

## Домашняя работа №1

Сирый Р. А.

05 февраля 2023 г.

### Упражнение 1

I.  $\alpha \gg 1$

Пусть  $\tilde{x}$  — корень уравнения  $x - 1 = e^{-\alpha x}$ , тогда,

$$\forall x \hookrightarrow e^{-\alpha x} \geq 0 \Rightarrow \tilde{x} > 1 \Rightarrow e^{-\alpha \tilde{x}} < e^{-\alpha} \ll 1,$$

следовательно,  $0 < \tilde{x} - 1 \ll 1$ , и  $\tilde{x}$  можно представить в виде

$$\tilde{x} = 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1)$$

От полученного данной подстановкой уравнения  $\varepsilon = e^{-\alpha(1+\varepsilon)}$  отбросим малый член:

$$e^{-\alpha(1+\varepsilon)} \approx e^{-\alpha}, \quad -\alpha \approx \ln \varepsilon,$$

откуда получаем  $\varepsilon \approx 1 - \alpha$ , и, подставляя  $\varepsilon$  в (1), получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx 2 - \alpha}$$

II.  $\alpha \ll 1$

Пусть  $\tilde{x}$  — корень уравнения  $x - 1 = e^{-\alpha x}$ , тогда,

$$\forall x \hookrightarrow e^{-\alpha x} \geq 0 \Rightarrow \tilde{x} > 1 \Rightarrow |-\alpha \tilde{x}| \ll 1,$$

следовательно,  $0 < 1 - e^{-\alpha \tilde{x}} \ll 1$ , и  $e^{-\alpha \tilde{x}}$  можно представить в виде

$$e^{-\alpha \tilde{x}} = 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (2)$$

откуда  $\tilde{x} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\varepsilon}$ , и, подстановкой (2) в исходное уравнение,

$$\tilde{x} = 2 - \varepsilon, \quad (3)$$

$$\alpha(2 - \varepsilon) = \ln \frac{1}{1 - \varepsilon}.$$

Пренебрегая малой величиной, получаем

$$(2 - \varepsilon)\alpha \approx 2\alpha, \quad 2\alpha \approx \ln \frac{1}{1 - \varepsilon}, \quad \varepsilon \approx 1 - e^{-2\alpha} \approx 2\alpha,$$

откуда подстановкой в (3) получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx 2 - 2\alpha}$$

## Упражнение 2

### I. $\alpha \gg 1$

Пусть  $\tilde{x}$  — корень уравнения  $\ln x = e^{-\alpha x}$ , тогда,

$$\forall x \hookrightarrow e^{-\alpha x} \geq 0 \Rightarrow \ln \tilde{x} > 0 \Rightarrow \tilde{x} > 1 \Rightarrow e^{-\alpha \tilde{x}} < e^{-\alpha} \ll 1,$$

следовательно,  $0 < \ln \tilde{x} \ll 1$ , и  $\tilde{x}$  можно представить в виде

$$\tilde{x} = 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (4)$$

От полученного данной подстановкой уравнения  $\ln(1 + \varepsilon) = e^{-\alpha(1+\varepsilon)}$  возьмем экспоненту:

$$1 + \varepsilon = e^{e^{-\alpha(1+\varepsilon)}},$$

и, так как  $\xi = e^{-\alpha(1+\varepsilon)} \ll 1$ , разложим правую часть по степеням  $\xi$ :

$$1 + \varepsilon = e^{\xi} \approx 1 + \xi + \frac{1}{2}\xi^2.$$

Подставляя  $\xi$  и пренебрегая малыми величинами, получаем

$$\varepsilon \approx e^{-\alpha(1+\varepsilon)} + \frac{1}{2}e^{-2\alpha(1+\varepsilon)} \approx e^{-\alpha} \approx 1 - \alpha,$$

и, подставляя  $\varepsilon$  в (4), получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx 2 - \alpha}$$

