UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
FACULTAD DE INFORMÁTICA, ELECTRÓNICA Y COMUNICACIÓN
ESCUELA DE INFORMÁTICA
CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO DE VERAGUAS

MONOGRAFÍA:

INTEGRACIÓN NUMÉRICA POR EL MÉTODO DE LOS TRAPECIOS

PRESENTA:

RAÚL ENRIQUE DUTARI DUTARI

2006

TABLA DE CONTENIDOS

1. Observaciones Preliminares.

Cuando se realiza un experimento, generalmente, se obtiene una tabla de valores que, se espera, tenga un comportamiento funcional. Sin embargo, no se obtiene la representación explícita de la función que representa la regla de correspondencia entre las variables involucradas. En estos casos, la realización de cualquier operación matemática sobre la nube de puntos, que pretenda tratarla como una relación funcional, tropezará con dificultades considerables, al no conocerse la expresión explícita de dicha relación. Entre estas operaciones encontramos la integración de funciones.

Además, es conocido que existen relativamente pocas fórmulas y técnicas de integración, frente a la cantidad existente de funciones que se pueden integrar. Es decir, un gran número de integrales de funciones elementales no puede ser expresada en términos de ellas. Entre estos casos singulares tenemos, a manera de ejemplo:

$$\int e^{x^2}dx, \int \frac{dx}{\ln(x)}, \int \sqrt{1+x^3}\,dx, \int \sqrt{1+x^4}\,dx, \int \operatorname{sen}(x^2)dx, \cdots$$

Para aclarar la contradicción antes señalada, se debe recordar la condición necesaria para que una función sea integrable. Dicha condición se menciona de inmediato, sin demostración:

Proposición 1 (Condición Necesaria De Integrabilidad).

Si una función f es continua en el intervalo $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$. ♦

Los interesados en una demostración rigurosa de la Proposición 1 pueden ubicarla en HAASER, Norman B., LASALLE, Joseph P., y SULLIVAN, Joseph A. Análisis matemático 1: Curso de introducción, [8, 545].

No obstante que las condiciones de la Proposición 1 son sumamente generales, no se tiene garantía de que, al aplicar los métodos usualmente conocidos para resolver integrales, se puede encontrar la antiderivada de una función $f(x)$ cualquiera, necesaria para obtener la integral definida.

Esta monografía pretende ilustrar al lector con una de las técnicas básicas que permiten resolver dicha situación, a través de la denominada “INTEGRACIÓN APROXIMADA, POR EL MÉTODO DE LOS TRAPECIOS”.

2. El Método De Los Trapecios: Planteamiento General.

El método de los trapecios tiene su origen directamente en la interpretación geométrica de la “INTEGRAL DEFINIDA”.

Se debe recordar que la integral definida se puede interpretar como el área comprendida entre el eje de las abscisas, la función a integrar, y los límites de integración. Esta área es calculada a través de un proceso de paso al límite usando una partición del área total, generalmente en rectángulos y haciendo tender al infinito el número de rectángulos. La implementación numérica de este concepto, se conoce como “MÉTODO DE LOS RECTÁNGULOS”, y de hecho, este método se constituye en el soporte teórico de la solución de problemas de aplicación de integrales definidas.

La diferencia entre el método de los trapecios y el anterior método, consiste en que a la partición del área total, se le reemplazan los rectángulos usados originalmente, por otra figura geométrica que aproxime mejor el área buscada, particularmente, usando trapecios. Además, al igual que en método de los rectángulos, se eliminará el proceso de límite, de modo que el resultado obtenido será una aproximación del valor exacto.

3. Construcción Geométrica Del Método De Los Trapecios.

En este apartado se construirá la regla de los trapecios utilizando un enfoque basado en el planteamiento general, esbozado previamente. El mismo, se resume en la siguiente proposición.

Proposición 2 (Regla Compuesta De Los Trapecios).

Se considera una función $y = f(x)$, así como las rectas $x = x_1$, ..., $x = x_n$. Se supone que la distancia entre cada una de las parejas de valores de la abscisa x_i, x_{i-1} es constante y se denota como $\Delta x = x_i - x_{i-1} (i = 1, 2, 3, ..., n-1)$. Entonces:

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{1}{2}\left(y_1 + 2\sum_{i=2}^{n-1} y_i + y_n \right)\Delta x$$

Donde se denota a la ordenada de la función f en la abscisa x_i como $y_i = f(x_i)$ para $i = 1, 2, 3, ..., n.$

Demostración.

Se debe recordar que el área de un trapecio está dada por la fórmula:

$$A=\frac{1}{2}(y_1+y_2)\Delta x$$

donde Δx es la base del trapecio, en tanto que $y_1 \wedge y_2$ representan las alturas del mismo, como se observa en la siguiente ilustración:

