Pràctica 2 de laboratori

Teoria del Senyal (TS)

Pràctica 2. La transformada discreta de Fourier (DFT)

Estudi Previ

PART 1

Un filtratge digital amb un filtre FIR amb resposta impulsional h[n] de longitud L coeficients es pot portar a terme mitjançant l'aplicació directa de l'equació de convolució:

$$h[n]=0, \qquad n<0, \qquad n\geq L \qquad \Rightarrow \qquad y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{j=0}^{L-1}h[j]x[n-j]$$

En el cas de que la longitud de la resposta impulsional del filtre L sigui molt alta, la complexitat computacional pot ser molt elevada.

> **Qüestió 2.1.** Si el senyal d'entrada x[n] té longitud L_x, indicar quina seria la longitud L_y del senyal resultat del filtratge y[n] en funció de L i L_x. Indicar quantes multiplicacions s'han de fer per poder calcular les L_y mostres del senyal de sortida mitjançant l'aplicació directa de l'equació de convolució suposant que L_x>L. Expressar aquest número de multiplicacions en funció de L i L_x. Calcular també el número de multiplicacions per mostra d'entrada (és a dir, el quocient entre el número total de multiplicacions necessàries i el número de mostres d'entrada L_x).

Un resultat bàsic dels sistemes lineals i invariants és que un filtratge o convolució en el domini del temps és equivalent a una multiplicació en el domini de la freqüència. Atès que l'algorisme FFT (Fast Fourier Transform) proporciona una forma eficient de càlcul de la DFT (Discrete Fourier Transform), es pot pensar en obtenir un filtratge mitjançant un producte en el domini transformat en lloc d'una convolució en el domini del temps.

En efecte, si dividim el senyal d'entrada en P trames de M mostres i construïm els blocs $x_i[n]$ de longitud N afegint zeros tal i com segueix:

$$x_i[n]=\begin{cases} x[n+iM], & n=0,\ldots,M-1 \\ 0, & n=M,\ldots,N-1 \end{cases} \qquad i=0,\ldots,P-1,$$

el càlcul de la convolució circular del bloc $x_i[n]$ amb la resposta impulsional del filtre h[n]:

$$y_i[n]=x_i[n] \, \text{Ⓝ} \, h[n] \tag{1}$$

coincideix amb la convolució lineal

$$y_i[n]=x_i[n]*h[n], \tag{2}$$

sempre i quan el número de punts N sigui suficientment gran. En aquest cas, podem obtenir el senyal de sortida $y[n]=x[n]*h[n]$ com la suma de les sortides corresponents a cada bloc:

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_i x_i[n-iM]*h[n]=\sum_i y_i[n-iM]$$

A l'hora d'implementar la suma dels blocs $y_i[n]$ anterior hem de tenir en compte que el número de mostres diferents de zero de $y_i[n]$ pot ser més gran que M i, per tant, hi haurà solapament entre les primeres mostres d'un bloc i les darreres del bloc anterior.

Qüestió 2.2. Respon a les següents preguntes:

- Relacionar el número de blocs P (i=0,...,P-1) amb L_x i M.
- Quin és el valor màxim de M (donat el número de punts totals N de cada bloc $x_i[n]$) per tal que la convolució circular en (1) coincideixi amb la convolució lineal en (2)? Expressar aquest valor màxim de M en funció de N i L.

Per al càlcul del cost computacional hem de considerar que la realització de la convolució circular es pot fer de forma més eficient en el domini de la freqüència sota determinades condicions:

$$y_i[n] = x_i[n] \, N \, h[n] = IDFT_N\left[X_i[k]H[k]\right].$$

El mètode anterior requereix el càlcul de $X_i[k]$ (DFT de N punts de $x_i[n]$), la multiplicació de $X_i[k]$ amb $H[k]$ (DFT de N punts de h[n]), i el càlcul de la DFT inversa (IDFT) d'aquest producte. És important observar que el càlcul de $H[k]$ només és necessari realitzar-lo un cop i per tant no intervé en el càlcul del cost computacional del filtratge.

