Домашняя работа №1

Сирый Р. А.

05 февраля 2023 г.

Упражнение 1

I. $\alpha \gg 1$

Пусть $\tilde{x}$ — корень уравнения $x - 1 = e^{-\alpha x}$, тогда,

$$\forall x \hookrightarrow e^{-\alpha x} \geq 0 \Rightarrow \tilde{x} > 1 \Rightarrow e^{-\alpha \tilde{x}} < e^{-\alpha} \ll 1,$$

следовательно, $0 < \tilde{x} - 1 \ll 1$, и $\tilde{x}$ можно представить в виде

$$\tilde{x} = 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{1}$$

От полученного данной подстановкой уравнения $\varepsilon = e^{-\alpha(1+\varepsilon)}$ отбросим малый член:

$$e^{-\alpha(1+\varepsilon)} \approx e{-}\alpha, \quad -\alpha \approx \ln \varepsilon,$$

откуда получаем $\varepsilon \approx e^{-\alpha}$, и, подставляя ε в (1), получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx 1 + e^{-\alpha}}$$

II. $\alpha \ll 1$

Пусть $\tilde{x}$ — корень уравнения $x - 1 = e^{-\alpha x}$, тогда,

$$\forall x \hookrightarrow e^{-\alpha x} \geq 0 \Rightarrow \tilde{x} > 1 \Rightarrow |-\alpha \tilde{x}| \ll 1,$$

следовательно, $0 < 1 - e^{-\alpha \tilde{x}} \ll 1$, и $e^{-\alpha \tilde{x}}$ можно представить в виде

$$e^{-\alpha \tilde{x}} = 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{2}$$

откуда $\tilde{x} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\varepsilon}$, и, подстановкой (2) в исходное уравнение,

$$\tilde{x} = 2 - \varepsilon, \tag{3}$$

$$\alpha(2 - \varepsilon) = \ln \frac{1}{1 - \varepsilon}.$$

Пренебрегая малой величиной, получаем

$$(2 - \varepsilon)\alpha \approx 2\alpha, \quad 2\alpha \approx \ln \frac{1}{1 - \varepsilon}, \quad \varepsilon \approx 1 - e^{-2\alpha} \approx 2\alpha,$$

откуда подстановкой в (3) получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx 2 - 2\alpha}$$

Упражнение 2

I. $\alpha \gg 1$

Пусть $\tilde{x}$ — корень уравнения $\ln x = e^{-\alpha x}$, тогда,

$$\forall x \hookrightarrow e^{-\alpha x} \geq 0 \Rightarrow \ln \tilde{x} > 0 \Rightarrow \tilde{x} > 1 \Rightarrow e^{-\alpha \tilde{x}} < e^{-\alpha} \ll 1,$$

следовательно, $0 < \ln \tilde{x} \ll 1$, и $\tilde{x}$ можно представить в виде

$$\tilde{x} = 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{4}$$

От полученного данной подстановкой уравнения $\ln(1+\varepsilon) = e^{-\alpha(1+\varepsilon)}$ возьмем экспоненту:

$$1 + \varepsilon = e^{e^{-\alpha(1+\varepsilon)}},$$

и, так как $\xi = e^{-\alpha(1+\varepsilon)} \ll 1$, разложим правую часть по степеням ξ:

$$1 + \varepsilon = e^{\xi} \approx 1 + \xi + \frac{1}{2}\xi^2.$$

Подставляя ξ и пренебрегая малыми величинами, получаем

$$\varepsilon \approx e^{-\alpha(1+\varepsilon)} + \frac{1}{2}e^{-2\alpha(1+\varepsilon)} \approx e^{-\alpha},$$

и, подставляя ε в (4), получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx 1 + e^{-\alpha}}$$

