Домашняя работа №2

Сирый Р. А.

12 февраля 2023 г.

Упражнение 1

Заменив переменную, обезразмерим интеграл:

$$t = bx, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{b}\mathrm{d}t, \quad I(a,b) = \int\limits_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin^2 bx}{x^2}\,\mathrm{d}x = b\int\limits_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

I. $a \gg b$

При $t \sim \sqrt{\frac{b}{a}} \ll 1$ степень при экспоненте $-\frac{a}{b}t \sim -\sqrt{\frac{a}{b}} \ll -1$, следовательно, интеграл набирается при малых t и $\sin^2 t$ можно разложить в ряд:

$$I(a,b) = b\int\limits_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t \approx b\int\limits_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\frac{t^2}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{b^2}{a}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\,\mathrm{d}\left(\frac{a}{b}t\right) = \frac{b^2}{a},$$

ответ:

$$\boxed{I(a,b) \approx \frac{b^2}{a}}$$

II. $a \ll b$

При $t \sim 10$, знаменатель подынтегральной функции $\frac{1}{t^2} \sim 0.01 \ll 1$, а следовательно подынтегральная функция $f(t) \ll 1$ и интеграл набирается в некой окрестности $0 \le t \le t' \sim 10$. При этом степень при экспоненте остается мала: $-\frac{a}{b}t \ll 1$, следовательно

$$e^{-\frac{a}{b}t} \approx 1,\ I(a,b) = b\int\limits_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t \approx b\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Полученный интеграл вычисляется:

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin^2 t}{t}\bigg|_0^\infty - \int\limits_0^\infty t\,\mathrm{d}\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right) = -\int\limits_0^\infty t\,\mathrm{d}\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)$$

$$= -\int\limits_0^\infty t\left(\frac{2\sin t\cos t}{t^2} - \frac{2\sin^2 t}{t^3}\right)\,\mathrm{d}t = -\int\limits_0^\infty \frac{\sin 2t}{2t}\,\mathrm{d}(2t) + 2I, \quad I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin 2t}{2t}\,\mathrm{d}(2t) = \frac{\pi}{2},$$

ответ:

$$\boxed{I(a,b) \approx \frac{\pi b}{2}}$$

Упражнение 2

I. $a \ll 1, \quad b \sim 1$

Так как $b \sim 1$, $\forall x \hookrightarrow (x-1)^2 + b^2 \sim C \geq 1$, и при $x \ll 1$ справедливо $\frac{1}{x^2+a^2} \gg 1$, интеграл набирается в некоторой окрестности нуля $0 \leq x \leq x' \ll 1$, и можно пренебречь величинами высших порядков малости:

$$I(a,b) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}\frac{1}{(x-1)^2+b^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{1+b^2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+b^2}\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\bigg|_0^\infty =$$
$$= \frac{\pi}{2a(1+b^2),}$$

ответ:

$$\boxed{I(a,b) = \frac{\pi}{2a(1+b^2)}}$$

II. $a = b \gg 1$

Предположим, что при больших a на данной области интегрирования можно пренебречь единицей в знаменателе:

$$I(a) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}\frac{1}{(x-1)^2+a^2}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Проверку предположения проведем оценкой сверху и снизу:

$$a \gg 1 \Rightarrow \forall x \leq \infty, x \geq 0 \hookrightarrow \frac{1}{\left((x-1)^2+a^2\right)^2} \geq \frac{1}{x^2+a^2}\frac{1}{(x-1)^2+a^2} \geq \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2} > 0,$$
$$\Longrightarrow \int\limits_0^\infty \frac{1}{\left((x-1)^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}\frac{1}{(x-1)^2+a^2}\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x,$$

а следовательно, если выполняется

$$I_1 \equiv \int\limits_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^\infty \frac{1}{\left((x-1)^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^\infty \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x \equiv I_2,$$

что равносильно

$$I_2 - I_1 \ll I_1,$$

то наше предположение верно.

