Упражнение 1

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = \frac{\lambda}{\cosh^2 x}, \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

В точке $\hat{x} = 0$ $\cosh^2 x$ минимален, а следовательно $g(x)$ максимальна. Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \lambda \tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

и найдем вторую производную $\tilde{f}''(x)$:

$$\tilde{f}''(x) = \left(\frac{1}{\cosh^2 x}\right)'' = \left(\frac{-2\sinh x}{\cosh^3 x}\right)' = \frac{6\sinh^2 x}{\cosh^4 x} - \frac{2}{\cosh^2 x},$$

тогда, так как $\lambda \to \infty$ и $\tilde{f}''(x) \sim 1$ для x в окрестности $\hat{x}$, максимум $g(x)$ резкий и

$$I(\lambda) = \int\limits_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} e^{\lambda \tilde{f}(x)}\,\mathrm{d}x \approx e^{\lambda \tilde{f}(\hat{x})}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\tilde{f}''(\hat{x})|}}, \quad \tilde{f}(\hat{x}) = 1, \quad \tilde{f}''(\hat{x}) = -2,$$

откуда ответ:

$$\boxed{I(\lambda) \approx e^{\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}}$$