Домашняя работа №1

Сирый Р. А.

05 февраля 2023 г.

Упражнение 1

I. $\alpha \gg 1$

Пусть $\tilde{x}$ — корень уравнения $x - 1 = e^{-\alpha x}$, тогда,

$$\forall x \hookrightarrow e^{-\alpha x} \geq 0 \Rightarrow \tilde{x} > 1 \Rightarrow e^{-\alpha \tilde{x}} < e^{-\alpha} \ll 1,$$

следовательно, $0 < \tilde{x} - 1 \ll 1$, и $\tilde{x}$ можно представить в виде

$$\tilde{x} = 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{1}$$

От полученного данной подстановкой уравнения $\varepsilon = e^{-\alpha(1+\varepsilon)}$ отбросим малый член:

$$e^{-\alpha(1+\varepsilon)} \approx e{-\alpha}, \quad -\alpha \approx \ln \varepsilon,$$

откуда получаем $\varepsilon \approx e^{-\alpha}$, и, подставляя ε в (1), получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx 1 + e^{-\alpha}}$$

II. $\alpha \ll 1$

Пусть $\tilde{x}$ — корень уравнения $x - 1 = e^{-\alpha x}$, тогда,

$$\forall x \hookrightarrow e^{-\alpha x} \geq 0 \Rightarrow \tilde{x} > 1 \Rightarrow |-\alpha \tilde{x}| \ll 1,$$

следовательно, $0 < 1 - e^{-\alpha \tilde{x}} \ll 1$, и $e^{-\alpha \tilde{x}}$ можно представить в виде

$$e^{-\alpha \tilde{x}} = 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{2}$$

откуда $\tilde{x} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\varepsilon}$, и, подстановкой (2) в исходное уравнение,

$$\tilde{x} = 2 - \varepsilon, \tag{3}$$

$$\alpha(2 - \varepsilon) = \ln \frac{1}{1 - \varepsilon}.$$

Пренебрегая малой величиной, получаем

$$(2 - \varepsilon)\alpha \approx 2\alpha, \quad 2\alpha \approx \ln \frac{1}{1 - \varepsilon}, \quad \varepsilon \approx 1 - e^{-2\alpha},$$

откуда подстановкой в (3) получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx 1 + e^{-2\alpha}}$$

Упражнение 2

I. $\alpha \gg 1$

Пусть $\tilde{x}$ — корень уравнения $\ln x = e^{-\alpha x}$, тогда,

$$\forall x \hookrightarrow e^{-\alpha x} \geq 0 \Rightarrow \ln \tilde{x} > 0 \Rightarrow \tilde{x} > 1 \Rightarrow e^{-\alpha \tilde{x}} < e^{-\alpha} \ll 1,$$

следовательно, $0 < \ln \tilde{x} \ll 1$, и $\tilde{x}$ можно представить в виде

$$\tilde{x} = 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{4}$$

От полученного данной подстановкой уравнения $\ln(1+\varepsilon) = e^{-\alpha(1+\varepsilon)}$ возьмем экспоненту:

$$1 + \varepsilon = e^{e^{-\alpha(1+\varepsilon)}},$$

и, так как $\xi = e^{-\alpha(1+\varepsilon)} \ll 1$, разложим правую часть по степеням ξ:

$$1 + \varepsilon = e^{\xi} \approx 1 + \xi + \frac{1}{2}\xi^2.$$

Подставляя ξ и пренебрегая малыми величинами, получаем

$$\varepsilon \approx e^{-\alpha(1+\varepsilon)} + \frac{1}{2}e^{-2\alpha(1+\varepsilon)} \approx e^{-\alpha},$$

и, подставляя ε в (4), получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx 1 + e^{-\alpha}}$$

II. $\alpha \ll 1$

Пусть $\tilde{x}$ — корень уравнения $x - 1 = e^{-\alpha x}$, тогда,

$$\forall x \hookrightarrow e^{-\alpha x} \geq 0 \Rightarrow \tilde{x} > 1 \Rightarrow |-\alpha \tilde{x}| \ll 1,$$

следовательно, $0 < 1 - e^{-\alpha \tilde{x}} \ll 1$, и $e^{-\alpha \tilde{x}}$ можно представить в виде

$$e^{-\alpha \tilde{x}} = 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{5}$$

откуда $\tilde{x} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\varepsilon}$, и, подстановкой (5) в исходное уравнение,

$$\tilde{x} = e^{1-\varepsilon}, \tag{6}$$

$$\alpha e^{1-\varepsilon} = \ln \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Пренебрегая малой величиной, получаем

$$\alpha e^{1-\varepsilon} \approx \alpha e, \quad \alpha e \approx \ln \frac{1}{1-\varepsilon}, \quad \varepsilon = 1 - e^{-e\alpha},$$

