UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO DE VERAGUAS

MONOGRAFÍA:

EL DESARROLLO HISTÓRICO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA: PRINCIPALES EXPONENTES Y APORTES

PRESENTAN:

RAÚL E. DUTARI D.
Y
OLGA ESTHER BATISTA

1995

TABLA DE CONTENIDOS

NOTA ACLARATORIA SOBRE LA PARTICIPACIÓN DE CADA AUTOR EN LA ELABORACIÓN DE ESTA MONOGRAFÍA

Desde los inicios de la redacción de esta monografía, se trató de que ambos autores escribieran aproximadamente el mismo volumen de material.

Como la documentación existente acerca de los autores de las Edades Moderna y Contemporánea es más abundante que la de los autores de las Edades Antigua y Media, las épocas que tienen mayor cantidad de autores se trataron de manera más superficial (para hablar de todos), en tanto que se trató más en detalle a las épocas donde se presentan pocos autores.

Los temas referentes a la Geometría Analítica previos a: ***"EL DESARROLLO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA GRIEGA DURANTE DE LA EDAD ANTÍGUA Y MEDIA ",*** han sido preparados por Olga Batista.

En tanto, los temas referentes a la Geometría Analítica desde: ***"EL PERFECCIONAMIENTO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA DURANTE LAS EDADES MODERNA Y CONTEMPORÁNEA",*** han sido preparados por Raúl Dutari.

Adicionalmente, siempre existió una estrecha coordinación entre ambos autores, para efectos de lograr continuidad y fluidez en la redacción del trabajo.

LOS AUTORES

INTRODUCCIÓN

Actualmente, la Geometría, vista en su generalidad, es la rama dentro de la Matemática que estudia el espacio, sus características y las figuras que en él se encuentran.

La Geometría Analítica, en particular, es una metodología de trabajo muy poderosa para resolver problemas geométricos. Consiste en la aplicación de las propiedades del Álgebra a un problema geométrico bidimiensional o tridimensional, de modo que podemos asociar directamente los resultados obtenidos algebraicos y geométricos recíprocamente.

Esta forma de enfocar la solución de un problema geométrico nos permite, resolver problemas geométricos usando herramientas algebraicas. Así mismo, podemos obtener nuevos resultados geométricos, de la observación de los resultados algebraicos conocidos.

No obstante, esta metodología de resolver problemas geométricos, como todos los resultados de la matemática, surgió de la evolución histórica del pensamiento matemático. Cada etapa histórica en la evolución del pensamiento fue agregando ideas nuevas al sistema. Esta adición constante de ideas nuevas, en adición a los conceptos previamente conocidos, son lo que le han dado la forma que conocemos actualmente. Evidentemente, esto ha sido obra de muchas generaciones de matemáticos.

En tal sentido, esta monografía pretende ser una pequeña recopilación bibliográfica acerca de cómo ha ocurrido esta evolución. En ella, estudiamos los aportes más significativos que han realizado los matemáticos a este método, empezando desde sus orígenes, y llegando a su concepción actual, con el matemático francés Gaspar Monge.

Como en toda recopilación bibliográfica, es imposible recoger en unas cuantas páginas el desarrollo completo de una ciencia. Por esto, centraremos nuestra discusión en los aportes que han tenido más peso en la concepción y desarrollo del método, sin desmeritar con ello los aportes que muchos matemáticos anónimos realizaron a lo largo de la historia.

1. Observaciones Preliminares.

Los orígenes de la Geometría Analítica como tal, como todos los conceptos matemáticos de importancia, no tuvieron su origen en la Edad Moderna. Sus verdaderos orígenes debemos buscarlos en la antigüedad, en los albores de la historia.

Así, basándonos en los escritos del historiador griego Heródoto, se supone que los primeros que cultivaron la Geometría fueron los egipcios.

2. Principales Exponentes De Geometría Analítica Griega Antes De Cristo.

El estudio de la geometría analítica, propiamente como tal, en el período antes del nacimiento de Cristo, lo podemos enmarcar, sin temor a equivocarnos mucho, dentro de la obra de los matemáticos griegos.

Sin embargo, para recalcar que dicho conocimiento es acumulativo, presentaremos algunos de los pocos resultados aislados que se conocían en épocas anteriores a la cultura helénica.

2.1. Aportes Geométricos De Los Egipcios.

A los egipcios sólo les interesaba la aplicación práctica de los principios matemáticos y científicos a la solución de los problemas de la vida diaria, más que el desarrollo de las ciencias como tal.

En consecuencia, el estudio y aplicación de la Geometría, en Egipto, vinieron a responder a la necesidad práctica de medir y trazar las demarcaciones de las tierras de labranza después de las inundaciones periódicas del Nilo, a fin de fijar equitativamente los impuestos que se debían pagar al Faraón. Relacionado con los mismos hechos, fue en Egipto donde se encontraron los primeros esbozos de relaciones de congruencia.[1]

Sin embargo, la propia idiosincrasia de la cultura egipcia los llevó a un estancamiento relativo del conocimiento, puesto que:

⇒ Su matemática estaba basada principalmente en el cálculo numérico, al punto que se considera que la Geometría egipcia, desde su punto de vista, no era más que una rama de la Aritmética aplicada.

⇒ Las reglas de cálculo casi nunca se justificaban, refiriéndose siempre a casos concretos.

⇒ En todas sus etapas estuvo constituida en torno a la operación de suma lo que le dio un aire primitivo, además de una complicación innecesaria.

⇒ En consecuencia directa, su Álgebra estuvo limitada a la solución de ecuaciones lineales con una incógnita.

Luego, es cierto que los primeros esbozos de la matemática, en general, se dieron en Egipto. Sin embargo, ellos no alcanzaron a superar las etapas iniciales del descubrimiento y se limitaron al uso práctico de los métodos ya

---

1 BOYER, Carl B. Historia de la Matemática. Página 43.

dominados. Su desarrollo geométrico se limitó fundamentalmente pues, a las aplicaciones directas de la geometría en la solución de problemas, a nivel de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

2.2. Aportes Geométricos De Los Mesopotámicos.

Las civilizaciones de la antigua Mesopotamia (sumerios, asirios, etc...), fundamentalmente, aportaron al desarrollo de la Geometría Analítica, el desarrollo de un Álgebra más desarrollada que la egipcia. En tal sentido, ellos trataron de cultivar, más ampliamente que los egipcios, a la Matemática como “ciencia” que ellos (aunque la denominación como tal se atribuye formalmente a los griegos), pues:

⇒ Utilizaron ampliamente la interpolación lineal en la solución de problemas prácticos.

⇒ Resolvieron sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.

⇒ Resolvieron, con gran soltura, ecuaciones cuadráticas y cúbicas, con una incógnita.

⇒ Conocieron y aplicaron ampliamente el Teorema de Pitágoras.

⇒ Lograron cierto grado de consistencia en algunos principios generales, aunque trabajaron con casos particulares, como los griegos.

Sin embargo, la carencia de cantidades negativas les impidió lograr las generalizaciones necesarias para hacer de su matemática, una Ciencia.

Además, nunca distinguieron claramente a las medidas exactas de las aproximadas, al punto que en sus tablas cuneiformes no aparecían los valores de números sexagesimales irregulares. Tampoco parece que se plantearon el problema de cuando un problema era o no resoluble con los medios disponibles. Es más, parece que no tenían idea de lo que era una demostración.

2.3. Aportes A La Geometría Analítica En La Antígua Grecia.

Todas las deficiencias en las matemáticas egipcia y mesopotámica provocan que, al igual que toda la Matemática en general, la Geometría no adquiera carácter científico hasta el siglo VI A. J. C., con la escuela griega de los Pitagóricos. De este modo, los verdaderos orígenes de la Geometría Analítica debemos buscarlos en la antigua Grecia.

En este período, fundamentalmente nos dedicaremos a estudiar los aportes realizados por Menecmo, Apolonio de Perga y Pappus de Alejandría. Estos matemáticos, en cuanto a lo que nos compete, realizaron trabajos, fundamentalmente, en el estudio de las cónicas, y el problema sobre el lugar geométrico determinado por tres o cuatro rectas.

No obstante, trataremos de ubicarnos un tanto más adelante en la Historia, en la Época Heroica de la Matemática, con Platón. La razón de realizar este aparente “salto”, de debe a que fue el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables lo que llevó a la dicotomía entre los conceptos de número y magnitud continua, lo que llevó a buscar cierto grado de formalización en los estudios matemáticos, y obliga a realizar los primeros esfuerzos serios de construir una ciencia formal.

