

**UNIVERSIDAD DE PANAMÁ  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICA  
CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO DE VERAGUAS**

**ASOCIACIÓN NACIONAL DE ESTUDIANTES DE  
MATEMÁTICAS (A.N.E.MAT.)  
CAPÍTULO DE VERAGUAS**

**SEMANA DE LA MATEMÁTICA**

**CONFERENCIA: GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS: DESARROLLO  
HISTÓRICO, SEMEJANZAS, DIFERENCIAS E  
IMPORTANCIA.**

**EXPOSITOR: RAÚL ENRIQUE DUTARI DUTARI.**

**FECHA: 22 DE NOVIEMBRE DE 1993.**

**HORA: 11:00 A. M.**

**LUGAR: AULA B-5 DEL CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO DE  
VERAGUAS.**

**DIRIGIDA A: PROFESORES Y ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE  
MATEMÁTICAS QUE PARTICIPARON EN EL EVENTO.**

**DURACIÓN: 45 MINUTOS.**

### ***OBJETIVOS GENERALES***

1. Despertar el interés hacia la investigación de la Historia de la Matemática.
2. Tomar conciencia de la condición de verdad relativa que poseen la Matemática y la Geometría actualmente.
3. Aumentar el caudal de conocimientos de los concurrentes en el marco de la Historia de la Matemática.

### ***OBJETIVOS ESPECÍFICOS***

1. Conocer que Los Elementos de Euclides de Alejandría poseen fallas lógicas, que han sido subsanadas posteriormente.
2. Identificar los Postulados y las Nociones Comunes euclidianas.
3. Identificar algunas formas equivalentes del Quinto Postulado de Euclides.
4. Adquirir información acerca del origen histórico de las Geometrías no Euclidianas clásicas.
5. Conocer algunos de los diversos procedimientos que se emplearon para tratar de probar el Quinto Postulado de Euclides.
6. Identificar las generales de las Geometrías no Euclidianas clásicas y de algunas de las pruebas de su consistencia con la Geometría Euclidiana.
7. Identificar las semejanzas, diferencias e importancia más fundamentales de las Geometrías no Euclidianas clásicas.

## ***TABLA DE CONTENIDOS***

1.	El Postulado De Las Paralelas (Sus Intentos De Demostración).....	1
2.	Las Geometrías No Euclidianas Clásicas (Desarrollo Histórico).....	6
3.	Semejanzas, Diferencias E Importancia De Las Geometrías No Euclidianas Clásicas.....	11
	BIBLIOGRAFÍA.....	14

## **1. El Postulado De Las Paralelas (Sus Intentos De Demostración).**

La obra cumbre de Euclides de Alejandría: Los “Elementos”, se considera con todo derecho, el primer gran progreso en la historia del pensamiento y la organización en el campo de las Matemáticas. Su impacto ha sido enorme, al punto que un número sorprendente de desarrollos importantes posteriores a su aparición, se inspiran en ella.

Consiste en la recopilación de los principios matemáticos más importantes de la época helénica antigua. Abarca áreas como la Teoría de los Números (estudia entre otras cosas, las relaciones de divisibilidad en el conjunto  $\mathbb{Z}$ ) y el Álgebra Geométrica (expresión de magnitudes algebraicas en forma geométrica).

Euclides (se supone), en ningún momento pretendió atribuirse la originalidad del material contenido en los Elementos. Más bien, intentó construir una sucesión lógica, partiendo de un conjunto pequeño de suposiciones iniciales (lo alcanzó con gran destreza; se valió de la Lógica Aristotélica, para unificar y sostener su construcción); de modo que en ella, se desarrollara en forma paulatina todo el conocimiento matemático de la época. Su mérito principal consiste en que la obra fue la primera en su género.

Hay que resaltar que, para los griegos antiguos, las palabras “axioma” y “postulado” tenían significados distintos a los que les damos actualmente. Para ellos, un axioma, es una suposición inicial que pertenece a todos los estudios que se realizan; mientras que un postulado, es una suposición inicial que pertenece al estudio que se lleva a cabo en particular. Esta distinción la

estableció Euclides posiblemente, y en la actualidad no es tomada en cuenta (se consideran sinónimos).