### II. $\alpha \ll 1$

Пусть  $\tilde{x}$  — корень уравнения  $x - 1 = e^{-\alpha x}$ , тогда,

$$\forall x \hookrightarrow e^{-\alpha x} \geq 0 \Rightarrow \tilde{x} > 1 \Rightarrow |-\alpha \tilde{x}| \ll 1,$$

следовательно,  $0 < 1 - e^{-\alpha \tilde{x}} \ll 1$ , и  $e^{-\alpha \tilde{x}}$  можно представить в виде

$$e^{-\alpha \tilde{x}} = 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (5)$$

откуда  $\tilde{x} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\varepsilon}$ , и, подстановкой (5) в исходное уравнение,

$$\tilde{x} = e^{1-\varepsilon}, \quad (6)$$

$$\alpha e^{1-\varepsilon} = \ln \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Пренебрегая малой величиной, получаем

$$\alpha e^{1-\varepsilon} \approx \alpha e, \quad \alpha e \approx \ln \frac{1}{1-\varepsilon}, \quad \varepsilon = 1 - e^{-e\alpha} \approx e\alpha,$$

откуда подстановкой в (6) получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx e^{1-e\alpha}}$$

### Упражнение 3

#### I. $\tilde{x}_1(\lambda)$

Пусть  $0 > \tilde{x} > -1$  — корень уравнения  $xe^x = \lambda$ . При малых  $x$  таких, что  $|x| \ll 1$ ,

$$xe^x \approx x(1 + x + \frac{1}{2}x^2) \approx x,$$

следовательно,  $\tilde{x} \approx \tilde{x}e^{\tilde{x}} \approx \lambda$ , ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx \lambda}$$

#### II. $\tilde{x}_2(\lambda)$

Домножим на  $-1$  и прологарифмируем обе части уравнения:

$$x = \ln(-\lambda) - \ln(-x).$$

Чтобы записи были приятнее глазу, перепишем уравнение в следующем виде:

$$y = -x, \quad \xi = -\ln(-\lambda), \quad y = \xi + \ln y. \quad (7)$$

Пусть  $\tilde{y}$  — корень данного уравнения, удовлетворяющий условию задачи  $x_2(\lambda) < -1 \Leftrightarrow \tilde{y} > 1$ . Применим метод итераций к (7) и докажем, что последовательность  $\{y_n\}$  сходится в  $\tilde{y}$ .

Пусть  $y_1 = 1$ , тогда

$$y_2 = \xi + \ln y_1, \quad (\Delta y)_1 = y_2 - y_1 = \xi - 1.$$

Так как  $|\lambda| \ll 1$ ,  $\xi > 1$  и, следовательно,

$$y_2 > y_1, \quad (\Delta y)_1 > 0.$$

Докажем ограниченность сверху для  $\{y_n\}$ . Предположим, что  $\exists n : y_n \geq \tilde{y}$ , тогда

$$y_n = \xi + \ln y_{n-1}, \quad y_{n-1} = e^{y_n - \xi} = e^{(\tilde{y} - \xi) + (y_n - \tilde{y})} = \tilde{y}e^{y_n - \tilde{y}} \geq \tilde{y},$$

откуда по индукции:

$$\exists n : y_n \geq \tilde{y} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \quad k \leq n \hookrightarrow y_k \geq \tilde{y},$$

что противоречит начальным условиям  $\tilde{y} > 1$ ,  $y_1 = 1$ , следовательно  $\{y_n\}$  ограничена сверху, и

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow y_n < \tilde{y}. \quad (8)$$

Докажем, что последовательность  $\{y_n\}$  монотонно возрастает:

$$(\Delta y)_n = y_{n+1} - y_n = (\xi + \ln y_n) - (\xi + \ln y_{n-1}) = \ln \frac{y_n}{y_{n-1}} = \ln \left( 1 + \frac{(\Delta y)_{n-1}}{y_{n-1}} \right),$$

$$(\Delta y)_{n-1} > 0 \Rightarrow \ln \left( 1 + \frac{(\Delta y)_{n-1}}{y_{n-1}} \right) > 0 \Rightarrow (\Delta y)_n > 0,$$

откуда по индукции:

$$(\Delta y)_1 > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow (\Delta y)_n > 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow y_{n+1} > y_n,$$

т.е.  $\{y_n\}$  монотонно возрастает.

