Упражнение 3

Заменив переменную, обезразмерим интеграл:

$$t = bx, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{b}\mathrm{d}t,$$

$$I(a,b) = \int\limits_0^\infty \frac{x}{x^2+a^2}(1-\tanh(bx))\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \frac{t}{t^2+a^2b^2}(1-\tanh t)\,\mathrm{d}t \equiv \int\limits_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Так как $a \ll 1$ и $b \ll 1$, выполняется $1 \gg ab \gg a^2b^2$. Представим интеграл в виде

$$\int\limits_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{t'} f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{t'}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_T^\infty f(t)\,\mathrm{d}t, \quad 0 < t' < 1, \quad T \sim 1. \qquad (\textbf{У3}.1)$$

Предположим, что t' достаточно мал и $\tanh t$ в первом слагаемом можно разложить:

$$\int\limits_0^{t'} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \int\limits_0^{t'} \frac{t}{t^2+a^2b^2}(1-t) \ = \frac{1}{2}\int\limits_0^{t'} \frac{1}{t^2+a^2b^2}\,\mathrm{d}(t^2) + \int\limits_0^{t'} \left(1 - \frac{a^2b^2}{t^2+a^2b^2}\right)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+a^2b^2) - t + ab\arctan\frac{t}{ab}\bigg|_0^{t'} = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{t'^2}{a^2b^2}\right) - t' + ab\arctan\frac{t'}{ab}.$$

При $t' = 1/2$, $\tanh t' \approx t'$ с точностью примерно 10%, и это значение подойдет для грубых оценок с логарифмической точностью. Для данного t' получаем:

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{t'^2}{a^2b^2}\right) - t' \approx -\ln(ab) + \ln(t') - t' = -\ln(ab) + C_1,\ C_1 \sim 1,$$

$$ab\arctan\frac{t'}{ab} < \frac{\pi ab}{2} \ll 1,\ \Longrightarrow$$

$$\int\limits_0^{t'} f(t)\,\mathrm{d}t \approx -ln(ab) + C_1, \quad C_1 \sim 1.$$

Для оценки третьего слагаемого из (**У3**.1) возьмем $T = 2$:

$$a^2b^2 \ll t' \Rightarrow \forall t \geq T > t' \hookrightarrow \frac{t}{t^2+a^2b^2} \approx \frac{1}{t}, \quad t \geq T = 2 \ \Longrightarrow$$

$$C_3 \equiv \int\limits_T^\infty f(t)\,dt \approx \int\limits_T^\infty \frac{1}{t}(1-\tanh t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_T^\infty \frac{1}{t}\frac{2e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\,\mathrm{d}t < \int\limits_T^\infty e^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^{-4} \sim 10^{-2},$$

а, следовательно, при расчете с логарифмической точностью им можно пренебречь.

Так как для $t \geq t'$ выполняется

$$f(t) \approx \frac{1}{t}(1-\tanh t) \geq f(t+\varepsilon),\ \varepsilon > 0,$$

т.е. $f(t)$ не имеет экстремальных точек при $t \geq t'$, оценим грубо второе слагаемое из (**У3**.1) как площадь трапеции:

$$C_2 \equiv \int\limits_{t'}^{T} f(t)\ \mathrm{d}t \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t'}(1-\tanh t') + \frac{1}{T}(1-\tanh T)\right) \approx \frac{1}{2},$$

откуда получаем

$$\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = -\ln{(ab)} + (C_1 + C_2 + C_3) = -\ln{(ab)} + C,\ \ C \sim 1,$$

ответ:

$$\boxed{I(a,b) = -\ln{(ab)} + C,\ \ C \sim 1}$$