II. $\alpha \ll 1$

Пусть $\tilde{x}$ — корень уравнения $x - 1 = e^{-\alpha x}$, тогда,

$$\forall x \hookrightarrow e^{-\alpha x} \geq 0 \Rightarrow \tilde{x} > 1 \Rightarrow |-\alpha \tilde{x}| \ll 1,$$

следовательно, $0 < 1 - e^{-\alpha \tilde{x}} \ll 1$, и $e^{-\alpha \tilde{x}}$ можно представить в виде

$$e^{-\alpha \tilde{x}} = 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{5}$$

откуда $\tilde{x} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\varepsilon}$, и, подстановкой (5) в исходное уравнение,

$$\tilde{x} = e^{1-\varepsilon}, \tag{6}$$

$$\alpha e^{1-\varepsilon} = \ln \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Пренебрегая малой величиной, получаем

$$\alpha e^{1-\varepsilon} \approx \alpha e, \quad \alpha e \approx \ln \frac{1}{1-\varepsilon}, \quad \varepsilon = 1 - e^{-e\alpha} \approx e\alpha,$$

откуда подстановкой в (6) получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx e(1 - e\alpha)}$$

Упражнение 3

I. $\tilde{x}_1(\lambda)$

Пусть $0 > \tilde{x} > -1$ — корень уравнения $xe^x = \lambda$. При малых x таких, что $|x| \ll 1$,

$$xe^x \approx x(1 + x + \frac{1}{2}x^2) \approx x,$$

следовательно, $\tilde{x} \approx \tilde{x}e^x \approx \lambda$, ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx \lambda}$$

II. $\tilde{x}_2(\lambda)$

Домножим на -1 и прологарифмируем обе части уравнения:

$$x = \ln(-\lambda) - \ln(-x).$$

Чтобы записи были приятнее глазу, перепишем уравнение в следующем виде:

$$y = -x, \quad \xi = -\ln(-\lambda), \quad y = \xi + \ln y. \tag{7}$$

Пусть $\tilde{y}$ — корень данного уравнения, удовлетворяющий условию задачи $x_2(\lambda) < -1 \Leftrightarrow \tilde{y} > 1$. Применим метод итераций к (7) и докажем, что последовательность $\{y_n\}$ сходится в $\tilde{y}$.

Пусть $y_1 = 1$, тогда

$$y_2 = \xi + \ln y_1, \quad (\Delta y)_1 = y_2 - y_1 = \xi - 1.$$

Так как $|\lambda| \ll 1$, $\xi > 1$ и, следовательно,

$$y_2 > y_1, \quad (\Delta y)_1 > 0.$$

Докажем ограниченность сверху для $\{y_n\}$. Предположим, что $\exists n : y_n \geq \tilde{y}$, тогда

$$y_n = \xi + \ln y_{n-1}, \quad y_{n-1} = e^{y_n - \xi} = e^{(\tilde{y}-\xi)+(y_n-\tilde{y})} = \tilde{y}e^{y_n-\tilde{y}} \geq \tilde{y},$$

откуда по индукции:

$$\exists n : y_n \geq \tilde{y} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ k \leq n \hookrightarrow y_k \geq \tilde{y},$$

что противоречит начальным условиям $\tilde{y} > 1,\ y_1 = 1$, следовательно $\{y_n\}$ ограниченна сверху, и

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow y_n < \tilde{y}. \tag{8}$$

Докажем, что последовательность $\{y_n\}$ монотонно возрастает:

$$(\Delta y)_n = y_{n+1} - y_n = (\xi + \ln y_n) - (\xi + \ln y_{n-1}) = \ln\frac{y_n}{y_{n-1}} = \ln\left(1 + \frac{(\Delta y)_{n-1}}{y_{n-1}}\right),$$

$$(\Delta y)_{n-1} > 0 \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{(\Delta y)_{n-1}}{y_{n-1}}\right) > 0 \Rightarrow (\Delta y)_n > 0,$$

откуда по индукции:

$$(\Delta y)_1 > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow (\Delta y)_n > 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow y_{n+1} > y_n,$$

т.е. $\{y_n\}$ монотонно возрастает.

