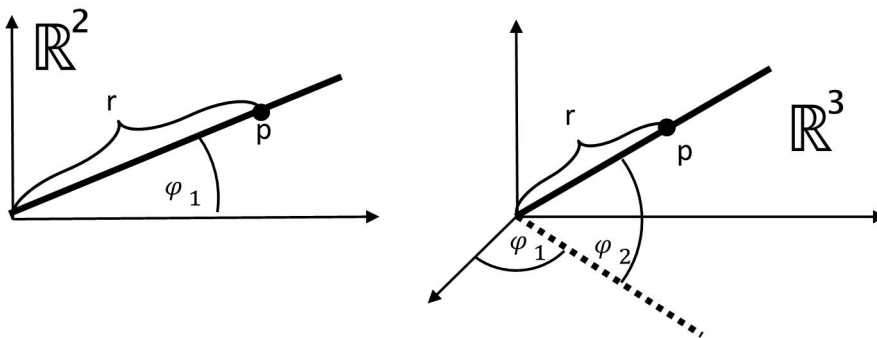
### 3.1 Definition

$P_2 : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  wird direkt definiert durch  $P_2(r, \varphi_1) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi_1 \\ r \sin \varphi_1 \end{pmatrix}$ .

Nun wird für  $n > 2$  die Funktion  $P_n : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^n$  induktiv definiert:

$$P_n(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) = \begin{pmatrix} P_{n-1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) \cdot \cos \varphi_{n-1} \\ r \cdot \sin \varphi_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \cos \varphi_{n-1} \begin{pmatrix} P_{n-1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) \\ 0 \end{pmatrix} + r \sin \varphi_{n-1} e_n$$



Ausgeschrieben ergibt sich:

$$P_n(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cdot \dots \cdot \cos \varphi_{n-1} \\ r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cdot \dots \cdot \cos \varphi_{n-1} \\ r \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \cdot \dots \cdot \cos \varphi_{n-1} \\ r \sin \varphi_3 \cos \varphi_4 \cdot \dots \cdot \cos \varphi_{n-1} \\ \vdots \\ r \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1} \\ r \sin \varphi_{n-1} \end{pmatrix}$$

Im Falle  $n = 3$  ergeben sich daher die bekannten Kugelkoordinaten

$$P_3(r, \varphi_1, \varphi_2) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ r \sin \varphi_2 \end{pmatrix}$$

### 3.2 $\|P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})\|$

Im Falle  $n = 2$  ergibt sich durch direktes Ausrechnen:

$$\|P_2(r, \varphi_1)\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} r \cos \varphi_1 \\ r \sin \varphi_1 \end{pmatrix} \right\|^2 = r^2 \cos^2 \varphi_1 + r^2 \sin^2 \varphi_1 = r^2 \cdot (\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1) = r^2.$$

Wegen  $r \geq 0$  gilt also  $\|P_2(r, \varphi_1)\| = r$ .

$$\text{Ebenso ist } (n = 3): \|P_3(r, \varphi_1, \varphi_2)\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ r \sin \varphi_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = r^2 \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 + r^2 \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 + r^2 \sin^2 \varphi_2 = r^2 \cos^2 \varphi_2 + r^2 \sin^2 \varphi_2 = r^2, \text{ also wieder } \|P_3(r, \varphi_1, \varphi_2)\| = r.$$

Der Beweis, dass tatsächlich  $\|P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})\| = r$  für alle  $n$  gilt, erfolgt mit vollständiger Induktion:

**Induktionsanfang:** Für  $n = 2$  wurde dies oben schon gezeigt. ✓

**Induktionsvoraussetzung:** Es sei  $\|P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})\| = r$ .

**Induktionsschritt:** Es ist leicht einzusehen, dass  $(P_n(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}), 0) \cdot e_{n+1} = 0$ .

