Himpunan

MATEMATIKA DISKRIT

Erwin Hidayat:
erwin.blog.dinus.ac.id

Mail to:
erwin@dsn.dinus.ac.id

Bahasan Materi

- Definisi
- Cara Penyajian Himpunan
- Terminologi
- Operasi terhadap Himpunan
- Hukum-hukum Himpunan
- Prinsip Inklusi-Eksklusi
- Latihan

Definisi

- Himpunan (*set*) adalah kumpulan objek-objek yang *berbeda.*
- Objek di dalam himpunan disebut elemen, unsur, atau anggota.
- HMTI adalah contoh sebuah himpunan. Di dalamnya berisi anggota berupa mahasiswa. Tiap mahasiswa berbeda satu sama lain.
- Satu set komputer terdiri dari CPU, monitor, dan keyboard.

Definisi

- Satu *set* huruf (besar dan kecil)

Definisi

- Perhatikan bedanya:
  - {1, 2, 3, 4, 5, 6 } → Himpunan (*set*)
  - {1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6} = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
  - {1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6} → Bukan himpunan
    → Himpunan-ganda (*multi-set*)

- Urutan elemen di dalam himpunan tidak penting:
  - {*a*, *b*, *c*, *d*} = {*d*, *b*, *a*, *c*}

Cara Penyajian Himpunan

1. **Enumerasi**

- Setiap anggota himpunan didaftarkan secara rinci.
- Contoh 1:
  - Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
  - $C = \{\text{kucing}, a, \text{Amir}, 10, \text{paku}\}$
  - $R = \{a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\}\}$
  - $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$
  - $K = \{\{\ \}\}$
  - Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: $\{1, 2, ..., 100\}$
  - Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

Cara Penyajian Himpunan

- **Keanggotaan**
  - $x \in A$: x merupakan anggota himpunan A
  - $x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A
- Contoh 2:
  - Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\}\}$, K = {{ }},
  - maka:
    - $3 \in A$
    - $\{a, b, c\} \in R$
    - $c \notin R$
    - $\{\ \} \in K$
    - $\{\ \} \notin R$

Cara Penyajian Himpunan

- Contoh 3:
- Bila $P_1 = \{a, b\}$,

  $P_2 = \{\{a, b\}\}$,

  $P_3 = \{\{\{a, b\}\}\}$,

- Maka:
  - $a \in P_1$
  - $a \notin P_2$
  - $P_1 \in P_2$
  - $P_1 \notin P_3$
  - $P_2 \in P_3$

Cara Penyajian Himpunan

2. Simbol-simbol Baku

- ***P*** = himpunan bilangan bulat positif = {1, 2, 3, ...}
- ***N*** = himpunan bilangan alami (natural) = {1, 2, ...}
- ***Z*** = himpunan bilangan bulat = {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...}
- ***Q*** = himpunan bilangan rasional = $\{a/b \mid a, b \in \mathbf{Z}$ dan $b \neq 0\}$

  = {…, -3/4, -4/5, 2/3, 1/2, ...} = {…, -0.6, -0.8, 0.666, …}
- ***R*** = himpunan bilangan riil = {…, 7.8, -0.001, 0.4, 3.14, …}
- ***C*** = himpunan bilangan kompleks

Cara Penyajian Himpunan

2. Simbol-simbol Baku

- Himpunan yang universal: semesta, disimbolkan dengan U.
- Contoh 4:
  - Misalkan $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan A adalah himpunan bagian dari U, dengan $A = \{1, 3, 5\}$.

