Falls nicht anders angegeben: $A \in \mathbf{R}^{nxm}$
und $x, y \in \mathbf{R}$, ex. = existiert   Seite 1 v1.3

0 Matrix Eigenschaften

invertierbar ⇔ **regulär**: $AB = BA = I_N$
symmetrisch.: $(AB)^T = B^T * A^T = BA$
EW λ: $Av = \lambda v$
$\sigma(A)$: **Spektrum**, alle EW
orthogonal: $A^T = A^{-1} \Rightarrow A^T * A = I_N$,
längenerhaltend $\|Qx\|_2^2 = \|x\|_2^2$
ähnlich: $A = SBS^{-1}$
Skalarprodukt
$\|\cdot\|$ heißt Norm falls:
1) $\|x\| \geq 0$ (pos. definit)
2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungl.)
3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (Homogenität)
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt Skalarprodukt, falls:
$\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$
$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
$\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Es gilt: 1) $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$
2) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$
3) $\langle x, y \rangle_A = x^T A y$, A: spd-Matrix

1 Einführung

Kriterien: Genauigkeit, Stabilität, Effizienz, Voraussetzungen
Pi Approximation: stabil

Setze $g_6 = 1$, $g_{2n} = g_n / \sqrt{2 + \sqrt{4 - g_n^2}}$

Approximiere $\pi \approx \frac{n g_n}{2}$

1.1 Gleitpunktzahlen

Darstellung: $x = m * B^e$, wobei
$B = Basis, e = e_{min} + \sum_{l=0}^{L_e - 1} c_l B^l$
$c_l, a_l \in \{0, ..., B-1\}$, $a_1 \neq 0$
$m = 0$ oder $m = \pm \sum_{l=1}^{L_m} a_l B^{-l}$
L_m: Mantissenlänge
Es gilt: $|m| \geq B^{-1}$ und $|m| < 1$
Beispiel: $B = 2$, $10.25 = 2^3 + 2^1 + 2^{-2}$
$= 2^4 * (1 * 2^{-1} + 0 * 2^{-2} + ... + 1 * 2^{-6})$
Somit ist $e = 4, a_1 = 1, L_m \geq 6$
Es gilt: $e_{max} = e_{min} + B^{L_e} - 1$
$maxFL = B^{e_{max}}(1 - B^{-L_m}) \approx 10^{308}$
$minFL_+ = B^{e_{min} - 1} \approx 10^{-308}$ bei 11e52m
$eps = \frac{(B^{1-L_m})}{2} = 2^{-52} \approx 2.2 * 10^{-16}$

1.2 Rundung

$x \neq 0$ mit $minFL_+ \leq |x| \leq maxFL$, $fl(x) =$
$\pm B^e \begin{cases} \sum_{l=1}^{L_m} a_l B^{-l}, & a_{L_m+1} < \frac{B}{2} \\ \sum_{l=1}^{L_m} a_l B^{-l} + B^{-L_m}, & a_{L_m+1} \geq \frac{B}{2} \end{cases}$
Es gilt: $|x - fl(x)| \leq \frac{1}{2} B^{e - L_m}$, $|x| \geq B^{e-1}$
eps: relative Maschinengenauigkeit
eps := $\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq \frac{B^{e-L_m}}{B^{e-1}} = \frac{1}{2} B^{1-L_m}$
Sei x keine Gleitkommazahl, dann ist der relative Fehler zu fl(x) (gerundet) kleiner als eps: $fl(x) = x(1 + \epsilon)$ mit $|\epsilon| \leq eps$
IEEE: $L_m = 52, eps = 2^{-52}, e_{min} = -1022$

1.3 Arithmetik

$x \circ y \notin FL$ (im Allgemeinen) → erst Operation, dann runden (nicht assoziativ)

1.4 Kondition

Wie wirken sich Störungen der Eingabe auf die exakte (!) Lösung aus? **Schlecht konditioniert**: kleine Störungen haben große Auswirkungen auf die Lösung.
Add/Sub gut konditioniert, falls x und y selbes Vorzeichen, schlecht falls $x \approx -y$.

Relativer Fehler: $\leq \epsilon \frac{|x| + |y|}{|x+y|}$ wobei ϵ klein.

Singuläre Matrizen (nicht invertierbar) sind schlecht konditioniert.

1.5 Stabilität

Fehler im Verfahren haben keinen deutl. größeren Einfluss als in der Eingabe.
Grundoperationen $(+, -, *, /)$ sind in FL stabil. Für $x \approx y$ ist $-$ stabil, aber schlecht konditioniert. Algos mit schlecht kond. Teilproblemen sind instabil.