откуда подстановкой в (6) получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx e^{e^{-e\alpha}}}$$

Упражнение 3

I. $\tilde{x}_1(\lambda)$

Пусть $0 > \tilde{x} > -1$ — корень уравнения $xe^x = \lambda$. При малых x таких, что $|x| \ll 1$,

$$xe^x \approx x(1 + x + \frac{1}{2}x^2) \approx x,$$

следовательно, $\tilde{x} \approx \tilde{x}e^x \approx \lambda$, ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx \lambda}$$

II. $\tilde{x}_2(\lambda)$

Домножим на -1 и прологарифмируем обе части уравнения:

$$x = \ln(-\lambda) - \ln(-x).$$

Чтобы записи были приятнее глазу, перепишем уравнение в следующем виде:

$$y = -x, \quad \xi = -\ln(-\lambda), \quad y = \xi + \ln y. \tag{7}$$

Пусть $\tilde{y}$ — корень данного уравнения, удовлетворяющий условию задачи $x_2(\lambda) < -1 \Leftrightarrow \tilde{y} > 1$. Применим метод итераций к (7) и докажем, что последовательность $\{y_n\}$ сходится в $\tilde{y}$.

Пусть $y_1 = 1$, тогда

$$y_2 = \xi + \ln y_1, \quad (\Delta y)_1 = y_2 - y_1 = \xi - 1.$$

Так как $|\lambda| \ll 1$, $\xi > 1$ и, следовательно,

$$y_2 > y_1, \quad (\Delta y)_1 > 0.$$

Докажем ограниченность сверху для $\{y_n\}$. Предположим, что $\exists n : y_n \geq \tilde{y}$, тогда

$$y_n = \xi + \ln y_{n-1}, \quad y_{n-1} = e^{y_n - \xi} = e^{(\tilde{y}-\xi)+(y_n-\tilde{y})} = \tilde{y}e^{y_n-\tilde{y}} \geq \tilde{y},$$

откуда по индукции:

$$\exists n : y_n \geq \tilde{y} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ k \leq n \hookrightarrow y_k \geq \tilde{y},$$

что противоречит начальным условиям $\tilde{y} > 1,\ y_1 = 1$, следовательно $\{y_n\}$ ограниченна сверху, и

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow y_n < \tilde{y}. \tag{8}$$

Докажем, что последовательность $\{y_n\}$ монотонно возрастает:

$$(\Delta y)_n = y_{n+1} - y_n = (\xi + \ln y_n) - (\xi + \ln y_{n-1}) = \ln\frac{y_n}{y_{n-1}} = \ln\left(1 + \frac{(\Delta y)_{n-1}}{y_{n-1}}\right),$$

$$(\Delta y)_{n-1} > 0 \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{(\Delta y)_{n-1}}{y_{n-1}}\right) > 0 \Rightarrow (\Delta y)_n > 0,$$

откуда по индукции:

$$(\Delta y)_1 > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow (\Delta y)_n > 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow y_{n+1} > y_n,$$

т.е. $\{y_n\}$ монотонно возрастает.

Отсюда и из условия (8) ограниченности последовательности $\{y_n\}$

$$\exists \lim_{n\to\infty} y_n = \hat{y}, \quad \hat{y} \le \tilde{y}.$$

Переходя к пределу в формуле $y_{n+1} = \xi + \ln y_n$ при $n \to \infty$, получаем $\hat{y} = \xi + \ln \hat{y}$, т.е. $\hat{y} = \tilde{y}$. ■

То, с какой точностью записывать ответ, сильно зависит от λ. Например, при $x_1 = -1$ для $\lambda = -e^{-4}$, с точностью до трёх значащих цифр

$$\tilde{x}_2(-e^{-4}) \approx x_6 = -(\xi + \ln(\xi + \ln(\xi + \ln(\xi + \ln \xi)))),\ \xi = -\ln(-\lambda) = 4,$$

а для $\lambda = -e^{-8}$ ту же точность получаем при

$$\tilde{x}_2(-e^{-8}) \approx x_4 = -(\xi + \ln(\xi + \ln \xi)),\ \xi = -\ln(-\lambda) = 8.$$

Буду считать, что $\lambda = -e^{-4} \approx -0.02$ удовлетворяет условию $|\lambda| \ll 1$ и запишу в ответ $\tilde{x}_2(\lambda) \approx x_6$:

$$\boxed{\tilde{x}_2(\lambda) \approx -(\xi + \ln(\xi + \ln(\xi + \ln(\xi + \ln \xi)))),\ \xi = -\ln(-\lambda)}$$

