Задача 2

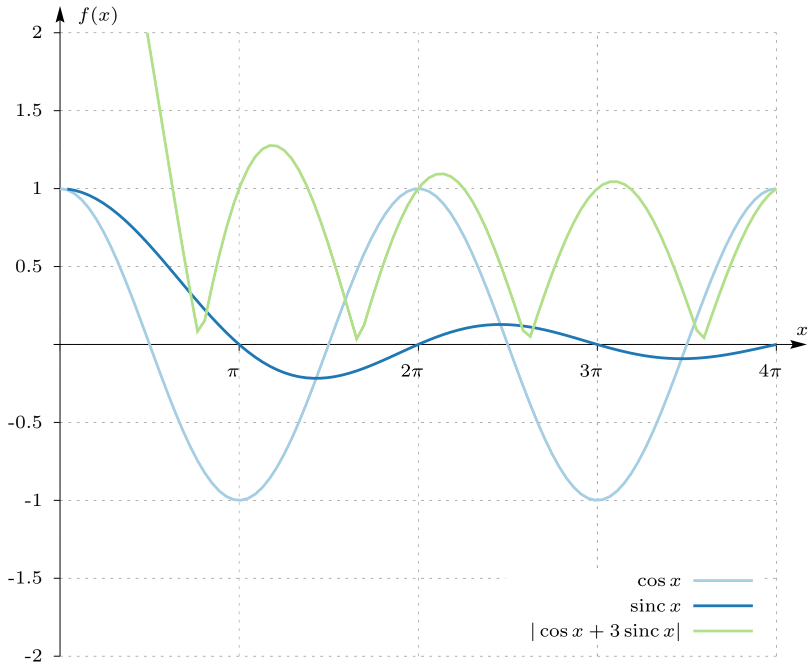

Рис. 1: График функции $|\cos x + \alpha \operatorname{sinc} x|$ при $\alpha = 3$

На **рис. 2** изображен график $|\cos x + \alpha \operatorname{sinc} x|$ при $\alpha = 3$ для наглядности. Из графика и/или тривиальных математических рассуждений видно, что на каждый интервал $(\pi k,\ \pi(k+1))\,, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ приходится зона:

$$K_k = (\pi k,\ \pi k + \varepsilon_k)\,,\ \varepsilon_k > 0 \tag{1}$$

при этом оба слагаемых имеют одинаковый знак, и модуль можно раскрыть:

$$\left|\cos x + \alpha \frac{\sin x}{x}\right| = |\cos x| + \alpha \frac{|\sin x|}{x}$$

При $\alpha \ll 1$ и $k \gg 1$ (а, следовательно, и $x \gg 1$) ширина $(\Delta x)_k$ этих участков $(\Delta x)_k \ll 1$, а следовательно поведение $\sin x$ и $\cos x$ в этих зонах описывается аналогично поведению в окрестности нуля, т. е.:

$$x \in K_k,\ |\cos x| + \alpha \frac{|\sin x|}{x} \approx 1 - \frac{(x-\pi k)^2}{2} + \alpha \frac{(x-\pi k) - \frac{(x-\pi k)^3}{6}}{x},$$

откуда получаем уравнение для правой границы зоны:

$$x = \pi k + \varepsilon_k, \quad 1 - \frac{\varepsilon_k^2}{2} + \alpha \frac{\varepsilon_k - \frac{\varepsilon_k^3}{6}}{\pi k + \varepsilon_k} \approx 1, \quad -3\pi k \varepsilon_k^2 + \alpha \frac{6\varepsilon_k - \varepsilon_k^3}{1 + \frac{\varepsilon_k}{\pi k}} \approx 0.$$

Раскладываем знаменатель по степеням $\varepsilon_k/\pi k$:

$$-3\pi k \varepsilon_k^2 + \alpha\left(6\varepsilon_k - \varepsilon_k^3\right)\left(1 - \frac{\varepsilon_k}{\pi k}\right) \approx 0 \approx -3\pi k \varepsilon_k^2 + 6\alpha\varepsilon_k - \frac{6\alpha\varepsilon_k^2}{\pi k},$$

$$-\left(\pi k + \frac{2\alpha}{\pi k}\right)\varepsilon_k + 2\alpha \approx 0, \quad \varepsilon_k \approx \frac{2\alpha}{\pi k + \frac{2\alpha}{\pi k}} \approx \frac{2\alpha}{\pi k}.$$

Из (12) получаем

$$(\Delta x)_k = (\pi k + \varepsilon_k) - \pi k = \varepsilon_k,$$

ответ:

$$\boxed{(\Delta x)_k = \frac{2\alpha}{\pi k}}$$