CURS 3
14.10.2020

Cap 3. Mulțimi

Din punct de vedere „naiv", o mulțime este o colecție de obiecte abstracte "bine determinate și unice.

Georg Cantor ~ 1870
s-au descoperit contradicții
→ au apărut teorii axiomatice ale mulțimilor ~1920

Noțiunile de
- mulțime
- element
- apartenență $\in$

} sunt primitive (nu le definim)

O mulțime poate fi dată:

sintetic: - enumerând elementele

$\boxed{ex:}$ $A = \{a, b, c\}$
$a \in A$

analitic: - printr-o proprietate care este satisfăcută de elementele mulțimii

$\boxed{ex:}$ $A = \{x \mid P(x)\}$
predicat

ex: $\{x \mid x \neq x\} = \emptyset$
mulțimea vidă (este unică!)

$\neg(x = x)$

Egalitatea mulțimilor

Două mulțimi sunt egale dacă au aceleași elemente.

$$A = B \Longleftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Incluziunea

Spunem că A este submulțime a lui B dacă elementele lui A sunt elemente ale lui B.

$A \subseteq B \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$

Obs: $A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B$ și $B \subseteq A$

Not $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ mulțimea părților lui A (submulțimilor)
(mulțimea putere)

Obs $X \in \mathcal{P}(A) \Longleftrightarrow X \subseteq A$

ex: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

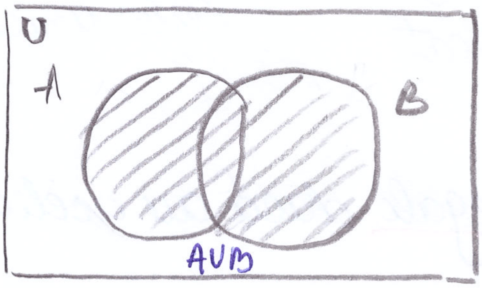
temă: $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))) = ?$ (16 elem)

Operații cu mulțimi

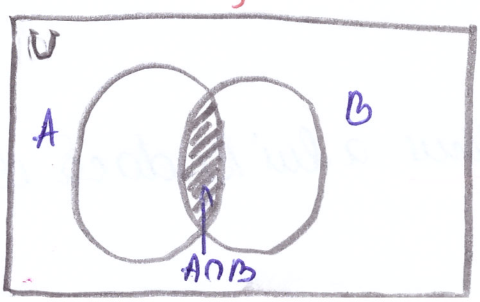
Vom considera că mulțimile noastre sunt submulțimi ale unei mulțimi „mari” U (univers)

1) Reuniunea: $A \cup B \overset{def}{=} \{x \in U \mid x \in A \underset{\vee}{\text{sau}} x \in B\}$

Vom folosi: Diagrame Euler-Venn,



2) Intersecția: $A \cap B \overset{def}{=} \{x \mid x \in A \underset{\wedge}{\text{și}} x \in B\}$



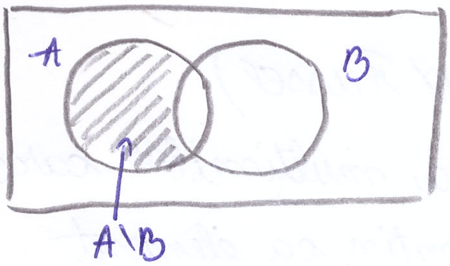
3) Diferența: $A\setminus B \overset{def}{=} \{x \mid x\in A$ și $x\notin B\}$

