Упражнение 3

Отдельно рассмотрим случай $m = 0$:

$$n = -1 \Rightarrow I(-1, 0, k) = \frac{1}{2^k} \int\limits_0^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{\ln x}{2^k}\right|_0^\infty,$$

$$n \neq -1 \Rightarrow I(n, 0, k) = \frac{1}{2^k} \int\limits_0^\infty x^n\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{n+1}}{2^k(n+1)}\right|_0^\infty,$$

а следовательно, при $m = 0$ для любых n, k интеграл расходится.

Пусть $m \neq 0$. Произведем следующую замену:

$$\begin{aligned}
t(x) &= \frac{x^m}{x^m+1},\\
1 - t &= \frac{1}{x^m+1},\\
\mathrm{d}t &= \frac{mx^{m-1}}{(x^m+1)^2}\,\mathrm{d}x = mt^{(m-1)/m}(1-t)^{(m+1)/m}\,\mathrm{d}x,\\
\mathrm{d}x &= \frac{1}{m}t^{-(m-1)/m}(1-t)^{-(m+1)/m}\,\mathrm{d}t,\\
m > 0 &\Rightarrow \lim_{x\to\infty} t(x) = 1,\ \lim_{x\to 0} t(x) = 0,\\
m < 0 &\Rightarrow \lim_{x\to\infty} t(x) = 0,\ \lim_{x\to 0} t(x) = 1,
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
I(n, m, k) &= \int\limits_0^\infty \frac{x^n}{(x^m+1)^k}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \left(\frac{x^m}{x^m+1}\right)^{n/m} \left(\frac{1}{x^m+1}\right)^{(km-n)/m}\,\mathrm{d}x\\
&= \operatorname{sign}(m) \int\limits_0^1 t^{n/m}(1-t)^{(km-n)/m} \cdot \frac{1}{m}t^{-(m-1)/m}(1-t)^{-(m+1)/m}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{|m|} \int\limits_0^1 t^{\frac{n+1}{m}-1}(1-t)^{k-\frac{n+1}{m}-1}\,\mathrm{d}t\\
&= \boxed{\frac{1}{|m|}B\left(\frac{n+1}{m}, k - \frac{n+1}{m}\right)}
\end{aligned}$$

Для того, чтобы искомый интеграл сходился, нужно чтобы он сходился в окрестностях нуля и бесконечности, т.е. выполнить два условия:

$$I(n, m, k) = \int\limits_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^\alpha,\ \alpha > -1\\ f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^\alpha,\ \alpha < -1 \end{cases},$$

или

$$\boxed{\begin{cases} -\min\{km, 0\} + n > -1 \\ -\max\{km, 0\} + n < -1 \end{cases}}$$