UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO DE VERAGUAS

MONOGRAFÍA:

LA AXIOMÁTICA DE HILBERT Y SU APLICACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA ACTUAL

PRESENTA:

RAÚL E. DUTARI D.

1995

TABLA DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

Posteriormente al descubrimiento de las Geometrías no Euclidianas, se sintió la necesidad de darle a la Geometría un tratamiento postulacional verdaderamente satisfactorio, donde todas las suposiciones encubiertas o tácitas fueran indagadas; postulándose así un conjunto lógicamente aceptable de postulados fundamentales en ésta materia, en forma clara e inequívoca.

Los primeros trabajos realizados en éste sentido fueron realizados por Moritz Pash y continuados posteriormente por Giuseppe Peano. Sin embargo, el mérito de llevar a cabo la realización de ésta meta en forma satisfactoria lo posee David Hilbert.

Esta monografía intenta darnos algunas luces acerca de la obra de Hilbert en éste campo, al realizar una introducción histórica al tema, y tratándose posteriormente la misma Axiomática de Hilbert en una forma somera, para finalmente destacar los aspectos más importantes de ésta al ser aplicados a la enseñanza de la Geometría en la actualidad, así como también el alcance de dicho trabajo a nivel del desarrollo formal de la Matemática en general.

1. Observaciones Preliminares.

Posteriormente al descubrimiento de las geometrías no euclidianas, se sintió la necesidad de darle a la geometría un tratamiento postulacional verdaderamente satisfactorio, donde todas las suposiciones encubiertas o tácitas fueran indagadas; donde las paradojas quedarían eliminadas. Esta construcción sería así, un conjunto mínimo de axiomas, completo e independiente, en consecuencia, lógicamente aceptable, en forma clara e inequívoca.

Recordemos que según el Método Axiomático, para probar un teorema dentro de un sistema deductivo, debemos establecer que el mismo es una consecuencia lógica y necesaria de proposiciones previamente probadas, o de las proposiciones que se aceptan como verdaderas sin prueba: los llamados axiomas o postulados. De estos ellos, en consecuencia, debemos tratar de probar todos las proposiciones de nuestro sistema deductivo. La elección de un sistema de axiomas es básicamente arbitraria. No obstante, se espera que reúnan las siguientes características:

⇒ Que sean pocos axiomas.

⇒ Que tengan un planteamiento simple.

⇒ Que sean compatibles, en el sentido de que no se llegue a proposiciones contradictorias, partiendo de ellos.

⇒ Que sean suficientes, de modo que todo el sistema deductivo se pueda deducir de ellos.

⇒ Que sean independientes, en el sentido de que ninguno de los axiomas sea una consecuencia lógica de los restantes.

Los primeros trabajos realizados en éste sentido fueron realizados por el matemático alemán MORITZ PASH en el año de 1882 (con sus “LECCIONES DE GEOMETRÍA MODERNA”). Él realizó importantes avances en el campo, estableciendo los lineamientos de las futuras investigaciones en el área (se le reconoce el haber realizado la importante distinción entre “DEFINICIÓN EXPLÍCITA” y “DEFINICIÓN IMPLÍCITA”, (este fue uno de los errores crasos de Euclides).

Posteriores a los trabajos de Pash, fueron los aportes del matemático italiano Giuseppe Peano; quien desde muchos puntos de vista, realizó una traducción del trabajo de Pash a la notación simbólica que le es tan conocida (a Peano, se le atribuye el logro de emplear una simbología estricta, de modo de eliminar el peligro de familiarizarse mucho con el tema de estudio). Hubo además de éstos, otros aportes al área, como los de Huntington, Pieri y Dedekind.

2. Significado Y Alcance De La Axiomática De Hilbert.

El tratamiento moderno postulacional de la geometría euclidiana se lo debemos al eminente matemático alemán DAVID HILBERT (1862-1943). Su trabajo está dado bajo el título de “GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE” (Fundamentos de la Geometría). Desde su aparición, se ha transformado en una obra clásica de la Geometría, ya que ha hecho más que cualquier otro trabajo previo en el área, por la promoción del método postulacional moderno, además de dar forma al carácter de gran parte de la matemática actual.

