

Cosmologia II

Cescon Karin, Troian Giuseppe, Zorzenon Massimo

Maggio 2022

1) Si considera un modello Λ CDM piatto, dunque la seconda equazione di Friedmann, che in generale può essere riscritta nella forma

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda \quad (1)$$

fornisce un'espressione piuttosto semplice per $H(z)$:

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda} \quad (2)$$

In questo particolare modello di universo infatti si ha $\Omega_k=0$, poiché la geometria è piatta, e Ω_r è trascurabile. Ricordandosi che la relazione tra il fattore di scala adimensionale e il redshift è $1/a = 1+z$, con un cambiamento di variabile si è in grado di computare la distanza comovente:

$$L_{LOS} = R_0 \chi = \int_{t(z)}^{t_0} \frac{c dt'}{a(t')} = \int_0^z \frac{c dz'}{H(z')} \quad (3)$$

La prima delle quantità richieste è $D_M = L_{SKY}$, che nel caso di universo piatto coincide con L_{LOS} e dunque è possibile ricondursi a:

$$D_M(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_m(1+z')^3 + 1 - \Omega_m}} \quad (4)$$

in cui si è fatto uso della (2) e del fatto che, essendo presenti solo due componenti nel modello, i rispettivi parametri di densità sono legati dalla relazione $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$. A questo punto si possono calcolare anche le altre due quantità richieste

$$D_V(z) = \left(\frac{c z D_M^2(z)}{H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + 1 - \Omega_m}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad D_H(z) = \frac{c}{H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + 1 - \Omega_m}} \quad (5)$$

Il risultato dell'integrazione numerica con i parametri dati è illustrato in Figura 1, dove sono state riportate le rispettive curve in funzione di z , opportunamente riscalate, e sovrapposte ai dati forniti nel testo.

In particolare, per l'integrale presente nella relazione (4) si è fatto uso della funzione *quad* in *integrate* di *scipy*; per questo primo punto l'integrale è stato computato per 10000 valori equispaziati di $z \in (0 : 3]$.

2) Un primo test di χ^2 è stato svolto a partire dai parametri forniti nel testo e già citati nella presente relazione. In particolare, si sono calcolate le grandezze $D_M/(r_d\sqrt{z})$, $D_V/(r_d\sqrt{z})$ e $D_H/(r_d\sqrt{z})$ per i valori di z cui corrispondono i dati in uso (a z è stato evidentemente associato ad un errore trascurabile). Queste grandezze costituiscono i valori attesi per il modello, con i quali si vogliono confrontare i dati (indicati genericamente con $\mu_i[z]$ nella discussione che segue, dove i tiene conto del fatto che i dati sono relativi a tre grandezze diverse, e z indica la dipendenza dal redshift).

Nell'ottenere il valore del χ^2 le misure sono state considerate scorrelate; gli errori forniti, considerati anch'essi scorrelati, corrisponderanno nelle nostre ipotesi alla σ di una distribuzione Gaussiana degli errori casuali sulla misura. A questo punto risulta:

$$\chi^2 = \sum_z \sum_{i=1}^3 \frac{(x_i[z] - \mu_i[z])^2}{\sigma_i^2[z]} = 6.3 \quad (6)$$

