UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO DE VERAGUAS

MONOGRAFÍA:

LAS GEOMETRÍAS EUCLIDIANA Y NO EUCLIDIANAS Y EL PROGRAMA DE ERLANGEN DE KLEIN

PRESENTA:

RAÚL E. DUTARI D.

1995

TABLA DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

La Geometría, sin duda alguna, ha sido uno de los motores en el desarrollo de la matemática desde la antigüedad. Sin embargo, la mayoría de nuestros estudiantes a nivel de licenciatura sólo conocen una parte superficial de sus contenidos actuales, y prácticamente nada acerca de su evolución histórica, desde los tiempos de Euclides hasta nuestros días. Por otro lado, los cursos de Historia de la Matemática, no le dan suficiente importancia a este tema, por la extensión de sus contenidos.

En tal sentido, esta monografía pretende brindar un aporte, pequeño pero significativo, en el conocimiento de esta rama de la Matemática. Ella, intenta darnos información elemental acerca del origen, desarrollo histórico, semejanzas, diferencias e importancia de las Geometrías Euclidiana y no Euclidianas clásicas. Además, trataremos de orientar en general al lector, acerca de lo que es el Programa de Erlanger; en lo referente a su origen, desarrollo histórico, objetivos y proyecciones futuras.

Hemos intentado enfocar los temas en una forma secuencial y lógica, tan completa como nos ha sido posible, pero planteando la información en la forma más elemental que se pudo, de modo que los conocimientos previos requeridos para comprender el contenido de este trabajo son mínimos.

1. Observaciones Preliminares: Descripción Del Método Axiomático.

Según el Método Axiomático, para probar un teorema dentro de un sistema deductivo, debemos establecer que el mismo es una consecuencia lógica y necesaria de proposiciones previamente probadas, o de las proposiciones que se aceptan como verdaderas sin prueba: los llamados axiomas o postulados. De estos ellos, en consecuencia, debemos tratar de probar todos las proposiciones de nuestro sistema deductivo. La elección de un sistema de axiomas es básicamente arbitraria. No obstante, se espera que reúnan las siguientes características:

- ⇒ Que sean pocos axiomas.
- ⇒ Que tengan un planteamiento simple.
- ⇒ Que sean compatibles, en el sentido de que no se llegue a proposiciones contradictorias, partiendo de ellos.
- ⇒ Que sean suficientes, de modo que todo el sistema deductivo se pueda deducir de ellos.
- ⇒ Que sean independientes, en el sentido de que ninguno de los axiomas sea una consecuencia lógica de los restantes.

Es importante aclarar que para los griegos antiguos, las palabras “axioma” y “postulado” tenían significados distintos a los que les damos actualmente. Para ellos, un axioma, es una suposición inicial que pertenece a todos los estudios que se realizan; mientras que un postulado, es una suposición inicial que pertenece al estudio que se lleva a cabo en particular. Esta distinción la estableció Euclides posiblemente, y en la actualidad no es tomada en cuenta (estas palabras se consideran sinónimos).

2. Los “Elementos” De Euclides: Un Breve Relato Acerca De Su Origen Histórico.

La obra cumbre de Euclides de Alejandría: Los “Elementos”, se considera con todo derecho, el primer gran progreso en la historia del pensamiento y la organización en el campo de las Matemáticas. Su impacto ha sido enorme, al punto que un número sorprendente de desarrollos importantes posteriores a su aparición, se inspiran en ella.

Contrariamente a la creencia popular, Los Elementos no constan exclusivamente de Geometría. Consisten en la recopilación de los principios matemáticos más importantes de la época helénica antigua. Abarca áreas como la Teoría de los Números (estudia entre otras cosas, las relaciones de divisibilidad en el conjunto Z) y el Álgebra Geométrica (expresión de magnitudes algebraicas en forma geométrica).

Euclides (se supone), en ningún momento pretendió atribuirse la originalidad del material contenido en los Elementos. Más bien, intentó construir una sucesión lógica, partiendo de un conjunto pequeño de suposiciones iniciales (lo alcanzó con gran destreza; se valió de la Lógica Aristotélica, para unificar y sostener su construcción); de modo que en ella, se desarrollara en forma paulatina todo el conocimiento matemático de la época. Su mérito principal consiste en que la obra fue la primera en su género.

En la actualidad, no se conoce ninguna copia de Los Elementos, que sea contemporánea a la época de vida de su autor. La versión más antigua conocida, es un ejemplar que reposa en los archivos de la Biblioteca del Vaticano, y fue rescatado del olvido a principios del siglo XIX. Fuera de éste, las ediciones modernas de Los Elementos, se basan en una revisión preparada por Teón de Alejandría, casi 700 años después de la publicación original.