$\neg(x\in B)$

Caz particular:

$$\complement A \overset{def}{=} U\setminus A = \{x\in U \mid x\notin A\}$$

Obs: $A\setminus B = A\cap \complement B$



Δ = Delta

δ = delta

p	q	p xor q $= p\oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

4) Diferența simetrică: $A\Delta B \overset{def}{=} (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

$$= (A\cap\complement B)\cup(B\cap\complement A)$$

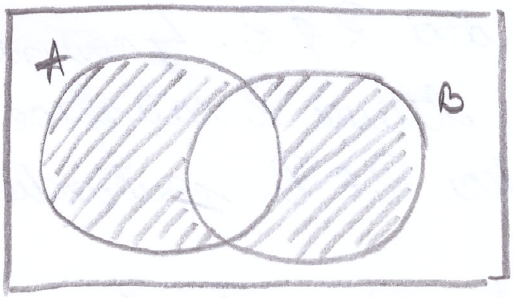
$$= (A\cup B)\setminus(A\cap B)$$

$= \{x \mid$ sau $x\in A$ sau $x\in B\}$

$= \{x \mid x\in A$ XOR $x\in B\}$

[sau exclusiv]

(corespunde adunării modulo 2)



Pereche de elemente

Vrem să definim perechea ordonată (a,b) care să satisfacă următoarea proprietate:

$$(a,b)=(c,d) \iff a=c \text{ și } b=d$$

Obs $\{a,b\}$ nu satisface cerința pentru că: $\{a,b\}=\{b,a\}$, iar dacă $a=b$ atunci $\{a,b\}=\{a\}$

Def (~1920 Kuratowski)

$$(a,b) \overset{def}{=} \{\{a\},\{a,b\}\}$$

Obs Dacă $a=b$ at $(a,a)=\{\{a\}\}$

Varianta scurtă a definiției: $(a,b) \overset{def}{=} \{a,\{a,b\}\}$

René Descartes (Renatus Cartesius)

5) Produsul cartezian: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A$ şi $b \in B\}$

Generalizare: triplet ordonat: $(a,b,c) = ((a,b),c)$

În general, prin inducție

$$(a_1,\dots,a_n) \stackrel{def}{=} ((a_1,\dots,a_{n-1}),a_n)$$

$$A_1 \times \dots \times A_n \stackrel{def}{=} \{\underbrace{(a_1,\dots,a_n)}_{n\text{-uplu}} \mid a_i \in A_i, \forall i \in I\}$$

$I = \{1,\dots,n\}$

Paradoxul lui Russell (Bertrand Russell)

Fie $R = \{X \mid X \notin X\}$ mulțimea mulțimilor care nu se conțin ca element

Întrebare: are loc $R \in R$?

Cazul I Presupunem că $R \in R$. Deci R nu satisface condiției din def lui R, deci $R \notin R$. ↯ contradicție

Cazul II Presupunem că $R \notin R$. Atunci R satisface condiția din def lui R. deci $R \in R$. contradicție

Astfel de paradoxuri au dus la necesitatea dezvoltării teoriei axiomatice a mulțimilor.

- ZF: Zermelo - Fraenkel
- NBG: von Neumann - Bernays - Gödel

de ex: axioma regularității elimină anomalia $X \in X$. În particular $X \cup \{X\}$ are un element mai mult ca X

Ex $X = \{1,2\}$

$X \cup \{X\} = \{1, 2, \{1,2\}\}$

Cap 4. Relații (corespondențe)

ρ

Def: Fie A, B mulțimi. O relație (corespondență) între elementele mulțimilor A și B este un triplet:

$\rho = (A, B, R)$ unde $R \subseteq A \times B$

A se numește domeniul relației: $dom\, \rho$

B se numește codomeniul relației: $codom\, \rho$

R se numește graficul relației: not: $\boxed{(a,b) \in R \Leftrightarrow a \rho b}$

ex: $d_1 \perp d_2$

$n \mid m$ (divide)

