Modellazione, Simulazione e Controllo di un Plotter Cartesiano - Pilotaggio delle traiettorie -

Sistemi Meccatronici II, A.A. 2015-2016 - Università degli Studi di Bergamo

1 Strategia di pilotaggio delle traiettorie

Si vuole mettere a punto una strategia di pilotaggio che consenta di minimizzare il tempo di percorrenza di una traiettoria qualsiasi; l'obiettivo è quindi scegliere la "migliore" *legge oraria* di percorrenza della traiettoria [$s = s(t)$] dalla quale risalire poi alle leggi orarie lungo gli assi x e y e infine alle rotazioni, velocità e accelerazioni da assegnare ai motori.

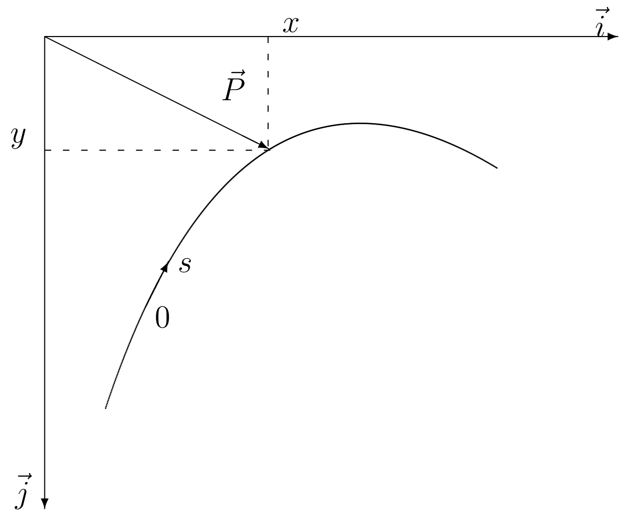

Figura 1: Traiettoria generica

Data la traiettoria di figura 1 si può scrivere:

$$\vec{P}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$$

dove $x(s)$ e $y(s)$ sono due funzioni scalari dell'ascissa curvilinea s (coordinata misurata lungo la traiettoria) che, a sua volta, è una funzione del tempo.
Per quanto riguarda la velocità, si può scrivere:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{ds}\,\frac{ds}{dt}$$

dove $d\vec{P}/ds$, che coincide con il versore tangente alla traiettoria $\vec{t}$, può essere espresso come:

$$\frac{d\vec{P}}{ds} = \frac{dx}{ds}\,\vec{i} + \frac{dy}{ds}\,\vec{j}$$

il cui modulo è:

$$\left|\frac{d\vec{P}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} = 1$$

da cui si può dedurre che le componenti del vettore $d\vec{P}/ds$ sono i coseni direttori del vettore $\vec{P}$.
In forma compatta, la velocità può essere scritta come:

$$\dot{\vec{P}} = \vec{P}'\dot{s}$$

L'accelerazione può essere espressa come:

$$\frac{d\dot{\vec{P}}}{dt} = \frac{d\left(\vec{P}'\dot{s}\right)}{dt} = \frac{d\vec{P}'}{dt}\,\dot{s} + \vec{P}'\,\frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{d\vec{P}'}{ds}\,\dot{s}^2 + \vec{P}'\,\ddot{s} = \vec{P}''\,\dot{s}^2 + \vec{P}'\,\ddot{s}$$

Il vettore $\vec{P}''$ ha la direzione del versore normale alla traiettoria $\vec{n}$ e modulo pari $1/\rho$, dove ρ è il raggio di curvatura della traiettoria:

$$\vec{P}'' = \frac{\vec{n}}{\rho}$$

In forma compatta, l'accelerazione può essere scritta come:

$$\ddot{\vec{P}} = \vec{P}''\,\dot{s}^2 + \vec{P}'\,\ddot{s}$$

In definitiva, le velocità e le accelerazioni lungo gli assi x e y sono:

$$\begin{cases} \dot{x} = x'(s)\dot{s} \\ \ddot{x} = x''(s)\dot{s}^2 + x'(s)\ddot{s} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y} = y'(s)\dot{s} \\ \ddot{y} = y''(s)\dot{s}^2 + y'(s)\ddot{s} \end{cases}$$

dove i termini $x'(s), x''(s), y'(s), y''(s)$ sono le *velocità* e le *accelerazioni geometriche* che dipendono dalla traiettoria che si desidera percorrere.

