# Семинар по теме “Метод перевала”

15 февраля 2023 г.

## Задача 1

Найти асимптотику интеграла

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$$

при $n \gg 1$.

### Решение

Функция $\sin x$ имеет максимум в точке $\pi/2$, то есть на границе промежутка интегрирования. При этом, по мере удаления от $\pi/2$ подынтегральная функция убывает очень быстро. Дейстительно, например, в точке $\pi/6$ ее значение равно $2^{-n} \ll 1$. Поэтому $\pi/2$ — это острый максимум, а значит, приближенное вычисление можно выполнить методом перевала. Для этой цели необходимо привести выражение к стандартной для первала форме. Чтобы сделать это, мы переписываем

$$\sin t = e^{\ln \sin t} \quad \to \quad I(n) = \int_0^{\pi/2} e^{n \ln \sin t} dt$$

Разложим теперь выражение в экспоненте вблизи $\pi/2$ по формуле Тейлора вплоть до второго порядка. Проделав это, получаем

$$I(n) \simeq \int_0^{\pi/2} e^{n \ln(1-(t-\pi/2)^2/2+\dots} dt \simeq \int_0^{\pi/2} e^{-n(t-\pi/2)^2/2+\dots} dt$$

Видно, что мы практически получили Гауссов интеграл. Однако, здесь имеется два тонкости.

1. Характерным масштаб затухания подынтегральной функции по мере удаления от $\pi/2$ определяется из условия $n\Delta t^2 \sim 1$, то есть $\Delta t \sim n^{-1/2} \ll 1$. Это означает, что *нижний* предел интегрирования можно заменить на $-\infty$, ведь он находится на расстоянии $\sim 1 \gg n^{-1/2}$ от перевальной точки, и к существенным искажениям ответа такая замена не приведет.

2. С *верхним* пределом ситуация обстоит иначе. Дело в том, что он попадает в точности на максимум подынтегральной функции. Это приводит к тому, что от полного Гауссова интеграла нужно взять только половину, ведь вторая половина расположена в области $t > \pi/2$, по которой интегрирование не производится.

В результате получаем

$$I(n) \simeq \int_{-\infty}^{\pi/2} e^{-n(t-\pi/2)^2/2+\dots} dt = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{2\pi}{n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

## Задача 2

Найти поведение интеграла при $a \gg 1$

$$I(a,x) = \int_0^x \exp(a\sin t)dt$$

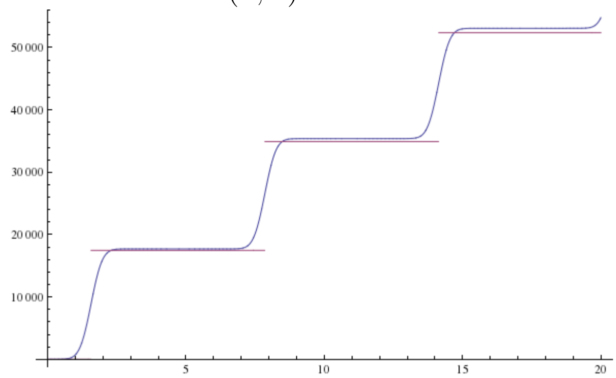
### Решение

Особенность этой задачи заключается в том, что теперь у функции в показателе экспоненты бесконечное множество стационарных точек. Они определяются уравнением $f'(t) = a\cos t = 0 \Rightarrow t_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$; при этом ровно половина из них являются локальными максимумами: $f''(t) = -a\sin t \Rightarrow f''(t_n) = (-1)^n a$; поэтому локальные максимумы - лишь точки $t_{2n} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Вклад от окрестности каждой стационарной точки тоже легко определить:

$$I_{2n} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(a - \frac{a}{2}(t-t_{2n})^2)dt \approx \sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^a$$

Займёмся теперь поведением нашего интеграла. По мере увеличения $x$, в область интегрирования будет попадать больше и больше перевальных точек. Вклад от каждой точки - постоянный; поэтому $x$ будет достигать $t_{2n}$, функция будет испытывать резкий скачок на величину, примерно равную вкладу от одной перевальной точки. Таким образом, график функции будет представлять собой “лесенку”; ширина переходов между ступеньками по порядку равна $\sim \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Рис. 1: $I(a,x)$ и асимптотика




Важно однако отметить, что реальное значение интеграла такой функции по периоду отличается от апроксимации, полученной методом перевала. При больших $x$, когда имеется вклад от большого количества перевальных точек, эта погрешность складывается. Этой погрешностью можно пренебречь при $x \lesssim a$, поскольку погрешность от каждой перевальной точки - порядка $\sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^a \cdot O\left(\frac{1}{a}\right)$.