$g_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - g_n^2}}$, instabil da $g_n^2 \to 0$

Algo. in Kapitel 2 stabil, da $g_{2n} \to g_n / 2$

2 Lösungsverfahren

Finde x, sodass $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{NxN}$
$x = A^{-1} b \to$ teuer
Falls Matrix nicht regulär → keine oder inf. Lösungen. A regulär ↔ det(A) ≠ 0
Es gilt: det(A) = det(L) * det(R)

2.1 LR-Zerlegung

1) **Zerlegung**: $A = LR$ ($\approx \frac{N^3}{3}$)

2) **Vorwärtssubstitution**: $Ly = b$ ($\approx \frac{N^2}{2}$)

3) **Rückwärtssubstitution**: $Rx = y$ ($\approx \frac{N^2}{2}$)
Begründung: $Ax = LRx = Ly = b$
Eine LR-Zerlegung existiert ↔ Jede Teilmatrix ($A_{[1:n,1:n]}$) ist regulär (eindeutig)
Vorgehensweise: Matrix gaußen, Gaußschritte mit **umgekehrtem** Vorzeichen an der jeweiligen Stelle speichern.
L: Diagonale = 1, untere DEM = Gauß
R: untere DEM = 0, Rest = Gauß-Matrix
Permutation: A regulär ↔ $PA = LR$
$PA = LR \Rightarrow A^T P^T = R^T L^T$, $b = R^T L^T (Px)$
$A = LR$ existiert nicht immer, $PA = LR$ schon falls **A invertierbar** ist.
$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LRx = Ly = Pb$
Spaltenpivotwahl immer machen, Betragsmäßig größtes Element kommt nach oben, bei Gleichheit egal

2.2 Cholesky-Zerlegung

A ist spd-Matrix ⇔ Cholesky Z. existiert
Aufwand: $\sum_{n=1}^{N-1} \frac{n^2}{2} \approx \frac{N^3}{6}$ Operationen

1) **Zerlegung**: $A = LL^T$
2) **VWS**: $Ly = b$, 3) **RWS**: $L^T x = y$
$A^T = (LL^T)^T = (L^T)^T L^T = LL^T = A$
$x^T A x = x^T L L^T x = (L^T x)^T L^T x = y^T y > 0$

$\begin{pmatrix} A_{11} & a_{21} \\ a_{21}^T & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & \\ l_{21}^T & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11}^T & l_{21} \\ & l_{22} \end{pmatrix} = LL^T$

1. $L_{11} l_{21} = a_{21}$ Vorwärtssub mit Lsg. l_{21}
2. $a_{22} = l_{21}^T l_{21} + l_{22}^2$ or $l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^T l_{21}}$
Tipp: Bandstruktur bleibt erhalten

2.3 QR-Zerlegung

Sei A eine MxN Matrix ⇔ $A = QR$, wobei $Q \in \mathbb{R}^{MxM}$ orthogonal ($QQ^T = I_M$) und $R \in \mathbb{R}^{NxN}$ eine obere Dreiecksmatrix.
1) **Householder-Trans**: $A = QR$
2) **Löse**: $Qc = b$ durch $c = Q^T b$
3) **Rückwärtssubstitution**: $Rx = c$
Begründung: $Ax = QRx = Qc = b$
Eigenschaften: stabil, $\frac{2}{3} N^3$ wenn $M \approx N$
Householder: $Q = I_M - 2ww^T$ mit $w \in \mathbb{R}^M$, $w^T w = 1$, Q ist sym. da $Q^T = I_M^T - (2ww^T)^T = Q$, orthogonal da $QQ^T = Q^2 = I_M - 4ww^T + 4w * 1 * w^T = I_M (w^T w = 1)$, Spiegelung da $Q\lambda w = -\lambda w$ für $w^T y = 0 \to Qy = y$
Ziel: $Q^{(k)} * ... * Q^{(1)} * A = R$, wobei $Q^{(n)}$ orthogonal

$w = \frac{v - \sigma e^1}{\|v - \sigma e^1\|_2}$, $\sigma = \begin{cases} -\|v\|_2, falls v_1 > 0, \\ \|v\|_2, \; falls v_1 \leq 0. \end{cases}$

$w^N := \begin{pmatrix} 0_{N-1} \\ \tilde{w}^N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^M$, $Q_N := \begin{pmatrix} I_{N-1} & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_N \end{pmatrix}$

