Домашняя работа №1

Сирый Р. А.

05 февраля 2023 г.

Упражнение 1

I. $\alpha \gg 1$

Пусть $\tilde{x}$ — корень уравнения $x - 1 = e^{-\alpha x}$, тогда,

$$\forall x \hookrightarrow e^{-\alpha x} \geq 0 \Rightarrow \tilde{x} > 1 \Rightarrow e^{-\alpha \tilde{x}} < e^{-\alpha} \ll 1,$$

следовательно, $0 < \tilde{x} - 1 \ll 1$, и $\tilde{x}$ можно представить в виде

$$\tilde{x} = 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{1}$$

От полученного данной подстановкой уравнения $\varepsilon = e^{-\alpha(1+\varepsilon)}$ отбросим малый член:

$$e^{-\alpha(1+\varepsilon)} \approx e{-}\alpha, \quad -\alpha \approx \ln \varepsilon,$$

откуда получаем $\varepsilon \approx e^{-\alpha}$, и, подставляя ε в (1), получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx 1 + e^{-\alpha}}$$

II. $\alpha \ll 1$

Пусть $\tilde{x}$ — корень уравнения $x - 1 = e^{-\alpha x}$, тогда,

$$\forall x \hookrightarrow e^{-\alpha x} \geq 0 \Rightarrow \tilde{x} > 1 \Rightarrow |-\alpha \tilde{x}| \ll 1,$$

следовательно, $0 < 1 - e^{-\alpha \tilde{x}} \ll 1$, и $e^{-\alpha \tilde{x}}$ можно представить в виде

$$e^{-\alpha \tilde{x}} = 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{2}$$

откуда $\tilde{x} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\varepsilon}$, и, подстановкой (2) в исходное уравнение,

$$\tilde{x} = 2 - \varepsilon, \tag{3}$$

$$\alpha(2 - \varepsilon) = \ln \frac{1}{1 - \varepsilon}.$$

Пренебрегая малой величиной, получаем

$$(2 - \varepsilon)\alpha \approx 2\alpha, \quad 2\alpha \approx \ln \frac{1}{1 - \varepsilon}, \quad \varepsilon \approx 1 - e^{-2\alpha},$$

откуда подстановкой в (3) получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx 1 + e^{-2\alpha}}$$

Упражнение 2

I. $\alpha \gg 1$

Пусть $\tilde{x}$ — корень уравнения $\ln x = e^{-\alpha x}$, тогда,

$$\forall x \hookrightarrow e^{-\alpha x} \geq 0 \Rightarrow \ln \tilde{x} > 0 \Rightarrow \tilde{x} > 1 \Rightarrow e^{-\alpha \tilde{x}} < e^{-\alpha} \ll 1,$$

следовательно, $0 < \ln \tilde{x} \ll 1$, и $\tilde{x}$ можно представить в виде

$$\tilde{x} = 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{4}$$

От полученного данной подстановкой уравнения $\ln(1+\varepsilon) = e^{-\alpha(1+\varepsilon)}$ возьмем экспоненту:

$$1 + \varepsilon = e^{e^{-\alpha(1+\varepsilon)}},$$

и, так как $\xi = e^{-\alpha(1+\varepsilon)} \ll 1$, разложим правую часть по степеням ξ:

$$1 + \varepsilon = e^{\xi} \approx 1 + \xi + \frac{1}{2}\xi^2.$$

Подставляя ξ и пренебрегая малыми величинами, получаем

$$\varepsilon \approx e^{-\alpha(1+\varepsilon)} + \frac{1}{2}e^{-2\alpha(1+\varepsilon)} \approx e^{-\alpha},$$

и, подставляя ε в (4), получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx 1 + e^{-\alpha}}$$

II. $\alpha \ll 1$

Пусть $\tilde{x}$ — корень уравнения $x - 1 = e^{-\alpha x}$, тогда,

$$\forall x \hookrightarrow e^{-\alpha x} \geq 0 \Rightarrow \tilde{x} > 1 \Rightarrow |-\alpha \tilde{x}| \ll 1,$$

