

Семинар по теме “Интегралы с параметрами”

25.02.2023

Бета-функция Эйлера

Порой приходится иметь дело с интегралами вида:

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$$

или интегралами, которые сводятся к интегралам такого вида подстановкой. Это — так называемый бета-интеграл Эйлера или просто бета-функция. Этот интеграл удобно выражается через $\Gamma(z)$ - гамма-функцию Эйлера, значения и свойства которой уже хорошо известны из предыдущих семинаров; это позволяет просто получать значения этого интеграла при различных значениях параметров:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Добавим еще одно полезное свойство гамма-функции (приводим без доказательства):

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Задача 1 (интегральные представления и подстановки)

Вычислим интеграл Френеля:

$$I = \int_0^\infty \cos x^2 dx$$

Решение

Перейдем к переменной интегрирования $t = x^2$. Получим:

$$I = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} dt$$

Следующий шаг нетривиален. Для взятия этого интеграла удобно воспользоваться “интегральным представлением функции $1/\sqrt{t}$ ”. Такие интегральные представления - часто используемый приём, позволяющий брать определённые интегралы; в данном случае в роли этого интегрального представления будет интеграл Гаусса:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-tx^2} dx \Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt \int_0^\infty dx e^{-tx^2} \cos t$$

Теперь возьмем интеграл по t , обозначив подынтегральную функцию как $J(x^2)$. Тогда:

$$J(a) = \int_0^\infty e^{-at} \cos t dt = \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-at+it} dt = \operatorname{Re} \frac{1}{a-i} = \frac{a}{a^2+1}$$

Тем самым, получаем следующий интеграл:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

Приведём два способа взятия этого интеграла.

“Правильный” способ Получившийся интеграл является интегралом от дробно-рациональной функцией и его можно взять стандартным методом разбиения на элементарные дроби. Он довольно громоздкий, поэтому приведём тут метод, позволяющий вычислить интеграл проще. Сделав замену $x = \frac{1}{t}$, заметим следующее:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\infty^0 \left(-\frac{dt}{t^2}\right) \frac{1/t^2}{1+1/t^4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{1+t^4} dt$$

Беря полусумму двух представлений для интеграла I , получим:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$$

Теперь можно перейти к стандартной переменной для интегрирования симметрических многочленов $t = x - \frac{1}{x}$; при этом $dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$, получим:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^\infty = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

“Главный” способ Очень полезно научиться сводить такие интегралы к B -функции, о которой было рассказано выше. Перейдем в этом интеграле к переменной $t = \frac{1}{1+x^4} \Rightarrow x = \left(\frac{1-t}{t}\right)^{1/4} \Rightarrow dx = \frac{1}{4} \left(\frac{1-t}{t}\right)^{-3/4} \left(-\frac{dt}{t^2}\right)$. Имеем:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^0 \left(\frac{1-t}{t}\right)^{1/2} \cdot t \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1-t}{t}\right)^{-3/4} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^1 t^{-3/4} (1-t)^{-1/4} dt = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

Используя приведенные выше свойства бета- и гамма-функций, получаем:

$$B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2} \Rightarrow I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Замечание Заметим, что этот же ответ можно было получить гораздо проще, используя трюк с комплексными переменными и комплексным интегралом Гаусса. Нужно лишь обратить внимание на тонкость, связанную с тем, что $\sqrt{i} = \pm e^{i\pi/4}$, и необходимо выбрать правильный знак:

$$I = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^\infty e^{ix^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\pi}{-i}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{Re} e^{i\pi/4} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Задача 2 (дифференцирование и интегрирование по параметру)

Возьмём интеграл:

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx$$

Решение

Заметим, что без логарифма интеграл легко считается. Если мы продифференцируем интеграл по α , то логарифм заменится на дробь, а интегралы с дробями считать легче:

$$\frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \int_0^\infty \frac{2\alpha}{(\beta^2 + x^2)(\alpha^2 + x^2)} dx$$

Пусть $\alpha \neq \beta$, тогда верно разложение:

$$\frac{1}{(\beta^2 + x^2)(\alpha^2 + x^2)} = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left(\frac{1}{\beta^2 + x^2} - \frac{1}{\alpha^2 + x^2} \right)$$

