

Упражнение 4

Можно сразу опустить первый член, так как он равен нулю:

$$S(a, b) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n^a e^{-bn} = \sum_{n=1}^{\infty} n^a e^{-bn}.$$

Сделал это для удобства рассуждений (чтобы, например, игнорировать случай $n = 0$ в утверждениях вроде $f'(n) \ll f(n)$), отсюда получаем $n \in \mathbb{N}$.

I. $a \sim 1$, $b \ll 1$

Сравним $f'(n)$ и $f(n)$:

$$f'(n) = an^{a-1}e^{-bn} - bn^ae^{-bn} = \left(\frac{a}{n} - b\right)f(n),$$

а следовательно, так как $a \sim 1$ и $b \ll 1$, начиная с некоторого

$$n' \gg 1, \quad (\mathbf{Y4.1})$$

можно будет приблизить сумму интегралом.

Попробуем подобрать n' следующим образом. При $n \approx \frac{a}{b}$ получаем $f'(a/b) \approx 0$, т.е. в этой точке будет находится максимум $f(n)$, и если мы подберем

$$(n')^a \ll (a/b)^a, \quad (\mathbf{Y4.2})$$

то интервал охватит примерно всю область, на которой он набирается:

$$\sum_{n=n'}^{\infty} f(n) \approx \int_{n'}^{\infty} f(n) \, dn + \frac{1}{2}f(n') \approx \int_0^{\infty} f(n) \, dn + \frac{1}{2}f(n') = \frac{1}{b^{a+1}}\Gamma(a+1) + \frac{1}{2}n'^ae^{-bn'}.$$

Оценим сумму остальных членов сверху:

$$n' \ll \frac{a}{b} \Rightarrow \forall n < n' \hookrightarrow f(n) \leq f(n') \Rightarrow \sum_{n=1}^{n'-1} f(n) \leq (n'-1)f(n'-1) = (n'-1)^{(a+1)}e^{-b(n'-1)}.$$

Так как $n' \ll \frac{a}{b}$, $bn' \ll a \sim 1 \Rightarrow e^{-bn'} \approx e^{-b(n-1)}1$, а следовательно, если выполняется

$$(n'-1)^{(a+1)} \ll \frac{1}{b^a}, \quad (\mathbf{Y4.3})$$

то

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n'-1} f(n) &\approx (n'-1)^{(a+1)} \ll \frac{1}{b^a}\Gamma(a+1) + \frac{1}{2}n'^a \approx \frac{1}{b^a}\Gamma(a+1) \approx \sum_{n=n'}^{\infty} f(n) \implies \\ S(a, b) &= \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{n'-1} f(n) + \sum_{n=n'}^{\infty} f(n) \approx \sum_{n=n'}^{\infty} f(n) \approx \frac{1}{b^a}\Gamma(a+1). \end{aligned}$$

Осталось подобрать n' . Объединим условия (Y4.1), (Y4.2) и (Y4.3):

$$\begin{cases} n' \gg 1 \\ n'^a \ll \left(\frac{a}{b}\right)^a \\ (n' - 1)^{(a+1)} \ll \frac{1}{b^a} \end{cases} \stackrel{a \sim 1, n' \gg 1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} n' \gg 1 \\ n'^{(a+1)} b^a \ll 1. \end{cases} \quad (\text{Y4.4})$$

При достаточно больших a и достаточно малых b получаем, что

$$\text{для } n' \approx b^{(-\frac{a}{a+2})} \hookrightarrow n'^{(a+1)} b^a \approx b^{(-\frac{a(a+1)}{a+2} + a)} = b^{(\frac{a}{a+2})} \approx \frac{1}{n'},$$

а следовательно

$$n' \gg 1 \Leftrightarrow 1 \gg \frac{1}{n'} \approx n'^{(a+1)} b^a,$$

т.е. условия из (Y4.4) равносильны для данного n' , и если данное условие для данного n' не выполняется, то для любого другого n не выполняется хотя бы одно из двух, и сумму нельзя приблизить интегралом. Буду считать, что в задаче подразумевалось ее решение приближением через интеграл, и ответ:

$$S(a, b) \approx \frac{1}{b^a} \Gamma(a+1), \text{ для } a \in \mathbb{N} \quad S(a, b) \approx \frac{a!}{b^a}$$

II. $b \gg \frac{a}{b} \gg 1$

Сравним $f'(n)$ и $f(n)$:

$$f'(n) = an^{a-1}e^{-bn} - bn^ae^{-bn} = \left(\frac{a}{n} - b\right) f(n),$$

и при $\tilde{n} = a/b$, $f'(\tilde{n}) = 0$. Оценим, как изменяется отношение производной к значению функции при изменении \tilde{n} на $\varepsilon \sim 1$. $a/b \gg 1 \Rightarrow b/a \ll 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{f'(\tilde{n} + \varepsilon)}{f(\tilde{n} + \varepsilon)} &= \frac{a}{\frac{a}{b} + \varepsilon} - b = \frac{b}{1 + \frac{b\varepsilon}{a}} - b \stackrel{b/a \ll 1}{\approx} b \left(1 - \frac{b\varepsilon}{a}\right) - b = -\varepsilon \frac{b^2}{a}, \\ b \gg \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 \gg a \Rightarrow \frac{b^2}{a} \gg 1 &\stackrel{\varepsilon \sim 1}{\Rightarrow} \left| \frac{f'(\tilde{n} + \varepsilon)}{f(\tilde{n} + \varepsilon)} \right| \gg 1, \end{aligned}$$

а следовательно имеет смысл просуммировать несколько максимальных членов.

Так как суммирование производится по $n \in \mathbb{N}$, рассматривать $|\varepsilon| \ll 1$ не имеет смысла. Также, из того, что n натурально, нельзя просто взять $S(a, b) = f(a/b)$, так как a/b необязательно натурально, поэтому за сумму надо брать первые члены справа и слева от \tilde{n} :

$$\begin{aligned} S(a, b) &\approx f(\tilde{n}_1) + f(\tilde{n}_2), \quad 0 \leq \tilde{n} - \tilde{n}_1 \leq 1, \quad 0 \leq \tilde{n}_2 - \tilde{n} \leq 1 \iff \\ \tilde{n}_1 &= \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor, \quad \tilde{n}_2 = \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil, \end{aligned}$$

откуда ответ:

$$S(a, b) \approx \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor^a e^{-b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor} + \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil^a e^{-b \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil}$$