Домашняя работа №3

Сирый Р. А.

20 февраля 2023 г.

Упражнение 1

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = \frac{\lambda}{\cosh^2 x}, \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

В точке $\hat{x} = 0$ $\cosh^2 x$ минимален, а следовательно $g(x)$ максимальна. Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \lambda \tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

и найдем вторую производную $\tilde{f}''(x)$:

$$\tilde{f}''(x) = \left(\frac{1}{\cosh^2 x}\right)'' = \left(\frac{-2\sinh x}{\cosh^3 x}\right)' = \frac{6\sinh^2 x}{\cosh^4 x} - \frac{2}{\cosh^2 x},$$

тогда, так как $\lambda \to \infty$ и $\tilde{f}''(x) \sim 1$ для x в окрестности $\hat{x}$, максимум $g(x)$ резкий и

$$I(\lambda) = \int\limits_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} e^{\lambda \tilde{f}(x)}\,\mathrm{d}x \approx e^{\lambda \tilde{f}(\hat{x})}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|\tilde{f}''(\hat{x})|}}, \quad \tilde{f}(\hat{x}) = 1, \quad \tilde{f}''(\hat{x}) = -2,$$

откуда ответ:

$$\boxed{I(\lambda) \approx e^{\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}}$$

Упражнение 2

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = -\lambda(x-1)^2(x-2)^2, \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

Так как $\forall x \in \{1,2\} \hookrightarrow f(x) = 0$ и $\forall x \notin \{1,2\} \hookrightarrow f(x) < 0$, в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ находятся максимумы $f(x)$, а следовательно, и максимумы $g(x)$. Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \lambda \tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) = -(x-1)^2(x-2)^2,$$

тогда, так как

$$\tilde{f}''(x) = -\left[8(x-1)(x-2) + 2\left((x-1)^2 + (x-2)^2\right)\right], \quad \tilde{f}''(x_1) = f''(x_2) = -2 \sim 1$$

и $\lambda \to \infty$, оба максимума $g(x)$ резкие и

$$I(\lambda) = \int\limits_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty e^{\lambda \tilde{f}(x)}\,\mathrm{d}x \approx e^{\lambda \tilde{f}(x_1)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda \left|\tilde{f}''(x_1)\right|}} + e^{\lambda \tilde{f}(x_2)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda \left|\tilde{f}''(x_2)\right|}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}},$$

ответ:

$$\boxed{I(\lambda) = 2\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}}$$

Упражнение 3

Преобразуем интеграл:

$$I(\lambda) = \int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^\lambda \mathrm{d}x = \int\limits_1^{+\infty} e^{\lambda \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)}\,\mathrm{d}x.$$

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = \lambda \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right), \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \lambda \tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) = \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

и исследуем $\tilde{f}(x)$. Найдем производные:

$$\tilde{f}'(x) = \frac{x}{\ln x}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) = \frac{1}{x \ln x}\left(1 - \ln x\right), \quad \tilde{f}''(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}.$$

При $\hat{x} = e$, $\tilde{f}'(\hat{x}) = 0$, а так как

$$\forall x \neq \hat{x},\ 1 \leq x < +\infty \hookrightarrow \tilde{f}'(x) \neq 0\ \wedge \lim_{x \to +1} \tilde{f}(x) = -\infty < \tilde{f}(\hat{x}) = -1,$$

в точке $x = \hat{x}$ $\tilde{f}(x)$, а следовательно, и $g(x)$, имеет максимум. При $\lambda \to +\infty$ и

$$\tilde{f}''(\hat{x}) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}\bigg|_{x=\hat{x}} = -\frac{1}{e^2} \sim 0.01 \overset{\lambda \to +\infty}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{[f^{(3)}(\hat{x})]^2}{[f''(\hat{x})]^3} = \frac{1}{\lambda}\frac{[\tilde{f}^{(3)}(\hat{x})]^2}{[\tilde{f}''(\hat{x})]^2} \ll 1, \quad \frac{[f^{(4)}(\hat{x})]}{[f''(\hat{x})]^2} = \frac{1}{\lambda}\frac{[\tilde{f}^{(4)}(\hat{x})]}{[\tilde{f}''(\hat{x})]^2} \ll 1,$$

метод перевала применим и

$$I(\lambda)=\int\limits_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^{+\infty} e^{\lambda\tilde{f}(x)}\,\mathrm{d}x\approx e^{\lambda\tilde{f}(\hat{x})}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|\tilde{f}''(\hat{x})|}}=e^{-\lambda}\sqrt{\frac{2\pi e^2}{\lambda}}=e^{1-\lambda}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}},$$

ответ:

$$\boxed{I(\lambda)\approx e^{1-\lambda}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}}$$

Упражнение 4

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x)=\lambda\left(\sin x-x\right),\quad g(x)=e^{f(x)}.$$

