Modelagem Matemática para Otimização de Rota de Coleta de Lixo em Condomínio

Rafael Lazaro e Davi Kirchmaier

16 de agosto de 2025

Resumo

Este documento apresenta a formulação matemática, na forma de um modelo de Programação Linear Inteira (PLI), para o Problema de Roteamento de Arcos aplicado a um serviço de coleta de lixo. O objetivo é determinar a rota de custo mínimo que garanta a cobertura de todas as ruas de uma área pré-definida, com pontos de partida e chegada específicos.

1 Descrição do Problema

O problema consiste em encontrar uma rota ótima para um veículo de coleta de lixo dentro de um condomínio fechado. A rede de ruas é representada por um grafo não direcionado. A rota deve:

- Começar em um ponto de partida pré-definido (residência do operador).
- Percorrer cada rua do condomínio pelo menos uma vez.
- Terminar em um ponto de chegada pré-definido (local de descarte).
- Minimizar o custo total da operação, que é função da distância total percorrida e do custo do combustível.

2 Componentes do Modelo Matemático

A seguir, são detalhados os conjuntos, parâmetros, variáveis de decisão, a função objetivo e as restrições que compõem o modelo de otimização.

2.1 Conjuntos e Índices

- $\mathcal{V}$: Conjunto de todos os nós (vértices) do grafo, representando os cruzamentos e finais de rua. Indexado por i, j, k.
- $\mathcal{E}$: Conjunto de todas as arestas não direcionadas $\{i, j\}$, representando as ruas do condomínio.
- $\mathcal{A}$: Conjunto de todos os arcos direcionados (i, j). Para cada aresta $\{i, j\} \in \mathcal{E}$, existem dois arcos correspondentes em $\mathcal{A}$: (i, j) e (j, i).

2.2 Parâmetros

Os parâmetros são os dados de entrada conhecidos do problema.

- d_{ij}: Distância do arco (i, j), em metros. Este valor é extraído do grafo.
- s: Nó de início da rota, $s \in \mathcal{V}$.
- t: Nó de término da rota, $t \in \mathcal{V}$.
- C_{litro}: Custo do combustível por litro (ex: R$ 5,80 / litro).
- K_{litro}: Eficiência do veículo, em quilômetros por litro (ex: 5 km / litro).
- C_{km}: Custo calculado por quilômetro. $C_{km} = \frac{C_{litro}}{K_{litro}}$.
- c_{ij}: Custo final para percorrer o arco (i, j). Calculado como $c_{ij} = C_{km} \times \frac{d_{ij}}{1000}$.

2.3 Variáveis de Decisão

A variável de decisão representa o que o modelo deve determinar.

- x_{ij}: Variável inteira que define o número de vezes que o veículo percorre o arco direcionado $(i, j) \in \mathcal{A}$.

2.4 Função Objetivo

O objetivo do modelo é minimizar o custo total da rota, que é a soma dos custos de todas as travessias de arcos realizadas.

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij} \cdot x_{ij} \tag{1}$$

2.5 Restrições

As restrições são as regras que a solução final deve obedecer.

2.5.1 Cobertura de Todas as Ruas

Cada rua (aresta original não direcionada) deve ser percorrida pelo menos uma vez, em qualquer sentido.

$$x_{ij} + x_{ji} \geq 1 \quad \forall\{i, j\} \in \mathcal{E} \tag{2}$$

2.5.2 Conservação de Fluxo

Garante que a rota seja contínua e que o veículo não seja "criado"ou "destruído"nos nós.

- Para o nó de início s, o fluxo de saída deve ser uma unidade maior que o de entrada.

$$\sum_{j:(s,j)\in\mathcal{A}} x_{sj} - \sum_{i:(i,s)\in\mathcal{A}} x_{is} = 1 \tag{3}$$

- Para o nó de término t, o fluxo de entrada deve ser uma unidade maior que o de saída.
$$\sum_{i:(i,t)\in\mathcal{A}} x_{it} - \sum_{j:(t,j)\in\mathcal{A}} x_{tj} = 1 \tag{4}$$
- Para todos os outros nós intermediários k, o fluxo de entrada deve ser igual ao de saída.
$$\sum_{i:(i,k)\in\mathcal{A}} x_{ik} - \sum_{j:(k,j)\in\mathcal{A}} x_{kj} = 0 \quad \forall k \in \mathcal{V}, k \neq s, k \neq t \tag{5}$$

2.5.3 Domínio das Variáveis

As variáveis de decisão devem ser números inteiros não negativos.

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} \tag{6}$$

3 Interpretação da Solução

A resolução deste modelo de PLI fornecerá os valores ótimos para as variáveis x_{ij}. Estes valores indicam o número de vezes que cada trecho de rua deve ser percorrido e em qual sentido para minimizar o custo total. A partir da matriz de travessias x_{ij}, um segundo passo algorítmico (como o Algoritmo de Hierholzer) vai ser aplicado para construir a sequência exata de nós que compõe a rota final (o caminho Euleriano).