RIO208 - TP TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE

20 JUIN 2018

1. Introduction

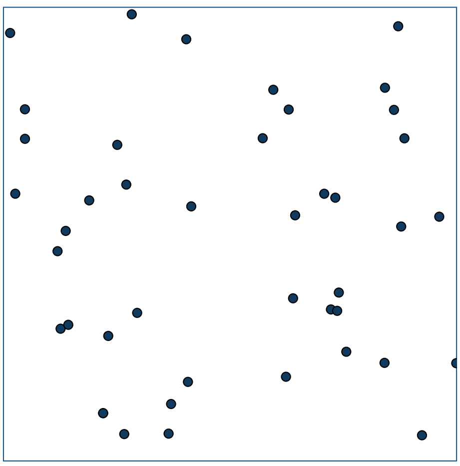
Le but de ce TP est de simuler un complexe simplicial de Rips-Vietoris à partir d'un ensemble de sommets généré par un processus de Poisson, puis de calculer sa topologie.

Vous devrez rendre un compte-rendu rédigé comprenant la démarche suivie (morceaux de code, formules mathématiques...), des figures illustrants vos résultats, ainsi que vos propres commentaires.

Pour la compréhension de ce TP, l'étudiant pourra se référer à ses notes de cours ainsi qu'à ce livre [2] pour une approche mathématique complète sur la topologie algébrique, ou à cet article [1] pour l'utilisation de la topologie algébrique dans les réseaux. Enfin, cet article [3] traite de l'application à la localisation des trous de couverture et celui-ci [4] de l'application à l'économie d'énergie.

2. Génération d'un ensemble de sommets

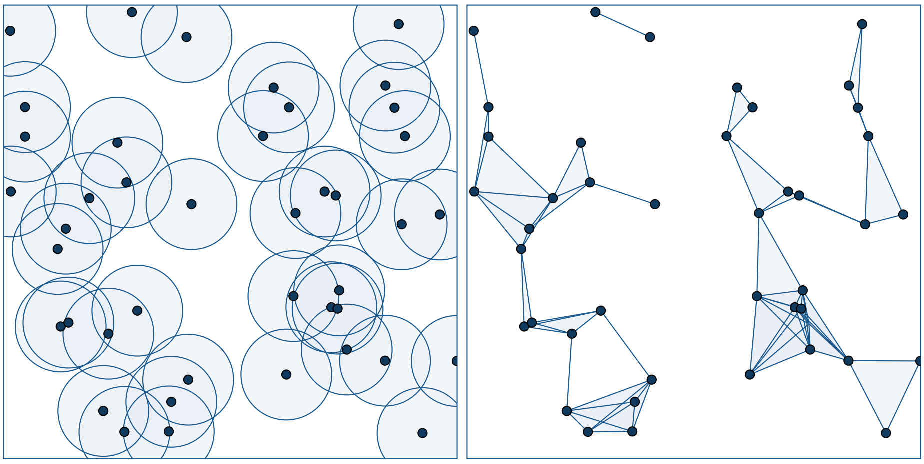
On considère une zone carrée de côté a, dans laquelle nous allons générer un ensemble de points grâce à un processus de Poisson d'intensité λ. On rappelle que pour simuler un processus de Poisson, il faut dans un premier temps simuler le nombre de points du processus suivant une loi de Poisson, puis simuler la position de chaque point uniformément dans le carré.



1. Simuler un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 100$ sur un carré de côté $a = 1$.

3. Construction du complexe simplicial

En partant d'un ensemble de points générés par un processus de Poisson, on souhaite construire le complexe simplicial de Rips-Vietoris de paramètre ε. Cependant, ce procédé peut-être long et complexe alors que pour calculer la topologie du d'ordre 0 et d'ordre 1 du complexe, nous avons uniquement besoin de connaître les 0-simplexes, 1-simplexes, et 2-simplexes. L'ensemble des k-simplexes d'un complexe simplicial pour $k \leq n$ s'appelle le n-squelette de ce complexe.



2. Construire le 2-squelette du complexe simplicial de Rips-Vietoris de paramètre $\varepsilon = 0.1$ sur le processus de Poisson précédemment simulé.

4. Calcul de la topologie

Dans cette section, on cherche à calculer la topologie du complexe simplicial précédemment construit. Afin d'obtenir la topologie du complexe, il suffit de calculer les matrices représentant les transformations linéaires ∂_1 et ∂_2, qui sont les matrices d'adjacence respectivement des 1-simplexes par rapport aux 0-simplexes, et des 2-simplexes par rapport aux 1-simplexes. Enfin, les nombres de Betti s'obtiennent à partir des rangs de ces matrices. Finalement, la caractéristique d'Euler est la somme alternée des nombres de Betti. Sur le complexe précédemment construit :

3. Calculer les matrices ∂_1 et ∂_2.
4. Calculer les nombres de Betti β_0 et β_1.
5. Calculer la caractéristique d'Euler χ.

5. Résultats en moyenne

On cherche à observer l'influence de l'intensité du processus de Poisson, et donc la densité de points sur la topologie du complexe simplicial (nombres de Betti et caractéristique d'Euler).

6. Tracer β_0, β_1, et χ en fonction de λ. Faire varier λ de 0 à 200 en faisant la moyenne sur au moins 100 simulations par valeur de λ.
7. Commenter les courbes.

Références

[1] R. Ghrist and A. Muhammad. Coverage and hole-detection in sensor networks via homology. In *Proceedings of the 4th international symposium on Information processing in sensor networks*, IPSN '05, Piscataway, NJ, USA, 2005. IEEE Press.

[2] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.

[3] Abubakr Muhammad and Magnus Egerstedt. Control Using Higher Order Laplacians in Network Topologies. In *Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto, Japan*, Kyoto,Japan, July 2006.

[4] A. Vergne, L. Decreusefond, and P. Martins. Reduction algorithm for simplicial complexes. In *INFOCOM, 2013 Proceedings IEEE*, pages 475–479, 2013.