Also gilt mit dem Satz des Pythagoras:

$$\|P_{n+1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n)\|^2 = \cos^2 \varphi_n \cdot \|P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})\|^2 + \sin^2 \varphi_n \cdot \|r \cdot e_{n+1}\|^2 = r^2 \cos^2 \varphi_n + r^2 \sin^2 \varphi_n = r^2 \quad \checkmark$$

### 3.3 Funktionalmatrix und -determinante

Zuerst untersuchen wir die 2- und 3-dimensionalen Polarkoordinaten. Für  $P_2$  ist, wie direkt nachzurechnen,

$$J_{P_2}(r, \varphi_1) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -r \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & r \cos \varphi_1 \end{pmatrix}. \text{ Die Funktionaldeterminante ist}$$

$$\det(J_{P_2}(r, \varphi_1)) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -r \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & r \cos \varphi_1 \end{pmatrix} = r \cos^2 \varphi_1 + r \sin^2 \varphi_1 = r(\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1) = r.$$

Im Fall  $n = 3$  ist

$$J_{P_3}(r, \varphi_1, \varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & -r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & -r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & -r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & 0 & r \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \text{ und mit Sarrus}$$

$$\begin{aligned} \det(J_{P_3}(r, \varphi_1, \varphi_2)) &= \det \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & -r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & -r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & -r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & 0 & r \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \\ &= r^2 \cos^2 \varphi_1 \cos^3 \varphi_2 + r^2 \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 \cos \varphi_2 + r^2 \sin^2 \varphi_1 \cos^3 \varphi_2 + r^2 \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 \cos \varphi_2 \\ &= r^2 \cos \varphi_2 (\cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2) \\ &= r^2 \cos \varphi_2 (\cos^2 \varphi_1 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2) + \sin^2 \varphi_1 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)) \\ &= r^2 \cos \varphi_2 (\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1) = r^2 \cos \varphi_2. \end{aligned}$$

Wir berechnen nun für allgemeines  $n$  die Spalten der Funktionalmatrix separat.

$$\text{Zur Vereinfachung der Rechnung setzen wir } \bar{P}_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = \begin{pmatrix} P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\cos \varphi_n$ .

Da  $\cos \varphi_n$  und  $\sin \varphi_n$  nicht von  $r$  oder  $\varphi_k$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ) abhängen und  $P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$  nicht von  $\varphi_n$ , gilt:

$$\begin{aligned} \partial_r P_{n+1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n) &= \partial_r (\bar{P}_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cdot \cos \varphi_n) + \partial_r (r \sin \varphi_n e_{n+1}) = \\ \partial_r \bar{P}_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cdot \cos \varphi_n + \sin \varphi_n e_{n+1} &= \begin{pmatrix} \partial_r P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cdot \cos \varphi_n \\ \sin \varphi_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\partial_{\varphi_k} P_{n+1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = \partial_{\varphi_k} (\bar{P}_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cdot \cos \varphi_n) + \partial_{\varphi_k} (r \sin \varphi_n e_{n+1}) =$$

$$\partial_{\varphi_k} \bar{P}_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cdot \cos \varphi_n = \begin{pmatrix} \partial_{\varphi_k} P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cdot \cos \varphi_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, \dots, n-1)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\varphi_n} P_{n+1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n) &= \partial_{\varphi_n} (\bar{P}_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cdot \cos \varphi_n) + \partial_{\varphi_n} (r \sin \varphi_n e_{n+1}) = \\ &= -(\bar{P}_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cdot \sin \varphi_n + r \cos \varphi_n e_{n+1}) = \begin{pmatrix} -P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cdot \sin \varphi_n \\ r \cos \varphi_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Behauptung:

$$\det(J_{P_{n+1}}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n)) = \det(J_{P_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})) \cdot r \cos^{n-1} \varphi_n \quad (3)$$

Für  $\cos \varphi_n = 0$  ist wegen  $\partial_{\varphi_1} P_{n+1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = 0$  schon  $\det(J_{P_{n+1}}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n)) = 0$ . Für  $\cos \varphi_n \neq 0$  schließlich addiert man das  $r \sin \varphi_n (\cos \varphi_n)^{-1}$ -fache der ersten zur letzten Spalte. Da  $r \partial_r P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ , geht diese in  $r(\cos \varphi_n)^{-1} e_n$  über. Wenn man nach der letzten Spalte dann entwickelt, entsteht in der Restmatrix gerade  $\cos \varphi_n J_{P_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ .

Also ist  $\det(J_{P_{n+1}}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n)) = r(\cos \varphi_n)^{-1} \det(\cos \varphi_n J_{P_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})) = r(\cos \varphi_n)^{n-1} \det(J_{P_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}))$ . Daher gilt (3). Damit und mit  $\det(J_{P_2}(r, \varphi_1)) = r$  folgt rekursiv:

$$\text{Es gilt } \det(J_{P_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})) = |\det(J_{P_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}))| = r^{n-1} \prod_{i=2}^{n-1} \cos^{i-1} \varphi_i.$$

## 4 Integralberechnungen

### 4.1 Die Gammafunktion $\Gamma$

Um das Volumen der Kugel auszurechnen, benötigt man die Gammafunktion  $\Gamma : \underbrace{\mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}_0)}_{:=B} \rightarrow \mathbb{R}$  (sie ist auf ganz  $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$  erklärt, was wir hier aber nicht brauchen).

Einige wichtige Eigenschaften werden hier ohne Beweis angegeben:

- $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad (x \in B)$
- $\Gamma(1) = 1 \Rightarrow \Gamma(k) = (k-1)! \quad (k \in \mathbb{N})$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \Rightarrow \Gamma(n + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot (n - \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^n \sqrt{\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \quad (n \in \mathbb{N})$
- und  $\int_0^1 (1-t)^{w-1} \cdot t^{z-1} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (z, w \in B)$   
(siehe z.B. Königsberger, Analysis 2, Kapitel 6.6)

### 4.2 Inhalt der $n$ -dimensionalen Kugel

Sei  $\kappa_n := |D(R)^n|$ , mit  $R > 0$  fest. Sei  $A := [0, R] \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]^{n-2}$ . Dann ist  $P_n(A) = D(R)^n$ . Nun ist aber  $P_n$  auf  $A$  nicht injektiv.

Allerdings ist  $\{x \in A | \exists y \in A : x \neq y \wedge P_n(x) = P_n(y)\}$  eine Lebesgue-Nullmenge. Also darf man die Substitutionsregel (2) anwenden. Sie liefert

$$\begin{aligned} \int_{D(R)^n} dx &= \int_A |\det(J_{P_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}))| d(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = \int_A r^{n-1} \prod_{i=2}^{n-1} \cos^{i-1} \varphi_i d(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^R r^{n-1} dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \cdot \prod_{i=2}^{n-1} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{i-1} \varphi_i d\varphi_i \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Wir berechnen die Faktoren von (4) einzeln: Zuerst ist  $\int_0^{2\pi} d\varphi_1 = 2\pi$  und  $\int_0^R r^{n-1} dr = \left[ \frac{r^n}{n} \right]_0^R = \frac{R^n}{n}$ . Außerdem:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} \varphi_n d\varphi_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_n}^{n-1} d\varphi_n$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_n = \arcsin \xi \\ d\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \end{array} \right| = \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2}^{n-2} d\xi = 2 \int_0^1 \sqrt{1-\xi^2}^{n-2} d\xi$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \sqrt{t} \\ d\xi = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \end{array} \right| = \int_0^1 (1-t)^{\frac{n-2}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 (1-t)^{\frac{n}{2}-1} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

Im zweidimensionalen ist damit  $\kappa_2 = \int_0^R r dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_1 = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi = \pi R^2$ .

In  $\mathbb{R}^3$  ist  $\kappa_3 = \int_0^R r dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_1 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_2 d\varphi_2 = \frac{R^3}{3} \cdot 2\pi \cdot [\sin \varphi_2]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{3} R^3$ .

Nun zum allgemeinen Teil:

$$\begin{aligned} \kappa_n &= 2\pi \frac{R^n}{n} \prod_{k=2}^{n-1} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{k-1} \varphi_k d\varphi_k \right) = 2\pi \frac{R^n}{n} \cdot \sqrt{\pi}^{n-2} \cdot \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)} \cdot \dots \cdot \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \\ &= \begin{cases} \frac{2\sqrt{\pi}^n R^n}{(q-1)! \cdot n}; & n = 2q, q \in \mathbb{N} \\ \frac{2^{q+1} \sqrt{\pi}^{n-1} R^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot n}; & n = 2q+1, q \in \mathbb{N} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\pi^q R^{2q}}{q!}; & n = 2q, q \in \mathbb{N} \\ \frac{2^{q+1} \sqrt{\pi}^q R^{2q+1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2q+1)}; & n = 2q+1, q \in \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned}$$

### 4.3 Sonstiges

Nun können wir auch andere Funktionen integrieren. Beispielsweise sei  $f(x) = x_n \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ . Dann ist  $\int_{D(R)^n} f(x) dx = \int_A r^2 \sin \varphi_{n-1} r^{n-1} \prod_{i=2}^{n-1} \cos^{n-1} \varphi_i d(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ .

Dies lässt sich dann wie vorher ausrechnen.

## 5 Verallgemeinerungen

Selbstverständlich lassen sich auch viele Variationen und Verallgemeinerungen zu den Polarkoordinaten finden. Zwei hilfreiche Verallgemeinerungen werden hier kurz angedeutet.

### 5.1 „Ellipsoidkoordinaten“

Seien  $a_1, \dots, a_n > 0$  fest. Die Menge  $M^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1\}$  ist ein  $n$ -dimensionales Ellipsoid mit den Halbachsen  $a_1, \dots, a_n$ . Im Spezialfall  $a_1 = \dots = a_n := r$  wird  $M^n$  zu einer  $n$ -dimensionalen Kugel mit Radius  $r$ .

Mithilfe einer modifizierten Form von  $P_n$ , nämlich

$$Q_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_1 r \cos \varphi_1 \cdot \dots \cdot \cos \varphi_{n-1} \\ a_2 r \sin \varphi_1 \cdot \dots \cdot \cos \varphi_{n-1} \\ a_3 r \sin \varphi_2 \cdot \dots \cdot \cos \varphi_{n-1} \\ \vdots \\ a_n r \sin \varphi_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \cdot P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}),$$

lässt sich der Inhalt von  $M^n$  leicht berechnen. Es ist dann für  $A := [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]^{n-2}$ :  $Q_n(A) = M^n$ . Wegen  $\det(BC) = \det(B)\det(C)$  gilt:

$$|\det(J_{Q_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}))| = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot |\det(J_{P_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}))|.$$

$$\text{Damit ist auch } |M^n| = \int_{M^n} dx = \int_A |\det(J_{Q_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}))| d(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = a_1 a_2 \dots a_n \int_A |\det(J_{P_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}))| d(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = a_1 a_2 \dots a_n |D(1)^n|.$$

## 5.2 verallgemeinerte Zylinderkoordinaten

Man kann die Polarkoordinaten und die kartesischen Koordinaten kombinieren. Das bekannteste Beispiel sind die Zylinderkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$ , deren erste zwei Komponenten 2-dimensionale Polarkoordinaten sind und deren dritte Komponente eine kartesische Koordinate ist. Die  $(n+k)$ -dimensionalen Zylinderkoordinaten verallgemeinern diese. Dabei stehe  $n$  wie bisher für die Dimension der Polarkoordinaten und  $k$  für die Dimension der Zylinderkoordinaten. Für  $k=0$  ergeben sich die  $n$ -dimensionalen Polarkoordinaten.

Wir definieren  $Q_{n,k} : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]^{n-2} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$  durch

$$Q_{n,k}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, x_1, \dots, x_k) = \begin{pmatrix} P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}.$$

Für die Jacobimatrix gilt

$$J_{Q_{n,k}}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, x_1, \dots, x_k) = \begin{pmatrix} J_{P_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix}$$

(wobei  $I_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$  Einheitsmatrix). Aufgrund der Blockform ist

$$\det(J_{Q_{n,k}}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, x_1, \dots, x_k)) = \det(J_{P_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})) \cdot \det I_k = \det(J_{P_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})).$$

Seien  $R, l_1, l_2, \dots, l_k > 0$ ,  $A := D(R)^n \times [0, l_1] \times [0, l_2] \times \dots \times [0, l_k]$  und  $B := [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]^{n-2} \times [0, l_1] \times [0, l_2] \times \dots \times [0, l_k]$ . Dann ist  $Q_{n,k}(B) = A$  und somit

$$\begin{aligned} |A| &= \int_A d(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, x_1, \dots, x_k) \\ &= \int_B |\det(J_{Q_{n,k}}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, x_1, \dots, x_k))| d(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, x_1, \dots, x_k) \\ &= \int_B |\det(J_{P_n}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}))| d(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, x_1, \dots, x_k) = l_1 l_2 \dots l_k \cdot |D(R)^n|. \end{aligned}$$

## 6 Quellen

- Königsberger, Analysis 2 (S. 18f, 91f, 225-227, 287f)
- HM-Vorlesung von Herrn Dr. Herzog (WS 2010/11, SS 2011)