2.4 Kondition

Empfindlichkeit von Matrix-Störungen
Sei $A \in \mathbb{R}^{NxN}$ nachfolgend regulär:
zugehörige Norm: $\|A\| := sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, $x \neq 0$
Es gilt: $\|I_N\| = 1$ und $\|AB\| \leq \|A\| * \|B\|$
SSN: $\|A\|_1 = \max_{m=1,...,N} \sum_{n=1}^N |a_{nm}|$
Spektral: $\|A\|_2 = \sqrt{\text{größter EW von } A^T A}$
ZSN: $\|A\|_\infty = \max_{n=1,...,N} \sum_{m=1}^N |a_{nm}|$
$\|x - \tilde{x}\| = \|A^{-1}(b - \tilde{b})\| \leq \|A^{-1}\| * \|b - \tilde{b}\|$: (absoluter Fehler), (relativer Fehler):
$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| * \|A^{-1}\| * \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$
Konditionszahl: $cond(A) := \|A\| * \|A^{-1}\|$
Eigenschaften: $1 \leq cond(A)$, $cond(A) = cond(\alpha A)$, mit $\alpha \neq 0$, $cond(A) = cond(A^{-1})$
$cond(A) = \frac{max_{\|y\|=1} \|Ay\|}{min_{\|z\|=1} \|Az\|}$ (allg. Definition)
Rang A max: $cond_2(A^T A) = (cond_2(A))^2$
Matrizen $B^T B$ wobei B beliebig:
- sind spezielle sym. Matrizen
- haben nur nichtnegative (inkl. 0) EW
- nur positive EW falls B maximaler Rang
- besitzen EW λ^2 falls B sym. mit EW λ
A spd $\Rightarrow cond_2(A) = \frac{max\{|\lambda|: \lambda \text{ EW von A}\}}{min\{|\lambda|: \lambda \text{ EW von A}\}}$

Sei $\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} \leq \epsilon_A$ und $\frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \leq \epsilon_b$, dann gilt:
$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{cond(A) * (\epsilon_A + \epsilon_b)}{1 - \epsilon_A * cond(A)}$, $\epsilon_A * cond(A) < 1$
gute Kondition: I_n ($cond(A)_2 = 1$), $\|$orthogonale Matrizen$\|_2 = 1$, Spline-Interpol., $cond(A)$ klein ⇒ LGS gut kond.
schlechte Kondition: Hilbertmatrix, Diagonalmatrix* ($cond_2(A) = \frac{max. EW}{min. EW}$)
Neumann-Reihe: $(I_n + B)^{-1} = \sum_{k=0}^\infty (-B)^k$

2.5 Ausgleichsrechnung

x gesucht, sodass $\|Ax - b\|_2 = min!$ mit $A \in \mathbb{R}^{MxN}$ Falls $M = N$ gilt: $\|Ax - b\|_2 = 0 = min!$ $(Ax = b)$
Satz von Gauß: Der Vektor x löst genau dann das lineare AGP, falls er $A^T A x = A^T b$ löst (Normalengleichung
NG immer lösbar falls $Rang(A) = max$, da $A^T b \in Bild(A^T) = Kern(A)^\perp = Kern(A^T A)^\perp = Bild(A^T A)$, in $N^2 + \frac{1}{2} N^2$
Sei $A \in \mathbb{R}^{MxN}$ mit $M \geq N$ und Q, R die QR-Zerlegung, also $Q^T A = R = \begin{pmatrix} \overline{R} \\ 0 \end{pmatrix}$,

dann ist $x = \overline{R}^{-1} c$ die Lsg. des AGPs, wobei $Q^T b = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, **Householder**: $A = QR$,

Löse: $Q^T b = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, **RWS**: $\overline{R} x = c$

2.6 Singulärwertzerlegung

Sei $A \in \mathbb{R}^{MxN}$ mit Rang r, **Zerlegung**: $A = U * \Sigma * V^T$, wobei $U \in \mathbb{R}^{MxM}$ und $V \in \mathbb{R}^{NxN}$ orthogonal, $\Sigma \in \mathbb{R}^{MxN}$ mit Singulärwerten ($s_n \geq ... \geq s_r > 0$)
$AA^T = U \Sigma V^T V \Sigma^T U^T = U \Sigma \Sigma^T U^T$ und
$A^T A = V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^T \Sigma V^T$
$x = \sum_{r=1}^R \frac{(u^r)^T b}{\sigma_r} v^r$ Lsg. mit $\|x\|_2 = min!$
$A = \sum_{r=1}^R \sigma_r u^r (v^r)^T$
$\|A\|_{Frob} = \sqrt{Spur(A^T A)} = \sqrt{\sigma_1^2 + ... + \sigma_r^2}$