Cara Penyajian Himpunan

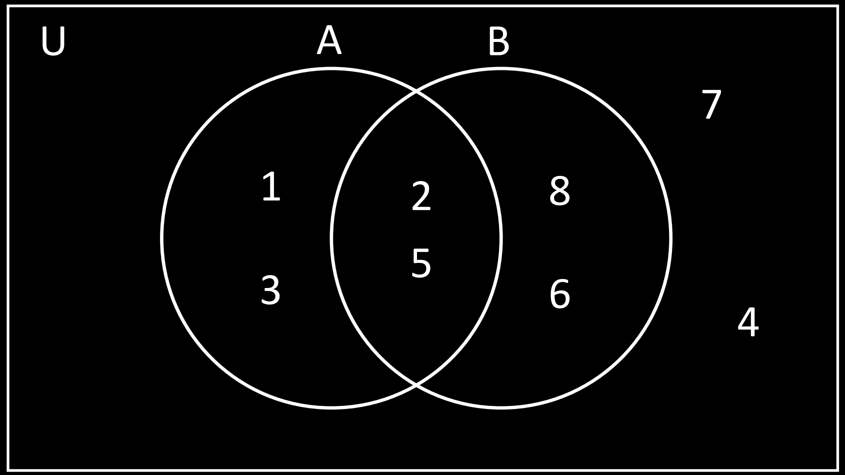
3. Notasi Pembentuk Himpunan

- Notasi: $\{x \mid \text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x\}$
- Contoh 5:
  - A adalah himpunan bilangan bulat positif lebih kecil dari 5
    $A = \{x \mid x \text{ bilangan bulat positif lebih kecil dari } 5\}$,
    atau $A = \{x \mid x \in P, x < 5\} = \{1, 2, 3, 4\}$
  - $M = \{x \mid x \text{ adalah mahasiswa yang mengambil mata kuliah Biologi}\}$

Cara Penyajian Himpunan

4. Diagram Venn

- Contoh 6: Misalkan
  - $U = \{1, 2, \ldots, 7, 8\}$,
  - $A = \{1, 2, 3, 5\}$ dan $B = \{2, 5, 6, 8\}$
  - Diagram Venn:



Terminologi

1. Kardinalitas

- Jumlah elemen di dalam A disebut kardinal dari himpunan A.
- Notasi: $n(A)$ atau $|A|$
- Contoh 7:
  - B = { x | x merupakan bilangan prima lebih kecil dari 20 }, atau B = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19} maka $|B| = 8$
  - T = {kucing, a, Amir, 10, paku}, maka $|T| = 5$
  - $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$, maka $|A| = 3$
  - $D = \{ x \in \mathbf{N} \mid x < 5000 \}$, maka $n(D) = 4999$
  - $D = \{ x \in \mathbf{N} \mid x \geq 5000 \}$, maka $n(D)$ tak berhingga

Terminologi

2. Himpunan Kosong (*null set*)

- Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (*null set*)
- Notasi: ∅ atau {}
- Contoh 8:
  - $E = \{x \mid x < x\}$, maka $n(E) = 0$
  - P = {orang Indonesia yang pernah ke bulan}, maka $n(P) = 0$
  - $A = \{x \mid x$ adalah akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0\}$, $n(A) = 0$

Terminologi

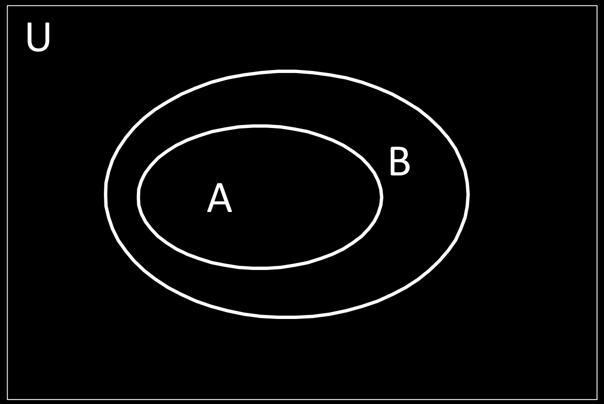
2. Himpunan Kosong (*null set*)

- Himpunan {{ }} dapat juga ditulis sebagai {Ø}
- Himpunan {{ }, {{ }}} dapat juga ditulis sebagai {Ø, {Ø}}
- {Ø} bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

Terminologi

3. Himpunan Bagian (*subset*)

- Himpunan *A* dikatakan himpunan bagian dari himpunan *B* jika dan hanya jika setiap elemen *A* merupakan elemen dari *B*.
- Notasi: $A \subseteq B$
- Secara formal: $A \subseteq B \leftrightarrow \forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$
- *A* adalah *subset* dari *B*.
  Dalam hal ini, *B* dikatakan *superset* dari *A*.



