Домашняя работа №4

Сирый Р. А.

05 марта 2023 г.

Упражнение 1

I. I_1

Воспользуемся предложенной подстановкой:

$$I_1 = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}t \int\limits_0^\infty \operatorname{Im}\left(e^{-tx+ix}\right)\mathrm{d}x,$$

$$J(t) = \int\limits_0^\infty \operatorname{Im}\left(e^{-tx+ix}\right)\mathrm{d}x = -\operatorname{Im}\left(\frac{1}{i-t}\right) = \frac{1}{t^2+1},$$

$$I_1 = \int\limits_0^\infty J(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \arctan x|_0^\infty = \frac{\pi}{2},$$

ответ:

$$\boxed{I_1 = \frac{\pi}{2}}$$

II. I_2

Для удобства положим $\lambda \geq 0$. Продифференцируем интеграл как функцию от λ по λ:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} I_2 = \frac{\partial}{\partial\lambda}\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 \lambda x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \frac{2\sin\lambda x\cos\lambda x}{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \frac{\sin 2\lambda x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

откуда получаем

$$I_2(\lambda) = \frac{\pi\lambda}{2} + C.$$

Из того, что при $\lambda = 0$ подынтегральная функция тождественно равна нулю, и $I_2(0) = C$, следует $C = 0$. Так как подынтегральная функция четна относительно λ, ответ для произвольного λ:

$$\boxed{I_2 = \frac{\pi|\lambda|}{2}}$$

Упражнение 2

Так как $0 \le x \le {}^{\pi}/_{2} \Rightarrow \cos x > 0$, справедлива следующая подстановка:

$$\begin{aligned}
t &= \sin^2 x, \\
\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\sin x \cos x}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2t^{1/2}(1-t)^{1/2}}\ \mathrm{d}t, \\
I(n,m) &= \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x \cos^m x\ \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\sin^2 x\right)^{n/2} \left(1-\sin^2 x\right)^{m/2}\ \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^1 \frac{t^{n/2}(1-t)^{m/2}}{2t^{1/2}(1-t)^{1/2}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{n+1}{2}-1}(1-t)^{\frac{m+1}{2}-1}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right),
\end{aligned}$$

ответ:

$$\boxed{I(n,m) = \frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right)}$$

Упражнение 3

Отдельно рассмотрим случай $m = 0$:

$$n = -1 \Rightarrow I(-1,0,k) = \frac{1}{2^k}\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \left.\frac{\ln x}{2^k}\right|_0^{\infty},$$

$$n \ne -1 \Rightarrow I(n,0,k) = \frac{1}{2^k}\int\limits_0^{\infty} x^n\ \mathrm{d}x = \left.\frac{x^{n+1}}{2^k(n+1)}\right|_0^{\infty},$$

а следовательно, при $m = 0$ для любых n, k интеграл расходится.

Пусть $m \ne 0$. Произведем следующую замену:

$$\begin{aligned}
t(x) &= \frac{x^m}{x^m+1}, \\
1-t &= \frac{1}{x^m+1}, \\
\mathrm{d}t &= \frac{mx^{m-1}}{\left(x^m+1\right)^2}\ \mathrm{d}x = mt^{(m\,-\,1)/m}(1-t)^{(m\,+\,1)/m}\ \mathrm{d}x, \\
\mathrm{d}x &= \frac{1}{m}t^{-\,(m\,-\,1)/m}(1-t)^{-\,(m\,+\,1)/m}\ \mathrm{d}t, \\
m > 0 &\Rightarrow \lim_{x\to\infty} t(x) = 1,\ \lim_{x\to 0} t(x) = 0, \\
m < 0 &\Rightarrow \lim_{x\to\infty} t(x) = 0,\ \lim_{x\to 0} t(x) = 1,
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
I(n,m,k) &= \int\limits_0^\infty \frac{x^n}{(x^m+1)^k}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \left(\frac{x^m}{x^m+1}\right)^{n/m}\left(\frac{1}{x^m+1}\right)^{(km\,-\,n)/m}\mathrm{d}x \\
&= \operatorname{sign}(m)\int\limits_0^1 t^{n/m}(1-t)^{(km\,-\,n)/m}\cdot\frac{1}{m}t^{\,-\,(m\,-\,1)/m}(1-t)^{\,-\,(m\,+\,1)/m}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{|m|}\int\limits_0^1 t^{\frac{n+1}{m}-1}(1-t)^{k-\frac{n+1}{m}-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \boxed{\frac{1}{|m|}B\left(\frac{n+1}{m}, k-\frac{n+1}{m}\right)}
\end{aligned}$$

Для того, чтобы искомый интеграл сходился, нужно чтобы он сходился в окрестностях нуля и бесконечности, т.е. выполнить два условия:

$$I(n,m,k) = \int\limits_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^\alpha,\ \alpha > -1 \\ f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^\alpha,\ \alpha < -1 \end{cases},$$

или

$$\boxed{\begin{cases} -\min\{km,0\}+n > -1 \\ -\max\{km,0\}+n < -1 \end{cases}}$$

Упражнение 4

I. I_1

Подынтегральная функция четная, и интеграл сводится к интегралу Лапласа:

$$I_1 = \int\limits_0^\infty \frac{x\sin(\lambda x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin(\lambda x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{sign}(\lambda)\pi e^{-|\lambda|},$$

