Домашняя работа №2

Сирый Р. А.

12 февраля 2023 г.

Упражнение 1

Заменив переменную, обезразмерим интеграл:

$$t = bx, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{b}\mathrm{d}t, \quad I(a,b) = \int\limits_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin^2 bx}{x^2}\,\mathrm{d}x = b\int\limits_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

I. $a \gg b$

При $t \sim \sqrt{\frac{b}{a}} \ll 1$ степень при экспоненте $-\frac{a}{b}t \sim -\sqrt{\frac{a}{b}} \ll -1$, следовательно, интеграл набирается при малых t и $\sin^2 t$ можно разложить в ряд:

$$I(a,b) = b\int\limits_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t \approx b\int\limits_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\frac{t^2}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{b^2}{a}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\,\mathrm{d}\left(\frac{a}{b}t\right) = \frac{b^2}{a},$$

ответ:

$$\boxed{I(a,b) \approx \frac{b^2}{a}}$$

II. $a \ll b$

При $t \sim 10$, знаменатель подынтегральной функции $\frac{1}{t^2} \sim 0.01 \ll 1$, а следовательно подынтегральная функция $f(t) \ll 1$ и интеграл набирается в некой окрестности $0 \le t \le t' \sim 10$. При этом степень при экспоненте остается мала: $-\frac{a}{b}t \ll 1$, следовательно

$$e^{-\frac{a}{b}t} \approx 1,\ I(a,b) = b\int\limits_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t \approx b\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Полученный интеграл вычисляется:

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin^2 t}{t}\bigg|_0^\infty - \int\limits_0^\infty t\,\mathrm{d}\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right) = -\int\limits_0^\infty t\,\mathrm{d}\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)$$

$$= -\int\limits_0^\infty t\left(\frac{2\sin t\cos t}{t^2} - \frac{2\sin^2 t}{t^3}\right)\,\mathrm{d}t = -\int\limits_0^\infty \frac{\sin 2t}{2t}\,\mathrm{d}(2t) + 2I, \quad I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin 2t}{2t}\,\mathrm{d}(2t) = \frac{\pi}{2},$$

ответ:

$$\boxed{I(a,b) \approx \frac{\pi b}{2}}$$

Упражнение 2

I. $a \ll 1, \quad b \sim 1$

Так как $b \sim 1$, $\forall x \hookrightarrow (x-1)^2 + b^2 \sim C \geq 1$, и при $x \ll 1$ справедливо $\frac{1}{x^2+a^2} \gg 1$, интеграл набирается в некоторой окрестности нуля $0 \leq x \leq x' \ll 1$, и можно пренебречь величинами высших порядков малости:

$$I(a,b) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}\frac{1}{(x-1)^2+b^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{1+b^2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+b^2}\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_0^\infty =$$
$$= \frac{\pi}{2a(1+b^2),}$$

ответ:

$$\boxed{I(a,b) = \frac{\pi}{2a(1+b^2)}}$$

II. $a = b \gg 1$

Предположим, что при больших a на данной области интегрирования можно пренебречь единицей в знаменателе:

$$I(a) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}\frac{1}{(x-1)^2+a^2}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Проверку предположения проведем оценкой сверху и снизу:

$$a \gg 1 \Rightarrow \forall x \leq \infty, x \geq 0 \hookrightarrow \frac{1}{\left((x-1)^2+a^2\right)^2} \geq \frac{1}{x^2+a^2}\frac{1}{(x-1)^2+a^2} \geq \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2} > 0,$$
$$\Longrightarrow \int\limits_0^\infty \frac{1}{\left((x-1)^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}\frac{1}{(x-1)^2+a^2}\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x,$$

а следовательно, если выполняется

$$I_1 \equiv \int\limits_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^\infty \frac{1}{\left((x-1)^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^\infty \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x \equiv I_2,$$

что равносильно

$$I_2 - I_1 \ll I_1,$$

то наше предположение верно.