следовательно, $0 < 1 - e^{-\alpha \tilde{x}} \ll 1$, и $e^{-\alpha \tilde{x}}$ можно представить в виде

$$e^{-\alpha \tilde{x}} = 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{5}$$

откуда $\tilde{x} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\varepsilon}$, и, подстановкой (5) в исходное уравнение,

$$\tilde{x} = e^{1-\varepsilon}, \tag{6}$$

$$\alpha e^{1-\varepsilon} = \ln \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Пренебрегая малой величиной, получаем

$$\alpha e^{1-\varepsilon} \approx \alpha e, \quad \alpha e \approx \ln \frac{1}{1-\varepsilon}, \quad \varepsilon = 1 - e^{-e\alpha},$$

откуда подстановкой в (6) получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx e^{e^{-e\alpha}}}$$

Упражнение 3

I. $\tilde{x}_1(\lambda)$

Пусть $0 > \tilde{x} > -1$ — корень уравнения $xe^x = \lambda$. При малых x таких, что $|x| \ll 1$,

$$xe^x \approx x(1 + x + \frac{1}{2}x^2) \approx x,$$

следовательно, $\tilde{x} \approx \tilde{x}e^x \approx \lambda$, ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx \lambda}$$

II. $\tilde{x}_2(\lambda)$

Домножим на -1 и прологарифмируем обе части уравнения:

$$x = \ln(-\lambda) - \ln(-x).$$

Чтобы записи были приятнее глазу, перепишем уравнение в следующем виде:

$$y = -x, \quad \xi = -\ln(-\lambda), \quad y = \xi + \ln y. \tag{7}$$

Пусть $\tilde{y}$ — корень данного уравнения, удовлетворяющий условию задачи $x_2(\lambda) < -1 \Leftrightarrow \tilde{y} > 1$. Применим метод итераций к (7) и докажем, что последовательность $\{y_n\}$ сходится в $\tilde{y}$.

Пусть $y_1 = 1$, тогда

$$y_2 = \xi + \ln y_1, \quad (\Delta y)_1 = y_2 - y_1 = \xi - 1.$$

Так как $|\lambda| \ll 1$, $\xi > 1$ и, следовательно,

$$y_2 > y_1, \quad (\Delta y)_1 > 0.$$

Докажем ограниченность сверху для $\{y_n\}$. Предположим, что $\exists n : y_n \geq \tilde{y}$, тогда

$$y_n = \xi + \ln y_{n-1}, \quad y_{n-1} = e^{y_n - \xi} = e^{(\tilde{y}-\xi)+(y_n-\tilde{y})} = \tilde{y}e^{y_n - \tilde{y}} \geq \tilde{y},$$

откуда по индукции:

$$\exists n : y_n \geq \tilde{y} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ k \leq n \hookrightarrow y_k \geq \tilde{y},$$

что противоречит начальным условиям $\tilde{y} > 1$, $y_1 = 1$, следовательно $\{y_n\}$ ограниченна сверху, и

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow y_n < \tilde{y}. \tag{8}$$

Докажем, что последовательность $\{y_n\}$ монотонно возрастает:

$$(\Delta y)_n = y_{n+1} - y_n = (\xi + \ln y_n) - (\xi + \ln y_{n-1}) = \ln\frac{y_n}{y_{n-1}} = \ln\left(1 + \frac{(\Delta y)_{n-1}}{y_{n-1}}\right),$$

$$(\Delta y)_{n-1} > 0 \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{(\Delta y)_{n-1}}{y_{n-1}}\right) > 0 \Rightarrow (\Delta y)_n > 0,$$

откуда по индукции:

$$(\Delta y)_1 > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow (\Delta y)_n > 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow y_{n+1} > y_n,$$

т.е. $\{y_n\}$ монотонно возрастает.