Отсюда и из условия (8) ограниченности последовательности  $\{y_n\}$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \hat{y}, \quad \hat{y} \leq \tilde{y}.$$

Переходя к пределу в формуле  $y_{n+1} = \xi + \ln y_n$  при  $n \rightarrow \infty$ , получаем  $\hat{y} = \xi + \ln \hat{y}$ , т.е.  $\hat{y} = \tilde{y}$ . ■

То, с какой точностью записывать ответ, сильно зависит от  $\lambda$ . Например, при  $x_1 = -1$  для  $\lambda = -e^{-4}$ , с точностью до трёх значащих цифр

$$\tilde{x}_2(-e^{-4}) \approx x_6 = -(\xi + \ln(\xi + \ln(\xi + \ln(\xi + \ln \xi)))), \quad \xi = -\ln(-\lambda) = 4,$$

а для  $\lambda = -e^{-8}$  ту же точность получаем при

$$\tilde{x}_2(-e^{-8}) \approx x_4 = -(\xi + \ln(\xi + \ln \xi)), \quad \xi = -\ln(-\lambda) = 8.$$

**Буду считать, что  $\lambda = -e^{-4} \approx -0.02$  удовлетворяет условию  $|\lambda| \ll 1$  и запишу в ответ  $\tilde{x}_2(\lambda) \approx x_6$ :**

$$\boxed{\tilde{x}_2(\lambda) \approx -(\xi + \ln(\xi + \ln(\xi + \ln(\xi + \ln \xi)))), \quad \xi = -\ln(-\lambda)}$$

## Упражнение 4

Пусть  $\tilde{x}$  — корень данного уравнения, а  $\lambda = -\frac{1}{e} + \delta, 0 < \delta \ll 1$ , тогда  $\tilde{x}$  можно представить в виде

$$\tilde{x} = -1 + \varepsilon, \quad |\varepsilon| \ll 1. \tag{9}$$

Домножим обе части уравнения на  $e$  и разложим левую часть по степеням  $\varepsilon$ :

$$(-1 + \varepsilon)e^\varepsilon \approx (-1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2) \approx -1 + \delta e,$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2 = \delta e, \quad \varepsilon = \pm\sqrt{2\delta e} = \pm\sqrt{2(\lambda e + 1)},$$

отсюда, подставляя в (9) и учитывая, что  $\tilde{x}_1(\lambda) > \tilde{x}_2(\lambda)$ , ответ:

$$\boxed{\tilde{x}_1(\lambda) = -1 + \sqrt{2(\lambda e + 1)}, \quad \tilde{x}_2(\lambda) = -1 - \sqrt{2(\lambda e + 1)}}$$

## Задача 1

### I. $0 < \alpha - 1 \ll 1$

Нарисуем на графике правую часть уравнения, и левую при  $\alpha \in \{2, 1, \frac{1}{2}\}$  (рис. 1). Вблизи нуля функции  $\tanh \alpha x$  и  $\arctan x$  ведут себя линейно:  $\tanh \alpha x \sim \alpha x$ ,  $\arctan x \sim x$ . Так как функции слева и справа нечетны, помимо тривиального корня  $\tilde{x}_0 = 0$  остальные (если существуют) связаны соотношением  $\tilde{x}_i^+ = -\tilde{x}_i^-$ ,  $\tilde{x}_i^+ > 0$ . Отсюда и из графика можно сделать выводы, аналогичные выводам из конспекта семинара по задаче (1), причем интересует случай, когда

$$\alpha = 1 + \varepsilon > 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

т. е. имеются две нетривиальные точки пересечения, и при малых  $\varepsilon$  корни уравнения малы.