и каждый полученный интеграл легко считается:

$$\frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 2\alpha \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left(\frac{1}{\beta^2 + x^2} - \frac{1}{\alpha^2 + x^2} \right) dx = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{\pi}{(\alpha + \beta)\beta}$$

На самом деле, при $\alpha = \beta$, эта формула тоже верна:

$$\int_0^\infty \frac{2\alpha}{(\alpha^2 + x^2)^2} \cdot dx = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^\infty \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{\pi}{2\alpha^2}$$

Теперь проинтегрируем полученное выражение по α :

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{\beta} \ln(\alpha + \beta) + C(\beta)$$

Тут “постоянная” $C(\beta)$ - произвольная функция, которая не зависит от α . Чтобы найти её подставим в исходный интеграл $\alpha = 0$:

$$I(0, \beta) = 2 \int_0^\infty \frac{\ln x}{\beta^2 + x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = \beta t \\ dx = \beta dt \end{array} \right| = 2 \int_0^\infty \frac{\ln t + \ln \beta}{\beta(1 + t^2)} dt = \frac{\pi \ln \beta}{\beta} + 2 \int_0^\infty \frac{\ln t}{1 + t^2} dt$$

Последний интеграл равен нулю, это можно показать сделав замену $t = e^z$:

$$\int_0^\infty \frac{\ln t}{1 + t^2} dt = \int_{-\infty}^\infty \frac{z}{1 + e^{2z}} e^z dz = \int_{-\infty}^\infty \frac{z}{e^{-z} + e^z} dz = 0$$

Итого $I(0, \beta) = \frac{\pi \ln \beta}{\beta} \Rightarrow C(\beta) \equiv 0$. Стоит заметить, что в решении мы неявно пользовались тем, что $\alpha, \beta > 0$; но поскольку исходный интеграл очевидным образом не чувствителен к изменению их знака, то ответ в общем виде записывается как:

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{|\beta|} \ln(|\alpha| + |\beta|)$$

Задача 3 (составление дифференциальных уравнений)

Вычислим интегралы Лапласа:

$$I_1(a, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^2 + a^2} dx$$

$$I_2(a, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(\omega x)}{x^2 + a^2} dx$$

Решение

Обезразмерим интеграл, перейдя к переменной интегрирования $x = at$ и введя “безразмерный” параметр $\alpha = \omega a$; для определенности далее будем считать, что $\alpha > 0$. Получим:

$$I_1(a, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} J(\alpha)$$

Возьмем производную $J(\alpha)$ по α :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + 1} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{x^2 + 1} dx$$

Получившийся интеграл сходится, однако производная от него уже расходится. В таком случае используем такой трюк:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J(\alpha) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \sin \alpha x}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{x} = - \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right] \frac{\sin \alpha x}{x} dx = -\pi + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{x}$$

Тут мы воспользовались табличным значением интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$. Теперь можно вычислять вторую производную, так как получающийся интеграл сходится:

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} J(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^2 + a^2} \cdot dx = J(\alpha)$$

Мы получили замкнутое дифференциальное уравнение на функцию $J(\alpha)$. Это уравнение линейно и его коэффициенты постоянны, поэтому оно решается с помощью подстановки $J(\alpha) = e^{\lambda \alpha}$. Такая подстановка приводит к алгебраическому уравнению на λ : $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$ и, следовательно, общее решение уравнения записывается как:

$$J(\alpha) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha}$$

Константа C_1 должна быть положена равной нулю. Это связано с тем, что исходный интеграл, очевидно, ограничен: $|J(\alpha)| \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx \right| = \pi$. Константу C_2 можно найти из значения интеграла при $\alpha = 0 \Rightarrow J(0) = \pi$. Значит, наш интеграл записывается как:

$$J(\alpha) = \pi e^{-\alpha}$$

Ответ был получен в предположении $\alpha > 0$. Поскольку исходный интеграл зависит лишь от модулей параметров a и ω , то ответ в общем виде записывается как:

$$I_1(a, \omega) = \frac{\pi}{|a|} e^{-|a\omega|}$$

Кроме того, заметим, что:

$$I_2(a, \omega) = -\frac{\partial}{\partial \omega} I_1(a, \omega) = \pi e^{-|a\omega|} \operatorname{sign} \omega$$

Задача 4 (экспоненциальная регуляризация)

Используя экспоненциальную регуляризацию, найти “сумму” ряда из натуральных чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