Qüestió 2.3. Calcular el número de multiplicacions reals associat a aquest mètode per mostra d'entrada. Per això, considerar que es fa ús de l'algorisme FFT suposant que el número de punts de la DFT és una potència de 2, és a dir, $N = 2^v$ (en aquest cas, el número de multiplicacions complexes tant de la DFT com de la IDFT és de $\frac{N}{2}\log_2 N$ multiplicacions complexes). Considerar també que el valor de M és el valor màxim calculat a la qüestió 2.2. Per a calcular el número de multiplicacions per mostra d'entrada s'ha de calcular quantes multiplicacions són necessàries per a processar cada bloc i dividir aquest número per M, és a dir, pel número de mostres d'entrada que es processen a cada bloc. Expressar el resultat en funció de L i N.

Qüestió 2.4. Escriure una funció en MATLAB

function yb=cc(xb,H)

que calculi la convolució circular de N punts de xb amb h. Suposi que el vector d'entrada H ja conté la DFT de N punts de h. El càlcul del resultat, que s'ha de retornar mitjançant el vector yb, s'ha de calcular com la IDFT de N punts:

$$yb[n] = IDFT_N\left[Xb[k]H[k]\right]$$

Creï la funció "process". Aquesta funció tindrà la següent capçalera:

function y=process(x,h,N)

on x i h són els vectors de mostres que s'han de convolucionar i N és el número de punts de les DFT's/IDFT's a aplicar (ha de ser una potència de 2). El vector y de sortida ha de contenir les mostres resultat de la convolució. La convolució s'ha de portar a terme utilitzant la tècnica de càlcul de DFT's a blocs comentada anteriorment.

La funció ha d'implementar els següents passos:

- Calcular la longitud del vector h.
- Calcular la DFT de N punts del vector h.
- Calcular la màxima longitud M (en número de mostres) que pot tenir cada bloc del vector x per tal que la convolució circular entre cada bloc i el vector h coincideixi amb la convolució lineal (qüestió 2.2).
- Dividir el vector x en blocs de M mostres cadascú.
- Calcular la convolució circular de cada bloc de x amb el vector h usant la funció "cc" desenvolupada anteriorment.
- Concatenar adequadament els resultats de les convolucions circulars per tal d'obtenir el vector y.

PART 2

La segona part de la pràctica versarà sobre el càlcul de DFT's de sinusoides enfinestrades (us podeu basar en l'enunciat del problema 2.28 de la col·lecció de problemes, apartats (a,b,c,d)).

Qüestió 2.5. Quina és l'expressió matemàtica corresponent a la DFT de N punts d'un senyal sinusoïdal de pulsació discreta $\Omega_0 = 2\pi \frac{k_0}{N}$ (essent k_0 un número enter)?

Qüestió 2.6. Dibuixi la DFT d'aquest senyal sinusoïdal.

Qüestió 2.7. Expliqui qualitativament l'efecte d'aplicar "zero-padding" i una finestra no rectangular sobre la DFT.

<u>Activitat al laboratori:</u>

PART 1

La primera part de la pràctica consisteix bàsicament en comprovar que la funció "process" preparada a l'estudi previ (funció que fa el càlcul de la convolució mitjançant DFT's i IDFT's) dóna el mateix resultat que la funció "conv" pròpia de MATLAB (que és la funció que calcula la convolució pel mètode directe), i que requereix un menor cost computacional.

Activitat 2.1. Generi un vector aleatori h de longitud $L=10^3$ mostres i un altre vector aleatori x de longitud $L_x=10^7$. Per generar els vectors pot utilitzar la funció "randn" de MATLAB.

Mitjançant les instruccions "tic" i "toc" de MATLAB pot mesurar aproximadament el temps que passa entre l'execució de les dues instruccions. Això l'ajudarà a comparar aproximadament el cost computacional dels dos mètodes:

tic; y1=conv(x,h); toc

tic; y2=process(x,h,N); toc

Compari la durada de l'execució de cada mètode per a diferents valors de v on $N=2^v$ (essent N una potència de 2 suficientment gran) i comprovi que els dos resultats de la convolució y1 i y2 són iguals.

Opcional: dibuixar el temps d'execució respecte N (ó v) i comparar la forma de la corba amb el resultat teòric obtingut a la qüestió 2.3 de l'estudi previ.