3. El Contenido De Los Elementos.

En los trece libros que componen Los Elementos, se encuentran un total de 465 proposiciones. En esencia, la obra puede describirse como se muestra a continuación: El libro I empieza con las definiciones, postulados y axiomas básicos. Luego desarrolla los resultados más importantes de las teorías de: triángulos, paralelismo y congruencia, paralelogramos y cuadrados. El libro II, desarrolla el Álgebra Geométrica. Los libros V y VI; construyen la teoría de las proporciones, y la aplican a la Geometría Plana. Los libros VII, VIII y IX; se refieren al desarrollo de la Teoría de Números. El libro X, trata la Teoría de los Números Irracionales. Y finalmente; los libros XI, XII, y XIII; tratan en general, la Geometría Sólida o del Espacio.

Más detalladamente, el libro I establece las definiciones, postulados y axiomas preliminares, necesarios para el desarrollo de la obra. Se inicia abruptamente con una lista de 23 definiciones, de entes geométricos tales como: punto, recta, ángulo, arista, etc.; sin ningún tipo de introducción o preámbulo. Posteriormente, presenta una lista de cinco Postulados y cinco Nociones Comunes, que citamos a continuación:

“Postulados:

Postúlese lo siguiente:

Trazar una recta desde un punto a otro cualquiera.

Prolongar una línea recta finita de manera continua a otra línea recta.

Describir un círculo con cualquier centro y cualquier radio.

Todos los ángulos rectos son iguales.

Si una línea recta corta a otras dos líneas rectas formando con ellas ángulos internos del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado por el cual los ángulos internos son menores que dos ángulos rectos.

Nociones comunes:

Cosas que son iguales a la misma cosa son iguales entre sí.

Si iguales se suman a iguales, los resultados son iguales.

Si iguales se restan de iguales, los restos son iguales.

Cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí.

El todo es mayor que la parte.”[1]

Para Euclides, las Nociones Comunes son equivalentes a nuestros Axiomas de Congruencia. En tanto, respecto a los Postulados, los tres primeros

---

1 BOYER, Carl B. Historia de la Matemática. Página 147.

establecen la existencia y unicidad de la recta; el cuarto, establece la existencia de las circunferencias (conocidos su centro y radio respectivos); mientras que el Quinto Postulado, establece vínculos entre rectas y crea básicamente la Geometría Euclidiana que conocemos.

Euclides no estableció vínculos entre circunferencias o entre circunferencias y rectas, fundamentándose en que la circunferencia era una figura “definida”, en contraste con la recta que no lo era (los antiguos griegos, consideraban a una figura definida, como “finita”, en el sentido moderno).

Posteriormente, el libro prosigue con 48 proposiciones, divididas en tres grupos. En el primer grupo de proposiciones (las 26 primeras), se tratan las propiedades de los triángulos, incluyendo las proposiciones de Congruencia de Triángulos conocidas universalmente (los criterios de congruencia: lado, ángulo, lado ó L.A.L.; ángulo, lado, ángulo ó A.L.A.; lado, lado, lado ó L.L.L.).

En el segundo grupo (proposiciones 27 a la 32), se desarrolla toda la Teoría de las Paralelas, demostrando que la suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera, es igual a dos ángulos rectos.

El resto de las proposiciones del libro I, tratan de paralelogramos, triángulos y cuadrados, con referencias especiales a las relaciones de áreas. Las proposiciones 47 y 48 son, respectivamente, el Teorema de Pitágoras y su recíproco. El material de este libro se supone, fue desarrollado por los primeros miembros de la Escuela pitagórica.

En el libro II, se desarrolla el Álgebra Geométrica griega de los pitagóricos, entre otras cosas. Se encuentran equivalentes geométricos de varias identidades algebraicas. En la parte final del libro, hay dos proposiciones que establecen la “Ley de los Cosenos”, que es una generalización del Teorema de Pitágoras, dada por:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle$$

El libro III, contiene teoremas acerca de las circunferencias (cuerdas, tangentes y medición de ángulos relacionados, entre otras cosas), que normalmente se tratan en la geometría de nivel secundario. Como ejemplo, está el Teorema de Thales (todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto).

En el libro IV, se desarrollan las construcciones pitagóricas (con regla y compás), de los polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 y 15 lados.

En el libro V, se desarrolla la Teoría de la Proporción, como la ideó su creador: Eudoxio de Cnido. Esta teoría, es aplicable a magnitudes conmensurables e inconmensurables; fue la que resolvió el “escándalo lógico”, creado con el descubrimiento de los Números Irracionales, por los pitagóricos.

En el libro VI, se aplica la teoría eudoxiana de la proporción a la geometría plana, en el empleo de ésta para la construcción de la media, tercera, y cuarta proporcionales; teoremas fundamentales de triángulos semejantes; y la solución geométrica de la ecuación cuadrática; entre otras cosas.

Los libros VII, VIII y IX, tratan la Teoría de Números, conteniendo 102 proposiciones acerca de esta importante rama de la Matemática.

En el libro X, se trata la Teoría de los Números Irracionales. Esta teoría es atribuida a Theætetus originalmente, pero su elaboración refinada se le acredita a Euclides. En este libro, se encuentra la primera demostración por reducción al absurdo que se recuerda de que $\sqrt{2}$ 1 es irracional; se le atribuye a Euclides.

