Probabilidade

Raucélio Coelho Cardoch Valdes

30 de abril de 2020

1. Introdução
2. Noções de Conjuntos
3. Probabilidade

Introdução

Conteúdo:

- Noções de conjuntos.
- Conceitos de probabilidade e propriedades.
- Probabilidade condicionada e independência entre eventos.
- Variável aleatória.
- Esperança matemática.
- Variáveis aleatórias discretas e contínuas.

Noções de conjuntos

Definição (Conjuntos)

Uma coleção de objetos bem definidos.

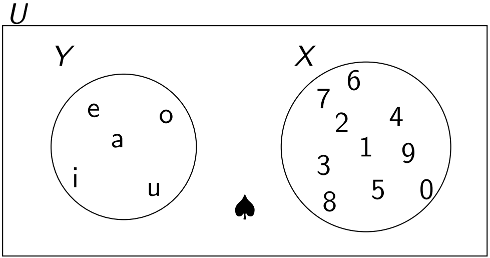
É usual denotar os conjuntos por letras maiúsculas e os elementos por letras minúsculas.

Definição (Elemento de um conjunto)

Objeto que pertence ao conjunto.

Noções de conjuntos

Representação de conjuntos.
Extensão: $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $Y = \{a, e, i, o, u\}$
Compreensão: $X = \{\text{algarísmos arábicos}\}$ e $Y = \{vogais\}$
Diagrama de Venn:



Noções de conjuntos

Definição (Pertinência)

É a propriedade de um elemento que faz parte de um conjunto. Dado o objeto x *e o conjunto* X*, se* x *pertence a* X*, escreve-se* $x \in X$ *e* $x \notin X$*, caso* x *não pertença a* X*.*

Exemplo: 1.1 Seja o conjunto $A = \{0, 1, 2, \text{casa}, 5\}$ são corretas as afirmações:

1) $1 \in A$
2) $3 \notin A$
3) $\{1, 2\} \notin A$

Noções de conjuntos.

Definição (Subconjunto)

Caso todo elemento de um conjunto A é elemento de um conjunto B, é dito que A é um subconjunto de B.

Exemplo: 2.1 Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, então são subconjuntos:

1) $X = \{$os números pares$\}$.
2) $Y = \{$os números ímpares$\}$.
3) $Z = \{$os múltiplos de 5$\}$.

Noções de conjuntos.

Definição (Classe)

Classe é o nome dado a uma coleção de conjuntos.

Em outras palavras: classe é um conjunto de conjuntos.

Exemplo: 3.1 $X = \{\{1,2\}, \emptyset\}$.

Exemplo: 3.2 $Y = \{\{4\}, \{5\}\}$.

Noções de conjuntos

Definição (Conjunto das Partes)

O conjunto formado por todos os subconjuntos de um outro conjunto. Dado um conjunto A, escreve-se $\mathcal{P}(A)$.

Exemplo: 4.1 Se $X = \{1, 2\}$ então $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

Exemplo: 4.2 Se $Y = \{a, b, c\}$ então

$$\mathcal{P}(Y) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Noções de conjuntos

Definição (Cardinalidade)

É a medida do número de elementos de um conjunto. Dado um conjunto A, é denotada por $|A|$, $\#A$ ou $\bar{\bar{A}}$.

A cardinalidade um conjunto pode ser finita, infinita contável e infinita incontável. Para um conjunto finito a sua cardinalidade é o seu número de elementos.

Exemplo: 5.1 A cardinalidade para o conjunto A:

1) $A = \{1, 2, 3\}$. Tem-se que $\#A = 3$.
2) $A = \{1, 2, 3, \dots\}$. Tem-se $\#A$ infinito e contável.
3) $A = [1, 3]$. Tem-se $\#A$ infinito e incontável.

Noções de conjuntos

Definição (Conjunto Vazio)

O conjunto que não contém elementos é denominado conjunto vazio, sendo representado por $\emptyset$ ou $\{\}$.

Exemplo: 6.1 Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos número reais, então são vazios os conjuntos:

1) $\{x \in \mathbb{R} | x = x + 1\}$.
2) $\left\{x \in \mathbb{R} | x^2 + 2 = 0\right\}$.

Noções de conjuntos

Definição (Conjunto Unitário)

O conjunto que contém somente um elemento.

Exemplo: 7.1 São conjuntos unitários:

1) $A = \{2\}$.
2) $X = \{x \in \mathbb{R} | 3x + 5 = 8\}$.
3) $Y = \left\{x \in \mathbb{N} | x^2 = 1\right\}$.

