Una aproximación al lenguaje de todas las fórmulas booleanas satisfacibles

Raudel Alejando Gómez Molina

Facultad de Matemática y Computación Universidad de La Habana

22 de febrero de 2025

Tutor: MSc. Fernando Raul Rodriguez Flores

Teoría de lenguajes (Conceptos)

• Un alfabeto es un conjunto finito de símbolos

Teoría de lenguajes (Conceptos)

- Un alfabeto es un conjunto finito de símbolos
- Una cadena es una sucesión finita de símbolos del alfabeto

Teoría de lenguajes (Conceptos)

- Un alfabeto es un conjunto finito de símbolos
- Una cadena es una sucesión finita de símbolos del alfabeto
- Un lenguaje es un conjunto finito de cadenas

• Problema de la palabra: una cadena pertenece a un lenguaje

- Problema de la palabra: una cadena pertenece a un lenguaje
- Todo problema se puede reducir a un problema de la palabra

- Problema de la palabra: una cadena pertenece a un lenguaje
- Todo problema se puede reducir a un problema de la palabra
- Todo problema se puede codificar como lenguaje formal

- Problema de la palabra: una cadena pertenece a un lenguaje
- Todo problema se puede reducir a un problema de la palabra
- Todo problema se puede codificar como lenguaje formal
- Existen problemas para los cuales no se conoce una solución eficiente

- Problema de la palabra: una cadena pertenece a un lenguaje
- Todo problema se puede reducir a un problema de la palabra
- Todo problema se puede codificar como lenguaje formal
- Existen problemas para los cuales no se conoce una solución eficiente
- Comprobar si una solución es válida es eficiente (clase NP)

• El SAT es el primer problema demostrado como NP-Completo

- El SAT es el primer problema demostrado como NP-Completo
- Pertenece a la clase NP

- El SAT es el primer problema demostrado como NP-Completo
- Pertenece a la clase NP
- Todo problema en NP puede reducirse a él en tiempo polinomial

- El SAT es el primer problema demostrado como NP-Completo
- Pertenece a la clase NP
- Todo problema en NP puede reducirse a él en tiempo polinomial
- Consiste en determinar si una fórmula booleana es satisfacible

Objetivo

Definir y construir el lenguaje de todas las fórmulas booleanas satisfacibles

Estructura de la presentación

- 1 Codificación de una fórmula booleana en una cadena
- 2 Asignar valores a una fórmula booleana mediante una cadena
- 3 Construcción de L_{S-SAT} mediante una transducción finita
- 4 Gramáticas de concatenación de rango
- 5 Construcción L_{S-SAT} utilizando una RCG
- 6 Recomendaciones

Contenido

- 1 Codificación de una fórmula booleana en una cadena
- 2 Asignar valores a una fórmula booleana mediante una cadena
- \bigcirc Construcción de L_{S-SAT} mediante una transducción finita
- 4 Gramáticas de concatenación de rango
- 6 Recomendaciones

• Toda fórmula booleana tiene una fórmula equivalente en CNF

- Toda fórmula booleana tiene una fórmula equivalente en CNF
- Una CNF es una conjunción de cláusulas

- Toda fórmula booleana tiene una fórmula equivalente en CNF
- Una CNF es una conjunción de cláusulas
- Una cláusula es una disyunción de literales

- Toda fórmula booleana tiene una fórmula equivalente en CNF
- Una CNF es una conjunción de cláusulas
- Una cláusula es una disyunción de literales
- Un literal es una variable booleana o su negación

- Toda fórmula booleana tiene una fórmula equivalente en CNF
- Una CNF es una conjunción de cláusulas
- Una cláusula es una disyunción de literales
- Un literal es una variable booleana o su negación
- Asumimos que las fórmulas booleanas están en CNF

$$x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3$$

$$x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3$$

• x₁ está sin negar en la cláusula

$$x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3$$

- ullet x_1 está sin negar en la cláusula
- x₂ no está en la cláusula

$$x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3$$

- x₁ está sin negar en la cláusula
- x₂ no está en la cláusula
- x₃ está negada en la cláusula

• a: la variable está sin negar en la cláusula

- a: la variable está sin negar en la cláusula
- b: la variable está negada en la cláusula

- a: la variable está sin negar en la cláusula
- b: la variable está negada en la cláusula
- c: la variable no está en la cláusula