Представим $f(x)$ в виде

$$f(x)=\lambda\tilde{f}(x),\quad \tilde{f}(x)=\sin x-x$$

. Так как $\forall x>0\hookrightarrow\sin x<x$, в точке $\hat{x}=0$ $\tilde{f}(x)$, а следовательно, и $g(x)$, имеет максимум на участке $[0,+\infty]$. Разложим $f(x)$ по формуле Тейлора:

$$f(x)\underset{x\to 0}{=}\lambda\left(-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})\right)=\xi_3(x)+\xi_5(x)+\dots+\xi_{2n-1}(x)+o(x^{2n}).$$

Проверим условия, при которых на участке Δx, на котором набирается данный интеграл, можно пренебречь членами высших порядков:

$$\lambda\to+\infty,\ \xi_3(\Delta x)=\frac{1}{6}\lambda(\Delta x)^3\sim 1,\ \Delta x\sim\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}\ll 1\implies$$

$$\forall k\geq 3\hookrightarrow\xi_{2k-1}(\Delta x)=\frac{1}{(2k-1)!}\lambda(\Delta x)^{2k-1}\sim\frac{\lambda}{\lambda^{(2k-1)/3}}=\frac{1}{\lambda^{(2k-4)/3}}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\ll\xi_3(\Delta x)\sim 1,$$

а следовательно,

$$I(\lambda)=\int\limits_0^1 e^{\lambda(\sin x-x)}\,\mathrm{d}x\approx\int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{6}\lambda x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Так как $\Delta x\ll 1$,

$$I(\lambda)=\int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{6}\lambda x^3}\,\mathrm{d}x\approx\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{6}\lambda x^3}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{+\infty}\frac{2}{\lambda x^2}e^{-\frac{1}{6}\lambda x^3}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{6}\lambda x^3\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt[3]{36\lambda}}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{6}\lambda x^3\right)^{-2/3}e^{-\frac{1}{6}\lambda x^3}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{6}\lambda x^3\right),\quad y=\frac{1}{6}\lambda x^3,$$

$$I(\lambda)\approx\frac{2}{\sqrt[3]{36\lambda}}\int\limits_0^{+\infty} y^{-2/3}e^{-y}\,\mathrm{d}y=\frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt[3]{36\lambda},}$$

ответ:

$$\boxed{I(\lambda)=\frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt[3]{36\lambda}}}$$

Задача 1

Преобразуем интеграл:

$$I(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cosh^\lambda x \,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+\lambda \ln(\cosh x)} \,\mathrm{d}x.$$

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = -x^2 + \lambda \ln(\cosh x), \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

Найдем первые две производные:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x + \lambda \tanh x, \\ f''(x) &= -2 + \lambda(1 - \tanh^2 x). \end{aligned}$$

Сразу выведем полезное далее соотношение для исследования производных с $\tanh x$:

$$\tanh^n x = \left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)^n \underset{x\to+\infty}{\approx} 1 - 2ne^{-2x}, \tag{З1.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh^n x = n\left(\tanh^{n-1} x - \tanh^{n+1} x\right) &\overset{(\mathbf{З1}.1)}{\underset{x\to+\infty}{\approx}} \\ \overset{(\mathbf{З1}.1)}{\underset{x\to+\infty}{\approx}} n\left[1 - 2(n-1)e^{-2x} - 1 + 2(n+1)e^{-2x}\right] &= 2ne^{-2x}, \end{aligned} \tag{З1.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\tanh^n x \overset{(\mathbf{З1}.2)}{\underset{x\to+\infty}{<}} 2^m(m+n-1)e^{-2x}. \tag{З1.3}$$

При $x \approx \pm{}^1\!/\!_2\lambda$ и $x = 0$, $f'(x) = 0$. Так как $\lambda \to +\infty$, для $\hat{x} \approx {}^1\!/\!_2\lambda$ выполняется

$$f'(\hat{x}) = 0, \quad f(\hat{x}) \approx -\frac{1}{4}\lambda^2 + \lambda \ln\left(\frac{1}{2}(e^{1/2\lambda} + e^{-1/2\lambda})\right) \approx \frac{1}{2}\lambda^2 \gg f(0) = 0,$$

$$f''(\hat{x}) \overset{(\mathbf{З1}.1)}{\approx} -2 + \frac{4\lambda}{e^\lambda} \approx -2 \neq 0,$$

следовательно, в точках $x \in \{\hat{x},\ -\hat{x}\}$ находятся максимумы $f(x)$, в окресности которых на участке Δx набирается интеграл.

