Задача 1

Определим $f(x)$ как подынтегральную функцию, и $h(x)$ как ее знаменатель:

$$I(a) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{xa^2 + (1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x \equiv \int\limits_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \int\limits_0^\infty \frac{1}{h(x)}\,\mathrm{d}x, \quad h(x) = xa^2 + (1-x^2)^2.$$

I. $a \gg 1$

При очень малых x, т.е. $xa^2 \ll 1$, следует

$$x \ll \frac{1}{a^2} \ll 1 \Rightarrow (1-x^2)^2 \approx 1 \Rightarrow h(x) \sim 1 \Rightarrow f(x) \sim 1.$$

При $xa \sim 1$:

$$xa^2 \sim a \gg 1,\ x \sim \frac{1}{a} \ll 1 \Rightarrow (1-x^2)^2 \approx 1 \Rightarrow h(x) \sim a \gg 1 \Rightarrow f(x) \ll 1,$$

следовательно, интеграл набирается в некой окрестности нуля $x \leq x' \sim \frac{1}{a} \ll 1$, а значит в $h(x)$ можно отбросить члены высших порядков малости и интегрировать от 0 до x':

$$I(a) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{xa^2 + (1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^{x'} \frac{1}{xa^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int\limits_0^{x'} \frac{1}{xa^2+1}\,\mathrm{d}(xa^2+1) =$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{-1}{(xa^2+1)^2}\Bigg|_0^{x'} = \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{1}{(x'a^2+1)^2}\right),\ x' \sim \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{(x'a^2+1)^2} \sim \frac{1}{a^2} \implies$$

ответ:

$$\boxed{I(a) \approx \frac{1}{a^2}}$$

II. $a \ll 1$

При $x \ll 1$ выполняется

$$xa^2 \ll 1, (1-x^2)^2 \sim 1 \Rightarrow h(x) \sim 1 \Rightarrow f(x) \sim 1,$$

при $x \gg 1$:

$$(1-x^2)^2 \gg 1 \Rightarrow h(x) \gg 1 \Rightarrow f(x) \ll 1.$$

При $x = 1 + \varepsilon,\ \varepsilon \ll 1$:

$$h(x) = (1+\varepsilon)a^2 + (2\varepsilon + \varepsilon^2)^2 \ll 1 \Rightarrow f(x) \gg 1,$$

следовательно, интеграл набирается в некой окрестности $1 - \varepsilon' \leq x \leq 1 + \varepsilon',\ \varepsilon' \ll 1$, а значит в $h(x)$ интегрировать по ε от $-\varepsilon'$ до ε', отбросив члены высших порядков малости:

$$I(a) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{xa^2 + (1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} \frac{1}{(1+\varepsilon)a^2 + (2\varepsilon+\varepsilon^2)^2}\,\mathrm{d}\varepsilon \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\int\limits_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} \frac{1}{a^2 + (2\varepsilon)^2}\,\mathrm{d}(2\varepsilon) = \frac{1}{2a}\arctan\frac{2\varepsilon}{a}\Bigg|_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} = \frac{1}{a}\arctan\frac{2\varepsilon'}{a}.$$

При $\hat{\varepsilon} \sim \sqrt{a} \hookrightarrow \hat{\varepsilon} \ll 1 \ \wedge \ \frac{2\hat{\varepsilon}}{a} \sim \frac{1}{\sqrt{a}} \gg 1$, следовательно, приближения выше будут справедливы при $\varepsilon' \geq \hat{\varepsilon}$ и

$$\frac{1}{a} \arctan \frac{2\varepsilon'}{a} \approx \frac{\pi}{2a},$$

ответ:

$$\boxed{I(a) \approx \frac{\pi}{2a}}$$