

Упражнение 3

Преобразуем интеграл:

$$I(\lambda) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)^\lambda dx = \int_1^{+\infty} e^{\lambda \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right)} dx.$$

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = \lambda \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right), \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \lambda \tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) = \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right)$$

и исследуем $\tilde{f}(x)$. Найдем производные:

$$\tilde{f}'(x) = \frac{x}{\ln x} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right) = \frac{1}{x \ln x} (1 - \ln x), \quad \tilde{f}''(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}.$$

При $\hat{x} = e$, $\tilde{f}'(\hat{x}) = 0$, а так как

$$\forall x \neq \hat{x}, \quad 1 \leq x < +\infty \hookrightarrow \tilde{f}'(x) \neq 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow +1} \tilde{f}(x) = -\infty < \tilde{f}(\hat{x}) = -1,$$

в точке $x = \hat{x}$ $\tilde{f}(x)$, а следовательно, и $g(x)$, имеет максимум. При $\lambda \rightarrow +\infty$ и

$$\tilde{f}''(\hat{x}) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x} \Big|_{x=\hat{x}} = -\frac{1}{e^2} \sim 0.01 \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty}$$

$$\frac{[f^{(3)}(\hat{x})]^2}{[f''(\hat{x})]^3} = \frac{1}{\lambda} \frac{[\tilde{f}^{(3)}(\hat{x})]^2}{[\tilde{f}''(\hat{x})]^2} \ll 1, \quad \frac{[f^{(4)}(\hat{x})]}{[f''(\hat{x})]^2} = \frac{1}{\lambda} \frac{[\tilde{f}^{(4)}(\hat{x})]}{[\tilde{f}''(\hat{x})]^2} \ll 1,$$

метод перевала применим и

$$I(\lambda) = \int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} e^{\lambda \tilde{f}(x)} dx \approx e^{\lambda \tilde{f}(\hat{x})} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\tilde{f}''(\hat{x})|}} = e^{-\lambda} \sqrt{\frac{2\pi e^2}{\lambda}} = e^{1-\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}},$$

ответ:

$$\boxed{I(\lambda) \approx e^{1-\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}}$$