Los tres libros restantes (XI, XII y XIII), tratan en general, la Geometría Sólida o del Espacio, abarcando la mayor parte del material tratado en los textos de secundaria (excepto los temas relativos a esferas). Las definiciones y teoremas relativos a rectas y planos en el espacio, se encuentran en el libro XI. Los volúmenes, se tratan en el libro XII. Finalmente, las construcciones de poliedros regulares se dan en el libro XIII; terminando así la obra.

4. Los Errores Lógicos De Los Elementos.

A lo largo del contenido de Los Elementos; se puede observar que Euclides cometió errores lógicos en su confección. Estos, no le restan méritos a su obra, ya que hubiera sido admirable, que este intento antiguo y colosal de axiomatización, estuviera exento de errores.

Su primera falla, fue intentar definir objetos o cosas, tales como: la línea recta (es una línea cuyos todos sus puntos “yacen uniformemente”), una arista (algo que es el extremo de cualquier cosa), o una superficie (algo que sólo tiene longitud y anchura); sin establecer claramente sus términos indefinidos. Como consecuencia de esto, se deslizaron en el sistema euclidiano imperfecciones lógicas. Por ejemplo, ¿cómo se podría definir la frase: “yacer uniformemente”?

Euclides no consideró el concepto de orden, o de “entre” dos cosas dadas, como postulado. No precisa cuando un punto se encuentra entre otros dos, ni distingue los puntos interiores de los exteriores, en un triángulo dado.

En adición a lo anterior, asumió implícitamente la infinitud de la recta. Y además, adoptó un sistema incompleto de postulados. No es posible demostrar todas las proposiciones contenidas en Los Elementos, a partir de los Postulados, las Nociones Comunes, y los Términos no Definidos de Euclides. Esta deficiencia lleva a paradojas e inconsistencias.

Por ejemplo, en la primera proposición del primer libro, Euclides postuló implícitamente la existencia de intersecciones entre circunferencias (al realizar la construcción de un triángulo equilátero, conociendo un lado de éste); esto, no se contempla en sus axiomas, y es imposible de demostrar, partiendo de ellos exclusivamente.[2]

5. Las Tentativas Para Demostrar El Postulado De Las Paralelas.

Además de lo que hemos dicho antes, existe evidencia histórica de que el Quinto Postulado de Euclides, causó un problema lógico a los antiguos, ya que éste carecía de la concisión y la comprensibidad lógica de los otros cuatro. Pero antes de hablar del tema, debemos conocer algo acerca del Método axiomático.

Basados en esta conjetura, los matemáticos de la época supusieron, que este postulado no era independiente de los otros, es decir, podía expresarse en base a los antes redactados.

Así, la estrategia que se asumió con respecto a esta situación fue: tratar de demostrar el Quinto Postulado en base a los otros cuatro y las cinco Nociones Comunes. Sin embargo, esta prueba fue imposible de obtener por los geómetras durante más de 2,000 años (en forma irrefutable); ya que las

2 CAMP, John; FERH, Howard F.; KELLOGG, Howard. La revolución de las matemáticas escolares (segunda fase). Páginas 51-52.

"demostraciones" que surgieron, tarde o temprano se probaba que estaban basadas en una suposición tácita, equivalente al Quinto Postulado.

En esta situación se encontraron matemáticos de la talla de Posidoneo, Proclo, Nasir Eddin, Omar Khayyam, Clavius, Wallis, Saccheri, Lambert, Pash, etc. Entre estos postulados equivalentes tenemos:

1. Una circunferencia puede hacerse pasar por tres puntos no colineales cualesquiera (Postulado de Wolfang Bolyai).

2. Existe un par de rectas coplanares en que todos los puntos de una se encuentran a la misma distancia de la otra (Postulado de Posidoneo).

3. Por un punto situado dentro de un ángulo menor de 60° puede siempre trazarse una recta que corte a ambos lados del ángulo (Hipótesis de Lorentz).

4. No hay límite superior del área de un triángulo (Postulado de Gauss).

5. Si en un cuadrilátero un par de un par de lados opuestos son iguales y si los ángulos adyacentes al tercer lado son rectos, entonces los otros dos ángulos también son rectos (Postulado de Saccheri).

6. Existe al menos un triángulo en que la suma de sus tres ángulos es igual a dos rectos (Postulado de Legendre).

7. Por un punto dado no situado sobre una recta sólo puede trazarse una paralela a ella (Postulado de Playfair).

8. Si en un cuadrilátero tres ángulos son rectos, el cuarto ángulo también es recto (Postulado de Lambert).

9. Si tres puntos distintos están de un mismo lado de una recta y equidistan de ella, los tres puntos pertenecen a una misma recta (Postulado de Clavius).

10. Dado un triángulo cualquiera, existe siempre otro triángulo semejante al primero de magnitud arbitraria (Postulado de Wallis).

11. Una recta que corte a un lado de un triángulo pero que no pase por ninguno de sus vértices deberá cortar también al otro lado del triángulo (Postulado de Pash).[3]

Estas situaciones inconsistentes las corrigió David Hilbert, a finales del siglo XIX, con su Axiomática. El tema de la Axiomática de Hilbert, por la importancia que le reviste dentro del desarrollo de la Matemática, merece ser tratado en un trabajo aparte.