Вычислим полученный неопределенный интеграл. Заменим переменную:

$$x = a\tan u, \quad \mathrm{d}x = \frac{a}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u, \quad u = \arctan\frac{x}{a},$$

$$\begin{aligned}\hat{I}(x) &= \int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}\int \frac{1}{\left(\tan^2 u + 1^2\right)^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \\ &= \frac{1}{2a^3}\int \left(\left(2\cos^2 u - 1\right)+1\right)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4a^3}\int \left(\cos(2u)+1\right)\,\mathrm{d}(2u) = \frac{\sin(2u)+2u}{4a^3} + C = \\ &= \frac{1}{4a^3}\left(\frac{2\tan u}{1+\tan^2 u} + 2u\right) + C = \frac{1}{2a^3}\left(\frac{ax}{a^2+x^2} + \arctan\frac{x}{a}\right) + C,\end{aligned}$$

откуда:

$$I_1 = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4a^3}, \quad I_2 = \int\limits_{-1}^\infty \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4a^3} + \frac{1}{2a^3}\left(\frac{a}{a^2+1} + \arctan\frac{1}{a}\right).$$

Проверим предположение:

$$a \gg 1 \Rightarrow I_2 - I_1 = \frac{1}{2a^3}\left(\frac{a}{a^2+1} + \arctan\frac{1}{a}\right) \approx \frac{1}{2a^3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\right) \ll \frac{1}{2a^3}\left(\frac{\pi}{2}\right) = I_1,$$

а следовательно наше предположение верно, и $I(a) \approx I_1$, ответ:

$$\boxed{I(a) \approx \frac{\pi}{4a^3}}$$

Упражнение 3

Заменив переменную, обезразмерим интеграл:

$$t = bx, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{b}\mathrm{d}t,$$

$$I(a,b) = \int\limits_0^\infty \frac{x}{x^2+a^2}\left(1-\tanh(bx)\right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \frac{t}{t^2+a^2b^2}\left(1-\tanh t\right)\,\mathrm{d}t \equiv \int\limits_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Так как $a \ll 1$ и $b \ll 1$, выполняется $1 \gg ab \gg a^2b^2$. Представим интеграл в виде

$$\int\limits_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{t'} f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{t'}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_T^\infty f(t)\,\mathrm{d}t, \quad 0 < t' < 1, \quad T \sim 1. \tag{\textbf{У3}.1}$$

Предположим, что t' достаточно мал и $\tanh t$ в первом слагаемом можно разложить:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{t'} f(t)\,\mathrm{d}t &\approx \int\limits_0^{t'} \frac{t}{t^2+a^2b^2}(1-t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{t'} \frac{1}{t^2+a^2b^2}\,\mathrm{d}(t^2) + \int\limits_0^{t'}\left(1 - \frac{a^2b^2}{t^2+a^2b^2}\right)\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(t^2+a^2b^2\right) - t + ab\arctan\frac{t}{ab}\bigg|_0^{t'} = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{t'^2}{a^2b^2}\right) - t' + ab\arctan\frac{t'}{ab}.\end{aligned}$$

При $t' = {}^1\!/_2$, $\tanh t' \approx t'$ с точностью примерно 10%, и это значение подойдет для грубых оценок с логарифмической точностью. Для данного t' получаем:

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{t'^2}{a^2b^2}\right) - t' \approx -\ln(ab) + \ln(t') - t' = -\ln(ab) + C_1,\ C_1 \sim 1,$$

$$ab\arctan\frac{t'}{ab} < \frac{\pi ab}{2} \ll 1,\ \Longrightarrow$$

$$\int\limits_0^{t'} f(t)\,\mathrm{d}t \approx -ln(ab) + C_1, \quad C_1 \sim 1.$$