1.1 Determinazione di $x(s), y(s)$ e delle loro derivate

Nel caso di una traiettoria nota analiticamente, come ad esempio una circonferenza, è semplice esprimere le coordinate x e y in funzione di s; con riferimento alla figura 2:

$$\begin{cases} x = x_0 + R\sin\vartheta = x_0 + R\sin\left(\dfrac{s}{R}\right) = x(s) \\[2ex] y = y_0 - R\sin\vartheta = y_0 - R\sin\left(\dfrac{s}{R}\right) = y(s) \end{cases}$$

Quando invece la traiettoria è nota solo per punti, l'ascissa curvilinea deve essere determinata per via numerica; con riferimento alla figura 3, la relazione da utilizzare è:

$$s_{k+1} = s_k + \delta_k = s_k + \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$$

che, implementata per tutti i punti della traiettoria, dà origine ad una matrice che contiene le corrispondenze fra le coordinate e l'ascissa curvilinea:

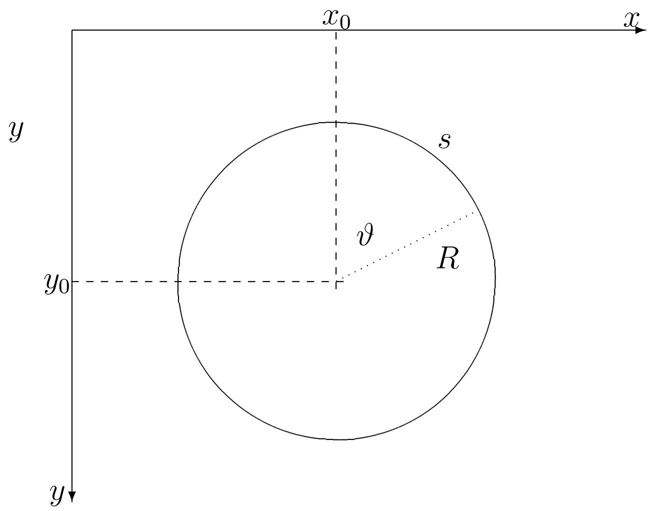

Figura 2: Traiettoria circolare

x	y	s
$x_1 = 0$	$y_1 = 0$	$s_1 = 0$
x_2	y_2	$s_2 = s_1 + \delta_1$
x_3	y_3	$s_3 = s_2 + \delta_2$
....	....	....
x_{k+1}	y_{k+1}	$s_{k+1} = s_k + \delta_k$
....	....	....

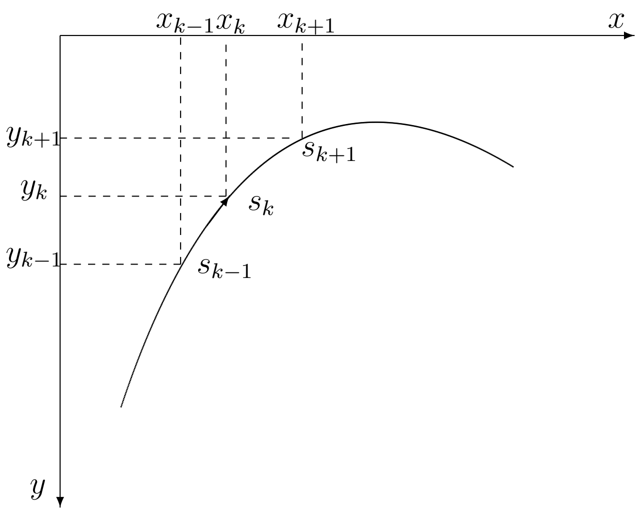

Figura 3: Traiettoria generica

Questa matrice consente, ad esempio mediante interpolazione lineare, di determinare le coordinate x e y per valori di ascissa curvilinea s intermedi fra quelli indicati nella matrice.
Per il calcolo delle velocità e accelerazioni geometriche si deve procedere ancora per via numerica:

$$x'_{k+1} = \frac{x_{k+1} - x_k}{\delta_k} \qquad y'_{k+1} = \frac{y_{k+1} - y_k}{\delta_k}$$
$$x''_{k+1} = \frac{x'_{k+1} - x'_k}{\delta_k} \qquad y''_{k+1} = \frac{y'_{k+1} - y'_k}{\delta_k}$$

1.2 Limiti di velocità e accelerazione

Una volta scritte le espressioni delle velocità e delle accelerazioni lungo i due assi, i valori ammissibili per $\dot{s}$ e $\ddot{s}$ si ricavano valutando, analogamente a quanto già fatto per la sintesi, le condizioni limite sulle velocità e sulle accelerazioni; per l'asse x le condizioni sono:

$$\begin{cases} \tau_x K_{vx} \dot{\vartheta}_{max} \geq \dot{x} = |x'(s)|\, \dot{s} \\ C_{mx} \geq m_{Tx}\, |\ddot{x}|\ \tau_x = m_{Tx}\, |x''(s)\dot{s}^2 + x'(s)\ddot{s}|\ \tau_x \end{cases} \tag{1}$$

Limite sulla velocità di percorrenza ($\dot{s}$): la prima delle (1) porta alla condizione:

$$\dot{s} \leq \frac{\tau_x K_{vx} \dot{\vartheta}_{max}}{|x'(s)|} \tag{2}$$

La seconda delle (1) mostra che $\ddot{x}$ è influenzata non solo da $\ddot{s}$ ma anche da $\dot{s}$, quando la traiettoria è caratterizzata da $x''(s) \neq 0$ (cioè quando la traiettoria ha curvatura).
Da questa disequazione si ricava un ulteriore limite per la velocità, corrispondente al caso in cui $\ddot{s} = 0$:

$$\frac{C_{mx}}{m_{Tx}\tau_x} \geq |x''(s)|\, \dot{s}^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{s} \leq \sqrt{\frac{C_{mx}}{m_{Tx}\tau_x\, |x''(s)|}} \tag{3}$$

Relazioni analoghe alle (2) e (3) andranno scritte anche per l'asse y; il valore limite della velocità di percorrenza della traiettoria sarà il minimo derivante dalle quattro disequazioni così ottenute.
La coppia che compare nella relazione (3), fa riferimento al campo di funzionamento dei motori utilizzati.
Una volta saturato questo limite di velocità, non si ha più alcun margine di intervento per accelerare o decelerare.[1]

Osservazione: se una delle velocità geometriche è nulla, significa che si sta percorrendo una traiettoria rettilinea lungo la direzione corrispondente alla coordinata per la quale la velocità geometrica è diversa da zero. Ciò significa che il limite sulla velocità sarà dovuto solo all'asse lungo il quale ci si sta muovendo.
Analoga considerazione vale per il caso in cui le accelerazioni geometriche siano nulle; in questo caso il limite sulla velocità è dato solo dalla disequazione (2).

Limite sull'accelerazione ($\ddot{s}$): la seconda disequazione di traduce in una serie di condizioni che derivano dall'osservazione che la relazione cambia a seconda dei segni di $\ddot{x}$ e di $x'(s)$.

