Упражнение 1

Заменив переменную, обезразмерим интеграл:

$$t = bx, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{b}\mathrm{d}t, \quad I(a,b) = \int\limits_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin^2 bx}{x^2}\,\mathrm{d}x = b\int\limits_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

I. $a \gg b$

При $t \sim \sqrt{\frac{b}{a}} \ll 1$ степень при экспоненте $-\frac{a}{b}t \sim -\sqrt{\frac{a}{b}} \ll -1$, следовательно, интеграл набирается при малых t и $\sin^2 t$ можно разложить в ряд:

$$I(a,b) = b\int\limits_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t \approx b\int\limits_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\frac{t^2}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{b^2}{a}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\,\mathrm{d}\left(\frac{a}{b}t\right) = \frac{b^2}{a},$$

ответ:

$$\boxed{I(a,b) \approx \frac{b^2}{a}}$$

II. $a \ll b$

При $t \sim 10$, знаменатель подынтегральной функции $\frac{1}{t^2} \sim 0.01 \ll 1$, а следовательно подынтегральная функция $f(t) \ll 1$ и интеграл набирается в некой окрестности $0 \le t \le t' \sim 10$. При этом степень при экспоненте остается мала: $-\frac{a}{b}t \ll 1$, следовательно

$$e^{-\frac{a}{b}t} \approx 1,\ I(a,b) = b\int\limits_0^\infty e^{-\frac{a}{b}t}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t \approx b\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Полученный интеграл вычисляется:

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{\sin^2 t}{t}\right|_0^\infty - \int\limits_0^\infty t\,\mathrm{d}\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right) = -\int\limits_0^\infty t\,\mathrm{d}\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)$$

$$= -\int\limits_0^\infty t\left(\frac{2\sin t\cos t}{t^2} - \frac{2\sin^2 t}{t^3}\right)\,\mathrm{d}t = -\int\limits_0^\infty \frac{\sin 2t}{2t}\,\mathrm{d}(2t) + 2I, \quad I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin 2t}{2t}\,\mathrm{d}(2t) = \frac{\pi}{2},$$

ответ:

$$\boxed{I(a,b) \approx \frac{\pi b}{2}}$$