Для оценки третьего слагаемого из (**У3**.1) возьмем $T = 2$:

$$a^2b^2 \ll t' \Rightarrow \forall t \geq T > t' \hookrightarrow \frac{t}{t^2+a^2b^2} \approx \frac{1}{t}, \quad t \geq T = 2 \implies$$

$$C_3 \equiv \int\limits_T^{\infty} f(t)\,dt \approx \int\limits_T^{\infty} \frac{1}{t}(1-\tanh t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_T^{\infty} \frac{1}{t}\frac{2e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\,\mathrm{d}t < \int\limits_T^{\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^{-4} \sim 10^{-2},$$

а, следовательно, при расчете с логарифмической точностью им можно пренебречь.

Так как для $t \geq t'$ выполняется

$$f(t) \approx \frac{1}{t}(1-\tanh t) \geq f(t+\varepsilon),\ \varepsilon > 0,$$

т.е. $f(t)$ не имеет экстремальных точек при $t \geq t'$, оценим грубо второе слагаемое из (**У3**.1) как площадь трапеции:

$$C_2 \equiv \int\limits_{t'}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t'}(1-\tanh t') + \frac{1}{T}(1-\tanh T)\right) \approx \frac{1}{2},$$

откуда получаем

$$\int\limits_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = -\ln(ab) + (C_1 + C_2 + C_3) = -\ln(ab) + C,\ C \sim 1,$$

ответ:

$$\boxed{I(a,b) = -\ln(ab) + C,\ C \sim 1}$$

Упражнение 4

Можно сразу опустить первый член, так как он равен нулю:

$$S(a,b) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n^a e^{-bn} = \sum_{n=1}^{\infty} n^a e^{-bn}.$$

Сделал это для удобства рассуждений (чтобы, например, игнорировать случай $n = 0$ в утверждениях вроде $f'(n) \ll f(n)$), отсюда получаем $n \in \mathbb{N}$.

I. $a \sim 1, \quad b \ll 1$

Сравним $f'(n)$ и $f(n)$:

$$f'(n) = an^{a-1}e^{-bn} - bn^a e^{-bn} = \left(\frac{a}{n} - b\right) f(n),$$

а следовательно, так как $a \sim 1$ и $b \ll 1$, начиная с некоторого

$$n' \gg 1, \tag{\textbf{У4}.1}$$

можно будет приблизить сумму интегралом.

Попробуем подобрать n' следующим образом. При $n \approx \frac{a}{b}$ получаем $f'(a/b) \approx 0$, т.е. в этой точке будет находится максимум $f(n)$, и если мы подберем

$$(n')^a \ll (a/b)^a, \tag{\textbf{У4}.2}$$

то интерал охватит примерно всю область, на которой он набирается:

$$\sum_{n=n'}^{\infty} f(n) \approx \int\limits_{n'}^{\infty} f(n)\,\mathrm{d}n + \frac{1}{2}f(n') \approx \int\limits_{0}^{\infty} f(n)\,\mathrm{d}n + \frac{1}{2}f(n') = \frac{1}{b^a}\Gamma(a+1) + \frac{1}{2}n'^a e^{-bn'}.$$

Оценим сумму остальных членов сверху:

$$n' \ll \frac{a}{b} \Rightarrow \forall n < n' \hookrightarrow f(n) \le f(n') \Rightarrow \sum_{n=1}^{n'-1} f(n) \le (n'-1)f(n'-1) = (n'-1)^{(a+1)}e^{-b(n'-1)}.$$

Так как $n' \ll \frac{a}{b},\ bn' \ll a \sim 1 \Rightarrow e^{-bn'} \approx e^{-b(n-1)}1$, а следовательно, если выполняется

$$(n'-1)^{(a+1)} \ll \frac{1}{b^a}, \tag{\textbf{У4}.3}$$

то

$$\sum_{n=1}^{n'-1} f(n) \approx (n'-1)^{(a+1)} \ll \frac{1}{b^a}\Gamma(a+1) + \frac{1}{2}n'^a \approx \frac{1}{b^a}\Gamma(a+1) \approx \sum_{n=n'}^{\infty} f(n) \implies$$

$$S(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{n'-1} f(n) + \sum_{n=n'}^{\infty} f(n) \approx \sum_{n=n'}^{\infty} f(n) \approx \frac{1}{b^a}\Gamma(a+1).$$