Отсюда и из условия (8) ограниченности последовательности $\{y_n\}$

$$\exists \lim_{n\to\infty} y_n = \hat{y}, \quad \hat{y} \le \tilde{y}.$$

Переходя к пределу в формуле $y_{n+1} = \xi + \ln y_n$ при $n \to \infty$, получаем $\hat{y} = \xi + \ln \hat{y}$, т.е. $\hat{y} = \tilde{y}$. ■

То, с какой точностью записывать ответ, сильно зависит от λ. Например, при $x_1 = -1$ для $\lambda = -e^{-4}$, с точностью до трёх значащих цифр

$$\tilde{x}_2(-e^{-4}) \approx x_6 = -(\xi + \ln(\xi + \ln(\xi + \ln(\xi + \ln\xi)))),\ \xi = -\ln(-\lambda) = 4,$$

а для $\lambda = -e^{-8}$ ту же точность получаем при

$$\tilde{x}_2(-e^{-8}) \approx x_4 = -(\xi + \ln(\xi + \ln\xi)),\ \xi = -\ln(-\lambda) = 8.$$

Буду считать, что $\lambda = -e^{-4} \approx -0.02$ удовлетворяет условию $|\lambda| \ll 1$ и запишу в ответ $\tilde{x}_2(\lambda) \approx x_6$:

$$\boxed{\tilde{x}_2(\lambda) \approx -(\xi + \ln(\xi + \ln(\xi + \ln(\xi + \ln\xi)))),\ \xi = -\ln(-\lambda)}$$

Упражнение 4

Пусть $\tilde{x}$ — корень данного уравнения, а $\lambda = -\frac{1}{e} + \delta, 0 < \delta \ll 1$, тогда $\tilde{x}$ можно представить в виде

$$\tilde{x} = -1 + \varepsilon, \quad |\varepsilon| \ll 1. \tag{9}$$

Домножим обе части уравнения на e и разложим левую часть по степеням ε:

$$(-1+\varepsilon)e^{\varepsilon} \approx (-1+\varepsilon)(1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2) \approx -1 + \delta e,$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2 = \delta e, \quad \varepsilon = \pm\sqrt{2\delta e} = \pm\sqrt{2(\lambda e + 1)},$$

отсюда, подставляя в (9) и учитывая, что $\tilde{x}_1(\lambda) > \tilde{x}_2(\lambda)$, ответ:

$$\boxed{\tilde{x}_1(\lambda) = -1 + \sqrt{2(\lambda e + 1)}, \quad \tilde{x}_2(\lambda) = -1 - \sqrt{2(\lambda e + 1)}}$$

Задача 1

I. $0 < \alpha - 1 \ll 1$

Нарисуем на графике правую часть уравнения, и левую при $\alpha \in \{2,\ 1,\ \frac{1}{2}\}$ (**рис. 1**). Вблизи нуля функции $\tanh \alpha x$ и $\arctan x$ ведут себя линейно: $\tanh \alpha x \sim \alpha x$, $\arctan x \sim x$. Так как функции слева и справа нечетны, помимо тривиального корня $\tilde{x}_0 = 0$ остальные (если существуют) связаны соотношением $\tilde{x}_i^+ = -\tilde{x}_i^-$, $\tilde{x}_i^+ > 0$. Отсюда и из графика можно сделать выводы, аналогичные выводам из конспекта семинара по задаче (1), причем интересует случай, когда

$$\alpha = 1 + \varepsilon > 1,\ 0 < \varepsilon \ll 1,$$

т. е. имеются две нетривиальные точки пересечения, и при малых ε корни уравнения малы.