2.3.1. Aportes A La Geometría Analítica En La Época De Platón.

En la época de Platón (429-347 A. C.) la matemática griega había sido objeto de grandes transformaciones: Se sintió la necesidad de substituir con una “Álgebra Geométrica” a la vieja “Álgebra Aritmética” de los babilonios.

En esta Álgebra ya no se podían adicionar segmentos con áreas, o volúmenes con áreas. Es decir, debía existir una homogeneidad estricta entre los elementos en las ecuaciones.

Por otro lado, las ecuaciones canónicas mesopotámicas, $x \times y = A \quad \wedge \quad x \pm y = b,$ debían caracterisarse geométricamente. Adicionalmente, todo debía ser planteado siguiendo un enfoque estrictamente deductivo, tal como el que planteaba Zenón de Elea en sus famosas paradojas.

Podemos observar que si eliminamos y en ambas ecuaciones logramos la conclusión que se debe construir sobre un segmento $b,$ un rectángulo cuya altura desconocida x debe ser tal que el área del rectángulo en cuestión exceda (o le falte, en el caso del signo $-$) al área dada A en el cuadrado del lado $x.$

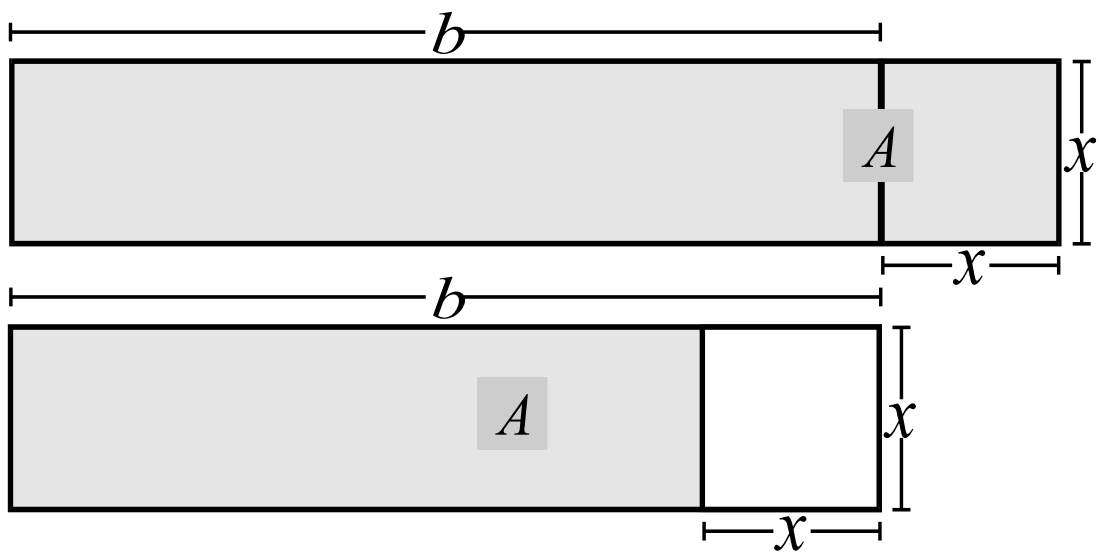
Esto lo podemos expresar analíticamente, de la siguiente manera: si tenemos el sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} x \times y = A & (1) \\ x \pm y = A & (2) \end{cases}$$

y despejamos y en (2) para reemplazar este valor en (1) obtenemos:

$$x(b \pm x) = A$$
$$xb \pm x^2 = A$$

vea la gráfica de este problema, en la Ilustración 1.



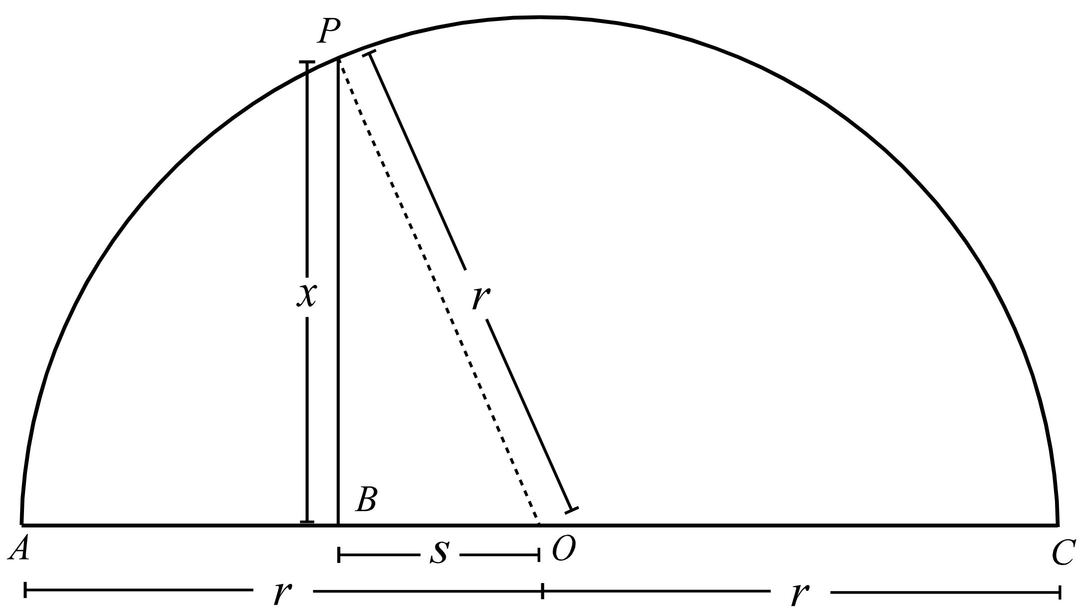
Aplicación de áreas (interpretación geométrica)

Ilustración 1

Es decir, los griegos lograron resolver ecuaciones cuadráticas empleando los procedimientos conocidos como “Aplicación de áreas”. Como ellos lograron estas soluciones marca un hito en la Matemática, pues lograron integrar los conocimientos algebraicos previos de la época con los conocimientos geométricos disponibles.

Sin embargo, la inseguridad que provocó la aparición de las magnitudes inconmensurables los llevó a considerar a las razones como comparación entre áreas, más que en términos de lo que conocemos como proporción. Esta situación fue de gran arrastre en el desarrollo de todo el pensamiento matemático posterior, y no fue superada hasta bien entrado el Renacimiento.

Otro de los problemas que trataron los griegos fue: construir un segmento x de modo que $x^2 = ab$. El método a seguir, para solucionar este problema, se localiza en nuestros textos modernos de Geometría. El mismo, consiste básicamente en lo siguiente: Se marcan, sobre una recta $\overline{ABC}$, 1los segmentos contiguos $\overline{AB} = a$ 2y $\overline{BC} = b$. 3Tomando como diámetro al segmento $\overline{AC}$, 4se construye una semicircunferencia con centro en O. Luego, desde el punto B se levanta el segmento $\overline{BP}$ 5perpendicular a $\overline{AC}$. El segmento 6 $\overline{BP}$ es la solución buscada. 7Vea la gráfica del problema en la Ilustración 2.



Cálculo geométrico de la raíz cuadrada

Ilustración 2

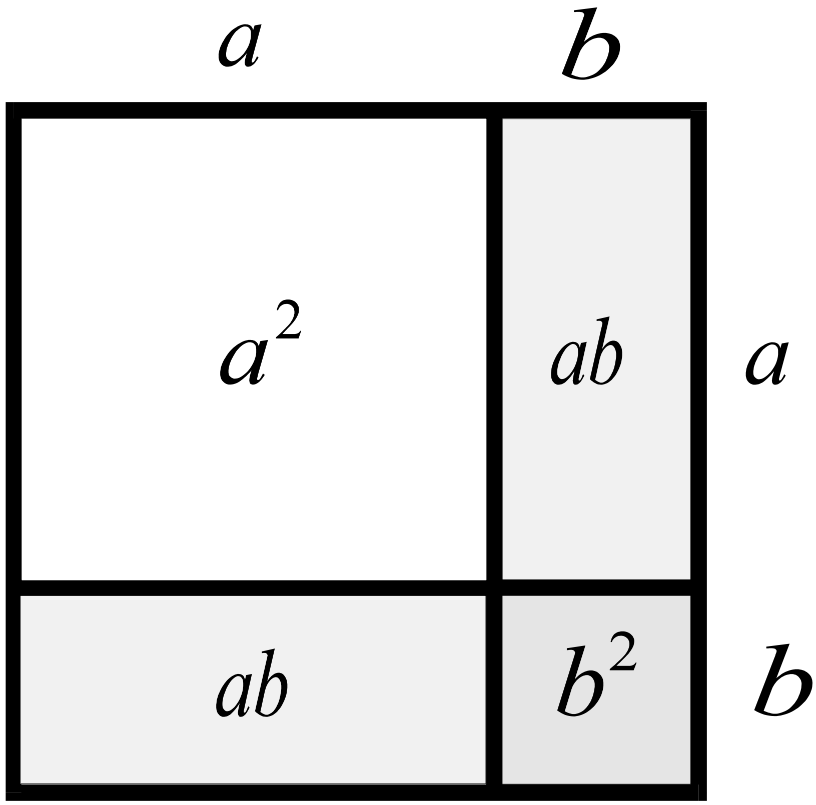
Es interesante señalar que la demostración que dará Euclides de este resultado, en un futuro no muy lejano, hace uso de áreas y no de proporciones. Esto, debido a la desconfianza que había surgido sobre el uso de las proporciones, frente a las aparentes contradicciones que presentaba el descubrimiento de las cantidades inconmensurables. En ella, resulta interesante observar que si hacemos:

