Упражнение 4

Можно сразу опустить первый член, так как он равен нулю:

$$S(a,b) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n^a e^{-bn} = \sum_{n=1}^{\infty} n^a e^{-bn}.$$

Сделал это для удобства рассуждений (чтобы, например, игнорировать случай $n = 0$ в утверждениях вроде $f'(n) \ll f(n)$), отсюда получаем $n \in \mathbb{N}$.

I. $a \sim 1, \quad b \ll 1$

Сравним $f'(n)$ и $f(n)$:

$$f'(n) = an^{a-1}e^{-bn} - bn^a e^{-bn} = \left(\frac{a}{n} - b\right) f(n),$$

а следовательно, так как $a \sim 1$ и $b \ll 1$, начиная с некоторого

$$n' \gg 1, \tag{\textbf{У4}.1}$$

можно будет приблизить сумму интегралом.

Попробуем подобрать n' следующим образом. При $n \approx \frac{a}{b}$ получаем $f'({}^a\!/\!_b) \approx 0$, т.е. в этой точке будет находится максимум $f(n)$, и если мы подберем

$$(n')^a \ll ({}^a\!/\!_b)^a, \tag{\textbf{У4}.2}$$

то интерал охватит примерно всю область, на которой он набирается:

$$\sum_{n=n'}^{\infty} f(n) \approx \int\limits_{n'}^{\infty} f(n)\,\mathrm{d}n + \frac{1}{2} f(n') \approx \int\limits_{0}^{\infty} f(n)\,\mathrm{d}n + \frac{1}{2} f(n') = \frac{1}{b^a}\Gamma(a+1) + \frac{1}{2} n'^a e^{-bn'}.$$

Оценим сумму остальных членов сверху:

$$n' \ll \frac{a}{b} \Rightarrow \forall n < n' \hookrightarrow f(n) \le f(n') \Rightarrow \sum_{n=1}^{n'-1} f(n) \le (n'-1) f(n'-1) = (n'-1)^{(a+1)} e^{-b(n'-1)}.$$

Так как $n' \ll \frac{a}{b}$, $bn' \ll a \sim 1 \Rightarrow e^{-bn'} \approx e^{-b(n-1)} 1$, а следовательно, если выполняется

$$(n'-1)^{(a+1)} \ll \frac{1}{b^a}, \tag{\textbf{У4}.3}$$

то

$$\sum_{n=1}^{n'-1} f(n) \approx (n'-1)^{(a+1)} \ll \frac{1}{b^a}\Gamma(a+1) + \frac{1}{2} n'^a \approx \frac{1}{b^a}\Gamma(a+1) \approx \sum_{n=n'}^{\infty} f(n) \implies$$
$$S(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{n'-1} f(n) + \sum_{n=n'}^{\infty} f(n) \approx \sum_{n=n'}^{\infty} f(n) \approx \frac{1}{b^a}\Gamma(a+1).$$

Осталось подобрать n'. Объединим условия (**У4**.1), (**У4**.2) и (**У4**.3):

$$\begin{cases} n' \gg 1 \\ n'^a \ll \left(\frac{a}{b}\right)^a \\ (n'-1)^{(a+1)} \ll \frac{1}{b^a} \end{cases} \xLeftrightarrow{a\sim 1,\ n'\gg 1} \begin{cases} n' \gg 1 \\ n'^{(a+1)} b^a \ll 1. \end{cases} \qquad (\textbf{У4}.4)$$

При достаточно больших a и достаточно малых b получаем, что

$$\text{для } \boldsymbol{n' \approx b^{\left(-\frac{a}{a+2}\right)}} \hookrightarrow n'^{(a+1)} b^a \approx b^{\left(-\frac{a(a+1)}{a+2}+a\right)} = b^{\left(\frac{a}{a+2}\right)} \approx \frac{1}{n'},$$

а следовательно

$$n' \gg 1 \Leftrightarrow 1 \gg \frac{1}{n'} \approx n'^{(a+1)} b^a,$$

т.е. условия из (**У4**.4) равносильны для данного n', и если данное условие для данного n' не выполняется, то для любого другого n не выполняется хотя бы одно из двух, и сумму нельзя приблизить интегралом. Буду считать, что в задаче подразумевалось ее решение приближением через интеграл, и ответ:

$$\boxed{S(a,b) \approx \frac{1}{b^a}\Gamma(a+1),\ \text{для } a \in \mathbb{N}\ S(a,b) \approx \frac{a!}{b^a}}$$

II. $b \gg \frac{a}{b} \gg 1$

Сравним $f'(n)$ и $f(n)$:

$$f'(n) = a n^{a-1} e^{-bn} - b n^a e^{-bn} = \left(\frac{a}{n} - b\right) f(n),$$

и при $\tilde{n} = {}^a\!/\!_b$, $f'(\tilde{n}) = 0$. Оценим, как изменяется отношение производной к значению функции при изменении $\tilde{n}$ на $\varepsilon \sim 1$. ${}^a\!/\!_b \gg 1 \Rightarrow {}^b\!/\!_a \ll 1 \implies$

$$\frac{f'(\tilde{n}+\varepsilon)}{f(\tilde{n}+\varepsilon)} = \frac{a}{\frac{a}{b}+\varepsilon} - b = \frac{b}{1+\frac{b\varepsilon}{a}} - b \overset{{}^b\!/\!_a \ll 1}{\approx} b\left(1 - \frac{b\varepsilon}{a}\right) - b = -\varepsilon\frac{b^2}{a},$$

$$b \gg \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 \gg a \Rightarrow \frac{b^2}{a} \gg 1 \overset{\varepsilon\sim 1}{\implies} \left|\frac{f'(\tilde{n}+\varepsilon)}{f(\tilde{n}+\varepsilon)}\right| \gg 1,$$

а следовательно имеет смысл просуммировать несколько максимальных членов.

Так как суммирование производится по $n \in \mathbb{N}$, рассматривать $|\varepsilon| \ll 1$ не имеет смысла. Также, из того, что n натурально, нельзя просто взять $S(a,b) = f({}^a\!/\!_b)$, так как ${}^a\!/\!_b$ необязательно натурально, поэтому за сумму надо брать первые члены справа и слева от $\tilde{n}$:

$$S(a,b) \approx f(\tilde{n}_1) + f(\tilde{n}_2), \quad 0 \le \tilde{n} - \tilde{n}_1 \le 1, \quad 0 \le \tilde{n}_2 - \tilde{n} \le 1 \iff$$
$$\tilde{n}_1 = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor, \quad \tilde{n}_2 = \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil,$$

откуда ответ:

$$\boxed{S(a,b) \approx \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor^a e^{-b\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor} + \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil^a e^{-b\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil}}$$