Terminologi

3. Himpunan Bagian (*subset*)

- Contoh 9:
  - $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
  - $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
  - $N \subseteq Z \subseteq R \subseteq C$
  - $A = \{3, 9\}$, $B = \{5, 9, 1, 3\}$, $A \subseteq B$? (benar)
  - $A = \{3, 3, 3, 9\}$, $B = \{5, 9, 1, 3\}$, $A \subseteq B$? (benar)
  - $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $A \subseteq B$? (salah)

Terminologi

3. Himpunan Bagian (*subset*)

- Perhatikan bahwa $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$
- $A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.
  - A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B.
  - Contoh 10: {1} dan {2, 3} adalah *proper subset* dari {1, 2, 3}
  - Jadi, $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$, $\{2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$
- $A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.
  - Contoh 11: $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

Terminologi

4. Himpunan yang Sama

- $A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A
- $A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$
- Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Terminologi

4. Himpunan yang Sama

- Contoh 12:
  - Jika $A = \{0, 1\}$ dan $B = \{x \mid x (x - 1) = 0\}$, maka $A = B$
  - Jika $A = \{3, 5, 8\}$ dan $B = \{5, 3, 8\}$, maka $A = B$
  - Jika $A = \{3, 5, 8, 5\}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$
  - A = {anjing, kucing, kuda}, B = {kucing, kuda, tupai, anjing}, maka $A \neq B$

Terminologi

4. Himpunan yang Sama

- Untuk tiga buah himpunan, *A*, *B*, dan *C* berlaku aksioma berikut:
  - *a)* $A = A$, $B = B$, dan $C = C$
  - b) jika $A = B$, maka $B = A$
  - c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

Terminologi

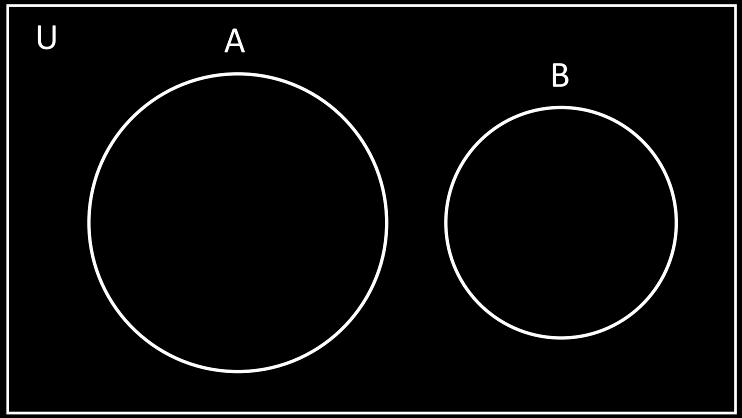
5. Himpunan yang Ekivalen

- Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama
- Notasi: $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$
- Contoh 13:
  - Misalkan $A = \{1, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

Terminologi

6. Himpunan Saling Lepas

- Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama
- Notasi: A // B
- Diagram Venn:



- Contoh 14:
  - Jika $A = \{x \mid x \in P, x < 8\}$ dan $B = \{10, 20, 30, \ldots\}$, maka A // B.

Terminologi

7. Himpunan Kuasa

- Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.
- Notasi: $P(A)$ atau 2^A
- Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$.

Terminologi

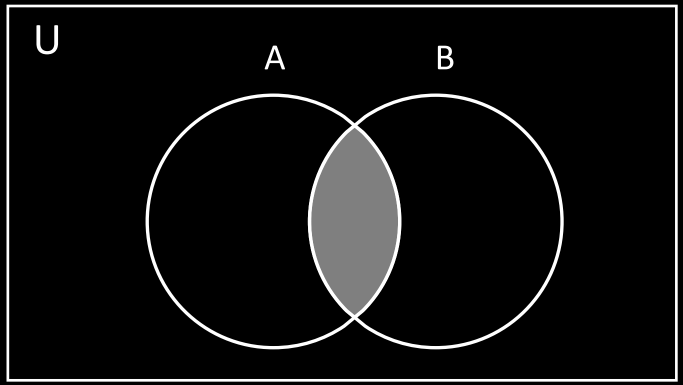
7. Himpunan Kuasa

- Contoh 15:
  - Jika $A = \{1, 2\}$, maka $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
  - Himpunan kuasa dari $\emptyset$ adalah $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
  - Himpunan kuasa dari $\{\emptyset\}$ adalah $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Operasi Terhadap Himpunan

