

## Домашняя работа №2

Сирый Р. А.

12 февраля 2023 г.

### Упражнение 1

Заменяя переменную, обезразмерим интеграл:

$$t = bx, \quad dx = \frac{1}{b} dt, \quad I(a, b) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin^2 bx}{x^2} dx = b \int_0^{\infty} e^{-\frac{a}{b}t} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt. \quad (1)$$

#### I. $a \gg b$

При  $t \sim \sqrt{\frac{b}{a}} \ll 1$  степень при экспоненте  $-\frac{a}{b}t \sim -\sqrt{\frac{a}{b}} \ll -1$ , следовательно, интеграл набирается при малых  $t$  и  $\sin^2 t$  можно разложить в ряд:

$$I(a, b) = b \int_0^{\infty} e^{-\frac{a}{b}t} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt \approx b \int_0^{\infty} e^{-\frac{a}{b}t} \frac{t^2}{t^2} dt = \frac{b^2}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a}{b}t} d\left(\frac{a}{b}t\right) = \frac{b^2}{a}, \quad (2)$$

ответ:

$$I(a, b) \approx \frac{b^2}{a}$$

#### II. $a \ll b$

При  $t \sim 10$ , знаменатель подынтегральной функции  $\frac{1}{t^2} \sim 0.01 \ll 1$ , а следовательно подынтегральная функция  $f(t) \ll 1$  и интеграл набирается в некой окрестности  $0 \leq t \leq t' \sim 10$ . При этом степень при экспоненте остается мала:  $-\frac{a}{b}t \ll 1$ , следовательно

$$e^{-\frac{a}{b}t} \approx 1, \quad I(a, b) = b \int_0^{\infty} e^{-\frac{a}{b}t} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt \approx b \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt. \quad (3)$$

Полученный интеграл вычисляется:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \left. \frac{\sin^2 t}{t} \right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} t d\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right) = - \int_0^{\infty} t d\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right) \\ &= - \int_0^{\infty} t \left( \frac{2 \sin t \cos t}{t^2} - \frac{2 \sin^2 t}{t^3} \right) dt = - \int_0^{\infty} \frac{\sin 2t}{2t} d(2t) + 2I, \quad I = \int_0^{\infty} \frac{\sin 2t}{2t} d(2t) = \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (4)$$

ответ:

$$I(a, b) \approx \frac{\pi b}{2}$$

## Упражнение 2

I.  $a \ll 1, \quad b \sim 1$

I.  $a = b \gg 1$

## Задача 1

Определим  $f(x)$  как подынтегральную функцию, и  $h(x)$  как ее знаменатель:

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{1}{xa^2 + (1 - x^2)^2} dx = \int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{h(x)} dx, \quad h(x) = xa^2 + (1 - x^2)^2. \quad (5)$$

I.  $a \gg 1$

При очень малых  $x$ , т.е.  $xa^2 \ll 1$ , следует

$$x \ll \frac{1}{a^2} \ll 1 \Rightarrow (1 - x^2)^2 \approx 1 \Rightarrow h(x) \sim 1 \Rightarrow f(x) \sim 1. \quad (6)$$

При  $xa \sim 1$ :

$$xa^2 \sim a \gg 1, \quad x \sim \frac{1}{a} \ll 1 \Rightarrow (1 - x^2)^2 \approx 1 \Rightarrow h(x) \sim a \gg 1 \Rightarrow f(x) \ll 1, \quad (7)$$

следовательно, интеграл набирается в некой окрестности нуля  $x \leq x' \sim \frac{1}{a} \ll 1$ , а значит в  $h(x)$  можно отбросить члены высших порядков малости и интегрировать от 0 до  $x'$ :

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{1}{xa^2 + (1 - x^2)^2} dx \approx \int_0^{x'} \frac{1}{xa^2 + 1} dx = \frac{1}{a^2} \int_0^{x'} \frac{1}{xa^2 + 1} d(xa^2 + 1) = \quad (8)$$

$$= \frac{1}{a^2} \left. \frac{-1}{(xa^2 + 1)^2} \right|_0^{x'} = \frac{1}{a^2} \left( 1 - \frac{1}{(x'a^2 + 1)^2} \right), \quad x' \sim \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{(x'a^2 + 1)^2} \sim \frac{1}{a^2} \Rightarrow \quad (9)$$

ответ:

$$I(a) \approx \frac{1}{a^2} \quad (10)$$

## II. $a \ll 1$

При  $x \ll 1$  выполняется

$$xa^2 \ll 1, (1 - x^2)^2 \sim 1 \Rightarrow h(x) \sim 1 \Rightarrow f(x) \sim 1, \quad (11)$$

при  $x \gg 1$ :

$$(1 - x^2)^2 \gg 1 \Rightarrow h(x) \gg 1 \Rightarrow f(x) \ll 1. \quad (12)$$

При  $x = 1 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ :

$$h(x) = (1 + \varepsilon)a^2 + (2\varepsilon + \varepsilon^2)^2 \ll 1 \Rightarrow f(x) \gg 1, \quad (13)$$

