

## Упражнение 2

Пусть  $f(x)$  — степень при экспоненте,  $g(x)$  — подынтегральная функция:

$$f(x) = -\lambda(x-1)^2(x-2)^2, \quad g(x) = e^{f(x)}.$$

Так как  $\forall x \in \{1, 2\} \hookrightarrow f(x) = 0$  и  $\forall x \notin \{1, 2\} \hookrightarrow f(x) < 0$ , в точках  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 2$  находятся максимумы  $f(x)$ , а следовательно, и максимумы  $g(x)$ . Представим  $f(x)$  в виде

$$f(x) = \lambda \tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) = -(x-1)^2(x-2)^2,$$

тогда, так как

$$\tilde{f}''(x) = -[8x^2 + 2((x-1)^2 + (x-2)^2)], \quad \tilde{f}''(x_1) = -10 \sim 1, \quad \tilde{f}''(x_2) = -34 \sim 1$$

и  $\lambda \rightarrow \infty$ , оба максимума  $g(x)$  резкие и

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_0^\infty g(x) \, dx = \int_0^\infty e^{\lambda \tilde{f}(x)} \, dx \approx e^{\lambda \tilde{f}(x_1)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\tilde{f}''(x_1)|}} + e^{\lambda \tilde{f}(x_2)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\tilde{f}''(x_2)|}} = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \left( \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{34}} \right), \end{aligned}$$

ответ:

$$\boxed{I(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \left( \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{34}} \right)}$$