

## Домашняя работа №2

Сирий Р. А.

12 февраля 2023 г.

### Упражнение 1

Заменяя переменную, обезразмерим интеграл:

$$t = bx, \quad dx = \frac{1}{b} dt, \quad I(a, b) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin^2 bx}{x^2} dx = b \int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt.$$

**I.**  $a \gg b$

При  $t \sim \sqrt{\frac{b}{a}} \ll 1$  степень при экспоненте  $-\frac{a}{b}t \sim -\sqrt{\frac{a}{b}} \ll -1$ , следовательно, интеграл набирается при малых  $t$  и  $\sin^2 t$  можно разложить в ряд:

$$I(a, b) = b \int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt \approx b \int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t} \frac{t^2}{t^2} dt = \frac{b^2}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t} d\left(\frac{a}{b}t\right) = \frac{b^2}{a},$$

ответ:

$$I(a, b) \approx \frac{b^2}{a}$$

**II.**  $a \ll b$

При  $t \sim 10$ , знаменатель подынтегральной функции  $\frac{1}{t^2} \sim 0.01 \ll 1$ , а следовательно подынтегральная функция  $f(t) \ll 1$  и интеграл набирается в некой окрестности  $0 \leq t \leq t' \sim 10$ . При этом степень при экспоненте остается мала:  $-\frac{a}{b}t \ll 1$ , следовательно

$$e^{-\frac{a}{b}t} \approx 1, \quad I(a, b) = b \int_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt \approx b \int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2} dt.$$

Полученный интеграл вычисляется:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{\sin^2 t}{t} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty t d\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right) = - \int_0^\infty t d\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right) \\ &= - \int_0^\infty t \left( \frac{2 \sin t \cos t}{t^2} - \frac{2 \sin^2 t}{t^3} \right) dt = - \int_0^\infty \frac{\sin 2t}{2t} d(2t) + 2I, \quad I = \int_0^\infty \frac{\sin 2t}{2t} d(2t) = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

ответ:

$$I(a, b) \approx \frac{\pi b}{2}$$

## Упражнение 2

I.  $a \ll 1, \quad b \sim 1$

Так как  $b \sim 1, \forall x \hookrightarrow (x-1)^2 + b^2 \sim C \geq 1$ , и при  $x \ll 1$  справедливо  $\frac{1}{x^2+a^2} \gg 1$ , интеграл набирается в некоторой окрестности нуля  $0 \leq x \leq x' \ll 1$ , и можно пренебречь величинами высших порядков малости:

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2} \frac{1}{(x-1)^2 + b^2} dx \approx \frac{1}{1+b^2} \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{1+b^2} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \Big|_0^\infty = \\ &= \frac{\pi}{2a(1+b^2)}, \end{aligned}$$

ответ:

$$I(a, b) = \frac{\pi}{2a(1+b^2)}$$

II.  $a = b \gg 1$

Предположим, что при больших  $a$  на данной области интегрирования можно пренебречь единицей в знаменателе:

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2} \frac{1}{(x-1)^2 + a^2} dx \approx \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx.$$

Проверку предположения проведем оценкой сверху и снизу:

$$\begin{aligned} a \gg 1 \Rightarrow \forall x \leq \infty, x \geq 0 \hookrightarrow \frac{1}{((x-1)^2 + a^2)^2} &\geq \frac{1}{x^2 + a^2} \frac{1}{(x-1)^2 + a^2} \geq \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} > 0, \\ \Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{((x-1)^2 + a^2)^2} dx &\geq \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2} \frac{1}{(x-1)^2 + a^2} dx \geq \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx, \end{aligned}$$

а следовательно, если выполняется

$$I_1 \equiv \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx \approx \int_0^\infty \frac{1}{((x-1)^2 + a^2)^2} dx = \int_{-1}^\infty \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx \equiv I_2,$$

что равносильно

$$I_2 - I_1 \ll I_1,$$

то наше предположение верно.

