Regressão Linear Múltipla

Contents

Chapter 1

Introdução

Chapter 2

Introdução a matrizes

O estudo de Regressão Linear Múltipla requer conhecimento de notação matricial. Seguem as definições necessárias para o início do estudo desta técnica.

Neste texto são apresentadas definições e operações utilizadas na regressão linear múltipla, já a operação com matrizes no R será apresentada em outro capítulo.

2.1 Definições

- **Matriz** é um arranjo retangular de elementos organizados em linhas e em colunas. Uma matriz é denotada por uma letra maíuscula e os elementos por letras minúsculas, como em A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Uma matriz com $m \times n$ elementos, ordenados em m linhas e n colunas, é uma matriz de ordem m por n e denotada por $m \times n$. Na notação a_{ij} o índice i indica a linha e o j a coluna.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Quadrada** é caracterizada por ter o número de linhas igual ao numero de colunas, $m = n$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Em uma matriz quadrada, os elementos a_{ij}, com $i = j$, forma a **diagonal principal**.

- **Matriz diagonal** é caracterizada por ter os elementos $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- **Matriz identidade** é uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1. É donotada por $\mathbf{I}$.

Exemplo

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ para $i = j$.

- **Matriz nula** é uma matriz cujos elementos são iguais a 0.

Exemplo

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ para $i = j$.

- **Matriz transposta** é o resultado da troca das linhas pelas colunas e denotada por A^T ou A'.

Exemplo

Para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

a sua transposta A' é

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Simétrica** é uma **matriz quadrada** com a propriedade de ser igual a sua transposta. Assim, $A = A'$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Traço de matriz quadrada** é a soma dos elementos da diagonal principal:

$$Trao(A) = \sum_{i,j} a_{ij} \quad \forall i = j$$

Exemplo

Para

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

os elementos da **diagonal principal** são 7, 8 e 9, logo:

$$Trao(A) = 7 + 8 + 9 = 24$$

- **Determinante de matriz** é um valor associado a uma matriz quadrada, A, e denotada por $|A|$.
- **Matriz singular** é a matriz A cujo determinante é nulo, $|A| = 0$.

2.2 Operações com matrizes

- **Soma e subtração** de duas matrizes **com as mesmas dimensões** podem ser somadas ou subtraídas adicionandos pela soma ou subtração dos elementos correspondentes.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 8 & 2 & 6 \\ 7 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

- **Produto por escalar** de uma matriz A por um escalar c é obtida multiplicando cada elemento de A pelo valor de c.

Exemplo

$$5 \times \begin{bmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 8 & 2 & 6 \\ 7 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 40 & 35 \\ 40 & 10 & 30 \\ 35 & 30 & 5 \end{bmatrix}$$

- **Produto de matrizes** só pode ser realizada caso o número de colunas da matriz que pré-multiplica for igual ao número de linhas da matriz que pós-multiplica. A operação consiste na soma dos produtos de cada elementos da linha da matriz que pré-multiplica pelos respectivos elementos da coluna da matriz que pós-multiplica. O resultado será uma matriz com o número de linhas da que pré-multiplica e com número de colunas das que pós-multiplica.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 8 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \times 3 + 2 \times 8 & 7 \times 8 + 2 \times 2 & 7 \times 7 + 2 \times 6 \\ 2 \times 3 + 8 \times 8 & 2 \times 8 + 8 \times 8 & 2 \times 7 + 8 \times 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 60 & 61 \\ 70 & 80 & 62 \end{bmatrix}$$

- **Matriz inversa** de uma matriz A é representada por A^{-1} e aquela que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

onde I é a matriz identidade. Para uma matriz A ter inversa é necessário e suficiente que seja **quadrada** e **não sigular**, isto é, o determinante é diferente de zero.

Exemplo

Para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a sua matriz inversa é

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Verificando $A^{-1}A = I$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3 Propriedades de matrizes

Considerando que as operação de multiplicação, transposição e inversão das matrizes A, B e C. São válidas as seguintes propriedades.

Multiplicação

- $ABC = A(BC) = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$

Transposta de Matrizes

- $(A')' = A$
- $(A + B)' = A' + B'$
- $(AB)' = B'A'$

Inversão de Matrizes

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}a^{-1}$
- $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

Chapter 3

Matrizes no R

O R tem uma estrutura de dados que organiza os seus valores em linhas e colunas, cujos os elemetentos devem ser do mesmo tipo. Essa estrutura é uma matriz e quando os seus valores são numéricos o seu coportamento é igual ao de uma matriz.