Проверим условия применимости метода перевала:

$$f''(x) = -2 + \lambda(1 - \tanh^2 x) \overset{(\mathbf{З1}.3)}{\underset{\hat{x}\to+\infty}{\Longrightarrow}} \forall n > 2 \hookrightarrow \frac{1}{n!}f^{(n)}(\hat{x}) < \frac{2^{n-2}(n-1)\lambda}{n!e^\lambda} \ll 1, \tag{З1.4}$$

$$\begin{aligned} f''(\hat{x}) \approx -2 \sim 1, \quad f''(\hat{x})(\Delta x)^2 \sim 1, \quad \Delta x \sim 1 &\overset{(\mathbf{З1}.4)}{\Longrightarrow} \\ \overset{(\mathbf{З1}.4)}{\Longrightarrow} \forall n > 2 \hookrightarrow \frac{\frac{1}{n!}f^{(n)}(\hat{x})(\Delta x)^n}{\frac{1}{2}f''(\hat{x})(\Delta x)^2} &\sim \frac{1}{n!}f^{(n)}(\hat{x}) \ll 1, \end{aligned}$$

следовательно, метод перевала применим, и

$$I(\lambda) \approx e^{f(\hat{x})}\sqrt{\frac{2\pi}{|f''(\hat{x})|}} + e^{f(-\hat{x})}\sqrt{\frac{2\pi}{|f''(-\hat{x})|}} \approx \frac{e^{\frac{1}{4}\lambda^2}\sqrt{\pi}}{2^{\lambda-1}},$$

ответ:

$$\boxed{I(\lambda) \approx \frac{e^{\frac{1}{4}\lambda^2}\sqrt{\pi}}{2^{\lambda-1}}}$$

Задача 2

Преобразуем интеграл:

$$I(\lambda, \epsilon, s) = \int\limits_0^{+\infty} x^s e^{-\epsilon x} e^{-\lambda(1-\cos x)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{+\infty} x^s e^{-\epsilon x - \lambda(1-\cos x)}\,\mathrm{d}x.$$

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = -\epsilon x - \lambda(1-\cos x), \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = -\lambda\tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) = \frac{\epsilon}{\lambda}x + (1-\cos x).$$

Найдем первую и вторую производные $\tilde{f}(x)$:

$$\tilde{f}'(x) = \frac{\epsilon}{\lambda} + \sin x, \quad \tilde{f}''(x) = \cos x.$$

Первая производная обнуляется при $\sin x = \frac{\epsilon}{\lambda}$, а следовательно, для точек

$$\hat{x}_1(k) \approx (2k-1)\pi + \frac{\epsilon}{\lambda}, \quad \hat{x}_2(k) \approx 2\pi k - \frac{\epsilon}{\lambda},\ k \in \mathbb{N}$$

выполняется

$$\tilde{f}'(\hat{x}_{1,2}) = 0, \quad \tilde{f}''(\hat{x}_1) \approx -1 + \frac{\epsilon^2}{2\lambda^2} \neq 0, \quad \tilde{f}''(\hat{x}_2) \approx 1 - \frac{\epsilon^2}{2\lambda^2},$$

а так как

$$\tilde{f}(\hat{x}_1(k)) \approx \frac{\epsilon}{\lambda}(2k-1)\pi + \frac{\epsilon^2}{2}\lambda^2 + 2, \quad \tilde{f}(\hat{x}_2(k)) \approx \frac{\epsilon}{\lambda}2\pi k - \frac{\epsilon^2}{2\lambda^2},$$

$$\tilde{f}(\hat{x}_1(k)) - \tilde{f}(\hat{x}_2(k)) = 2 + \frac{\epsilon^2}{\lambda^2} - \frac{\pi\epsilon}{\lambda} \approx 2 \Rightarrow g(\hat{x}_1(k)) \ll g(\hat{x}_2(k)),$$

т.е в точках $\hat{x}_2(k)$ подынтегральная функция $g(x)$ имеет максимумы. Так как $\lambda \gg 1$, максимумы резкие, и для каждого можно применить метод перевала:

$$i_k = (\hat{x}_2(k))^s\, e^{-\lambda\tilde{f}(\hat{x}_2(k))}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|\tilde{f}''(\hat{x}_2(k))|}} \approx \left(2\pi k - \frac{\epsilon}{\lambda}\right)^s e^{-2\pi\epsilon k + \frac{\epsilon^2}{2\lambda}}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda - \frac{\epsilon^2}{2\lambda}}}$$

$$\approx (2\pi k)^s e^{-2\pi\epsilon k}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}},$$

$$I(\lambda, \epsilon, s) \approx \sum_{k=1}^{\infty} i_k \approx \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^s e^{-2\pi\epsilon k} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} = (2\pi)^s \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \sum_{k=1}^{\infty} k^s e^{-2\pi\epsilon k}.$$

Полученная сумма была посчитана в **Упр. 4 домашней работы №2**:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s e^{-2\pi\epsilon k} \approx \frac{1}{(2\pi\epsilon)^{s+1}} \Gamma(s+1), \quad I(\lambda, \epsilon, s) \approx \frac{1}{\epsilon^{s+1}} \sqrt{\frac{1}{2\pi\lambda}} \Gamma(s+1),$$

ответ:

$$\boxed{I(\lambda, \epsilon, s) \approx \frac{1}{\epsilon^{s+1}} \sqrt{\frac{1}{2\pi\lambda}} \Gamma(s+1)}$$