Домашняя работа №2

Сирый Р. А.

12 февраля 2023 г.

Упражнение 1

Заменив переменную, обезразмерим интеграл:

$$t = bx, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{b}\mathrm{d}t, \quad I(a,b) = \int\limits_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin^2 bx}{x^2}\,\mathrm{d}x = b\int\limits_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

I. $a \gg b$

При $t \sim \sqrt{\frac{b}{a}} \ll 1$ степень при экспоненте $-\frac{a}{b}t \sim -\sqrt{\frac{a}{b}} \ll -1$, следовательно, интеграл набирается при малых t и $\sin^2 t$ можно разложить в ряд:

$$I(a,b) = b\int\limits_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t \approx b\int\limits_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\frac{t^2}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{b^2}{a}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\,\mathrm{d}\left(\frac{a}{b}t\right) = \frac{b^2}{a}, \tag{2}$$

ответ:

$$\boxed{I(a,b) \approx \frac{b^2}{a}}$$

II. $a \ll b$

При $t \sim 10$, знаменатель подынтегральной функции $\frac{1}{t^2} \sim 0.01 \ll 1$, а следовательно подынтегральная функция $f(t) \ll 1$ и интеграл набирается в некой окрестности $0 \leq t \leq t' \sim 10$. При этом степень при экспоненте остается мала: $-\frac{a}{b}t \ll 1$, следовательно

$$e^{-\frac{a}{b}t} \approx 1,\ I(a,b) = b\int\limits_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t \approx b\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Полученный интеграл вычисляется:

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin^2 t}{t}\bigg|_0^\infty - \int\limits_0^\infty t\,\mathrm{d}\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right) = -\int\limits_0^\infty t\,\mathrm{d}\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)$$
$$= -\int\limits_0^\infty t\left(\frac{2\sin t\cos t}{t^2} - \frac{2\sin^2 t}{t^3}\right)\,\mathrm{d}t = -\int\limits_0^\infty \frac{\sin 2t}{2t}\,\mathrm{d}(2t) + 2I, \quad I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin 2t}{2t}\,\mathrm{d}(2t) = \frac{\pi}{2}, \tag{4}$$

ответ:

$$\boxed{I(a,b) \approx \frac{\pi b}{2}}$$

Упражнение 2

I. $a \ll 1, \quad b \sim 1$

Так как $b \sim 1$, $\forall x \hookrightarrow (x-1)^2 + b^2 \sim C \geq 1$, и при $x \ll 1$ справедливо $\frac{1}{x^2+a^2} \gg 1$, интеграл набирается в некоторой окрестности нуля $0 \leq x \leq x' \ll 1$, и можно пренебречь величинами высших порядков малости:

$$I(a,b) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}\frac{1}{(x-1)^2+b^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{1+b^2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+b^2}\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}\bigg|_0^\infty = \\ = \frac{\pi}{2a(1+b^2),} \tag{5}$$

ответ:

$$\boxed{I(a,b) = \frac{\pi}{2a(1+b^2)}}$$

II. $a = b \gg 1$

Предположим, что при больших a на данной области интегрирования можно пренебречь единицей в знаменателе:

$$I(a) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}\frac{1}{(x-1)^2+a^2}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

Проверку предположения проведем оценкой сверху и снизу:

$$a \gg 1 \Rightarrow \forall x \leq \infty, x \geq 0 \hookrightarrow \frac{1}{\left((x-1)^2+a^2\right)^2} \geq \frac{1}{x^2+a^2}\frac{1}{(x-1)^2+a^2} \geq \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2} > 0,$$
$$\Longrightarrow \int\limits_0^\infty \frac{1}{\left((x-1)^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}\frac{1}{(x-1)^2+a^2}\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x, \tag{7}$$

а следовательно, если выполняется

$$I_1 = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^\infty \frac{1}{\left((x-1)^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^\infty \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = I_2, \tag{8}$$

что равносильно

$$I_2 - I_1 \ll I_1, \tag{9}$$

то наше предположение верно.