- a: la variable está sin negar en la cláusula
- b: la variable está negada en la cláusula
- c: la variable no está en la cláusula

$$x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3 \Leftrightarrow acb$$

• Obtener la codificación de cada cláusula

- Obtener la codificación de cada cláusula
- Establecer un separador para delimitar cada cláusula d

- Obtener la codificación de cada cláusula
- Establecer un separador para delimitar cada cláusula d
- Concatenar cada cláusula seguida del separador d

- Obtener la codificación de cada cláusula
- Establecer un separador para delimitar cada cláusula d
- Concatenar cada cláusula seguida del separador d

$$(x_1) \land (x_1 \lor \neg x_2 \lor x_3) \land (\neg x_2 \lor x_3) \Leftrightarrow accdabadcbad$$

Lenguaje de todas las fórmulas booleanas satisfacibles

• L_{FULL-SAT} lenguaje de todas las fórmulas booleanas en CNF

Lenguaje de todas las fórmulas booleanas satisfacibles

- L_{FULL-SAT} lenguaje de todas las fórmulas booleanas en CNF
- L_{S-SAT} lenguaje de todas las fórmulas booleanas satisfacibles

Contenido

- Codificación de una fórmula booleana en una cadena
- 2 Asignar valores a una fórmula booleana mediante una cadena
- 3 Construcción de L_{S-SAT} mediante una transducción finita
- 4 Gramáticas de concatenación de rango
- 5 Construcción L_{S-SAT} utilizando una RCG
- 6 Recomendaciones

ullet Se tiene una cadena q que representa una cláusula

- Se tiene una cadena q que representa una cláusula
- Se tiene una cadena binaria w que representa una asignación

- Se tiene una cadena q que representa una cláusula
- Se tiene una cadena binaria w que representa una asignación
- Se debe cumplir que |q| = |w|

- Se tiene una cadena q que representa una cláusula
- Se tiene una cadena binaria w que representa una asignación
- Se debe cumplir que |q| = |w|
- Si el *i*-ésimo caracter de q es 1, $x_i = true$

- Se tiene una cadena q que representa una cláusula
- Se tiene una cadena binaria w que representa una asignación
- Se debe cumplir que |q| = |w|
- Si el *i*-ésimo caracter de q es 1, $x_i = true$
- Si el *i*-ésimo caracter de q es 0, $x_i = false$

$$w = 101$$
 $C = x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3 \Leftrightarrow q = acb$

$$w = 101$$
 $C = x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3 \Leftrightarrow q = acb$

• $w_1 = 1 \Rightarrow x_1 = true \ C$ se evalúa positiva

$$w = 101$$
 $C = x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3 \Leftrightarrow q = acb$

- $w_1 = 1 \Rightarrow x_1 = true \ C$ se evalúa positiva
- $w_2 = 0 \Rightarrow x_2 = false C$ se mantiene positiva

$$w = 101$$
 $C = x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3 \Leftrightarrow q = acb$

- $w_1 = 1 \Rightarrow x_1 = true \ C$ se evalúa positiva
- $w_2 = 0 \Rightarrow x_2 = false \ C$ se mantiene positiva
- $w_3 = 1 \Rightarrow x_3 = true \ C$ se mantiene positiva

$$w = 010$$
 $C = x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3 \Leftrightarrow q = acb$

$$w = 010$$
 $C = x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3 \Leftrightarrow q = acb$

• $w_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \text{false } C$ se evalúa negativa



$$w = 010$$
 $C = x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3 \Leftrightarrow q = acb$

- $w_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \text{false } C$ se evalúa negativa
- $w_2 = 1 \Rightarrow x_2 = true \ C$ se mantiene negativa

$$w = 010$$
 $C = x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3 \Leftrightarrow q = acb$

- $w_1 = 0 \Rightarrow x_1 = false \ C$ se evalúa negativa
- $w_2 = 1 \Rightarrow x_2 = true \ C$ se mantiene negativa
- $w_3 = 0 \Rightarrow x_1 = false \ C$ se evalúa positiva

• Se tiene una cadena binaria w

- Se tiene una cadena binaria w
- w representa la asignación de valores para una cláusula

- Se tiene una cadena binaria w
- w representa la asignación de valores para una cláusula
- Si la fórmula booleana F tiene n cláusulas