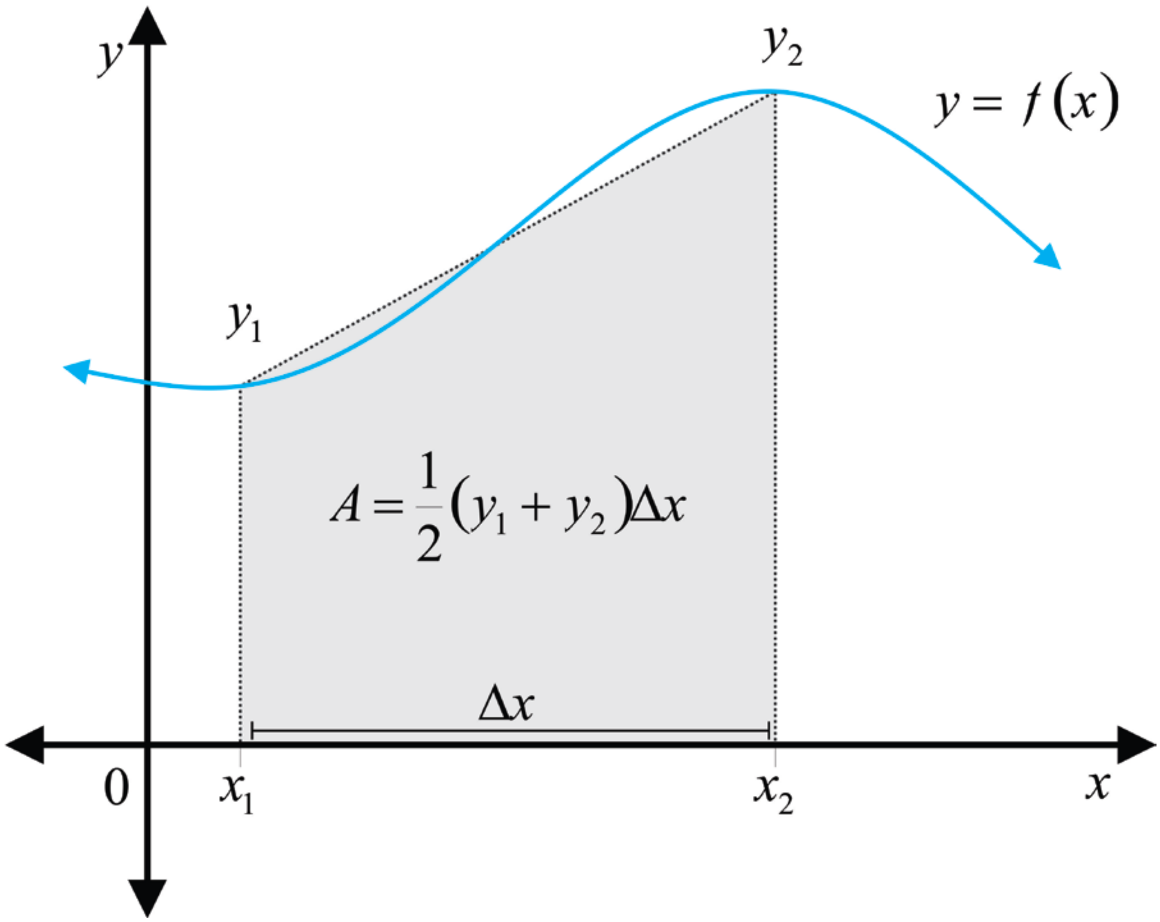

Ilustración 1

Se considera la función $y=f(x)$, y las rectas $x=x_1$, ..., $x=x_n$. Una buena aproximación al área bajo la curva de $f(x)$, se obtiene dividiéndola en $n-1$ fajas de longitud Δx y aproximando el área de cada faja mediante un trapecio, como se muestra en la siguiente ilustración:

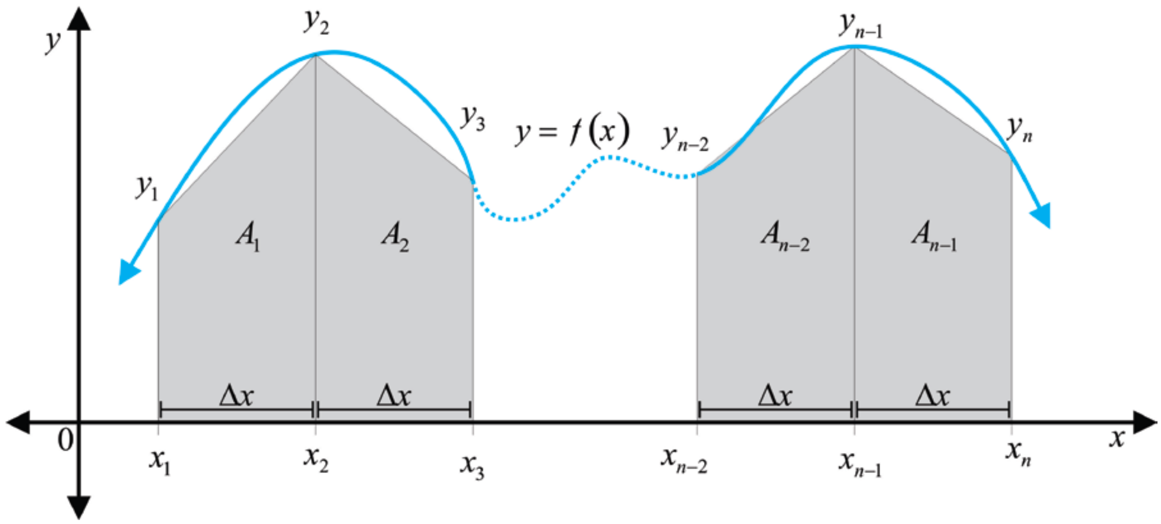

Ilustración 2

Por la definición de integral definida, el área que interesa calcular está dada por:

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)dx$$

Se considera que la distancia entre cada una de las parejas de valores de la abscisa: x_i, x_{i-1} es constante; y se denota como $\Delta x = x_i - x_{i-1}(i = 1, 2, 3, ..., n-1)$. Si se nombra a la ordenada de la función f en la abscisa x_i como $y_i = f(x_i)$ para $i = 1, 2, 3, ..., n,$ entonces, las áreas de los trapecios A_i $i = 1, 2, 3, ..., n-1,$ estarán definidas por:

$$A_i = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1})\Delta x \qquad \textbf{(1)}$$

