Teoria del Senyal. Pràctica 2 de laboratori

Eric Guisado, Raúl Alonso

Divendres 30 de setembre de 2016

Índex

1 Estudi previ

Qüestió 1. *Si el senyal d'entrada x[n] té longitud L_x, indicar quina seria la longitud L_y del senyal resultat del filtratge y[n] en funció de L i L_x. Indicar quantes multiplicacions s'han de fer per poder calcular les L_y mostres del senyal de sortida mitjançant l'aplicació directa de l'equació de convolució suposant que $L_x > L$. Expressar aquest número de multiplicacions en funció de L i L_x. Calcular també el número de multiplicacions per mostra d'entrada (és a dir, el quocient entre el número total de multiplicacions necessàries i el número de mostres d'entrada L_x).*

El senyal de sortida y[n] es calcula com

$$y[n] = \{x * h\}[n] = \sum_{j=0}^{L-1} h[j]x[n-j]$$

Suposem que el senyal $x[n]$ comença a $n = k$ i acaba a $n = k + L_x - 1$. Els termes de la sortida $y[n]$ seran aquells per als quals hi ha algun $j \in \{0, 1, ..., L-1\}$ tal que $n - j \in \{k, k+1, ..., k + L_x - 1\}$, és a dir, $k \leqslant n - j \leqslant k + L_x - 1 \iff k + j \leqslant n \leqslant k + L_x - 1 + j$. Per tant, els termes de la sortida seran aquells amb $k \leqslant n \leq k + L_x + L - 2$. Així doncs, la sortida té longitud $L + L_x - 1$.

Observem que podem escriure, per a $k \leqslant n \leq k + L_x + L - 2$:

$$y[n] = \{x * h\}[n] = \sum_{j=\max\{0, n-k-L_x+1\}}^{\min\{L-1, n-k\}} h[j]x[n-j] =$$

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n-k} h[j]x[n-j] & \text{si } k \leqslant n \leqslant k + L - 1 \\ \sum_{j=0}^{L-1} h[j]x[n-j] & \text{si } k + L - 1 < n < k + L_x - 1 \\ \sum_{j=n-k-L_x+1}^{L-1} h[j]x[n-j] & \text{si } k + L_x - 1 \leqslant n \leqslant k + L + L_x - 2 \end{cases}$$

Així, es dedueix que el nombre de multiplicacions que cal fer en aplicar directament l'equació de convolució és:

$$2\sum_{i=1}^{L} i + L(L_x - L - 1) = L(L+1) + L(L_x - L - 1) = LL_x$$

El nombre de multiplicacions per mostra d'entrada és $\frac{LL_x}{L_x} = L$.

Qüestió 2. *Respon a les següents preguntes:*

a) Relacionar el número de blocs P $(i = 0, ..., P-1)$ amb L_x i M.

b) Quin és el valor màxim de M (donat el número de punts totals N de cada bloc $x_i[n]$) per tal que la convolució circular en (1) coincideixi amb la convolució lineal en (2)? Expressar aquest valor màxim de M en funció de N i L.

Cada trama ve donada per

$$x_i[n] = \begin{cases} x[n+iM] & i = 0, \ldots, M-1 \\ 0 & i = M, \ldots, N-1 \end{cases},$$

i cadascuna d'aquestes es correspon amb el segment de x que va des de $x[iM]$ fins a $x[i(M+1)-1]$, afegint-hi zeros al darrere fins que aquesta trama tingui mida N. Si volem que aquestes trames recorrin tot el senyal x, i que no n'hi hagi cap més que les necessàries, cal que el darrer i que agafem contingui el darrer element de x, és a dir, per a $i = P-1$ hi ha d'haver algun n, amb $0 \leq n \leq M-1$, tal que $L_x - 1 = (P-1)M + n$. Cal, doncs, $(P-1)M \leqslant L_x - 1 \leqslant PM - 1$. Per tant, necessitem

$$\frac{L_x}{M} \leqslant P \leqslant \frac{L_x + M - 1}{M}.$$

Així doncs, P ha de ser $P = \lceil \frac{L_x}{M} \rceil$.

Per tal que la convolució circular coincideixi amb la convolució lineal s'ha de verificar, per a $n \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$:

$$\sum_{j=0}^{L-1} h[j] x_i[n-j] = \sum_{j=0}^{L-1} h[j] \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_i[n-j-rN]$$

Per garantir-ho, imposem que, per a $r \neq 0$, $n \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$, $j \in \{0, 1, \cdots, L-1\}$, $n - j - rN \notin \{0, 1, \cdots, M-1\}$.

Per a $r > 0$, veiem que sempre es té $n - j - rN < 0$. En efecte, el màxim valor d'aquesta expressió es dóna amb $r = 1$, $j = 0$, $n = N-1$, i és -1.