$\overline{PO} = \overline{OC} = \overline{OA} = r$ Ù $\overline{BO} = s;$

entonces, lo que dice Euclides, esencialmente, es que:

$$x^2 = r^2 - s^2$$
$$x^2 = (r + s)(r - s)$$
$$x^2 = (\overline{AB})(\overline{BC})$$
$$x^2 = ab$$

A cualquier lector moderno le puede parecer que el álgebra geométrica de los griegos era excesivamente difícil y artificial, frente a los resultados que se obtenían de ella. Sin embargo, se especula que los estudiosos que la manejaron fueron muy diestros en su uso, de modo que la aplicaban cómodamente en la solución y planteamiento de problemas. Además, hay situaciones que, en la actualidad, pueden ser visualizadas con mayor facilidad utilizando este planteamiento, frente a nuestros enfoques abstractos tradicionales. Por ejemplo, la identidad universalmente conocida en matemáticas, dada por: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ se representa, planteada bajo el álgebra geométrica en la Ilustración 3:



Interpretación geométrica del cuadrado de la suma

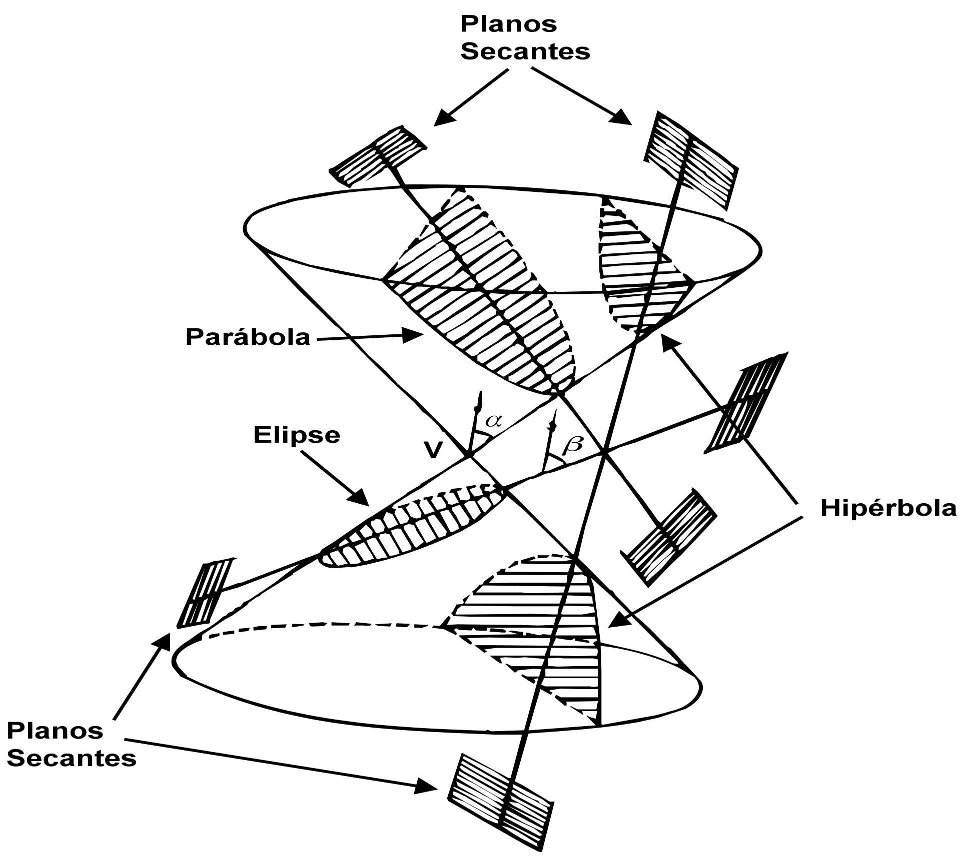
Ilustración 3

Otras propiedades algebraicas, tales como la distributividad de la suma respecto al producto, así como la asociatividad de la suma, son fácilmente visualizables aplicando los conceptos del álgebra geométrica.

De este modo, los griegos en la época de Platón eran capaces de calcular raíces cuadradas aplicando métodos geométricos. Luego la solución de ecuaciones cuadráticas era posible de realizar en dicha época. El Álgebra Geométrica fue tratada completamente en los Elementos de Euclides.

2.3.2. Menecmo Y El Descubrimiento De Las Cónicas.

A Menecmo se le considera como el descubridor de las curvas que posteriormente serían conocidas como Elipse, Parábola e Hipérbola, es decir, de las “Cónicas”. Dichas figuras son obtenidas, fundamentalmente, al cortar una superficie cónica por un plano que no pase por el vértice del cono (vea la Ilustración 4).



Secciones cónicas generadas de un cilindro de revolución (caso no degenerado)

Ilustración 4

Él fue el descubridor de que esas curvas satisfacen la condición que permite obtener la solución al problema de la duplicación del cubo, es decir, que los puntos (x, y) que forman parte de estos lugares geométricos hacen cierta la proporción continua:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

A través, del estudio de estas y otras propiedades, podemos establecer que el material manejado por Menecmo muestra una similitud con la aplicación de sistemas de coordenadas, al punto que ciertos historiadores afirmaron que conocía, en cierta forma, la Geometría Analítica.

Esta opinión es difícilmente defendible, ya que Menecmo, en realidad, no podía percatarse de que una ecuación arbitraria en dos variables determina a una curva. Tal conocimiento tendría que esperar más tiempo para concretarse.

Lo que es cierto, es que Menecmo, no sospechaba la gran cantidad de propiedades que, en el futuro, se descubrirían en sus curvas.

2.3.3. Apolonio De Perga Y El Avance Del Estudio De Las Cónicas.

Apolonio fue una de las grandes figuras de todos los tiempos en la Matemática, pues seis de sus obras fueron incluidas junto con un par de tratados de los más avanzados de Euclides (que se han perdido) en una colección conocida como el Tesoro del análisis. El mismo estaba formando en gran parte por obras de Apolonio, y debió incluir, por tanto, mucho material que ahora calificaríamos como Geometría Analítica propiamente dicha. No en balde, Apolonio, más que Euclides, fue en la antigüedad el Gran Geómetra.

Sin embargo, a partir de los relatos dados por Pappus, podemos hacernos una idea mas o menos precisa del contenido de las obras perdidas de Apolonio. A continuación, haremos una breve descripción del contenido de éstas:

En Lugares Planos, considera dos lugares geométricos, a saber: El lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia entre los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos es constante, es una recta perpendicular a la que determinan estos dos puntos; y el lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a dos puntos fijos es constante (y distinta de uno) es una circunferencia.

En Secciones de una Razón Dada, considera diversos casos de un problema general: dadas dos rectas y un punto sobre cada una de ellas, trazar por un tercer punto dado, una recta que corte a las anteriores en segmentos (medidos sobre ellas desde los respectivos puntos dados) que estén en una razón dada. Este problema equivale a resolver una ecuación cuadrática del tipo $ax - x^2 = bc.$

En Secciones en un Área, considera un problema que es análogo al anterior, salvo que se pide que los segmentos determinados por las intersecciones formen un rectángulo equivalente a otro, y no que esté en una razón dada. Lo cual conduce a una ecuación del tipo $ax + x^2 = bc.$

Finalmente, en Secciones determinadas, trata lo que actualmente consideramos como “Geometría Analítica” de una dimensión. Consideraba un problema, formulado en forma geométrica del análisis algebraico de los griegos. Dados cuatro puntos $A, B, C, D,$ sobre una recta, $L,$ determinar un quinto punto P sobre ella, tal que el rectángulo construido sobre $\overline{AP}$ Ù $\overline{CP}$ esté en una razón dada con el rectángulo construido sobre $\overline{BP}$ Ù $\overline{DP}$. El problema se reduce fácilmente a la resolución de una ecuación cuadrática.