следовательно, интеграл набирается в некой окрестности  $1 - \varepsilon' \leq x \leq 1 + \varepsilon'$ ,  $\varepsilon' \ll 1$ , а значит в  $h(x)$  интегрировать по  $\varepsilon$  от  $-\varepsilon'$  до  $\varepsilon'$ , отбросив члены высших порядков малости:

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^\infty \frac{1}{xa^2 + (1 - x^2)^2} dx \approx \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} \frac{1}{(1 + \varepsilon)a^2 + (2\varepsilon + \varepsilon^2)^2} d\varepsilon \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} \frac{1}{a^2 + (2\varepsilon)^2} d(2\varepsilon) = \frac{1}{2a} \arctan \frac{2\varepsilon}{a} \Big|_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} = \frac{1}{a} \arctan \frac{2\varepsilon'}{a}. \end{aligned} \quad (14)$$

При  $\hat{\varepsilon} \sim \sqrt{a} \hookrightarrow \hat{\varepsilon} \ll 1 \wedge \frac{2\hat{\varepsilon}}{a} \sim \frac{1}{\sqrt{a}} \gg 1$ , следовательно, приближения выше будут справедливы при  $\varepsilon' \geq \hat{\varepsilon}$  и

$$\frac{1}{a} \arctan \frac{2\varepsilon'}{a} \approx \frac{\pi}{2a}, \quad (15)$$

ответ:

$$\boxed{I(a) \approx \frac{\pi}{2a}} \quad (16)$$

## Задача 2

### I. $b \gg a$

Так как  $b \gg a$  и  $0 \leq x \leq a$ ,  $x \ll a \Rightarrow$

$$e^{\frac{x}{b}} \approx 1 + \frac{x}{b}, \quad \int_0^a \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}} - 1} dx \approx \int_0^a bx^{n-1} dx = \frac{bx^n}{n} \Big|_0^a = \frac{ba^n}{n}, \quad (17)$$

ответ:

$$\boxed{I(n, a, b) \approx \frac{ba^n}{n}}$$

II.  $n \gg 1$ ,  $nb \ll a$

Приблизительно найдем точку  $\tilde{x}$ , в которой подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}} - 1} \quad (18)$$

достигает максимума:

$$\left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=\tilde{x}} = \frac{n\tilde{x}^{n-1}}{e^{\frac{\tilde{x}}{b}} - 1} - \frac{\tilde{x}^n e^{\frac{\tilde{x}}{b}}}{\left(e^{\frac{\tilde{x}}{b}} - 1\right)^2} = 0, \quad \tilde{x} = \frac{nbe^{\frac{\tilde{x}}{b}}}{e^{\frac{\tilde{x}}{b}} - 1}. \quad (19)$$

Применяя метод итераций при  $\tilde{x}_0 = nb$ , так как  $n \gg 1$ :

$$\tilde{x}_1 = \frac{nbe^{\frac{\tilde{x}_0}{b}}}{e^{\frac{\tilde{x}_0}{b}} - 1} = \frac{nbe^n}{e^n - 1} \approx nb = \tilde{x}_0, \quad (20)$$

следовательно

$$\tilde{x} \approx nb. \quad (21)$$

При  $x' = \frac{1}{2}nb$ :

$$\frac{f(x')}{f(\tilde{x})} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{e^n - 1}{e^{\frac{n}{2}} - 1} \approx \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{e}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \ll 1, \quad (22)$$

при  $x'' = 2nb$ :

$$\frac{f(x'')}{f(\tilde{x})} = 2^n \frac{e^n - 1}{e^{2n} - 1} \approx 2^n e^{-n} = \left(\frac{2}{e}\right)^n \ll 1, \quad (23)$$

следовательно интеграл набирается в некоторой окрестности

$$U(\tilde{x}) : \forall x_u \in U(\tilde{x}) \hookrightarrow \frac{1}{2}nb < x_u < 2nb \ll a, \quad (24)$$

откуда

$$\forall x_u \in U(\tilde{x}) \hookrightarrow e^{\frac{n}{2}} - 1 < e^{\frac{x_u}{b}} - 1 \approx e^{\frac{x_u}{b}} \implies$$

$$\int_0^a \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}} - 1} dx \approx \int_0^a \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}}} dx \approx b^{n+1} \int_0^{\frac{a}{b}} \left(\frac{x}{b}\right)^n e^{-\frac{x}{b}} d\left(\frac{x}{b}\right) = b^{n+1} \Gamma(n+1). \quad (25)$$

В условии задачи не указано, является ли  $n$  целым числом (а, следовательно, так как  $n \gg 1$  — натуральным), поэтому ответ:

$$I(n, a, b) \approx b^{n+1} \Gamma(n+1), \text{ для } n \in \mathbb{N} \quad I(n, a, b) \approx b^{n+1} n!$$