Per a $r > 0$, veiem que sempre es té $n - j - rN \geqslant M$. En aquest cas, el mínim valor d'aquesta expressió es dóna amb $r = -1$, $j = L-1$ i $n = 0$. S'ha de satisfer, doncs, $N - L + 1 \geqslant M$. Per tant, el valor màxim de M és $N - L + 1$.

(Altrament, la convolució circular és la suma dels senyals que s'obtenen aplicant un retard de rN, amb $r \in \mathbb{Z}$. Per evitar encavallaments, la longitud de la convolució lineal ha de ser menor que N. Per tant, $L + M - 1 \leqslant N$.)

Qüestió 3. *Calcular el número de multiplicacions reals associat a aquest mètode per mostra d'entrada. Per això, considerar que es fa ús de l'algorisme FFT suposant que el número de punts de la DFT és una potència de 2, és a dir, $N = 2^\nu$ (en aquest cas, el número de multiplicacions complexes tant de la DFT com de la IDFT és de $N \log_2 N$ multiplicacions complexes). Considerar també que el valor de M és el valor màxim calculat a la qüestió 2.2. Per a calcular el número de multiplicacions per mostra d'entrada s'ha de calcular quantes multiplicacions són necessàries per a processar cada bloc i dividir aquest número per M, és a dir, pel número de mostres d'entrada que es processen a cada bloc. Expressar el resultat en funció de L i N.*

Per trobar la DFT d'un bloc i, després d'obtenir el producte $X_i[k]H[k]$, trobar-ne la transformada inversa calen $2N \log_2 N$ multiplicacions complexes. El producte $X_i[k]H[k]$ requereix N multiplicacions complexes. El nombre d'operacions per mostra d'entrada és, doncs:

$$\frac{2N \log_2 N + N}{M} = \frac{2N \log_2 N + N}{N - L + 1} = \frac{2 \log_2 N + 1}{1 - \frac{L-1}{N}}$$

Qüestió 4. *Quina és l'expressió matemàtica corresponent a la DFT de N punts d'un senyal sinusoïdal de pulsació discreta* $\Omega_0 = 2\pi\frac{k_0}{N}$ *(essent* k_0 *un número enter)?*

En primer lloc, observem que podem suposar $k_0 \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$, ja que, si $k_0 = qN + r$, amb $q \in \mathbb{Z}$ i $r \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$, llavors:

$$\sin(2\pi\frac{k_0}{N}n) = \sin(2\pi qn + 2\pi\frac{r}{N}n) = \sin(2\pi\frac{r}{N}n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

La DFT de N punts del senyal $x[n] = \sin(2\pi\frac{k_0}{N}n)$, $n = 0, 1, \cdots, N-1$ ve donada per:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \sin(2\pi\frac{k_0}{N}n)e^{-j2\pi\frac{k}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1}\Big(\frac{e^{j2\pi\frac{k_0}{N}n} - e^{-j2\pi\frac{k_0}{N}n}}{2j}\Big)e^{-j2\pi\frac{k}{N}n} =$$

$$= \frac{1}{2j}\Big(\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\frac{(k-k_0)}{N}n} + \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\frac{(k+k_0)}{N}n}\Big) =$$

$$\begin{cases} -jN & \text{si } k = k_0 = N - k_0 \text{ (només pot passar si } k_0 = N/2) \\ -j\frac{N}{2} & \text{si } k = k_0 \neq N - k_0 \\ -j\frac{N}{2} & \text{si } k = N - k_0 \neq k_0 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

En efecte, per a $k \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$, $k \neq k_0$, $e^{-j2\pi\frac{(k-k_0)}{N}} \neq 1$, i per tant,

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\frac{(k-k_0)}{N}n} = \frac{1 - e^{-j2\pi\frac{(k-k_0)}{N}N}}{1 - e^{-j2\pi\frac{(k-k_0)}{N}}} = 0,$$

i, anàlogament, si $k \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$, $k \neq N - k_0$,

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\frac{(k+k_0)}{N}n} = \frac{1 - e^{-j2\pi\frac{(k+k_0)}{N}N}}{1 - e^{-j2\pi\frac{(k+k_0)}{N}}} = 0$$

Qüestió 5.

Qüestió 6. *Expliqui qualitativament l'efecte d'aplicar "zero-padding" i una finestra no rectangular sobre la DFT.*

El resultat d'aplicar zero-padding és que, com que el nombre de mostres de la DFT és més gran, tenim més informació sobre la transformada de Fourier contínua de la seqüència. En el cas del senyal sinusoïdal anterior, hi hauria més punts $X[k]$ diferents de zero.

Aplicar diferents tipus de finestres, si es fa adientment, ens pot permetre resaltar certs aspectes del senyal o reduir el soroll degut a l'enfinestrament.