Apolonio resolvió todos estos problemas de manera exhaustiva, incluyendo los casos límites que se presentan y el número de soluciones presentes.

Sólo dos de los tratados escritos por Apolonio han sobrevivido en su mayor parte: Secciones en una Razón Dada y Las Cónicas. Esta última es una obra famosa de la que sólo se conserva en el original griego los cuatro primeros de sus ocho libros. En 1710 se tradujo al latín, los siete primeros libros, y desde entonces a muchas lenguas modernas.

En dicha obra hallamos los siguientes planteamientos:

⇒ De un cono único se pueden obtenerse los tres tipos de secciones cónicas, con sólo variar la inclinación del plano que lo corta.

⇒ El lugar de un punto móvil cuyas distancias a dos puntos fijos dan una suma o una diferencia constante, es una elipse o una hipérbola, que tiene como focos esos puntos fijos.

⇒ El plano que corta al cono que genera a una cónica no necesariamente debe ser perpendicular a una generatriz del cono.

⇒ El cono que genera a una cónica no necesariamente es recto (el eje es perpendicular al plano de su base circular), sino que puede ser circular, oblicuo o escaleno.

2.3.3.1. Origen De Los Nombres Dados A Las Secciones Cónicas.

Durante un siglo y medio aproximadamente las secciones cónicas no tuvieron nombre específico más que la forma de cómo habían sido descubiertas: secciones de un cono agudo (oxitoma), secciones de un cono rectángulo (ortotoma) y secciones de un cono obtuso (amblitoma).

Sin embargo, los nombres de parábola, elipse e hipérbola eran empleados desde los tiempos de los pitagóricos, por ellos, para designar si la aplicación de una superficie plana era realizada con igualdad (parábola), deficiencia (elipse), o exceso (hipérbola).

Arquímedes, por su parte, también utilizó estos nombres, aunque parece que simultáneamente usó el nombre de parábola como sinónimo para una sección de un cono rectángulo.

Sin embargo, fue Apolonio, posiblemente siguiendo una sugerencia de Arquímedes, quien introdujo por primera vez los nombres de elipse e hipérbola.

2.3.3.2. Características Básicas De Las Secciones Cónicas Conocidas Por Apolonio.

Los geómetras griegos llamaban “Lugar Sólido” al que contenía a todas las secciones cónicas. Este nombre venía sugerido sin duda por el hecho de que las cónicas no se definían como lugares geométricos de puntos del plano que satisfacen una condición determinada, tal como suele hacerse hoy, sino que se describían de una manera estereométrica como secciones de una figura tridimensional cortadas por un plano.

Apolonio, al igual que sus predecesores, obtenía las curvas a partir de un cono en el espacio tridimensional. Pero él consiguió prescindir del cono lo más pronto posible. A partir del cono dedujo una propiedad plana fundamental o síntoma de la sección, que viene a ser una condición necesaria y suficiente para que un punto esté situado sobre una curva, y desde entonces abandonó ya el cono y procedió a estudiar dicha curva por métodos planimétricos exclusivamente, basándose en esta propiedad.

Dentro de estos estudios, Apolonio obtuvo las siguientes relaciones básicas para las cónicas:

$$\begin{cases} y^2 = lx & (1) \\ \dfrac{(x \mp a)^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & (2) \\ y^2 = lx \mp \dfrac{b^2x^2}{a^2} & (3) \end{cases}$$

Estos resultados los obtuvo a partir de consideraciones estereométricas sobre el cono, además, se encargó de deducir las propiedades de las mismas, sin hacer referencia explícita al cono. Así en su Libro I, trata la teoría de los diámetros conjugados en una cónica.

Apolonio nos demuestra que los puntos medios del conjunto de las cuerdas paralelas a un diámetro de una elipse o una hipérbola están situados sobre un segundo diámetro, y denomina a ambos diámetros conjugados. De hecho, mientras que hoy se suele referir una cónica a un par de rectas perpendiculares como eje, Apolonio utiliza sistemáticamente un par de diámetros conjugados como equivalentes de un sistema de coordenadas oblicuas.

Este sistema de diámetros conjugados constituye un marco de referencia extraordinariamente útil para referir a él una cónica, ya que, como demostró Apolonio, si se traza una recta por un extremo de un diámetro de una elipse o una hipérbola, paralela al diámetro conjugado del primero, entonces esta recta tocará a la cónica en el punto en cuestión y no será posible trazar otra recta entre ella y la cónica; es decir la recta será tangente a la cónica.

En su Libro I se presentan algunas proposiciones que equivalen a la demostración de que la ecuación de la cónica conserva su forma al hacer una transformación de coordenadas de un sistema basado en la tangente y el diámetro que pasan por un punto P de la cónica, a otro sistema basado en la tangente y el diámetro correspondiente a un segundo punto Q sobre la misma cónica, junto con la demostración de que es posible referir la cónica a uno cualquiera de tales sistemas de ejes.

2.3.3.3. Limitaciones En El Estudio De Las Cónicas De Apolonio.

Frente a todos estos logros sorprendentes para la época, resulta intrigante el porqué Apolonio de Perga, uno de los más grandes geómetras de la antigüedad, no consiguió desarrollar a cabalidad la geometría analítica.

Este hecho se debió probablemente más a una pobreza en el número de curvas que de pensamientos; los métodos generales no son ni muy necesarios ni muy útiles cuando los problemas se refieren simplemente a un número limitado de casos particulares.

También hay que tener presente que los inventores modernos de la geometría analítica tenían a sus disposición toda el álgebra renacentista, mientras que Apolonio tuvo que trabajar con el álgebra geométrica, mucho más rigurosa, pero a la vez más incómoda de manejar.

2.3.3.4. Aplicación De Los Sistemas Referenciales En El Trabajo De Apolonio.

Los métodos empleados por Apolonio en las Cónicas son semejantes en muchos aspectos al planteamiento analítico moderno, de allí que su obra se considere como una anticipación a la geometría analítica de Descartes en unos 1800 años. El uso de unas rectas de referencia en general y de un diámetro y una tangente en uno de sus extremos en particular no difiere esencialmente del uso de un sistema de coordenadas rectangular u oblicuo de empleo común.

Apolonio consideró que las distancias medidas a lo largo del diámetro a partir del punto de tangencia son las abscisas, y los segmentos paralelos a la tangente, interceptados por el diámetro y la curva, son las ordenadas. Las relaciones dadas por él entre la abscisa y la ordenada correspondiente no son otra cosa que formas retóricas de las ecuaciones analíticas de las curvas consideradas.

Sin embargo en el Álgebra Geométrica de los griegos, no había lugar para las magnitudes negativas y lo que podríamos llamar un sistema de coordenadas venía siempre superpuesto a una curva dada para estudiar sus propiedades.

Es decir, en la Geometría Antigua no se presentó ningún sistema de coordenadas con el fin de representar gráficamente una ecuación o relación expresada de manera simbólica o retórica. Podemos decir que en la geometría griega las ecuaciones vienen determinadas por las curvas, pero no que las curvas vengan determinadas por ecuaciones.

Las coordenadas, variables y ecuaciones fueron conceptos derivados de una situación geométrica concreta y se puede asegurar que desde el punto de vista griego no era suficiente en absoluto para definir curvas el darlas de manera abstracta como lugares geométricos de los puntos que satisfacen condiciones dadas sobre sus coordenadas.

Para garantizar que un lugar geométrico era realmente una curva, los antiguos griegos consideraban necesario o bien producirla de una manera estereométrica como una sección de un sólido o describir su construcción de una manera cinemática.

La forma particular de definir y estudiar las curvas por parte de los griegos presenta un aspecto bastante desfavorable si se compara con la amplitud y flexibilidad del tratamiento moderno. Ellos ignoraban el papel que jugaban una gran variedad de curvas en el mundo que los rodeaba. Ni explotaban a fondo los dos métodos para definir curvas que ellos mismos descubrieron; tanto el método cinemático como el de las secciones planas de otras superficies que permiten un amplio margen de generalizaciones, y sin embargo apenas estudiaron, los griegos, una docena de curvas.

Luego, la idea general de una ecuación en cantidades indeterminadas fue ajena al pensamiento griego, y precisamente fueron las limitaciones en la notación algebraica las que obstaculizaron, más que ninguna otra causa, el que los griegos llegaran a conseguir una geometría analítica propiamente dicha.

3. Geometría Analítica Al Final De La Edad Antigua Y En La Edad Media Y El Problema Del Lugar Geométrico Determinado Por Tres O Cuatro Rectas.