Noções de conjuntos

Definição (Conjunto Universo)

O conjunto que representa todos os elementos de interesse e também todos os conjuntos relacionados. É representado pela letra **U**.

Exemplo: 8.1 São conjuntos universo:

1) Ao resolver uma equação o conjunto universo é o $\mathbb{R}$.
2) Ao escolher os deputados para uma comissão o universo são os atuais deputados.

Noções de conjuntos

Definição (União)

O conjunto cujos elementos são elementos de um conjunto A, de um conjunto B ou de ambos é denominado união de A e B, escrevendo-se

$$A \cup B = \{x \colon x \in A \text{ ou } x \in B \text{ ou ambos } \}.$$

Exemplo: 9.1 Sejam $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $C = \{1, a, 6\}$.

1) $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$.
2) $A \cup C = \{1, a, 3, 4, 6\}$.
3) $B \cup C = \{1, a, 4, 5, 6\}$.

Noções de conjuntos

Definição (Interseção)

O conjunto cujos elementos são simultaneamente elementos de um conjunto A e de um conjunto B, escrevendo-se

$$A \cap B = \{x \colon x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Exemplo: 10.1 Sejam $A = \{a, e, i\}$, $B = \{a, d, e\}$ e $C = \{1, a, d, \}$.

1) $A \cap B = \{a, e\}$.
2) $A \cap C = \{a\}$.
3) $B \cap C = \{a, d\}$.

Noções de conjuntos

Definição (Diferença)

O conjunto cujos elementos são elementos de um conjunto B que não pertencem a um outro conjunto A é chamado conjunto diferença entre B e A, escrevendo-se

$$B - A = \{x \colon x \in B \text{ e } x \notin A\}.$$

Exemplo: 11.1 Sejam $A = \{a, 1, rato\}$ e $B = \{gato, a, 1\}$.

1) $A - B = \{rato\}$.
2) $B - A = \{gato\}$.

Noções de conjuntos

Definição (Complemento)

O conjunto cujos elementos são os do conjunto universo U que não pertencem a um determinado conjunto A. É chamado complemento de A, sendo representado por $\bar{A}$. Ou seja:

$$\bar{A} = \{x \colon x \notin A\}\,.$$

Exemplo: 12.1 Sejam $A = \{x \in \mathbb{N} | \text{x é par}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} | x \geq 10\}$.

1) $\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} | \text{x é ímpar}\}$.
2) $\bar{B} = \{x \in \mathbb{N} | x < 10\}$.

Probabilidade - evento

Definição (Experimentos Aleatórios)

É um procedimento no qual os resultados possíveis são conhecidos. Entretanto, em uma realização, não é possível precisar o resultado.

Exemplo: 13.1 São experimentos aleatórios:

1) O resultado de um exame de gravidez.
2) Lançar um dado.
3) Lançar uma moeda duas vezes.
4) Tentativas de fraudes em um banco.
5) A durabilidade de uma lâmpada.

Probabilidade - evento

Definição (Espaço Amostral)

É o conjunto de todos os resultados possíveis em uma realização de um experimento aleatório. Denotado por S.

Exemplo: 14.1 São experimentos aleatórios e os seus espaços amostrais.

1) Teste de gravidez tem $S = \{positivo, \ negativo\}$.
2) Lançar um dado tem $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
3) Lança uma moeda tem $S = \{(\bar{c}, c), (\bar{c}, \bar{c}), (c, \bar{c}), (c, c)\}$.
4) Tentativas de fraudes tem $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
5) A durabilidade de uma lâmpada tem $S = \{s \in \mathbb{R} | s \geq 0\}$

Probabilidade - evento

Definição (Evento)

É qualquer subconjunto E de um espaço amostral S. Isto é, se $E \subseteq S$ então E é um evento.

Exemplo: 15.1 Seja o espaço amostral é $S = \{x, y, z\}$. São eventos:

1) $\{x\}$, $\{y\}$ e $\{z\}$.
2) $\{x, y\}$, $\{x, z\}$ e $\{y, z\}$.
3) $\{x, y, z\}$ e $\emptyset$.

Probabilidade - evento

Exemplo: 16.1 Para o laçamento de um dado tem-se $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. São eventos:

1) $A = \{2, 4, 6\}$, qualquer resultado par.
2) $B = \{1, 3, 5\}$, qualquer resultado ímpar.
3) $\emptyset$, sair oito como resultado.

Probabilidade - evento

Definição (Evento Elementar)

É um evento E com apenas um elemento.