1. Irisan (*intersection*)

- Notasi: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$

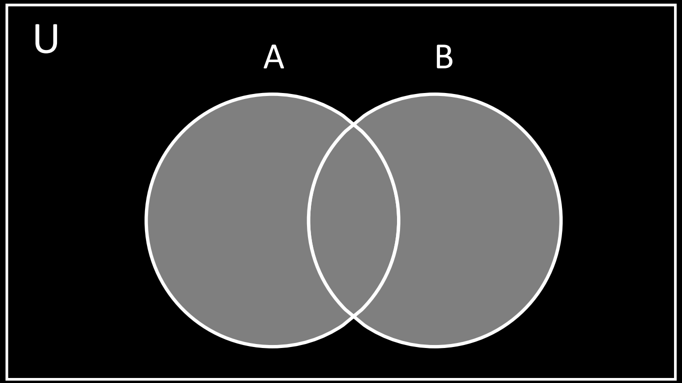


- Contoh 16:
  - Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$, maka $A \cap B = \{4, 10\}$
  - Jika $A = \{3, 5, 9\}$ dan $B = \{-2, 6\}$, maka $A \cap B = \emptyset$. Artinya: $A \mathbin{//} B$

Operasi Terhadap Himpunan

2. Gabungan (*union*)

- Notasi: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$

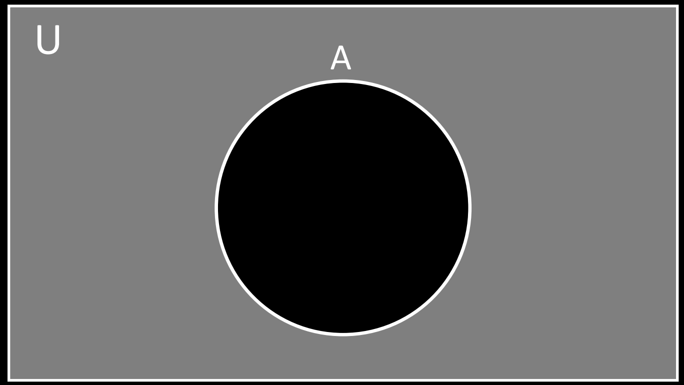


- Contoh 17:
  - Jika $A = \{2, 5, 8\}$ dan $B = \{7, 5, 22\}$, maka $A \cup B = \{2, 5, 7, 8, 22\}$
  - $A \cup \emptyset = A$

Operasi Terhadap Himpunan

3. Komplemen (*complement*)

- Notasi: $\bar{A} = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$

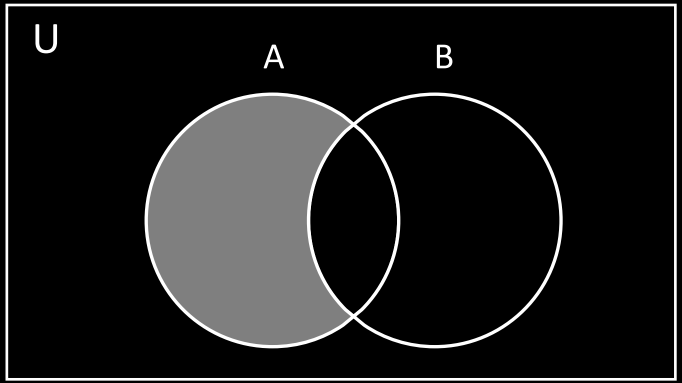


- Contoh 18:
  - Misalkan $U = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$
  - Jika $A = \{1, 3, 7, 9\}$, maka $\bar{A} = \{2, 4, 6, 8\}$
  - Jika $A = \{x \mid x/2 \in P, x < 9\}$, maka $\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Operasi Terhadap Himpunan

4. Selisih (*difference*)

- Notasi: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\}$
$$= A \cap \overline{B}$$

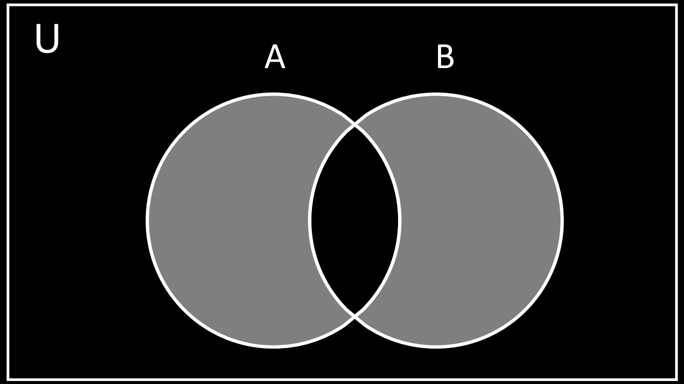


- Contoh 19:
  - Jika $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, maka $A - B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ dan $B - A = \emptyset$
  - $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