Вычислим полученный неопределенный интеграл. Заменим переменную:

$$x = a\tan u, \quad \mathrm{d}x = \frac{a}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u, \quad u = \arctan\frac{x}{a},$$

$$\begin{aligned}\hat{I}(x) &= \int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}\int\frac{1}{\left(\tan^2 u + 1^2\right)^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a^3}\int\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a^3}\int\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \\ &= \frac{1}{2a^3}\int\left(\left(2\cos^2 u - 1\right)+1\right)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4a^3}\int\left(\cos(2u)+1\right)\,\mathrm{d}(2u) = \frac{\sin(2u)+2u}{4a^3} + C = \\ &= \frac{1}{4a^3}\left(\frac{2\tan u}{1+\tan^2 u}+2u\right)+C = \frac{1}{2a^3}\left(\frac{ax}{a^2+x^2}+\arctan\frac{x}{a}\right)+C,\end{aligned}$$

откуда:

$$I_1 = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4a^3}, \quad I_2 = \int\limits_{-1}^\infty \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4a^3} + \frac{1}{2a^3}\left(\frac{a}{a^2+1}+\arctan\frac{1}{a}\right).$$

Проверим предположение:

$$a \gg 1 \Rightarrow I_2 - I_1 = \frac{1}{2a^3}\left(\frac{a}{a^2+1}+\arctan\frac{1}{a}\right) \approx \frac{1}{2a^3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right) \ll \frac{1}{2a^3}\left(\frac{\pi}{2}\right) = I_1,$$

а следовательно наше предположение верно, и $I(a) \approx I_1$, ответ:

$$\boxed{I(a) \approx \frac{\pi}{4a^3}}$$

Упражнение 3

Заменив переменную, обезразмерим интеграл:

$$t = bx, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{b}\mathrm{d}t,$$

$$I(a,b) = \int\limits_0^\infty \frac{x}{x^2+a^2}(1-\tanh(bx))\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \frac{t}{t^2+a^2b^2}(1-\tanh t)\,\mathrm{d}t \equiv \int\limits_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Так как $a \ll 1$ и $b \ll 1$, выполняется $1 \gg ab \gg a^2b^2$. Представим интеграл в виде

$$\int\limits_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{t'} f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{t'}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_T^\infty f(t)\,\mathrm{d}t, \quad 0 < t' < 1, \quad T \sim 1. \tag{1}$$

Предположим, что t' достаточно мал и $\tanh t$ в первом слагаемом можно разложить:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{t'} f(t)\,\mathrm{d}t &\approx \int\limits_0^{t'} \frac{t}{t^2+a^2b^2}(1-t) \;= \frac{1}{2}\int\limits_0^{t'}\frac{1}{t^2+a^2b^2}\,\mathrm{d}(t^2) + \int\limits_0^{t'}\left(1-\frac{a^2b^2}{t^2+a^2b^2}\right)\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(t^2+a^2b^2\right) - t + ab\arctan\frac{t}{ab}\Bigg|_0^{t'} = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{t'^2}{a^2b^2}\right) - t' + ab\arctan\frac{t'}{ab}.\end{aligned}$$

При $t' = 1/2$, $\tanh t' \approx t'$ с точностью примерно 10%, и это значение подойдет для грубых оценок с логарифмической точностью. Для данного t' получаем:

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{t'^2}{a^2b^2}\right) - t' \approx -\ln(ab) + \ln(t') - t' = -\ln(ab) + C_1,\ C_1 \sim 1,$$

$$ab\arctan\frac{t'}{ab} < \frac{\pi ab}{2} \ll 1,\ \Longrightarrow$$

$$\int\limits_0^{t'} f(t)\ \mathrm{d}t \approx -ln(ab) + C_1, \quad C_1 \sim 1.$$

Для оценки третьего слагаемого из (1) возьмем $T = 2$:

$$a^2b^2 \ll t' \Rightarrow \forall t \geq T > t' \hookrightarrow \frac{t}{t^2 + a^2b^2} \approx \frac{1}{t}, \quad t \geq T = 2 \implies$$

$$C_3 \equiv \int\limits_T^\infty f(t)\ dt \approx \int\limits_T^\infty \frac{1}{t}(1-\tanh t)\ \mathrm{d}t = \int\limits_T^\infty \frac{1}{t}\frac{2e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\ \mathrm{d}t < \int\limits_T^\infty e^{-2t}\ \mathrm{d}t = e^{-4} \sim 10^{-2},$$

а, следовательно, при расчете с логарифмической точностью им можно пренебречь.