Los Postulados de la Geometría Euclidiana Plana, así como las Nociones Comunes que acompañan a éstos, se establecen como sigue actualmente:

*“Postulados:*

*Postúlese lo siguiente:*

*Trazar una recta desde un punto a otro cualquiera.*

*Prolongar una línea recta finita de manera continua a otra línea recta.*

*Describir un círculo con cualquier centro y cualquier radio.*

*Todos los ángulos rectos son iguales.*

*Si una línea recta corta a otras dos líneas rectas formando con ellas ángulos internos del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado por el cual los ángulos internos son menores que dos ángulos rectos.*

*Nociones comunes:*

*Cosas que son iguales a la misma cosa son iguales entre sí.*

*Si iguales se suman a iguales, los resultados son iguales.*

*Si iguales se restan de iguales, los restos son iguales.*

*Cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí.*

*El todo es mayor que la parte.”<sup>1</sup>*

Respecto a los postulados, los tres primeros establecen la existencia y unicidad de la recta; el cuarto, establece la existencia de las circunferencias (conocidos su centro y radio respectivos); mientras que el Quinto Postulado, establece vínculos entre rectas y crea básicamente la Geometría Euclidiana que conocemos.

También debe resaltarse que para Euclides, las Nociones Comunes son equivalentes a nuestros Axiomas de Congruencia.

Sin embargo, a lo largo del contenido de los Elementos; es posible observar como Euclides cometió ciertos errores lógicos en su confección. Estos errores no demeritan en nada su obra, ya que hubiera sido admirable que este intento antiguo y colosal de axiomatización geométrica estuviera exento de erratas.

Su primera falla, fue intentar definir objetos o cosas, tales como: la línea recta (es una línea cuyos todos sus puntos “yacen uniformemente”), una arista (algo que es el extremo de cualquier cosa), o una superficie (algo que sólo tiene longitud y anchura); sin establecer claramente sus términos indefinidos. Como consecuencia de esto, se deslizaron en el sistema euclidiano imperfecciones lógicas. Por ejemplo, ¿cómo se podría definir la frase: “yacer uniformemente”?

Euclides no consideró el concepto de orden, o de “entre” dos cosas dadas, como postulado. No precisa cuando un punto se encuentra entre otros dos, ni distingue los puntos interiores de los exteriores, en un triángulo dado.

---

1 BOYER, Carl B. Historia de la Matemática. Página 147.

En adición a lo anterior, asumió implícitamente la infinitud de la recta. Y además, adoptó un sistema incompleto de postulados. No es posible demostrar todas las proposiciones contenidas en los Elementos, a partir de los Postulados, las Nociones Comunes, y los Términos no Definidos de Euclides. Esta deficiencia lleva a paradojas e inconsistencias.

Por ejemplo, en la primera proposición del primer libro, Euclides postuló implícitamente la existencia de intersecciones entre circunferencias (al realizar la construcción de un triángulo equilátero, conociendo un lado de éste); ésto, no se contempla en sus axiomas, y no se puede demostrar, partiendo de ellos exclusivamente.<sup>2</sup> Estas situaciones inconsistentes las corrigió David Hilbert, a finales del siglo XIX, con su Axiomática.

Además, existe evidencia histórica de que el Quinto Postulado de Euclides, causó un problema lógico a los antiguos, ya que éste carecía de la concisión y la comprensibilidad lógica de los otros cuatro. Basados en esta conjetura, los matemáticos de la época supusieron, que este postulado no era independiente de los otros, es decir, podía expresarse en base a los antes redactados.

Así, la estrategia que se asumió con respecto a esta situación fue: tratar de demostrar el Quinto Postulado en base a los otros cuatro y las cinco Nociones Comunes. Sin embargo, esta prueba fue imposible de obtener por los geómetras durante más de 2000 años (en forma irrefutable); ya que las “demostraciones” que surgieron, tarde o temprano se probaba que estaban basadas en una suposición tácita, equivalente al Quinto Postulado.

---

2 CAMP, John; FERH, Howard F.; KELLOGG, Howard. La revolución de las matemáticas escolares (segunda fase). Páginas 51-52.