Упражнение 4

Пусть $\tilde{x}$ — корень данного уравнения, а $\lambda = -\frac{1}{e} + \delta, 0 < \delta \ll 1$, тогда $\tilde{x}$ можно представить в виде

$$\tilde{x} = -1 + \varepsilon, \quad |\varepsilon| \ll 1. \tag{9}$$

Домножим обе части уравнения на e и разложим левую часть по степеням ε:

$$(-1+\varepsilon)e^{\varepsilon} \approx (-1+\varepsilon)(1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2) \approx -1 + \delta e,$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2 = \delta e, \quad \varepsilon = \pm\sqrt{2\delta e} = \pm\sqrt{2(\lambda e + 1)},$$

отсюда, подставляя в (9) и учитывая, что $\tilde{x}_1(\lambda) > \tilde{x}_2(\lambda)$, ответ:

$$\boxed{\tilde{x}_1(\lambda) = -1 + \sqrt{2(\lambda e + 1)}, \quad \tilde{x}_2(\lambda) = -1 - \sqrt{2(\lambda e + 1)}}$$

Задача 1

I. $0 < \alpha - 1 \ll 1$

Нарисуем на графике правую часть уравнения, и левую при $\alpha \in \{2,\ 1,\ \frac{1}{2}\}$ (**рис. 1**). Вблизи нуля функции $\tanh \alpha x$ и $\arctan x$ ведут себя линейно: $\tanh \alpha x \sim \alpha x$, $\arctan x \sim x$. Так как функции слева и справа нечетны, помимо тривиального корня $\tilde{x}_0 = 0$ остальные (если существуют) связаны соотношением $\tilde{x}_i^+ = -\tilde{x}_i^-$, $\tilde{x}_i^+ > 0$. Отсюда и из графика можно сделать выводы, аналогичные выводам из конспекта семинара по задаче (1), причем интересует случай, когда

$$\alpha = 1 + \varepsilon > 1,\ 0 < \varepsilon \ll 1,$$

т. е. имеются две нетривиальные точки пересечения, и при малых ε корни уравнения малы.

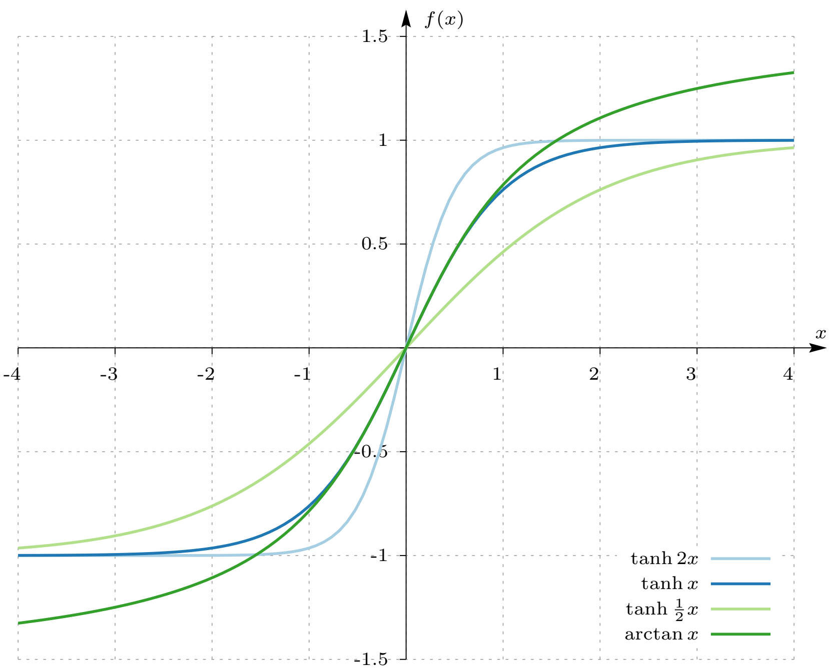

Рис. 1: График функций $\boldsymbol{\arctan x}$ и $\boldsymbol{\tanh \alpha x}$ при различных $\boldsymbol{\alpha}$

Разложим обе части уравнения по степеням аргументов:

$$\tanh \alpha x \approx (1+\varepsilon)x - \frac{1}{3}(1+\varepsilon)^3 x^3 + \frac{2}{15}(1+\varepsilon)^5 x^5, \quad \arctan x \approx x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5,$$

$$\varepsilon x - \frac{1}{3}\left((1+\varepsilon)^3 - 1\right)x^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}(1+\varepsilon)^5 - 1\right)x^5 = 0.$$

Из $\varepsilon \ll 1$ следует $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ и, следовательно,

$$\varepsilon x - \varepsilon x^3 + \left(\frac{2}{3}\varepsilon - \frac{1}{15}\right)x^5 = 0.$$

