Упражнение 4

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = \lambda\left(\sin x - x\right), \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \lambda \tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) = \sin x - x$$

. Так как $\forall x > 0 \hookrightarrow \sin x < x$, в точке $\hat{x} = 0$ $\tilde{f}(x)$, а следовательно, и $g(x)$, имеет максимум на участке $[0, +\infty]$. Разложим $f(x)$ по формуле Тейлора:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \lambda\left(-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})\right) = \xi_3(x) + \xi_5(x) + \dots + \xi_{2n-1}(x) + o(x^{2n}).$$

Проверим условия, при которых на участке Δx, на котором набирается данный интеграл, можно пренебречь членами высших порядков:

$$\lambda \to +\infty,\ \xi_3(\Delta x) = \frac{1}{6}\lambda(\Delta x)^3 \sim 1,\ \Delta x \sim \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}} \ll 1 \implies$$

$$\forall k \geq 3 \hookrightarrow \xi_{2k-1}(\Delta x) = \frac{1}{(2k-1)!}\lambda(\Delta x)^{2k-1} \sim \frac{\lambda}{\lambda^{(2k-1)/3}} = \frac{1}{\lambda^{(2k-4)/3}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} \ll \xi_3(\Delta x) \sim 1,$$

а следовательно,

$$I(\lambda) = \int\limits_0^1 e^{\lambda(\sin x - x)}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{6}\lambda x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Так как $\Delta x \ll 1$,

$$I(\lambda) = \int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{6}\lambda x^3}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{6}\lambda x^3}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2}{\lambda x^2} e^{-\frac{1}{6}\lambda x^3}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{6}\lambda x^3\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt[3]{36\lambda}} \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\lambda x^3\right)^{-2/3} e^{-\frac{1}{6}\lambda x^3}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{6}\lambda x^3\right), \quad y = \frac{1}{6}\lambda x^3,$$

$$I(\lambda) \approx \frac{2}{\sqrt[3]{36\lambda}} \int\limits_0^{+\infty} y^{-2/3} e^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt[3]{36\lambda,}}$$

ответ:

$$\boxed{I(\lambda) = \frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt[3]{36\lambda}}}$$