Exemplo: 17.1 Seja o espaço amostral $S = \{a, b\}$. São eventos elementares: $\{a\}$ e $\{b\}$.

Probabilidade - evento

Definição (Evento Impossível)

É um evento E que é um conjunto vazio.

Exemplo: 18.1 São conjuntos vazios:

1) Obter a soma quinze no lançamento de dois dados, visto que o máximo é doze.
2) Escolher um número natural que é par e ímpar.

Probabilidade - evento

Definição (Eventos Mutuamente Exclusivos)

São dois eventos E_1 e E_2 disjuntos, isto é, a interseção entre eles é o conjunto vazio. Assim, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Exemplo: 19.1 O laçamento de um dado tem $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1) $E_1 = \{2, 4, 6\}$ e $E_2 = \{1, 3, 5\}$ são mutuamente exclusivos, pois $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.
2) $E_1 = \{2, 4, 6\}$ e $E_2 = \{5, 6, 3\}$ não são mutuamente exclusivos, pois $E_1 \cap E_2 = \{6\}$

Probabilidade - evento

Definição (Evento Complementar)

É o evento $\overline{E_1}$ formado por todos elementos do espaço amostral S que não pertencem ao evento E_1.

Exemplo: 20.1 Seja o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. O evento $E_1 = \{2, 4, 6\}$ tem como complementar $\overline{E_1} = \{1, 3, 5\}$.

Probabilidade - definição

Definição (Definição Clássica)

Dado um experimento aleatório, seu espaço amostral S, finito, e um evento E. A probabilidade $P\{E\}$ é dada por

$$P\{E\} = \frac{\textit{número de elementos de } E}{\textit{número de elememtos de } S}.$$

Há duas restrições a serem observados no uso da definição clássica de probabilidade:

i) O experimento deve ter um número finito de resultados.

ii) Os resultados do experimento devem ser equiprováveis.

Probabilidade - definição

Exemplo: 21.1 Ao lançar um moeda, intuitivamente, espera-se que a probabilidade de sair “cara” é $\frac{1}{2}$.

Exemplo: 22.1 Em uma urna com uma bola vermelha, duas brancas e três azuis, ao evento tirar uma bola branca associa-se a probabilidade $\frac{2}{6}$.

Probabilidade - definição

Se o espaço amostral for um intervalo, por exemplo $S = [a, b]$, a probabilidade do evento E é dada por

$$P\{E\} = \frac{\text{medida de E}}{\text{medida de S}}.$$

Probabilidade - definição

Definição (Definição Frequentista)

Dado um experimento aleatório, com espaço amostral S e um evento $E \subseteq S$. No caso em que esse experimento é repetido um "número grande" de vezes, a probabilidade de E ocorrer é dada por

$$P\{E\} = \frac{\textit{número de ocorrências de } E}{\textit{número de repetições}}.$$

Exemplo: 23.1 Em uma caixa com duzentas bolas vazias, dez não enchem. Assim, probabilidade uma bola ser defeituosa é

$$P\{\text{bola defeiuosa}\} = \frac{10}{200} = 0,05.$$

Probabilidade - definição

Definição (Definição Axiomática)

Dado um experimento aleatório, o espaço amostral S e o evento E. A probabilidade $P\{E\}$ é uma função que associa a E um número real e satisfaz os axiomas:

i) $P\{E\} \geq 0, \forall E \subseteq S$

ii) $P\{S\} = 1$

iii) *Se E_1 e E_2 são mutuamente exclusivos, então* $P\{E_1 \cup E_2\} = P\{E_1\} + P\{E_2\}$.

Probabilidade - definição

A função probabilidade apresenta as seguintes propriedades:

i) $P\left\{\emptyset\right\} = 0$.

ii) $P\left\{\overline{E}\right\} = 1 - P\left\{E\right\}$.

iii) Se $E_1 \subseteq E_2$, então $P\left\{E_1\right\} \leq P\left\{E_2\right\}$.

iv) Para E_1 e E_2 vale $P\left\{E_1 \cup E_2\right\} = P\left\{E_1\right\} + P\left\{E_2\right\} - P\left\{E_1 \cap E_2\right\}$.

v) Se os eventos $E_i \subseteq S$, com $i = 1, \ldots,$ mutuamente exclusivos, então

$$P\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\left\{E_i\right\} \text{ com } E_i \cap E_j = \emptyset \text{ para } i \neq j.$$

Probabilidade Condicional

A ocorrência de um evento pode mudar o conhecimento de um outro evento futuro.