Вычислим полученный неопределенный интеграл. Заменим переменную:

$$x = a\tan u, \quad \mathrm{d}x = \frac{a}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u, \quad u = \arctan\frac{x}{a}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\hat{I}(x) &= \int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}\int \frac{1}{\left(\tan^2 u + 1^2\right)^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \\ &= \frac{1}{2a^3}\int \left(\left(2\cos^2 u - 1\right)+1\right)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4a^3}\int \left(\cos(2u)+1\right)\,\mathrm{d}(2u) = \frac{\sin(2u)+2u}{4a^3} + C = \\ &= \frac{1}{4a^3}\left(\frac{2\tan u}{1+\tan^2 u} + 2u\right) + C = \frac{1}{2a^3}\left(\frac{ax}{a^2+x^2} + \arctan\frac{x}{a}\right) + C,\end{aligned} \tag{11}$$

откуда:

$$I_1 = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4a^3}, \quad I_2 = \int\limits_{-1}^\infty \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4a^3} + \frac{1}{2a^3}\left(\frac{a}{a^2+1} + \arctan\frac{1}{a}\right). \tag{12}$$

Проверим предположение:

$$a \gg 1 \Rightarrow I_2 - I_1 = \frac{1}{2a^3}\left(\frac{a}{a^2+1} + \arctan\frac{1}{a}\right) \approx \frac{1}{2a^3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right) \ll \frac{1}{2a^3}\left(\frac{\pi}{2}\right) = I_1, \tag{13}$$

а следовательно наше предположение верно, и $I(a) \approx I_1$, ответ:

$$\boxed{I(a) \approx \frac{\pi}{4a^3}} \tag{14}$$

Задача 1

Определим $f(x)$ как подынтегральную функцию, и $h(x)$ как ее знаменатель:

$$I(a) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{xa^2+(1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \frac{1}{h(x)}\,\mathrm{d}x, \quad h(x) = xa^2 + (1-x^2)^2. \tag{15}$$

I. $a \gg 1$

При очень малых x, т.е. $xa^2 \ll 1$, следует

$$x \ll \frac{1}{a^2} \ll 1 \Rightarrow (1-x^2)^2 \approx 1 \Rightarrow h(x) \sim 1 \Rightarrow f(x) \sim 1. \tag{16}$$

При $xa \sim 1$:

$$xa^2 \sim a \gg 1,\ x \sim \frac{1}{a} \ll 1 \Rightarrow (1-x^2)^2 \approx 1 \Rightarrow h(x) \sim a \gg 1 \Rightarrow f(x) \ll 1, \tag{17}$$

следовательно, интеграл набирается в некой окрестности нуля $x \le x' \sim \frac{1}{a} \ll 1$, а значит в $h(x)$ можно отбросить члены высших порядков малости и интегрировать от 0 до x':

$$I(a) = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{xa^2 + (1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^{x'} \frac{1}{xa^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int\limits_0^{x'} \frac{1}{xa^2+1}\,\mathrm{d}(xa^2+1) = \tag{18}$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{-1}{(xa^2+1)^2}\bigg|_0^{x'} = \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{1}{(x'a^2+1)^2}\right),\ x' \sim \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{(x'a^2+1)^2} \sim \frac{1}{a^2} \implies \tag{19}$$

ответ:

$$\boxed{I(a) \approx \frac{1}{a^2}} \tag{20}$$

II. $a \ll 1$

При $x \ll 1$ выполняется

$$xa^2 \ll 1, (1-x^2)^2 \sim 1 \Rightarrow h(x) \sim 1 \Rightarrow f(x) \sim 1, \tag{21}$$

при $x \gg 1$:

$$(1-x^2)^2 \gg 1 \Rightarrow h(x) \gg 1 \Rightarrow f(x) \ll 1. \tag{22}$$

При $x = 1+\varepsilon,\ \varepsilon \ll 1$:

$$h(x) = (1+\varepsilon)a^2 + (2\varepsilon+\varepsilon^2)^2 \ll 1 \Rightarrow f(x) \gg 1, \tag{23}$$

следовательно, интеграл набирается в некой окрестности $1-\varepsilon' \le x \le 1+\varepsilon',\ \varepsilon' \ll 1$, а значит в $h(x)$ интегрировать по ε от $-\varepsilon'$ до ε', отбросив члены высших порядков малости:

$$I(a) = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{xa^2 + (1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} \frac{1}{(1+\varepsilon)a^2 + (2\varepsilon+\varepsilon^2)^2}\,\mathrm{d}\varepsilon \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\int\limits_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} \frac{1}{a^2+(2\varepsilon)^2}\,\mathrm{d}(2\varepsilon) = \frac{1}{2a}\arctan\frac{2\varepsilon}{a}\bigg|_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} = \frac{1}{a}\arctan\frac{2\varepsilon'}{a}. \tag{24}$$