6. El Surgimiento De Las Geometrías No Euclidianas Clásicas.

En el año de 1733, se realizó la primera investigación científica convincente acerca de la demostración del Quinto Postulado de Euclides (o Postulado de las Paralelas). Esta, la llevó a cabo el padre jesuita Girolamo

---

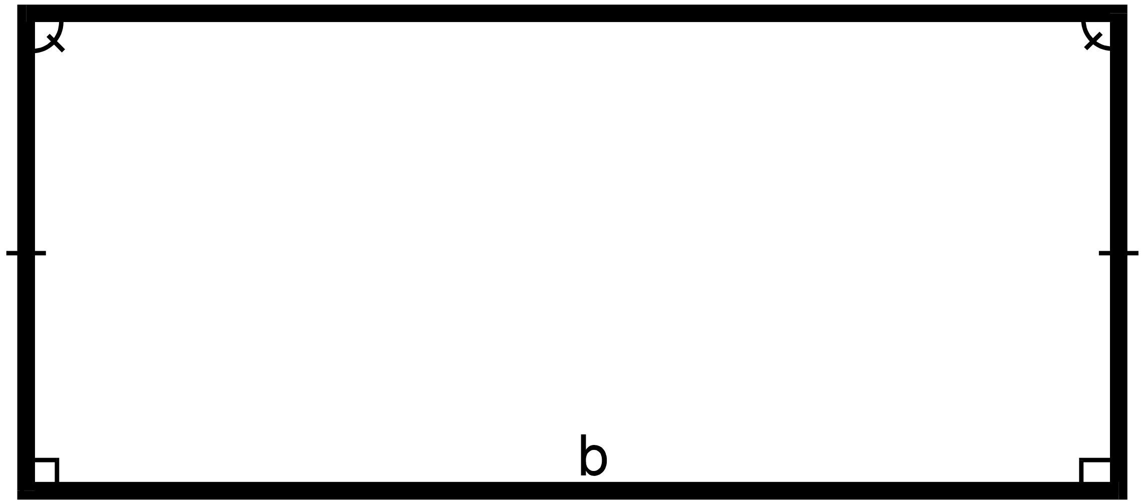
3 EVES, Howard. Estudio de las Geometrías, Tomo I. Página 321.

Saccheri; empleando el método de reducción al absurdo; para probarlo (a Saccheri le fascinaba éste poderoso método de demostración).

Como figura fundamental de su demostración, empleó lo que se denomina “Cuadrilátero de Saccheri”; éste es un cuadrilátero donde dos ángulos interiores se admiten rectos; y dos lados son opuestos, iguales y perpendiculares a la base. En él, Saccheri, probó que los otros dos ángulos interiores del cuadrilátero, son iguales entre sí, sin emplear el Quinto Postulado (empleó en sus demostraciones, además de otras cosas: la proposición XVI del libro I de los Elementos, el Postulado de Arquímedes, y la Hipótesis de Continuidad de la Recta.[4]).

Por ser iguales entre sí, estos ángulos pueden: ser agudos, obtusos, ó rectos. La prueba de la conjetura del ángulo recto, como debe ser evidente, es la que haría al Quinto Postulado de Euclides válido (comparar esta afirmación con el postulado equivalente de Saccheri, antes expuesto). Para aclarar la idea antes expuesta, observe la Ilustración 1:

4 BONOLA, Roberto. Geometrías no Euclidianas. Página 37-38.



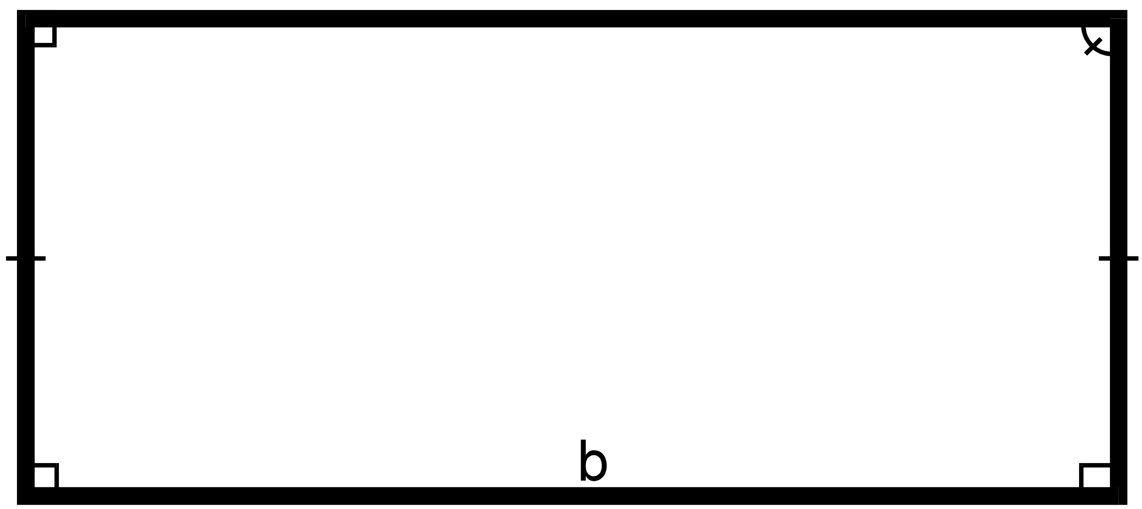
Cuadrilátero de Saccheri

Ilustración 1

Ahora, con relativa facilidad Saccheri desechó el caso del ángulo obtuso, asumiendo implícitamente como lo hizo Euclides, la infinitud de la recta, sin embargo, no logró lo mismo con el caso del ángulo agudo. En éste, demostró toda una serie de proposiciones que posteriormente formarían parte de una de las llamadas Geometrías no Euclidianas.

Sin embargo, como Saccheri deseaba reivindicar a Euclides, prosiguió sus investigaciones en forma prejuiciosa, hasta forzar en una demostración, la contradicción que buscaba; en consecuencia, sus estudios se olvidaron poco después. Sus trabajos probaron sin embargo, que el hecho de prescindir del Quinto Postulado, en la construcción de una geometría, no lleva a contradicciones al demostrar cierto conjunto de proposiciones; además, marcaron el plan general de demostración que emplearían los matemáticos en el futuro.

Otro matemático posterior a Saccheri, Johanm Heinrich Lambert, trabajó considerando un cuadrilátero parecido al de Saccheri, en el que sólo uno de los ángulos interiores es desconocido (comparar esta afirmación con el postulado equivalente de Lambert, antes expuesto, vea la Ilustración 2). Fue más lejos que Saccheri, ya que dedujo proposiciones para las hipótesis de los ángulos agudo y obtuso (éste, sólo dedujo proposiciones para la hipótesis del ángulo agudo).



Cuadrilátero de Lambert

Ilustración 2

Así, determinó que en las tres hipótesis, la suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera, es menor, igual o mayor que dos rectos; según se aplicara la hipótesis del ángulo agudo, recto u obtuso, respectivamente. También observó la semejanza entre la hipótesis del ángulo obtuso y la Geometría Esférica; y conjeturó que la hipótesis del ángulo agudo podría darse sobre una esfera de radio imaginario.

En realidad, ninguna de las tres hipótesis tiene contradicciones, ya que el Quinto Postulado de Euclides es independiente del resto de los postulados y por lo tanto no puede deducirse de éstos. A consecuencia de este hecho, cada una de las Geometrías desarrolladas a partir de las hipótesis iniciales de Saccheri, por Lambert, es tan consistente como la Geometría Euclidiana.

Esto significa que, dentro de cada una de estas geometrías, no se hallarán dos teoremas que se contradigan (si tomamos los teoremas de geometrías distintas, es lógico esperar que se contradigan).

El primero en admitir esta situación fue Karl F. Gauss; fue el primero que tuvo una visión clara de lo que era una geometría independiente del Quinto Postulado; sin embargo, no lo divulgó por temor a la opinión pública de la época. Posteriormente, decidió redactar una “Geometría no Euclidiana” (el nombre es de su creación, originalmente la denominó “Antieuclidiana” y posteriormente, “Geometría Astral”, hasta decidirse por el antes mencionado); convencido del rigor de su fundamento “aunque a primera vista muchos de sus resultados ofrezcan un aspecto paradójico”[5]. Realizó sus investigaciones desde la adolescencia, pero no las prosiguió, ya que en 1832, se enteró que Janos Bolyai estaba trabajando en este campo.

Gauss, definió el paralelismo como citamos a continuación:

> *“Si la recta $\overline{AM}$,2 coplanaria y no incidente sobre $\overline{BN}$,3 es tal que toda recta trazada por A y comprendida en el ángulo*

---

5 BABINI, José. Historia de las ideas modernas en Matemática. Página 11.

> $B\hat{A}M$ *4 encuentra a la* $\overline{BN}$*,5 entonces* $\overline{AM}$ *6 se dice paralela a* $\overline{BN}$*.7“*[6]

Hay que observar que Gauss nos habla de paralelismo en una región dada.

Bolyai por su parte, publicó su trabajo como un apéndice de una obra de su padre (Wolfang Bolyai, también matemático; realizó trabajos relacionados a la demostración del Quinto Postulado de Euclides); en las 26 páginas que constituyen este apéndice, habla de lo que llama “Geometría Absoluta”; cita el hecho de que sus hallazgos son independientes del Quinto Postulado de Euclides, y válidos por lo tanto, en cualquier tipo de Geometría que tenga a la Euclidiana como un caso particular (sus estudios se relacionan con las primeras 28 proposiciones del libro I de Los Elementos).

Entre sus resultados más importantes tenemos:

- ⇒ Definición de las paralelas y sus propiedades independientes del postulado euclídeo.

- ⇒ La trigonometría esférica es independiente del postulado de las paralelas.