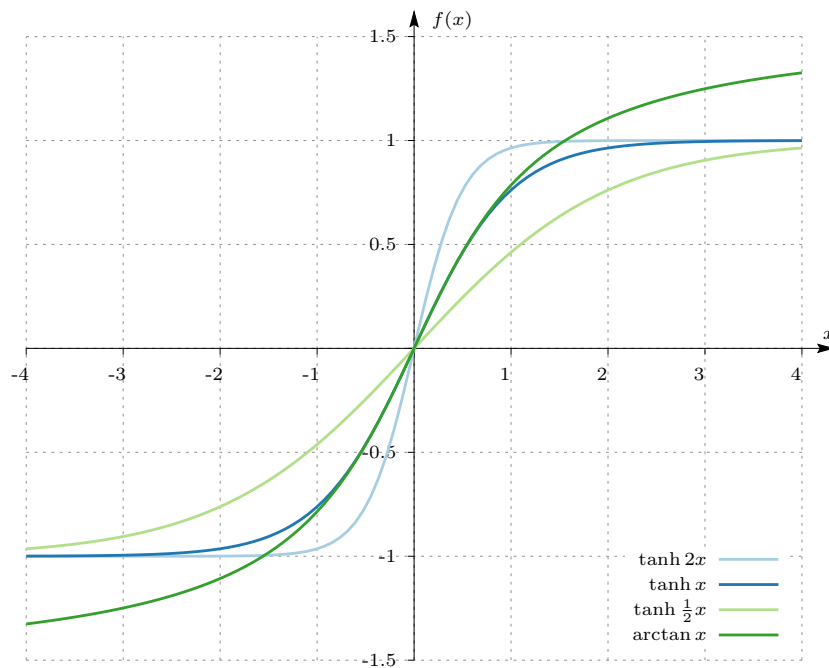


Рис. 1: График функций  $\arctan x$  и  $\tanh \alpha x$  при различных  $\alpha$

Разложим обе части уравнения по степеням аргументов:

$$\tanh \alpha x \approx (1 + \varepsilon)x - \frac{1}{3}(1 + \varepsilon)^3 x^3 + \frac{2}{15}(1 + \varepsilon)^5 x^5, \quad \arctan x \approx x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5,$$

$$\varepsilon x - \frac{1}{3}((1 + \varepsilon)^3 - 1)x^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}(1 + \varepsilon)^5 - 1\right)x^5 = 0.$$

Из  $\varepsilon \ll 1$  следует  $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$  и, следовательно,

$$\varepsilon x - \varepsilon x^3 + \left(\frac{2}{3}\varepsilon - \frac{1}{15}\right)x^5 = 0.$$

Разделим уравнение на  $x$ , домножим на 15 для удобства, произведем замену  $y = x^2$  и решим приближенно полученное квадратное уравнение:

$$y^2(10\varepsilon - 1) - 15\varepsilon y + 15\varepsilon = 0,$$

$$\tilde{y} = \frac{15\varepsilon \pm \sqrt{15^2\varepsilon^2 - 60\varepsilon(10\varepsilon - 1)}}{2(10\varepsilon - 1)} = \frac{\pm 30\sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{1 - \frac{39}{4}\varepsilon} + 15\varepsilon}{2(10\varepsilon - 1)} \approx \pm 15\sqrt{\varepsilon},$$

а так как  $y > 0$ :

$$\tilde{y} \approx 15\sqrt{\varepsilon}.$$

Подставляя полученный результат в  $\varepsilon = \alpha - 1$  и  $x = \pm\sqrt{y}$ , получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x}_0 = 0, \quad \tilde{x}_{1,2} \approx \pm\sqrt{15\sqrt{\alpha - 1}}}$$