При $\hat{\varepsilon} \sim \sqrt{a} \hookrightarrow \hat{\varepsilon} \ll 1 \wedge \frac{2\hat{\varepsilon}}{a} \sim \frac{1}{\sqrt{a}} \gg 1$, следовательно, приближения выше будут справедливы при $\varepsilon' \geq \hat{\varepsilon}$ и

$$\frac{1}{a} \arctan \frac{2\varepsilon'}{a} \approx \frac{\pi}{2a}, \tag{25}$$

ответ:

$$\boxed{I(a) \approx \frac{\pi}{2a}} \tag{26}$$

Задача 2

I. $b \gg a$

Так как $b \gg a$ и $0 \leq x \leq a$, $x \ll a \implies$

$$e^{\frac{x}{b}} \approx 1 + \frac{x}{b}, \quad \int\limits_0^a \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}} - 1}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^a bx^{n-1}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{bx^n}{n}\right|_0^a = \frac{ba^n}{n}, \tag{27}$$

ответ:

$$\boxed{I(n,a,b) \approx \frac{ba^n}{n}}$$

II. $n \gg 1,\ nb \ll a$

Приблизительно найдем точку $\tilde{x}$, в которой подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}} - 1} \tag{28}$$

достигает максимума:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right|_{x=\tilde{x}} = \frac{n\tilde{x}^{n-1}}{e^{\frac{\tilde{x}}{b}} - 1} - \frac{\tilde{x}^n e^{\frac{\tilde{x}}{b}}}{\left(e^{\frac{\tilde{x}}{b}} - 1\right)^2} = 0, \quad \tilde{x} = \frac{nbe^{\frac{\tilde{x}}{b}}}{e^{\frac{\tilde{x}}{b}} - 1}. \tag{29}$$

Применяя метод итераций при $\tilde{x}_0 = nb$, так как $n \gg 1$:

$$\tilde{x}_1 = \frac{nbe^{\frac{\tilde{x}_0}{b}}}{e^{\frac{\tilde{x}_0}{b}} - 1} = \frac{nbe^n}{e^n - 1} \approx nb = \tilde{x}_0, \tag{30}$$

следовательно

$$\tilde{x} \approx nb. \tag{31}$$

При $x' = \frac{1}{2}nb$:

$$\frac{f(x')}{f(\tilde{x})} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{e^n - 1}{e^{\frac{n}{2}} - 1} \approx \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{e}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \ll 1, \tag{32}$$

при $x'' = 2nb$:

$$\frac{f(x'')}{f(\tilde{x})} = 2^n \frac{e^n - 1}{e^{2n} - 1} \approx 2^n e^{-n} = \left(\frac{2}{e}\right)^n \ll 1, \tag{33}$$

следовательно интеграл набирается в некоторой окрестности

$$U(\tilde{x}) : \ \forall x_u \in U(\tilde{x}) \hookrightarrow \frac{1}{2} nb < x_u < 2nb \ll a, \tag{34}$$

откуда

$$\forall x_u \in U(\tilde{x}) \hookrightarrow e^{\frac{n}{2}} - 1 < e^{\frac{x_u}{b}} - 1 \approx e^{\frac{x_u}{b}} \implies$$

$$\int\limits_0^a \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}} - 1} \,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^a \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}}} \,\mathrm{d}x \approx b^{n+1} \int\limits_0^\infty \left(\frac{x}{b}\right)^n e^{-\frac{x}{b}} \,\mathrm{d}\left(\frac{x}{b}\right) = b^{n+1} \Gamma(n+1). \tag{35}$$

В условии задачи не указано, является ли n целым числом (а, следовательно, так как $n \gg 1$ — натуральным), поэтому ответ:

$$\boxed{I(n, a, b) \approx b^{n+1} \Gamma(n+1), \ \text{для } n \in \mathbb{N} \ I(n, a, b) \approx b^{n+1} n!}$$