Por otro lado, trabajando en forma simultánea a Bolyai y Gauss, e independientemente de ellos, el ruso Nicolai Ivanovich Lobachevsky realizó una labor similar a la de éstos, pero en forma más constructiva.

---

6 BONOLA, Roberto. Geometrías no Euclidianas. Página 78.

Conviene hacer constar sin embargo, que Lobachevsky empezó su labor, siguiendo el rumbo de los demás (deseaba probar el postulado de las paralelas), es decir, admitió que:

> *"por un punto exterior a una recta pasan más de una recta que contiene a ese punto y que son paralelas a ella";*[7]

además de los restantes postulados de Los Elementos y empezó a demostrar teoremas. Si en el curso de sus razonamientos llegaba a una contradicción, ello sería prueba indirecta de la falsedad del postulado. Más tal falsedad no llegó, con lo que Lobachevsky concluyó que:

⇒ El Postulado de las Paralelas no se puede demostrar a partir de los demás postulados de Euclides.

⇒ Se puede edificar una Geometría, que si bien parece contradecir nuestra intuición, es lógicamente válida o compatible consigo misma.

La clara consecuencia de estas dos afirmaciones es que:

¡HAY MÁS DE UNA GEOMETRÍA!

Las obras de Lobachevsky, al contrario que las de sus predecesores, se difundieron ampliamente (los trabajos de Gauss y Bolyai fueron poco difundidos entre los círculos matemáticos de la época), ya que fueron traducidas del ruso al

---

7 CAMP, John; FERH, Howard F.; KELLOGG, Howard. La revolución de las matemáticas escolares (segunda fase). Página 52.

alemán y francés. Ellas culminaron con su Pangeometría, que es un estudio analítico, sin figuras, de una geometría que el llama imaginaria. En su estudio, Lobachevsky estableció a las paralelas no como equidistantes, sino como asintóticas.

Los matemáticos de entonces, no aceptaron fácilmente las investigaciones recientemente realizadas en el campo de la Geometría; y sólo después de la publicación de la disertación doctoral de Georg F. B. Riemman, (que se tituló: “Sobre las hipótesis en que se funda la Geometría”) se reconocieron espacios geométricos distintos al de Euclides. En ésta publicación, Riemman planteó un tipo de Geometría no Euclidiana equivalente a la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri.

7. Semejanzas, Diferencias E Importancia De Las Geometrías No Euclidianas Clásicas.

Las Geometrías no Euclidianas de Gauss, Bolyai y Lobachevsky, tienen en común los siguientes hechos:

- ⇒ Son equivalentes a la hipótesis del ángulo agudo de Saccheri.
- ⇒ La suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es menor de 180°.
- ⇒ Al igual que la Geometría Euclidiana, admiten la infinitud de las rectas.

⇒ Por un punto exterior a una recta pasa un haz de paralelas que no la cortan (estas últimas son denominadas hiperparalelas), haz limitado por dos rectas especiales, las dos paralelas trazadas a la primera que contienen ese punto.

A la Geometría no Euclidiana creada por Riemman, por su parte, la caracterizan los siguientes hechos:

⇒ Por un punto exterior a una recta no pasan paralelas que no la corten.

⇒ Descarta la infinitud de las rectas, admitiéndolas sólo como indefinidas.

⇒ La suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es mayor que 180°.

⇒ Emplea métodos de la Geometría Diferencial, en vez de emplear los métodos tradicionales de la Geometría Sintética.

Además de éstos hechos, contempla otras pequeñas modificaciones del modelo euclidiano.

Esta Geometría es de gran importancia en la generalización del concepto de espacio y ha conducido posteriormente a la teoría de los espacios abstractos, que se aplica en parte en el desarrollo de las ramas modernas de la física relativista, entre otras cosas.

Con estos últimos descubrimientos, la Geometría Euclidiana queda ubicada como un caso intermedio de estas geometrías, al alegar que por un punto exterior a una recta existe una sola recta que no la corta, su paralela; y que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°.

Posteriormente Klein denominó a las Geometrías de Lobachevsky, Euclides, y Riemman, como hiperbólica, parabólica, y elíptica, respectivamente; al realizar estudios muy profundos y de gran generalidad en este campo.

Hay que resaltar que la independencia real de postulado de las paralelas, no se estableció en forma incuestionable hasta que se proporcionaron las demostraciones de la compatibilidad de la hipótesis del ángulo agudo (que vinieron de Klein, Beltrami, Poincaré, Cayley y otros); y obtuso (que la probó Riemman), con la Geometría Euclidiana.

El método seguido en estas demostraciones, consistió en crear un modelo dentro de la Geometría Euclidiana, de modo que, al desarrollo abstracto de la hipótesis del ángulo agudo (u obtuso), se le pudiera dar una interpretación euclidiana. Entonces cualquier incompatibilidad en la Geometría no Euclidiana implicaría una incompatibilidad correspondiente en la Geometría Euclidiana y viceversa.