Осталось подобрать n'. Объединим условия (**У4**.1), (**У4**.2) и (**У4**.3):

$$\begin{cases} n' \gg 1 \\ n'^a \ll \left(\frac{a}{b}\right)^a \\ (n'-1)^{(a+1)} \ll \frac{1}{b^a} \end{cases} \overset{a\sim 1,\ n'\gg 1}{\iff} \begin{cases} n' \gg 1 \\ n'^{(a+1)}b^a \ll 1. \end{cases} \tag{\textbf{У4}.4}$$

При достаточно больших a и достаточно малых b получаем, что

$$\text{для } \boldsymbol{n' \approx b^{\left(-\frac{a}{a+2}\right)}} \hookrightarrow n'^{(a+1)}b^a \approx b^{\left(-\frac{a(a+1)}{a+2}+a\right)} = b^{\left(\frac{a}{a+2}\right)} \approx \frac{1}{n'},$$

а следовательно

$$n' \gg 1 \Leftrightarrow 1 \gg \frac{1}{n'} \approx n'^{(a+1)} b^a,$$

т.е. условия из (**У4**.4) равносильны для данного n', и если данное условие для данного n' не выполняется, то для любого другого n не выполняется хотя бы одно из двух, и сумму нельзя приблизить интегралом. Буду считать, что в задаче подразумевалось ее решение приближением через интеграл, и ответ:

$$\boxed{S(a,b) \approx \frac{1}{b^a}\Gamma(a+1), \text{ для } a \in \mathbb{N}\ S(a,b) \approx \frac{a!}{b^a}}$$

II. $b \gg \frac{a}{b} \gg 1$

Сравним $f'(n)$ и $f(n)$:

$$f'(n) = an^{a-1}e^{-bn} - bn^a e^{-bn} = \left(\frac{a}{n} - b\right) f(n),$$

и при $\tilde{n} = {}^a\!/\!_b$, $f'(\tilde{n}) = 0$. Оценим, как изменяется отношение производной к значению функции при изменении $\tilde{n}$ на $\varepsilon \sim 1$. ${}^a\!/\!_b \gg 1 \Rightarrow {}^b\!/\!_a \ll 1 \implies$

$$\frac{f'(\tilde{n}+\varepsilon)}{f(\tilde{n}+\varepsilon)} = \frac{a}{\frac{a}{b}+\varepsilon} - b = \frac{b}{1+\frac{b\varepsilon}{a}} - b \overset{{}^b\!/\!_a \ll 1}{\approx} b\left(1 - \frac{b\varepsilon}{a}\right) - b = -\varepsilon\frac{b^2}{a},$$

$$b \gg \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 \gg a \Rightarrow \frac{b^2}{a} \gg 1 \overset{\varepsilon\sim 1}{\implies} \left|\frac{f'(\tilde{n}+\varepsilon)}{f(\tilde{n}+\varepsilon)}\right| \gg 1,$$

а следовательно имеет смысл просуммировать несколько максимальных членов.