En esta situación se encontraron matemáticos de la talla de Posidoneo, Proclo, Nasir Eddin, Omar Khayyam, Clavius, Wallis, Saccheri, Lambert, Pash, etc. Entre estos postulados equivalentes tenemos:

- ⇒ Por un punto dado no situado sobre una recta sólo puede trazarse una paralela a ella (Postulado de Playfair).
- ⇒ Si en un cuadrilátero un par de un par de lados opuestos son iguales y si los ángulos interiores adyacentes al tercer lado son rectos, entonces los otros dos ángulos interiores también son rectos (Postulado de Saccheri).
- ⇒ Existe al menos un triángulo en que la suma de sus tres ángulos interiores es igual a dos rectos (Postulado de Legendre).
- ⇒ Si en un cuadrilátero tres ángulos interiores son rectos, el cuarto ángulo interior también es recto (Postulado de Lambert).
- ⇒ Una recta que corte a un lado de un triángulo pero que no pase por ninguno de sus vértices deberá cortar también al otro lado del triángulo (Postulado de Pash).<sup>3</sup>

Sin embargo, el misterio acerca del Quinto Postulado de Euclides fue un misterio que se aclaró poco a poco.

---

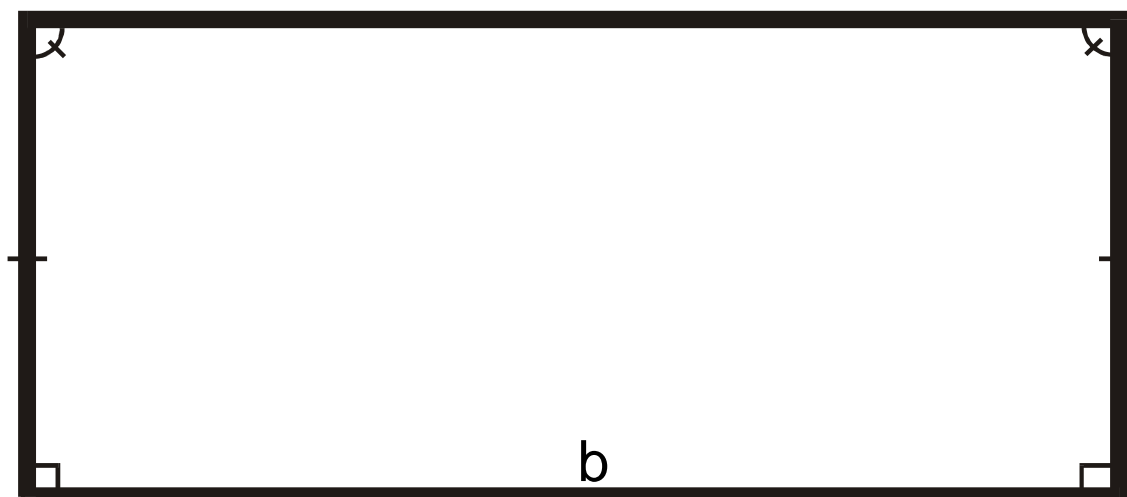
3 EVES, Howard. Estudio de las Geometrías, Tomo I. Página 321.

## **2. Las Geometrías No Euclidianas Clásicas (Desarrollo Histórico).**

En el año de 1733 se realizó la primera investigación científica convincente acerca del tema de la demostración del Quinto Postulado de Euclides; a cargo del sacerdote jesuita italiano Girolamo Saccheri; empleó el método de reducción al absurdo para probar el postulado (a Saccheri le fascinaba este poderoso método de demostración).

Como figura fundamental en su prueba, empleó lo que se denomina “Cuadrilátero de Shaccheri”; consiste en un cuadrilátero donde dos ángulos interiores se admiten rectos y dos lados son opuestos, iguales y perpendiculares a la base. Luego, éste prueba que los otros dos ángulos interiores son iguales entre sí, sin emplear el Quinto Postulado, pudiendo ser entonces, agudos, obtusos o rectos. La prueba de la conjetura del ángulo recto, como debe ser evidente, es la que haría al Quinto Postulado válido (comparar esta afirmación con la lista de postulados equivalentes antes expuesta).