Probabilidade Condicional

A tabela apresenta 20 bolas, verdes ou brancas, nas urnas X e Y.

Urna	Bolas		Total
	verde	branca	
X	8	2	10
Y	5	5	10
Total	13	7	20

A probabilidade de tirar uma bola verde é $P\{verde\} = \frac{13}{20}$. Mas, "dado" que foi tirada da urna X, passa a ser $P\{verde|X\} = \frac{8}{10}$.

Probabilidade Condicional

Definição (Probabilidade Condicional)

Dados os eventos E_1 e E_2, a probabilidade de ocorrer o E_1 dado que E_2 é dada por

$$P\{E_1|E_2\} = \frac{P\{E_1 \cap E_2\}}{P\{E_2\}}, \textit{ se } P\{E_2\} > 0.$$

Probabilidade Condicional

Definição (Regra do Produto)

Dados os eventos E_1 e E_2, então

$$P\{E_1 \cap E_2\} = P\{E_1 | E_2\} P\{E_2\}, \text{ com } P\{E_2\} > 0.$$

Probabilidade Condicional - independência

Na situação em que a ocorrência de um evento não altera as probabilidades de um outro evento, esses eventos são ditos independentes. Logo, nesse caso tem-se

$$P\{E_1|E_2\} = P\{E_1\}.$$

Probabilidade Condicional - independência

Definição (Eventos Independentes)

Os eventos E_1 e E_2 são ditos independentes se

$$P\left\{E_1 \cap E_2\right\} = P\left\{E_1\right\} P\left\{E_2\right\}.$$

Probabilidade - independência

Exemplo: 24.1 Ao lançar uma moeda 2 vezes, sair cara (Ca) no 2º lançamento é independente de sair coroa (Co) no 1º.

1) Espaço amostral é $S = \{(Ca, Ca), (Ca, Co), (Co, Co), (Co, Ca)\}$.
2) Evento cara no 2º lançamento é $E_1 = \{(Ca, Ca), (Co, Ca)\}$ e coroa no 1º é $E_2 = \{(Co, Ca), (Co, Co)\}$.
3) Como $E_1 \cap E2 = \{(Ca, Co)\}$.
4) $P\{E_1 \cap E_2\} = \frac{1}{4}$, $P\{E_1\} = \frac{1}{2}$ e $P\{E_2\} = \frac{1}{2}$.
   Assim,
   $$P\{E_1 \cap E_2\} = P\{E_1\} P\{E_2\} = \frac{1}{4}.$$

Váriável Aleatória

Definição (Variável Aleatória)

É a função real $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$, definida no espaço amostral S de um experimento aleatório, tal que a probabilidade $P\{X \leq a\}$ seja definida para todo $a \in \mathbb{R}$.

É usual denotar uma variável aleatória por letras maiúsculas X, Y, Z, etc., e os valores que assume por letras minúsculas x, y, z, etc.

Váriável Aleatória

Exemplo: 25.1 Seja uma urna com bolas numeradas de 1 a 6.

1) Seja a v.a. X que assume o valor 1 se a bola for par e 0 se a bola for ímpar.
2) Seja a v.a. X o número da bola e $Y = X^2 - 5X + 6$.

Váriável Aleatória

Exemplo: 26.1 O experimento é lançar um dado. A v.a. Y é o número de pontos na face de cima. Com as probabilidades dos eventos elementares $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ e $\{6\}$ iguais a $\frac{1}{6}$. Assim,

1) $P\{Y \leq 0\} = 0$ e $P\{Y \geq 7\} = 0$
2) $P\{Y \leq 2\} = P\{Y = 1\} + P\{Y = 2\} = \frac{2}{6}$
3) $P\{2 \leq Y \leq 5\} =$
   $P\{Y = 2\} + P\{Y = 3\} + P\{Y = 4\} + P\{Y = 5\} = \frac{4}{6}$

Váriável Aleatória

Definição (Suporte)

Seja variável aleatória real $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$, *é o conjunto* R_x *dos valores possíveis de* X. *Em notação de conjunto é* $R_x = X(X) = \{X(s)|s \in S\}$.

Exemplo: 27.1 Seja uma urna com bolas numeradas de 1 a 6.