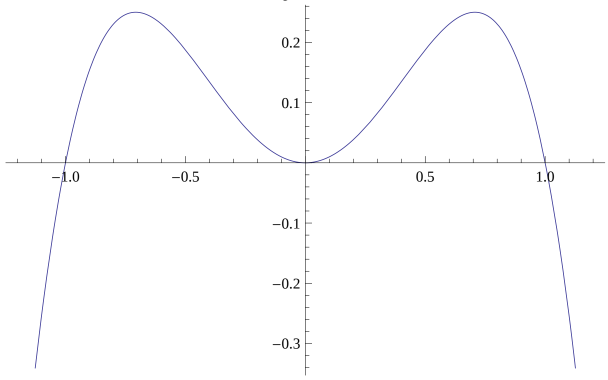
## Задача 3 (несколько перевалов)

Найти асимптотическое поведение интеграла при $A \gg 1$

$$I(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-A(x^4 - x^2))dx$$

### Решение

Рис. 2: $y = x^2 - x^4$




Функция в показателе экспоненты имеет два максимума:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Значения в перевальных точках определяются как:

$$f(x_{1,2}) = -A\left(\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)\frac{A}{4}$$

А вторые производные:

$$f''(x_{1,2}) = -A(12x_{1,2}^2 - 2) = -4A$$

Поэтому в окрестности каждой из точек функция представляется как:

$$f(x) \approx \frac{A}{4} - 2A(x - x_{1,2})^2$$

Обе точки дадут вклад в перевальную оценку; поэтому для асимптотики имеем:

$$I\left(A\right) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{A}{4} - 2A(x - x_1)^2\right)dx + \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{A}{4} - 2A(x - x_2)^2\right)dx = \sqrt{\frac{2\pi}{A}}e^{A/4}$$

## Задача 4 (перевал $x^4$)

Найти асимптотическое поведение интеграла при $A \gg 1$:

$$I\left(A\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-A\left(\cosh x - \frac{x^2}{2}\right)\right)dx$$

### Решение

Поскольку функция $\cosh x$ вблизи нуля раскладывается как $\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots$, то видно, что ведущий член разложения функции в экспоненте имеет порядок $x^4$.

Поэтому, следуя идее метода перевала о разложении функции в экспоненте в ряд около стационарной точки, для асимптотики этого интеграла имеем:

$$I(A) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-A\left(1+\frac{x^4}{24}\right)\right) dx$$

Этот интеграл аналогичен интегралу Пуассона; его можно взять подстановкой $t = \frac{A}{24}x^4$, сводящей его к гамма-функции:

$$I(A) \approx e^{-A} \cdot 2 \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{24}{A}\right)^{1/4} \frac{1}{4} t^{-3/4} dt = \frac{1}{2}\left(\frac{24}{A}\right)^{1/4} e^{-A} \int_0^{\infty} t^{-3/4} e^{-t} dt = \left(\frac{3}{2A}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) e^{-A}$$

Здесь $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \approx 3.62561$ — просто некое число; оно не выражается через известные мировые константы ($\pi$, $e$, $C$, …); однако это и не требуется.

## Приложение: метод перевала как пример асимптотического разложения

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda f(x)} dx$$

при $\lambda \to +\infty$. Пусть функция $f(x)$ имеет на всей области интегрирования ровно одну перевальную точку $x_0$. Кроме того, пусть вблизи $x_0$ функция $f(x)$ аналитична (т.е. представляется в виде суммы бесконечного ряда Тейлора - например, функция $\sqrt{x}$ таким свойством при $x_0 = 0$ не обладает) и $f''(x_0) \neq 0$. Выполним замену переменной:

$$f(x) - f(x_0) = s^2$$

### Утверждение

Из аналитичности $f(x)$ и $f''(x_0) \neq 0$ следует, что $x(s)$ - тоже аналитична.

