

# Teoria del Senyal. Pràctica 2 de laboratori

---

Eric Guisado, Raúl Alonso

Divendres 30 de setembre de 2016

## Índex

### 1 Estudi previ

1

## 1 Estudi previ

**Qüestió 1.** Si el senyal d'entrada  $x[n]$  té longitud  $L_x$ , indicar quina seria la longitud  $L_y$  del senyal resultat del filtratge  $y[n]$  en funció de  $L$  i  $L_x$ . Indicar quantes multiplicacions s'han de fer per poder calcular les  $L_y$  mostres del senyal de sortida mitjançant l'aplicació directa de l'equació de convolució suposant que  $L_x > L$ . Expressar aquest número de multiplicacions en funció de  $L$  i  $L_x$ . Calcular també el número de multiplicacions per mostra d'entrada (és a dir, el quocient entre el número total de multiplicacions necessàries i el número de mostres d'entrada  $L_x$ ).

El senyal de sortida  $y[n]$  es calcula com

$$y[n] = \{x * h\}[n] = \sum_{j=0}^{L-1} h[j]x[n-j]$$

Suposem que el senyal  $x[n]$  comença a  $n = k$  i acaba a  $n = k + L_x - 1$ . Els termes de la sortida  $y[n]$  seran aquells per als quals hi ha algun  $j \in \{0, 1, \dots, L-1\}$  tal que  $n-j \in \{k, k+1, \dots, k+L_x-1\}$ , és a dir,  $k \leq n-j \leq k+L_x-1 \iff k+j \leq n \leq k+L_x-1+j$ . Per tant, els termes de la sortida seran aquells amb  $k \leq n \leq k+L_x+L-2$ . Així doncs, la sortida té longitud  $L + L_x - 1$ .

Observem que podem escriure, per a  $k \leq n \leq k+L_x+L-2$ :

$$y[n] = \{x * h\}[n] = \sum_{j=\max\{0, n-k-L_x+1\}}^{\min\{L-1, n-k\}} h[j]x[n-j] = \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-k} h[j]x[n-j] & \text{si } k \leq n \leq k+L-1 \\ \sum_{j=0}^{L-1} h[j]x[n-j] & \text{si } k+L-1 < n < k+L_x-1 \\ \sum_{j=n-k-L_x+1}^{L-1} h[j]x[n-j] & \text{si } k+L_x-1 \leq n \leq k+L+L_x-2 \end{cases}$$

Així, es dedueix que el nombre de multiplicacions que cal fer en aplicar directament l'equació de convolució és:

$$2 \sum_{i=1}^L i + L(L_x - L - 1) = L(L+1) + L(L_x - L - 1) = LL_x$$

El nombre de multiplicacions per mostra d'entrada és  $\frac{LL_x}{L_x} = L$ .

**Qüestió 2.** *Respon a les següents preguntes:*

- a) Relacionar el número de blocs  $P$  ( $i = 0, \dots, P - 1$ ) amb  $L_x$  i  $M$ .
- b) Quin és el valor màxim de  $M$  (donat el número de punts totals  $N$  de cada bloc  $x_i[n]$ ) per tal que la convolució circular en (1) coincideixi amb la convolució lineal en (2)? Expressar aquest valor màxim de  $M$  en funció de  $N$  i  $L$ .

Cada trama ve donada està definida per

$$x_i[n] = \begin{cases} x[n + iM] & i = 0, \dots, M - 1 \\ 0 & i = M, \dots, N - 1 \end{cases},$$

i cadascuna d'aquestes es correspon amb el segment de  $x$  que va des de  $x[iM]$  fins a  $x[(i+1)M - 1]$  i afegint zeros fins que aquesta trama tingui mida  $N$ . Si volem que aquestes trames recorrin tota la senyal  $x$  cal que el darrer  $i$  que agafem contingui el darrer element de  $x$ , és a dir,  $i = P - 1$  ha de ser el mínim tal que  $L_x - 1 \leq iM + n$ , per a  $0 \leq n \leq M - 1$ . Com que  $L_x - 1 \leq iM + n \leq iM + M - 1$ , d'on  $L_x \leq (i + 1)M = PM$ . Per tant, necessitem

$$P \geq L_x/M.$$

Per tal que la convolució circular coincideixi amb la convolució lineal s'ha de verificar, per a  $n \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ :

$$\sum_{j=0}^{L-1} h[j]x_i[n-j] = \sum_{j=0}^{L-1} h[j] \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_i[n-j-rN]$$

Per garantir-ho, imposen que, per a  $r \neq 0$ ,  $n \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, L - 1\}$ ,  $n - j - rN \notin \{0, 1, \dots, M - 1\}$ .

Per a  $r > 0$ , veiem que sempre es té  $n - j - rN < 0$ . En efecte, el màxim valor d'aquesta expressió es dona amb  $r = 1$ ,  $j = 0$ ,  $n = N - 1$ , i és  $-1$ .

Per a  $r < 0$ , veiem que sempre es té  $n - j - rN \geq M$ . En aquest cas, el mínim valor d'aquesta expressió es dona amb  $r = -1$ ,  $j = L - 1$  i  $n = 0$ . S'ha de satisfer, doncs,  $N - L + 1 \geq M$ . Per tant, el valor màxim de  $M$  és  $N - L + 1$ .

(Altrament, la convolució circular és la suma dels senyals que s'obtenen aplicant un retard de  $rN$ , amb  $r \in \mathbb{Z}$ . Per evitar encavallaments, la longitud de la convolució lineal ha de ser menor que  $N$ . Per tant,  $L + M - 1 \leq N$ .)

**Qüestió 3.** *Calcular el número de multiplicacions reals associat a aquest mètode per mostra d'entrada. Per això, considerar que es fa ús de l'algorisme FFT suposant que el número de punts de la DFT és una potència de 2, és a dir,  $N = 2^\nu$  (en aquest cas, el número de multiplicacions complexes tant de la DFT com de la IDFT és de  $N \log_2 N$  multiplicacions complexes). Considerar també que el valor de  $M$  és el valor màxim calculat a la qüestió 2.2. Per a calcular el número de multiplicacions per mostra d'entrada s'ha de calcular quantes multiplicacions són necessàries per a processar cada bloc i dividir aquest número per  $M$ , és a dir, pel número de mostres d'entrada que es processen a cada bloc. Expressar el resultat en funció de  $L$  i  $N$ .*

Per trobar la DFT d'un bloc  $i$ , després d'obtenir el producte  $X_i[k]H[k]$ , trobar-ne la transformada inversa calen  $2N \log_2 N$  multiplicacions complexes. El producte  $X_i[k]H[k]$  requereix  $N$  multiplicacions complexes. El nombre d'operacions per mostra d'entrada és, doncs:

$$\frac{2N \log_2 N + N}{M} = \frac{2N \log_2 N + N}{N - L + 1} = \frac{2 \log_2 N + 1}{1 - \frac{L-1}{N}}$$