1) Seja a v.a. X, onde $X = 1$ se a bola for par e 0 se for ímpar. Assim, $R_x = \{0, 1\}$
2) Seja a v.a. X o número da bola e $Y = X^2 - 5X + 6$. Assim, $R_y = \{0, 2, 6, 12\}$

Váriável Aleatória

Exemplo: 28.1 A v.a. Y é o total de lançamentos de uma moeda até sair uma coroa. Assim, $R_y = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Exemplo: 28.2 A v.a. Z é a altura de 50 homens, em cm, escolhidos entre os alunos da turma de estatística. Assim, $R_z = [145; 203]$

Váriável Aleatória

Definição (Variável Aleatória Discreta)

É a variável aleatória $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida no espaço amostral* S, *com o suporte* R_x *finito ou enumerável.*

Váriável Aleatória

Definição (Variável Aleatória Contínua)

É a variável aleatória $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$*, definida no espaço amostral* S*, com o suporte* R_x *não enumerável.*

Váriável Aleatória

Definição (Função de Probabilidade)

Dada a variável aleatória discreta $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida no espaço amostral* S, *é a função* $f : R_x \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida o suporte* R_x *que satisfaz:*

i $f(x_i) \geq 0$, *para* $\forall x_i \in \mathbb{R}$ *e*

ii $\displaystyle\sum_{x_i \in R_x} f(x_i) = 1.$

Onde $f(x_i)$ *é a probabilidade de* X *assumir o valor* x_i, *isto é,* $P\{X = x_i\}$

Váriável Aleatória

Definição (Função de Densidade)

Dada a variável aleatória contínua $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$*, definida no espaço amostral* S*, é a função* $f : R_x \longrightarrow \mathbb{R}$*, definida o suporte* R_x *que satisfaz:*

i $f(x_i) \geq 0$*, para* $\forall x_i \in \mathbb{R}$ *e*

ii $\displaystyle\int_{R_x} f(x)dx = 1.$

Onde a probabilidade de $c < X < d$ *, isto é,* $P\{c < X < d\}$ *é dada por*

$$P\{c < X < d\} = \int_c^d f(x)dx, \text{ para } c < d \text{ e } [c, d] \subset R_x.$$

Váriável Aleatória

Definição (Função de Distribuição)

Para uma variável aleatória X, discreta ou continua, $F(x) = P\{X \leq a\}$ é definida por

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i \leq x} f(x_i) & \textit{se } X \textit{ é discreta} \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(s)ds & \textit{se } X \textit{ é contínua} \end{cases}$$

Váriável Aleatória

Definição (Esperança Matemática)

Para variável aleatória, discreta ou continua, X, a esperança matemática para a função $g(X)$ é definida por

$$E\left[g(X)\right] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i \le x} g(x) f(x_i) & \text{se } X \text{ é discreta} \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(s) f(s) ds & \text{se } X \text{ é contínua} \end{cases}$$

se a integral ou o somatório convergirem.

Váriável Aleatória

Exemplo: 29.1 Calcule $E(X)$ para a função de probabilidade.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{para x = -1} \\ \frac{1}{4}, & \text{para x = 0} \\ \frac{2}{4}, & \text{para x = 1} \\ 0, & \text{para outros valores} \end{cases}$$

1) $E(X) = \frac{1}{4} \times (-1) + \frac{1}{4} \times (0) + \frac{2}{4} \times (1) = \frac{2}{4}$

Váriável Aleatória

Exemplo: 30.1 Calcule $E(X)$ e $E(X+1)$ para a função de densidade.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{para -3} < \text{x} < 6 \\ 0, & \text{para outros valores} \end{cases}$$

1) $E(X) = \int_{-3}^{3} x \times \frac{1}{6} dx = \left. \frac{x^2}{12} \right|_{-3}^{3} = \frac{3^2}{12} - \frac{(-3)^2}{12} = \frac{9}{12} - \frac{9}{12} = 0$

2) $E(X+1) = \int_{-3}^{3} (x+1) \times \frac{1}{6} dx = \left. \frac{x^2 + 2x}{12} \right|_{-3}^{3} = \frac{15}{12} - \frac{3}{12} = 1$

Váriável Aleatória

Definição (Valor Esperado)

Para uma variável aleatória, discreta ou continua, X é $E(X)$, caso exista.

Exemplo: 31.1 Seja um jogo de dado. a v.a. X é o resultado do lançamento.Qual o resultado esperado desse jogo?

$$E(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3,5$$

Váriável Aleatória

Definição (Variância)

Para uma variável aleatória, discreta ou continua, X é definida por $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, se $E(X^2)$ existir.

Váriável Aleatória

Exemplo: 32.1 A v.a. X é o número da bola retirada de uma urna. São 4 bolas numeradas de 1 a 4. Qual a variância de X?

