Упражнение 2

I. $a \ll 1, \quad b \sim 1$

Так как $b \sim 1$, $\forall x \hookrightarrow (x-1)^2 + b^2 \sim C \geq 1$, и при $x \ll 1$ справедливо $\frac{1}{x^2+a^2} \gg 1$, интеграл набирается в некоторой окрестности нуля $0 \leq x \leq x' \ll 1$, и можно пренебречь величинами высших порядков малости:

$$I(a,b) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2} \frac{1}{(x-1)^2+b^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{1+b^2} \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+b^2}\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_0^\infty = $$

$$= \frac{\pi}{2a(1+b^2),}$$

ответ:

$$\boxed{I(a,b) = \frac{\pi}{2a(1+b^2)}}$$

II. $a = b \gg 1$

Предположим, что при больших a на данной области интегрирования можно пренебречь единицей в знаменателе:

$$I(a) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2} \frac{1}{(x-1)^2+a^2}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Проверку предположения проведем оценкой сверху и снизу:

$$a \gg 1 \Rightarrow \forall x \leq \infty, x \geq 0 \hookrightarrow \frac{1}{\left((x-1)^2+a^2\right)^2} \geq \frac{1}{x^2+a^2}\frac{1}{(x-1)^2+a^2} \geq \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2} > 0,$$

$$\Longrightarrow \int\limits_0^\infty \frac{1}{\left((x-1)^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}\frac{1}{(x-1)^2+a^2}\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x,$$

а следовательно, если выполняется

$$I_1 \equiv \int\limits_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^\infty \frac{1}{\left((x-1)^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^\infty \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x \equiv I_2,$$

что равносильно

$$I_2 - I_1 \ll I_1,$$

то наше предположение верно.

Вычислим полученный неопределенный интеграл. Заменим переменную:

$$x = a\tan u, \quad \mathrm{d}x = \frac{a}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u, \quad u = \arctan\frac{x}{a},$$

$$\hat{I}(x) = \int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}\int \frac{1}{\left(\tan^2 u + 1^2\right)^2 \cos^2 u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 u\,\mathrm{d}u =$$
$$= \frac{1}{2a^3}\int \left(\left(2\cos^2 u - 1\right) + 1\right)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4a^3}\int \left(\cos\left(2u\right)+1\right)\,\mathrm{d}(2u) = \frac{\sin\left(2u\right)+2u}{4a^3} + C =$$
$$= \frac{1}{4a^3}\left(\frac{2\tan u}{1+\tan^2 u} + 2u\right) + C = \frac{1}{2a^3}\left(\frac{ax}{a^2+x^2} + \arctan\frac{x}{a}\right) + C,$$

откуда:

$$I_1 = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4a^3}, \quad I_2 = \int\limits_{-1}^\infty \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4a^3} + \frac{1}{2a^3}\left(\frac{a}{a^2+1} + \arctan\frac{1}{a}\right).$$

Проверим предположение:

$$a \gg 1 \Rightarrow I_2 - I_1 = \frac{1}{2a^3}\left(\frac{a}{a^2+1} + \arctan\frac{1}{a}\right) \approx \frac{1}{2a^3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\right) \ll \frac{1}{2a^3}\left(\frac{\pi}{2}\right) = I_1,$$

а следовательно наше предположение верно, и $I(a) \approx I_1$, ответ:

$$\boxed{I(a) \approx \frac{\pi}{4a^3}}$$