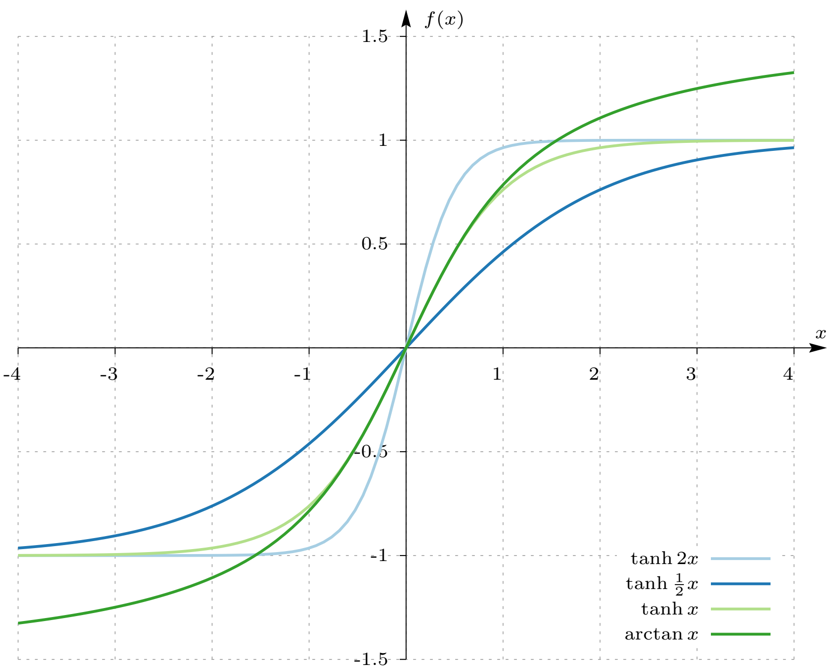

Рис. 1: График функций $\boldsymbol{\arctan x}$ и $\boldsymbol{\tanh \alpha x}$ при различных $\boldsymbol{\alpha}$

Разложим обе части уравнения по степеням аргументов:

$$\tanh \alpha x \approx (1+\varepsilon)x - \frac{1}{3}(1+\varepsilon)^3 x^3 + \frac{2}{15}(1+\varepsilon)^5 x^5, \quad \arctan x \approx x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5,$$

$$\varepsilon x - \frac{1}{3}\left((1+\varepsilon)^3 - 1\right)x^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}(1+\varepsilon)^5 - 1\right)x^5 = 0.$$

Из $\varepsilon \ll 1$ следует $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ и, следовательно,

$$\varepsilon x - \varepsilon x^3 + \left(\frac{2}{3}\varepsilon - \frac{1}{15}\right)x^5 = 0.$$

Разделим уравнение на x, домножим на 15 для удобства, произведем замену $y = x^2$ и решим приближенно полученное квадратное уравнение:

$$y^2(10\varepsilon - 1) - 15\varepsilon y + 15\varepsilon = 0,$$

$$\tilde{y} = \frac{15\varepsilon \pm \sqrt{15^2\varepsilon^2 - 60\varepsilon(10\varepsilon - 1)}}{2(10\varepsilon - 1)} = \frac{\pm 2\sqrt{15\varepsilon} \cdot \sqrt{1 - \frac{25}{4}\varepsilon + 15\varepsilon}}{2(10\varepsilon - 1)} \approx \pm\sqrt{15\varepsilon},$$

а так как $y > 0$:

$$\tilde{y} \approx \sqrt{15\varepsilon}.$$

Подставляя полученный результат в $\varepsilon = \alpha - 1$ и $x = \pm\sqrt{y}$, получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x}_0 = 0,\ \tilde{x}_{1,2} \approx \pm\sqrt[4]{15(\alpha - 1)}}$$

II. $\alpha \gg 1$

Найдем сначала положительный корень данного уравнения $\tilde{x}_1 > 0$. Так как $\alpha \gg 1$,

$$\tanh \alpha\tilde{x}_1 = \frac{e^{\alpha\tilde{x}_1} - e^{-\alpha\tilde{x}_1}}{e^{\alpha\tilde{x}_1} + e^{-\alpha\tilde{x}_1}} = 1 - \frac{2}{e^{2\alpha\tilde{x}_1} + 1} = 1 - \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < 1. \tag{10}$$

