Упражнение 3

Преобразуем интеграл:

$$I(\lambda) = \int\limits_{1}^{+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\lambda} \mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{+\infty} e^{\lambda \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)} \mathrm{d}x.$$

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = \lambda \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right), \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \lambda \tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) = \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

и исследуем $\tilde{f}(x)$. Найдем производные:

$$\tilde{f}'(x) = \frac{x}{\ln x}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) = \frac{1}{x \ln x}\left(1 - \ln x\right), \quad \tilde{f}''(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}.$$

При $\hat{x} = e$, $\tilde{f}'(\hat{x}) = 0$, а так как

$$\forall x \neq \hat{x},\ 1 \leq x < +\infty \hookrightarrow \tilde{f}'(x) \neq 0\ \wedge \lim_{x \to +1} \tilde{f}(x) = -\infty < \tilde{f}(\hat{x}) = -1,$$

в точке $x = \hat{x}$ $\tilde{f}(x)$, а следовательно, и $g(x)$, имеет максимум. При $\lambda \to +\infty$ и

$$\tilde{f}''(\hat{x}) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}\bigg|_{x=\hat{x}} = -\frac{1}{e^2} \sim 0.01 \overset{\lambda \to +\infty}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{[f^{(3)}(\hat{x})]^2}{[f''(\hat{x})]^3} = \frac{1}{\lambda}\frac{[\tilde{f}^{(3)}(\hat{x})]^2}{[\tilde{f}''(\hat{x})]^2} \ll 1, \quad \frac{[f^{(4)}(\hat{x})]}{[f''(\hat{x})]^2} = \frac{1}{\lambda}\frac{[\tilde{f}^{(4)}(\hat{x})]}{[\tilde{f}''(\hat{x})]^2} \ll 1,$$

метод перевала применим и

$$I(\lambda) = \int\limits_{1}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{+\infty} e^{\lambda \tilde{f}(x)}\,\mathrm{d}x \approx e^{\lambda \tilde{f}(\hat{x})}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\tilde{f}''(\hat{x})|}} = e^{-\lambda}\sqrt{\frac{2\pi e^2}{\lambda}},$$

ответ:

$$\boxed{I(\lambda) \approx e^{-\lambda}\sqrt{\frac{2\pi e^2}{\lambda}}}$$