Uma **matriz** é um arranjo retangular de elementos organizados em linhas e em colunas. Uma matriz é denotada por uma letra maíuscula e os elementos por letras minúsculas, como em A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Uma matriz com $m \times n$ elementos, ordenados em m linhas e n colunas, é uma matriz de ordem m por n e denotada por $m \times n$. Na notação a_{ij} o índice i indica a linha e o j a coluna.

3.1 Gerar matrizes no R

A função `matrix()` gera uma matriz com $m \times n$ valores organizados em m linhas e n colunas. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

pode ser gerada pelo código abaixo.

```r
dados <- c(2,3,5,6,10,12)
m = 2 # Número de linhas
n = 3 # Número de colunas
A <- matrix(dados, nrow = m, ncol = n)
A
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    5   10
## [2,]    3    6   12
```

Observe que a matriz gerada tem $m = 2$ linhas e $n = 3$ colunas e os $n \times m = 6$ valores são alocados por colunas, iniciando pela 1ª coluna da 1ª linha, esse comporpamento é o padrão e pode ser alterado pelo argumento `byrow =T`.

Uma **matriz quadrada** é caracterizada por ter o número de linhas igual ao numero de colunas, $m = n$. Assim,

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

A matriz acima é gerada por

```r
dados <- c(8,4,2,10)
m = 2 # Número de linhas
n = 2 # Número de colunas
A <- matrix(dados, nrow = m, ncol = n)
A
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    8    2
## [2,]    4   10
```

Em uma matriz quadrada, os elementos a_{ij}, com $i = j$, forma a **diagonal principal**. Os elementos de uma diagonal podem ser obtidos pela função `diag()`.

```r
A <- matrix(c(2,5,5,3),2,2)
diag(A)
```

```
## [1] 2 3
```

Uma matriz diagonal é caracterizada por ter os elementos $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$. A função `diag()`, além de obter os elementos da diagonal principal, gera uma matriz diagonal. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

pode ser criada pelo código

```
aux <- c(8,2,5)
A<- diag(aux)
A
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    8    0    0
## [2,]    0    2    0
## [3,]    0    0    5
```

A **Matriz identidade** pode ser uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1. A matriz

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pode ser gerada por

```
aux <- rep(1,3)
I <- diag(aux)
I
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    0
## [2,]    0    1    0
## [3,]    0    0    1
```

Observe que $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ para $i = j$.

A **Matriz nula** tem todos os elementos iguais a 0. Por exemplo

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é gerada pela função `matrix()` com o valor 0 (zero) sendo o único para preencher todas as possições da matriz.

```
B <- matrix (0, nrow=2, ncol=3)
B
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    0    0
## [2,]    0    0    0
```

3.2 Transposta de uma matriz

Matriz transposta é o resultado da troca das linhas pelas colunas e denotada por A^T ou A'.

Para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

a sua transposta A' é

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A função `t()` gera a matriz transposta de uma matriz. Observe o código seguinte

```
aux <- c(2,0,2,7,1,0)

A <- matrix (aux,nrow=3,ncol=2)

tranposta_A <- t(A)

A
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    2    7
## [2,]    0    1
## [3,]    2    0
```

```
tranposta_A
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    0    2
## [2,]    7    1    0
```

3.3 Traço de uma matriz

- **Traço de matriz quadrada** é a soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz:

$$Trao(A) = \sum_{i,j} a_{ij} \quad \forall i = j$$

Para

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

os elementos da **diagonal principal** são 7, 8 e 9, logo:

$$Trao(A) = 7 + 8 + 9 = 24$$

O traço de A pode ser obtido por meio das funções `diag()` e `sum()` como abaixo.

```
aux<-c(7,2,3,2,8,4,3,4,9)
A<- matrix(aux,3,3)
sum(diag(A))
```

```
## [1] 24
```

3.4 Determinante de uma matriz

O **Determinante de matriz** é um valor associado a uma matriz quadrada, A, e denotada por $|A|$. A função `det()` calcula o determinante de uma matriz.

```
aux<-c(7,2,3,2,8,4,3,4,9)
A<- matrix(aux,3,3)
det(A)
```

```
## [1] 332
```

A **Matriz singular** é a matriz A cujo determinante é nulo, $|A| = 0$. A matriz B é singular

```
aux<-c(7,2,3,14,4,6,3,4,9)
A<- matrix(aux,3,3)
det(A)
```

```
## [1] 0
```

Propriedades do determinante:

