

## Задача 2

Преобразуем интеграл:

$$I(\lambda, \epsilon, s) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-\epsilon x} e^{-\lambda(1-\cos x)} dx = \int_0^{+\infty} x^s e^{-\epsilon x - \lambda(1-\cos x)} dx.$$

Пусть  $f(x)$  — степень при экспоненте,  $g(x)$  — подынтегральная функция:

$$f(x) = -\epsilon x - \lambda(1 - \cos x), \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

Представим  $f(x)$  в виде

$$f(x) = -\lambda \tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) = \frac{\epsilon}{\lambda} x + (1 - \cos x).$$

Найдем первую и вторую производные  $\tilde{f}(x)$ :

$$\tilde{f}'(x) = \frac{\epsilon}{\lambda} + \sin x, \quad \tilde{f}''(x) = \cos x.$$

Первая производная обнуляется при  $\sin x = -\frac{\epsilon}{\lambda}$ , а следовательно, для точек

$$\hat{x}_1(k) \approx (2k-1)\pi + \frac{\epsilon}{\lambda}, \quad \hat{x}_2(k) \approx 2\pi k - \frac{\epsilon}{\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}$$

выполняется

$$\tilde{f}'(\hat{x}_{1,2}) = 0, \quad \tilde{f}''(\hat{x}_1) \approx -1 + \frac{\epsilon^2}{2\lambda^2} \neq 0, \quad \tilde{f}''(\hat{x}_2) \approx 1 - \frac{\epsilon^2}{2\lambda^2},$$

а так как

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\hat{x}_1(k)) &\approx \frac{\epsilon}{\lambda}(2k-1)\pi + \frac{\epsilon^2}{2}\lambda^2 + 2, \quad \tilde{f}(\hat{x}_2(k)) \approx \frac{\epsilon}{\lambda}2\pi k - \frac{\epsilon^2}{2\lambda^2}, \\ \tilde{f}(\hat{x}_1(k)) - \tilde{f}(\hat{x}_2(k)) &= 2 + \frac{\epsilon^2}{\lambda^2} - \frac{\pi\epsilon}{\lambda} \approx 2 \Rightarrow g(\hat{x}_1(k)) \ll g(\hat{x}_2(k)), \end{aligned}$$

т.е. в точках  $\hat{x}_2(k)$  подынтегральная функция  $g(x)$  имеет максимумы. Так как  $\lambda \gg 1$ , максимумы резкие, и для каждого можно применить метод перевала:

$$\begin{aligned} i_k &= (\hat{x}_2(k))^s e^{-\lambda \tilde{f}(\hat{x}_2(k))} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\tilde{f}''(\hat{x}_2(k))|}} \approx \left(2\pi k - \frac{\epsilon}{\lambda}\right)^s e^{-2\pi\epsilon k + \frac{\epsilon^2}{2\lambda}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda - \frac{\epsilon^2}{2\lambda}}} \\ &\approx (2\pi k)^s e^{-2\pi\epsilon k} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}, \end{aligned}$$

$$I(\lambda, \epsilon, s) \approx \sum_{k=1}^{\infty} i_k \approx \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^s e^{-2\pi\epsilon k} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} = (2\pi)^s \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \sum_{k=1}^{\infty} k^s e^{-2\pi\epsilon k}.$$

Полученная сумма была посчитана в **Упр. 4 домашней работы №2**:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s e^{-2\pi\epsilon k} \approx \frac{1}{(2\pi\epsilon)^s} \Gamma(s+1), \quad I(\lambda, \epsilon, s) \approx \frac{1}{\epsilon^s} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \Gamma(s+1),$$

ответ:

$$I(\lambda, \epsilon, s) \approx \frac{1}{\epsilon^s} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \Gamma(s+1)$$