En consecuencia, el área comprendida entre la función $y = f(x),$ el eje de las abscisas, y las rectas $x = x_1$ y $x = x_n$ será, aproximadamente, la suma de las áreas de los trapecios, es decir:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n-1} A_i = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x + \frac{1}{2}(y_2 + y_3)\Delta x + \ldots + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\Delta x$$

Ahora, al agrupar los términos de esta suma, adecuadamente, se obtiene:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n-1} A_i = \frac{1}{2}(y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \ldots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n)\Delta x$$

$$A \approx \frac{1}{2}\left(y_1 + 2\sum_{i=2}^{n-1} y_i + y_n \right)\Delta x \qquad \textbf{(2)}$$

La ecuación **(1)** es denominada como “REGLA DEL TRAPECIO”, en tanto que la ecuación **(2)** se conoce como “REGLA COMPUESTA DE LOS TRAPECIOS”.♦

A manera de aclaración, dentro de la integración numérica, se acostumbra denominar “FÓRMULA COMPUESTA”, a las ecuaciones que se obtienen a través de la aplicación repetitiva de las fórmulas básicas de integración, adaptadas para cubrir intervalos más amplios.

Es claro desde el punto de vista intuitivo, que si el valor de n crece y se repite la construcción sobre el intervalo $[x_1, x_n]$, se obtendrá un número mayor de divisiones, y se podrá mejorar la aproximación del área buscada, frente a la cuantificación anterior. Es decir, el “error” cometido al aproximar la integral de la función $f(x)$, en el intervalo $[x_1, x_n]$ a través de la regla compuesta de los trapecios, será cada vez menor.

Todo lo que se ha planteado a nivel geométrico parece ser correcto; sin embargo, es importante conocer más a fondo el fundamento matemático de este enfoque del problema. Es decir, determinar bajo qué condiciones específicas, se puede esperar que este planteamiento aproxime, “adecuadamente” el área que se desea cuantificar. Además, sería conveniente contar con una acotación del error cometido en nuestra aproximación.

4. Fundamentos Matemáticos Del Método De Los Trapecios: La Interpolación Polinomial.

Para justificar, matemáticamente, al método de los trapecios se debe obtener una manera de reemplazar la función $f(x),$ que originalmente se desea integrar, por otra función $g(x),$ que es una "buena aproximación", de $f(x),$ en los puntos $x_i,$ con $i = 1, 2, 3, ..., n.$ Es decir, si $f(x_i) \approx g(x_i), \forall x_i,$ con $i = 1, 2, 3, ..., n,$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_n} f(x_i)dx \approx \int_{x_1}^{x_n} g(x_i)dx.$$

Ambas funciones, evidentemente, deben cumplir la condición de integrabilidad establecida de antemano (Proposición 1). Es decir, son continuas en el intervalo de integración $[x_1, x_n].$ Lógicamente, surge la pregunta acerca de qué funciones permiten realizar esta "aproximación" tan particular.

Las funciones que permiten realizar esta acción son, las aplicaciones polinomiales. El fundamento de esta afirmación lo establece el "TEOREMA DE APROXIMACIÓN DE WEIERSTRASS". El resultado en mención se enuncia sin demostración:

Proposición 3 (Teorema De Aproximación De Weierstrass).

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[x_1, x_n],$ entonces, dado cualquier $\varepsilon > 0,$ existe un $n, n = n(\varepsilon),$ y un polinomio $P_n(x)$ de grado $n,$ tales que:

$\left| f(x) - P_n(x) \right| < \varepsilon, \forall x \in [x_1, x_n]$. ♦

Es decir, la Proposición 3 garantiza que: una función f, continua en un intervalo finito cerrado, puede ser aproximada, tanto como se desee, utilizando un polinomio de interpolación, de grado suficientemente elevado.

Los interesados en una demostración rigurosa de la Proposición 3 pueden ubicarla en BARTLE, Robert G. Introducción al análisis matemático, [2, 199].

Conociendo este resultado, se procede a estudiar un tipo particular de polinomio de interpolación: el polinomio de interpolación de Lagrange.

4.1. El Polinomio De Interpolación De Lagrange.

Para construir el polinomio de interpolación de Lagrange, se asume que se conocen n puntos del plano cartesiano, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, cuyas abscisas no están igualmente espaciadas.

Entonces, si se denomina a la ordenada de la función f en la abscisa x_i como $y_i = f(x_i)$ con $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, el polinomio de interpolación de Lagrange de orden n para estos puntos está definido por la función:

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) \cdot f(x_i) \tag{3}$$

donde:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \tag{4}$$

A continuación se prueban algunos resultados básicos de los polinomios de interpolación de Lagrange.

Proposición 4.

La función $P_n(x)$ define a un polinomio de grado $n-1,$ a lo sumo.

Demostración:

El fundamento de la prueba, que es inmediata, se encuentra en las características de las operaciones indicadas en las ecuaciones **(3)** y **(4)**.

En la ecuación **(4)**, debemos observar que, para $i=1,2,3,...,n,$ se cumple, por construcción, que:

- Todos los $L_i(x),$ consisten en funciones racionales, donde numerador y denominador consisten en el producto de $n-1$ diferencias de valores conocidos (las constantes x_i), y desconocidos (la variable x).

- El denominador de cada $L_i(x),$ es un número real (puesto que el producto de diferencias de números reales, es otro número real).