3 Newton-Verfahren

Lösungsverfahren für nichtlineare GS
Gesucht x*: $f(x^*) = 0_N$, f nichtlinear, $f_1(x_1^*, ..., x_N^* = 0)$, ..., $f_N(x_1^*, ..., x_N^* = 0)$
Taylor: $0 = f(x^*) = f(x^0) + f'(x^0)(x^* - x^0)$
Algorithmus:
1) Wähle Startwert x^0 und Toleranz ϵ
2) Löse $f'(x^k) d^k = -f(x^k)$ (LGS, LR-Zerlegung), berechne $x^{k+1} = x^k + d^k$
3) Falls ($\|d^k\| < \epsilon$): STOP, ansonsten 2)
Bemerkung: Konv. **lokal** quadratisch
Oft divergent, falls $\|x^0 - x^*\|$ groß
Konvergenz: $\|x^* - x^k\| \leq C \|x^* - x^{k-1}\|^2$, d.h. die Anzahl an Nachkommastellen verdoppelt sich ca. pro Schritt
Funktionen: $x_{n+1} = x_n - f'(x_n)^{-1} f(x_n)$
Gedämpft: $x^{k+1} = x^k - t_k f'(x^k)^{-1} f(x^k)$

3.1 Vereinfachung

Konstante Matrix A, sodass $A \approx f'(x^0)$, dann gilt $F(x) = x - A^{-1} f(x)$.
1 x LR-Zerlegung, **linear konvergent**
Fixpunkt: $x^{k+1} = x^k - A^{-1} f(x^k) = F(x^k)$

4 Interpolation

Stützpunkte f_n gegeben, Funktion p gesucht für die $p(x_n) = f_n$ und
$\int_a^b (f(x) - p(x))^2 dx = min!$ gilt

4.1 Polynom

$N + 1$ Stützwerte, Poly. mit Grad $\leq N$ gesucht, mit Grad $\leq N$ **eindeutig**
Lagrange: $L_n(x) = \prod_{j=0, j \neq n}^N \frac{x - x_j}{x_n - x_j}$, instabil

$p(x) = \sum_{n=0}^N f_n L_n(x) \to$ sehr aufwändig
Kondition: Lebesgue-Konstante Λ
$\Lambda_N := \max_{x \in [a,b]} \sum_{n=0}^N |L_n(x)|$, großes Λ_N bei hohem Grad und schlechten Stützstellen
Newton-Darstellung: $f_{n,n} = f_n$
$f_{n,k} = \frac{f_{n,k-1} - f_{n+1,k}}{x_n - x_k}$, $0 \leq n < k \leq N$

Beispiel:

f_n	1	6	-3	3
x_n	-1	0	1	3

$$\begin{array}{l|lllll}
x_0 = -1 & f_0 = \mathbf{1} & & & & \\
 & & \searrow & & & \\
x_1 = 0 & f_1 = 6 & \rightarrow & \frac{1-6}{-1-0} = \mathbf{5} & & \\
 & & \searrow & & \searrow & \\
x_2 = 1 & f_2 = -3 & \rightarrow & \frac{6+3}{0-1} = -9 & \rightarrow & \\
 & & \searrow & & \searrow & \\
x_3 = 3 & f_3 = 3 & \rightarrow & \frac{-3-3}{1-3} = 3 & \rightarrow &
\end{array}$$

$p = 1 + 5(x+1) - 7(x+1)x + \frac{11}{4}(x+1)x(x-1)$

Aufwand: $\frac{N(N+1)}{2}$ Div, $N(N+1)$ Add

Fehler: $f(x) - p(x) = w_{N+1}(x) * \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}$
→ falls x Stützpunkt, dann 0
Tschebyscheff: Approximation von f mit möglichst günstigen Stützstellen
$T_n(x) = cos(n * arccos(x))$ | $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x, T_{n+1}(x) = 2x * T_n(x) - T_{n-1}(x)$
$max_{x \in [-1,1]} |w_{N+1}(x)|$ min. mit 2^{-N}

Falls nicht anders angegeben: $A \in \mathbf{R}^{nxm}$ und $x, y \in \mathbf{R}$, ex. = existiert Seite 2 v1.3

Interpolationsformel: $N+1$ Stützstellen, eindeutiges Polynom gegeben durch:
$p(x) = \frac{1}{2}c_0 + c_1 T_1(x) + ... + c_N T_N(x)$ mit $c_m = \frac{2}{N+1}\sum_{n=0}^{N} f_n cos(m * \pi * \frac{2n+1}{2N+2})$ für $m = 0, ..., N$ ($(N+1)^2$ Multiplikationen)
Clenshaw-Algo: Sei $d_{N+2} = d_{N+1} = 0$, $d_n = c_n + 2x * d_{n+1} - d_{n+2}$ für $n = N, ..., 0$ $\rightarrow p(x) = \frac{(d_0 - d_2)}{2}$ ($N+2$ Mul + $2N$ Add)