PART 2

L'estàndard de senyalització "Dual-tone multi-frequency" (DTMF) és un estàndard de sistemes de telefonia. En un esquema DTMF, el telèfon està equipat amb un teclat tal com es mostra a la següent figura:

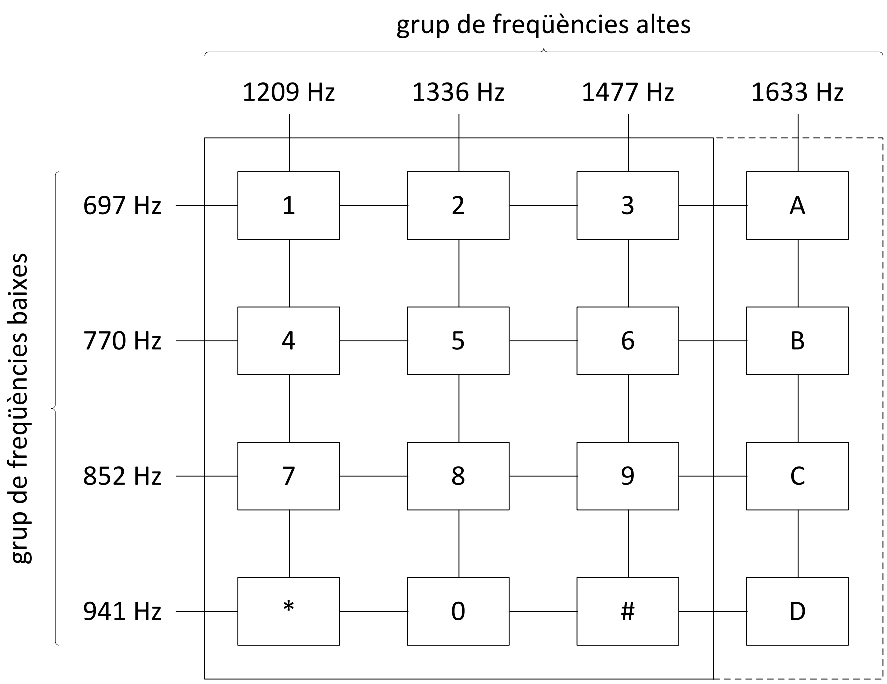


Figura 1: teclat telefònic DTMF.

Cada tecla representa la suma d'un parell de tons. Un dels tons correspon al grup de tons amb freqüències entre 1 kHz i 2 kHz, i l'altre és del grup de freqüències per sota de 1 kHz. Aquestes freqüències s'han seleccionat de manera que els dos tons que formen el senyal DTMF es puguin distingir clarament fins i tot en la presència de formes d'ones de veu que poden ocupar la línia. Per a reduir el risc d'error, els tons s'han de transmetre contínuament durant un temps mínim de 50 ms, seguit d'un període de pausa inter-digital d'una durada similar.

El sistema de detecció DTMF s'utilitza per a detectar quina és la tecla polsada i s'utilitza no només per establir trucades de telèfon, sinó també per a funcions de control en telefonia.

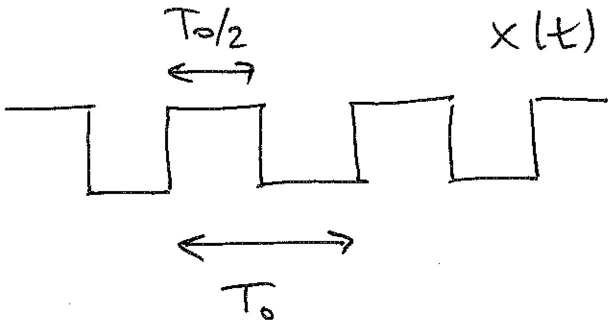
Activitat 2.2. Utilitzant la funció "load" de MATLAB, carregui el fitxer XX.mat. Després de carregar el fitxer, el senyal x estarà disponible al workspace de MATLAB per a poder operar amb ell. Sabent que el senyal x s'ha obtingut mitjançant un procés de mostreig prenent com a freqüència de mostreig fs = 8 kHz, porti a terme les següents activitats:

- Dibuixi el senyal x.
- Quina és la duració del senyal x en número de mostres i en segons?
- Pot escoltar el so dels dos tons fent: wavplay(x,fs).
- Obtingui la DFT de x (X[k]) i dibuixi el seu mòdul.
- Mitjançant l'anàlisi del mòdul de la DFT de x, respongui a les següents qüestions:
    - Trobi els índexs (valors de k) per a cadascun dels 4 pics de la DFT (pot utilitzar la funció max de MATLAB).
    - Obtingui les freqüències digitals corresponents als dos pics detectats.
    - Quines són les freqüències analògiques (en Hz) corresponents a la freqüències digitals anteriors?
    - Quina és la tecla corresponent al senyal x utilitzant la Figura 1?
    - Quina és l'amplitud dels pics de la DFT?
    - A partir del resultat anterior, calculi l'amplitud dels dos tons utilitzats en el senyal x.