Poincaré desarrolló un modelo de este tipo para la Geometría de Lobachevsky, a partir del conjunto de postulados de la Geometría Euclidiana desarrollados por David Hilbert, al substituir el postulado de las paralelas (o de Playfair) por el siguiente:

> *"Por un punto dado A que no está en una recta m pasan al menos dos rectas que no cortan a m."*[8]

---

8 EVES, Howard. Estudio de las Geometrías, Tomo I. Página 391.

Para el caso de la compatibilidad de la hipótesis del ángulo obtuso, Riemman consideró al plano euclídeo como la superficie de una esfera; y a sus rectas, como circunferencias de radio máximo, respectivamente. Allí, es evidente por ejemplo, que la suma de los ángulos internos de un triángulo esférico cualquiera, es mayor que 180°, lo que no está de acuerdo con la Geometría Euclidiana clásica.

Posterior al desarrollo de las Geometrías no Euclidianas clásicas ya esbozadas, se han creado otras de igual índole; ya que toda Geometría cuya base postulacional contradiga algún postulado de la Geometría Euclidiana puede con todo derecho, denominarse Geometría no Euclidiana.

En éste aspecto Riemman creó toda una clase de Geometrías no Euclidianas, que han recibido un estudio detallado en la actualidad y se conocen con todo derecho como Geometrías Riemmanianas. En realidad, Riemman consideraba que la Geometría debía tratar los conjuntos de n-uplas ordenadas, que se pueden combinar de acuerdo a ciertas leyes y no preocuparse de los casos particulares de geometrías, como el de cuantas paralelas a una recta, pasan por un punto. Es más, ni siquiera se debían considerar puntos o rectas en el espacio usual.

Otra Geometría no Euclidiana, fue ideada posteriormente por Max Dehn, y en ella, se suprime el Postulado de Arquímedes y se denomina por ello, Geometría no Arquimediana. El postulado antes mencionado dice así:

Si A, B, C, D son cuatro puntos distintos, entonces hay, sobre el rayo $AB,$ un conjunto finito de puntos distintos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ tal que:

⇒ cada uno de los pares $A, A_1; A_1, A_2; ..., A_{n-1}, A_n$ es congruente al par C, D, y

B está entre A Ù A_n.[9]

Todos estos trabajos llevaron a la Geometría como un todo, a independizarse del espacio físico, en que originalmente se creó. En el futuro, los postulados de una Geometría no necesitan ser autoevidientes ni veraces, sólo requieren ser consistentes entre sí. Además, liberaron a la Matemática de ser una verdad absoluta impuesta por la naturaleza (principalmente la Geometría).

8. El Programa De Erlangen De Klein.

Cuando Felix Klein ocupó el puesto de profesor en la Universidad de Erlangen, pronunció una disertación doctoral que se hizo famosa en la Historia de la Matemática; se le denominó “Programa de Erlanger”.

Básicamente, el Programa de Erlangen se fundamenta en el importante concepto de grupo, visto desde el punto de vista del álgebra abstracta (estructuras algebraicas). Empleando este concepto, Klein mostró como podía aplicarse el mismo, para caracterizar las diversas geometrías que habían aparecido recientemente (las Geometrías no Euclidianas).

En él, Klein describe a una Geometría como el estudio de las propiedades de las figuras que permanecen invariantes bajo la acción de un grupo concreto de transformaciones. En consecuencia, cualquier clasificación que se establezca

9 EVES, Howard. Estudio de las Geometrías, Tomo I. Página 430.

entre grupos de transformaciones, automáticamente se puede emplear para clasificar Geometrías.

Bajo el modelo de Klein, al construir una Geometría se queda en libertad de elegir primordialmente: el elemento fundamental de la Geometría (punto, circunferencia, recta, esfera, etc.); luego, la totalidad del espacio de estos elementos (plano de puntos, espacio ordinario de puntos, superficie esférica de puntos, plano de rectas, haz de circunferencias, etc.); y finalmente, el grupo de transformaciones a que estará sujeto el espacio o conjunto de elementos.

El Programa de Erlangen apoyó la clasificación de las Geometrías existentes, además de la creación y estudio de nuevas Geometrías. En particular según Klein, podrían estudiarse las Geometrías caracterizadas por varios subgrupos de transformaciones, a través del grupo de transformaciones de otra Geometría, de modo que se obtienen Geometrías que contienen a otras.

Hay que resaltar que el tratar las Geometrías en base a transformaciones hace que se puedan estudiar fácilmente mediante los métodos de la Geometría Analítica, además de facilitar el empleo de métodos matriciales, que a su vez, simplifican a las transformaciones. Estos hechos en conjunto, muestran que la Matemática es única, al unir bajo un solo marco de estudio, teorías que normalmente han sido tratadas por separado.

Según la clasificación de Klein, la Geometría Euclidiana Plana, viene a ser el estudio de las propiedades de las figuras del plano (incluidas las áreas y longitudes), que permanecen invariantes bajo la acción del grupo de transformaciones, que es engendrado por las traslaciones, rotaciones y simetrías del plano (transformaciones rígidas).