Указание Суть экспоненциальной регуляризации сводится к домножению на $e^{-\varepsilon n}$ и рассмотрению поведения функции при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Решение

Нам необходимо рассмотреть следующий ряд:

$$S(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\varepsilon n}$$

Этот ряд можно представить как производную по ε от геометрической прогрессии:

$$S(\varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n} = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{e^{-\varepsilon}}{1 - e^{-\varepsilon}} = \frac{e^{\varepsilon}}{(e^{\varepsilon} - 1)^2}.$$

А теперь разложимся по ε , чтобы взять предел $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} S(\varepsilon) &= \left(\frac{1}{1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{6}\varepsilon^3 - 1 + o(\varepsilon^3)} \right)^2 \left(1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) \right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{6} + o(\varepsilon^2) \right)^{-2} \left(1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) \right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{3\varepsilon^2}{4} + o(\varepsilon^2) \right) \left(1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) \right) = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{12} + o(1) \end{aligned}$$

Замечание Дзета-функция Римана при $\operatorname{Re} z > 1$ определяется как сумма ряда $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$. Используя экспоненциальную регуляризацию, мы, на самом деле, получили значение $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. Эту функцию можно доопределить (единственным образом) и для $\operatorname{Re} z < 1$ так, чтобы полученная функция получилась аналитической (то есть имела все производные вплоть до бесконечного порядка везде, кроме некоторого набора особых точек); и значение в $z = -1$ получено именно в смысле аналитического продолжения. Этот результат означает, что (в определенном смысле) сумма всех натуральных чисел равна $-\frac{1}{12}$.

*Приложение: 1D эффект Казимира

Эта задача призвана прояснить физический смысл процедуры регуляризации.

Рассмотрим металлические пластины, находящиеся на расстоянии $a \gg r$ друг от друга в вакууме (здесь r - радиус пластин). Согласно представлениям квантовой электродинамики, вакуум - набор квантов электромагнитного поля (фотонов), находящихся в состоянии наименьшей энергии. Однако, из-за «квантовости» фотонов их минимальная энергия не 0, а определяется формулой $E_k = \frac{1}{2}\hbar\omega_k = \frac{1}{2}\hbar ck$, k -волновое число. К сожалению, в полной мере обсудить её происхождение на уровне 1 курса невозможно (её можно понимать как следствие соотношения неопределённости Гейзенберга на координату и импульс). Из-за наличия такого «моря» фотонов по разные стороны от пластин возникает сила взаимодействия между пластинами (как разность давлений справа и слева). Необходимо найти её.

Решение

Вычислим энергию данной системы, а затем и силу взаимодействия по формуле: $F = -\partial E/\partial a$. Как было отмечено выше, энергия фотона есть $E_k = \frac{1}{2}\hbar\omega_k = \frac{1}{2}\hbar ck$. Полная энергия (в пространстве между двумя пластинами, т.е. в цилиндре радиуса r и длины a) равна:

$$E = \sum_{k,\alpha} \frac{1}{2} \hbar \omega_{k,\alpha} = \frac{\hbar c}{2} 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\pi}{a}$$

Здесь α - индекс, нумерующий поляризации фотонов (их всего 2, отсюда и дополнительная двойка). Волновое число k стало дискретным из-за того, что в металле электрическое поле равно нулю - на самих пластинах поле зануляется.

Полученная сумма расходится. Что это может означать? Определённо, что-то пошло не так. Стандартная интерпретация этого явления такова: имеющаяся у нас теория применима только для малых энергий, а что происходит на больших, мы не понимаем. На самом деле физическая величина должна быть конечной. Это значит, что «правильная» энергия должна вычисляться по формуле:

$$E = \frac{\hbar c}{2} 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\pi}{a} f(n)$$

Здесь $f(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а на не очень больших n $f(n) \approx 1$. Казалось бы, в таком виде ничего посчитать нельзя - нам важно знать явный вид $f(n)$. Однако, можно рассмотреть разницу энергий в данном объёме чистого вакуума и вакуума с пластинами. Найдём энергию вакуума в данном объёме. Чистый вакуум эквивалентен бесконечно удалённым пластинам, и в выражении для энергии сумма заменится на интеграл:

$$\sum_k f(k) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \frac{\pi a}{a \pi} = \frac{a}{\pi} \sum_k f(k) \Delta k = \frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} dk f(k) = a \int \frac{dk}{2\pi} f(k)$$

