Задача 2

I. $b \gg a$

Так как $b \gg a$ и $0 \le x \le a$, $x \ll a \implies$

$$e^{\frac{x}{b}} \approx 1 + \frac{x}{b}, \quad \int\limits_0^a \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}} - 1}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^a b x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{bx^n}{n}\right|_0^a = \frac{ba^n}{n},$$

ответ:

$$\boxed{I(n,a,b) \approx \frac{ba^n}{n}}$$

II. $n \gg 1,\ nb \ll a$

Приблизительно найдем точку $\tilde{x}$, в которой подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}} - 1}$$

достигает максимума:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right|_{x=\tilde{x}} = \frac{n\tilde{x}^{n-1}}{e^{\frac{\tilde{x}}{b}} - 1} - \frac{\tilde{x}^n e^{\frac{\tilde{x}}{b}}}{\left(e^{\frac{\tilde{x}}{b}} - 1\right)^2} = 0, \quad \tilde{x} = \frac{nbe^{\frac{\tilde{x}}{b}}}{e^{\frac{\tilde{x}}{b}} - 1}.$$

Применяя метод итераций при $\tilde{x}_0 = nb$, так как $n \gg 1$:

$$\tilde{x}_1 = \frac{nbe^{\frac{\tilde{x}_0}{b}}}{e^{\frac{\tilde{x}_0}{b}} - 1} = \frac{nbe^n}{e^n - 1} \approx nb = \tilde{x}_0,$$

следовательно

$$\tilde{x} \approx nb.$$

При $x' = \frac{1}{2}nb$:

$$\frac{f(x')}{f(\tilde{x})} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{e^n - 1}{e^{\frac{n}{2}} - 1} \approx \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{e}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \ll 1,$$

при $x'' = 2nb$:

$$\frac{f(x'')}{f(\tilde{x})} = 2^n \frac{e^n - 1}{e^{2n} - 1} \approx 2^n e^{-n} = \left(\frac{2}{e}\right)^n \ll 1,$$

следовательно интеграл набирается в некоторой окрестности

$$U(\tilde{x}):\ \forall x_u \in U(\tilde{x}) \hookrightarrow \frac{1}{2}nb < x_u < 2nb \ll a,$$

откуда

$$\forall x_u \in U(\tilde{x}) \hookrightarrow e^{\frac{n}{2}} - 1 < e^{\frac{x_u}{b}} - 1 \approx e^{\frac{x_u}{b}} \implies$$

$$\int\limits_0^a \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}} - 1}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^a \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}}}\,\mathrm{d}x \approx b^{n+1} \int\limits_0^\infty \left(\frac{x}{b}\right)^n e^{-\frac{x}{b}}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{b}\right) = b^{n+1}\Gamma(n+1).$$

В условии задачи не указано, является ли n целым числом (а, следовательно, так как $n \gg 1$ — натуральным), поэтому ответ:

$$\boxed{I(n,a,b) \approx b^{n+1}\Gamma(n+1),\ \text{для } n \in \mathbb{N}\ I(n,a,b) \approx b^{n+1} n!}$$