Tutorien-Übungsblatt 10

Aufgabe 1

Gegeben ist das folgende Problem:

HALF-CLIQUE:
Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$
Gesucht: Gibt es eine Teilmenge $V' \subseteq V$ mit $\forall\, v, w \in V', v \neq w : (v, w) \in E$ und $|V'| \geq |V|/2$

Beweisen Sie, dass HALF-CLIQUE **NP**-vollständig ist!

Zur Erinnerung:
Das als **NP**-vollständig bekannte Problem CLIQUE ist definiert durch:

CLIQUE:
Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$
Gesucht: Gibt es eine Teilmenge $V' \subseteq V$ mit $\forall\, v, w \in V', v \neq w : (v, w) \in E$ und $|V'| \geq k$

Aufgabe 2

Finden Sie den Fehler im folgenden "Beweis" für $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$!
Betrachten Sie folgenden Algorithmus für SAT:

- Durchlaufe für die gegebene Formel ϕ alle möglichen Belegungen der Variablen mit den Wahrheitswerten
- Akzeptiere ϕ, wenn eine der durchlaufenen Belegungen ϕ erfüllt

Dieser Algorithmus hat eine mit der Anzahl der Variablen exponentiell wachsende Laufzeit. Daher hat das Problem SAT einen exponentiellen Aufwand und kann nicht in **P** liegen. Weil aber SAT in **NP** liegt, muß also $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ gelten.

Aufgabe 3

1. Zeigen Sie, dass es unter der Voraussetzung $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ möglich ist, für eine aussagenlogische Formel ϕ in polynomieller Zeit eine erfüllende Belegung der Variablen zu finden, falls eine solche Belegung existiert!

Aufgabe 4

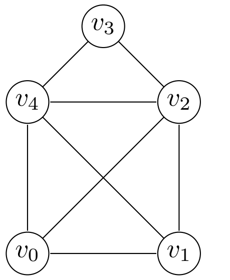
1. Gegeben sind folgende Probleme:

   Hamiltonkreisproblem:
   Gegeben: Ein ungerichteter Baum $G = (V, E)$.
   Gesucht: Besitzt G einen Hamiltonkreis? (Dies ist eine Permutation π der Knotenindizes $(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, ..., v_{\pi(n)})$, sodass für $i = 1, ..., n-1$ gilt: $\{v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}\} \in E$) und außerdem $\{v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}\} \in E$).

   Travelling Salesman(TSP):
   Gegeben: Ein Graph $G = (V, V \times V)$
   Gesucht: Ein einfacher Kreis $C = (v_1, v_2, ..., v_n, v_1)$, sodass $n = |V|$ und $\sum_{(u,v) \in C} d(u, v)$ minimiert wird, wobei $d(u, v)$ die Entfernung zwischen den Knoten u und v ist.

   Zeigen Sie, dass TSP NP-Vollständig ist, wobei das Hamiltonkreisproblem auch NP-Vollständig ist. Benutzen Sie für den Beweis die Reduktion Hamiltonkreisproblem$\leq_p$TSP.

2. Gegeben sei folgender Graph:



Gibt es einen Hamiltonkreis? Wandeln Sie hierzu das Problem in ein TSP um und finden Sie eine optimale Rundtour.

Lösung zu Aufgabe 1

HALF-CLIQUE ist in **NP**, da für ein Teilgraph der Größe $|V|/2$ eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ in $O(|V|^2 \cdot |E|) = O(|V|^4)$ geprüft werden kann, ob dieser Teilgraph vollständig und damit eine Clique ist.