Activitat 2.3. Utilitzant el mateix senyal x, comprovi i comenti sobre la DFT l'efecte de:

- Utilitzar subvectors de x de diferents longituds.
- Utilitzar zero-padding.
- Utilitzar diferents tipus de finestres temporals.

1

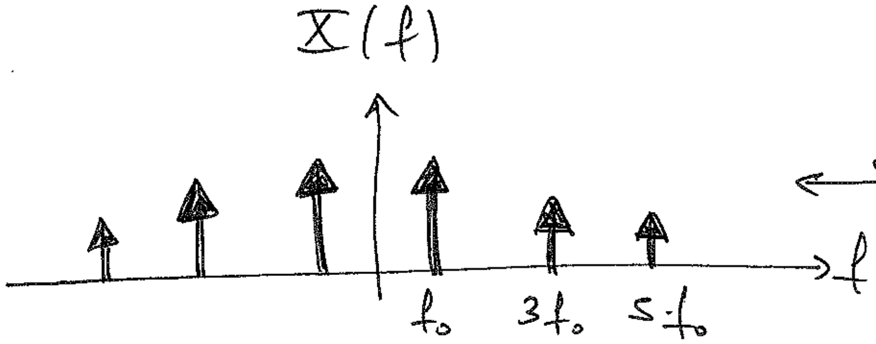


$f_0 = \frac{1}{T_0}$

frecuencia fundamental

FRECUENCIA A PONER EN EL GENERADOR DE FUNCIONES

tren de pulsos con ciclo de trabajo del 50%

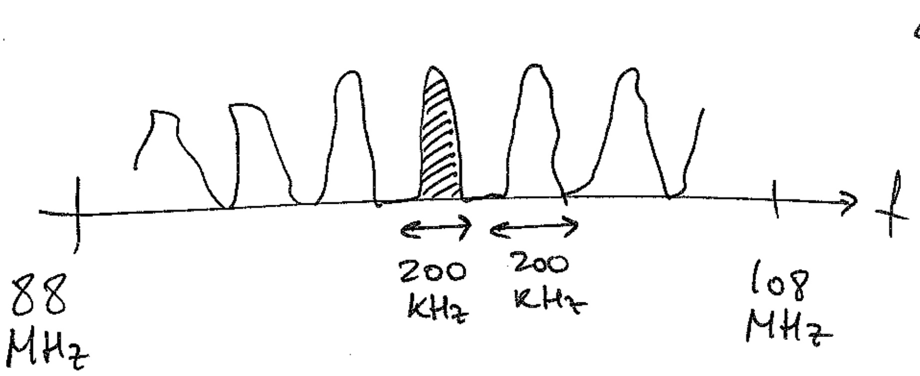


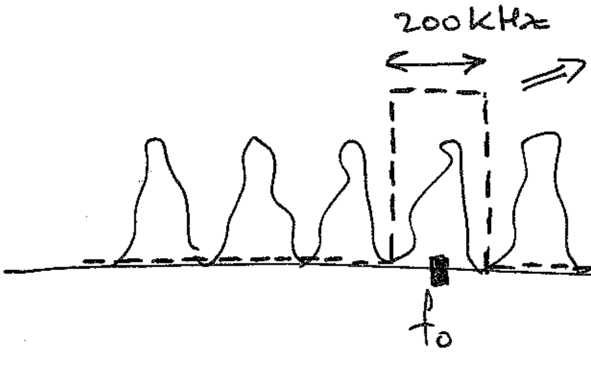
solo están los armónicos impares (tal como se ha visto en clase)

