Упражнение 2

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = -\lambda(x-1)^2(x-2)^2, \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

Так как $\forall x \in \{1, 2\} \hookrightarrow f(x) = 0$ и $\forall x \notin \{1, 2\} \hookrightarrow f(x) < 0$, в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ находятся максимумы $f(x)$, а следовательно, и максимумы $g(x)$. Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \lambda\tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) = -(x-1)^2(x-2)^2,$$

тогда, так как

$$\tilde{f}''(x) = -\left[8x^2 + 2\left((x-1)^2 + (x-2)^2\right)\right], \quad \tilde{f}''(x_1) = -10 \sim 1, \quad \tilde{f}''(x_2) = -34 \sim 1$$

и $\lambda \to \infty$, оба максимума $g(x)$ резкие и

$$I(\lambda) = \int\limits_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty e^{\lambda\tilde{f}(x)}\,\mathrm{d}x \approx e^{\lambda\tilde{f}(x_1)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\left|\tilde{f}''(x_1)\right|}} + e^{\lambda\tilde{f}(x_2)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\left|\tilde{f}''(x_2)\right|}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\left(\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{34}}\right),$$

ответ:

$$\boxed{I(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\left(\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{34}}\right)}$$