- O determinante de uma matriz quadrada A é igual ao determinante da sua transposta: $|A| = |A'|$;
- Caso exista uma linha ou coluna na matriz igual a zero, o determinante é zero;
- Caso exista duas filas paralelas, iguais ou proporcional, o determinante é zero;
- O determinante do produto de um número real k por uma matriz A é igual ao produto de k elevado a n, onde n é o número de linhas de A, pelo determinante de A: $|k.A| = k^n.|A|$;
- Caso os elementos abaixo ou acima da diagonal principal forem nulos, o determinante será o produto dos elementos da diagonal principal;
- Teorema de Binet: Seja A e B matrizes quadradas de ordem n, o determinante do produto de A por B é igual ao produto dos determinantes de A e B: $|AB| = |A|.|B|$.

3.5 Matriz inversa

A **Matriz inversa** de uma matriz A é representada por A^{-1} é aquela que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

onde I é a matriz identidade. Para uma matriz A ter inversa é necessário e suficiente que seja **quadrada** e **não sigular**, isto é, o determinante é diferente de zero.

Para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

a sua matriz inversa é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Verificando $A^{-1}A = I$

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A função `solve()` é usada para resulver sistemas de equações lineares e em uma de suas chamadas retornar a matriz inversa do seu argumento.

```
A = matrix(c(2,-1,-5,3),2,2)
inv_A = solve(A)
inv_A
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    3    5
## [2,]    1    2
```

para verificar a relaçao entre a sua matriz e a suam matriz inversa

```
A %*% inv_A
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    0
## [2,]    0    1
```

3.6 Operações com matrizes no R

A **Soma ou subtração** de duas matrizes **com as mesmas dimensões** é obtida pela soma/subtração dos elementos correspondentes.

O operador para essas operações são `+` e `-`.

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 8 & 2 & 6 \\ 7 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

```
A <- matrix (c(7,2,3,2,8,4,3,4,9),3,3)
B <- matrix (c(3,8,7,8,2,6,7,6,1),3,3)
A
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    7    2    3
## [2,]    2    8    4
## [3,]    3    4    9
```

```
B
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    3    8    7
## [2,]    8    2    6
## [3,]    7    6    1
```

```
A+B
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]   10   10   10
## [2,]   10   10   10
## [3,]   10   10   10
```

O **Produto por escalar** de uma matriz A por um escalar c é obtida multiplicando cada elemento de A pelo valor de $c \in \mathbf{R}$.

O operador para essa operação `*`.

$$5 \times \begin{bmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 8 & 2 & 6 \\ 7 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 40 & 35 \\ 40 & 10 & 30 \\ 35 & 30 & 5 \end{bmatrix}$$

```
A <- matrix (c(3,8,7,8,2,6,7,6,1),3,3)
A
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    3    8    7
## [2,]    8    2    6
## [3,]    7    6    1
```

```
5*A
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]   15   40   35
## [2,]   40   10   30
## [3,]   35   30    5
```

Na situação quando duas matrizes A e B tem o mesmo número de linhas e colunas o operador `*` executa o produto elemento a elemento.

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 8 & 2 & 6 \\ 7 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 16 & 21 \\ 16 & 64 & 24 \\ 21 & 24 & 9 \end{bmatrix}$$

No R seria

```
A <- matrix(c(7,2,3,2,8,2,3,4,8),3,3)
B <- matrix(c(3,8,7,8,2,6,7,6,1),3,3)
A
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    7    2    3
## [2,]    2    8    4
## [3,]    3    2    8
```

```
B
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    3    8    7
## [2,]    8    2    6
## [3,]    7    6    1
```

```
A*B
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]   21   16   21
## [2,]   16   16   24
## [3,]   21   12    8
```

O **Produto de matrizes** só pode ser realizada caso o número de colunas da matriz que pré-multiplica for igual ao número de linhas da matriz que pós-multiplica. A operação consiste na soma dos produtos de cada elementos da linha da matriz que pré-multiplica pelos respectivos elementos da coluna da matriz que pós-multiplica. O resultado será uma matriz com o número de linhas da que pré-multiplica e com número de colunas das que pós-multiplica.

O operador para essas operações são `%*%`.