Zum Nachweis der **NP**-Härte von HALF-CLIQUE zeigen wir die polynomielle Reduktion CLIQUE $\leq_p$ HALF-CLIQUE. Dazu sei eine Instanz (G, k) mit $G = (V, E)$ des Problems CLIQUE gegeben.
<u>Fall 1:</u> $k = |V|/2$
Dann ist G bereits die gesuchte Instanz von HALF-CLIQUE und es gilt $(G, k) \in$ CLIQUE $\Leftrightarrow G \in$ HALF-CLIQUE.
<u>Fall 2:</u> $k > |V|/2$
Bilde den Graphen $G' = (V', E')$ aus G durch das Hinzufügen $2k - |V| > 0$ Knoten, die mit keinem anderen Knoten in V' verbunden sind, also den Grad 0 haben. Es gilt $|V'|/2 = (|V| + 2k - |V|)/2 = k$. Damit gilt $(G, k) \in$ CLIQUE $\Leftrightarrow$ G hat eine Clique mit Umfang $k \Leftrightarrow G'$ hat eine Clique mit Umfang $|V'|/2 \Leftrightarrow G' \in$ HALF-CLIQUE. Die Bildung von G' aus (G, k) ist in $O(k + |V|)$ möglich.
<u>Fall 3:</u> $k < |V|/2$
Bilde den Graphen $G' = (V', E')$ aus G durch das Hinzufügen $|V| - 2k > 0$ Knoten, die mit jedem anderen Knoten in V' verbunden sind, also den Grad $|V'| - 1$ haben. Es gilt $|V'|/2 = (|V| + |V| - 2k)/2 = |V| - k$. Damit gilt $(G, k) \in$ CLIQUE $\Leftrightarrow G$ hat eine Clique mit Umfang $k \Leftrightarrow G'$ hat eine Clique mit Umfang $k + |V| - 2k = |V'|/2 \Leftrightarrow$ $G' \in$ HALF-CLIQUE. Die Bildung von G' aus (G, k) ist in $O(|V|^2 \cdot |E|) = O(|V|^4)$ möglich.

Lösung zu Aufgabe 2

Die Vorgabe eines Algorithmus mit exponentiellem Aufwand zur Lösung eines gegebenen Problems bedeutet nicht, dass das Problem eine exponentielle Komplexität besitzt und damit in **NP** liegt. Der Denkfehler besteht darin, dass aus der Tatsache, dass man nicht auf triviale Weise einen effizienten (polynomiellen) Algorithmus findet, geschlossen wird, dass ein solcher effizienter (polynomieller) Algorithmus auch nicht existieren kann.

Lösung zu Aufgabe 3

1. Es ist bekannt, dass SAT $\in$ **NP** gilt. Wegen der Voraussetzung **P** = **NP** gilt damit auch SAT $\in$ **P**. Für eine gegebene aussagenlogische Formel ϕ seien die Variablen mit $X_1, ..., X_n$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet.
   Es wird nun folgender Algorithmus betrachtet:

   1. Initialisiere i mit 1
   2. Ersetze X_i in ϕ mit TRUE und prüfe, ob $\phi \in$ SAT gilt
   - Falls ja: Gehe zu 4.
   - Falls nein: Gehe zu 3.
   3. Ersetze X_i in ϕ mit FALSE und prüfe, ob $\phi \in$ SAT gilt
   - Falls ja: Gehe zu 4.
   - Falls nein: Gib aus "ϕ ist nicht erfüllbar"
   4. Prüfe, ob $i < n$ gilt
   - Falls ja: Erhöhe i um 1 und gehe zu 2.
   - Falls nein: Gib die aktuelle Belegung für $X_1, ..., X_n$ als Lösung aus

   Der Aufwand des Algorithmus ist im wesentlichen das $2n$-fache des Aufwandes von SAT. Da SAT nach der Voraussetzung dieser Aufgabe einen polynomiellen Aufwand in n hat, so hat auch der obige Algorithmus einen polynomiellen Aufwand in n.

Lösung zu Aufgabe 4

1. TSP ist in NP, da man durch einen nichtdeterminitischen Turingmaschine in polynomielle Zeit feststellen kann (da man n Kanten raten kann), ob die Kantenmenge das TSP löst. Somit ist TSP in NP.
   Es ist noch zu zeigen, dass das TSP in NP-Hart ist:
   Sei $G = (V, E)$ beliebiger ungerichteter Graph.
   Definiere $d(u, v) := \begin{cases} 1, & \text{falls}(u, v) \in E \\ 1 + \alpha, & \text{sonst} \end{cases}$

   Dann nur dann, wenn G einen Hamiltonkreis hat, gilt $\exists$ TSP Tour mit Kosten n. Ansonsten sind die optimale Kosten mindestens $n + \alpha$. Also es existiert einen Rundtour C mit Gewicht n, dann gibt es keine Kante, deren Gewicht echt größer als 1 ist. Somit hat jede Kante in C das Gewicht 1 und alle Kanten in C sind in G und C bildet einen Hamiltonkreis in G. Umgekehrt hat G einen Hamiltonkreis C und C ist Rundtour mit Gewicht n.

2. Eine optimale Rundtour ist z.B.: $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_0)$ mit Kosten 5, also ist diese optimale Rundtour (da ihre Kosten nicht größer als 5 sind) auch ein Hamiltonkreis.