2 RADIO FM.

Cada canal de radio FM tiene asignado un ancho de banda de 200 KHz

espectro de la señal recibida en antena

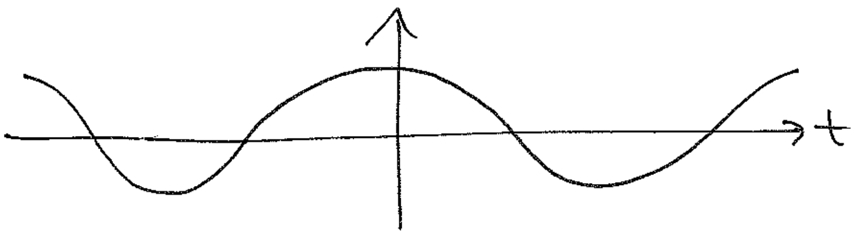




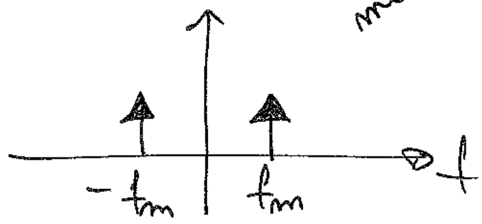
aplicamos un filtro centrado en uno de los canales con BW = 200KHz para seleccionar únicamente una emisora

③ MODULACIÓN DE AMPLITUD (AM) DE UNA SINUSOIDE

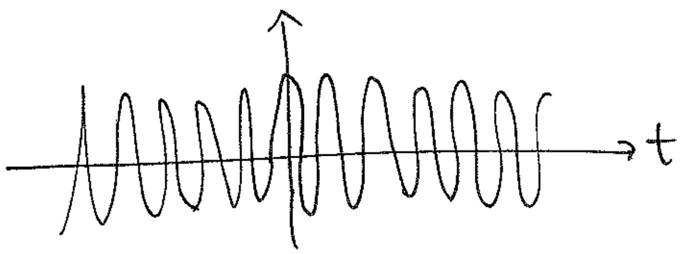
- $x(t) = A_m \cdot \cos(2\pi f_m t)$



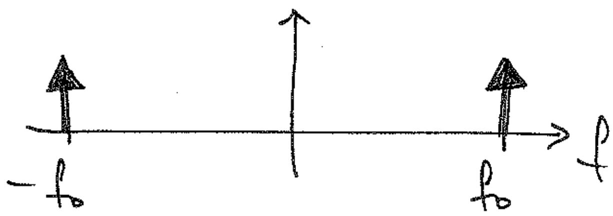
$X(f)$ — señal moduladora



- $x_0(t) = A_0 \cdot \cos(2\pi f_0 t)$, $f_0 \gg f_m$



$X_0(f)$ — señal portadora

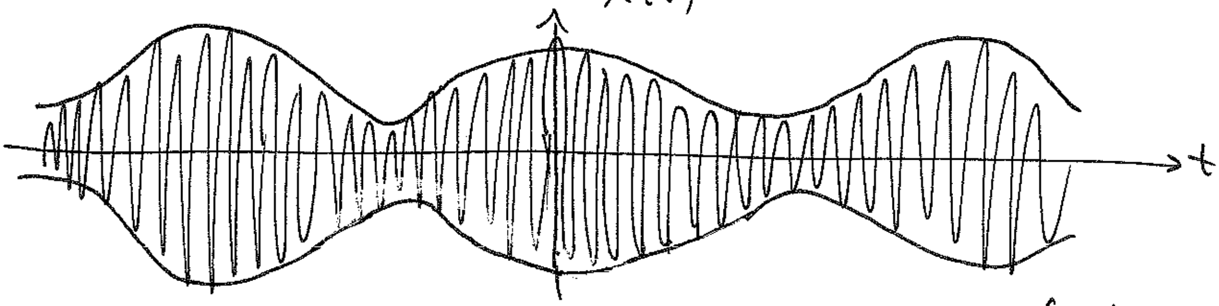


SEÑAL MODULADA:

$$\tilde{x}(t) = A_0 \left(\mu + A_m \cdot \cos(2\pi f_m t)\right) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

$$= A_0 \mu \cdot \cos(2\pi f_0 t) + A_0 \cdot A_m \cdot \cos(2\pi f_m t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

$\tilde{x}(t)$



$\tilde{X}(f)$

(1) $A_0 \mu \cdot \cos(2\pi f_0 t)$

(2) $A_0 A_m \cdot \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_0 t)$