1) $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
2) $E(X) = \frac{1}{4}(1 + 2 + 3 + 4) = \frac{10}{4} = 2,5$
3) $E(X^2) = \frac{1}{4}(1 + 4 + 9 + 16) = \frac{30}{4} = 7,5$
4) $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 7,5 - (2,5)^2 = 7,5 - 6,25 = 1,25$

Váriável Aleatória

Exemplo: 33.1 Seja a v.a. Y com a seguinte distribuição de probabilidade calcule $E(Y)$ e $V(Y)$.

Tabela: Distribuição de Probabilidade da v.a. Y.

Y	0	1	2	3	4
$P(Y = y_i)$	$\frac{5}{80}$	$\frac{20}{80}$	$\frac{30}{80}$	$\frac{20}{80}$	$\frac{5}{80}$

1) $E(X) = \dfrac{1}{80}(0 \times 5 + 1 \times 20 + 2 \times 30 + 3 \times 20 + 4 \times 5) = 2$
2) $E(X^2) = \dfrac{1}{80}\left(0^2 \times 5 + 1^2 \times 20 + 2^2 \times 30 + 3^2 \times 20 + 4^2 \times 5\right) = 5$
3) $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 5 - 4 = 1$

Váriável Aleatória

Exemplo: 34.1 Calcule $E(X)$, $E(X^2)$ e V(X) para a função de densidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{para } 0 < x < 8 \\ 0 & \text{para outros valores} \end{cases}$$

1) $E(X) = \int_0^8 x \times \frac{1}{8} dx = 4$
2) $E(X^2) = \int_0^8 x^2 \times \frac{1}{8} dx = \frac{64}{3}$
3) $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{64}{3} - 16 = \frac{16}{3}$

Distribuição Binomial

Um jogo consiste em acertar o número de caras em 10 lançamentos de uma moeda honesta. Qual a probabilidade de obter 5 caras? Como essa, há outras situações, práticas ou teóricas, cujo o interesse é atribuir uma probabilidade ao número de ocorrências de um resultados desejado, sucesso, em n tentativas independentes, nas quais a probabilidade de obter sucesso permanece constante.
A variável aleatória binomial X é apropriada para observar o número x de ocorrências de um resultado, com probabilidade p, em n repetições independentes de um experimento.

Distribuição Binomial

Definição (Variável Binomial)

É a variável aleatória discreta X com parâmetros n e p, denotada por $X \sim B(n, p)$, cuja função de probabilidade é

$$f(x; n, p) = \binom{n}{x} p^n (1-p)^{n-x}, \text{ com } x = 0, 1, \ldots, n.$$

Onde $n \geq 1$ é um número inteiro, $0 < p < 1$ e $\binom{n}{x} = \dfrac{n!}{x!\,(n-x)!}$ é o número de combinações de n elementos tomados x a x.

Distribuição Binomial

Exemplo: 35.1 Seja $X \sim B(4, 0.5)$, calcule a $P\left(X = 1\right)$.

$$
\begin{aligned}
P\left(X = 1\right) &= \binom{4}{1} 0,5^{1} \left(1 - 0,5\right)^{4-1} \\
&= \frac{4!}{1!(4-1)!} \times 0,5 \times 0,5^{3} \\
&= 4 \times 0,5^{4} = 0,25
\end{aligned}
$$

Distribuição Binomial

Tabela: Distribuição de Probabilidade e Probabilidade Acumulada da v.a. $X \sim B(4, 0.5)$.

X	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{80}$	$\frac{20}{80}$	$\frac{30}{80}$	$\frac{20}{80}$	$\frac{5}{80}$
$P(X \leq x_i)$	$\frac{5}{80}$	$\frac{25}{80}$	$\frac{55}{80}$	$\frac{20}{75}$	$\frac{80}{80}$

Distribuição Binomial

Tabela: Distribuição de Probabilidade e Probabilidade Acumulada da v.a. $X \sim B(4, 0.5)$.

X	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0.0625	0.2500	0.3750	0.2500	0.0625
$P(X \leq x_i)$	0.0625	0.3125	0.6875	0.9371	1.0000

Distribuição Binomial

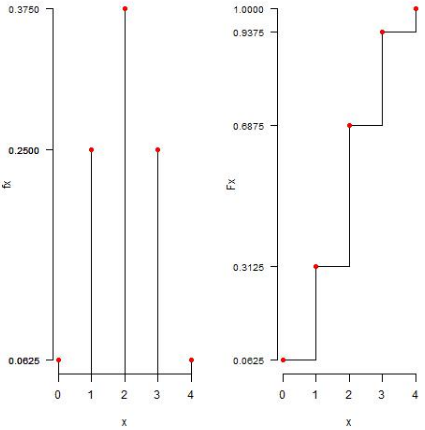


Figura: Funções $f(x) = P(X = x)$ e $F(x) = P(X \leq x)$.

