

## Упражнение 2

### I. $\alpha \gg 1$

Пусть  $\tilde{x}$  — корень уравнения  $\ln x = e^{-\alpha x}$ , тогда,

$$\forall x \hookrightarrow e^{-\alpha x} \geq 0 \Rightarrow \ln \tilde{x} > 0 \Rightarrow \tilde{x} > 1 \Rightarrow e^{-\alpha \tilde{x}} < e^{-\alpha} \ll 1,$$

следовательно,  $0 < \ln \tilde{x} \ll 1$ , и  $\tilde{x}$  можно представить в виде

$$\tilde{x} = 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1)$$

От полученного данной подстановкой уравнения  $\ln(1 + \varepsilon) = e^{-\alpha(1+\varepsilon)}$  возьмем экспоненту:

$$1 + \varepsilon = e^{e^{-\alpha(1+\varepsilon)}},$$

и, так как  $\xi = e^{-\alpha(1+\varepsilon)} \ll 1$ , разложим правую часть по степеням  $\xi$ :

$$1 + \varepsilon = e^{\xi} \approx 1 + \xi + \frac{1}{2}\xi^2.$$

Подставляя  $\xi$  и пренебрегая малыми величинами, получаем

$$\varepsilon \approx e^{-\alpha(1+\varepsilon)} + \frac{1}{2}e^{-2\alpha(1+\varepsilon)} \approx e^{-\alpha},$$

и, подставляя  $\varepsilon$  в (4), получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx 1 + e^{-\alpha}}$$

### II. $\alpha \ll 1$

Пусть  $\tilde{x}$  — корень уравнения  $x - 1 = e^{-\alpha x}$ , тогда,

$$\forall x \hookrightarrow e^{-\alpha x} \geq 0 \Rightarrow \tilde{x} > 1 \Rightarrow |-\alpha \tilde{x}| \ll 1,$$

следовательно,  $0 < 1 - e^{-\alpha \tilde{x}} \ll 1$ , и  $e^{-\alpha \tilde{x}}$  можно представить в виде

$$e^{-\alpha \tilde{x}} = 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (2)$$

откуда  $\tilde{x} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\varepsilon}$ , и, подстановкой (5) в исходное уравнение,

$$\tilde{x} = e^{1-\varepsilon}, \quad (3)$$

$$\alpha e^{1-\varepsilon} = \ln \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Пренебрегая малой величиной, получаем

$$\alpha e^{1-\varepsilon} \approx \alpha e, \quad \alpha e \approx \ln \frac{1}{1-\varepsilon}, \quad \varepsilon = 1 - e^{-e\alpha} \approx e\alpha,$$

откуда подстановкой в (6) получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx e(1 - e\alpha)}$$