RIO208 - TP ÉTUDE DE DÉPLOIEMENTS

12 JUIN 2019

1. Objectif

Dans ce TP, on étudie le déploiement d'un opérateur et retrouver le processus ponctuel qui permet d'obtenir une telle réalisation.

On propose d'étudier le déploiement de l'opérateur Orange en 3G ou en 4G sur la ville de Paris. Toutes les données sont disponibles sur le site de cartoradio. Les données extraites au format csv et au format Matlab sont disponibles sur le site pédagogique. Les longitudes et latitudes sont données en mètres, par rapport à une orgine placée au centre de Paris.

Comme nous nous intéressons à un unique opérateur sur une seule bande de fréquence, nous constatons que les positions des stations de base sont corrélées. En effet, comme on peut le voir dans la figure ci-dessous, il n'y a pas de gros amas, et les points sont répartis de manière à occuper l'espace. Il y a donc de la répulsion entre les points. Nous allons donc chercher à fitter ces positions sur un processus ponctuel de β-Ginibre qui est un processus ponctuel stationnaire répulsif.

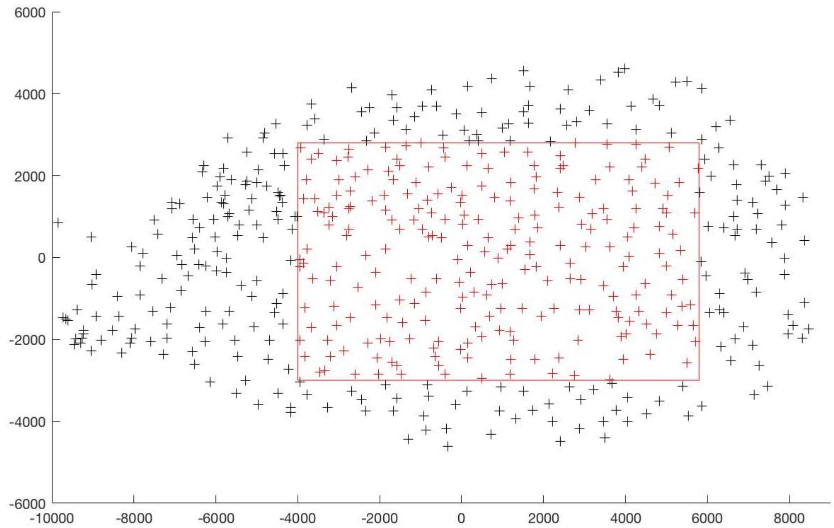

Figure 1. Positions des stations de base d'Orange en 4G dans Paris

On rappelle que le processus de β-Ginibre est le processus déterminantal de noyau $K_\beta(x, y) = \lambda \exp(\frac{-\lambda\pi}{2\beta}(x - \bar{y})^2)$ pour $x, y \in \mathbb{C}$. Il y a donc 2 paramètres à identifier pour définir le processus ponctuel : l'intensité λ qui correspond au nombre moyen de points par unité de surface, et β qui caractérise la répulsion. Quand $\beta = 1$, la répulsion est maximale, on a un processus de Ginibre. Quand β tend vers 0, le processus tend vers un processus de Poisson sans répulsion entre les points.

2. Intensité du processus

La première étape est de calculer l'intensité du processus. Afin d'éviter les effets de bords, il faut délimiter une fenêtre d'observation la plus grande possible qui permette d'avoir un comportement homogène des points à l'intérieur. Il faut donc qu'un point pris au centre de la fenêtre soit indifférenciable d'un point pris au bord de la fenêtre. En particulier, il faut qu'ils aient le même nombre de voisins. Les points à l'extérieur de la fenêtre seront considérés comme voisins dans le calcul du plus proche voisin des points en bord (interne) de la fenêtre.

1. Déterminez une fenêtre d'observation rectangulaire qui satisfasse ces conditions. On peut en voir un exemple dans la figure au dos de la page.

Maintenant que la fenêtre d'observation est découpée, on peut calculer l'intensité du processus.