El lugar geométrico determinado por tres o cuatro rectas jugó un papel muy importante a lo largo de la historia de la matemática desde Euclides hasta Newton. En problema en mención consiste en:

Dadas tres (o cuatro) rectas en un plano, hallar el lugar geométrico de un punto P que se mueve de tal manera que el cuadrado de la distancia de P a una de estas tres rectas es proporcional al producto de las distancias a las otras dos (o en el caso de cuatro rectas, el producto de las distancias a dos de estas es proporcional al producto de la distancia a las otras dos), midiendo siempre estas distancias en direcciones tales que formen ángulos dados con las líneas correspondientes.

Si utilizamos los métodos analíticos modernos, incluyendo la forma normal de la ecuación de una recta, entonces es fácil demostrar que el lugar geométrico buscado es una sección cónica, real o imaginaria, reducible o irreducible. Si por ejemplo en el caso del lugar geométrico correspondiente a tres rectas, llamamos a las rectas:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3 = 0 \end{cases}$$

en tanto que los ángulos según los cuales se deben medir las distancias son θ_1, θ_2, θ_3, entonces el lugar geométrico del punto $P(x, y)$ vendrá dado por la ecuación:

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\left(A_1^2 + B_1^2\right)^2 \operatorname{sen}^2 \theta_1} = K \frac{\left(A_2 x + B_2 y + C_2\right)\left(A_3 x + B_3 y + C_3\right)}{\left[\sqrt{A_2^2 + B_2^2} \operatorname{sen} \theta_2\right]\left[\sqrt{A_3^2 + B_3^2} \operatorname{sen} \theta_3\right]}$$

la cual representa una sección cónica, pues es una ecuación de segundo grado en x U y. Nuestra solución moderna no hace justicia a la dada por Apolonio, quien demuestra más de 50 proposiciones de este tipo por métodos sintéticos que lo conducen finalmente al lugar geométrico buscado.

Hay que resaltar que los únicos métodos reconocidos por los antiguos para definir curvas planas eran:

- ⇒ La definición cinemática en la que se considera un punto moviéndose sometido a dos movimientos simultáneos.

- ⇒ La sección cortada por un plano de una cierta superficie geométrica tal como un cono, una esfera o un cilindro.

Lo cierto es que la geometría griega se dedicó básicamente al estudio de las curvas planas y a una cantidad muy limitada de éstas.

3.1. Pappus De Alejandría Y La Extensión Del Problema Sobre El Lugar Geométrico Determinado Por Tres O Cuatro Rectas.

Durante el reinado de Dioclesiano (284-305) vivió en Alejandría un sabio a quien animaba el mismo espíritu que había movido a Euclides, Arquímedes y Apolonio: nos referimos a Pappus. Es importante resaltar que Pappus propone la generalización de un problema más antiguo, que implica la consideración de infinitos tipos nuevos de curvas planas.

Él escribió un libro hacia el año 320 con el título de Colección Matemática, que contiene información histórica interesante e importantes resultados nuevos. Esta colección consta de ocho libros. En el libro VII, de gran importancia desde el punto de vista de la historia de la matemática, Pappus siguiendo su tendencia a las generalizaciones, estuvo cerca del principio fundamental de la geometría analítica.

Él llegó a esta situación al estudiar el “Problema de Pappus”, pero su planteamiento original relativo a tres o cuatro rectas parece remontarse a la época de Euclides y la primera vez que lo vemos tratado como el lugar geométrico de las tres o cuatro rectas es en la obra de Apolonio. Euclides debió identificar el lugar geométrico sólo para algunos casos especiales, mientras que Apolonio parece haber dado una solución completa, en una obra que se ha perdido. Sin embargo, Pappus quiso dar a entender que él fue el primero que demostró que el lugar geométrico buscado es una sección cónica en todos los casos.

Importante para nosotros es que Pappus considera un problema análogo, pero para más de cuatro rectas. Para seis rectas en el plano, por ejemplo, reconoce que queda determinada una curva por la condición de que el producto de las distancias de un punto P a tres de las rectas esté en una razón fija al producto de sus distancias a las otras tres rectas; en este caso, la curva queda definida por el hecho de que un sólido está en una razón fija a otro sólido.

Pappus dudaba en estudiar los casos en que aparecen más de seis rectas. Si hubiera explorado esta tentativa un poco más lejos, podría haberse anticipado a Descartes en dar una clasificación general y una teoría de curvas que fuera mucho más allá que la distinción clásica entre los lugares planos, sólidos y lineales.

Pero el solo hecho de reconocer que, independientemente del número de rectas que aparezcan en el problema de Pappus, queda determinada una curva concreta, es sin dada la observación más general sobre lugares geométricos de toda la geometría antigua.

Pappus no hizo un estudio más profundo de estos lugares geométricos, se limitó a hacer notar con sorpresa que nadie había hecho una síntesis de este problema para ningún caso más allá de las cuatro rectas. Lo que se necesitaba para llevar a cabo la siguiente etapa natural de este proceso, era la presencia de un matemático interesado igualmente por el álgebra como por la geometría. Sin embargo, el desarrollo de la Matemática debió esperar la aparición de Descartes, que fue atraído precisamente por el problema de Pappus, lo que le sirvió de punto de partida y a la vez de palanca para invención de la Geometría Analítica moderna.

3.2. Nicole Oresme Y El Planteamiento Gráfico De Los Problemas.

Nicole Oresme (¿1323?-1382) fue obispo de Lisieux, Francia. En su obra: Tractatus de latitudinibus formarum presentó los primeros indicios de los que sería posteriormente, el “Principio fundamental de la Geometría Analítica”.

A Oresme, se le atribuye una idea brillante, antes quizá del año 1361. ¿Por qué no hacer un dibujo o una gráfica de modo que podamos ver la manera en que varían las cosas?. Observamos así una sugerencia primitiva de lo que ahora llamamos la representación gráfica de funciones; y lo hizo de un modo muy parecido a nuestra Geometría Analítica. Él denominó su abscisa y ordenada como **longitudo** y **latidudo,** además, su sistema de coordenadas puede ser considerado como similar al nuestro, ya que dichas indeterminadas las consideraba ubicadas de modo perpendicular entre sí.

El uso de las coordenadas no era nuevo, ya que Apolonio y otros matemáticos anteriores a él habían usado lo que puede llamarse “Sistema de Coordenadas Oblicuos”, pero lo que si era completamente nuevo era la representación gráfica de una cantidad variable.

Oresme llegó incluso a sugerir una extensión a tres dimensiones en la que se representaba una función de dos variables independientes como un volumen e incluso da una idea de lo que sería una geometría en cuatro dimensiones.

Lo que en realidad se perseguía era una geometría de tipo algebraico en vez de su representación gráfica, pero dificultades técnicas de diversos tipos impidieron el desarrollo europeo durante todo el período medieval.

4. El Perfeccionamiento De La Geometría Analítica Durante Las Edades Moderna Y Contemporánea.

Pappus, hacia el 320, había tratado de impulsar un renacimiento de la geometría, pero el hecho es que no encontró ningún sucesor capacitado para cultivar la geometría pura en Grecia.

En la China y la India, por otro lado, no hubo nunca un verdadero interés por la Geometría que sobrepasara los problemas elementales de medición. Los árabes en cambio si mostraron aprecio por el razonamiento deductivo, utilizando argumentos geométricos en su Álgebra.

En la Europa medieval, hubo una doble tendencia a aproximar el Álgebra ya la Geometría. Siguiendo esta tradición medieval los libros IV y VI del Álgebra de Bombelli estaban llenos de problemas geométricos resueltos de modo algebraico. Esto, prácticamente es Geometría Analítica.

4.1. Johannes Werner Y El Redescubrimiento De La Geometría Griega Clásica.

Algunas contribuciones del siglo XVI en la geometría se deben a Johannes Werner (1468-1522), él estaba interesado en la duplicación del cubo, se centró en el estudio de la parábola y la hipérbola, obteniendo las ecuaciones planas usuales de manera estereométrica a partir del cono, al igual que habían hecho sus lejanos predecesores griegos.

Werner marca una renovación en el interés por estas curvas casi por primera vez desde Pappus; a pesar de que la obra, Las Cónicas, de Apolonio era casi completamente desconocida en su época.