4.2 Kubische Splines

Geg: Fallunterscheidung, Ges: $\mathbf{C}^2$-Funkt. mit Teilpolynomen $\in \mathbf{P}_3$ und $s(x_n) = y_n$ (Stützst.). (s_n Teilpol., $x*$ Grenze) Ziel:
1) Glattheit. $s_n^{(k)}(x*) = s_{n+1}^{(k)}(x*)$, $k = 1, 2$
2) Interpolationsbed. $s_n(x*) = s_{n+1}(x*)$
Min-Eigenschaften: Eine Eigens. davon:
1) $s'(a) = \widetilde{s}'(a)$ und $s'(b) = \widetilde{s}'(b)$
2) $s''(a) = 0$ und $s''(b) = 0$
3) $s^{(k)}(a) = s^{(k)}(b)$ für $k = 0, 1, 2$ und $\widetilde{s}'(a) = \widetilde{s}'(b)$
Sei s ein Spline, s heißt: **eingespannt**, **hermitesch**: $s'(a) = v_0$ und $s'(b) = v_N$
natürlich: $s''(a) = s''(b) = 0$
periodisch: $s'(a) = s'(b)$ und $s''(a) = s''(b)$
Minimalität: $\int_a^b |s''(x)|^2 dx$ minimal
Kondition: $l_n(x)$ Lagrange-Spline:
$s(x) - \widetilde{s}(x) = \sum_{n=0}^{N}(y_n - \widetilde{y}_n)l_n(x)$
$\rightarrow$ gute Kondition, max. $\Lambda_N \leq 2$ äquidistanten Unterteilungen: hier gute Kondition, Polynom-Interpol. schlechte Kondition (Oszillationen etc.)

5 Integration

Rechteckregel: $I(f) \approx (b-a)f(a)$ p=1
Mittelpunkt: $I(f) \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})$ p=2
Trapezregel: $I(f) \approx (b-a)(\frac{f(a)+f(b)}{2})$ p=2
Simpson: $\frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$ p=4
- linear: $I(\lambda f + \mu g) = \lambda I(f) + \mu I(g)$
- monoton: $f \geq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
$\rightarrow |\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ (Bsp. Sinus)
Kondition: L1-Norm: $\|f\|_1 = I(|f|)$
Es gilt: $\frac{|I(f) - I(\widetilde{f})|}{|(f)|} \leq cond_1 \frac{\|f - \widetilde{f}\|_1}{\|f\|_1}$ mit $cond_1 := \frac{I(|f|)}{|I(f)|}$ (monoton und linear), schlecht konditioniert falls oszillierend

5.1 Quadraturformeln

$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=1}^{s} b_k f(a + c_k(b-a))$, b_k Gewichte und c_k Knoten $\in [0,1]$
linear und monoton $\leftrightarrow b_k \geq 0$, eindeutig
Ordnung: Quad.-Formel hat Ordnung p $\leftrightarrow$ QF liefert exakte Lösung für alle Poly. mit Grad $\leq p-1$, wobei p maximal oder
(1) $\frac{1}{q} = \sum_{k=1}^{s} b_k c_k^{q-1}$ für alle $q = 1, ..., p$ aber nicht für $q = p+1$ | $\updownarrow$ p mind. s
Es gilt: (2) $\sum_{k=1}^{s} b_k = 1$ | $b_k = \int_0^1 L_k(x)dx$
Klausuren: (1) und (2) überprüfen
Kondition: schlecht, da $\sum |b_k|$, k > 8

5.2 sym. Quadraturformeln

QF sym. $\leftrightarrow c_k = 1 - c_{s+1-k}$ & $b_k = b_{s+1-k}$
Ordnung einer sym. QF ist **gerade**
Lagrange: $L_{s+1-k}(x) = \prod_{j=1, j\neq k}^{s} \frac{x - c_{s+1-j}}{c_{s+1-k} - c_{s+1-j}}$