Hilbert desarrolló un sistema de postulados para construir la geometría, que en esencia no se apartan mucho de los que Euclides elaboró, empleando en esto un mínimo de simbolismos y logrando convencer a los matemáticos de su época, con un grado de eficiencia mucho mayor que sus predecesores en el área (Pash y Peano, entre otros); de que la geometría posee un carácter netamente hipotético-deductivo. Además, ya que la obra de Hilbert carece de los extraños simbolismos empleados por Pash y Peano, ésta puede ser leída sin problemas y en gran parte, por cualquier alumno inteligente que estudie geometría a nivel medio.

Sin embargo, la influencia de la obra de Hilbert fue más allá, porque apoyada en la gran autoridad matemática de su autor, implantó firmemente el método postulacional no sólo en la geometría, sino básicamente en todas las demás ramas de la matemática.

El tratamiento dado por Hilbert a la geometría euclidiana plana y del espacio, se basa en 21 axiomas o postulados, conteniendo éstos a seis términos indefinidos o primitivos.

Con respecto a los términos indefinidos de su Axiomática, existe una anécdota en la cual se expresa que ellos podían recibir cualquier nombre que se deseara, que el resultado de la construcción lógica sería el mismo.

Hilbert no escribió una reconstrucción de toda la Geometría Euclidiana. Él se concentró en la redacción de su base, su sistema axiomático (lo que para Euclides fue los axiomas y las nociones comunes), sin embargo, si estableció cómo realizar dicha construcción. Pero tan importante como esto, fue la prueba de la compatibilidad de los axiomas (cualquier proposición probada con base a la Axiomática no será contradictoria), así como su independencia (ningún postulado se puede deducir de los restantes).

Este trabajo considerara, por simplicidad, solamente los postulados y los términos indefinidos que se aplican a la “GEOMETRÍA EUCLIDIANA PLANA”. Bajo éstos parámetros, trataremos 15 postulados y cinco términos indefinidos.

3. Postulados De Hilbert Para La Geometría Euclidiana Plana.

Los postulados que elaboró Hilbert pueden clasificarse en cinco categorías:

$\Rightarrow$ Axiomas de incidencia o conexión.

$\Rightarrow$ Axiomas de orden.

$\Rightarrow$ Axiomas de paralelismo.

$\Rightarrow$ Axiomas de congruencia.

$\Rightarrow$ Axiomas de continuidad.

Además, a ellos debemos añadir los Términos indefinidos de la Axiomática, así como algunas definiciones que se añadieron a lo largo del planteamiento.

3.1. Términos Indefinidos O Primitivos.

Punto, recta, sobre, entre, congruente.

Intuitivamente, a nivel euclídeo, el concepto indefinido “PUNTO”, define a un ente abstracto que está desprovisto de dimensiones. Un punto se denotará por una letra mayúscula, como A.

Al mismo nivel, el concepto indefinido “RECTA”, define a un ente abstracto que posee únicamente una dimensión, es decir, puede ser considerado como una sucesión infinita de puntos en una dirección definida. Una recta de denotará por una minúscula, como m.

Siguiendo con la aclaración a nivel euclídeo, el concepto indefinido “SOBRE”, define una relación de pertenencia entre puntos y rectas. Así, decir que el punto A está sobre la recta m, indica que es uno de los puntos que componen a m.

3.2. Postulados De Conexión.

3.2.1. Postulado 1.

Hay una y sólo una recta que pasa por dos puntos distintos dados. Si A y B son éstos puntos, denotaremos por $l(A,B)$ a la recta que pasa por éstos puntos.

3.2.2. Postulado 2.

Toda recta contiene al menos dos puntos distintos, y respecto a una recta hay al menos un punto que no está en ella.

Basados en éstos postulados, podemos decir que:

- ⇒ dos rectas distintas tienen a lo más "UN" punto en común,
- ⇒ para cada punto hay al menos una recta que no pasa por él,
- ⇒ por cada punto P pasan al menos dos rectas distintas, y
- ⇒ existen tres rectas que no inciden en un mismo punto.

3.3. Postulados De Orden.

El término indefinido "ESTAR ENTRE" es una relación entre tres puntos distintos entre sí que pertenecen a una misma recta (éstos se dirán "COLINEALES").

3.3.1. Postulado 3.

Si el punto C está entre los puntos A Ù B, entonces A, B, Ù C están todos sobre la misma recta, y C está entre B Ù A, y B no está entre C Ù A, y A no está entre C Ù B. Esto podrá denotarse como $A - C - B$.