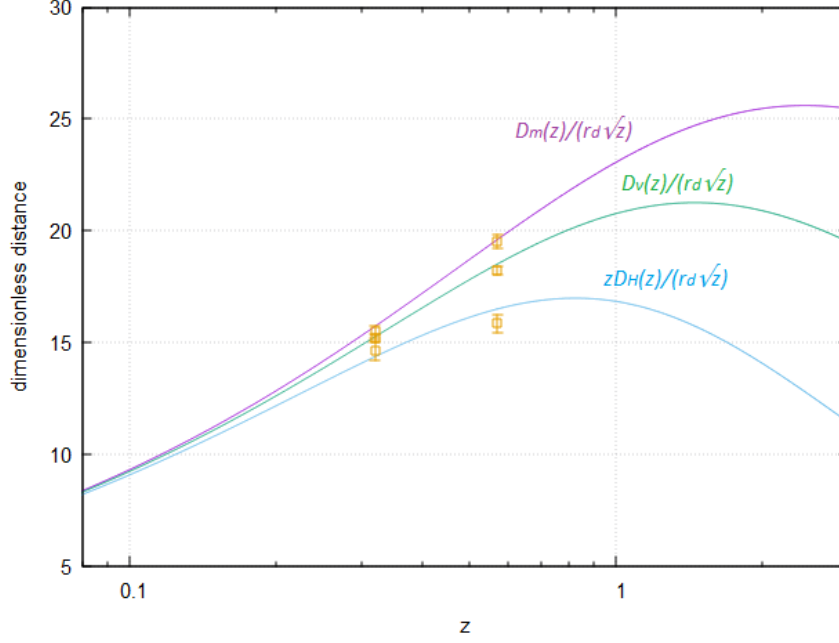


Figura 1: Andamento in funzione di z delle quantità richieste ottenuto per un modello di universo Λ CDM piatto con parametri $\Omega_m = 0.3156$ e $h = 0.6727$. I punti rappresentano invece i dati forniti nel testo con le rispettive barre d'errore, opportunamente propagate.

H_0	Ω_m	χ^2/ndf
$66.8 \pm 1.3 \text{ km/s/Mpc}$	$0.360^{+0.050}_{-0.045}$	$2.26/4 = 0.57$

Tabella 1: Parametri stimati nel modello Λ CDM con curvatura.

In questo caso i parametri H_0 e Ω_m sono stati considerati come costanti fisiche intrinseche del modello, per cui, dato un set di $N = 6$ dati totali, il χ^2 va paragonato con il valore atteso per una distribuzione di χ^2 a 6 gradi di libertà. Si ottiene quindi un $\chi^2/ndf = 1.05$, valore pressoché ideale.

La incertezze su H_0 e Ω_m vengono stimate tramite il metodo di inferenza statistica dei minimi quadrati, volto a ottenere una nuova stima dei due parametri tramite minimizzazione di χ^2 analogo all'espressione (6), da cui ricavare la relativa incertezza facendo riferimento all'ellisse di confidenza al 68%. Questa incertezza sarà poi considerata come l'errore che caratterizza H_0 e Ω_m , anche se chiaramente non corrisponderà all'errore fornito da *Planck*, che sicuramente ha utilizzato metodi di analisi dati e computazione più raffinati e una quantità di dati decisamente maggiore.

Per la minimizzazione inizialmente è stato valutato il χ^2 dall'equazione (6) 10^6 volte, considerando 1000 valori in un intervallo $[50 : 80]$ per H_0 e 1000 valori in $[0.1 : 0.7]$ per Ω_m . Successivamente, per ottenere una stima più precisa, gli intervalli sono stati ristretti a $[64.0 : 71.0]$ per H_0 e $[0.25 : 0.42]$ per Ω_m . Si ottiene quindi:

I parametri stimati sono compatibili entro il secondo livello di confidenza con quelli dati in partenza (Figura 2). Il valore di χ^2 abbastanza inferiore a 1 è probabilmente in buona parte dovuto all'effetto di una correlazione in realtà tutt'altro che trascurabile sulle misure, ipotesi avvalorata dall'inclinazione dell'ellisse di confidenza rispetto agli assi in cui variano i due parametri.

Gli errori stimati sono maggiori rispetto a quelli dei risultati di *Planck* per entrambi i parametri. Prendendo i risultati ottenuti dalla collaborazione nel 2018 si ha un errore a 1σ di 0.5 km/s/Mpc su H_0 (meno della metà di quello ottenuto con i minimi quadrati) e di 0.007 su Ω_m (circa un ordine di grandezza in meno).

3) Con la richiesta di rilassare la condizione di universo piatto (dunque andando a considerare anche eventuali contributi provenienti dalla curvatura), sono due i cambiamenti di cui si deve tenere conto: per prima cosa viene modificata la forma funzionale di $H(z)$ che (con la condizione $\Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1$) diventa:

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + 1 - \Omega_m - \Omega_k} \quad (7)$$

