Домашняя работа №0

Сирый Р. А.

1 января 1901 г.

Упражнение 1

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = \frac{\lambda}{\cosh^2 x}, \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

В точке $\hat{x} = 0$ $\cosh^2 x$ минимален, а следовательно $g(x)$ максимальна. Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \lambda \tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

и найдем вторую производную $\tilde{f}''(x)$:

$$\tilde{f}''(x) = \left(\frac{1}{\cosh^2 x}\right)'' = \left(\frac{-2\sinh x}{\cosh^3 x}\right)' = \frac{6\sinh^2 x}{\cosh^4 x} - \frac{2}{\cosh^2 x},$$

тогда, так как $\lambda \to \infty$ и $\tilde{f}''(x) \sim 1$ для x в окрестности $\hat{x}$, максимум $g(x)$ резкий и

$$I(\lambda) = \int\limits_{-1}^{1} g(x)\, \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} e^{\lambda \tilde{f}(x)}\, \mathrm{d}x \approx e^{\lambda \tilde{f}(\hat{x})} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\tilde{f}''(\hat{x})|}}, \quad \tilde{f}(\hat{x}) = 1, \quad \tilde{f}''(\hat{x}) = -2,$$

откуда ответ:

$$\boxed{I(\lambda) \approx e^{\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}}$$

Упражнение 2

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = -\lambda (x-1)^2 (x-2)^2, \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

Так как $\forall x \in \{1, 2\} \hookrightarrow f(x) = 0$ и $\forall x \notin \{1, 2\} \hookrightarrow f(x) < 0$, в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ находятся максимумы $f(x)$, а следовательно, и максимумы $g(x)$. Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \lambda \tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) = -(x-1)^2 (x-2)^2,$$

тогда, так как

$$\tilde{f}''(x) = -\left[8x^2 + 2\left((x-1)^2 + (x-2)^2\right)\right], \quad \tilde{f}''(x_1) = -10 \sim 1, \quad \tilde{f}''(x_2) = -34 \sim 1$$

и $\lambda \to \infty$, оба максимума $g(x)$ резкие и

$$I(\lambda) = \int\limits_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty e^{\lambda \tilde{f}(x)}\,\mathrm{d}x \approx e^{\lambda \tilde{f}(x_1)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\left|\tilde{f}''(x_1)\right|}} + e^{\lambda \tilde{f}(x_2)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\left|\tilde{f}''(x_2)\right|}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\left(\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{34}}\right),$$

ответ:

$$\boxed{I(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\left(\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{34}}\right)}$$

Упражнение 3

Преобразуем интеграл:

$$I(\lambda) = \int\limits_1^{+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^\lambda \mathrm{d}x = \int\limits_1^{+\infty} e^{\lambda \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)}\,\mathrm{d}x.$$

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = \lambda \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right), \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \lambda \tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) = \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

и исследуем $\tilde{f}(x)$. Найдем производные:

$$\tilde{f}'(x) = \frac{x}{\ln x}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) = \frac{1}{x\ln x}\left(1 - \ln x\right), \quad \tilde{f}''(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x + 1}{x^2\ln^2 x}.$$

При $\hat{x} = e$, $\tilde{f}'(\hat{x}) = 0$, а так как

$$\forall x \neq \hat{x},\ 1 \leq x < +\infty \hookrightarrow \tilde{f}'(x) \neq 0 \ \wedge \lim_{x\to+1}\tilde{f}(x) = -\infty < \tilde{f}(\hat{x}) = -1,$$

в точке $x = \hat{x}$ $\tilde{f}(x)$, а следовательно, и $g(x)$, имеет максимум. При $\lambda \to +\infty$ и

$$\tilde{f}''(\hat{x}) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x + 1}{x^2\ln^2 x}\bigg|_{x=\hat{x}} = -\frac{1}{e^2} \sim 0.01 \overset{\lambda\to+\infty}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{[f^{(3)}(\hat{x})]^2}{[f''(\hat{x})]^3} = \frac{1}{\lambda}\frac{[\tilde{f}^{(3)}(\hat{x})]^2}{[\tilde{f}''(\hat{x})]^2} \ll 1, \quad \frac{[f^{(4)}(\hat{x})]}{[f''(\hat{x})]^2} = \frac{1}{\lambda}\frac{[\tilde{f}^{(4)}(\hat{x})]}{[\tilde{f}''(\hat{x})]^2} \ll 1,$$

метод перевала применим и

$$I(\lambda) = \int\limits_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{+\infty} e^{\lambda\tilde{f}(x)}\,\mathrm{d}x \approx e^{\lambda\tilde{f}(\hat{x})}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|\tilde{f}''(\hat{x})|}} = e^{-\lambda}\sqrt{\frac{2\pi e^2}{\lambda}},$$

