

Домашняя работа №3

Сирий Р. А.

20 февраля 2023 г.

Упражнение 1

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = \frac{\lambda}{\cosh^2 x}, \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

В точке $\hat{x} = 0$ $\cosh^2 x$ минимален, а следовательно $g(x)$ максимальна. Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \lambda \tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

и найдем вторую производную $\tilde{f}''(x)$:

$$\tilde{f}''(x) = \left(\frac{1}{\cosh^2 x} \right)'' = \left(\frac{-2 \sinh x}{\cosh^3 x} \right)' = \frac{6 \sinh^2 x}{\cosh^4 x} - \frac{2}{\cosh^2 x},$$

тогда, так как $\lambda \rightarrow \infty$ и $\tilde{f}''(x) \sim 1$ для x в окрестности \hat{x} , максимум $g(x)$ резкий и

$$I(\lambda) = \int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^1 e^{\lambda \tilde{f}(x)} dx \approx e^{\lambda \tilde{f}(\hat{x})} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\tilde{f}''(\hat{x})|}}, \quad \tilde{f}(\hat{x}) = 1, \quad \tilde{f}''(\hat{x}) = -2,$$

откуда ответ:

$$\boxed{I(\lambda) \approx e^{\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}}$$

Упражнение 2

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = -\lambda(x-1)^2(x-2)^2, \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

Так как $\forall x \in \{1, 2\} \hookrightarrow f(x) = 0$ и $\forall x \notin \{1, 2\} \hookrightarrow f(x) < 0$, в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ находятся максимумы $f(x)$, а следовательно, и максимумы $g(x)$. Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \lambda \tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) = -(x-1)^2(x-2)^2,$$

тогда, так как

$$\tilde{f}''(x) = -[8(x-1)(x-2) + 2((x-1)^2 + (x-2)^2)], \quad \tilde{f}''(x_1) = f''(x_2) = -2 \sim 1$$

и $\lambda \rightarrow \infty$, оба максимума $g(x)$ резкие и

$$I(\lambda) = \int_0^\infty g(x) dx = \int_0^\infty e^{\lambda \tilde{f}(x)} dx \approx e^{\lambda \tilde{f}(x_1)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\tilde{f}''(x_1)|}} + e^{\lambda \tilde{f}(x_2)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\tilde{f}''(x_2)|}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}},$$

ответ:

$$I(\lambda) = 2\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

Упражнение 3

Преобразуем интеграл:

$$I(\lambda) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^\lambda dx = \int_1^{+\infty} e^{\lambda \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)} dx.$$

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = \lambda \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right), \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \lambda \tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) = \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

и исследуем $\tilde{f}(x)$. Найдем производные:

$$\tilde{f}'(x) = \frac{x}{\ln x} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) = \frac{1}{x \ln x} (1 - \ln x), \quad \tilde{f}''(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}.$$

При $\hat{x} = e$, $\tilde{f}'(\hat{x}) = 0$, а так как

$$\forall x \neq \hat{x}, 1 \leq x < +\infty \hookrightarrow \tilde{f}'(x) \neq 0 \wedge \lim_{x \rightarrow +1} \tilde{f}(x) = -\infty < \tilde{f}(\hat{x}) = -1,$$

в точке $x = \hat{x}$ $\tilde{f}(x)$, а следовательно, и $g(x)$, имеет максимум. При $\lambda \rightarrow +\infty$ и

$$\tilde{f}''(\hat{x}) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x} \Big|_{x=\hat{x}} = -\frac{1}{e^2} \sim 0.01 \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty}$$

$$\frac{[f^{(3)}(\hat{x})]^2}{[f''(\hat{x})]^3} = \frac{1}{\lambda} \frac{[\tilde{f}^{(3)}(\hat{x})]^2}{[\tilde{f}''(\hat{x})]^2} \ll 1, \quad \frac{[f^{(4)}(\hat{x})]}{[f''(\hat{x})]^2} = \frac{1}{\lambda} \frac{[\tilde{f}^{(4)}(\hat{x})]}{[\tilde{f}''(\hat{x})]^2} \ll 1,$$

метод перевала применим и

$$I(\lambda) = \int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} e^{\lambda \tilde{f}(x)} dx \approx e^{\lambda \tilde{f}(\hat{x})} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\tilde{f}''(\hat{x})|}} = e^{-\lambda} \sqrt{\frac{2\pi e^2}{\lambda}} = e^{1-\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}},$$

ответ:

$$I(\lambda) \approx e^{1-\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}$$

Упражнение 4

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = \lambda (\sin x - x), \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \lambda \tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) = \sin x - x$$