5.3 QF mit erhöhter Ordnung

Ges: QF mit Ordnung $p = s + m$, $m \geq 1$
Ordnung: $s + m$ genau dann, wenn $\int_0^1 M(x)g(x)dx = 0$ für g mit Grad $\leq m-1$, aber nicht mit Grad m
Skalarprodukt: $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$
$\rightarrow M(x)$ steht orthogonal zum Raum der Poly. mit Grad $\leq m-1$ bzgl. des SKP
max. Ordnung einer QF: $2s$, da $\langle M, M\rangle = \int_0^1 M(x)^2 dx > 0$
Gauß: Es ex. eindeutige QF der Ord. $2s$ durch $c_k = \frac{1}{2}(1 + \gamma_k)$, wobei $k = 1, ..., s$ und $\gamma_1, ..., \gamma_s$ NS des Legendre-Poly.
Beispiel: Sei $s = 2$, es gilt Legendre-Poly. $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ und somit $\gamma_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, also $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, $c_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$, $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$
$\rightarrow \int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}f(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}) + f(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6})$ als QF mit Ordnung 4 ($2s$). Ordnung 6:
$I(f)_0^1 \approx \frac{5*f(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10})}{18} + \frac{4}{9}f(\frac{1}{2}) + \frac{5*f(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10})}{18}$
Quadraturfehler: $g(\tau) := f(a + \tau(b-a))$
$R(g) = \int_0^1 g(\tau)d\tau - \sum_{k=1}^{s} b_k g(c_k)$, linear
Abschätzung: $R(g) = (\frac{b-a}{N})^2(b-a)\frac{f^{(2)}(\xi)}{12}$
Sum.QF: $\sum_{n=1}^{N} h_n \sum_{k=1}^{s} b_k f(x_{n-1} + c_k h_n)$
tf: $h_n^{p+1} max_{x \in [x_{n-1}, x_n]}|f^{(p)}(x)| \int_0^1 |K_p(t)|dt$

6 Eigenwertprobleme

Ges: $v \neq 0$ und λ, wobei $A^{NxN}v = \lambda v$ lösbar $\leftrightarrow Kern((A - \lambda I_n))$ nicht trivial
Sei $Av = \lambda v$, $u^T A = \lambda u^T$, $\|u\| = \|v\| = 1$:
Kond. vom EW λ: $\frac{1}{|u^T v|} \geq \frac{1}{\|u\|_2\|v\|_2} = 1$

6.1 Vektoriteration

Annahme: |einfacher EW| > andere EW, einf. EW: alg. VF des char. Poly. ist 1
Iteration ab k = 0: $y^k = \frac{x^k}{\|x^k\|_2}$ mit $x^{k+1} = Ay^k$ ... konvergiert gegen norm. EV v^1 zum EW λ_1 wenn x^0 nicht senkrecht auf $span(v^1)$ steht $\rightarrow \lambda_1 = \frac{(v^1)^T A v^1}{(v^1)^T v^1}$
Konv.-Geschwindigkeit: $0 \leq |\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}| < 1$
Inverse Vektoriteration Es gilt:
$Av = \lambda v \Leftrightarrow v = \lambda A^{-1}v \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}v = A^{-1}v$
NUN: $A \in \mathbf{R}^{NxN}$ und KLEINSTER |EW| nahe, aber ungleich 0 $\leftrightarrow A^{-1}$ sym. mit selben EV $\leftrightarrow EW = \frac{1}{\lambda_n}$, λ_n ist EW von A
Iteration (!) k = 0: $y^k = \frac{x^k}{\|x^k\|_2}$, $Ax^{k+1} = y^k$

6.2 QR-Algorithmus

Berechnung sämtlicher EW von $A^{\mathbf{R}x\mathbf{R}}$
Algorithmus: 1) Setze $A_0 = A$ und $k = 0$
2) Zerlege $A_k = Q_k R_k$ (QR-Zerlegung)
3) Berechne $A_{k+1} = R_k Q_k$, erhöhe k und gehe zu Schnitt 2)
$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^T Q_k R_k Q_k = Q_k^T A_k Q_k$
$\Rightarrow$ (A_{k+1} ähnlich zu A_k) $\Rightarrow$ (ähnlich zu A für alle k) $\Rightarrow$ ($A_k \rightarrow R$ für $k \rightarrow \infty$)
Aufwand: $\mathcal{O}(n^3)$(HBF: $\mathcal{O}(n^2)$, sym $\mathcal{O}(n)$)
Konvergenz: $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}, ..., \frac{|\lambda_N|}{|\lambda_{N-1}|} \rightarrow$ langsam
Idee: Nutze Shift $\mu_k \rightarrow$ 1) $H_0 = H$, $k = 0$
2) Zerlege $H_k - \mu_k I_N = Q_k R_k$
3) $H_{k+1} = R_k Q_k + \mu_k I_N$, k++, wdh. 2)
Hessenbergform: $\frac{5}{3}N^3$, A sym. $\frac{2}{3}N^3$
Eine Matrix kann in $N-2$ Householder-Trans. in HBF gebracht werden: $Q^T AQ = H$ wobei $Q = Q_1 * ... * Q_{N-2}$. Ist $A \in \mathbf{R}^{2x2}$ orthogonal und $det(A) = -1$, dann ist A eine Householder-Transformation