### Доказательство

Из аналитичности функции $f(x)$ получаем:

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = s^2$$

Первая производная отсутствует в силу того, что $x_0$ - перевальная точка. Выражая $s$ и выбирая правильный знак (такой, чтобы исходный интеграл был положительным), получаем:

$$s = (x - x_0)\sqrt{a_2 + a_3(x - x_0) + \ldots} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{'} (x - x_0)^n \quad (1)$$

Полученный ряд можно обратить и получить ряд для функции $x(s)$. Действительно, подставляя разложение

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k s^k$$

в (**??**), получаем:

$$s=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{'}\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k s^k\right)^n$$

Отсюда, путём последовательного приравнивания степеней $s$ в левой и правой частях, можно определить коэффициенты $c_k$. Для $c_1$ и $c_2$ получаются следующие соотношения:

$$1=a_1^{'}c_1$$

$$0=a_1^{'}c_2+a_2^{'}c_1^2$$

**Утверждение** можно считать доказанным (разумеется, на физическом уровне строгости).

Исходный интеграл переписывается в виде:

$$e^{-\lambda f(x_0)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda s^2}\frac{dx(s)}{ds}ds=\frac{e^{-\lambda f(x_0)}}{\sqrt{\lambda}}\int dte^{-t^2}\sum_{k=0}^{\infty} t^k\frac{c_k^{'}}{\lambda^{k/2}}\sim\frac{e^{-\lambda f(x_0)}}{\sqrt{\lambda}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_{2k}^{'}}{\lambda^k}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)$$

Здесь следует пояснить несколько моментов. Во-первых, случилось переобозначение коэффициентов $c_k$:

$$\frac{dx}{ds}=\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{'}s^k=\sum_{k=1}^{\infty} kc_k s^{k-1}$$

Что более важно, в последнем переходе фигурирует значок $\sim$. Его следует понимать так:

$$e^{-\lambda f(x_0)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda s^2}\frac{dx(s)}{ds}ds=\frac{e^{-\lambda f(x_0)}}{\sqrt{\lambda}}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{c_{2k}^{'}}{\lambda^k}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)+O\left(\frac{1}{\lambda^N}\right)$$

Здесь мы имеем дело с асимптотическим рядом. В силу того, что $\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)$ при больших $k$ растёт факториально, формальная сумма по $k$ до $\infty$ расходится. Однако, правая часть остаётся конечной в силу наличия остаточного члена, у которого тоже есть факториально растущий с $N$ коэффициент. Формально это $O\left(\frac{1}{\lambda^N}\right)$ получается, если написать $x(s)-x_0=\sum_{k=1}^{N-1} c_k s^k+\frac{1}{N!}x^{(N)}(s_1)s^N$ (формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (здесь $s_1\in[0;s]$) ), продифференцировать по $s$ и подставить в интеграл.

Итак, мы выяснили, что метод перевала является одним из примеров асимптотического разложения и указали явный способ получения поправок к методу перевала.

## Задачи для домашнего решения

**Упражнение 1**

Методом перевала приближенно вычислите интеграл при $\lambda\to+\infty$:

$$I(\lambda)=\int_{-1}^{1}\exp\left(\frac{\lambda}{\cosh^2 x}\right)dx.$$

**Упражнение 2**

Методом перевала приближенно вычислите интеграл при $\lambda \to +\infty$:

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(x-1)^2(x-2)^2} dx.$$

**Упражнение 3**
Методом перевала приближенно вычислите интеграл при $\lambda \to +\infty$:

$$I(\lambda) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\lambda} dx.$$

**Упражнение 4**
Используя идеи, аналогичные методу перевала, в пределе $\lambda \to +\infty$ вычислите интеграл

$$I(\lambda) = \int_0^1 \exp(\lambda(\sin x - x)).$$

*Обратите внимание:* в перевальной точке вторая производная функции в показателе экспоненты равна 0.

**Задача 1**
В пределе $\lambda \to +\infty$ вычислите интеграл

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cosh^{\lambda} x dx.$$

**Задача 2**
Рассмотрите интеграл с тремя параметрами:

$$I(\lambda, \epsilon, s) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-\epsilon x} \exp(-\lambda(1 - \cos x)) dx.$$

Вычислите его в пределе $\epsilon \ll 1, \quad \lambda \gg 1$,
считая, что $s$ - произвольное число порядка 1.