[1] La radice negativa non viene presa in considerazione perché indica semplicemente il limite nel caso in cui il verso di percorrenza della traiettoria sia opposto.

$$\ddot{x} \geq 0 \;\rightarrow\; \frac{C_{mx}}{m_{Tx}\tau_x} \geq x''(s)\dot{s}^2 + x'(s)\ddot{s} \;\left|\; \begin{array}{ll} x'(s) \geq 0 & \Rightarrow\; \ddot{s} \leq \dfrac{\frac{C_{mx}}{m_{Tx}\tau_x} - x''(s)\dot{s}^2}{|x'(s)|} \\ \\ x'(s) < 0 & \Rightarrow\; \ddot{s} \geq -\dfrac{\frac{C_{mx}}{m_{Tx}\tau_x} - x''(s)\dot{s}^2}{|x'(s)|} \end{array}\right.$$

$$\ddot{x} < 0 \;\rightarrow\; \frac{C_{mx}}{m_{Tx}\tau_x} \geq -\left[x''(s)\dot{s}^2 + x'(s)\ddot{s}\right] \;\left|\; \begin{array}{ll} x'(s) \geq 0 & \Rightarrow\; \ddot{s} \geq -\dfrac{\frac{C_{mx}}{m_{Tx}\tau_x} + x''(s)\dot{s}^2}{|x'(s)|} \\ \\ x'(s) < 0 & \Rightarrow\; \ddot{s} \leq \dfrac{\frac{C_{mx}}{m_{Tx}\tau_x} + x''(s)\dot{s}^2}{|x'(s)|} \end{array}\right.$$

Lo studio del segno di $\ddot{x}$ porta ad una serie di condizioni che dipendono anche dal segno di $x'(s)$:

$$\ddot{x} = x''(s)\dot{s}^2 + x'(s)\ddot{s} \geq 0 \;\left|\; \begin{array}{ll} x'(s) \geq 0 & \Rightarrow\; \ddot{s} \geq -\dfrac{x''(s)\dot{s}^2}{|x'(s)|} \\ \\ x'(s) < 0 & \Rightarrow\; \ddot{s} \leq \dfrac{x''(s)\dot{s}^2}{|x'(s)|} \end{array}\right.$$

$$\ddot{x} = x''(s)\dot{s}^2 + x'(s)\ddot{s} < 0 \;\left|\; \begin{array}{ll} x'(s) \geq 0 & \Rightarrow\; \ddot{s} < -\dfrac{x''(s)\dot{s}^2}{|x'(s)|} \\ \\ x'(s) < 0 & \Rightarrow\; \ddot{s} > \dfrac{x''(s)\dot{s}^2}{|x'(s)|} \end{array}\right.$$

L'insieme di tutte le condizioni può essere riassunto nella tabella:

	$\ddot{x} < 0$	$\ddot{x} \geq 0$
$x'(s) \geq 0$	$-\dfrac{\frac{C_{mx}}{m_{Tx}\tau_x} + x''(s)\dot{s}^2}{\lvert x'(s)\rvert} \leq \ddot{s} \leq -\dfrac{x''(s)\dot{s}^2}{\lvert x'(s)\rvert}$	$-\dfrac{x''(s)\dot{s}^2}{\lvert x'(s)\rvert} \leq \ddot{s} \leq \dfrac{\frac{C_{mx}}{m_{Tx}\tau_x} - x''(s)\dot{s}^2}{\lvert x'(s)\rvert}$
$x'(s) < 0$	$\dfrac{x''(s)\dot{s}^2}{\lvert x'(s)\rvert} \leq \ddot{s} \leq \dfrac{\frac{C_{mx}}{m_{Tx}\tau_x} + x''(s)\dot{s}^2}{\lvert x'(s)\rvert}$	$-\dfrac{\frac{C_{mx}}{m_{Tx}\tau_x} - x''(s)\dot{s}^2}{\lvert x'(s)\rvert} \leq \ddot{s} \leq \dfrac{x''(s)\dot{s}^2}{\lvert x'(s)\rvert}$

Per quanto riguarda C_{mx} si ricorda che il suo valore dipende dal campo di funzionamento dei motori.