В последнем переходе использовано свойство изотропии f (зависимость только от энергии, но не от направления импульса). Для энергии вакуума получаем:

$$E_{vac} = \frac{\hbar c}{2} 2a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} f(k) k = \frac{\hbar c}{2} 2 \int_0^{\infty} \frac{n\pi}{a} f(n) dn$$

Здесь $k = \frac{\pi n}{a}$. Теперь вычислим разность энергий:

$$\Delta E = \frac{\hbar c \pi}{a} \left(\sum_{n=0}^{\infty} n f(n) - \int_0^{\infty} dn n f(n) \right)$$

Вспомним формулу Эйлера-Пуассона (была на лекции Я.В.Фоминова про метод перевала):

$$\sum_{n=0}^{\infty} n f(n) = \int_0^{\infty} n f(n) dn - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (n f(n))^{(2k-1)} \Big|_{n=0}$$

Здесь B_{2k} - числа Бернулли. В частности, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$. Из физических предположений разумно потребовать, чтобы $f(0) = 1$, $f'(0) \approx 0$, и так же для остальных производных (т.е. для малых энергий наша теория работает хорошо). Тогда получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n f(n) - \int_0^{\infty} dn n f(n) = -\frac{1}{12}$$

Таким образом, от функции f ответ не зависит. За это и ведётся борьба при регуляризации - за «обрезание незнания» при больших импульсах. Другими словами, мы хотим выразить ответ только через характеристики системы при малых энергиях. Заметим, что та же $-1/12$ была получена в задаче 4 из экспоненциальной регуляризации (там была явно задана $f(n) = e^{-\varepsilon n}$).

Итак, была получена формула для ΔE :

$$\Delta E = -\frac{1}{12} \frac{\pi \hbar c}{a}$$

Дифференцируя, находим ответ:

$$F = -\frac{\hbar \pi c}{12 a^2}$$

Знак минус соответствует притяжению пластин. Как бы неожиданно это ни звучало, эффект Казимира необходимо учитывать в современной технике.¹

¹Astrid Lambrecht 2002 Phys. World **15** (9) 29

Задачи для домашнего решения:

Упражнение 1

Вычислите точно интеграл

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Подсказка: можно воспользоваться трюком, который мы применили при вычислении Гауссова интеграла, т.е. заменить

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-tx} dt$$

Удобно также применить запись

$$\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}).$$

Полагаясь на этот результат, вычислите интеграл

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\sin^2 \lambda x}{x^2} dx.$$

Упражнение 2

Вычислите интеграл, сведя его к B -функции

$$I(n, m) = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \cos^m x dx.$$

Упражнение 3

Вычислите интеграл, сведя его к B -функции

$$I(n, m, k) = \int_0^\infty \frac{x^n}{(x^m + 1)^k} dx.$$

Когда он сходится?

Упражнение 4

Вычислите точно интегралы

$$I_1(\lambda) = \int_0^\infty \frac{x \sin(\lambda x)}{x^2 + 1} dx,$$

$$I_2(\lambda) = \int_0^\infty \frac{x \sin(\lambda x)}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Задача 1

Вычислите сведением к Γ -функции и к B -функции

$$I(m) = \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^m} dx$$

при $0 < m < 1$.

Подсказка: используйте обобщение соотношения из подсказки к задаче 1:

$$\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty t^{m-1} e^{-tx} dt$$

Задача 2

Распределение Ферми определяется как

$$n_F(\epsilon) = \frac{1}{e^{\epsilon/T} + 1},$$

где $T > 0$ - температура.

Вычислите интеграл, зависящий от двух параметров

$$I(V, T) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon (n_F(\epsilon - V) - n_F(\epsilon))$$

Такой интеграл возникает при вычислении электрического тока через туннельный контакт.

Почему не работает следующее рассуждение?

Разобьем интеграл на два:

$$I(V, T) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon n_F(\epsilon - V) - \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon n_F(\epsilon)$$

и сделаем сдвиг в первом интеграле $\epsilon' = \epsilon - V$. Тогда

$$I(V, T) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon' n_F(\epsilon') - \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon n_F(\epsilon) = 0$$

Замечание: если немного подумать, ответ на задачу можно получить совсем без вычислений.