# RIO208 - TP DIMENSIONNEMENT OFDMA

23 MAI 2018

## 1. Modèle

Ce travail est inspiré d'un travail de recherche de notre équipe.

Dans le système OFDMA, les ressources sont attribuées en temps et en fréquence.

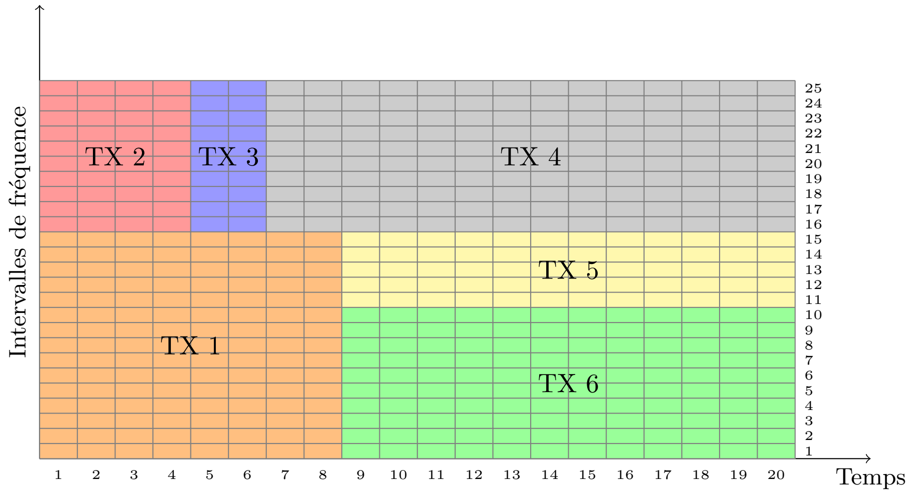


FIGURE 1. Chaque petit carré est un *resource block*. Un ensemble de petits carrés de la même couleur est un *sous-canal* attribué à un utilisateur.

Pour qu'il se connecte au réseau, l'eNode-B attribue à un utilisateur qui souhaite envoyer des données un ensemble de resource blocks (12 sous-porteuses pendant 1 ms). Le nombre $q(x)$ de ressources nécessaires à un utilisateur pour recevoir au débit $C$, lorsqu'il est en position $x$, à distance $r(x)$ de l'eNode-B est obtenu grâce à la formule de Shannon :

$$q(x) = \left\lceil \frac{C}{w \log_2(1 + \frac{K}{r(x)^\gamma})} \right\rceil \text{ si } \frac{K}{r(x)^\gamma} > \mathrm{SNR}_{min},$$

où $\mathrm{SNR}_{min}$ est la rapport signal sur bruit minimum pour que la communication puisse s'établir, $\lceil z \rceil$ est l'entier immédiatement supérieur au réel $z$, $w$ est la largeur de bande d'un resource block et $K$ une constante qui tient compte de la puissance d'émission, du fading et de la perte de chemin.

Compte-tenu de la condition sur le SNR, le nombre de resource blocks attribués est borné supérieurement par

$$q_{\max} = \left\lceil \frac{C}{w \log_2(1 + \mathrm{SNR}_{\min})} \right\rceil$$

## 2. Implémentation du modèle

À chaque intervalle de temps, un utilisateur a une probabilité $p$ d'émettre. Si on fixe un intervalle de temps, on cherche à déterminer la probabilité avec laquelle le nombre de ressources demandées à ce moment là sera inférieur au nombre de ressources disponibles, par exemple 25 ressources sur la figure 1.

On suppose que le seul point d'accès est localisé en $(0, 0)$. Les mobiles sont répartis selon un processus de Poisson d'intensité $\lambda$ utilisateurs par unité de surface. On limitera l'observation à un cellule circulaire de rayon $R$.

1. Simuler le processus des utilisateurs répartis selon un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 0.01\text{m}^{-2}$ dans la cellule de rayon $R = 320\text{m}$.
2. Quel est le processus des utilisateurs actifs à chaque instant dans la cellule ? et quel est leur nombre moyen ? La probabilité pour un utilisateur d'être actif vaut $p = 0.01$.

   **A partir de maintenant, on ne considère que le processus des utilisateurs actifs.**
3. Calculer $q_{\max}$ le nombre maximum de ressources qu'un utilisateur peut demander. On considère que tous les utilisateurs demandent un débit de $C = 162\text{kb/s}$, et la largeur de bande d'un resource block est de $w = 180\text{kHz}$. Le $\text{SNR}_{\min}$ vaut 0.1.

