Упражнение 2

I. $\alpha \gg 1$

Пусть $\tilde{x}$ — корень уравнения $\ln x = e^{-\alpha x}$, тогда,

$$\forall x \hookrightarrow e^{-\alpha x} \geq 0 \Rightarrow \ln \tilde{x} > 0 \Rightarrow \tilde{x} > 1 \Rightarrow e^{-\alpha \tilde{x}} < e^{-\alpha} \ll 1,$$

следовательно, $0 < \ln \tilde{x} \ll 1$, и $\tilde{x}$ можно представить в виде

$$\tilde{x} = 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{\textbf{У2}.1}$$

От полученного данной подстановкой уравнения $\ln(1+\varepsilon) = e^{-\alpha(1+\varepsilon)}$ возьмем экспоненту:

$$1 + \varepsilon = e^{e^{-\alpha(1+\varepsilon)}},$$

и, так как $\xi = e^{-\alpha(1+\varepsilon)} \ll 1$, разложим правую часть по степеням ξ:

$$1 + \varepsilon = e^{\xi} \approx 1 + \xi + \frac{1}{2}\xi^2.$$

Подставляя ξ и пренебрегая малыми величинами, получаем

$$\varepsilon \approx e^{-\alpha(1+\varepsilon)} + \frac{1}{2}e^{-2\alpha(1+\varepsilon)} \approx e^{-\alpha},$$

и, подставляя ε в (**У2**.1), получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx 1 + e^{-\alpha}}$$

II. $\alpha \ll 1$

Пусть $\tilde{x}$ — корень уравнения $x - 1 = e^{-\alpha x}$, тогда,

$$\forall x \hookrightarrow e^{-\alpha x} \geq 0 \Rightarrow \tilde{x} > 1 \Rightarrow |-\alpha\tilde{x}| \ll 1,$$

следовательно, $0 < 1 - e^{-\alpha\tilde{x}} \ll 1$, и $e^{-\alpha\tilde{x}}$ можно представить в виде

$$e^{-\alpha\tilde{x}} = 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{\textbf{У2}.2}$$

откуда $\tilde{x} = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{1-\varepsilon}$, и, подстановкой (**У2**.2) в исходное уравнение,

$$\tilde{x} = e^{1-\varepsilon}, \tag{\textbf{У2}.3}$$

$$\alpha e^{1-\varepsilon} = \ln\frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Пренебрегая малой величиной, получаем

$$\alpha e^{1-\varepsilon} \approx \alpha e, \quad \alpha e \approx \ln\frac{1}{1-\varepsilon}, \quad \varepsilon = 1 - e^{-e\alpha} \approx e\alpha,$$

откуда подстановкой в (**У2**.3) получаем ответ:

$$\boxed{\tilde{x} \approx e(1 - e\alpha)}$$