Отсюда и из условия (8) ограниченности последовательности $\{y_n\}$

$$\exists \lim_{n\to\infty} y_n = \hat{y}, \quad \hat{y} \le \tilde{y}.$$

Переходя к пределу в формуле $y_{n+1} = \xi + \ln y_n$ при $n \to \infty$, получаем $\hat{y} = \xi + \ln \hat{y}$, т.е. $\hat{y} = \tilde{y}$. ■

То, с какой точностью записывать ответ, сильно зависит от λ. Например, при $x_1 = -1$ для $\lambda = -e^{-4}$, с точностью до трёх значащих цифр

$$\tilde{x}_2(-e^4) \approx x_6 = -(\xi + \ln(\xi + \ln(\xi + \ln(\xi + \ln \xi)))),\ \xi = -\ln(-\lambda) = 4,$$

а для $\lambda = -e^{-8}$ ту же точность получаем при

$$\tilde{x}_2(-e^8) \approx x_4 = -(\xi + \ln(\xi + \ln \xi)),\ \xi = -\ln(-\lambda) = 8.$$

Буду считать, что $\lambda = -e^{-4} \approx -0.02$ удовлетворяет условию $|\lambda| \ll 1$ и запишу в ответ $\tilde{x}_2(\lambda) \approx x_6$:

$$\boxed{\tilde{x}_2(\lambda) \approx -(\xi + \ln(\xi + \ln(\xi + \ln(\xi + \ln \xi)))),\ \xi = -\ln(-\lambda)}$$

Упражнение 4

Пусть $\tilde{x}$ — корень данного уравнения, а $\lambda = -\frac{1}{e} + \delta, 0 < \delta \ll 1$, тогда $\tilde{x}$ можно представить в виде

$$\tilde{x} = -1 + \varepsilon, \quad |\varepsilon| \ll 1. \tag{9}$$

Домножим обе части уравнения на e и разложим левую часть по степеням ε:

$$(-1+\varepsilon)e^{\varepsilon} \approx (-1+\varepsilon)(1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2) \approx -1 + \delta e,$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2 = \delta e, \quad \varepsilon = \pm\sqrt{2\delta e} = \pm\sqrt{2(\lambda e + 1)}, \tag{10}$$

отсюда, подставляя в (9) и учитывая, что $\tilde{x}_1(\lambda) > \tilde{x}_2(\lambda)$, ответ:

$$\boxed{\tilde{x}_1(\lambda) = -1 + \sqrt{2(\lambda e + 1)}, \quad \tilde{x}_2(\lambda) = -1 - \sqrt{2(\lambda e + 1)}}$$

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetuer at, consectetuer sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.

Задача 1

Morbi luctus, wisi viverra faucibus pretium, nibh est placerat odio, nec commodo wisi enim eget quam. Quisque libero justo, consectetuer a, feugiat vitae, porttitor eu, libero. Suspendisse sed mauris vitae elit sollicitudin malesuada. Maecenas ultricies eros sit amet ante. Ut venenatis velit. Maecenas sed mi eget dui varius euismod. Phasellus aliquet volutpat odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetuer. Nullam elementum, urna vel imperdiet sodales, elit ipsum pharetra ligula, ac pretium ante justo a nulla. Curabitur tristique arcu eu metus. Vestibulum lectus. Proin mauris. Proin eu nunc eu urna hendrerit faucibus. Aliquam auctor, pede consequat laoreet varius, eros tellus scelerisque quam, pellentesque hendrerit ipsum dolor sed augue. Nulla nec lacus.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetuer odio sem sed wisi.

Задача 2

Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetuer eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdiet justo nec dolor.

Etiam euismod. Fusce facilisis lacinia dui. Suspendisse potenti. In mi erat, cursus id, nonummy sed, ullamcorper eget, sapien. Praesent pretium, magna in eleifend egestas, pede pede pretium lorem, quis consectetuer tortor sapien facilisis magna. Mauris quis magna varius nulla scelerisque imperdiet. Aliquam non quam. Aliquam porttitor quam a lacus. Praesent vel arcu ut tortor cursus volutpat. In vitae pede quis diam bibendum placerat. Fusce elementum convallis neque. Sed dolor orci, scelerisque ac, dapibus nec, ultricies ut, mi. Duis nec dui quis leo sagittis commodo.