Estas transformaciones pueden considerarse analíticamente, que llevan el punto (x, y) al punto (x', y'), a través de la expresión:

$$(x', y') = (ax + by + c, dx + ey + f),$$

donde $ae - bd = 1$, todas estas transformaciones forman un grupo.

Si ahora, en esta misma expresión, reducimos las restricciones de modo que $ae - bd \neq 0$, entonces las transformaciones indicadas, también formarán un grupo, que evidentemente contendrá al anterior; Dentro de grupo en mención, las cónicas de un tipo específico se transformarán en otra cónica similar, pero las longitudes y áreas no serán invariantes. Estas últimas transformaciones se conocen como Transformaciones Afines, y definen a su vez la Geometría Afín, en la cual, a cualquier punto finito, le corresponde otro punto finito. Es evidente entonces que la Geometría Euclidiana es un caso particular de la Geometría Afín.

Si consideramos ahora transformaciones que lleven el punto (x, y) al punto (x', y'), a través de las expresiones:

$$(x', y') = \left(\frac{H}{J}, \frac{I}{J}\right),$$

donde:

$$H = ax + by + c$$
$$I = Ax + By + C$$
$$J = dx + ey + f$$

es posible demostrar que estas transformaciones forman un grupo y que si $d = e = 0, \;\wedge\; f = 1,$ se reducen a las Transformaciones Afines. Éstas, son denominadas Transformaciones Proyectivas se caracterizan porque a través de ellas: una cónica se transforma en otra cónica (no necesariamente la original); y la razón doble permanece invariante. Las últimas transformaciones originan a la Geometría Proyectiva, que tiene como casos particulares, a la Afín y a la Euclidiana en orden de inclusión.

Este desarrollo se puede proseguir para abarcar los diferentes tipos de geometrías que se conocen actualmente, al ramificarse en diversos sentidos los grupos de transformaciones consideradas, así como los espacios estudiados. Y es allí donde está la importancia del Programa de Erlangen; ya que gracias a él, las distintas Geometrías existentes, a través del concepto de grupo, quedan unificadas en una sola.

Es más, se han hecho esfuerzos en la actualidad para extender y generalizar la obra de Klein a grupos de proposiciones matemáticas que han surgido posteriormente a la creación del programa, que no se ajustan a sus estándares, pero que se ha decidido considerar como Geometrías.

Los trabajos para incluir estas geometrías dentro de un marco general, como el que creó Klein por ejemplo, han sido llevados a cabo por Oswald Veblen y Élie Cartan.

BIBLIOGRAFÍA

1. BABINI, José. Historia de las ideas modernas en Matemática. Monografía número 4. Serie de matemática. Washington, D.C., E.U.A.: Departamento de Asuntos Científicos de la Unión Panamericana. Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos, 1970. 72 páginas.

2. BONOLA, Roberto. Geometrías no Euclidianas. Traducido por Luis Gutiérrez del Arroyo. Buenos Aires, Argentina: Espasa-Calpe Argentina, S. A., 1945. 224 páginas.

3. BOYER, Carl B. Historia de la Matemática. Traducido por Mariano Martínez Pérez. Madrid, España: Alianza Editorial, 1986. 808 páginas.

4. CAMP, John; FERH, Howard F. y KELLOGG, Howard La revolución de las matemáticas escolares (segunda fase). Monografía número 13. Serie de matemática. Washington, D.C., E.U.A.: Departamento de Asuntos Científicos de la Unión Panamericana. Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos, 1970. 132 páginas.

5. COURANT, R. y ROBBINS, H. ¿Qué es la Matemática? Traducido por Luis Bravo Gala. Madrid, España: Aguilar, 1971. 533 páginas.

6. CHENG, Isidro. Proposiciones equivalentes al postulado de las paralelas. Monografía número 2. Serie de geometría y pedagogía. Panamá, Panamá: Universidad de Panamá, 1986. 39 páginas.

7. CHENG, Isidro. Reflexiones en torno al problema del Vº postulado. Monografía número 3. Serie de geometría y pedagogía. Panamá, Panamá: Universidad de Panamá, 1986. 22 páginas.

8. COLLETTE, Jean Paul. Historia de las Matemáticas. Tomo I. Segunda Edición. Sin traductor. México, D. F., México: Siglo veintiuno, 1986. 338 páginas.

9. COLLETTE, Jean-Paul. Historia de las Matemáticas. Tomo II. Sin traductor. México D.F., México: Siglo XXI editores, 1986. 607 páginas.

10. EVES, Howard. Estudio de las Geometrías. Tomo I. Traducido por Susana Blumovicz de Siperstein. México D.F., México: U.T.E.H.A., 1969. 469 páginas.

11. EVES, Howard. Estudio de las Geometrías. Tomo II. Traducido por Francisco Paniagua B. México D.F., México: U.T.E.H.A., 1969. 483 páginas.

12. REINHARDT, Fritz y SOEDER, Heinrich. Atlas de Matemáticas 1. Fundamentos, Álgebra y Geometría. Traducido por Juan Luis Vázquez Suárez y Mario Rodríguez Artalejo. Madrid, España: Alianza Editorial, 1984. 265 páginas.