- El numerador de cada $L_i(x),$ no es más que la representación factorizada del polinomio cuyas raíces son, precisamente, los valores $x_j, j=1,2,3,...,n, j\neq i.$

- En consecuencia, cada $L_i(x)$ puede ser representado por una expresión de la forma:

$$L_i(x)=\alpha_i\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(x-x_j\right), \tag{5}$$

donde

$$\alpha_i=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{\left(x_i-x_j\right)}$$

- Luego, a través de operaciones algebraicas fundamentales, el miembro derecho de la ecuación (5) puede ser llevado a la forma:

$$L_i(x)=\alpha_i\sum_{k=0}^{n-1}a'_k x_k,a'_{n-1}\neq 0\wedge\alpha_i\neq 0$$

La última afirmación, sustenta el hecho de que $P_n(x)$ es la suma de funciones polinomiales, multiplicadas por constantes reales conocidas, es decir, es una función de la forma:

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_i x_i,a_{n-1}\neq 0$$

donde los $a_i,i=1,2,3,\ldots,n-1$ se definen con base a operaciones algebraicas fundamentales sobre los $a'_k,k=1,2,3,\ldots,n-1$. Es decir, $P_n(x)$ es un polinomio de grado $n-1$ a lo sumo.♦

Proposición 5.

El polinomio $P_n(x)$ posee $n-1$ raíces, cuando mucho.

Demostración.

Es inmediata, pues es ampliamente conocido que un polinomio de grado $n-1$ a lo sumo, posee $n-1$ raíces, cuando mucho, con base a los teoremas de descomposición primaria de polinomios (ver LANG, Serge. Álgebra lineal, [12, 281-].♦

Proposición 6.

El polinomio $P_n(x)$ satisface los valores conocidos de la función $y_i = f(x_i), i = 1, 2, 3, ..., n.$

Demostración.

Es inmediata, puesto que al evaluar a $L_i(x)$ en cada uno de los puntos x_k, con $k = 1, 2, 3, ..., n,$ se obtiene:

$$L_i(x_k) = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$$

y como

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) \cdot f(x_i)$$

Se obtiene que, al evaluar a $P_n(x)$ en un valor x_k, cualquiera, todos los sumandos de la expresión se anularán (cuando $i \neq k$), salvo uno (donde $i = k$). Luego, la expresión se reduce a:

$$P_n(x_k) = 0\,f(x_1) + 0\,f(x_2) + \ldots + 1\,f(x_k) + \ldots + 0\,f(x_n) = f(x_k) \quad \textbf{(6)}$$

y la ecuación **(6)** se satisface para $k = 1, 2, 3, ..., n,$ es decir, el polinomio de interpolación de Lagrange satisface, por construcción, a los valores conocidos de la función f. ♦

Proposición 7.

El polinomio $P_n(x)$ es el único que tiene las características antes señaladas en las proposiciones 4, 5 y 6.

Demostración.

La unicidad de $P_n(x)$ se prueba por reducción al absurdo. Así, se considera que existe otro polinomio de grado $n-1$ a lo sumo, que se denomina como $Q_n(x),$ y satisface a la nube de puntos dada, es decir:

$$y_i = P_n(x_i) = Q_n(x_i), \forall x_i, i = 1,2, ..., n$$

Lógicamente, se asume que $Q_n(x)$ es distinto de $P_n(x),$ en los otros puntos del intervalo definido por $[x_1, x_n],$ es decir:

$$P_n(x) \neq Q_n(x), \forall x \in [x_1, x_n], x \neq x_i, i = 1,2, ..., n.$$

Se construye otro polinomio $R(x),$ dado por la diferencia entre $Q_n(x)$ y $P_n(x),$ es decir:

$$R(x) = P_n(x) - Q_n(x)$$

Puesto que $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ son ambos de grado $n-1,$ a lo sumo, **el grado de** $R(x)$ **debe ser menor o igual que** $n-1,$ **por construcción (*)**.

Por otro lado, como $P_n(x_i)=Q_n(x_i), \forall x_i,$ con $i=1,2,3,...,n,$ se deduce que $R(x)$ se anula en n puntos del plano, es decir, $R(x)$ **es un polinomio de grado** n **(**)**.

Como las afirmaciones $(*)$ y $(**)$ son mutuamente contradictorias, termina la prueba y se concluye que el polinomio de interpolación de Lagrange es el único que tiene las características antes tratadas. ♦

Se debe observar que, todo lo antes expuesto, garantiza la siguiente proposición:

Proposición 8 (Existencia Y Unicidad Del Polinomio De Interpolación De Lagrange).

Si la función f es continua en el intervalo $[x_1, x_n],$ entonces se puede construir un único polinomio de interpolación de Lagrange $P_n(x)$ de grado $n,$ a lo sumo, tal que:

$$f(x_i)=P_n(x_i), \forall x_i, i=1,2,...,n$$

y que:

$$f(x)\approx P_n(x), \forall x\in[x_1,x_n] \, ♦$$

4.2. Construcción Analítica Del Método De Los Trapecios.

Ahora, si se replantea nuevamente el problema en estudio (resolver integrales definidas), utilizando toda la teoría previamente construida, se puede enfrentar la demostración de la Proposición 2 desde un punto de vista analítico y riguroso.

Proposición 2 (Regla Compuesta De Los Trapecios).

Se considera una función $y = f(x)$, así como las rectas $x = x_1$, ..., $x = x_n$. Se supone que la distancia entre cada una de las parejas de valores de la abscisa x_i, x_{i-1} es constante y se denota como $\Delta x = x_i - x_{i-1}(i = 1, 2, 3, ..., n-1)$. Entonces:

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{1}{2}\left(y_1 + 2\sum_{i=2}^{n-1} y_i + y_n \right)\Delta x$$

Donde se denota a la ordenada de la función f en la abscisa x_i como $y_i = f(x_i)$ para $i = 1, 2, 3, ..., n.$

Demostración.