4.2. Maurolico-Federico Commandino Y Las Traducciones-Reconstrucciones De Los Clásicos Griegos.

Durante el Renacimiento consiguió mantenerse latente un interés por la obras clásicas de la antigüedad. Maurolico, clérigo de ascendencia griega que nació, vivió, y murió en Sicilia, fue un erudito geómetra que intento revivir el interés por la antigua matemática griega. Durante la primera mitad del siglo XVI la geometría que se usaba dependía de las propiedades más elementales que aparecen en la geometría de Euclides, y aunque Werner era una excepción de esta regla, solo unos pocos más estaban familiarizados con la Geometría de

Arquímedes, de Apolonio y de Pappus. La razón era muy sencilla: las traducciones latinas de estos matemáticos no estuvieron disponibles hasta mediados de siglo. En este proceso de traducción se destacan, Maurolico y el sabio italiano Federico Commandino.

Los cuatro libros de Las Cónicas de Apolonio escritos en griego, habían sido publicados en Venecia en 1537 traducidos al latín. La traducción de Maurolico hecha ya en 1548, se publicó en 1654, en cambio la traducción hecho par Commandino se imprimió en Bolonia en 1566. La Colección Matemática de Pappus había sido prácticamente desconocida para los árabes lo mismo que para los europeos medievales, pero fue traducida por Commandino e imprimida en 1588. Maurolico conocía bien la importancia de la geometría antigua que estaba haciendo circular.

Así a Maurolico se le consideraba como uno de los representantes de la reconstrucción de obras perdidas en general y de los cuatro últimos libros de las cónicas en particular, que constituyó uno de los estímulos principales para la geometría anterior a Descartes. Durante el intervalo de tiempo transcurrido entre la muerte de Maurolico en 1575 y la publicación de La geometría por Descartes en 1637, la matemática se desarrolló siguiendo varias direcciones no puramente geométricas.

4.3. Renato Descartes.

Matemático y filósofo francés, nación en 1596 y murió en 1650, fue quien aplicó el Álgebra a la Geometría, creando así la Geometría Analítica.

Partiendo de la impresión errónea de que los antiguos no habían hallado solución al problema de las tres y cuatro rectas, consiguió él resolverlo sin dificultad. Este hecho le hizo darse cuenta de la potencia y generalidad de su punto de vista y en consecuencia decidió escribir su famosa obra La Geometría, cuya lectura permitió conocer la Geometría Analítica a sus contemporáneos.

Cualquier estudiante de Álgebra actual puede leerla sin encontrarse con dificultad la notación. Sólo encontraremos en toda su obra, un único símbolo arcaico, que es el:

ꝏ

en vez del familiar “=“ para la igualdad. Usó las primeras letras del alfabeto para los parámetros y constantes, y las últimas para las incógnitas o variables y los símbolos germánicos + Ù -, lo que al combinar todos estos elementos da una notación semejante a la nuestra, debido obviamente a que ésta se deduce de aquella. Se diferencia de nosotros que consideramos los parámetros e incógnitas como números en que él los considera como segmentos.

Los objetivos perseguidos por Descartes eran:

- ⇒ Liberar a la Geometría en lo posible del uso de figuras, a través de los métodos algebraicos.

- ⇒ Darle un significado concreto a las operaciones del álgebra por medio de su interpretación geométrica.

Su manera de proceder en su obra era de comenzar con el estudio de un problema puramente geométrico para traducirlo al lenguaje de una ecuación algebraica, luego de simplificar esta ecuación lo más posible, resolverla de una manera geométrica.

Descartes sabía que Pappus no había estudiado los lugares geométricos cuando el número de rectas ascendía a seis, ocho o más, por tanto se ocupó de la generalización de este problema. Así nos dice que para aquellos problemas que conducían a ecuaciones de grado $2n$, se podía obtener su construcción introduciendo una curva auxiliar de grado n.

Sin embargo, ahora, resulta evidente de la teoría de eliminación algebraica que las curvas de grado n bastan para resolver no sólo ecuaciones de grado $2n$, sino hasta las de grado n^2. Tenemos que Descartes no se interesó por la forma de estos lugares geométricos, lo que lo tenía obsesionado eran los métodos necesarios para construir geométricamente las ordenadas correspondientes a las abscisas dadas.

La totalidad de su obra está dedicada a la aplicación sistemática y completa del Álgebra a la Geometría y viceversa, pero en ella hay poco que se parezca a lo que hoy consideramos como Geometría Analítica propiamente dicha.

Así, no hay nada sistemático acerca del uso de coordenadas rectangulares, ya que toma como dado un sistema de coordenadas oblicuas para el problema que estudia. No hay fórmula de distancia, pendiente, división de segmentos en partes iguales, ángulo entre dos rectas u otro tipo de material introductorio.

Además, tomó poco interés en la representación de curvas. Nunca llegó a entender plenamente el significado de coordenadas negativas. Reconocía que las coordenadas estaban dirigidas en sentido opuesto al positivo, pero nunca hizo uso de abscisas negativas.

El principio fundamental de la Geometría Analítica, que consiste en el descubrimiento de que ecuaciones indeterminadas en dos incógnitas corresponden a lugares geométricos, no aparece hasta el libro II de La Geometría, y aún sólo en forma accidental.

Descartes presenta condiciones sobre los coeficientes de las ecuaciones en las secciones cónicas, para que representen una parábola, una elipse o una hipérbola.

La omisión de muchos detalles elementales hizo la obra extremadamente difícil de seguir, él intenta justificar esto señalando que lo hizo con el objeto de no privar al lector de descubrirlos.

A pesar de su exposición inadecuada es el libro II de La Geometría el que más se aproxima a la concepción moderna de la geometría analítica del espacio tridimensional.

El pensamiento de Descartes se hallaba muy alejado de las consideraciones de tipo práctico que hoy se suelen asociar al uso de coordenadas. El no toma un sistema de ejes coordenados para localizar en él la posición de determinados puntos, ni tampoco considera a sus coordenadas como parejas de números; en este respecto el nombre de “Producto Cartesiano” (debido al matemático francés M. Fréchet) tan extendido actualmente, resulta un error.

Ahora, la aparente complejidad innecesaria del trabajo realizado por Descartes tuvo su razón, pues él se limitó a trazar a los matemáticos cual era el camino a recorrer. En su obra no hay el orden y desarrollo sistemático que caracteriza la labor del matemático, sólo están las ideas del hombre que no sigue la marcha de los seres humanos normales.

4.4. Pierre De Fermat.

Nació en 1601 y murió en 1665. En 1629 comenzó a hacer descubrimientos matemáticos de gran importancia. En 1636 descubrió un principio fundamental de la Geometría Analítica:

> *"Siempre que en una ecuación final aparezcan dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva"*[2].

En Fermat, al igual que en Descartes, el uso de las coordenadas no surge de consideraciones de tipo práctico, ni de representación gráfica de funciones medievales, sino que aparece al aplicar el Álgebra renacentista a problemas geométricos de la antigüedad griega.

Sin embargo el punto de vista de Fermat no era el mismo que el de Descartes, pues Fermat ponía énfasis en la representación gráfica de las soluciones de ecuaciones indeterminadas, en vez de las de ecuaciones algebraicas determinadas.

Representa, en primer lugar, el caso más sencillo de una ecuación lineal $Dx = By$, semirrecta con origen en el de coordenadas dado que él al igual que Descartes no utilizaron abscisas negativas. Luego la ecuación $ax + by = c^2$ representa un segmento rectilíneo en el primer cuadrante con extremos en los ejes coordenados.

---

2 BOYER, Carl B. Historia de la Matemática. Página 437.

Demuestra que las ecuaciones de segundo grado del tipo

$$\begin{cases} a^2 + x^2 = by \\ x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c^2 \\ a^2 - x^2 = ky^2 \\ a^2 + x^2 = ky^2 \\ xy = k^2 \end{cases}$$

representan, respectivamente: una parábola, una circunferencia, una elipse y dos hipérbolas. Además, aplicaba la rotación de ejes coordenados con objeto de reducir ecuaciones de segundo grado a las formas anteriores. Es decir, Fermat enseña a interpretar ecuaciones sencillas con dos variables, considerándolas como: rectas, elipses, parábolas e hipérbolas.

La obra de Fermat fue publicada después de su muerte, lo que favorecía la impresión de que la Geometría Analítica había sido invención de Descartes únicamente. Esto es lamentable ya que su exposición era mucho más sistemática y didáctica que la de Descartes.

Además su Geometría Analítica está más próxima a la nuestra sobre todo en el hecho de que el eje de coordenadas se toma generalmente perpendicular al de las abscisas. Al igual que Descartes, Fermat se dio cuenta de la posibilidad de crear una Geometría Analítica de más de dos dimensiones.