Para aclarar la idea antes expuesta, observe la Ilustración 1:



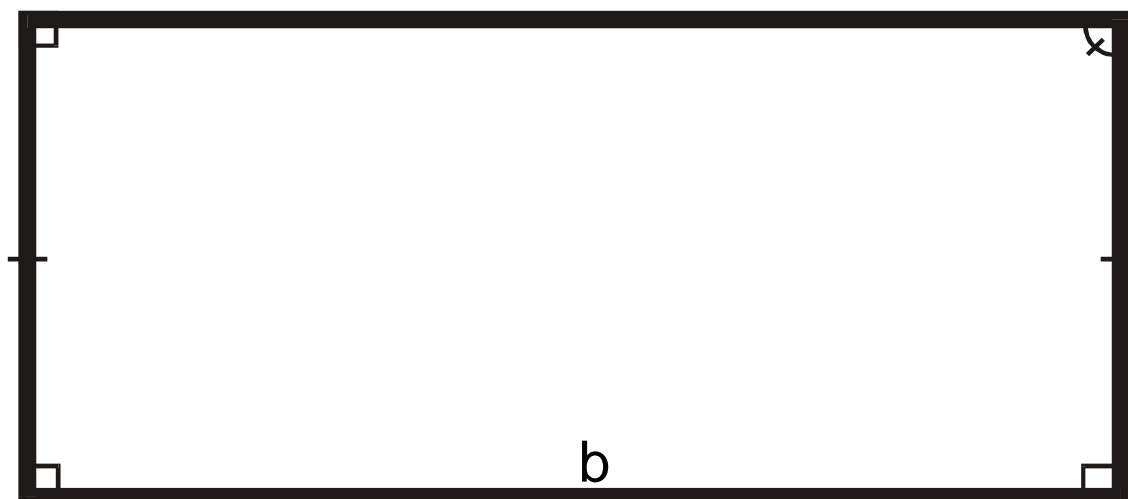
## Cuadrilátero de Saccheri

### Ilustración 1

Ahora, con relativa facilidad Saccheri desechó el caso del ángulo obtuso, asumiendo implícitamente como Euclides la infinitud de la recta; sin embargo, no logró lo mismo con el caso del ángulo agudo. En él, demostró toda una serie de teoremas que posteriormente formarían parte de una de las Geometrías no Euclidianas.

Como Saccheri deseaba reivindicar a Euclides, prosiguió sus estudios en forma prejuiciosa, hasta forzar una contradicción en una demostración, que dejó supuestamente probado el Quinto Postulado; sus estudios se olvidaron poco después. Sus trabajos probaron, sin embargo, que el prescindir del Quinto Postulado en la construcción de una geometría no lleva a contradicción alguna, al demostrar cierto conjunto de proposiciones.

Otro matemático posterior a éste, el alemán Johanm Heinrich Lambert, trabajó considerando un cuadrilátero parecido al de Saccheri, en el que sólo uno de los ángulos interiores es desconocido (vea la Ilustración 2).



## Cuadrilátero de Lambert

### Ilustración 2

Lambert fue más lejos que Saccheri, ya que dedujo proposiciones para las hipótesis de los ángulos agudo y obtuso de él (Saccheri sólo dedujo proposiciones para la hipótesis del ángulo agudo).

Así, determinó que en las tres hipótesis, la suma de los ángulos internos de un triángulo es menor, igual o mayor que dos rectos; según se aplicara la hipótesis del ángulo agudo, recto u obtuso, respectivamente. También observó la semejanza entre la hipótesis del ángulo obtuso y la Geometría Esférica; y conjeturó que la hipótesis del ángulo agudo podría darse sobre una esfera de radio imaginario.

Ocurría en realidad que ninguna de las tres hipótesis poseía contradicciones, ya que cada una de las geometrías desarrolladas es tan consistente como la Geometría Euclidiana. Es decir, el Quinto Postulado (que se conoce además como Postulado de las Paralelas) es independiente del resto de los postulados y no puede deducirse de éstos. Luego, dentro de cada una de

estas geometrías, no se hallarán dos teoremas que se contradigan. Ahora, que si comparados dos teoremas de geometrías distintas, resulta lógico suponer que puedan contradecirse.

El primero en admitir esta situación fue el alemán Karl F. Gauss, entre 1820 y 1830, quién desde su adolescencia se preocupó de este asunto, sin embargo, no lo divulgó por temor a la opinión pública. Pero posteriormente, decide redactar una “Geometría no Euclidiana” (el nombre es de su creación) convencido del rigor de su fundamento “aunque, a primera vista, muchos de sus resultados ofrezcan un aspecto paradójico”<sup>4</sup>, sin embargo, una vez se enteró que el húngaro Janos Bolyai estaba trabajando en este campo, desistió de ello.