2. Calculez l'intensité du processus λ dans la fenêtre d'observation.

3. Calcul des fonctions F, G et J

Pour pouvoir ensuite trouver le paramètre de répulsion β, nous allons utiliser les 3 fonctions définies pour l'inférence statistique pour les processus ponctuels. On rappelle leurs définitions pour une configuration ξ de $E \subset \mathbb{R}^2$:

Définition 1 (Fonction $\widehat{F}$)**.** *Soit ξ une configuration de E, pour tout $r > 0$,*

$$\widehat{F}(r) = \frac{\sum_{x \in E} \mathbf{1} d(x, \xi) \leq r}{|E|}.$$

$\widehat{F}(r)$ représente le pourcentage de points x dans E à distance inférieure à r d'au moins un point de ξ .

Définition 2 (Fonction G)**.** *Soit ξ une configuration de E, pour tout $r > 0$,*

$$\widehat{G}(r) = \frac{\sum_{x \in \xi} \mathbf{1} d(x, \xi \backslash \{x\}) \leq r}{|\xi|}.$$

$\widehat{G}(r)$ représente le pourcentage de points x dans ξ à distance inférieure à r d'au moins un voisin de $\xi \backslash \{x\}$.

Pour calculer $\widehat{F}$, il s'agit donc de se placer dans n'importe quel point de la fenêtre d'observation et de regarder la distance au point de la configuration le plus proche et de répéter cela pour un grand nombre de points du plan. $\widehat{F}(r)$ correspond ensuite au pourcentage de points pour lesquels la distance au point du processus le plus proche est inférieure à r. Pour cela on discrétisera r par pas de 0.1m, on pourra s'arrêter à $r = 700$m.

3. Calculez la fonction $\widehat{F}$ et tracez-la.

Pour calculer $\widehat{G}$, il suffit de faire la même chose, mais de faire les calculs pour les points de la configuration, et non ceux de la fenêtre d'observation.

4. Calculez la fonction $\widehat{G}$ et tracez-la.

La dernière fonction qui nous intéresse est fonction des deux premières :

Définition 3 (Fonction $\widehat{J}$)**.** *Soit ξ une configuration de E, pour tout $r > 0$,*

$$\widehat{J}(r) = \frac{1 - \widehat{G}(r)}{1 - \widehat{F}(r)}.$$

Pour $\widehat{J}$, on se limitera à $r = 300$m.

5. Calculez la fonction $\widehat{J}$ et tracez-la.
6. Est-elle supérieure ou inférieure à 1 ? Que pouvez-vous en déduire sur la nature du processus ?

4. Fitting

Les fonctions $\widehat{F}$, $\widehat{G}$ et $\widehat{J}$ ont des équivalents F, G et J pour les processus ponctuels stationnaires.

On cherche maintenant à fitter la fonction $\widehat{J}$ obtenue à la fonction J théorique pour un processus de β-Ginibre d'intensité λ :

$$J(r) = \frac{1}{1 - \beta + \beta e^{-\lambda \pi r^2/\beta}}.$$

Il s'agit donc de trouver le paramètre de répulsion β qui donne la fonction J la plus proche de la fonction $\widehat{J}$.

La méthode Minimum Mean Square Error est une méthode d'estimation statistique. L'erreur est l'écart entre l'échantillon mesuré et la valeur théorique $|\widehat{J} - J|$, l'erreur moyenne au carré est donc $\mathbb{E}(\widehat{J} - J)^2 = \sum_r (\widehat{J}(r) - J(r))^2$. Il s'agit donc de trouver β tel que $\mathbb{E}(\widehat{J} - J)^2$ soit minimal. On pourra faire varier β par pas de 0.01.

7. Utilisez la méthode MMSE pour trouver le paramètre de répulsion β par fitting de la fonction $\widehat{J}$ mesurée sur la fonction J théorique pour $r \leq 300$m.
8. Quel processus ponctuel s'approche le plus du déploiement fourni ?

5. Stratégie de déploiement

Sur le site pédagogique vous trouverez tous les fichiers des déploiements des 4 opérateurs français pour chaque technologie pour la ville de Paris.

9. Pour chaque opérateur et technologie, trouver les paramètres λ et β.
10. Comparez les stratégies de déploiements des opérateurs à partir de ces paramètres.

6. Complément : simulation d'un processus α-stable

Cette section est indépendante des précédentes et à relier avec les éléments de cours sur les processus α-stables, en particulier la partie VI-5 consacrée à un exemple de simulation d'un tel processus.

11. Simulez, pour différentes valeurs de α, le processus ponctuel α-stable décrit dans la partie VI-5 du cours.