3.3.2. Postulado 4.

Respecto a dos puntos cualquiera, A Ù B, hay siempre un punto C que está entre A Ù B, y un punto D que es tal que B está entre A Ù D.

3.3.3. Postulado 5.

Si A, B, C son tres puntos distintos sobre la misma recta, entonces uno de los puntos está entre los otros dos.

3.3.4. Definiciones.

3.3.4.1. Definición 1.

Por el “SEGMENTO” AB se indican los puntos A Ù B y todos los que están entre A Ù B. Los puntos A Ù B se llaman “PUNTOS EXTREMOS” del segmento. Un punto C se dice que está “SOBRE” el segmento AB si es A Ú B o algún punto entre A Ù B.

3.3.4.2. Definición 2.

Dos rectas, una recta y un segmento, o dos segmentos se dice que se “CORTAN” si hay un punto que está en ambos.

3.3.4.3. Definición 3.

Sean A, B, C tres puntos que no están sobre la misma recta. Entonces por el “TRIÁNGULO” ABC se indican los tres segmentos AB, BC, CA. Los segmentos AB, BC, CA se llaman “LADOS” del triángulo, y los puntos $A, B, C,$ “VÉRTICES” del mismo.

3.3.5. Postulado 6 (Postulado De Pash).

Una recta que corte a un lado del triángulo pero que no pase por ninguno de sus vértices deberá cortar también a otro lado del triángulo.

3.4. Postulados De Congruencia.

3.4.1. Postulado 7.

Si A Ù B son puntos distintos y si A¢ es un punto que está sobre una recta m, entonces hay dos y sólo dos puntos distintos B' Ù B'', sobre m tales que el par de puntos A' Ù B' es “CONGRUENTE” al par A, B y el par de puntos A', B'' es congruente al par A, B, además, A' está entre B' Ù B''.

3.4.2. Postulado 8.

Si dos pares de puntos son congruentes al mismo par de puntos, entonces son congruentes entre sí.

3.4.3. Postulado 9.

Si el punto C está entre los puntos A Ù B y el C¢ está entre A¢Ù B¢ y si el par de puntos A, C es congruente al par A', C', y el par de puntos C, B es congruente al par C', B', entonces el par de puntos A, B es congruente al par A', C'.

3.4.4. Definiciones.

3.4.4.1. Definición 4.

Dos segmentos se dice que son congruentes si los puntos extremos de los segmentos son pares congruentes de puntos.

3.4.4.2. Definición 5.

Por el "RAYO" AB se indica el conjunto de todos los puntos de la recta $l(A,B)$ que están entre A Ù B, el mismo punto B y todos los puntos C tales que B esté entre A Ù C. El rayo AB se dice que "EMANA" del punto A.

3.4.5. Teorema 1.

Si B' es un punto del rayo AB, entonces los rayos AB' y AB son idénticos.

Demostración.

Tenemos que el rayo AB es el grupo de todos los puntos P de la recta $l(A,B)$, tales que:

$A-P-B$ **[1]**

$A-B-P$ **[2]**

no $P-A-B$ **[3]**

Por otro lado, el rayo AB' es el grupo de todos los puntos Q de la recta $l(A,B)$, tales que:

$A-Q-B'$ **[4]**

$A-B'-Q$ **[5]**

no $Q-A-B'$ **[6]**

Luego, como A Ù B definen a la recta $l(A,B)$ y el rayo AB es una parte de $l(A,B)$ y contiene al punto B', entonces A, B, B' son colineales, y como ésta recta es única, la recta $l(A,B)$ y la recta $l(A,B)$ serán la misma y como ambos rayos emanan del punto A, por **[2]** y **[4]** podemos decir que ambos rayos incluirían en sus elementos al mismo conjunto de puntos de $l(A,B)$, es decir, que ambos rayos son iguales (considerándolos como conjuntos de puntos), lo que acaba la prueba.

3.4.6. Definiciones.

3.4.6.1. Definición 6.

Por "ÁNGULO" se indica un punto (llamado "VÉRTICE" del ángulo) y dos rayos (llamados los "LADOS" del ángulo) que emanan de un punto. En virtud del teorema **(2.4.5),** si el vértice del ángulo es punto A y si B Ù C son dos puntos cualquiera distintos de A que están sobre los dos lados del ángulo, podemos, sin ambigüedad, hablar del ángulo BAC (o CAB).