## II. $\alpha \gg 1$

Найдем сначала положительный корень данного уравнения  $\tilde{x}_1 > 0$ . Так как  $\alpha \gg 1$ ,

$$\tanh \alpha \tilde{x}_1 = \frac{e^{\alpha \tilde{x}_1} - e^{-\alpha \tilde{x}_1}}{e^{\alpha \tilde{x}_1} + e^{-\alpha \tilde{x}_1}} = 1 - \frac{2}{e^{2\alpha \tilde{x}_1} + 1} = 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (10)$$

В грубом приближении  $\tanh \alpha \tilde{x}_1 \approx 1$ ,  $\tilde{x}_1 \approx \tan 1 \Rightarrow \varepsilon \ll 1$ . Выразим  $\tilde{x}_1$  через  $\varepsilon$ :

$$1 - \varepsilon = \arctan \tilde{x}_1, \quad \tilde{x}_1 = \tan(1 - \varepsilon) = \frac{\tan 1 - \tan \varepsilon}{1 + \tan 1 \tan \varepsilon}.$$

Пусть  $\tan 1 = \beta$ . Так как  $\beta \tan \varepsilon \ll 1$ ,

$$\tilde{x}_1 = \beta \frac{1 - \frac{\tan \varepsilon}{\beta}}{1 + \beta \tan \varepsilon} = \beta - \frac{(\beta^2 + 1) \tan \varepsilon}{1 + \beta \tan \varepsilon} \approx \beta - (\beta^2 + 1)\varepsilon. \quad (11)$$

Теперь преобразуем (10) и подставим  $\tilde{x}_1$  из (11):

$$\varepsilon = \frac{2}{e^{2\alpha \tilde{x}_1} + 1}, \quad \tilde{x}_1 = \frac{1}{2\alpha} \ln \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \approx \beta - (\beta^2 + 1)\varepsilon.$$

Применим метод итераций к полученному уравнению. Возьмем  $\varepsilon_1 = 0$ , тогда:

$$\frac{1}{2\alpha} \ln \left( \frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - 1 \right) = \beta - (\beta^2 + 1)\varepsilon_n, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{e^{2\alpha\beta} + 1}, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{e^{2\alpha\beta} \left[ e^{-(\beta^2+1)\frac{1}{e^{2\alpha\beta}+1}} \right] + 1}.$$

Уже при  $\alpha = 5$

$$\varepsilon_2 \approx 1.7 \cdot 10^{-7}, \quad \frac{(\Delta\varepsilon)_2}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \approx 10^{-5} \Rightarrow (\Delta\varepsilon)_2 \ll \varepsilon_2,$$

а следовательно

$$\varepsilon \approx \varepsilon_2 \approx \frac{1}{e^{2\alpha\beta} + 1}$$

является достаточным приближением.

Подставляя полученную величину в (11), получаем приближенное выражение для  $\tilde{x}_1$ :

$$\tilde{x}_1 \approx \beta - \frac{\beta^2 + 1}{e^{2\alpha\beta} + 1}.$$

Так как в исходном уравнении правая и левая части — нечетные функции,  $\exists \tilde{x}_2 = -\tilde{x}_1$ : корень исходного уравнения, откуда, учитывая тривиальный корень  $\tilde{x}_0 = 0$ , ответ:

$$\tilde{x}_0 = 0, \quad \tilde{x}_{1,2} \approx \pm \left( \beta - \frac{\beta^2 + 1}{e^{2\alpha\beta} + 1} \right), \quad \beta = \tan 1$$