ответ:

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{2}\operatorname{sign}(\lambda)\pi e^{-|\lambda|}}$$

II. I_2

Из задачи с семинара и четности косинуса:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos(\lambda x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(\lambda x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi e^{-|\lambda|}.$$

Для удобства положим $\lambda \geq 0$. Попробуем получить дифференциальное уравнение на $I_2(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\lambda} I_2(\lambda) &= \frac{\partial}{\partial\lambda} \int\limits_0^\infty \frac{x\sin(\lambda x)}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \frac{x^2\cos(\lambda x)}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\right]\cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^\infty \frac{\cos(\lambda x)}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\pi e^{-\lambda} - \int\limits_0^\infty \frac{\cos(\lambda x)}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x, \\
\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} I_2(\lambda) &= -\frac{1}{2}\pi e^{-\lambda} + \int\limits_0^\infty \frac{x\sin(\lambda x)}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi e^{-\lambda} + I_2(\lambda).
\end{aligned}$$

Найдем решение полученного уравнения как сумму общего решения однородного и частного решения неоднородного:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} f(\lambda) - f(\lambda) = 0, &\quad f(\lambda) = C_1 e^{\lambda} + C_2 e^{-\lambda}, \\
\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} f_0(\lambda) - f_0(\lambda) = -\frac{1}{2}\pi e^{-\lambda}, &\quad f_0(\lambda) = \frac{1}{4}\pi e^{-\lambda}\lambda, \\
I_2(\lambda) = f(\lambda) + f_0(\lambda) &= \frac{1}{4}\pi e^{-\lambda}\lambda + C_1 e^{\lambda} + C_2 e^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

Так как, очевидно,

$$I_2(\lambda) \leq \int\limits_0^\infty \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x \overset{(\textbf{УЗ})}{=} \frac{1}{2},$$

коэффициент C_1 должен быть равен нулю. Так как $\frac{1}{4}\pi e^{-\lambda}\lambda\big|_{\lambda=0} = 0$, и при $\lambda = 0$ подынтегральная функция обращается в тождественный ноль, то $C_2 e^{-\lambda}\big|_{\lambda=0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$, откуда получаем ответ для $\lambda \geq 0$:

$$I_2(\lambda) = \frac{1}{4}\pi\lambda e^{-\lambda}.$$

Так как подынтегральная функция нечетна относительно λ, ответ для общего случая:

$$\boxed{I_2 = \frac{1}{4}\pi\lambda e^{-|\lambda|}}$$

Задача 1

$$
\begin{aligned}
I(m) &= \int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{x^m}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(m)}\int\limits_0^\infty t^{m-1}\,\mathrm{d}t\int\limits_0^\infty e^{-tx}\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\Gamma(m)}\int\limits_0^\infty t^{m-1}\,\mathrm{d}t\int\limits_0^\infty \mathrm{Re}\left(e^{-tx+ix}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\Gamma(m)}\int\limits_0^\infty \frac{t^m}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\textbf{(УЗ)}}{=} \frac{1}{2\Gamma(m)}B\left(\frac{m+1}{2}, 1-\frac{m+1}{2}\right) \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{m+1}{2}\right)}{2\Gamma(m)} = \frac{\pi}{2\Gamma(m)\sin\left[\frac{\pi}{2}(m+1)\right]},
\end{aligned}
$$

ответ:

$$
\boxed{I(m) = \frac{1}{2\Gamma(m)}B\left(\frac{m+1}{2}, 1-\frac{m+1}{2}\right) = \frac{\pi}{2\Gamma(m)\sin\left[\frac{\pi}{2}(m+1)\right]}}
$$

Задача 2

Сделаем замену переменных:

$$
\begin{aligned}
\xi &= e^{\epsilon/T}, \\
\mathrm{d}\epsilon &= Te^{-\epsilon/T}\,\mathrm{d}\xi = \frac{T}{\xi}\,\mathrm{d}\xi, \\
\alpha &= e^{V/T},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I(V,T) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{e^{\frac{\epsilon-V}{T}}+1} - \frac{1}{e^{\epsilon/T}+1}\right)\,\mathrm{d}\epsilon = \int\limits_0^\infty\left(\frac{\alpha}{\xi+\alpha} - \frac{1}{\xi+1}\right)\frac{T}{\xi}\,\mathrm{d}\xi \\
&= T\int\limits_0^\infty\left(\frac{(\xi+\alpha)-\xi}{(\xi+\alpha)\xi} - \frac{(\xi+1)-\xi}{(\xi+1)\xi}\right)\,\mathrm{d}\xi = T\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{\xi+1} - \frac{1}{\xi+\alpha}\right)\,\mathrm{d}\xi \\
&= T\ln\frac{\xi+1}{\xi+\alpha}\bigg|_0^\infty = V.
\end{aligned}
$$

Предлагаемое в условии разбиение интеграла на две части не работает, потому как по отдельности каждая из частей расходится:

$$
\lim_{\epsilon\to-\infty} n_F(\epsilon) = 1,
$$

т.е. в итоге получается неопределенность вида $\infty - \infty$. Ответ:

$$
\boxed{I(V,T) = V}
$$