3.4.6.2. Definición 7.

Si ABC es un triángulo, entonces los tres ángulos BAC, CBA, ACB se llaman "ÁNGULOS DEL TRIÁNGULO". El ángulo BAC se dice que está "COMPRENDIDO" por los lados AB Ù AC del triángulo.

3.4.7. Postulado 10.

Si BAC es un ángulo cuyos lados no están sobre la misma recta, y si A' y B' son puntos distintos, entonces hay dos y sólo dos rayos distintos $A'C'$ y

$A'C''$, tales que el ángulo $B'A'C'$ es congruente al BAC y el ángulo $B'A'C''$ es congruente al ángulo BAC; además, si D' es un punto del rayo $A'C'$ y D'' es punto de $A'C''$, entonces el segmento $D'D''$ corta a la recta determinada por A' Ù B'.

Por lo anterior, el término indefinido "CONGRUENTE", es una relación entre dos segmentos o entre dos ángulos.

3.4.8. Postulado 11.

Todo ángulo es congruente consigo mismo.

3.4.9. Postulado 12.

Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son congruentes, respectivamente, a los dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, entonces cada uno de los ángulos restantes del primer triángulo es congruente al ángulo correspondiente del segundo.

3.5. Postulado De Las Paralelas.

3.5.1. Postulado 13 (Postulado De Playflair).

Por un punto dado A que no está en una recta m pasa a lo más una recta que no corta a m.

3.6. Postulados De Continuidad.

3.6.1. Postulado 14 (Postulado De Arquímedes).

Si A, B, C, D son cuatro puntos distintos, entonces hay, sobre el rayo AB, un conjunto finito de puntos distintos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ tal que:

⇒ cada uno de los pares $A, A_1; A_1, A_2; \ldots, A_{n-1}, A_n$ es congruente al par C, D, y

⇒ B está entre A Ù A_n.

3.6.2. Postulado 15 (Postulado Completo).

Los puntos de una recta constituyen un sistema de puntos tales que no puede asignarse ningún nuevo punto a la recta sin que se viole al menos uno de los nueve postulados **(2.2.1), (2.2.2), (2.3.1), (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4), (2.4.1), (2.4.2.), (2.6.1).**

4. Aplicación De La Axiomática De Hilbert En La Enseñanza De La Geometría Actual.

Los trabajos de Hilbert a través de su Axiomática han servido para aclarar por completo la naturaleza y función de los axiomas que basan a la Geometría, como un pilar fundamental de la Matemática. Ella nos permite corregir muchos de los errores lógicos que cometió Euclides al redactar Los Elementos.

En sí mismos, los trabajos de Hilbert no son susceptibles a tener una exposición a un nivel relativamente elemental de conocimiento, aunque eliminan toda una serie de nociones vagas o encubiertas que existían anteriormente en la Geometría desde los tiempos de Euclides, y que habían sido puestas al descubierto recientemente. De hecho, aquellos que abogan por un sistema de postulados completo para estudiar la Geometría a nivel elemental, se valen de la Axiomática de Hilbert, con ciertas modificaciones menores en algunos puntos, producto del perfeccionamiento del sistema.

En general la Axiomática de Hilbert (convenientemente adaptada), debe ser preferida sobre los enfoques tradicionalistas euclidianos como instrumento de enseñanza de la Geometría.

Sin embargo, con los niveles de educación inferiores se debe ser cuidadoso con el “GRADO DE ABSTRACCIÓN” con que ésta se desarrolle, dado del nivel de desarrollo intelectual y mental alcanzado por los educandos. No es recomendable por tanto al introducir a los niños al área, enfocarles de lleno al aspecto abstracto de la materia, como tampoco el hacerles un enfoque completamente empírico del tema. Debe tratarse en cambio de llevar un equilibrio en la aplicación de uno y otro método. Esta situación se presenta, fundamentalmente, al abordar los temas de Postulado de Pash y los Axiomas de Congruencia.

Tal equilibrio se logra aplicando los trabajos realizados por algunos matemáticos, como G. D. Birkoff y Ralph Beatley, quienes lograron trabajos que, desde la década de 1940, fundamentan los textos de Geometría en muchas escuelas de los E. U. A.