Bolyai publicó su obra como un apéndice de una obra didáctica de su padre (también matemático) y en las 26 páginas que constituyen este apéndice, habla de lo que llama “Geometría Absoluta” donde alude al hecho de que sus hallazgos son independientes del Quinto Postulado, y válidos por tanto en cualquier tipo de geometría que tenga a la euclidiana como caso particular (sus estudios se relacionan con las primeras 28 proposiciones del libro I de Los Elementos).

Por otro lado, trabajando en forma simultánea a Bolyai y Gauss, e independientemente de éstos, el ruso Nicolai Ivanovich Lobachevsky realizó una labor similar a la de éstos, pero en forma más constante y constructiva, ya que publicó sus obras y se realizaron traducciones del ruso al alemán y francés de ellas, las que culminaron con su Pangeometría, que es un estudio analítico, sin figuras, de una geometría que él llama Imaginaria.

---

4 BABINI, José. Historia de las ideas modernas en Matemática. Página 11.

Finalmente, el nacimiento de las Geometrías no Euclidianas clásicas se dio por terminado con la disertación doctoral de Georg Friedrich Bernhard Riemann, que se tituló: “Sobre las hipótesis en que se funda la Geometría”; en ésta, planteó un tipo de Geometría no Euclidiana equivalente a la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri. En ella, por un punto exterior a una recta no pasan paralelas que no la corten.

Hay que resaltar que la independencia real del Postulado de las Paralelas no se estableció en forma incuestionable hasta que se proporcionaron las demostraciones de la compatibilidad de la hipótesis del ángulo agudo (que vinieron de Klein, Beltrami, Poincaré, Cayley, y otros); y obtuso (que la probó Riemann), con la Geometría Euclidiana.

El método seguido en éstas demostraciones, consistió en crear un modelo dentro de la Geometría Euclidiana de modo que al desarrollo abstracto de la hipótesis del ángulo agudo (u obtuso), se le pudiera dar una interpretación euclidiana en el modelo. Entonces cualquier incompatibilidad en la Geometría no Euclidiana implicaría una incompatibilidad correspondiente en la Geometría Euclidiana y viceversa.

Poincaré desarrolló un modelo de este tipo para la Geometría de Lobachevsky a partir del conjunto de postulados de la Geometría Euclidiana desarrollados por David Hilbert, al substituir el Postulado de las Paralelas (o de Playfair) que citamos, a continuación:

*“Por un punto dado  $A$  que no está en una recta  $m$  pasan al menos dos rectas que no cortan a  $m$ .”<sup>5</sup>*

---

5 EVES, Howard. Estudio de las Geometrías, Tomo I. Página 391.

La compatibilidad de la hipótesis del ángulo obtuso, en cambio, Riemman la probó al considerar al plano euclídeo como la superficie de una esfera y a sus rectas, como circunferencias de radio máximo, respectivamente. Allí, es evidente por ejemplo, que la suma de los ángulos internos de un triángulo (esférico) cualquiera es mayor que  $180^\circ$ , lo que no está de acuerdo con la Geometría Euclidiana clásica.

### **3. Semejanzas, Diferencias E Importancia De Las Geometrías No Euclidianas Clásicas.**

Las Geometrías no Euclidianas de Gauss, Bolyai y Lobachevsky, tienen en común los siguientes hechos:

- ⇒ Por un punto exterior a una recta pasa un haz de paralelas que no la cortan (estas últimas son denominadas hiperparalelas); este haz es limitado por dos rectas especiales, las dos paralelas trazadas a la primera por ese punto.
- ⇒ Son equivalentes a la hipótesis del ángulo agudo de Saccheri;
- ⇒ La suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es menor de  $180^\circ$  en ellas.
- ⇒ Conjuntamente con la Geometría Euclidiana, admiten la infinitud de la recta.

La Geometría no Euclidiana de Riemman, en cambio, se caracteriza por:

- ⇒ Descarta la infinitud de la recta y sólo admite que ésta es indefinida.
- ⇒ La suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es mayor que  $180^\circ$ .
- ⇒ Emplea métodos de la Geometría Diferencial, en vez de emplear los métodos tradicionales de la Geometría Sintética.

