Домашняя работа №2

Сирый Р. А.

12 февраля 2023 г.

Задача 1

Определим $f(x)$ как подынтегральную функцию, и $h(x)$ как ее знаменатель:

$$I(a) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{xa^2 + (1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \frac{1}{h(x)}\,\mathrm{d}x, \quad h(x) = xa^2 + (1-x^2)^2. \tag{1}$$

I. $a \gg 1$

При очень малых x, т.е. $xa^2 \ll 1$, следует

$$x \ll \frac{1}{a^2} \ll 1 \Rightarrow (1-x^2)^2 \approx 1 \Rightarrow h(x) \sim 1 \Rightarrow f(x) \sim 1. \tag{2}$$

При $xa \sim 1$:

$$xa^2 \sim a \gg 1,\ x \sim \frac{1}{a} \ll 1 \Rightarrow (1-x^2)^2 \approx 1 \Rightarrow h(x) \sim a \gg 1 \Rightarrow f(x) \ll 1, \tag{3}$$

следовательно, интеграл набирается в некой окрестности нуля $x \le x' \sim \frac{1}{a} \ll 1$, а значит в $h(x)$ можно отбросить члены высших порядков малости и интегрировать от 0 до x':

$$I(a) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{xa^2 + (1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^{x'} \frac{1}{xa^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int\limits_0^{x'} \frac{1}{xa^2+1}\,\mathrm{d}(xa^2+1) = \tag{4}$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{-1}{(xa^2+1)^2}\bigg|_0^{x'} = \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{1}{(x'a^2+1)^2}\right),\ x' \sim \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{(x'a^2+1)^2} \sim \frac{1}{a^2} \implies \tag{5}$$

ответ:

$$\boxed{I(a) \approx \frac{1}{a^2}} \tag{6}$$

II. $a \ll 1$

При $x \ll 1$ выполняется

$$xa^2 \ll 1, (1-x^2)^2 \sim 1 \Rightarrow h(x) \sim 1 \Rightarrow f(x) \sim 1, \tag{7}$$

при $x \gg 1$:

$$(1-x^2)^2 \gg 1 \Rightarrow h(x) \gg 1 \Rightarrow f(x) \ll 1. \tag{8}$$

При $x = 1+\varepsilon,\ \varepsilon \ll 1$:

$$h(x) = (1+\varepsilon)a^2 + (2\varepsilon+\varepsilon^2)^2 \ll 1 \Rightarrow f(x) \gg 1, \tag{9}$$

следовательно, интеграл набирается в некой окрестности $1-\varepsilon' \le x \le 1+\varepsilon',\ \varepsilon' \ll 1$, а значит в $h(x)$ интегрировать по ε от $-\varepsilon'$ до ε', отбросив члены высших порядков малости:

$$\begin{aligned} I(a) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{xa^2+(1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} \frac{1}{(1+\varepsilon)a^2+(2\varepsilon+\varepsilon^2)^2}\,\mathrm{d}\varepsilon \approx \\ \approx \frac{1}{2}\int\limits_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} \frac{1}{a^2+(2\varepsilon)^2}\,\mathrm{d}(2\varepsilon) = \frac{1}{2a}\arctan\frac{2\varepsilon}{a}\bigg|_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} = \frac{1}{a}\arctan\frac{2\varepsilon'}{a}. \end{aligned} \tag{10}$$

При $\hat{\varepsilon} \sim \sqrt{a} \hookrightarrow \hat{\varepsilon} \ll 1 \wedge \frac{2\hat{\varepsilon}}{a} \sim \frac{1}{\sqrt{a}} \gg 1$, следовательно, приближения выше будут справедливы при $\varepsilon' \ge \hat{\varepsilon}$ и

$$\frac{1}{a}\arctan\frac{2\varepsilon'}{a} \approx \frac{\pi}{2a}, \tag{11}$$

ответ:

$$\boxed{I(a) \approx \frac{\pi}{2a}} \tag{12}$$

Задача 2

I. $b \gg a$

Так как $b \gg a$ и $0 \le x \le a$, $x \ll a \implies$

$$e^{\frac{x}{b}} \approx 1 + \frac{x}{b}, \quad \int\limits_0^a \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}}-1}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^a bx^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{bx^n}{n}\bigg|_0^a = \frac{ba^n}{n}, \tag{13}$$

ответ:

$$\boxed{I(n,a,b) \approx \frac{ba^n}{n}}$$

II. $n \gg 1,\ nb \ll a$

Приблизительно найдем точку $\tilde{x}$, в которой подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}}-1} \tag{14}$$

достигает максимума:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\bigg|_{x=\tilde{x}} = \frac{n\tilde{x}^{n-1}}{e^{\frac{\tilde{x}}{b}}-1} - \frac{\tilde{x}^n e^{\frac{\tilde{x}}{b}}}{\left(e^{\frac{\tilde{x}}{b}}-1\right)^2} = 0, \quad \tilde{x} = \frac{nbe^{\frac{\tilde{x}}{b}}}{e^{\frac{\tilde{x}}{b}}-1}. \tag{15}$$

Применяя метод итераций при $\tilde{x}_0 = nb$, так как $n \gg 1$:

$$\tilde{x}_1 = \frac{nbe^{\frac{\tilde{x}_0}{b}}}{e^{\frac{\tilde{x}_0}{b}}-1} = \frac{nbe^n}{e^n-1} \approx nb = \tilde{x}_0, \tag{16}$$

следовательно

$$\tilde{x} \approx nb. \tag{17}$$

При $x' = \frac{1}{2}nb$:

$$\frac{f(x')}{f(\tilde{x})} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{e^n-1}{e^{\frac{n}{2}}-1} \approx \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{e}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \ll 1, \tag{18}$$

при $x'' = 2nb$:

$$\frac{f(x'')}{f(\tilde{x})} = 2^n \frac{e^n-1}{e^{2n}-1} \approx 2^n e^{-n} = \left(\frac{2}{e}\right)^n \ll 1, \tag{19}$$

следовательно интеграл набирается в некоторой окрестности

$$U(\tilde{x}):\ \forall x_u \in U(\tilde{x}) \hookrightarrow \frac{1}{2}nb < x_u < 2nb \ll a, \tag{20}$$

откуда

$$\forall x_u \in U(\tilde{x}) \hookrightarrow e^{\frac{n}{2}} - 1 < e^{\frac{x_u}{b}} - 1 \approx e^{\frac{x_u}{b}} \implies$$

$$\int\limits_0^a \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}}-1}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^a \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}}}\,\mathrm{d}x \approx b^{n+1}\int\limits_0^\infty \left(\frac{x}{b}\right)^n e^{-\frac{x}{b}}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{b}\right) = b^{n+1}\Gamma(n+1). \tag{21}$$

В условии задачи не указано, является ли n целым числом (а, следовательно, так как $n \gg 1$ — натуральным), поэтому ответ:

$$\boxed{I(n,a,b) \approx b^{n+1}\Gamma(n+1),\ \text{для } n \in \mathbb{N}\ I(n,a,b) \approx b^{n+1}n!}$$