- Se tiene una cadena binaria w
- w representa la asignación de valores para una cláusula
- Si la fórmula booleana F tiene n cláusulas
- \bullet $(wd)^n$ representa la asignación de variables para F

- Se tiene una cadena binaria w
- w representa la asignación de valores para una cláusula
- Si la fórmula booleana F tiene n cláusulas
- \bullet $(wd)^n$ representa la asignación de variables para F
- r = 101d101d101dy e = accdabadcbad

$$(true) \land (true \lor \neg false \lor true) \land (\neg false \lor true) = true$$

- Se tiene una cadena binaria w
- w representa la asignación de valores para una cláusula
- Si la fórmula booleana F tiene n cláusulas
- $(wd)^n$ representa la asignación de variables para F
- r = 101d101d101dy e = accdabadcbad

$$(\textit{true}) \land (\textit{true} \lor \neg \textit{false} \lor \textit{true}) \land (\neg \textit{false} \lor \textit{true}) = \textit{true}$$

• $L_{0,1,d} = \{(wd)^+ \mid w \in \{0,1\}^+\}$ lenguaje de todas las interpretaciones

Contenido

- Codificación de una fórmula booleana en una cadena
- 2 Asignar valores a una fórmula booleana mediante una cadena
- 3 Construcción de L_{S-SAT} mediante una transducción finita
- 4 Gramáticas de concatenación de rango
- 6 Recomendaciones

• Cadena binaria w generar todas las cláusulas satisfacibles por w

- Cadena binaria w generar todas las cláusulas satisfacibles por w
- ullet Cadena $r \in L_{0,1,d}$ generar todas las cadenas $e \in L_{FULL-SAT}$

- Cadena binaria w generar todas las cláusulas satisfacibles por w
- Cadena $r \in L_{0,1,d}$ generar todas las cadenas $e \in L_{FULL-SAT}$
- e representa una fórmula booleana satisfacible por r

- Cadena binaria w generar todas las cláusulas satisfacibles por w
- Cadena $r \in L_{0,1,d}$ generar todas las cadenas $e \in L_{FULL-SAT}$
- e representa una fórmula booleana satisfacible por r
- Transductor finito (autómata finito que escribe símbolos)

Transductor T_{CLAUSE}

Entrada y Salida

- Cadena binaria w
- Todas las cláusulas satisfacibles por w

Transductor T_{CLAUSE}

Entrada y Salida

- Cadena binaria w
- Todas las cláusulas satisfacibles por w

Estados

- q₀: estado inicial
- q_p: estado positivo (estado de aceptación)
- q_n: estado negativo

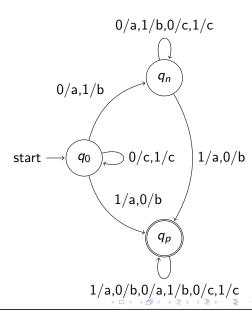
Transductor T_{CLAUSE}

Entrada y Salida

- Cadena binaria w
- Todas las cláusulas satisfacibles por w

Estados

- q₀: estado inicial
- q_p: estado positivo (estado de aceptación)
- q_n: estado negativo



Entrada y Salida

- Cadena $r \in L_{0,1,d}$
- Todas las fórmulas satisfacibles por r

Entrada y Salida

- Cadena $r \in L_{0,1,d}$
- Todas las fórmulas satisfacibles por r

Estados

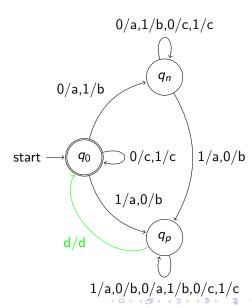
- q₀: estado inicial (estado de aceptación)
- q_p: estado positivo
- q_n: estado negativo

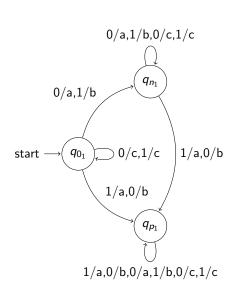
Entrada y Salida

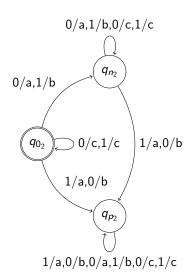
- Cadena $r \in L_{0,1,d}$
- Todas las fórmulas satisfacibles por r