В грубом приближении $\tanh \alpha\tilde{x}_1 \approx 1,\ \tilde{x}_1 \approx \tan 1 \Rightarrow \varepsilon \ll 1$. Выразим $\tilde{x}_1$ через ε:

$$1 - \varepsilon = \arctan \tilde{x}_1, \quad \tilde{x}_1 = \tan(1 - \varepsilon) = \frac{\tan 1 - \tan\varepsilon}{1 + \tan 1 \tan\varepsilon}.$$

Пусть $\tan 1 = \beta$. Так как $\beta \tan\varepsilon \ll 1$,

$$\tilde{x}_1 = \beta\frac{1 - \frac{\tan\varepsilon}{\beta}}{1 + \beta\tan\varepsilon} = \beta - \frac{(\beta^2 + 1)\tan\varepsilon}{1 + \beta\tan\varepsilon} \approx \beta - (\beta^2 + 1)\varepsilon. \tag{11}$$

Теперь преобразуем (10) и подставим $\tilde{x}_1$ из (11):

$$\varepsilon = \frac{2}{e^{2\alpha\tilde{x}_1 + 1}}, \quad \tilde{x}_1 = \frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right) \approx \beta - (\beta^2 + 1)\varepsilon.$$

Применим метод итераций к полученному уравнению. Возьмем $\varepsilon_1 = 0$, тогда:

$$\frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{2}{\varepsilon_{n+1}} - 1\right) = \beta - (\beta^2 + 1)\varepsilon_n, \quad \varepsilon_2 = \frac{2}{e^{2\alpha\beta} + 1}, \quad \varepsilon_3 = \frac{2}{e^{2\alpha\beta}\left[e^{-(\beta^2+1)\frac{2}{e^{2\alpha\beta}+1}}\right] + 1}.$$

Уже при $\alpha = 5$

$$\varepsilon_2 \approx 1.7 \cdot 10^{-7},\ \frac{(\Delta\varepsilon)_2}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \approx 10^{-5} \Rightarrow (\Delta\varepsilon)_2 \ll \varepsilon_2,$$

а следовательно

$$\varepsilon \approx \varepsilon_2 \approx 2e^{-2\alpha\beta}$$

является достаточным приближением.

Подставляя полученную величину в (11), получаем приближенное выражение для $\tilde{x}_1$:

$$\tilde{x}_1 \approx \beta - 2e^{-2\alpha\beta}(\beta^2 + 1).$$

Так как в исходном уравнении правая и левая части — нечетные функции, $\exists \tilde{x}_2 = -\tilde{x}_1$: корень исходного уравнения, откуда, учитывая тривиальный корень $\tilde{x}_0 = 0$, ответ:

$$\boxed{\tilde{x}_0 = 0,\ \tilde{x}_{1,2} \approx \pm\left(\beta - 2e^{-2\alpha\beta}(\beta^2 + 1)\right),\ \beta = \tan 1}$$