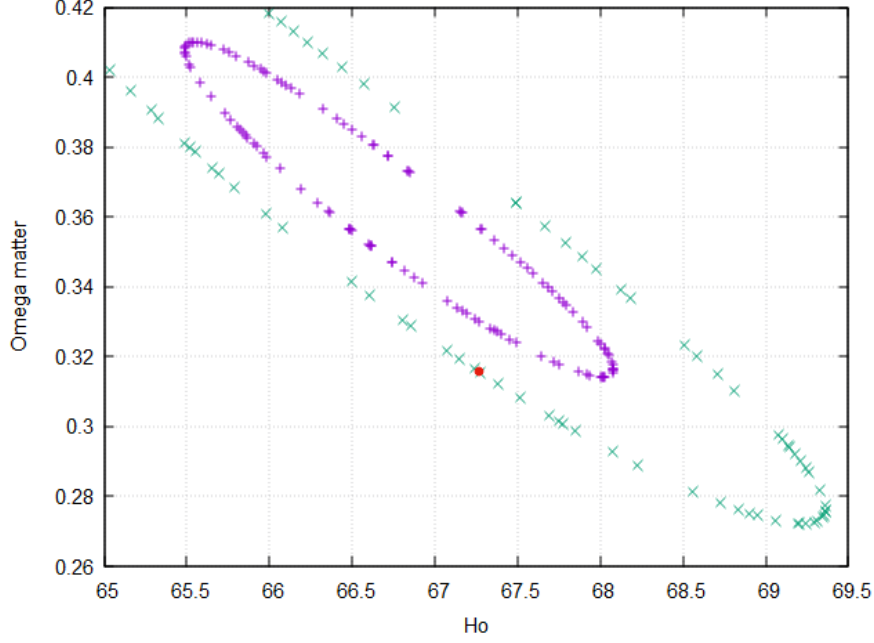


Figura 2: Punti che appartengono all'ellissi di confidenza a 1σ (viola) e 2σ (verde); i parametri dati in partenza sono rappresentati dal punto rosso. La struttura a punti è dovuta al fatto che si sono usati direttamente i valori di H_0 e Ω_m per cui si otteneva $\chi^2 = \chi_{min}^2 + 1$.

H_0	Ω_m	Ω_k	χ^2/ndf
$66.8^{+1.4}_{-1.2}$ km/s/Mpc	$0.40^{+0.20}_{-0.23}$	$-0.1^{+0.47}_{-0.40}$	$2.22/3 = 0.74$

Tabella 2: Parametri stimati nel modello Λ CDM piatto.

Inoltre possiamo riscrivere l'equazione (1) nella forma

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2 R_0^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (8)$$

per ottenere

$$\Omega_k := 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda = -\frac{kc^2}{R_0^2 a^2 H^2} \implies R_0 = \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \quad (9)$$

poiché siamo interessati al valore di Ω_k oggi e sappiamo che $a(t_0) = 1$ e $H(t_0) = H_0$. Tenendo dunque conto della diversa relazione tra le lunghezze, possiamo scrivere:

$$L_{SKY} = \begin{cases} R_0 \sinh(\chi) = R_0 \sinh\left(\frac{L_{LOS}}{R_0}\right) & k = -1; (\Omega_k > 0) \\ R_0 \sin(\chi) = R_0 \sin\left(\frac{L_{LOS}}{R_0}\right) & k = +1; (\Omega_k < 0) \end{cases} \quad (10)$$

e, facendo riferimento alle equazioni (3, 5, 7) otteniamo delle nuove funzioni di fit.

Si è quindi utilizzata la stessa procedura del punto 2, considerando però le nuove funzioni di fit che includono anche il parametro Ω_k fra quelli da stimare: si sono quindi calcolati i valori di χ^2 su 300 valori di H_0 in $[64.0 : 71.0]$, 300 valori di Ω_m in $[0.1 : 0.61]$ e 300 valori di Ω_k in $[-0.7 : 0.7]$ e se ne è cercato il minimo; successivamente si è guardato all'ellissoide di confidenza a 1σ per la stima degli errori. (Figura 4)

La presenza di un parametro aggiuntivo ha causato un peggioramento degli errori sulle grandezze già stimate, e Ω_k è determinato con precisione molto bassa. Le stime ottenute sono:

In Figura 3 Si può notare come il vincolo su Ω_k sia molto più lasco rispetto a quello imposto dai risultati di Planck (che riporta 0.003 ± 0.007): questo fatto è in parte attribuibile ai "particolari" valori del redshift con cui si è andati a fare il fit. Guardando l'equazione (7), si osserva che, il parametro Ω_k compare moltiplicato per un fattore $(1+z)^2$, mentre Ω_m per un fattore $(1+z)^3$: se i valori di z sono piccoli (nel nostro caso dell'ordine di $z \approx 0.5$), allora il termine $(1+z)$ risulta vicino all'unità e