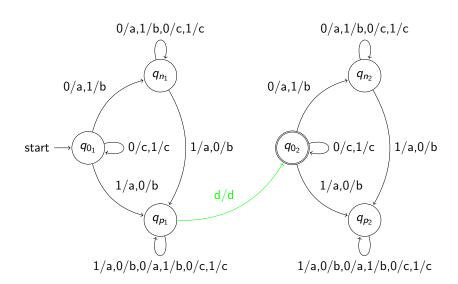
Estados

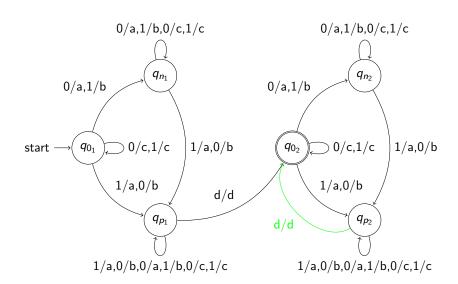
- q₀: estado inicial (estado de aceptación)
- q_p: estado positivo
- q_n: estado negativo











Construcción de L_{S-SAT} mediante T_{SAT}

$$L_{S-SAT} = \{e \mid \exists r \in L_{0,1,d} \text{ y } e \in T_{SAT}(r)\}$$

Construcción de L_{S-SAT} mediante T_{SAT}

$$L_{S-SAT} = \{e \mid \exists r \in L_{0,1,d} \text{ y } e \in T_{SAT}(r)\}$$

ullet Es necesario un formalismo que genere $L_{0,1,d}$

Construcción de L_{S-SAT} mediante T_{SAT}

$$L_{S-SAT} = \{ e \mid \exists r \in L_{0,1,d} \text{ y } e \in T_{SAT}(r) \}$$

- Es necesario un formalismo que genere $L_{0,1,d}$
- Sea cerrado bajo transducción finita

Construcción de L_{S-SAT} mediante T_{SAT}

$$L_{S-SAT} = \{ e \mid \exists r \in L_{0,1,d} \text{ y } e \in T_{SAT}(r) \}$$

- Es necesario un formalismo que genere $L_{0,1,d}$
- Sea cerrado bajo transducción finita
- Resolver el problema de la palabra

• Formalismo que genere $L_{0,1,d}$ ($G_{0,1,d}$)

- Formalismo que genere $L_{0,1,d}$ ($G_{0,1,d}$)
- ullet Si $G_{0,1,d}$ es cerrado bajo transducción finita

- Formalismo que genere $L_{0,1,d}$ ($G_{0,1,d}$)
- Si $G_{0,1,d}$ es cerrado bajo transducción finita
- El problema de la palabra de $G_{0,1,d}$ es NP-Duro

- Formalismo que genere $L_{0,1,d}$ ($G_{0,1,d}$)
- Si $G_{0,1,d}$ es cerrado bajo transducción finita
- El problema de la palabra de $G_{0,1,d}$ es NP-Duro
- Todo formalismo que genere $L_{0,1,d}$ tiene tamaño O(1) (Conjetura)

Contenido

- Codificación de una fórmula booleana en una cadena
- 2 Asignar valores a una fórmula booleana mediante una cadena
- \bigcirc Construcción de L_{S-SAT} mediante una transducción finita
- 4 Gramáticas de concatenación de rango
- ${ t f 5}$ Construcción L_{S-SAT} utilizando una RCG
- 6 Recomendaciones

• Un rango es un intervalo de la cadena

- Un rango es un intervalo de la cadena
- A los no terminales se les llama predicados

- Un rango es un intervalo de la cadena
- A los no terminales se les llama predicados
- Cada predicado tiene una secuencia de argumentos

- Un rango es un intervalo de la cadena
- A los no terminales se les llama predicados
- Cada predicado tiene una secuencia de argumentos
- Cada predicado recibe un vector de cadenas

- Un rango es un intervalo de la cadena
- A los no terminales se les llama predicados
- Cada predicado tiene una secuencia de argumentos
- Cada predicado recibe un vector de cadenas
- Cada argumento está formado por variables y no terminales

- Un rango es un intervalo de la cadena
- A los no terminales se les llama predicados
- Cada predicado tiene una secuencia de argumentos
- Cada predicado recibe un vector de cadenas
- Cada argumento está formado por variables y no terminales