De éste modo, la Geometría Euclidiana queda ubicada como un caso intermedio de estas geometrías, al alegar que por un punto exterior a una recta existe una sólo recta que no la corta, su paralela.

Posteriormente Klein denominó a las geometrías de Lobachevsky, Euclides y Riemman como Geometrías Hiperbólica, Parabólica y Elíptica, respectivamente, al realizar estudios en este campo particular.

Luego del desarrollo de las geometrías ya esbozadas, se han creado otras Geometrías no Euclidianas (toda Geometría cuya base postulacional contradiga algún postulado de la Geometría Euclidiana puede con todo derecho llamarse no Euclidiana). En ésto, Riemman originó toda una clase de Geometrías no Euclidianas, que han recibido un estudio detallado en la actualidad y se conocen con todo derecho como Geometrías Riemmanianas.

Las Geometrias de Riemman son de gran importancia en la generalización del concepto de espacio y han conducido, posteriormente, a la Teoría de los Espacios Abstractos, que se aplica, en parte, en el desarrollo de las ramas modernas de la Física Relativista.



En realidad, Riemman consideraba que la geometría debía tratar los conjuntos de  $n$ -pulsas ordenadas, que se pueden combinar de acuerdo a ciertas leyes y no preocuparse de los casos particulares de geometrías, como el de cuantas paralelas a una recta, pasan por un punto. Es más, ni siquiera se debían considerar puntos o rectas en el espacio usual.

Todos estos trabajos llevaron a la Geometría como un todo, a independizarse del espacio físico en que se creó. En el futuro, los postulados de una Geometría no necesitan ser veraces ni autoevidentes, sólo deben ser consistentes entre sí. Además, liberaron a la Matemática de ser una verdad absoluta impuesta por la naturaleza, (principalmente la Geometría).

## ***BIBLIOGRAFÍA***

1. BABINI, José. Historia de las ideas modernas en Matemática. Monografía número 4. Serie de matemática. Washington, D.C., E.U.A.: Departamento de Asuntos Científicos de la Unión Panamericana. Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos, 1970. 72 páginas.
2. BONOLA, Roberto. Geometrías no Euclidianas. Traducido por Luis Gutiérrez del Arroyo. Buenos Aires, Argentina: Espasa-Calpe Argentina, S. A., 1945. 224 páginas.
3. BOYER, Carl B. Historia de la Matemática. Traducido por Mariano Martínez Pérez. Madrid, España: Alianza Editorial, 1986. 808 páginas.
4. CAMP, John; FERH, Howard F. y KELLOGG, Howard La revolución de las matemáticas escolares (segunda fase). Monografía número 13. Serie de matemática. Washington, D.C., E.U.A.: Departamento de Asuntos Científicos de la Unión Panamericana. Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos, 1970. 132 páginas.
5. COURANT, R. y ROBBINS, H. ¿Qué es la Matemática? Traducido por Luis Bravo Gala. Madrid, España: Aguilar, 1971. 533 páginas.
6. CHENG, Isidro. Proposiciones equivalentes al postulado de las paralelas. Monografía número 2. Serie de geometría y pedagogía. Panamá, Panamá: Universidad de Panamá, 1986. 39 páginas.
7. CHENG, Isidro. Reflexiones en torno al problema del Vº postulado. Monografía número 3. Serie de geometría y pedagogía. Panamá, Panamá: Universidad de Panamá, 1986. 22 páginas.

8. EVES, Howard. Estudio de las Geometrías. Tomo I. Traducido por Susana Blumovicz de Siperstein. México D.F., México: U.T.E.H.A., 1969. 469 páginas.
9. EVES, Howard. Estudio de las Geometrías. Tomo II. Traducido por Francisco Paniagua B. México D.F., México: U.T.E.H.A., 1969. 483 páginas.
10. REINHARDT, Fritz y SOEDER, Heinrich. Atlas de Matemáticas 1. Fundamentos, Álgebra y Geometría. Traducido por Juan Luis Vázquez Suárez y Mario Rodríguez Artalejo. Madrid, España: Alianza Editorial, 1984. 265 páginas.