Operasi Terhadap Himpunan

5. Beda Setangkup (*symmetric difference*)

- Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$



- Contoh 20:
  - Jika $A = \{2, 4, 6\}$ dan $B = \{2, 3, 5\}$, maka $A \oplus B = \{3, 4, 5, 6\}$

Operasi Terhadap Himpunan

6. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

- Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$
- Contoh 21:
  - Misalkan $C = \{1, 2, 3\}$, dan $D = \{a, b\}$, maka

    $C \times D = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

Hukum-hukum Himpunan

- Disebut juga sifat-sifat (*properties*) himpunan atau hukum aljabar himpunan

1. Hukum Identitas:
   - $A \cup \emptyset = A$
   - $A \cap \mathrm{U} = A$
2. Hukum *null*/dominasi:
   - $A \cap \emptyset = \emptyset$
   - $A \cup \mathrm{U} = \mathrm{U}$
3. Hukum Komplemen:
   - $A \cup \overline{A} = \mathrm{U}$
   - $A \cap \overline{A} = \emptyset$
4. Hukum Idempoten
   - $A \cup A = A$
   - $A \cap A = A$
5. Hukum Penyerapan:
   - $A \cup (A \cap B) = A$
   - $A \cap (A \cup B) = A$

Hukum-hukum Himpunan

6. Hukum Involusi:
   - $\overline{(\bar{A})} = A$
7. Hukum Komutatif:
   - $A \cup B = B \cup A$
   - $A \cap B = B \cap A$
8. Hukum Asosiatif:
   - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
9. Hukum Distributif:
   - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
10. Hukum De Morgan
    - $\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \bar{A} \cup \bar{B}$
    - $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
11. Hukum 0/1
    - $\bar{\emptyset} = \mathrm{U}$
    - $\bar{\mathrm{U}} = \emptyset$

Prinsip Inklusi-Eksklusi

- Berapa banyak anggota di dalam gabungan dua buah himpunan A dan B?
- Penggabungan dua buah himpunan menghasilkan himpunan baru yang elemen-elemennya berasal dari A dan B.
- Himpunan A dan B mungkin saja memiliki anggota yang sama
- Banyaknya elemen bersama antara A dan B adalah $|A \cap B|$
- Setiap unsur yang sama itu telah dihitung dua kali, sekali pada $|A|$ dan sekali pada $|B|$, meskipun ia seharusnya dianggap sebagai satu buah elemen di dalam $|A \cup B|$

Prinsip Inklusi-Eksklusi

- Generalisasi dari hal tersebut bagi gabungan dari sejumlah himpunan dinamakan **prinsip inklusi-eksklusi.**
- Pada dua himpunan berlaku:
  - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Pada tiga himpunan berlaku:
  - $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Prinsip Inklusi-Eksklusi

- Contoh 22:
  - Berapa banyaknya bilangan antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?
- Penyelesaian:
  - Misalkan, A = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3,
    B = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5,
    $A \cap B$ = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 (KPK: 15)
  - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
    $= \lfloor 100/3 \rfloor + \lfloor 100/5 \rfloor - \lfloor 100/15 \rfloor$
    $= 33 + 20 - 6$
    $= 47$
  - Jadi, ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5

Prinsip Inklusi-Eksklusi

- Contoh 23:
  - Dalam sebuah kelas terdapat 25 mahasiswa yang menyukai Matematika, 13 mahasiswa menyukai Fisika dan 8 orang diantaranya menyukai Matematika dan Fisika. Berapa mahasiswa terdapat dalam kelas tersebut?
- Penyelesaian:
  - Misalkan, A = himpunan mahasiswa yang menyukai Matematika,
    B = himpunan mahasiswa yang menyukai Fisika,
    $A \cap B$ = himpunan mahasiswa yang menyukai keduanya.
  - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
    $= 25 + 13 - 8$
    $= 30$
  - Jadi, total ada 30 mahasiswa dalam kelas tersebut

Prinsip Inklusi-Eksklusi

- Contoh 24:
  - Dari 120 orang mahasiswa Informatika, 100 orang mengambil paling sedikit satu mata kuliah tawar, yaitu Fisika, Kalkulus, dan Logika.
  - Diketahui:
    - 65 orang mengambil Fisika
    - 45 orang mengambil Kalkulus
    - 42 orang mengambil Logika
    - 20 orang mengambil Fisika dan Kalkulus
    - 25 orang mengambil Fisika dan Logika
    - 15 orang mengambil Kalkulus dan Logika
    - 100 orang mengambil paling sedikit satu mata kuliah
  - Berapakah orang yang mengambil ketiga-tiganya?