. Так как $\forall x > 0 \Leftrightarrow \sin x < x$, в точке $\hat{x} = 0$ $\tilde{f}(x)$, а следовательно, и $g(x)$, имеет максимум на участке $[0, +\infty]$. Разложим $f(x)$ по формуле Тейлора:

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \lambda \left(-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \right) = \xi_3(x) + \xi_5(x) + \dots + \xi_{2n-1}(x) + o(x^{2n}).$$

Проверим условия, при которых на участке Δx , на котором набирается данный интеграл, можно пренебречь членами высших порядков:

$$\lambda \rightarrow +\infty, \quad \xi_3(\Delta x) = \frac{1}{6} \lambda (\Delta x)^3 \sim 1, \quad \Delta x \sim \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}} \ll 1 \implies$$

$$\forall k \geq 3 \Leftrightarrow \xi_{2k-1}(\Delta x) = \frac{1}{(2k-1)!} \lambda (\Delta x)^{2k-1} \sim \frac{\lambda}{\lambda^{(2k-1)/3}} = \frac{1}{\lambda^{(2k-4)/3}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} \ll \xi_3(\Delta x) \sim 1,$$

а следовательно,

$$I(\lambda) = \int_0^1 e^{\lambda(\sin x - x)} dx \approx \int_0^1 e^{-\frac{1}{6}\lambda x^3} dx.$$

Так как $\Delta x \ll 1$,

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_0^1 e^{-\frac{1}{6}\lambda x^3} dx \approx \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{6}\lambda x^3} dx = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\lambda x^2} e^{-\frac{1}{6}\lambda x^3} d\left(\frac{1}{6}\lambda x^3\right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt[3]{36\lambda}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\lambda x^3\right)^{-2/3} e^{-\frac{1}{6}\lambda x^3} d\left(\frac{1}{6}\lambda x^3\right), \quad y = \frac{1}{6}\lambda x^3, \\ I(\lambda) &\approx \frac{2}{\sqrt[3]{36\lambda}} \int_0^{+\infty} y^{-2/3} e^{-y} dy = \frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt[3]{36\lambda}}, \end{aligned}$$

ответ:

$$I(\lambda) = \frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt[3]{36\lambda}}$$

Задача 1

Преобразуем интеграл:

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cosh^\lambda x \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 + \lambda \ln(\cosh x)} \, dx.$$

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = -x^2 + \lambda \ln(\cosh x), \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

Найдем первые две производные:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x + \lambda \tanh x, \\ f''(x) &= -2 + \lambda(1 - \tanh^2 x). \end{aligned}$$

Сразу выведем полезное далее соотношение для исследования производных с $\tanh x$:

$$\tanh^n x = \left(\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \right)^n \underset{x \rightarrow +\infty}{\approx} 1 - 2ne^{-2x}, \quad (31.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tanh^n x &= n (\tanh^{n-1} x - \tanh^{n+1} x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\approx}^{(31.1)} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\approx}^{(31.1)} n [1 - 2(n-1)e^{-2x} - 1 + 2(n+1)e^{-2x}] = 2ne^{-2x}, \end{aligned} \quad (31.2)$$

$$\frac{d^m}{dx^m} \tanh^n x \underset{x \rightarrow +\infty}{\leq}^{(31.2)} 2^m (m+n-1) e^{-2x}. \quad (31.3)$$

При $x \approx \pm 1/2\lambda$ и $x = 0$, $f'(x) = 0$. Так как $\lambda \rightarrow +\infty$, для $\hat{x} \approx 1/2\lambda$ выполняется

$$f'(\hat{x}) = 0, \quad f(\hat{x}) \approx -\frac{1}{4}\lambda^2 + \lambda \ln \left(\frac{1}{2}(e^{1/2\lambda} + e^{-1/2\lambda}) \right) \approx \frac{1}{2}\lambda^2 \gg f(0) = 0,$$

$$f''(\hat{x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\approx}^{(31.1)} -2 + \frac{4\lambda}{e^\lambda} \approx -2 \neq 0,$$

следовательно, в точках $x \in \{\hat{x}, -\hat{x}\}$ находятся максимумы $f(x)$, в окрестности которых на участке Δx набирается интеграл.