ответ:

$$\boxed{I(\lambda) \approx e^{-\lambda}\sqrt{\frac{2\pi e^2}{\lambda}}}$$

Упражнение 4

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = \lambda\left(\sin x - x\right), \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \lambda\tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) = \sin x - x$$

. Так как $\forall x > 0 \hookrightarrow \sin x < x$, в точке $\hat{x} = 0$ $\tilde{f}(x)$, а следовательно, и $g(x)$, имеет максимум на участке $[0, +\infty]$. Разложим $f(x)$ по формуле Тейлора:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \lambda\left(-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})\right) = \xi_3(x) + \xi_5(x) + \dots + \xi_{2n-1}(x) + o(x^{2n}).$$

Проверим условия, при которых на участке Δx, на котором набирается данный интеграл, можно пренебречь членами высших порядков:

$$\lambda \to +\infty,\ \xi_3(\Delta x) = \frac{1}{6}\lambda(\Delta x)^3 \sim 1,\ \Delta x \sim \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}} \ll 1 \implies$$

$$\forall k \geq 3 \hookrightarrow \xi_{2k-1}(\Delta x) = \frac{1}{(2k-1)!}\lambda(\Delta x)^{2k-1} \sim \frac{\lambda}{\lambda^{(2k-1)/3}} = \frac{1}{\lambda^{(2k-4)/3}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} \ll \xi_3(\Delta x) \sim 1,$$

а следовательно,

$$I(\lambda) = \int\limits_0^1 e^{\lambda(\sin x - x)}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{6}\lambda x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Так как $\Delta x \ll 1$,

$$I(\lambda) = \int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{6}\lambda x^3}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{6}\lambda x^3}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2}{\lambda x^2} e^{-\frac{1}{6}\lambda x^3}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{6}\lambda x^3\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt[3]{36\lambda}} \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\lambda x^3\right)^{-2/3} e^{-\frac{1}{6}\lambda x^3}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{6}\lambda x^3\right), \quad y = \frac{1}{6}\lambda x^3,$$

$$I(\lambda) \approx \frac{2}{\sqrt[3]{36\lambda}} \int\limits_0^{+\infty} y^{-2/3} e^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt[3]{36\lambda},}$$

ответ:

$$\boxed{I(\lambda) = \frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt[3]{36\lambda}}}$$

Задача 1

Задача 2

Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetuer eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdiet justo nec dolor.

Etiam euismod. Fusce facilisis lacinia dui. Suspendisse potenti. In mi erat, cursus id, nonummy sed, ullamcorper eget, sapien. Praesent pretium, magna in eleifend egestas, pede pede pretium lorem, quis consectetuer tortor sapien facilisis magna. Mauris quis magna varius nulla scelerisque imperdiet. Aliquam non quam. Aliquam porttitor quam a lacus. Praesent vel arcu ut tortor cursus volutpat. In vitae pede quis diam bibendum placerat. Fusce elementum convallis neque. Sed dolor orci, scelerisque ac, dapibus nec, ultricies ut, mi. Duis nec dui quis leo sagittis commodo.

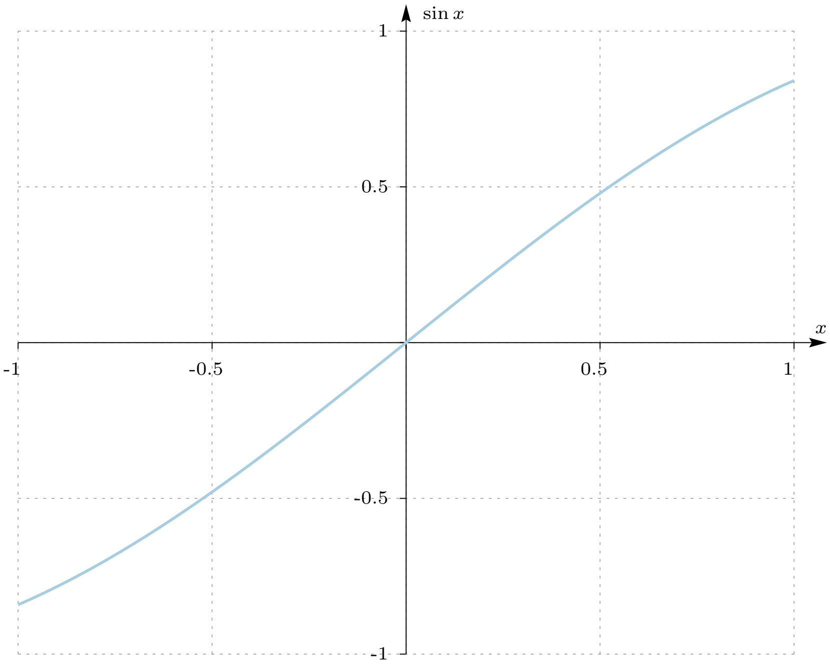

Рис. 1: Sample Text