Distribuição Binomial

Para uma v.a. $X \sim B(n,p)$, pode ser provado que o $E[X] = p$ e $Var[X] = np(1-p)$. Assim, para $X \sim B(4, 0.5)$

1) $E[X] = 0.5$
2) $Var[X] = 1$

Distribuição Normal

Definição (Variável de Normal)

É a variável aleatória contínua X com parâmetros μ e σ, e função de densidade

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ para } x \in \mathbb{R}$$

com μ, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ e denotada $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Distribuição Normal

Uma v.a. $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ apresenta:

1) O gráfico da função de densidade tem forma de sino.
2) A função de densidade é simétrica em relação a μ.
3) $P\left(X < x\right) = 1 - P\left(X < -x\right)$
4) $E[X] = \mu$
5) $Var[X] = \sigma^2$

Distribuição Normal

A f.d.p. de uma v.a. $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ tem forma de sino e simétrica em relação a μ.

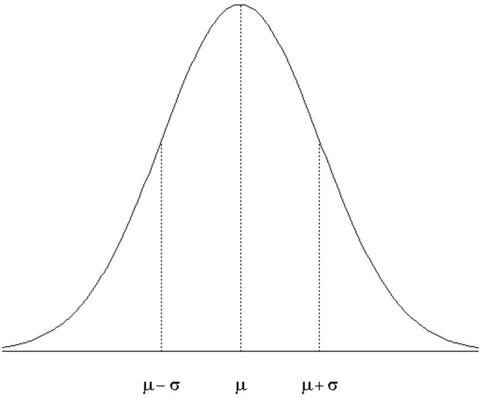
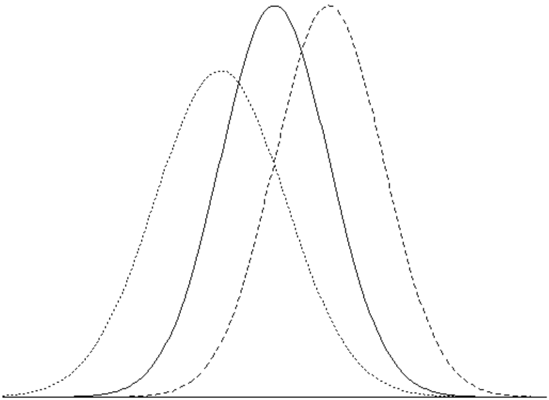


Figura: Simetria Normal em relação a μ

Distribuição Normal

A figura 3 mostra exemplos de densidades de Normais.



Distribuição Normal

Para a v.a. $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, o cálculo de $P\left(X < x\right)$ não é simples, pois a integral envolvida

$$P\left(X < x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$

não tem fórmula fechada e dever ser obtido por meios numéricos.

Distribuição Normal

Uma alternativa para calcular $P(X < x)$ é por meio da variável aleatória

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

onde $Z \sim N(0,1)$, chamada normal padrão, cuja função de densidade é

$$f(x; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ para } x \in \mathbb{R},$$

pois o valor de $P(Z < z)$ é tabulada para vários valores de z.

Distribuição Normal

Exemplo: 36.1 Para $X \sim N\left(\mu = 8, \sigma^2 = 4\right)$. Calcule $P\left(X < x\right)$?

$$P(X \leq 5) = \int_{-\infty}^{5} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(5-8)^2}{2.2^2}} = 0,0668$$

Por meio da v.a $Z = \dfrac{X-8}{2}$, tem-se

$$P(X < 5) = P(\frac{X-8}{2} < \frac{5-8}{2}) = P(Z < -1,5)$$

Com $Z = -1,5$ tem-se que $P(Z < -1,5) = 0,0668$

Distribuição Normal

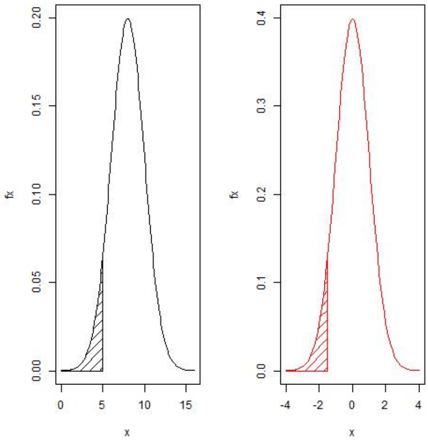


Figura: $P(x < 5) = 0.0668$ e $P(Z < -1.5) = 0.0668$

Distribuição t de Student

Definição (Variável t de Student)