Так как суммирование производится по $n \in \mathbb{N}$, рассматривать $|\varepsilon| \ll 1$ не имеет смысла. Также, из того, что n натурально, нельзя просто взять $S(a,b) = f({}^a\!/\!_b)$, так как ${}^a\!/\!_b$ необязательно натурально, поэтому за сумму надо брать первые члены справа и слева от $\tilde{n}$:

$$S(a,b) \approx f(\tilde{n}_1) + f(\tilde{n}_2), \quad 0 \le \tilde{n} - \tilde{n}_1 \le 1, \quad 0 \le \tilde{n}_2 - \tilde{n} \le 1 \iff$$
$$\tilde{n}_1 = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor, \quad \tilde{n}_2 = \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil,$$

откуда ответ:

$$\boxed{S(a,b) \approx \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor^a e^{-b\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor} + \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil^a e^{-b\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil}}$$

Задача 1

Определим $f(x)$ как подынтегральную функцию, и $h(x)$ как ее знаменатель:

$$I(a) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{xa^2 + (1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \frac{1}{h(x)}\,\mathrm{d}x, \quad h(x) = xa^2 + (1-x^2)^2.$$

I. $a \gg 1$

При очень малых x, т.е. $xa^2 \ll 1$, следует

$$x \ll \frac{1}{a^2} \ll 1 \Rightarrow (1-x^2)^2 \approx 1 \Rightarrow h(x) \sim 1 \Rightarrow f(x) \sim 1.$$

Найдем такое x', начиная с которого нельзя пренебрегать x^2 и x^4. Так как для $x \sim \sqrt{a} \gg 1$ выполняется $x^2 \ll x^4$, $x^4 \sim a^2 \ll xa^2 \sim a^{5/2}$, искомое $x' > \sqrt{a}$, и, так как $x'^2 \ll x'^4$, сравнивать $x'a^2$ надо с x'^4:

$$x'a^2 \sim x'^4, \quad x' \sim a^{2/3}. \tag{\textbf{З1}.1}$$

Теперь можно представить интеграл в следующем виде:

$$I(a) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{xa^2 + (1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^{x'} \frac{1}{xa^2+1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x'}^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^{x'} \frac{1}{xa^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int\limits_0^{x'} \frac{1}{xa^2+1}\,\mathrm{d}(xa^2+1) = \frac{1}{a^2}\ln\left(xa^2+1\right)\Big|_0^{x'} = \frac{1}{a^2}\ln\left(x'a^2+1\right)^2,\ x' \sim a^{2/3} \overset{(\textbf{З1}.1)}{\underset{a\gg1}{\Longrightarrow}}$$

$$\overset{(\textbf{З1}.1)}{\underset{a\gg1}{\Longrightarrow}} \ln\left(x'a^2+1\right)^2 \approx \frac{8}{3}\ln a + C,\ C \sim 1,$$

ответ:

$$\boxed{I(a) \approx \frac{8}{3a^2}(\ln a + C),\ C \sim 1}$$

II. $a \ll 1$

При $x \ll 1$ выполняется

$$xa^2 \ll 1, (1-x^2)^2 \sim 1 \Rightarrow h(x) \sim 1 \Rightarrow f(x) \sim 1,$$

при $x \gg 1$:

$$(1-x^2)^2 \gg 1 \Rightarrow h(x) \gg 1 \Rightarrow f(x) \ll 1.$$

При $x = 1+\varepsilon,\ \varepsilon \ll 1$:

$$h(x) = (1+\varepsilon)a^2 + (2\varepsilon+\varepsilon^2)^2 \ll 1 \Rightarrow f(x) \gg 1,$$

следовательно, интеграл набирается в некой окрестности $1-\varepsilon' \le x \le 1+\varepsilon'$, $\varepsilon' \ll 1$, а значит в $h(x)$ интегрировать по ε от $-\varepsilon'$ до ε', отбросив члены высших порядков малости:

$$I(a) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{xa^2+(1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} \frac{1}{(1+\varepsilon)a^2 + (2\varepsilon+\varepsilon^2)^2}\,\mathrm{d}\varepsilon \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\int\limits_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} \frac{1}{a^2+(2\varepsilon)^2}\,\mathrm{d}(2\varepsilon) = \frac{1}{2a}\arctan\frac{2\varepsilon}{a}\Big|_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} = \frac{1}{a}\arctan\frac{2\varepsilon'}{a}.$$