Так как для $t \geq t'$ выполняется

$$f(t) \approx \frac{1}{t}(1-\tanh t) \geq f(t+\varepsilon),\ \varepsilon > 0,$$

т.е. f(t) не имеет экстремальных точек при $t \geq t'$, оценим грубо второе слагаемое из (1) как площадь трапеции:

$$C_2 \equiv \int\limits_t^{\prime T} f(t)\ \mathrm{d}t \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t'}(1-\tanh t') + \frac{1}{T}(1-\tanh T)\right) \approx \frac{1}{2},$$

откуда получаем

$$\int\limits_0^\infty f(t)\ \mathrm{d}t = -\ln(ab) + (C_1 + C_2 + C_3) = -\ln(ab) + C,\ C \sim 1,$$

ответ:

$$\boxed{I(a,b) = -\ln(ab) + C,\ C \sim 1}$$

Упражнение 4

$$S(a,b) = \sum_{n=0}^\infty n^a e^{-bn}$$

I. $a \sim 1, \quad b \ll 1$

II. $b \gg \frac{a}{b} \gg 1$

Задача 1

Определим $f(x)$ как подынтегральную функцию, и $h(x)$ как ее знаменатель:

$$I(a) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{xa^2 + (1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x \equiv \int\limits_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \int\limits_0^\infty \frac{1}{h(x)}\,\mathrm{d}x, \quad h(x) = xa^2 + (1-x^2)^2.$$

I. $a \gg 1$

При очень малых x, т.е. $xa^2 \ll 1$, следует

$$x \ll \frac{1}{a^2} \ll 1 \Rightarrow (1-x^2)^2 \approx 1 \Rightarrow h(x) \sim 1 \Rightarrow f(x) \sim 1.$$

При $xa \sim 1$:

$$xa^2 \sim a \gg 1,\ x \sim \frac{1}{a} \ll 1 \Rightarrow (1-x^2)^2 \approx 1 \Rightarrow h(x) \sim a \gg 1 \Rightarrow f(x) \ll 1,$$

следовательно, интеграл набирается в некой окрестности нуля $x \leq x' \sim \frac{1}{a} \ll 1$, а значит в $h(x)$ можно отбросить члены высших порядков малости и интегрировать от 0 до x':

$$I(a) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{xa^2 + (1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^{x'} \frac{1}{xa^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int\limits_0^{x'} \frac{1}{xa^2+1}\,\mathrm{d}(xa^2+1) =$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{-1}{(xa^2+1)^2}\bigg|_0^{x'} = \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{1}{(x'a^2+1)^2}\right),\ x' \sim \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{(x'a^2+1)^2} \sim \frac{1}{a^2} \implies$$

ответ:

$$\boxed{I(a) \approx \frac{1}{a^2}}$$

II. $a \ll 1$

При $x \ll 1$ выполняется

$$xa^2 \ll 1, (1-x^2)^2 \sim 1 \Rightarrow h(x) \sim 1 \Rightarrow f(x) \sim 1,$$

при $x \gg 1$:

$$(1-x^2)^2 \gg 1 \Rightarrow h(x) \gg 1 \Rightarrow f(x) \ll 1.$$

При $x = 1 + \varepsilon,\ \varepsilon \ll 1$:

$$h(x) = (1+\varepsilon)a^2 + (2\varepsilon + \varepsilon^2)^2 \ll 1 \Rightarrow f(x) \gg 1,$$