Prinsip Inklusi-Eksklusi

- Penyelesaian:
  - Diketahui:

    $n(A) = 65$

    $n(B) = 45$

    $n(C) = 42$

    $n(A \cap B) = 20$

    $n(A \cap C) = 25$

    $n(B \cap C) = 15$

    $n(A \cup B \cup C) = 100$

    $n(A \cup B \cup C)^c = 120 - 100 = 20$

- Maka,

$$
\begin{aligned}
n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\
100 &= 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + n(A \cap B \cap C) \\
100 &= 152 - 60 + n(A \cap B \cap C) \\
100 &= 92 + n(A \cap B \cap C) \\
n(A \cap B \cap C) &= 100 - 92 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

- Jadi mahasiswa yang mengambil mata kuliah ketiganya sebanyak 8 orang.

Prinsip Inklusi-Eksklusi

- Contoh 25:
  - Sebanyak 115 mahasiswa mengambil mata kuliah Matematika, 71 Kalkulus, dan 56 Statistika. Di antaranya, 25 mahasiswa mengambil Matematika dan Kalkulus, 14 Matematika dan Statistika, serta 9 orang mengambil Kalkulus dan Statistika. Jika terdapat 196 mahasiswa yang mengambil paling sedikit satu dari ketiga mata kuliah tersebut, berapa orang yang mengambil ketiga mata kuliah sekaligus?
- Penyelesaian:
  - Misalkan, A = himpunan mahasiswa yang mengambil Matematika,
    B = himpunan mahasiswa yang mengambil Kalkulus,
    C = himpunan mahasiswa yang mengambil Statistika.

Prinsip Inklusi-Eksklusi

- Maka,

$|A| = 115$
$|B| = 71$
$|C| = 56$
$|A \cap B| = 25$
$|A \cap C| = 14$
$|B \cap C| = 9$
$|A \cup B \cup C| = 196$

$$
\begin{aligned}
|A \cup B \cup C) &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B) - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\
196 &= 115 + 71 + 56 - 25 - 14 - 9 + |A \cap B \cap C| \\
196 &= 194 + |A \cap B \cap C| \\
|A \cap B \cap C| &= 196 – 194 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

- Jadi mahasiswa yang mengambil mata kuliah ketiganya sebanyak 2 orang.

Latihan

1. Jika diketahui
    - $S = \{1,2,3 \ldots, 15\}$,
    - $A = \{ 2,3,5,7\}$,
    - $B = \{ 1,3,5,7,9\}$,
    - $C = \{2,4,6,8\}$

- Tentukan :
    - $A \cup B \cup C$
    - $A \cap C$
    - $B - A$
    - $(A' \cap B) - C$
    - $(B - \mathrm{C}) \cap A'$

Latihan

2. Pada suatu hari di sebuah rumah makan datang 100 tamu. 65 tamu memesan nasi pecel, 58 tamu memesan nasi soto. Semua tamu memesan paling sedikit satu dari nasi pecel atau nasi soto.
   a) Berapa tamu yang memesan nasi pecel atau nasi soto?
   b) Berapa tamu yang memesan nasi pecel dan nasi soto?
   c) berapa tamu yang memesan nasi soto saja?

Latihan

3. Suatu biro iklan mengadakan survei tentang cara mengiklankan produksi yang dilakukan oleh 50 pengusaha. Data yang terkumpul adalah sebagai berikut: 34 pedagang melalui radio, 23 pedagang melalui televisi, 35 pedagang melalui koran, 15 pedagang melalui radio dan tv, 11 pedagang melalui tv dan koran, 25 pedagang melalui radio dan koran, 8 pedagang melalui radio, tv dan koran.
   a) Berapa pedagang yang tidak memasang iklan di ketiga media?
   b) Berapa pedagang yang memasang iklan di koran atau radio?
   c) Berapa pedagang yang memasang di tv dan koran tetapi tidak di radio?

Terimakasih.

Adab di atas ilmu.