

Teoria del Senyal. Pràctica 2 de laboratori

Eric Guisado, Raúl Alonso

Divendres 30 de setembre de 2016

Índex

1 Estudi previ

1

1 Estudi previ

Qüestió 1. Si el senyal d'entrada $x[n]$ té longitud L_x , indicar quina seria la longitud L_y del senyal resultat del filtratge $y[n]$ en funció de L i L_x . Indicar quantes multiplicacions s'han de fer per poder calcular les L_y mostres del senyal de sortida mitjançant l'aplicació directa de l'equació de convolució suposant que $L_x > L$. Expressar aquest número de multiplicacions en funció de L i L_x . Calcular també el número de multiplicacions per mostra d'entrada (és a dir, el quocient entre el número total de multiplicacions necessàries i el número de mostres d'entrada L_x).

El senyal de sortida $y[n]$ es calcula com

$$y[n] = \{x * h\}[n] = \sum_{j=0}^{L-1} h[j]x[n-j]$$

Suposem que el senyal $x[n]$ comença a $n = k$ i acaba a $n = k + L_x - 1$. Els termes de la sortida $y[n]$ seran aquells per als quals hi ha algun $j \in \{0, 1, \dots, L-1\}$ tal que $n-j \in \{k, k+1, \dots, k+L_x-1\}$, és a dir, $k \leq n-j \leq k+L_x-1 \iff k+j \leq n \leq k+L_x-1+j$. Per tant, els termes de la sortida seran aquells amb $k \leq n \leq k+L_x+L-2$. Així doncs, la sortida té longitud $L + L_x - 1$.

Observem que podem escriure, per a $k \leq n \leq k+L_x+L-2$:

$$y[n] = \{x * h\}[n] = \sum_{j=\max\{0, n-k-L_x+1\}}^{\min\{L-1, n-k\}} h[j]x[n-j] = \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-k} h[j]x[n-j] & \text{si } k \leq n \leq k+L-1 \\ \sum_{j=0}^{L-1} h[j]x[n-j] & \text{si } k+L-1 < n < k+L_x-1 \\ \sum_{j=n-k-L_x+1}^{L-1} h[j]x[n-j] & \text{si } k+L_x-1 \leq n \leq k+L+L_x-2 \end{cases}$$

Així, es dedueix que el nombre de multiplicacions que cal fer en aplicar directament l'equació de convolució és:

$$2 \sum_{i=1}^L i + L(L_x - L - 1) = L(L+1) + L(L_x - L - 1) = LL_x$$

El nombre de multiplicacions per mostra d'entrada és $\frac{LL_x}{L_x} = L$.

Qüestió 2. Respon a les següents preguntes:

- Relacionar el número de blocs P ($i = 0, \dots, P - 1$) amb L_x i M .
- Quin és el valor màxim de M (donat el número de punts totals N de cada bloc $x_i[n]$) per tal que la convolució circular en (1) coincideixi amb la convolució lineal en (2)? Expressar aquest valor màxim de M en funció de N i L .

Cada trama ve donada per

$$x_i[n] = \begin{cases} x[n + iM] & i = 0, \dots, M - 1 \\ 0 & i = M, \dots, N - 1 \end{cases},$$

i cadascuna d'aquestes es correspon amb el segment de x que va des de $x[iM]$ fins a $x[i(M+1)-1]$, afegint-hi zeros fins que aquesta trama tingui mida N . Si volem que aquestes trames recorrin tot el senyal x , i que no n'hi hagi cap més que les necessàries, cal que el darrer i que agafem contingui el darrer element de x , és a dir, per a $i = P - 1$ hi ha d'haver algun n , amb $0 \leq n \leq M - 1$, tal que $L_x - 1 = (P - 1)M + n$. Cal, doncs, $(P - 1)M \leq L_x - 1 \leq PM - 1$. Per tant, necessitem

$$\frac{L_x}{M} \leq P \leq \frac{L_x + M - 1}{M}.$$

Així doncs, P ha de ser $P = \lceil \frac{L_x}{M} \rceil$.

Per tal que la convolució circular coincideixi amb la convolució lineal s'ha de verificar, per a $n \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$:

$$\sum_{j=0}^{L-1} h[j]x_i[n-j] = \sum_{j=0}^{L-1} h[j] \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_i[n-j-rN]$$

Per garantir-ho, imposem que, per a $r \neq 0$, $n \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$, $j \in \{0, 1, \dots, L - 1\}$, $n - j - rN \notin \{0, 1, \dots, M - 1\}$.

Per a $r > 0$, veiem que sempre es té $n - j - rN < 0$. En efecte, el màxim valor d'aquesta expressió es dona amb $r = 1$, $j = 0$, $n = N - 1$, i és -1 .

Per a $r < 0$, veiem que sempre es té $n - j - rN \geq M$. En aquest cas, el mínim valor d'aquesta expressió es dona amb $r = -1$, $j = L - 1$ i $n = 0$. S'ha de satisfer, doncs, $N - L + 1 \geq M$. Per tant, el valor màxim de M és $N - L + 1$.

(Altrament, la convolució circular és la suma dels senyals que s'obtenen aplicant un retard de rN , amb $r \in \mathbb{Z}$. Per evitar encavallaments, la longitud de la convolució lineal ha de ser menor que N . Per tant, $L + M - 1 \leq N$.)

Qüestió 3. Calcular el número de multiplicacions reals associat a aquest mètode per mostra d'entrada. Per això, considerar que es fa ús de l'algorisme FFT suposant que el número de punts de la DFT és una potència de 2, és a dir, $N = 2^\nu$ (en aquest cas, el número de multiplicacions complexes tant de la DFT com de la IDFT és de $N \log_2 N$ multiplicacions complexes). Considerar també que el valor de M és el valor màxim calculat a la qüestió 2.2. Per a calcular el número de multiplicacions per mostra d'entrada s'ha de calcular quantes multiplicacions són necessàries per a processar cada bloc i dividir aquest número per M , és a dir, pel número de mostres d'entrada que es processen a cada bloc. Expressar el resultat en funció de L i N .

Per trobar la DFT d'un bloc i , després d'obtenir el producte $X_i[k]H[k]$, trobar-ne la transformada inversa calen $2N \log_2 N$ multiplicacions complexes. El producte $X_i[k]H[k]$ requereix N multiplicacions complexes. El nombre d'operacions per mostra d'entrada és, doncs:

$$\frac{2N \log_2 N + N}{M} = \frac{2N \log_2 N + N}{N - L + 1} = \frac{2 \log_2 N + 1}{1 - \frac{L-1}{N}}$$