É a variável aleatória contínua X com parâmetro ν, graus de liberdade, denotada por t_ν, e função de densidade

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\frac{\nu+1}{2})},$$

na qual Γ é a função gama, definida por

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx.$$

Distribuição t de Student

Uma v.a. $X \sim t(\nu)$ apresenta:

1) O gráfico da função de densidade tem forma de sino.
2) O gráfico da função tem caudas pesadas.
3) A função de densidade é simétrica em relação a zero.
4) Quanto maior ν mais próximo t_ν de $N(0,1)$.
5) $P(X < x) = 1 - P(X < -x)$
6) $E[X] = 0$ para $\nu > 1$
7) $Var[X] = \dfrac{\nu}{\nu - 2}$ para $\nu > 2$

Distribuição t de Student

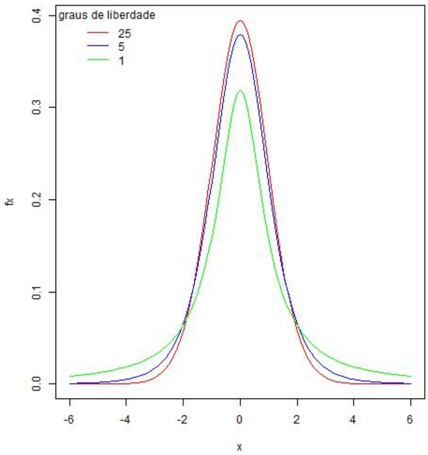


Figura: Função de densidade para t_{25}, t_5 e t_1.

Distribuição t de Student

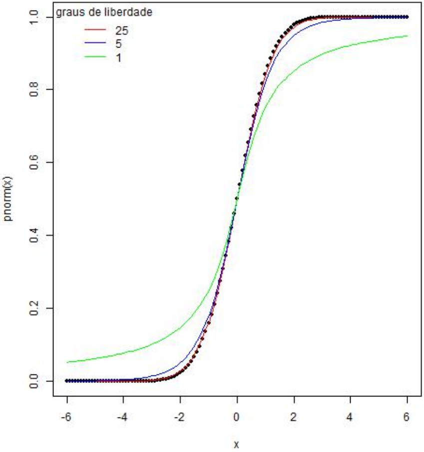


Figura: Função de probabilidade para t_{25}, t_5, t_1 e $N(0, 1)$.

Distribuição F de Snedecor

Definição (Variável F de Snedecor)

É a variável aleatória contínua X com ν_1 e ν_2 graus de liberdades, denotada por $F_(\nu_1, \nu_2)$, e função de densidade

$$f(x) = \frac{\Gamma\left[\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right]\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{\Gamma\left[\frac{\nu_1}{2}\right]\Gamma\left[\frac{\nu_2}{2}\right]\left[\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)x+1\right]^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}},$$

onde $x \in [0, \infty)$ e $\nu_1, \nu_2 = 1, 2, \ldots$

Distribuição F de Snedecor

Uma v.a. $X \sim t(\nu)$ apresenta:

1) Pares de g.l. originam diferentes distribuições F.
2) Em $X \sim F_{(\nu_1,\nu_2)}$, ν_1 é o g.l. do numerador e ν_2 do denominador.
3) A v.a. F é não-negativa, e a distribuição é assimétrica à direita
4) $E[X] = \dfrac{\nu_2}{\nu_2 - 2}$, para $\nu_2 > 2$
5) $Var[X] = \dfrac{2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 4)(\nu_2 - 2)^2}$, para $\nu_2 > 4$

Distribuição F de Snedecor

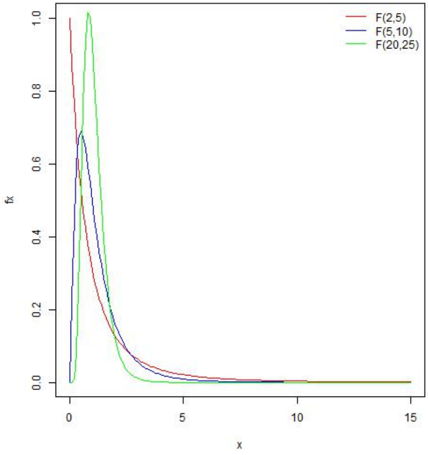


Figura: Função de densidade para $X \sim F_{(\nu_1,\nu_2)}$.