Упражнение 1

I. I_1

Воспользуемся предложенной подстановкой:

$$I_1 = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}t \int\limits_0^\infty \mathrm{Im}\left(e^{-tx+ix}\right)\, \mathrm{d}x,$$

$$J(t) = \int\limits_0^\infty \mathrm{Im}\left(e^{-tx+ix}\right)\, \mathrm{d}x = -\,\mathrm{Im}\left(\frac{1}{i-t}\right) = \frac{1}{t^2+1},$$

$$I_1 = \int\limits_0^\infty J(t)\, \mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty \frac{1}{t^2+1}\, \mathrm{d}t = \arctan x|_0^\infty = \frac{\pi}{2},$$

ответ:

$$\boxed{I_1 = \frac{\pi}{2}}$$

II. I_2

Для удобства положим $\lambda \geq 0$. Продифференцируем интеграл как функцию от λ по λ:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} I_2 = \frac{\partial}{\partial\lambda} \int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 \lambda x}{x^2}\, \mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \frac{2\sin\lambda x \cos\lambda x}{x}\, \mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \frac{\sin 2\lambda x}{x}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

откуда получаем

$$I_2(\lambda) = \frac{\pi\lambda}{2} + C.$$

Из того, что при $\lambda = 0$ подынтегральная функция тождественно равна нулю, и $I_2(0) = C$, следует $C = 0$. Так как подынтегральная функция четна относительно λ, ответ для произвольного λ:

$$\boxed{I_2 = \frac{\pi|\lambda|}{2}}$$