A las producciones se les llama cláusulas

$$A(x_1,...,x_k)\to B_1(y_{1,1},...,y_{1,m_1})...B_n(y_{n,1},...,y_{n,m_n}),$$

- Un rango es un intervalo de la cadena
- A los no terminales se les llama predicados
- Cada predicado tiene una secuencia de argumentos
- Cada predicado recibe un vector de cadenas
- Cada argumento está formado por variables y no terminales

A las producciones se les llama cláusulas

$$A(x_1,...,x_k) \to B_1(y_{1,1},...,y_{1,m_1})...B_n(y_{n,1},...,y_{n,m_n}),$$

Las RCG no generan, por el contrario, reconocen cadenas

Sustitución de rango

Asocia una variable de un argumento a un rango de una cadena respetando la estructura del argumento

Sustitución de rango

Asocia una variable de un argumento a un rango de una cadena respetando la estructura del argumento

$$XYZ = abc$$

Sustitución de rango

Asocia una variable de un argumento a un rango de una cadena respetando la estructura del argumento

$$XYZ = abc$$

Χ	Υ	Z
a	b	С
ab	ε	С
ab	С	ε
abc	ε	ε
ε	ab	С
ε	abc	ε
ε	ε	abc
a	ε	bc
:	:	i
а	bc	ε

Cada cadena del vector del predicado izquierdo se asocia a un argumento

- Cada cadena del vector del predicado izquierdo se asocia a un argumento
- Sustitución de rango para cada argumento

- Cada cadena del vector del predicado izquierdo se asocia a un argumento
- Sustitución de rango para cada argumento
- Se obtienen los valores de las variables

- Cada cadena del vector del predicado izquierdo se asocia a un argumento
- Sustitución de rango para cada argumento
- Se obtienen los valores de las variables
- Se construyen los vectores y se evalúa en los predicados derechos

- Cada cadena del vector del predicado izquierdo se asocia a un argumento
- Sustitución de rango para cada argumento
- Se obtienen los valores de las variables
- Se construyen los vectores y se evalúa en los predicados derechos
- Se repite el mismo proceso en cada uno de los predicados derechos

Reconocer un vector y Problema de la palabra

• Si existe una secuencia de derivaciones y sustituciones de rango

Reconocer un vector y Problema de la palabra

- Si existe una secuencia de derivaciones y sustituciones de rango
- Tales que desde el predicado se deriva en la cadena vacía

Para la mayoría de las RCG el problema de la palabra es polinomial

Reconocer un vector y Problema de la palabra

- Si existe una secuencia de derivaciones y sustituciones de rango
- Tales que desde el predicado se deriva en la cadena vacía

- Para la mayoría de las RCG el problema de la palabra es polinomial
- RCG ambiguas cuyo problema de la palabra no es polinomial

Contenido

- 1 Codificación de una fórmula booleana en una cadena
- 2 Asignar valores a una fórmula booleana mediante una cadena
- 4 Gramáticas de concatenación de rango
- 5 Construcción L_{S-SAT} utilizando una RCG
- 6 Recomendaciones

•
$$S(X) \rightarrow A(X)$$

- $S(X) \rightarrow A(X)$
- $A(XdY) \rightarrow B(Y,X)C(X)$

- $S(X) \rightarrow A(X)$
- $A(XdY) \rightarrow B(Y,X)C(X)$
- $B(XdY, P) \rightarrow B(Y, P)C(X)Eq(X, P)$

- $S(X) \rightarrow A(X)$
- $A(XdY) \rightarrow B(Y,X)C(X)$
- $B(XdY, P) \rightarrow B(Y, P)C(X)Eq(X, P)$
- $B(\varepsilon, P) \to \varepsilon$
- ullet C comprueba que la cadena está formada por 0 y 1

$\overline{L_{0,1,d}}$ como lenguaje de concatenación de rango

- $S(X) \rightarrow A(X)$
- $A(XdY) \rightarrow B(Y,X)C(X)$
- $B(XdY, P) \rightarrow B(Y, P)C(X)Eq(X, P)$
- $B(\varepsilon, P) \to \varepsilon$
- C comprueba que la cadena está formada por 0 y 1
- Eq comprueba que 2 cadenas sean iguales

Las producciones de la gramática G_{S-SAT} se agrupan en 4 grupos (fases):

1 Derivación inicial de la gramática

Las producciones de la gramática G_{S-SAT} se agrupan en 4 grupos (fases):