Las propiedades básicas de la integral definida permiten afirmar que:

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

donde $x, x_i \in [x_1, x_n], i = 1, 2, 3, ..., n.$

Para cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ con $i = 1, 2, 3, ..., n-1,$ se construye el polinomio de interpolación de Lagrange respectivo. Su ecuación está dada por:

$$P_2(x) = \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} f(x_i) + \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} f(x_{i+1}), \quad \textbf{(7)}$$

donde $i = 1, 2, 3, ..., n-1$. La ecuación **(7)** puede ser replanteada, al factorizarla adecuadamente, como:

$$P_2(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} x + \frac{x_{i+1} f(x_i) - x_i f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} \quad \textbf{(8)}$$

Para obtener una idea de lo que representa la ecuación **(8),** se debe observar que simboliza la formulación analítica de una línea recta, en la forma pendiente-ordenada en el origen, planteada en base a los valores conocidos de la función en los extremos del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ con $i = 1, 2, 3, ..., n-1$.

Luego, al integrar a $P_2(x)$ en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ se obtiene:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_2(x)dx = \frac{(x_{i+1} - x_i)[f(x_i) + f(x_{i+1})]}{2} = \frac{\Delta x[f(x_i) + f(x_{i+1})]}{2}$$

ya que por hipótesis, es conocido que $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, con $i = 2, 3, ..., n$.

Ahora, el Teorema de aproximación de Weierstrass (Proposición 3) garantiza que, en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $P_2(x)$ representa una buena aproximación de la función f, de modo que se puede afirmar que:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_2(x)dx \quad \textbf{(9)}$$

De este modo, al reemplazar cada una de las integraciones de $f(x)$ por su respectiva aproximación, a través de la integración de $P_2(x)$ en cada uno de los subintervalos, se obtiene:

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x + \frac{1}{2}(y_2 + y_3)\Delta x + \ldots + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\Delta x$$

$$\approx \frac{1}{2}(y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \ldots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n)\Delta x$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(y_1 + 2\sum_{i=2}^{n-1} y_i + y_n\right)\Delta x$$

recordando que $y_i = f(x_i)$ con $i = 1, 2, 3, ..., n,$ lo que completa la prueba de la proposición.♦

5. El Error Por Truncamiento En El Método De Los Trapecios.

Aún está presente la incógnita de “qué tan precisa” es la aproximación realizada por el método de los trapecios, frente a la que se obtendría si se pudiera realizar la integración aplicando los conceptos de antiderivada. A continuación, se presentan resultados que son conocidos y que despejan esta incógnita.

Se nombrará como “ERROR POR TRUNCAMIENTO”, a la diferencia que existe entre un valor, que se considera preciso y exacto, y otro valor, que aproxima al valor preciso y exacto.

Según este planteamiento, se tiene que determinar, en primer término, cual es el grado de aproximación que garantiza el polinomio de interpolación de Lagrange, es decir, cuantificar una función $\mathrm{E}(x)$ de modo que:

$$f(x) = P_n(x) + \mathrm{E}(x), \forall x \in [x_1, x_n]$$

en consecuencia:

$\mathrm{E}(x) = f(x) - P_n(x)$

A continuación se enuncia, sin demostración, un proposición donde se define el valor de $\mathrm{E}(x)$ que satisface la última igualdad.

Proposición 9.

Si la función f es continua en orden $(n+1)$ en el intervalo $[x_1, x_n]$, entonces, para cada $x \in [x_1, x_n]$, existe un único $\lambda \in (x_1, x_n)$, tal que:

$$f(x) = P_n(x) + E(x)$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio de interpolación de Lagrange de grado n, de la función f en $[x_1, x_n]$, y $E(x)$ se define como:

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\lambda)}{(n+1)!} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \qquad \textbf{(10)}$$

con $f^{(n+1)}$ denotando a la derivada de orden $(n+1)$ de la función f. ♦

Es decir, la Proposición 9 garantiza que existe una función polinomial, que acota el error que se comete al interpolar a una función cualquiera utilizando polinomios de interpolación de Lagrange.

Los interesados en una demostración rigurosa de la Proposición 9 pueden ubicarla en NAKAMURA, Shoichiro. <u>Métodos numéricos aplicados con software,</u> [16, 527].

Ahora se Considera como acotar a $\int E(x)dx$ dentro de uno de los subintervalos de $[x_1,x_n]$, por ejemplo $[x_1,x_n], i=1,2,\ldots,n-1$. La siguiente proposición permite realizar dicha acotación.

Proposición 10.

Si la función f es continua de orden 2 en el intervalo $[x_1,x_n]$, entonces:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} E(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(x)-P_n(x)\right)dx \le \frac{\left|(x_{i+1}-x_i)^3 M_i^2\right|}{12}$$

donde:

$$M_i^2 = \max\left\{f^{(2)}(x),: x_i \le x \le x_{i+1}\right\}.$$

Demostración.

Para el caso particular en estudio, se debe recordar que $P_n(x)$ representa a una función lineal (ecuación **(7)**), de modo que la ecuación **(10)** se puede reducir a:

$$E(x) = \frac{f^{(2)}(\lambda)}{2}(x-x_i)(x-x_{i+1}) = f(x)-P_n(x) \qquad \textbf{(11)}$$

donde $x \in [x_i,x_{i+1}]$.