7 Iterative Verfahren für LGS

Effiziente Lsg. eines LGS ($Ax = b$), wobei A sehr groß und dünn besetzt
Vorkonditionierer: $B \in \mathbf{R}^{NxN}$, regulär, $cond(B^{-1}A) < cond(A)$. $A = L + D + R$
Jacobi: $B = D$, Gauß-Seidel: $B = L + D$
Es gilt: $0 = -B^{-1}Ax + B^{-1}b$. $Bc = r$ leichtr
Fixpunktiteration: $x^{k+1} = x^k + B^{-1}r^k$ mit $r^k = b - Ax^k$, $\rho(I_N - D^{-1}A) < 1 \Rightarrow$ konv.
Algorithmus zur Lösung:
1) Wähle Start $x^0 \in \mathbf{R}^N$, Toleranz $\epsilon > 0$
2) Setze $r^0 = b - Ax^0$, $k = 0$
3) Falls ($\|r^{k+1} \leq \epsilon\|b\|$) STOP, ansonsten:
$Bc^k = r^k$
$x^{k+1} = x^k + c^k = x^k + B^{-1}r^k$
$r^{k+1} = r^k - Ac^k = b - Ax^{k+1}$
4) Erhöhe k um 1 und gehe zu 3)

7.1 cg-Verfahren

Vorteile: fehlerh. Anteile filtern, Normalengleichung einfach, Speicherplatz
Energienorm: $\|x\|_A = \sqrt{x^T Ax}$, x Vektor, dazugehöriges SKP: $\langle x, y\rangle = x^T Ay$
VORKONDITIONIERTER Algorithmus:
1) Wähle $x^0 \in \mathbf{R}^N$, $\epsilon > 0$, $r^0 = b - Ax^0$
2) (ZUSÄTZLICH) Löse $Ms^0 = r^0$, $d^0 = s^0$
3) Falls ($\|r^k\| \leq \epsilon\|b\|$) STOP, sonst:
$a_k = \langle r^k, s^k\rangle / \langle d^k, d^k\rangle_A$
$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$
$r^{k+1} = r^k - \alpha_k Ad^k$
(ZUSÄTZLICH) Löse $Ms^{k+1} = r^{k+1}$
$\beta_k = \langle r^{k+1}, s^{k+1}\rangle / \langle r^k, s^k\rangle$
$d^{k+1} = s^{k+1} + \beta_k d^k$
4) Erhöhe k um 1 und gehe zu 3)
Konvergenz: Nach max. N Schritten exakt
Fehler: $\|x_* - x^k\|_A \leq 2*(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1})^k * \|x_* - x^0\|_A$, $c = cond_2(A)$, x_* exakte Lsg, $k = 1, 2, ...$
Normalengleichungen: Berechnung von Ad^k und $A^T(Ad^k) \rightarrow$ (MMM $\rightarrow$ 2 x MVP)

8 Übungsaufgaben

Zerlegung: $Ax = (LQRDL^T)x = b$
Lsg: $Lu = b$, $Qv = u$ mit $v = Q^T u$, $Rw = v$, $Dy = w$, $L^T x = y$

Lsg.-Strategien: $A \in \mathbf{R}^{21x20} \rightarrow$ QR, da LR und Cholesky nur für quad. sinnvoll
$A \in \mathbf{R}^{10x10}$ sym. $\rightarrow$ Cholesky, falls spd
$A \in \mathbf{R}^{10x10}$ mit mind. einem Diagonaleintrag $\leq 0 \rightarrow$ LR, da A nicht pos. def.
$A \in \mathbf{R}^{20x21}$ (unterbestimmt) $\rightarrow$ QR von A^T, $R^T y = b$ lösen (VwS), Lsg: $x = Qy$

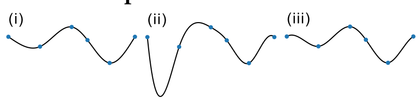
Min-Norm: $Rang(A) = R$, Singulärwertz. gegeben. Ƶ: $x^\dagger = A^\dagger b$ ist Lsg des AGPs
Lsg: $A^T Ax^\dagger = V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T V\Sigma^\dagger U^T b = V\Sigma^T\Sigma\Sigma^\dagger U^T b = V\Sigma^T U^T b = A^T b$
Ƶ: $x^\dagger = \sum_{r=1}^{R} \frac{1}{\sigma_r}(u^r)^T bv^r$, Lsg: $A^\dagger b$
$= V\Sigma^+ U^T \sum_{m=1}^{M}(u^m)^T bu^m$
$= V\sum_{m=1}^{R}\frac{1}{\sigma_m}(u^m)^T be_m$ = Ergebnis

Newton: $\frac{1}{x} - a$ ohne Div: $x_{n+1} = x_n - f'(x_n)^{-1}f(x_n) = x_n - (-\frac{1}{x_n^2})^{-1}(\frac{1}{x_n} - a) = x_n(2 - ax_n)$ **Fehler**: $e_{k+1} = \frac{1}{a} - x_{k+1} = ae_k^2$