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 8 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 60 & 61 \\ 70 & 80 & 62 \end{bmatrix}$$

```
A <- matrix(c(7,2,2,8),2,2)
B <- matrix(c(3,8,8,2,7,6),nrow = 2, ncol =3)
A
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    7    2
## [2,]    2    8
```

```
B
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    3    8    7
## [2,]    8    2    6
```

```
A%*%B
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]   37   60   61
## [2,]   70   32   62
```

Chapter 4

Regressão Linear Múltipla

4.1 Modelo de Regressão Linear Múltipla

Seja a relação linear entre uma variável dependente Y e p variáveis independentes X. Então, o modelo estatístico de uma regressão linear, nos parâmetros, múltipla com p variáveis independentes e um termo aleatório, ϵ, é dado por

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + +\beta_p X_{pi} + \epsilon_i$$

com $i = 1, 2, \ldots, n$. De forma alternativa, tem-se

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j X_{ji} + \epsilon_i$$

.

Uma outra forma de expressar as relações, fazendo $i = 1, 2, \ldots, n$, surgem as equações:

$$Y_1 = \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{21} + \cdots + \beta_p X_{p1} \quad (4.1)$$
$$Y_2 = \beta_0 + \beta_1 X_{12} + \beta_2 X_{22} + \cdots + \beta_p X_{p2} \quad (4.2)$$
$$Y_3 = \beta_0 + \beta_1 X_{13} + \beta_2 X_{23} + \cdots + \beta_p X_{p3} \quad (4.3)$$
$$\vdots \quad (4.4)$$
$$Y_n = \beta_0 + \beta_1 X_{1n} + \beta_2 X_{2n} + \cdots + \beta_p X_{pn} \quad (4.5)$$

Em notação matricial, esse sistema de equações pode ser expressa por

$$Y = X\beta + \epsilon$$

que de forma explícita é

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & & \cdots & & \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_0 \\ \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_p \end{bmatrix}$$

Sendo

- n o número de observações e p a quantidade de variáveis explicativas;
- X uma matriz $n \times (p+1)$;
- Y um vetor $n \times 1$;
- β um vetor $(p+1) \times 1$; e
- ϵ um vetor $n \times 1$.

O problema consiste em obter o modelo ajustado:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \cdots + +\hat{\beta}_p X_{pi}$$

É, para isso, deve-se obter o vetor β. Admita-se as seguintes pressuposições:

1. A variável dependente Y é a função linear das variáveis independentes X.
2. Os valores das variáveis independentes são fixos.
3. A média dos erros é nula, isto é, $E\left(\epsilon_i\right) = 0$.
4. Os erros são homoscedásticos, assim, $V\left(\epsilon_i\right) = \sigma^2$.
5. Os erros são não correlacionados entre si, isto é, $E\left(\epsilon_i \epsilon_j\right) = 0$, para $i \neq j$.
6. Os erros têm distribuição normal.

Considere algumas consequências:

- Combine (4) e (5) para $E\left(\epsilon' \epsilon\right) = I\sigma^2$.
- As pressuposições (1), (2) e (3) são necessárias para demostrar que os estimadores de Mínimos Quadrados são **não tendenciosos**.
- As pressuposições de (1) a (5) permitem demonstrar que tais estimadores são **não tendenciosos** e de **variância mínima**.
- A pressuposição (6) é necessária para construção de teste de hipóteses e de intervalos de confiança para os parâmetros.

4.2 Estimadores dos parâmetros

O Método dos Mínimos Quadrados consiste em adotar como estimativas dos parâmetros os valores que minimiza a soma de quadrados dos desvios.

O modelo $Y = X\beta + \epsilon$ têm $\epsilon = Y - X\beta$, então a soma dos quadrados dos desvios é dada por

$$\begin{aligned} Z &= \epsilon'\epsilon \quad (4.6) \\ &= (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \quad (4.7) \\ &= Y'Y - Y'X\beta - \beta'X'Y + \beta'X'X\beta \quad (4.8) \end{aligned}$$

Como $Y'X\beta = \beta'X'Y$ são iguais, então

$$Z = Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta \quad (4.9)$$

A função Z apresenta seu valor mínimo para β que tornem a diferencial de Z e igualar a 0 (zero).

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = -2(\partial\beta')X'Y + (\partial\beta')X'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X(\partial\beta) = 0$$

Uma vez que $(\partial\beta')X'X\hat{\beta} = \hat{\beta}'X'X(\partial\beta)$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial \beta} &= -2(\partial\beta')X'Y + 2(\partial\beta')X'X\hat{\beta} \quad (4.10) \\ &= 2(\partial\beta')\left[X'X\hat{\beta} - X'Y\right] \quad (4.11) \end{aligned}$$

Assim, para definir $\hat{\beta}$ faça

$$X'X\hat{\beta} - X'Y = 0$$

Logo,

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y.$$

Chapter 5

Ajuste do modelo