

Упражнение 2

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = -\lambda(x-1)^2(x-2)^2, \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

Так как $\forall x \in \{1, 2\} \hookrightarrow f(x) = 0$ и $\forall x \notin \{1, 2\} \hookrightarrow f(x) < 0$, в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ находятся максимумы $f(x)$, а следовательно, и максимумы $g(x)$. Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \lambda \tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) = -(x-1)^2(x-2)^2,$$

тогда, так как

$$\tilde{f}''(x) = -[8(x-1)(x-2) + 2((x-1)^2 + (x-2)^2)], \quad \tilde{f}''(x_1) = \tilde{f}''(x_2) = -2 \sim 1$$

и $\lambda \rightarrow \infty$, оба максимума $g(x)$ резкие и

$$I(\lambda) = \int_0^\infty g(x) dx = \int_0^\infty e^{\lambda \tilde{f}(x)} dx \approx e^{\lambda \tilde{f}(x_1)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\tilde{f}''(x_1)|}} + e^{\lambda \tilde{f}(x_2)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\tilde{f}''(x_2)|}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}},$$

ответ:

$$\boxed{I(\lambda) = 2\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}}$$