1.3 Determinazione di $x(s), y(s)$ e delle loro derivate

Una volta definite le condizioni limite per la velocità $\dot{s}$ e per l'accelerazione $\ddot{s}$, si può affrontare il problema della definizione della strategia di pilotaggio.
Sempre nell'ottica di minimizzare il tempo di percorrenza, la strategia consiste nello sfruttare in ogni istante le prestazioni massime degli assi; l'algoritmo che deve essere messo a punto può essere riassunto nei seguenti passi:

- valutazione, in un punto della traiettoria, della velocità limite ($\dot{s}_{lim}$) mediante le relazioni (2) e (3), una volta calcolate le velocità e le accelerazioni geometriche (come visto in precedenza);
- scelta dell'accelerazione da utilizzare in funzione della velocità attuale:
  - se $\dot{s}_{attuale} < \dot{s}_{lim}$ significa che il sistema è in grado di accelerare e, nell'ottica di massimizzare le prestazioni, si sceglie un valore di accelerazione pari al massimo consentito in relazione ai limiti riassunti nella tabella precedente;
  - in caso contrario significa che si deve decelerare e quindi si decide di assegnare al sistema una decelerazione pari alla massima possibile, sempre in base alla tabella precedente.
- calcolo della posizione s e della velocità $\dot{s}$ nel punto successivo della traiettoria.

Il calcolo delle posizioni e delle velocità deve essere affrontato per via numerica; le relazioni che si utilizzano costituiscono l'applicazione del metodo di Eulero:

$$s_{k+1} = s_k + \dot{s}_k \Delta t$$
$$\dot{s}_{k+1} = \dot{s}_k + \ddot{s}_k \Delta t$$

dove $\Delta t = t_{k+1} - t_k$.
Implementando le relazioni per tutti i punti della traiettoria, si ottiene la tabella:

t	**s**	$\dot{\mathbf{s}}$	$\ddot{\mathbf{s}}$
$t_0 = 0$	$s_0 = 0$	$\dot{s}_0 = 0$	$\ddot{s}_0$
$t_1 = t_0 + \Delta t$	$s_1 = s_0 + \dot{s}_0 \Delta t$	$\dot{s}_1 = \dot{s}_0 + \ddot{s}_0 \Delta t$	$\ddot{s}_1$
....	....	....	....
$t_{k+1} = t_k \Delta t$	$s_{k+1} = s_k + \dot{s}_k \Delta t$	$\dot{s}_{k+1} = \dot{s}_k + \ddot{s}_k \Delta t$	$\ddot{s}_{k+1}$
....	....	....	....

in cui le accelerazioni vengono scelte, secondo quanto detto precedentemente, in base alle condizioni riassunte in tabella.

1.4 Ottimizzazione della strategia

Per ottimizzare la strategia di scelta dell'accelerazione con cui percorrere la traiettoria, è opportuno valutare la velocità limite anche in un punto che si trova un po'più avanti, ad una certa distanza.
La distanza viene scelta prendendo come punto quello in cui l'end–effector riuscirebbe a fermarsi supponendo che, a partire dalla posizione attuale, deceleri con il valore di decelerazione massimo possibile in relazione alla posizione attuale sulla traiettoria.

In base a queste considerazioni si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} d &= \frac{1}{2}\ddot{s}_{max}\,\Delta t^2 \\ \ddot{s}_{max} &= \frac{\dot{s}}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{1}{2}\frac{\dot{s}^2}{\ddot{s}_{max}}$$

In corrispondenza del punto a distanza d dalla posizione attuale si valuta la velocità limite $\dot{s}_{lim_d}$ e come velocità limite da adottare per la scelta dell'accelerazione si utilizza la minima tra quest'ultima e quella valutata nel punto attuale.
Infine la velocità attuale viene confrontata non con il valore limite determinato in precedenza ma con una banda definita da valori limite che, ad esempio, possono essere pari a $0.7\,\dot{s}_{lim}$ e $0.8\,\dot{s}_{lim}$:

- se $\dot{s} \leq 0.7\,\dot{s}_{lim}$ si assegna la massima accelerazione possibile;
- se $0.7\,\dot{s}_{lim} \leq \dot{s} \leq 0.8\,\dot{s}_{lim}$ si assegna accelerazione nulla;
- se $\dot{s} \geq 0.8\,\dot{s}_{lim}$ si assegna la massima decelerazione possibile.