Ahora, se debe garantizar la existencia de $\lambda \in [x_i, x_{i+1}]$ para que la ecuación **(11)** tenga sentido. Así, se representará al máximo y mínimo locales de $f^{(2)}$ en $[x_i,x_{i+1}]$, como $M_i^2 \wedge m_i^2$, respectivamente. Puesto que f es continua de orden 2

en el intervalo $[x_1, x_n]$, el teorema del valor intermedio permite afirmar que $\exists\lambda \in [x_i, x_{i+1}]$ tal que:

$$m_i^2 \le f^{(2)}(\lambda) \le M_i^2 \tag{12}$$

Si se aplica la desigualdad **(12)** en la ecuación **(11),** de modo que se calcule una acotación, se obtiene que:

$$E(x) = \frac{f^{(2)}(\lambda)}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1}) \le \frac{M_i^2}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1}) \tag{13}$$

Al integrar la desigualdad **(13),** miembro a miembro, en el intervalo $[x_1, x_2]$, se obtiene que:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} E(x)dx \le \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2} M_i^2 dx$$

$$\Rightarrow \int_{x_i}^{x_{i+1}} E(x)dx \le M_i^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2} dx \tag{14}$$

pues M_i^2 no depende de x en todo el intervalo $[x_1, x_n]$, y como:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2} dx = -\frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{12} \tag{15}$$

al reemplazar la ecuación **(15)** en la desigualdad **(13)**, y aplicar las reglas comunes del álgebra, se logra:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} E(x)dx \leq -\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{12} M_i^2$$

ahora, se debe recordar que:

$$-\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{12} M_i^2 \leq \frac{\left|(x_{i+1}-x_i)^3 M_i^2\right|}{12}$$

finalmente, se realiza la mayoración:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} E(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(x)-P_n(x)\right)dx \leq \frac{\left|(x_{i+1}-x_i)^3 M_i^2\right|}{12}$$

donde:

$$M_i^2 = \max\left\{f^{(2)}(x),: x_i \leq x \leq x_{i+1}\right\}. \blacklozenge$$

Corolario 1.

Si la función f es continua en orden (2) en el intervalo $[x_1, x_n]$, entonces, el error cometido al aproximar a $\int_{x_1}^{x_n} f(x)dx$ utilizando el método de los trapecios, no puede ser mayor que:

$$\int_{x_1}^{x_n} E(x)dx < \frac{\left|(x_n-x_1)^3 M^2\right|}{12(n-1)^2}$$

donde:

$$M^2 = \max\left\{f^{(2)}(x),: x_1 \leq x \leq x_n\right\}.$$

Demostración.

La aplicación sucesiva de la Proposición 10, a lo largo de todo el intervalo $[x_1, x_n]$, conduce a la desigualdad:

$$\int_{x_1}^{x_n} E(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} E(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} E(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\left|(x_{i+1} - x_i)^3 M_i^2\right|}{12} \qquad \textbf{(16)}$$

Además, al recordar que la distancia entre cada uno de los valores de la abscisa es constante, y se tienen $n-1$ subintervalos en $[x_1, x_n]$, de modo que:

$$x_{i+1} - x_i = \frac{x_n - x_1}{n-1} \Rightarrow (x_{i+1} - x_i)^3 = \left(\frac{x_n - x_1}{n-1}\right)^3 \qquad \textbf{(17)}$$

luego, reemplazando la ecuación **(17)** en la ecuación **(16)**, se obtiene:

$$\int_{x_1}^{x_n} E(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\left|\frac{(x_n - x_1)^3 M_i^2}{(n-1)^3}\right|}{12}$$

Ahora, como $n \in \mathrm{N} \Rightarrow n > 0,$ luego se puede afirmar, sin pérdida de generalidad, que:

$$\int_{x_1}^{x_n} E(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\left|\frac{(x_n - x_1)^3 M_i^2}{(n-1)^3}\right|}{12} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\left|(x_n - x_1)^3 M_i^2\right|}{12(n-1)^3}$$

Por otro lado, sea $M^2 = \max\{M_1^2, M_2^2, \ldots, M_{n-1}^2\},$ como $M^2 \geq M_i^2, i = 1,2,\ldots, n-1.$ Al mayorar a todas las M_i^2 por $M^2,$ se obtiene la expresión:

$$\int_{x_1}^{x_n} E(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\left|(x_n - x_1)^3 M_i^2\right|}{12(n-1)^3} < \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\left|(x_n - x_1)^3 M^2\right|}{12(n-1)^3}$$

luego, al realizar las operaciones indicadas en la sumatoria, se logra finalmente que:

$$\int_{x_1}^{x_n} E(x)dx < \frac{\left|(x_n - x_1)^3 M^2\right|}{12(n-1)^2} \qquad \textbf{(18)}$$

lo que culmina la prueba.♦

Corolario 2.

Si la segunda derivada de la función f es nula, $\forall x \in [x_1, x_n]$, entonces el resultado obtenido a través de la aplicación del método de los trapecios, en dicho intervalo, será exacto.

Demostración.

Basta con observar que al construir la cota del error en el Corolario 1, se asume, implícitamente, que $M^2 \neq 0$, es decir, se trabaja con base de que la segunda derivada de la función f en el intervalo $[x_1, x_n]$, no se hace cero, pues si se anulara en dicho intervalo, la desigualdad **(18)** sería acotada por un valor nulo.♦

6. Dos Ejemplos Elementales Del Método De Los Trapecios.

Para ilustrar la forma en que se debe aplicar el método de los trapecios, presentamos, a continuación, dos ejemplos elementales.

- Aproximar a $\int_{0.00}^{5.00}(2x+1)dx$ utilizando 5 subintervalos y estime una cota del error cometido en la integración del primer subintervalo (trabaje sin cifras decimales).