Quad. Splines GLS ($s_N'(x_N) = v$) **Lsg**: Es gilt $s_n'(x) = y_{n-1,n} + \alpha_n(2x - x_{n-1} - x_n)$ und $s_n'(x_n) = s_{n+1}'(x_n)$ (Glattheitsbedingung)
$\Rightarrow \alpha_n h_n + \alpha_{n+1}h_{n+1} = y_{n,n+1} - y_{n-1,n}$

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \\ & h_{N-1} & h_N \\ & & h_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,2} - y_{0,1} \\ \cdot \\ v - y_{N-1,N} \end{pmatrix}$$

Splines zuordnen



(i) natürlich, da Steigung an linken und rechtem RP $\approx$ konstant (ii) eingespannt, da nicht periodisch und nicht natürlich (iii) periodisch, da Steigung an Randpunkten $\approx$ identisch, RP: Randpunkt

---

Knoten sym. $\leftrightarrow$ Ordnung p gerade. Es gilt $p \in (s, 2s]$. Da $2s$ eindeutig und Quadratur nicht identisch, gilt $p \in (s, 2s)$

Shiftmatrix: $S = (e^N|e^1|e^2|...|e^{N-1})$, Iteration mit SV $y^0 = e^1$, konvergent?
Lsg: Iteration $y^{k+1} = Sy^k \rightarrow$ durchläuft $e^1 \rightarrow e^N \rightarrow ... \rightarrow e^1 \rightarrow$ nicht konvergent

---

$\boldsymbol{Q_w A Q_w} = (I_k - 2ww^T)A(I_k - 2ww^T)$
$= (A - 2ww^T A)(I_k - 2ww^T)$
$= A - 2Aww^T - 2ww^T A + 4ww^T Aww^T$
(V: $v = -2Aw$) $A + vw^T + wv^T - 2ww^T vw^T$
(V: $\alpha - w^T v$) $A + vw^T + wv^T + 2\alpha ww^T$
(V: $u = v + \alpha w$) $A + uw^T + wu^T$

---

cg: Eigenwerte Geg: A quad. sdp mit größtem EW $\lambda_1 > 1$ (alg. VF 1) und $|\lambda - 1| \leq \epsilon$. Ƶ: $\|x^2 - x^*\|_A \leq \epsilon\|x^0 - x^*\|_A$.
Lsg: Sei $q_2(x) = \frac{1}{\lambda_1}(\lambda_1 - x)(1 - x)$. Satz 39:
$\|x^2 - x^*\| \leq max|q_2(\lambda_j)| * \|x^0 - x*\|_A$
$\leq max|\frac{\lambda_1(1-\lambda_j)}{\lambda_1}| * \|x^0 - x^*\|_A \leq \epsilon\|x^0 - x^*\|_A$
Ƶ: k vers. EW $\Leftrightarrow$ exakte LSG nach k Schritten. **Lsg**: Sei $q_k(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} = \frac{\lambda_j - \lambda}{\lambda_j}$.
Es gilt $q_k(0) = 1$ und $q_k(\lambda_j) = 0$. Satz 39:
$\|x^k - x^*\|_A \leq max|q_k(\lambda_j)| * \|x^0 - x^*\|_A$
$= 0 \rightarrow x^k = x^*$ ist Lsg. des LGS

Sei $Q_w = I_4 - 2ww^T$ die HHT mit $Q_w A = \{r_{11}, r_{12}^T\}, \{0_3, A^{(1)}\}$ und A. Bestimme r_{11}. **Lsg**: Norm erster Spalte $= \|Q_w a^1\|_2 = \|r_{11}e^1\|_2 = |r_{11}|$. Wähle VZ sodass im Zähler $a^1 - r_{11}e^1$ keine Auslöschung auftritt $\rightarrow$ Falls a_{11} neg. wähle r_{11} pos.

Schritt im Newton-Verfahren

$x \rightarrow \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 - 1 \\ sin(x_2\pi) \end{pmatrix}$ mit SW $x^0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Lsg: $f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0.25 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$. Es gilt $f'(x_1, x_2)\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = x^0$, $x = x^0 + d \rightarrow \begin{pmatrix} 0.75 \\ 2 \end{pmatrix}$

Zusammenhang Normen

$\|x\|_\infty = max_{1\leq i\leq n}|x_i| = \sqrt{max_{1\leq i\leq n}|x_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2} = \|x\|_2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} max_{1\leq j\leq n|x_j|^2}} = \sqrt{n} * max_{1\leq j\leq n}|x_j|^2 = \sqrt{n}\|x\|_\infty$

Ableitungen und Sonstiges

$(a^x)' = (a^x)ln(a)$, $\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, GLHF :)