Упражнение 4

I. I_1

Подынтегральная функция четная, и интеграл сводится к интегралу Лапласа:

$$I_1 = \int\limits_0^{\infty} \frac{x \sin(\lambda x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(\lambda x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{sign}(\lambda)\pi e^{-|\lambda|},$$

ответ:

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{2}\operatorname{sign}(\lambda)\pi e^{-|\lambda|}}$$

II. I_2

Из задачи с семинара и четности косинуса:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi e^{-|\lambda|}.$$

Для удобства положим $\lambda \geq 0$. Попробуем получить дифференциальное уравнение на $I_2(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\lambda} I_2(\lambda) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\int\limits_0^{\infty} \frac{x\sin(\lambda x)}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\infty} \frac{x^2\cos(\lambda x)}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^{\infty} \left[\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}\right]\cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\pi e^{-\lambda} - \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x, \\
\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} I_2(\lambda) &= -\frac{1}{2}\pi e^{-\lambda} + \int\limits_0^{\infty} \frac{x\sin(\lambda x)}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi e^{-\lambda} + I_2(\lambda).
\end{aligned}$$

Найдем решение полученного уравнения как сумму общего решения однородного и частного решения неоднородного:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} f(\lambda) - f(\lambda) = 0, &\quad f(\lambda) = C_1 e^{\lambda} + C_2 e^{-\lambda}, \\
\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} f_0(\lambda) - f_0(\lambda) = -\frac{1}{2}\pi e^{-\lambda}, &\quad f_0(\lambda) = \frac{1}{4}\pi e^{-\lambda}\lambda, \\
I_2(\lambda) = f(\lambda) + f_0(\lambda) &= \frac{1}{4}\pi e^{-\lambda}\lambda + C_1 e^{\lambda} + C_2 e^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

Так как, очевидно,

$$I_2(\lambda) \leq \int\limits_0^{\infty} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x \overset{(\textbf{УЗ})}{=} \frac{1}{2},$$

коэффициент C_1 должен быть равен нулю. Так как $\frac{1}{4}\pi e^{-\lambda}\lambda\Big|_{\lambda=0} = 0$, и при $\lambda = 0$ подынтегральная функция обращается в тождественный ноль, то $C_2 e^{-\lambda}\Big|_{\lambda=0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$, откуда получаем ответ для $\lambda \geq 0$:

$$I_2(\lambda) = \frac{1}{4}\pi\lambda e^{-\lambda}.$$

Так как подынтегральная функция нечетна относительно λ, ответ для общего случая:

$$\boxed{I_2 = \frac{1}{4}\pi\lambda e^{-|\lambda|}}$$