Se tiene que $\Delta x = \frac{5-0}{5} = 1$

Por otro lado, los cálculos de los valores de las ordenadas se resumen en el siguiente cuadro:

x	k	f(x)=2x+1	kf(x)
0	1	1	1
1	2	3	6
2	2	5	10
3	2	7	14
4	2	9	18
5	1	11	11
Suma			60

Finalmente, el valor de la integral será:

$$I = \frac{1}{2}(1)(60) = 30.$$

Por otro lado, fácilmente se puede comprobar que la segunda derivada de la función a integrar se anula en todo el intervalo de integración, por lo que el valor antes obtenido para la integral, es exacto.

- Aproximar a $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ utilizando 5 subintervalos y estime una cota del error cometido en la integración del primer subintervalo (trabaje con 5 cifras decimales).

Tenemos que $\Delta x = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$

Por otro lado, los cálculos de los valores de las ordenadas los tenemos resumidos en el siguiente cuadro:

x	k	f(x)=1/x	kf(x)
1.00000	1	1.00000	1.00000
1.20000	2	0.83333	1.66667
1.40000	2	0.71429	1.42857
1.60000	2	0.62500	1.25000
1.80000	2	0.55556	1.11111
2.00000	1	0.50000	0.50000
Suma			6.95635

Finalmente, el valor de la integral será:

$$I = \frac{1}{2}(0.2)(6.95635) = 0.69563.$$

Por otro lado, fácilmente se puede comprobar que la segunda derivada de la función a integrar no se anula en todo el intervalo de integración, puesto que:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x^3}\neq 0,\Leftrightarrow x^3\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0,\forall x\in[1,2].$$

por lo que el valor antes obtenido para la integral, no es exacto.

Para cuantificar el error cometido en la aproximación, se aplica la ecuación **(18).** Se debe observar que el valor máximo de la segunda derivada del integrando, se presenta cuando la variable x asume el valor $x=1$. Luego, se puede afirmar que:

$$M^2=\frac{2}{1^3}=2$$

Por otro lado, es obvio que $x_1=1, x_n=2\wedge n=5,$ de modo que nuestra cota del error cometido será:

$$\int_{x_1}^{x_n} E(x)dx<\frac{\left|(x_n-x_1)^3M^2\right|}{12(n-1)^2}=\frac{\left|(2-1)^3 2\right|}{12(5-1)^2}=\frac{1}{96}\approx 0.01041=1.041\%$$

es decir, el porcentaje de error cometido no es mayor que un 1.1%, al comparar el valor obtenido al aplicar el método de los trapecios, frente al que se obtendría si realizamos la integración utilizando métodos exactos.

7. Otras Fórmulas De Integración Aproximada.

Se puede repetir la construcción de polinomios de interpolación de Lagrange, aplicando fórmulas de interpolación de mayor grado, de modo que se obtienen fórmulas de integración aproximada, más precisas que las obtenidas hasta el momento.

Esta afirmación se basa en lo establecido por el teorema de Weierstrass (Proposición 3). Al ser realizado este proceso, en general, se obtienen las "FÓRMULAS DE NEWTON-COTES". Las Fórmulas de Newton-Cotes tienen la forma general:

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)dx = C\left(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i\right)\Delta x$$

Dentro de ellas, el método de los trapecios es un caso particular, pues si $n = 2, C = \frac{1}{2}, \wedge c_1 = c_2 = 1,$ obtenemos a la fórmula de los trapecios para el intervalo $[x_1, x_2]$.

Otro método de integración numérica, muy conocido, que se deriva como otro caso particular de las Fórmulas de Newton-Cotes es la Regla de Simpson de $\frac{1}{3}$, cuya formulación está dada por:

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{1}{3}\left(y_1 + 4\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} y_{2i} + 2\sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} y_{2i+1} + y_n\right)\Delta x \qquad \textbf{(19)}$$

Donde $y_i = f(x_i)$ con $i = 1, 2, 3, ..., n.$ El método, tal como aparece planteado en la ecuación **(19)**, requiere que el número de valores conocidos $y_i = f(x_i)$ sea impar, es decir; $n = 2k + 1, k \in \mathrm{N}.$

La regla de Simpson tiene su origen al realizar la aproximación de la función f en el intervalo $[x_1, x_n]$, utilizando un polinomio de interpolación de Lagrange de segundo grado. Su sentido geométrico consiste en aproximar la función utilizando una parábola, en vez de la línea recta que utiliza el método de los trapecios.

Se puede obtener mayores detalles acerca de éste método en la bibliografía que acompaña a este documento.

8. Observaciones Finales.

Con base a lo que se ha tratado en esta exposición, no se debe pensar que la integración aproximada es un tema completamente resuelto. En efecto, el control de los distintos tipos de error que se involucran en los procesos de cálculo, principalmente a realizar la aproximación práctica de la integral, presentan problemas que aún no han sido resueltos a satisfacción.

Así, a manera de estímulo para la investigación en el tema, se pueden señalar algunas de estas situaciones problema, así como algunas referencias bibliográficas donde se puede profundizar en dichos tópicos.

Hasta este momento, sólo se trató el caso del error por truncamiento en la aproximación trapezoidal, asumiendo que todos los cálculos involucrados en el proceso son exactos y precisos (es decir, se cuenta con una cantidad infinita de cifras decimales en cada uno de los números involucrados en las operaciones aritméticas).

Sin embargo, existen otros tipos de errores inmersos en el proceso de aproximación de la integral, que dependen de la cantidad de cifras significativas que se manipulan, y contribuyen a que la respuesta obtenida por el método, varíe más de lo que se podía esperar.