следовательно, интеграл набирается в некой окрестности $1-\varepsilon' \le x \le 1+\varepsilon'$, $\varepsilon' \ll 1$, а значит в $h(x)$ интегрировать по ε от $-\varepsilon'$ до ε', отбросив члены высших порядков малости:

$$I(a) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{xa^2+(1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} \frac{1}{(1+\varepsilon)a^2+(2\varepsilon+\varepsilon^2)^2}\,\mathrm{d}\varepsilon \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\int\limits_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} \frac{1}{a^2+(2\varepsilon)^2}\,\mathrm{d}(2\varepsilon) = \frac{1}{2a}\arctan\frac{2\varepsilon}{a}\bigg|_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} = \frac{1}{a}\arctan\frac{2\varepsilon'}{a}.$$

При $\hat\varepsilon \sim \sqrt{a} \hookrightarrow \hat\varepsilon \ll 1 \ \wedge \ \frac{2\hat\varepsilon}{a} \sim \frac{1}{\sqrt{a}} \gg 1$, следовательно, приближения выше будут справедливы при $\varepsilon' \ge \hat\varepsilon$ и

$$\frac{1}{a}\arctan\frac{2\varepsilon'}{a} \approx \frac{\pi}{2a},$$

ответ:

$$\boxed{I(a) \approx \frac{\pi}{2a}}$$

Задача 2

I. $b \gg a$

Так как $b \gg a$ и $0 \le x \le a$, $x \ll a \implies$

$$e^{\frac{x}{b}} \approx 1 + \frac{x}{b}, \quad \int\limits_0^a \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}}-1}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^a bx^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{bx^n}{n}\bigg|_0^a = \frac{ba^n}{n},$$

ответ:

$$\boxed{I(n,a,b) \approx \frac{ba^n}{n}}$$

II. $n \gg 1, \ nb \ll a$

Приблизительно найдем точку $\tilde x$, в которой подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}}-1}$$

достигает максимума:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\bigg|_{x=\tilde x} = \frac{n\tilde x^{n-1}}{e^{\frac{\tilde x}{b}}-1} - \frac{\tilde x^n e^{\frac{\tilde x}{b}}}{\left(e^{\frac{\tilde x}{b}}-1\right)^2} = 0, \quad \tilde x = \frac{nbe^{\frac{\tilde x}{b}}}{e^{\frac{\tilde x}{b}}-1}.$$

Применяя метод итераций при $\tilde x_0 = nb$, так как $n \gg 1$:

$$\tilde x_1 = \frac{nbe^{\frac{\tilde x_0}{b}}}{e^{\frac{\tilde x_0}{b}}-1} = \frac{nbe^n}{e^n-1} \approx nb = \tilde x_0,$$

следовательно

$$\tilde{x} \approx nb.$$

При $x' = \frac{1}{2}nb$:

$$\frac{f(x')}{f(\tilde{x})} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{e^n - 1}{e^{\frac{n}{2}} - 1} \approx \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{e}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \ll 1,$$

при $x'' = 2nb$:

$$\frac{f(x'')}{f(\tilde{x})} = 2^n \frac{e^n - 1}{e^{2n} - 1} \approx 2^n e^{-n} = \left(\frac{2}{e}\right)^n \ll 1,$$

следовательно интеграл набирается в некоторой окрестности

$$U(\tilde{x}) : \ \forall x_u \in U(\tilde{x}) \hookrightarrow \frac{1}{2}nb < x_u < 2nb \ll a,$$

откуда

$$\forall x_u \in U(\tilde{x}) \hookrightarrow e^{\frac{n}{2}} - 1 < e^{\frac{x_u}{b}} - 1 \approx e^{\frac{x_u}{b}} \implies$$

$$\int\limits_0^a \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}} - 1}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^a \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}}}\,\mathrm{d}x \approx b^{n+1} \int\limits_0^\infty \left(\frac{x}{b}\right)^n e^{-\frac{x}{b}}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{b}\right) = b^{n+1}\Gamma(n+1).$$

В условии задачи не указано, является ли n целым числом (а, следовательно, так как $n \gg 1$ — натуральным), поэтому ответ:

$$\boxed{I(n,a,b) \approx b^{n+1}\Gamma(n+1), \ \text{для } n \in \mathbb{N} \ I(n,a,b) \approx b^{n+1} n!}$$