A continuación, compararemos la Axiomática de Hilbert con otros sistemas similares y anteriores a ella.

Los postulados del primer grupo, definen implícitamente el concepto del término primitivo “SOBRE” y establecen relaciones entre los términos primitivos “PUNTO” y “RECTA”.

Los postulados del segundo grupo, definen implícitamente el concepto del término primitivo “ENTRE”. En particular, nos aseguran la existencia de un número infinito de puntos en una recta y que la recta no termina en ningún punto.

El Postulado de Pash difiere significativamente de los axiomas restantes de su grupo, ya que en él intervienen puntos que no están todos en la misma recta, dándonos información del plano como un todo. El no considerar éste axioma lleva a muchas contradicciones, en las que consecuencias absurdas parecen deducirse rigurosamente de los axiomas de Euclides. Esto se debe por lo general, a figuras mal dibujadas, cuyas líneas parecen interceptar interior o exteriormente a ciertos triángulos o circunferencias, cuando en realidad no lo hacen. Los educadores deben hacer un énfasis especial en éste aspecto a sus educandos (desgraciadamente no se realiza esto), al recalcárceles que nunca se podrán obtener conclusiones de provecho, partiendo de diseños geométricos distorsionados.

Los postulados de orden son de interés histórico, por cuanto que Euclides se equivocó completamente con éstos, al no considerar a ninguno. Esta omisión seria por parte de éste, es lo que permite que, al emplear sólo los postulados originales de Euclides, se deduzcan paradojas al aplicar un razonamiento sano a figuras mal dibujadas (éste error lo cometen con frecuencia los docentes que se empeñan en transmitir a sus alumnos la Axiomática de la Geometría, tal cual como Euclides la recopiló, y se corrige completamente al emplear, adecuadamente, alguna variante de la Axiomática de Hilbert, siendo éste uno de sus logros más importantes).

Sin embargo, el estudio de éste aspecto tan importante de la Geometría, se tiende a dejar a un lado en sus primeros cursos. Consideramos que éste error debe ser superado, al hacérsele ver al educando desde temprana edad, que ninguna conclusión de provecho se puede obtener a partir de un diseño deficiente en su construcción Geométrica).

Los postulados del tercer grupo definen implícitamente la idea expresada por el término primitivo “CONGRUENTE” cuando se aplican a pares de puntos y a ángulos. Estos postulados se presentan en un orden definido, para evitar la necesidad de recurrir a la noción de “MOVIMIENTO DE FIGURAS”. Así, es evidente como Hilbert introduce la congruencia de triángulos, sin emplear el método de superposición, que es tan común actualmente en la escuela secundaria.

El postulado de las paralelas de Playfair aparece como único en el grupo cuatro de postulados. Es equivalente al postulado de las paralelas de Euclides.

Empleando los postulados de los tres primeros grupos, es posible demostrar que existe al menos una recta que pasa por un punto A y no corta a una recta m, es decir, se puede demostrar el famoso “QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES”.

El Postulado de Arquímedes, corresponde al procedimiento familiar de estimar la distancia entre dos puntos de una recta empleando una vara de medir. Garantiza que si empezamos a medir en uno de los puntos y colocamos hacia el segundo punto una sucesión de distancias iguales (iguales a la longitud de la vara de medir), pasaremos finalmente por el segundo punto. De éste postulado puede hacerse que dependa toda la teoría de la medición y, en particular, la teoría de Euclides sobre las proporciones. Finalmente, el postulado completo no se necesita en la deducción de los teoremas de la Geometría Euclidiana, pero hace posible establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y el conjunto de los números reales, y es necesario para que se permita el libre uso de los números reales en la Geometría Analítica o de coordenadas.

En conclusión, sin la Axiomática de Hilbert, la Geometría nunca hubiera podido superar la crisis que significó el descubrimiento de las fallas lógicas en que incurrió Euclides y en consecuencia, toda la obra de éste se hubiera perdido; sin embargo, por él, la Geometría adquirió un nuevo enfoque renovador, al punto que posteriormente se han encontrado nuevos sistemas de axiomas equivalentes a los de Hilbert.