Разделим уравнение на x, домножим на 15 для удобства, произведем замену $y = x^2$ и решим приближенно полученное квадратное уравнение:

$$y^2(10\varepsilon - 1) - 15\varepsilon y + 15\varepsilon = 0,$$

$$\tilde{y} = \frac{15\varepsilon \pm \sqrt{15^2\varepsilon^2 - 60\varepsilon(10\varepsilon - 1)}}{2(10\varepsilon - 1)} = \frac{\pm 30\sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{1 - \frac{39}{4}\varepsilon} + 15\varepsilon}{2(10\varepsilon - 1)} \approx \pm 15\sqrt{\varepsilon},$$

а так как $y > 0$:

$$\tilde{y} \approx 15\sqrt{\varepsilon}.$$

Подставляя полученный результат в $\varepsilon = \alpha - 1$ и $x = \pm\sqrt{y}$, получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x}_0 = 0,\ \tilde{x}_{1,2} \approx \pm\sqrt{15\sqrt{\alpha - 1}}}$$

II. $\alpha \gg 1$

Найдем сначала положительный корень данного уравнения $\tilde{x}_1 > 0$. Так как $\alpha \gg 1$,

$$\tanh \alpha\tilde{x}_1 = \frac{e^{\alpha\tilde{x}_1} - e^{-\alpha\tilde{x}_1}}{e^{\alpha\tilde{x}_1} + e^{-\alpha\tilde{x}_1}} = 1 - \frac{2}{e^{2\alpha\tilde{x}_1} + 1} = 1 - \varepsilon,\ \ 0 < \varepsilon < 1. \tag{10}$$

В грубом приближении $\tanh \alpha\tilde{x}_1 \approx 1,\ \tilde{x}_1 \approx \tan 1 \Rightarrow \varepsilon \ll 1$. Выразим $\tilde{x}_1$ через ε:

$$1 - \varepsilon = \arctan \tilde{x}_1, \quad \tilde{x}_1 = \tan(1 - \varepsilon) = \frac{\tan 1 - \tan\varepsilon}{1 + \tan 1 \tan\varepsilon}.$$

Пусть $\tan 1 = \beta$. Так как $\beta \tan\varepsilon \ll 1$,

$$\tilde{x}_1 = \beta \frac{1 - \frac{\tan\varepsilon}{\beta}}{1 + \beta\tan\varepsilon} = \beta - \frac{(\beta^2 + 1)\tan\varepsilon}{1 + \beta\tan\varepsilon} \approx \beta - (\beta^2 + 1)\varepsilon. \tag{11}$$

Теперь преобразуем (10) и подставим $\tilde{x}_1$ из (11):

$$\varepsilon = \frac{2}{e^{2\alpha\tilde{x}_1 + 1}}, \quad \tilde{x}_1 = \frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \approx \beta - (\beta^2 + 1)\varepsilon.$$

Применим метод итераций к полученному уравнению. Возьмем $\varepsilon_1 = 0$, тогда:

$$\frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - 1\right) = \beta - (\beta^2 + 1)\varepsilon_n, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{e^{2\alpha\beta} + 1}, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{e^{2\alpha\beta}\left[e^{-(\beta^2+1)\frac{1}{e^{2\alpha\beta}+1}}\right] + 1}.$$

Уже при $\alpha = 5$

$$\varepsilon_2 \approx 1.7 \cdot 10^{-7},\ \frac{(\Delta\varepsilon)_2}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \approx 10^{-5} \Rightarrow (\Delta\varepsilon)_2 \ll \varepsilon_2,$$

а следовательно

$$\varepsilon \approx \varepsilon_2 \approx \frac{1}{e^{2\alpha\beta} + 1}$$

является достаточным приближением.

Подставляя полученную величину в (11), получаем приближенное выражение для $\tilde{x}_1$:

$$\tilde{x}_1 \approx \beta - \frac{\beta^2 + 1}{e^{2\alpha\beta} + 1}.$$

Так как в исходном уравнении правая и левая части — нечетные функции, $\exists \tilde{x}_2 = -\tilde{x}_1$: корень исходного уравнения, откуда, учитывая тривиальный корень $\tilde{x}_0 = 0$, ответ:

$$\boxed{\tilde{x}_0 = 0,\ \tilde{x}_{1,2} \approx \pm\left(\beta - \frac{\beta^2 + 1}{e^{2\alpha\beta} + 1}\right)}$$

Задача 2

Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetuer eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdiet justo nec dolor.

Etiam euismod. Fusce facilisis lacinia dui. Suspendisse potenti. In mi erat, cursus id, nonummy sed, ullamcorper eget, sapien. Praesent pretium, magna in eleifend egestas, pede pede pretium lorem, quis consectetuer tortor sapien facilisis magna. Mauris quis magna varius nulla scelerisque imperdiet. Aliquam non quam. Aliquam porttitor quam a lacus. Praesent vel arcu ut tortor cursus volutpat. In vitae pede quis diam bibendum placerat. Fusce elementum convallis neque. Sed dolor orci, scelerisque ac, dapibus nec, ultricies ut, mi. Duis nec dui quis leo sagittis commodo.