4.5. Paralelismo Entre Las Geometrías De Descartes Y Fermat.

Es importe resaltar que ni Descartes ni Fermat inventaron el uso de las coordenadas, o los métodos analíticos, o en aplicar el Álgebra a la Geometría, o en representar gráficamente a cantidades variables.. Todo esto fue obra los matemáticos que previamente hemos mencionado, así como de muchos sabios anónimos, cada uno de los cuales realizó su pequeño aporte en pos de la mejora de la Matemática.

El mérito de ambos radica en que fueron los primeros en reconocer que una ecuación dada en dos incógnitas, puede considerarse como la determinación analítica de un lugar geométrico, es decir, de una curva plana. Además, se les atribuyen como propios la elaboración de métodos algorítmicos para relacionar estrechamente a la ecuación con su curva plana respectiva.

Por otro lado, difieren en la forma que tienen de atacar los problemas. En general, Descartes construye una ecuación a partir de un lugar geométrico. En tanto, Fermat toma una ecuación particular, y trata de determinar las propiedades que satisface el lugar geométrico de la ecuación en mención.

4.6. Frans Van Schooten Y El Perfeccionamiento De La Geometría Cartesiana.

Nació en 1615 y murió en 1660. Hizo imprimir una versión latina, en 1649 amplia y con aclaraciones de La Geometría de Descartes y apareció una segunda versión en 1659-1661 y nuevas ediciones se publicaron en 1683 y 1695. En ellas, se añadió demostraciones adicionales, problemas de construcción y nuevos lugares geométricos, lo que contribuyó a hacer más rica la obra.

Durante el período posterior a los trabajos de Descartes y Fermat, fue Van Schooten quien se encargó de difundir, pese a cierta oposición, dichos principios. Así que podemos decir que la Geometría Analítica la introdujo Descartes, pero quien la puso en funcionamiento fue Van Schooten.

A Van Schooten podemos atribuirle, además la sugerencia de usar coordenadas para trabajar en el espacio tridimensional, la introducción de la ecuación de la circunferencia con centro en el origen.

4.7. Jan De Witt Y Los Textos De Geometría Analítica.

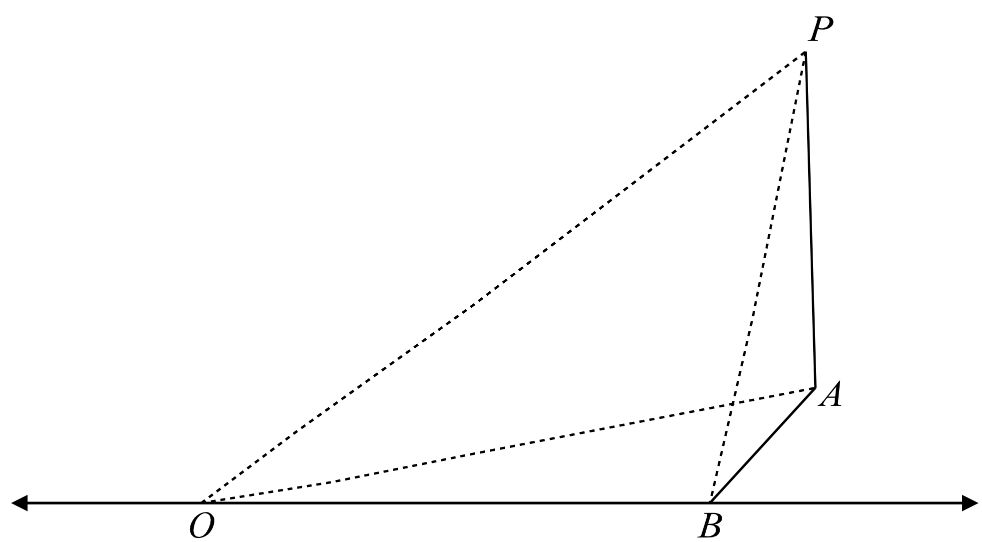
Nació en 1629 y murió en 1672. Hizo una contribución muy extensa a la geometría analítica en el año de 1658. En el libro II de su obra Elementa Curvarum, hace uso sistemático de las coordenadas, lo que contribuyó a calificar sus obra como el primer texto de geometría analítica. La geometría de Descartes no era en ningún sentido un libro de texto y el tratamiento de Fermat no se publicó hasta 1679.

La finalidad principal de la obra de De Witt es la de reducir todas las ecuaciones de segundo grado de $x \cup y$ a formas canónicas por medio de rotaciones y traslaciones de ejes coordenados.

4.8. Philipe De Lahire Y El Inicio De La Geometría Analítica Tridimensional.

Matemático francés nació en 1640 y murió en 1718. En 1679 publicó una obra en la que escribió uno de los primeros ejemplos de una superficie, dada analíticamente por una ecuación de tres incógnitas; lo que constituye la primera etapa efectiva hacia una Geometría Analítica del espacio tridimensional.

Al igual que Descartes y Fermat utilizaba un único punto de origen O situado sobre una recta única o eje $\overline{OB}$, al que añade ahora, en el caso del espacio el plano de referencia o de coordenadas $\overline{OBA}$ (vea la Ilustración 5).



Sistema de referencia según Philipe de Lahire

Ilustración 5

Descubrió que la ecuación del lugar geométrico de un punto P tal que su distancia perpendicular $|\overline{PB}|$ al eje exceda a la distancia $|\overline{OB}|$ (o abscisa de P) en una cantidad fija a es, con respecto a su sistema de coordenadas:

$$a^2 + 2ax + x^2 = y^2 + v^2$$

donde v es la tercera coordenada de P, que hoy representamos por z.

También fue el primero que consideró que con respecto a las coordenadas de un punto, puede tomarse, indistintamente, una de ellas como variable independiente y la otra como dependiente, o viceversa.

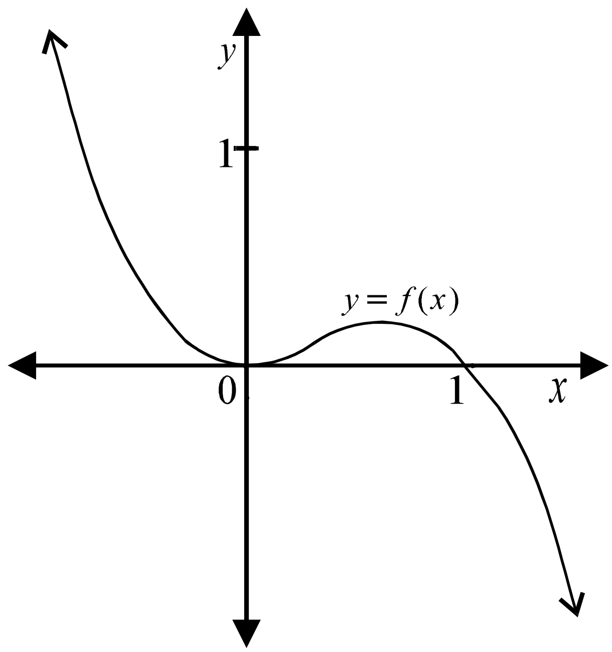
La historia ha sido bastante injusta con él, ya que fue el primer especialista moderno en Geometría tanto Analítica como Sintética, pero no le fue reconocido tal mérito, en su momento.

4.9. Christiaan Huygens Y La Curva De Susle.

Nació en 1629 y murió en 1695, mejor discípulo de Van Schooten, halló los puntos máximos y mínimos y el punto de inflexión, con lo que consiguió dibujar la Curva de Susle (matemático de los Países Bajos) tanto para coordenadas positivas como negativas; esta curva venía dada por la ecuación:

$$y = x^2(a - x)$$

Para el caso específico en que $a = 1$, presentamos la gráfica de la función en la Ilustración 6:



Gráfica de la función
$f(x)=x^2(a-x), \quad a=1$

Ilustración 6

4.10. Isaac Newton.

Nació en 1642 y murió en 1727. Fue el primer matemático que utilizó sistemáticamente todo el plano cartesiano, logrando así una gran simplicidad y generalidad de sus trabajos, frente a los de sus contemporáneos. Además, introdujo el uso de las coordenadas polares, en su Enumeratio.

Así, con Newton, se comienza a considerar a la hipérbola como formada por dos ramas, pues desde los tiempos de Apolonio se consideraba que cada una de las ramas que conformaban a la curva que conocemos actualmente, formaba parte de curvas distintas.

Sin embargo, la verdadera sistematización en el uso de las cantidades negativas se logró sólo con el trabajo de A. F. Möbius (1790-1868).