Вычислим полученный неопределенный интеграл. Заменим переменную:

$$x = a \tan u, \quad dx = \frac{a}{\cos^2 u} du, \quad u = \arctan \frac{x}{a},$$

$$\begin{aligned} \hat{I}(x) &= \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{a^3} \int \frac{1}{(\tan^2 u + 1)^2 \cos^2 u} du = \frac{1}{a^3} \int \cos^2 u du = \frac{1}{a^3} \int \cos^2 u du = \\ &= \frac{1}{2a^3} \int ((2 \cos^2 u - 1) + 1) du = \frac{1}{4a^3} \int (\cos(2u) + 1) d(2u) = \frac{\sin(2u) + 2u}{4a^3} + C = \\ &= \frac{1}{4a^3} \left( \frac{2 \tan u}{1 + \tan^2 u} + 2u \right) + C = \frac{1}{2a^3} \left( \frac{ax}{a^2 + x^2} + \arctan \frac{x}{a} \right) + C, \end{aligned}$$

откуда:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3}, \quad I_2 = \int_{-1}^\infty \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3} + \frac{1}{2a^3} \left( \frac{a}{a^2 + 1} + \arctan \frac{1}{a} \right).$$

Проверим предположение:

$$a \gg 1 \Rightarrow I_2 - I_1 = \frac{1}{2a^3} \left( \frac{a}{a^2 + 1} + \arctan \frac{1}{a} \right) \approx \frac{1}{2a^3} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \right) \ll \frac{1}{2a^3} \left( \frac{\pi}{2} \right) = I_1,$$

а следовательно наше предположение верно, и  $I(a) \approx I_1$ , ответ:

$$I(a) \approx \frac{\pi}{4a^3}$$

### Упражнение 3

Заменяв переменную, обезразмерим интеграл:

$$t = bx, \quad dx = \frac{1}{b} dt,$$

$$I(a, b) = \int_0^\infty \frac{x}{x^2 + a^2} (1 - \tanh(bx)) dx = \int_0^\infty \frac{t}{t^2 + a^2 b^2} (1 - \tanh t) dt \equiv \int_0^\infty f(t) dt.$$

Так как  $a \ll 1$  и  $b \ll 1$ , выполняется  $1 \gg ab \gg a^2 b^2$ . Представим интеграл в виде

$$\int_0^\infty f(t) dt = \int_0^{t'} f(t) dt + \int_{t'}^T f(t) dt + \int_T^\infty f(t) dt, \quad 0 < t' < 1, \quad T \sim 1. \quad (1)$$

Предположим, что  $t'$  достаточно мал и  $\tanh t$  в первом слагаемом можно разложить:

$$\begin{aligned} \int_0^{t'} f(t) dt &\approx \int_0^{t'} \frac{t}{t^2 + a^2 b^2} (1 - t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{t'} \frac{1}{t^2 + a^2 b^2} d(t^2) + \int_0^{t'} \left( 1 - \frac{a^2 b^2}{t^2 + a^2 b^2} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \ln(t^2 + a^2 b^2) - t + ab \arctan \frac{t}{ab} \Big|_0^{t'} = \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{t'^2}{a^2 b^2} \right) - t' + ab \arctan \frac{t'}{ab}. \end{aligned}$$

При  $t' = 1/2$ ,  $\tanh t' \approx t'$  с точностью примерно 10%, и это значение подойдет для грубых оценок с логарифмической точностью. Для данного  $t'$  получаем:

$$\frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{t'^2}{a^2 b^2} \right) - t' \approx -\ln(ab) + \ln(t') - t' = -\ln(ab) + C_1, \quad C_1 \sim 1,$$

$$ab \arctan \frac{t'}{ab} < \frac{\pi ab}{2} \ll 1, \implies$$

$$\int_0^{t'} f(t) dt \approx -\ln(ab) + C_1, \quad C_1 \sim 1.$$

Для оценки третьего слагаемого из (1) возьмем  $T = 2$ :

$$a^2 b^2 \ll t' \implies \forall t \geq T > t' \hookrightarrow \frac{t}{t^2 + a^2 b^2} \approx \frac{1}{t}, \quad t \geq T = 2 \implies$$

$$C_3 \equiv \int_T^\infty f(t) dt \approx \int_T^\infty \frac{1}{t} (1 - \tanh t) dt = \int_T^\infty \frac{1}{t} \frac{2e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} dt < \int_T^\infty e^{-2t} dt = \frac{1}{2} e^{-4} \sim 10^{-2},$$

а, следовательно, при расчете с логарифмической точностью им можно пренебречь.

