Задача 2

Преобразуем интеграл:

$$I(\lambda,\epsilon,s)=\int\limits_0^{+\infty} x^s e^{-\epsilon x} e^{-\lambda(1-\cos x)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{+\infty} x^s e^{-\epsilon x-\lambda(1-\cos x)}\,\mathrm{d}x.$$

Пусть $f(x)$ — степень при экспоненте, $g(x)$ — подынтегральная функция:

$$f(x)=-\epsilon x-\lambda(1-\cos x),\quad g(x)=e^{f(x)}.$$

Представим $f(x)$ в виде

$$f(x)=-\lambda\tilde f(x),\quad \tilde f(x)=\frac{\epsilon}{\lambda}x+(1-\cos x).$$

Найдем первую и вторую производные $\tilde f(x)$:

$$\tilde f'(x)=\frac{\epsilon}{\lambda}+\sin x,\quad \tilde f''(x)=\cos x.$$

Первая производная обнуляется при $\sin x=\frac{\epsilon}{\lambda}$, а следовательно, для точек

$$\hat x_1(k)\approx(2k-1)\pi+\frac{\epsilon}{\lambda},\quad \hat x_2(k)\approx 2\pi k-\frac{\epsilon}{\lambda},\ k\in\mathbb{N}$$

выполняется

$$\tilde f'(\hat x_{1,2})=0,\quad \tilde f''(\hat x_1)\approx -1+\frac{\epsilon^2}{2\lambda^2}\neq 0,\quad \tilde f''(\hat x_2)\approx 1-\frac{\epsilon^2}{2\lambda^2},$$

а так как

$$\tilde f(\hat x_1(k))\approx\frac{\epsilon}{\lambda}(2k-1)\pi+\frac{\epsilon^2}{2}\lambda^2+2,\quad \tilde f(\hat x_2(k))\approx\frac{\epsilon}{\lambda}2\pi k-\frac{\epsilon^2}{2\lambda^2},$$
$$\tilde f(\hat x_1(k))-\tilde f(\hat x_2(k))=2+\frac{\epsilon^2}{\lambda^2}-\frac{\pi\epsilon}{\lambda}\approx 2\Rightarrow g(\hat x_1(k))\ll g(\hat x_2(k)),$$

т.е в точках $\hat x_2(k)$ подынтегральная функция $g(x)$ имеет максимумы. Так как $\lambda\gg 1$, максимумы резкие, и для каждого можно применить метод перевала:

$$i_k=(\hat x_2(k))^s\,e^{-\lambda\tilde f(\hat x_2(k))}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|\tilde f''(\hat x_2(k))|}}\approx\left(2\pi k-\frac{\epsilon}{\lambda}\right)^s e^{-2\pi\epsilon k+\frac{\epsilon^2}{2\lambda}}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda-\frac{\epsilon^2}{2\lambda}}}$$
$$\approx(2\pi k)^s e^{-2\pi\epsilon k}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}},$$

$$I(\lambda,\epsilon,s)\approx\sum_{k=1}^{\infty} i_k\approx\sum_{k=1}^{\infty}(2\pi k)^s e^{-2\pi\epsilon k}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}=(2\pi)^s\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\sum_{k=1}^{\infty}k^s e^{-2\pi\epsilon k}.$$

Полученная сумма была посчитана в **Упр. 4 домашней работы №2**:

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^s e^{-2\pi\epsilon k}\approx\frac{1}{(2\pi\epsilon)^{s+1}}\Gamma(s+1),\quad I(\lambda,\epsilon,s)\approx\frac{1}{\epsilon^{s+1}}\sqrt{\frac{1}{2\pi\lambda}}\Gamma(s+1),$$

ответ:

$$\boxed{I(\lambda,\epsilon,s)\approx\frac{1}{\epsilon^{s+1}}\sqrt{\frac{1}{2\pi\lambda}}\Gamma(s+1)}$$