Задача 1

Преобразуем интеграл:

$$I(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cosh^\lambda x \,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+\lambda \ln(\cosh x)} \,\mathrm{d}x.$$

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = -x^2 + \lambda \ln(\cosh x), \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

Найдем первые две производные:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x + \lambda \tanh x, \\ f''(x) &= -2 + \lambda(1 - \tanh^2 x). \end{aligned}$$

Сразу выведем полезное далее соотношение для исследования производных с $\tanh x$:

$$\tanh^n x = \left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)^n \underset{x\to+\infty}{\approx} 1 - 2ne^{-2x}, \tag{З1.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tanh^n x = n\left(\tanh^{n-1} x - \tanh^{n+1} x\right) \underset{x\to+\infty}{\overset{(\textbf{З1}.1)}{\approx}} \\ \underset{x\to+\infty}{\overset{(\textbf{З1}.1)}{\approx}} n\left[1 - 2(n-1)e^{-2x} - 1 + 2(n+1)e^{-2x}\right] = 2ne^{-2x}, \end{aligned} \tag{З1.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} \tanh^n x \underset{x\to+\infty}{\overset{(\textbf{З1}.2)}{<}} 2^m(m+n-1)e^{-2x}. \tag{З1.3}$$

При $x \approx \pm{}^1\!/_2\lambda$ и $x = 0$, $f'(x) = 0$. Так как $\lambda \to +\infty$, для $\hat{x} \approx {}^1\!/_2\lambda$ выполняется

$$f'(\hat{x}) = 0, \quad f(\hat{x}) \approx -\frac{1}{4}\lambda^2 + \lambda \ln\left(\frac{1}{2}(e^{1/2\lambda} + e^{-1/2\lambda})\right) \approx \frac{1}{2}\lambda^2 \gg f(0) = 0,$$

$$f''(\hat{x}) \overset{(\textbf{З1}.1)}{\approx} -2 + \frac{4\lambda}{e^\lambda} \approx -2 \neq 0,$$

следовательно, в точках $x \in \{\hat{x},\ -\hat{x}\}$ находятся максимумы $f(x)$, в окресности которых на участке Δx набирается интеграл.

Проверим условия применимости метода перевала:

$$f''(x) = -2 + \lambda(1 - \tanh^2 x) \underset{\hat{x}\to+\infty}{\overset{(\textbf{З1}.3)}{\Longrightarrow}} \forall n > 2 \hookrightarrow \frac{1}{n!} f^{(n)}(\hat{x}) < \frac{2^{n-2}(n-1)\lambda}{n!e^\lambda} \ll 1, \tag{З1.4}$$

$$\begin{aligned} f''(\hat{x}) \approx -2 \sim 1, \quad f''(\hat{x})(\Delta x)^2 \sim 1, \quad \Delta x \sim 1 \overset{(\textbf{З1}.4)}{\Longrightarrow} \\ \overset{(\textbf{З1}.4)}{\Longrightarrow} \forall n > 2 \hookrightarrow \frac{\frac{1}{n!} f^{(n)}(\hat{x})(\Delta x)^n}{\frac{1}{2} f''(\hat{x})(\Delta x)^2} \sim \frac{1}{n!} f^{(n)}(\hat{x}) \ll 1, \end{aligned}$$

следовательно, метод перевала применим, и

$$I(\lambda) \approx e^{f(\hat{x})}\sqrt{\frac{2\pi}{|f''(\hat{x})|}} + e^{f(-\hat{x})}\sqrt{\frac{2\pi}{|f''(-\hat{x})|}} \approx \frac{e^{\frac{1}{4}\lambda^2}\sqrt{\pi}}{2^{\lambda-1}},$$

ответ:

$$\boxed{I(\lambda) \approx \frac{e^{\frac{1}{4}\lambda^2}\sqrt{\pi}}{2^{\lambda-1}}}$$