Так как для  $t \geq t'$  выполняется

$$f(t) \approx \frac{1}{t} (1 - \tanh t) \geq f(t + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0,$$

т.е.  $f(t)$  не имеет экстремальных точек при  $t \geq t'$ , оценим грубо второе слагаемое из (1) как площадь трапеции:

$$C_2 \equiv \int_{t'}^T f(t) dt \sim \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t'} (1 - \tanh t') + \frac{1}{T} (1 - \tanh T) \right) \approx \frac{1}{2},$$

откуда получаем

$$\int_0^\infty f(t) dt = -\ln(ab) + (C_1 + C_2 + C_3) = -\ln(ab) + C, \quad C \sim 1,$$

ответ:

$$\boxed{I(a, b) = -\ln(ab) + C, \quad C \sim 1}$$

## Упражнение 4

Можно сразу опустить первый член, так как он равен нулю:

$$S(a, b) \equiv \sum_{n=0}^\infty f(n) = \sum_{n=0}^\infty n^a e^{-bn} = \sum_{n=1}^\infty n^a e^{-bn}.$$

Сделал это для удобства рассуждений (чтобы, например, игнорировать случай  $n = 0$  в утверждениях вроде  $f'(n) \ll f(n)$ ), отсюда получаем  $n \in \mathbb{N}$ .

I.  $a \sim 1, \quad b \ll 1$

Сравним  $f'(n)$  и  $f(n)$ :

$$f'(n) = an^{a-1}e^{-bn} - bn^ae^{-bn} = \left(\frac{a}{n} - b\right)f(n),$$

а следовательно, начиная с некоторого

$$n' \gg 1, \quad (2)$$

можно будет приблизить сумму интегралом.

Попробуем подобрать  $n'$  следующим образом. При  $n \approx \frac{a}{b}$  получаем  $f'(a/b) \approx 0$ , т.е. в этой точке будет находится максимум  $f(n)$ , и если мы подберем

$$(n')^a \ll (a/b)^a, \quad (3)$$

то интервал охватит примерно всю область, на которой он набирается:

$$\sum_{n=n'}^{\infty} f(n) \approx \int_{n'}^{\infty} f(n) \, dn + \frac{1}{2}f(n') \approx \int_0^{\infty} f(n) \, dn + \frac{1}{2}f(n') = \frac{1}{b^a}\Gamma(a+1) + \frac{1}{2}n'^ae^{-bn'}.$$

Оценим сумму остальных членов сверху:

$$n' \ll \frac{a}{b} \Rightarrow \forall n < n' \hookrightarrow f(n) \leq f(n') \Rightarrow \sum_{n=1}^{n'-1} f(n) \leq (n'-1)f(n') = (n'-1)^{(a+1)}e^{-b(n'-1)}.$$

Так как  $n' \ll \frac{a}{b}$ ,  $bn' \ll a \sim 1 \Rightarrow e^{-bn'} \approx e^{-b(n'-1)}1$ , а следовательно, если выполняется

$$(n'-1)^{(a+1)} \ll \frac{1}{b^a}, \quad (4)$$

то

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n'-1} f(n) &\approx (n'-1)^{(a+1)} \ll \frac{1}{b^a}\Gamma(a+1) + \frac{1}{2}n'^a \approx \frac{1}{b^a}\Gamma(a+1) \approx \sum_{n=n'}^{\infty} f(n) \Rightarrow \\ S(a, b) &= \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{n'-1} f(n) + \sum_{n=n'}^{\infty} f(n) \approx \sum_{n=n'}^{\infty} f(n) \approx \frac{1}{b^a}\Gamma(a+1). \end{aligned}$$

Осталось подобрать  $n'$ . Объединим условия (2), (3) и (4):

$$\begin{cases} n' \gg 1 \\ n'^a \ll \left(\frac{a}{b}\right)^a \\ (n'-1)^{(a+1)} \ll \frac{1}{b^a} \end{cases} \quad \xLeftrightarrow{a \sim 1} \quad \begin{cases} n' \gg 1 \\ n'^{(a+1)}b^a \ll 1. \end{cases} \quad (5)$$