Por otro lado, la reducción descontrolada de la longitud de los subintervalos, y en consecuencia el aumento de la cantidad de subintervalos, en combinación con la consideración de los errores por redondeo acumulado en los cálculos, conduce a otro problema: la pérdida de convergencia a la solución buscada. Es decir, elevar la cantidad de subintervalos de manera arbitraria, no conduce, en la práctica, a un aumento en la precisión de los cálculos. Más allá de ciertas proporciones, dicho incremento hace que el error por truncamiento sea reemplazado por errores por redondeo, de mayor intensidad que los reemplazados.

Una discusión amplia acerca de estos temas se encuentra en MCCRAKEN, Daniel D., y DORN, William S. Métodos numéricos y programación FORTRAN, [15, 183].

Todo lo antes señalado indica que la integración numérica es un tema donde se puede realizar descubrimientos y avances del conocimiento en las Ciencias Exactas.

9. Referencias Bibliográficas

1. ALLEN SMITH, W. Análisis Numérico. Traducido por Francisco Javier Sánchez Bernabe. Primera edición. México, D.F., México: Prentice-Hall, 1988. 608 páginas.

2. BARTLE, Robert G. Introducción al análisis matemático. Traducido por María Cristina Gutiérrez González. Primera edición. Primera edición. México, D.F., México: Noriega Limusa, 1980. 519 páginas.

3. BURDEN, Richard L., y FAIRES, J. Douglas. Análisis numérico. Traducido por Simón Mochón C. Primera Edición. México D.F., México: C.E.C.S.A., 1985. 721 páginas.

4. CHAPRA, Steven, y CANALE, Raymond P. Métodos numéricos para ingenieros con aplicaciones en computadoras personales. Traducido por Carlos Zapata S. Primera edición. México D.F., México: McGraw-Hill, 1990. 641 páginas.

5. CONTE, S. D., y DE BOOR, Carl. Análisis numérico. Traducido por Hernando Alfonso Castillo. Segunda Edición. México D.F., México: McGraw-Hill, 1991. 418 páginas.

6. GERALD, Curtis. Análisis numérico. Traducido por Jaime Luis Valls Cabrera. Primera Edición. México D.F., México: Representaciones y Servicios de Ingeniería, 1987. 631 páginas.

7. JAMES, Merlin L, SMITH, Gerald M., y WOLFORD, James C. Métodos numéricos aplicados a la computación digital con FORTRAN. Traducido por José A. Nieto Ramírez. Primera edición. México, D.F., México: Representaciones y Servicios de Ingeniería, 1973. 575 páginas.

8. HAASER, Norman B., LASALLE, Joseph P., y SULLIVAN, Joseph A. Análisis matemático 1: Curso de introducción. Traducido por Federico Velasco Coba. Primera edición. México, D.F., México: Trillas, 1970. 808 páginas.

9. HENRICE, Peter. Elementos de análisis numérico. Traducido por Federico Velasco Coba. Primera edición. México, D.F., México: Trillas, 1972. 363 páginas.

10. KAPLAN, Wilfred. Cálculo avanzado. Traducido por Miguel Lara Aparicio. Primera Edición. México D.F., México: C.E.C.S.A., 1985. 912 páginas.

11. KITCHEN, JR., Joseph W. Cálculo. Traducido por Lorenzo Abellanas Rapún. Primera Edición. México D.F., México: McGraw-Hill, 1987. 863 páginas.

12. LANG, Serge. Álgebra lineal. Traducido por Miguel Lara Aparicio. Primera Edición, México, D. F. México: 1976. 400 páginas.

13. LEITHOLD, Louis. El cálculo con geometría analítica. Traducido por Antonio Eroles Gómez. Sexta Edición. México D.F., México: Harla, 1992. 1563 páginas.

14. LUTHE, Rodolfo, OLIVERA, Antonio, y SCHUTZ, Fernando. Métodos numéricos. Primera edición. México, D.F., México: Limusa, 1986. 443 páginas.

15. MCCRAKEN, Daniel D., y DORN, William S. Métodos numéricos y programación FORTRAN. Traducido por José A. Nieto Ramírez. Primera edición. México, D.F., México: Limusa, 1986. 476 páginas.

16. NAKAMURA, Shoichiro. Métodos numéricos aplicados con software. Traducido por Oscar Alberto Palmas Velasco. Primera Edición. México D.F., México: Prentice-Hall, 1992. 570 páginas.

17. NIKOLSKI, S. Fórmulas de cuadratura. Traducido por K. P. Medkov. Primera Edición. Moscú, U.R.S.S.: Mir, 1990 291 páginas.

18. RALSTON, Anthony. Introducción al análisis numérico. Traducido por Carlos E. Cervantes de Gortari. Primera edición. México, D.F., México: Limusa, 1970. 629 páginas.

19. SCHEID, Francis. Análisis numérico. Traducido por Hernando Alonso Castillo. Primera Edición. México D.F., México: McGraw-Hill, 1972. 422 páginas.

20. SCHEID, Francis, y Di Constanzo, Rosa Elena. Métodos numéricos. Traducido por Gabriel Nagore Cázares. Segunda Edición. México D.F., México: McGraw-Hill, 1991. 709 páginas.

21. STIEFEL, Eduard. Introducción a la matemática numérica. Traducido por Miguel Jeréz Juan. Tercera Edición. Barcelona, España: Labor, 1966. 308 páginas.

22. SWOKOWSKI, Earl W. Cálculo con Geometría Analítica. Traducido por José L. Abreu y Martha Olivero. Segunda Edición. México D.F., México: Grupo editorial Iberoamérica, 1991. 1097 páginas.