Проверим условия применимости метода перевала:

$$f''(x) = -2 + \lambda(1 - \tanh^2 x) \underset{\hat{x} \rightarrow +\infty}{\xrightarrow{(31.3)}} \forall n > 2 \hookrightarrow \frac{1}{n!} f^{(n)}(\hat{x}) < \frac{2^{n-2}(n-1)\lambda}{n!e^\lambda} \ll 1, \quad (31.4)$$

$$\begin{aligned} f''(\hat{x}) &\approx -2 \sim 1, \quad f''(\hat{x})(\Delta x)^2 \sim 1, \quad \Delta x \sim 1 \xrightarrow{(31.4)} \\ &\xrightarrow{(31.4)} \forall n > 2 \hookrightarrow \frac{\frac{1}{n!} f^{(n)}(\hat{x})(\Delta x)^n}{\frac{1}{2} f''(\hat{x})(\Delta x)^2} \sim \frac{1}{n!} f^{(n)}(\hat{x}) \ll 1, \end{aligned}$$

следовательно, метод перевала применим, и

$$I(\lambda) \approx e^{f(\hat{x})} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(\hat{x})|}} + e^{f(-\hat{x})} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(-\hat{x})|}} \approx \frac{e^{\frac{1}{4}\lambda^2} \sqrt{\pi}}{2^{\lambda-1}},$$

ответ:

$$I(\lambda) \approx \frac{e^{\frac{1}{4}\lambda^2} \sqrt{\pi}}{2^{\lambda-1}}$$

Задача 2

Преобразуем интеграл:

$$I(\lambda, \epsilon, s) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-\epsilon x} e^{-\lambda(1-\cos x)} dx = \int_0^{+\infty} x^s e^{-\epsilon x - \lambda(1-\cos x)} dx.$$

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x) = -\epsilon x - \lambda(1 - \cos x), \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = -\lambda \tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) = \frac{\epsilon}{\lambda} x + (1 - \cos x).$$

Найдем первую и вторую производные $\tilde{f}(x)$:

$$\tilde{f}'(x) = \frac{\epsilon}{\lambda} + \sin x, \quad \tilde{f}''(x) = \cos x.$$

Первая производная обнуляется при $\sin x = \frac{\epsilon}{\lambda}$, а следовательно, для точек

$$\hat{x}_1(k) \approx (2k-1)\pi + \frac{\epsilon}{\lambda}, \quad \hat{x}_2(k) \approx 2\pi k - \frac{\epsilon}{\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}$$

выполняется

$$\tilde{f}'(\hat{x}_{1,2}) = 0, \quad \tilde{f}''(\hat{x}_1) \approx -1 + \frac{\epsilon^2}{2\lambda^2} \neq 0, \quad \tilde{f}''(\hat{x}_2) \approx 1 - \frac{\epsilon^2}{2\lambda^2},$$

а так как

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\hat{x}_1(k)) &\approx \frac{\epsilon}{\lambda}(2k-1)\pi + \frac{\epsilon^2}{2}\lambda^2 + 2, & \tilde{f}(\hat{x}_2(k)) &\approx \frac{\epsilon}{\lambda}2\pi k - \frac{\epsilon^2}{2\lambda^2}, \\ \tilde{f}(\hat{x}_1(k)) - \tilde{f}(\hat{x}_2(k)) &= 2 + \frac{\epsilon^2}{\lambda^2} - \frac{\pi\epsilon}{\lambda} \approx 2 \Rightarrow g(\hat{x}_1(k)) \ll g(\hat{x}_2(k)), \end{aligned}$$

т.е. в точках $\hat{x}_2(k)$ подынтегральная функция $g(x)$ имеет максимумы. Так как $\lambda \gg 1$, максимумы резкие, и для каждого можно применить метод перевала:

$$\begin{aligned} i_k &= (\hat{x}_2(k))^s e^{-\lambda \tilde{f}(\hat{x}_2(k))} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\tilde{f}''(\hat{x}_2(k))|}} \approx \left(2\pi k - \frac{\epsilon}{\lambda}\right)^s e^{-2\pi\epsilon k + \frac{\epsilon^2}{2\lambda}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda - \frac{\epsilon^2}{2\lambda}}} \\ &\approx (2\pi k)^s e^{-2\pi\epsilon k} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}, \end{aligned}$$

$$I(\lambda, \epsilon, s) \approx \sum_{k=1}^{\infty} i_k \approx \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^s e^{-2\pi\epsilon k} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} = (2\pi)^s \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \sum_{k=1}^{\infty} k^s e^{-2\pi\epsilon k}.$$

Полученная сумма была посчитана в **Упр. 4 домашней работы №2**:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s e^{-2\pi\epsilon k} \approx \frac{1}{(2\pi\epsilon)^s} \Gamma(s+1), \quad I(\lambda, \epsilon, s) \approx \frac{1}{\epsilon^s} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \Gamma(s+1),$$

ответ:

$$I(\lambda, \epsilon, s) \approx \frac{1}{\epsilon^s} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \Gamma(s+1)$$