- 1 Derivación inicial de la gramática
- 2 Todas las posibles interpretaciones (verdadera la primera cláusula)

Las producciones de la gramática G_{S-SAT} se agrupan en 4 grupos (fases):

- 1 Derivación inicial de la gramática
- Todas las posibles interpretaciones (verdadera la primera cláusula)
- La interpretación generada satisface el resto de las cláusulas

Las producciones de la gramática G_{S-SAT} se agrupan en 4 grupos (fases):

- 1 Derivación inicial de la gramática
- Todas las posibles interpretaciones (verdadera la primera cláusula)
- Se La interpretación generada satisface el resto de las cláusulas
- La interpretación generada satisface una cláusula

Producciones de G_{S-SAT}

Producciones agrupadas por fases

Producciones de G_{S-SAT}

Producciones agrupadas por fases

- Predicados A, P (estado positivo) y N (estado negativo)

$$H(_{-}X, Y) \rightarrow J(X, Y_{-})$$

Producciones de G_{S-SAT}

Producciones agrupadas por fases

- Predicados A, P (estado positivo) y N (estado negativo)

$$H(_X, Y) \rightarrow J(X, Y_{-})$$

Producciones de G_{S-SAT}

Producciones agrupadas por fases

- Predicados A, P (estado positivo) y N (estado negativo)

$$H(_X, Y) \rightarrow J(X, Y_{-})$$

- Predicados C, Cp (estado positivo) y Cn estado negativo

$$H(_X,_Y) \rightarrow J(X,Y)$$



Resultados derivados de G_{S-SAT}

•
$$L_{S-SAT} = L_{G_{S-SAT}}$$

Resultados derivados de G_{S-SAT}

- $\bullet \ L_{S-SAT} = L_{G_{S-SAT}}$
- Problema de la palabra G_{S-SAT} no es polinomial

Resultados de G_{S-SAT}

- $L_{S-SAT} = L_{G_{S-SAT}}$
- Problema de la palabra G_{S-SAT} no es polinomial
- No es necesaria la transducción finita de T_{SAT} para construir L_{S-SAT}

Resultados de G_{S-SAT}

- $L_{S-SAT} = L_{G_{S-SAT}}$
- Problema de la palabra G_{S-SAT} no es polinomial
- ullet No es necesaria la transducción finita de T_{SAT} para construir L_{S-SAT}
- Las RCG reconocen todos los problemas de la clase NP

Contenido

- 1 Codificación de una fórmula booleana en una cadena
- 2 Asignar valores a una fórmula booleana mediante una cadena
- \bigcirc Construcción de L_{S-SAT} mediante una transducción finita
- 4 Gramáticas de concatenación de rango
- 6 Recomendaciones

ullet Otro formalismo que genere $L_{0,1,d}$ (cerrado bajo transducción finita)

- Otro formalismo que genere $L_{0,1,d}$ (cerrado bajo transducción finita)
- Todo formalismo que genere $L_{0,1,d}$ tiene un tamaño O(1)

- Otro formalismo que genere $L_{0,1,d}$ (cerrado bajo transducción finita)
- Todo formalismo que genere $L_{0,1,d}$ tiene un tamaño O(1)
- ullet Tipo de formalismo se obtiene al aplicarle el transductor T_{SAT} a $G_{0,1,d}$

- Otro formalismo que genere $L_{0,1,d}$ (cerrado bajo transducción finita)
- Todo formalismo que genere $L_{0,1,d}$ tiene un tamaño O(1)
- ullet Tipo de formalismo se obtiene al aplicarle el transductor T_{SAT} a $G_{0,1,d}$
- Por qué las RCG no sean cerradas bajo transducción finita?

- Otro formalismo que genere $L_{0,1,d}$ (cerrado bajo transducción finita)
- Todo formalismo que genere $L_{0,1,d}$ tiene un tamaño O(1)
- ullet Tipo de formalismo se obtiene al aplicarle el transductor T_{SAT} a $G_{0,1,d}$
- Por qué las RCG no sean cerradas bajo transducción finita?
- RCG que reconozca los SAT solubles en tiempo polinomial (2-SAT)

Una aproximación al lenguaje de todas las fórmulas booleanas satisfacibles

Raudel Alejando Gómez Molina

Facultad de Matemática y Computación Universidad de La Habana

22 de febrero de 2025

Tutor: MSc. Fernando Raul Rodriguez Flores