5. Las Limitaciones De La Axiomática De Hilbert Y Un Teorema Paradójico En La Matemática.

De lo anteriormente expresado no debe pensarse que todas las teorías matemáticas pueden ser axiomatizadas al nivel logrado con la Geometría Euclídea. Un teorema paradójico, producto del matemático alemán Kurt Gödel y que lleva su nombre, afirma que "...si tenemos una teoría basada sobre un número finito de axiomas lo suficientemente rico como para permitir la construcción de la aritmética, se puede hallar una proposición indecidible en esa teoría..."[1]. Dicho con otras palabras (más simples), siempre podremos encontrar teorías matemáticas conteniendo teoremas que no se pueden demostrar a nivel de la teoría en mención exclusivamente, es decir, ningún sistema matemático, como los descritos por Gödel puede considerarse como completo.

---

1 WARUSFEL, André. Diccionario razonado de Matemáticas: De las Matemáticas clásicas a la Matemática moderna. Página 261.

Como consecuencia de dicha proposición, podemos considerar como objetables las pruebas realizadas a nivel del método de reducción al absurdo o indirectas, ya que podemos suponer que las proposiciones probadas por dichos métodos son indecidibles, hasta tanto no se obtenga una prueba de tipo constructivo o directa.

Este hecho dio al traste con el plan original de axiomatización general de la Matemática, que se quiso promover luego del éxito de la axiomatización de la Geometría.

6. Comentarios Finales.

Con todo y que lo planteado por Gödel en su teorema, es un hecho que se presenta consumado, los investigadores matemáticos consideran que todavía no se ha dicho la última palabra en ese tema. En consecuencia, siguen investigando, porque históricamente, se ha observado que la Matemática previamente a vivido períodos de crisis, para luego abocarse a épocas de gran fecundidad, entremezclados con períodos de revisión y reflexión, sobre sus contenidos.

No obstante, el mérito de ser el pionero en el renovamiento de la Geometría Clásica lo posee, indiscutiblemente, David Hilbert, gracias a su Axiomática.

BIBLIOGRAFÍA

1. BABINI, José. Historia de las ideas modernas en Matemática. Monografía número 4. Serie de matemática. Washington, D.C., E.U.A.: Departamento de Asuntos Científicos de la Unión Panamericana. Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos, 1970. 72 páginas.

2. BOYER, Carl B. Historia de la Matemática. Traducido por Mariano Martínez Pérez. Madrid, España: Alianza Editorial, 1986. 808 páginas.

3. CAMP, John; FERH, Howard F. y KELLOGG, Howard La revolución de las matemáticas escolares (segunda fase). Monografía número 13. Serie de matemática. Washington, D.C., E.U.A.: Departamento de Asuntos Científicos de la Unión Panamericana. Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos, 1970. 132 páginas.

4. COLLETTE, Jean Paul. Historia de las Matemáticas. Tomo I. Segunda Edición. Sin traductor. México, D. F., México: Siglo veintiuno, 1986. 338 páginas.

5. COLLETTE, Jean-Paul. Historia de las Matemáticas. Tomo II. Sin traductor. México D.F., México: Siglo XXI editores, 1986. 607 páginas.

6. COURANT, R. y ROBBINS, H. ¿Qué es la Matemática? Traducido por Luis Bravo Gala. Madrid, España: Aguilar, 1971. 533 páginas.

7. CHENG, Isidro. Reflexiones en torno al problema del Vº postulado. Monografía número 3. Serie de geometría y pedagogía. Panamá, Panamá: Universidad de Panamá, 1986. 22 páginas.

8. EVES, Howard. Estudio de las Geometrías. Tomo I. Traducido por Susana Blumovicz de Siperstein. México D.F., México: U.T.E.H.A., 1969. 469 páginas.

9. EVES, Howard. Estudio de las Geometrías. Tomo II. Traducido por Francisco Paniagua B. México D.F., México: U.T.E.H.A., 1969. 483 páginas.

10. PIAGET, J.; BETH, E. W.; DIEUDONNE, J.; LICHNEROWICZ, A.; CHOQUET, G.; GATTEGNO, C. La enseñanza de las Matemáticas. Traducido por Adolfo Maillo y Alberto Aizpun. Madrid, España: Aguilar, 1963. 181 páginas.

11. WARUSFEL, André. Diccionario razonado de Matemáticas: De las Matemáticas clásicas a la Matemática moderna. Traducido por Jaime Tortella y Carmen de Azcarate. Madrid, España: TECNOS, 1972. 498 páginas.