## Задача 2

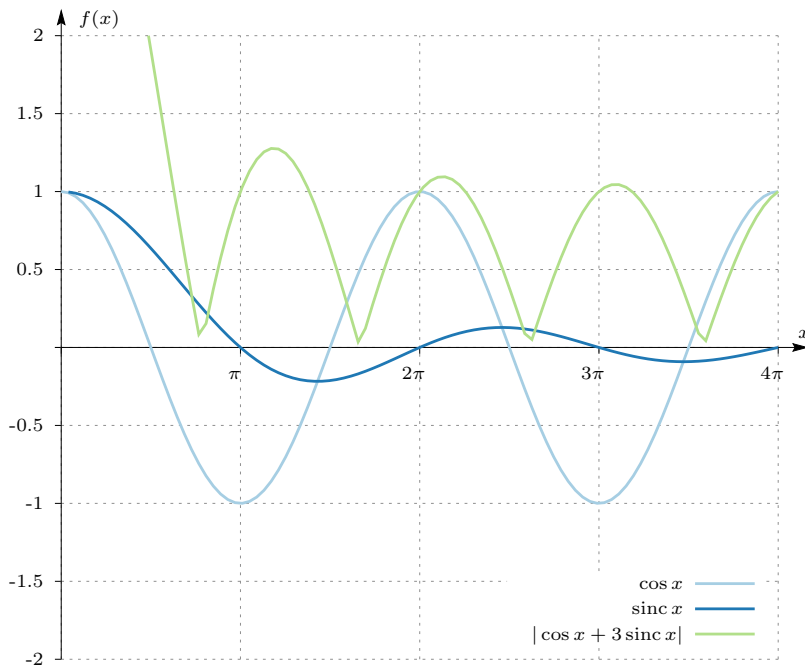


Рис. 2: График функции  $|\cos x + \alpha \operatorname{sinc} x|$  при  $\alpha = 3$

На рис. 2 изображен график  $|\cos x + \alpha \operatorname{sinc} x|$  при  $\alpha = 3$  для наглядности. Из графика и/или тривиальных математических рассуждений видно, что на каждый интервал  $(\pi k, \pi(k+1))$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  приходится зона:

$$K_k = (\pi k, \pi k + \varepsilon_k), \quad \varepsilon_k > 0 \quad (12)$$

при этом оба слагаемых имеют одинаковый знак, и модуль можно раскрыть:

$$\left| \cos x + \alpha \frac{\sin x}{x} \right| = |\cos x| + \alpha \frac{|\sin x|}{x}$$

При  $\alpha \ll 1$  и  $k \gg 1$  (а, следовательно, и  $x \gg 1$ ) ширина  $(\Delta x)_k$  этих участков  $(\Delta x)_k \ll 1$ , а следовательно поведение  $\sin x$  и  $\cos x$  в этих зонах описывается аналогично поведению в окрестности нуля, т. е.:

$$x \in K_k, \quad |\cos x| + \alpha \frac{|\sin x|}{x} \approx 1 - \frac{(x - \pi k)^2}{2} + \alpha \frac{(x - \pi k) - \frac{(x - \pi k)^3}{6}}{x},$$

откуда получаем уравнение для правой границы зоны:

$$x = \pi k + \varepsilon_k, \quad 1 - \frac{\varepsilon_k^2}{2} + \alpha \frac{\varepsilon_k - \frac{\varepsilon_k^3}{6}}{\pi k + \varepsilon_k} \approx 1, \quad -3\pi k \varepsilon_k^2 + \alpha \frac{6\varepsilon_k - \varepsilon_k^3}{1 + \frac{\varepsilon_k}{\pi k}} \approx 0.$$

Раскладываем знаменатель по степеням  $\varepsilon_k/\pi k$  :

$$-3\pi k \varepsilon_k^2 + \alpha (6\varepsilon_k - \varepsilon_k^3) \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{\pi k}\right) \approx 0 \approx -3\pi k \varepsilon_k^2 + 6\alpha \varepsilon_k - \frac{6\alpha \varepsilon_k^2}{\pi k},$$

$$-\left(\pi k + \frac{2\alpha}{\pi k}\right) \varepsilon_k + 2\alpha \approx 0, \quad \varepsilon_k \approx \frac{2\alpha}{\pi k + \frac{2\alpha}{\pi k}} \approx \frac{2\alpha}{\pi k}.$$

Из (12) получаем

$$(\Delta x)_k = (\pi k + \varepsilon_k) - \pi k = \varepsilon_k,$$

ответ:

$$\boxed{(\Delta x)_k = \frac{2\alpha}{\pi k}}$$