При достаточно больших  $a$  и достаточно малых  $b$  получаем, что

$$\text{для } n' \approx b^{\left(-\frac{a}{a+2}\right)} \hookrightarrow n'^{(a+1)}b^a \approx b^{\left(-\frac{a(a+1)}{a+2}+a\right)} = b^{\left(\frac{a}{a+2}\right)} \approx \frac{1}{n'},$$

а следовательно

$$n' \gg 1 \Leftrightarrow 1 \gg \frac{1}{n'} \approx n'^{(a+1)} b^a,$$

т.е. условия из (5) равносильны для данного  $n'$ , и если данное условие для данного  $n'$  не выполняется, то для любого другого  $n$  не выполняется хотя бы одно из двух, и сумму нельзя приблизить интегралом. Буду считать, что в задаче подразумевалось ее решение приближением через интеграл, и ответ:

$$S(a, b) \approx \frac{1}{b^a} \Gamma(a+1), \text{ для } a \in \mathbb{N} \quad S(a, b) \approx \frac{a!}{b^a}$$

**II.  $b \gg \frac{a}{b} \gg 1$**

### Задача 1

Определим  $f(x)$  как подынтегральную функцию, и  $h(x)$  как ее знаменатель:

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{1}{xa^2 + (1-x^2)^2} dx \equiv \int_0^\infty f(x) dx \equiv \int_0^\infty \frac{1}{h(x)} dx, \quad h(x) = xa^2 + (1-x^2)^2.$$

q

**I.  $a \gg 1$**

При очень малых  $x$ , т.е.  $xa^2 \ll 1$ , следует

$$x \ll \frac{1}{a^2} \ll 1 \Rightarrow (1-x^2)^2 \approx 1 \Rightarrow h(x) \sim 1 \Rightarrow f(x) \sim 1.$$

При  $xa \sim 1$ :

$$xa^2 \sim a \gg 1, \quad x \sim \frac{1}{a} \ll 1 \Rightarrow (1-x^2)^2 \approx 1 \Rightarrow h(x) \sim a \gg 1 \Rightarrow f(x) \ll 1,$$

следовательно, интеграл набирается в некой окрестности нуля  $x \leq x' \sim \frac{1}{a} \ll 1$ , а значит в  $h(x)$  можно отбросить члены высших порядков малости и интегрировать от 0 до  $x'$ :

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^\infty \frac{1}{xa^2 + (1-x^2)^2} dx \approx \int_0^{x'} \frac{1}{xa^2 + 1} dx = \frac{1}{a^2} \int_0^{x'} \frac{1}{xa^2 + 1} d(xa^2 + 1) = \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{-1}{(xa^2 + 1)^2} \Big|_0^{x'} = \frac{1}{a^2} \left( 1 - \frac{1}{(x'a^2 + 1)^2} \right), \quad x' \sim \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{(x'a^2 + 1)^2} \sim \frac{1}{a^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

ответ:

$$I(a) \approx \frac{1}{a^2}$$

## II. $a \ll 1$

При  $x \ll 1$  выполняется

$$xa^2 \ll 1, (1 - x^2)^2 \sim 1 \Rightarrow h(x) \sim 1 \Rightarrow f(x) \sim 1,$$

при  $x \gg 1$ :

$$(1 - x^2)^2 \gg 1 \Rightarrow h(x) \gg 1 \Rightarrow f(x) \ll 1.$$

При  $x = 1 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ :

$$h(x) = (1 + \varepsilon)a^2 + (2\varepsilon + \varepsilon^2)^2 \ll 1 \Rightarrow f(x) \gg 1,$$

следовательно, интеграл набирается в некой окрестности  $1 - \varepsilon' \leq x \leq 1 + \varepsilon'$ ,  $\varepsilon' \ll 1$ , а значит в  $h(x)$  интегрировать по  $\varepsilon$  от  $-\varepsilon'$  до  $\varepsilon'$ , отбросив члены высших порядков малости:

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^\infty \frac{1}{xa^2 + (1 - x^2)^2} dx \approx \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} \frac{1}{(1 + \varepsilon)a^2 + (2\varepsilon + \varepsilon^2)^2} d\varepsilon \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} \frac{1}{a^2 + (2\varepsilon)^2} d(2\varepsilon) = \frac{1}{2a} \arctan \frac{2\varepsilon}{a} \Big|_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} = \frac{1}{a} \arctan \frac{2\varepsilon'}{a}. \end{aligned}$$

При  $\hat{\varepsilon} \sim \sqrt{a} \hookrightarrow \hat{\varepsilon} \ll 1 \wedge \frac{2\varepsilon}{a} \sim \frac{1}{\sqrt{a}} \gg 1$ , следовательно, приближения выше будут справедливы при  $\varepsilon' \geq \hat{\varepsilon}$  и

$$\frac{1}{a} \arctan \frac{2\varepsilon'}{a} \approx \frac{\pi}{2a},$$

ответ:

$$\boxed{I(a) \approx \frac{\pi}{2a}}$$

## Задача 2

### I. $b \gg a$

Так как  $b \gg a$  и  $0 \leq x \leq a$ ,  $x \ll a \Rightarrow$

$$e^{\frac{x}{b}} \approx 1 + \frac{x}{b}, \quad \int_0^a \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}} - 1} dx \approx \int_0^a bx^{n-1} dx = \frac{bx^n}{n} \Big|_0^a = \frac{ba^n}{n},$$

ответ:

$$\boxed{I(n, a, b) \approx \frac{ba^n}{n}}$$

II.  $n \gg 1$ ,  $nb \ll a$

Приблизительно найдем точку  $\tilde{x}$ , в которой подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}} - 1}$$

достигает максимума:

$$\left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=\tilde{x}} = \frac{n\tilde{x}^{n-1}}{e^{\frac{\tilde{x}}{b}} - 1} - \frac{\tilde{x}^n e^{\frac{\tilde{x}}{b}}}{\left(e^{\frac{\tilde{x}}{b}} - 1\right)^2} = 0, \quad \tilde{x} = \frac{nbe^{\frac{\tilde{x}}{b}}}{e^{\frac{\tilde{x}}{b}} - 1}.$$

Применяя метод итераций при  $\tilde{x}_0 = nb$ , так как  $n \gg 1$ :

$$\tilde{x}_1 = \frac{nbe^{\frac{\tilde{x}_0}{b}}}{e^{\frac{\tilde{x}_0}{b}} - 1} = \frac{nbe^n}{e^n - 1} \approx nb = \tilde{x}_0,$$

следовательно

$$\tilde{x} \approx nb.$$

При  $x' = \frac{1}{2}nb$ :

$$\frac{f(x')}{f(\tilde{x})} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{e^n - 1}{e^{\frac{n}{2}} - 1} \approx \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{e}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \ll 1,$$

при  $x'' = 2nb$ :

$$\frac{f(x'')}{f(\tilde{x})} = 2^n \frac{e^n - 1}{e^{2n} - 1} \approx 2^n e^{-n} = \left(\frac{2}{e}\right)^n \ll 1,$$

следовательно интеграл набирается в некоторой окрестности

$$U(\tilde{x}) : \forall x_u \in U(\tilde{x}) \hookrightarrow \frac{1}{2}nb < x_u < 2nb \ll a,$$

откуда

$$\forall x_u \in U(\tilde{x}) \hookrightarrow e^{\frac{n}{2}} - 1 < e^{\frac{x_u}{b}} - 1 \approx e^{\frac{x_u}{b}} \implies$$

$$\int_0^a \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}} - 1} dx \approx \int_0^a \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}}} dx \approx b^{n+1} \int_0^\infty \left(\frac{x}{b}\right)^n e^{-\frac{x}{b}} d\left(\frac{x}{b}\right) = b^{n+1} \Gamma(n+1).$$

В условии задачи не указано, является ли  $n$  целым числом (а, следовательно, так как  $n \gg 1$  — натуральным), поэтому ответ:

$$I(n, a, b) \approx b^{n+1} \Gamma(n+1), \text{ для } n \in \mathbb{N} \quad I(n, a, b) \approx b^{n+1} n!$$