## 3. Probabilité d'Outage

Le nombre total de ressources demandées dans la cellule est :

$$F = \sum_{x \in N} q(x).$$

On dit qu'il y a outage lorsque le nombre de ressources demandées $F$ est supérieur au nombre de ressources disponibles $S$. On note $P_S = P(F \geq S)$ la probabilité d'outage quand la cellule dispose de $S$ resource blocks.

4. Estimer $P_S$ pour $S$ allant de $S_{\min} = 160$ à $S_{\max} = 180$. La probabilité $P_S$ s'estime en comptant le nombre de fois où il y a outage sur 10000 simulations. On prend les valeurs numériques suivantes : $K = 10^6$ et $\gamma = 2.8$.
5. Combien valent $\beta$ et $\alpha$ tels que

   $$D_x F(N) \leq \beta, \text{ et } \int_{\text{Cellule}} |D_x F(N)|^2 \, \mathrm{d}\mu(x) \leq \alpha^2,$$

   pour presque tout point $x$ de la cellule et presque toute réalisation $N$ du processus de Poisson des utilisateurs actifs ?
6. Combien vaut le nombre moyen de ressources $E[F]$ demandées dans la cellule ?
7. Vérifier que l'inégalité de concentration est bien vérifiée dans les résultats de simulation de la question 4.

   $$P(F \geq E[F] + y) \leq \exp\left[-\left(\frac{y}{\beta} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) \ln\left(1 + \frac{\beta y}{\alpha^2}\right) + \frac{y}{\beta}\right].$$
8. On cherche à dimensionner la cellule avec l'inégalité de concentration : déterminer le nombre de ressources $S$ nécessaires pour avoir le majorant de la probabilité d'outage $P_S$ inférieur à 0.01.
9. On considère le dimensionnement $S$ obtenu à la question précédente. Que vaut alors la probabilité d'outage $P_s$ ?
10. Toujours en utilisant le même dimensionnement $S$, calculer la probabilité d'outage dans les cas suivants :
    — si $\lambda$ varie de 10%

— si $\lambda$ varie de 20%
— si $\gamma$ varie de 2%
— si $\gamma$ varie de 5%.

11. Que dire alors du dimensionnement $S$ obtenu grâce à l'inégalité de concentration à la question 8. ?

## 4. Introduction du fading

On suppose maintenant que l'on prend en compte le fading de Rayleigh. Cela signifie que le nombre de ressources demandées par un utilisateur en position $x$ devient

$$q(x) = \min(q_{\max}, \left\lceil \frac{C}{w \log_2(1 + \frac{K\, m_x}{r(x)^\gamma})} \right\rceil) \text{ si } \frac{K m_x}{r(x)^\gamma} > \mathrm{SNR}_{min},$$

où $m_x$ est le coefficient du fading de Rayleigh. On suppose généralement que
— $m_x$ et $m_y$ sont des variables aléatoires indépendantes si $x$ et $y$ sont différents,
— pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $m_x$ suit une loi exponentielle de paramètre 1 : $\mathbf{P}(m_x > t) = e^{-t}$.

Le modèle est donc maintenant un processus ponctuel marqué où les réalisations sont de la forme

$$N' = \sum_{x \in N} \delta_{x,\, m_x}$$

avec $m = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t}\ \mathrm{d}t$.

Du point de vue de la modélisation, cela signifie qu'à chaque point du processus de Poisson, on ajoute une marque représentant le fading de Rayleigh de cet utilisateur. Pour chaque point du processus de Poisson tiré, il faut alors tirer une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1. Attention à vérifier que le nombre de ressources demandées par un utilisateur ne dépasse pas $q_{\max}$.

12. Calculer $P_S$ pour $S$ allant de $S_{\min} = 195$ à $S_{\max} = 215$.
13. Combien vaut le nombre de ressources moyen demandées $E[F]$ ? On rappelle que la fonction Gamma est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\ \mathrm{d}t.$$

Elle est accessible en Matlab sous le nom de *gamma(.)*.

14. Calculer le dimensionnement $S$ nécessaire pour avoir le majorant par inégalité de concentration de la probabilité d'outage inférieur à 0.01.
15. En considérant le dimensionnement précédent, calculer par simulation la probabilité d'outage dans les cas suivants :
— Pour $\lambda$ et $\gamma$ inchangés
— si $\lambda$ varie de 10%
— si $\lambda$ varie de 20%
— si $\gamma$ varie de 2%
— si $\gamma$ varie de 5%.
16. Que pouvez-vous dire du dimensionnement $S$ ?