Задача 2

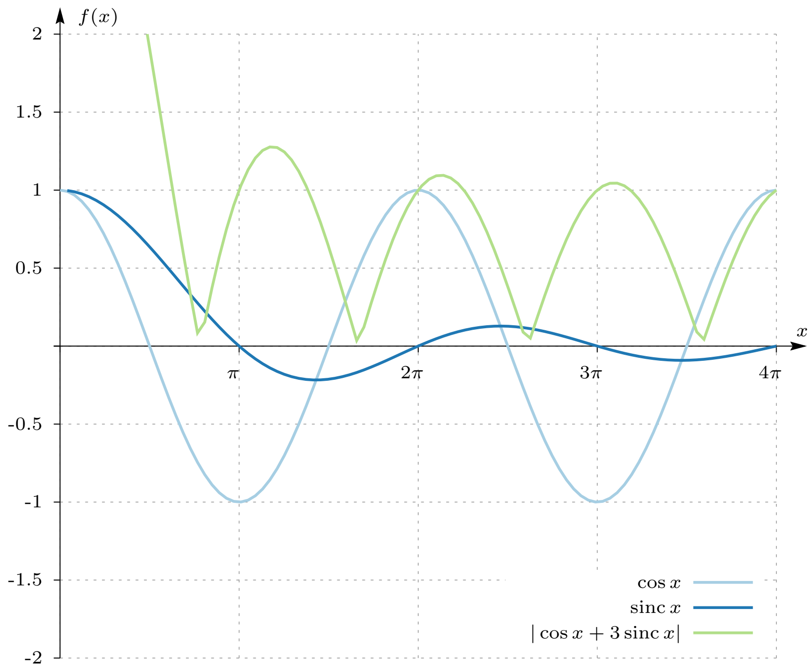

Рис. 2: График функции $\boldsymbol{|\cos x + \alpha \operatorname{sinc} x|}$ при $\boldsymbol{\alpha = 3}$

На **рис. 2** изображен график $|\cos x + \alpha \operatorname{sinc} x|$ при $\alpha = 3$ для наглядности. Из графика и/или тривиальных математических рассуждений видно, что на каждый интервал $(\pi k,\ \pi(k+1))\,, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ приходится зона:

$$K_k = (\pi k,\ \pi k + \varepsilon_k)\,,\ \varepsilon_k > 0 \tag{12}$$

при этом оба слагаемых имеют одинаковый знак, и модуль можно раскрыть:

$$\left|\cos x + \alpha \frac{\sin x}{x}\right| = |\cos x| + \alpha \frac{|\sin x|}{x}$$

При $\alpha \ll 1$ и $k \gg 1$ (а, следовательно, и $x \gg 1$) ширина $(\Delta x)_k$ этих участков $(\Delta x)_k \ll 1$, а следовательно поведение $\sin x$ и $\cos x$ в этих зонах описывается аналогично поведению в окрестности нуля, т. е.:

$$x \in K_k,\ |\cos x| + \alpha \frac{|\sin x|}{x} \approx 1 - \frac{(x-\pi k)^2}{2} + \alpha \frac{(x-\pi k) - \frac{(x-\pi k)^3}{6}}{x},$$

откуда получаем уравнение для правой границы зоны:

$$x = \pi k + \varepsilon_k, \quad 1 - \frac{\varepsilon_k^2}{2} + \alpha \frac{\varepsilon_k - \frac{\varepsilon_k^3}{6}}{\pi k + \varepsilon_k} \approx 1, \quad -3\pi k \varepsilon_k^2 + \alpha \frac{6\varepsilon_k - \varepsilon_k^3}{1 + \frac{\varepsilon_k}{\pi k}} \approx 0.$$

Раскладываем знаменатель по степеням $\varepsilon_k / \pi k$:

$$-3\pi k \varepsilon_k^2 + \alpha \left(6\varepsilon_k - \varepsilon_k^3\right) \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{\pi k}\right) \approx 0 \approx -3\pi k \varepsilon_k^2 + 6\alpha \varepsilon_k - \frac{6\alpha \varepsilon_k^2}{\pi k},$$

$$-\left(\pi k + \frac{2\alpha}{\pi k}\right) \varepsilon_k + 2\alpha \approx 0, \quad \varepsilon_k \approx \frac{2\alpha}{\pi k + \frac{2\alpha}{\pi k}} \approx \frac{2\alpha}{\pi k}.$$

Из (12) получаем

$$(\Delta x)_k = (\pi k + \varepsilon_k) - \pi k = \varepsilon_k,$$

ответ:

$$\boxed{(\Delta x)_k = \frac{2\alpha}{\pi k}}$$