4.11. G. F. De L´Hospital Y La Definición Formal Del Plano.

Nació en 1661 y murió en 1704. Fue autor del texto de Geometría Analítica más importantes de los finales del siglo XVII. A él se le atribuye la introducción del sistema de dos ejes coordenados, no necesariamente perpendiculares entre sí. No obstante en su trabajo hace mención a que *"se limitará a describir los fenómenos que se verifican dentro del ángulo (cuadrante) de las direcciones positivas de los ejes".*[3]

4.12. Jacob Hermann Y Las Coordenadas Polares.

Nació en 1678 y murió en 1733, discípulo de Jacques Bernoulli. En los años 1729 a 1733 se publicaron artículos de Hermann sobre geometría analítica tridimensional y sobre coordenadas polares.

Dio las ecuaciones en polares de curvas algebraicas, así como las ecuaciones del cambio de coordenadas rectangulares a polares. Usó las coordenadas tridimensionales de una manera más decidida que Jean Bernoulli, quién se había referido ya al uso de coordenadas en geometría con el nombre de geometría cartesiana.

3 ANFOSSI, Agustín. Geometría Analítica. Página xiii.

Fue el primero en demostrar que toda ecuación de primer grado, en las incógnitas $x, y \cup z,$ de la forma:

$$ax + by + cz = 0$$

representa a un plano en el espacio tridimensional. Además, partiendo de esta ecuación, dedujo las coordenadas de intersección del plano con cada uno de los ejes cartesianos.

4.13. Leonard Euler.

Matemático suizo, alumno de Johannes Bernoulli; nació en 1707 y murió en 1783. En el año de 1728 publicó en los Commentarii algunos artículos sobre el uso de coordenadas en la Geometría del espacio tridimensional, dando las ecuaciones generales de: cilindros, conos, y superficies de revolución. Demostró que la curva de longitud mínima (o geodesia) entre dos puntos de una superficie cónica se convertiría en la recta que estos dos puntos, si la superficie se abriese y se extendiese sobre un plano, lo que representa uno de los principales teoremas de la historia de la matemática, referente a superficies desarrollables.

Su obra Introductio hizo más que ningún otro por conseguir que el uso de coordenadas tanto en dimensión dos como en dimensión tres, se convirtiera en el instrumento básico para el estudio sistemático de curvas y superficies.

Euler da una teoría general de curvas basada en el concepto de función. A las curvas trascendentes no se las desterraba ya, como había sido la costumbre, sino que, prácticamente por vez primera, el estudio de las representaciones gráficas de las funciones trigonométricas forma parte de la Geometría Analítica con pleno derecho.

La Introductio va seguida de un apéndice que constituye quizás la contribución más importante de Euler a la Geometría, ya que representa prácticamente la primera exposición en forma de libro de texto de la Geometría Analítica Tridimensional.

4.14. Gaspar Monge Y La Definición Actual De La Geometría Analítica.

Matemático francés, nació en 1746 y murió en 1818. Verdadero especialista en geometría (casi podríamos decir que el primero desde Apolonio), excelente profesor y creador de programas. Así pues el desarrollo de la Geometría del Espacio de debió a su actividad matemática y revolucionaria, de no haber tenido la gran capacidad con la que contaba para trasmitir su entusiasmo, el renacimiento de la geometría tridimensional pudiera no haberse producido.

Publicó en 1795 un libro de texto para uso de los estudiantes. En este libro la geometría analítica tridimensional adoptó al fin lo que podría llamarse su forma definitiva. Y constituyó el prototipo de los programas actuales de geometría analítica del espacio.

Encontramos con Monge, por primera vez, un estudio sistemático de la recta en el espacio tridimensional. Mostraba, por ejemplo, que si una recta viene dada como intersección de dos planos

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d = 0 \end{cases}$$

entonces la ecuación del plano perpendicular a dicha recta y que pasa por el punto (x', y', z') tiene la forma:

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0$$

donde $A, B \wedge C$ son, respectivamente, las expresiones:

$$\begin{cases} A = bc' - b'c \\ B = ca' - c'a \\ C = ab' - a'b \end{cases}$$

que hoy solemos llamar parámetros de dirección de la recta. Además dio las fórmulas de distancia de un punto a una recta y la distancia más corta entre dos rectas que se cruzan.

Los discípulos de Monge pusieron en circulación un verdadero torrente de libros de texto elementales de geometría analítica tal como no se ha vuelto a repetir nunca, ni siquiera en nuestros días. A juzgar por la aparición repentina de tantas geometrías analíticas a partir de 1798, se había producido una verdadera revolución en la enseñanza.

La geometría analítica que había permanecido eclipsada por el cálculo durante más de un siglo, consiguió de pronto que se le considerara un lugar por derecho propio en las escuelas. La paternidad de esta revolución analítica se le atribuye principalmente a Monge. Entre los años de 1798 y 1802 aparecieron cuatro geometrías analíticas elementales, la de Sylvestre Francois Lacroix (1765-1843), la de Jean-Baptiste Biot (1774-1862), la de Louis Puissant (1769-1862) y la de F. L. Lefrancais.

Los profesores de hoy quizás puedan sentirse satisfechos al pensar que la Geometría Analítica tal como la presentaron Fermat y Descartes, un abogado y un filósofo respectivamente, resultó poco eficaz, y sólo cuando verdaderos pedagogos le dieron una nueva forma, tal como lo hicieron Monge y sus discípulos, fue cuando mostró su vitalidad y eficacia.

5. Consideraciones Finales.

Es pues, la Geometría, de todas las ramas de la Matemática, la que más ha estado sometida a cambios, según cambiaban las ideas de una época a otra.

En Grecia clásica alcanzó su punto máximo, sólo para caer en su punto más bajo en la época del hundimiento del Imperio Romano. En Arabia y en Europa renacentista recuperó parte del terreno perdido; durante el siglo XVII se encontraba en el umbral de una nueva era, para ser casi olvidada a continuación durante más de un siglo, al menos por los matemáticos que se dedicaban a la investigación.

Los inventores de la Geometría Analítica, Descartes y Fermat se habían dado cuenta que toda ecuación con tres incógnitas representaba una superficie, y recíprocamente, pero no dieron los pasos necesarios para desarrollarlo. Puede decirse que mientras el siglo XVII fue el siglo de las curvas, las hipérbolas, parábolas y espirales de Fermat, las Perlas de Susle y muchas otras, el siglo XVIII fue en el que comenzó realmente el estudio sistemático de las superficies. Euler fue el primero en tratar a las cuadráticas como una familia unitaria análoga a las cónicas y en su obra Introductio establece en cierto sentido las bases de la Geometría Analítica del espacio.

Los esfuerzos de Monge condujeron a un movimiento de renovación de la Geometría pura durante el período de la Revolución Francesa, pero el verdadero renacimiento de la geometría como una rama viva de las matemáticas, y dado en forma explosiva, ocurre a comienzos del siglo XIX. Siglo en el cual se produjeron importantísimas contribuciones que provocaron el surgimiento de distintos tipos de geometrías, tales como: proyectiva, la n-dimensional de Cayley, y las no euclidianas, entre otras.

BIBLIOGRAFÍA

1. ANFOSSI, Agustín. Geometría Analítica. Quinta Edición. México D. F., México: Progreso. 1966. 240 páginas.

2. BOYER, Carl B. Historia de la Matemática. Traducido por Mariano Martínez Pérez. Madrid, España: Alianza Editorial, 1986. 808 páginas.

3. COLLETTE, Jean Paul. Historia de las Matemáticas. Tomo I. Segunda Edición. Sin traductor. México, D. F., México: Siglo veintiuno, 1986. 338 páginas.

4. COLLETTE, Jean Paul. Historia de las Matemáticas. Tomo II. Segunda Edición. Sin traductor. México, D. F., México: Siglo veintiuno, 1986. 607 páginas.

5. COURANT, R. y ROBBINS, H. ¿Qué es la Matemática? Traducido por Luis Bravo Gala. Madrid, España: Aguilar, 1971. 533 páginas.

6. EVES, Howard. Estudio de las Geometrías. Tomo I. Traducido por Susana Blumovicz de Siperstein. México D.F., México: U.T.E.H.A., 1969. 469 páginas.

7. EVES, Howard. Estudio de las Geometrías. Tomo II. Traducido por Francisco Paniagua B. México D.F., México: U.T.E.H.A., 1969. 483 páginas.

8. GRANERO RODRÍGUEZ, Francisco. Álgebra y Geometría Analítica. Madrid, España: McGraw-Hill, 1985. 568 páginas.

9. REINHARDT, Fritz y SOEDER, Heinrich. Atlas de Matemáticas 1. Fundamentos, Álgebra y Geometría. Traducido por Juan Luis Vázquez Suárez y Mario Rodríguez Artalejo. Madrid, España: Alianza Editorial, 1984. 265 páginas.