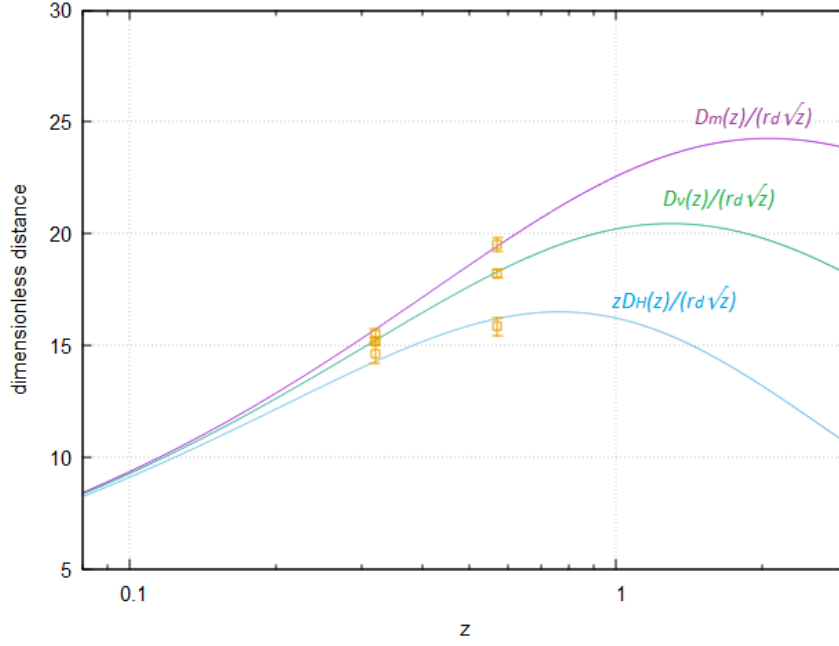


Figura 3: Andamento in funzione di z delle quantità richieste ottenuto per un modello di universo Λ CDM con curvatura con i parametri stimati. I colori e gli assi delle curve sono gli stessi riportati in Figura 1. I punti rappresentano invece i dati forniti nel testo con le rispettive barre d'errore, opportunamente propagate.

l'elevamento al quadrato o al cubo produce risultati molto simili tra loro; nel fit risulta dunque difficile discriminare i due contributi (questo introduce inoltre una notevole correlazione tra i parametri in quanto è possibile ottenere risultati accettabili con diverse combinazioni di essi). Nel caso in cui i valori di z fossero stati più grandi, allora il termine $(1 + z)^3$ sarebbe stato dominante e quindi sarebbe stato più facile identificare il contributo relativo alla sola curvatura.

Chiaramente le due stime risultano compatibili fra loro ed in particolare compatibili con 0, confermando le affermazioni fatte in classe secondo cui il raggio di curvatura dell'Universo risulta essere maggiore della distanza dell'orizzonte visibile. I dati forniti, per quanto precisi, non sono però adatti ad imporre delle restrizioni stringenti sul valore che Ω_k può assumere.

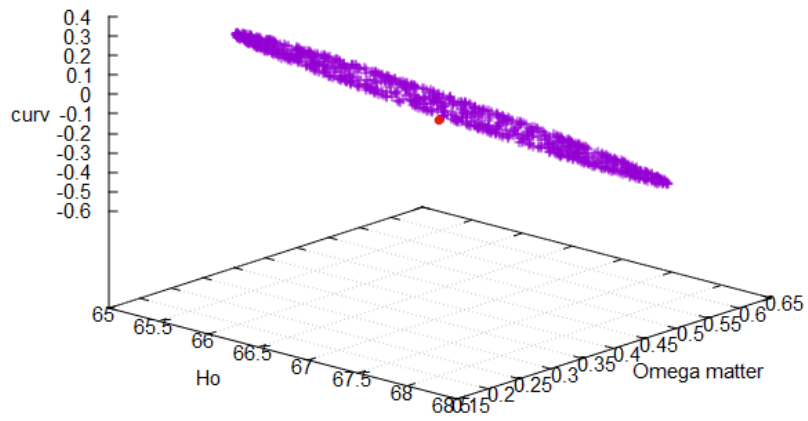


Figura 4: Punti che appartengono all'ellissoide di confidenza a 1σ (viola); i parametri dati in partenza (con $\Omega_k = 0$) sono rappresentati dal punto rosso. La struttura a punti è dovuta al fatto che si sono usati direttamente i valori dei parametri per cui $\chi^2 = \chi_{min}^2 + 1$.