При $\hat{\varepsilon} \sim \sqrt{a} \hookrightarrow \hat{\varepsilon} \ll 1 \ \wedge \ \frac{2\hat{\varepsilon}}{a} \sim \frac{1}{\sqrt{a}} \gg 1$, следовательно, приближения выше будут справедливы при $\varepsilon' \geq \hat{\varepsilon}$ и

$$\frac{1}{a} \arctan \frac{2\varepsilon'}{a} \approx \frac{\pi}{2a},$$

ответ:

$$\boxed{I(a) \approx \frac{\pi}{2a}}$$

Задача 2

I. $b \gg a$

Так как $b \gg a$ и $0 \leq x \leq a$, $x \ll a \implies$

$$e^{\frac{x}{b}} \approx 1 + \frac{x}{b}, \quad \int\limits_0^a \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}} - 1}\, \mathrm{d}x \approx \int\limits_0^a bx^{n-1}\, \mathrm{d}x = \frac{bx^n}{n}\bigg|_0^a = \frac{ba^n}{n},$$

ответ:

$$\boxed{I(n, a, b) \approx \frac{ba^n}{n}}$$

II. $n \gg 1, \ nb \ll a$

Приблизительно найдем точку $\tilde{x}$, в которой подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}} - 1}$$

достигает максимума:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\bigg|_{x=\tilde{x}} = \frac{n\tilde{x}^{n-1}}{e^{\frac{\tilde{x}}{b}} - 1} - \frac{\tilde{x}^n e^{\frac{\tilde{x}}{b}}}{\left(e^{\frac{\tilde{x}}{b}} - 1\right)^2} = 0, \quad \tilde{x} = \frac{nbe^{\frac{\tilde{x}}{b}}}{e^{\frac{\tilde{x}}{b}} - 1}.$$

Применяя метод итераций при $\tilde{x}_0 = nb$, так как $n \gg 1$:

$$\tilde{x}_1 = \frac{nbe^{\frac{\tilde{x}_0}{b}}}{e^{\frac{\tilde{x}_0}{b}} - 1} = \frac{nbe^n}{e^n - 1} \approx nb = \tilde{x}_0,$$

следовательно

$$\tilde{x} \approx nb.$$

При $x' = \frac{1}{2}nb$:

$$\frac{f(x')}{f(\tilde{x})} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{e^n - 1}{e^{\frac{n}{2}} - 1} \approx \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{e}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \ll 1,$$

при $x'' = 2nb$:

$$\frac{f(x'')}{f(\tilde{x})} = 2^n \frac{e^n - 1}{e^{2n} - 1} \approx 2^n e^{-n} = \left(\frac{2}{e}\right)^n \ll 1,$$

следовательно интеграл набирается в некоторой окрестности

$$U(\tilde{x}): \ \forall x_u \in U(\tilde{x}) \hookrightarrow \frac{1}{2}nb < x_u < 2nb \ll a,$$

откуда

$$\forall x_u \in U(\tilde{x}) \hookrightarrow e^{\frac{n}{2}} - 1 < e^{\frac{x_u}{b}} - 1 \approx e^{\frac{x_u}{b}} \implies$$

$$\int\limits_0^a \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}} - 1}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^a \frac{x^n}{e^{\frac{x}{b}}}\,\mathrm{d}x \approx b^{n+1}\int\limits_0^\infty \left(\frac{x}{b}\right)^n e^{-\frac{x}{b}}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{b}\right) = b^{n+1}\Gamma(n+1).$$

В условии задачи не указано, является ли n целым числом (а, следовательно, так как $n \gg 1$ — натуральным), поэтому ответ:

$$\boxed{I(n,a,b) \approx b^{n+1}\Gamma(n+1), \text{ для } n \in \mathbb{N}\ I(n,a,b) \approx b^{n+1}n!}$$