$a > b$

Egalitatea relațiilor

Fie $\rho = (A, B, R)$, $\sigma = (C, D, S)$ — sigma σ

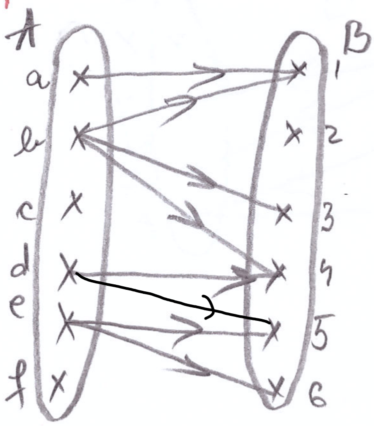
Avem $\rho = \sigma \Leftrightarrow \begin{cases} A = C \text{ (au același dom)} \\ B = D \text{ (au același codom)} \\ R = S \text{ (au același grafic)} \end{cases}$

$a \rho b \Leftrightarrow a \sigma b \quad \forall a \in A,\ b \in B$

$\rho \subseteq \sigma \Leftrightarrow \begin{cases} A = C,\ B = D \\ a \rho b \Rightarrow a \sigma b,\ \forall a \in A,\ b \in B \end{cases}$ (adică $R \subseteq S$)

Reprezentarea relațiilor ca grafuri orientate

ex:



$R = \{(a,1), (b,1), (b,3), (b,4), (d,4), (d,5), (e,5), (e,6)\}$

Exemple
- relația **vidă**: $(A, B, \emptyset)$
- relația **universală**: $(A, B, A\times B)$
- relația de **egalitate** (**identică**) a unei mulțimi:

$$1_A = (A, A, \Delta_A)$$

unde $\Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$

(**diagonala** lui $A\times A$)

$$a\, 1_A\, b \Longleftrightarrow a = b$$

Operații cu relații

$R, R^* \subseteq A\times B$

1) **Reuniunea**: Fie $\rho = (A, B, R)$, $\rho' = (A, B, R')$

$\rho \cup \rho' \overset{def}{=} (A, B, R \cup R')$, adică $\forall (a,b) \in A\times B$ avem

$$a\, \rho\cup\rho'\, b \overset{def}{\Longleftrightarrow} a\rho b \text{ sau } a\rho' b$$

2) **Intersecția**: $\rho \cap \rho' = (A, B, R\cap R')$, adică

$$a\, \rho\cap\rho'\, b \Longleftrightarrow a\rho b \text{ și } a\rho' b$$

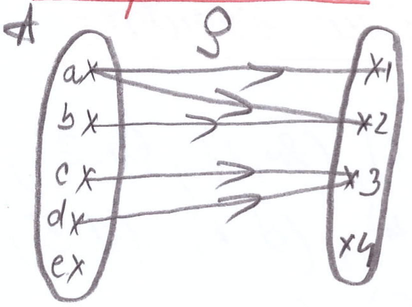
3) **Inversa unei relații**: Fie $\rho = (A, B, R)$

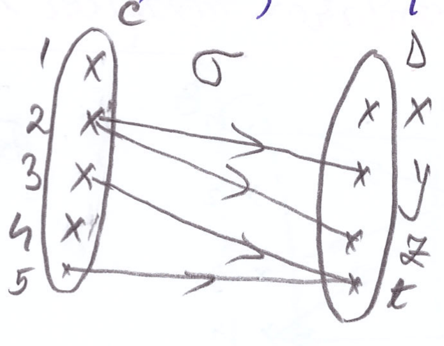
Atunci $\rho^{-1} = (B, A, R^{-1})$ unde $R^{-1} \overset{def}{=} \{(b,a) \mid (a,b)\in R\}$

adică $\forall a \in A, b\in B$ avem $a\rho b \overset{def}{\Longleftrightarrow} b\rho^{-1} a$

(obs. în general, ρ^{-1} nu e o inversă față de o operație)

4.) **Compunerea**: Fie $\rho = (A, B, R)$, $\sigma = (C, D, S)$





Relația compusă

$$\sigma \circ \rho = (A, D, S\circ R)$$

al doilea · primul · domp · codom σ

$\sigma_1\ \rho_1$

În ex: $S \circ R = \{(a,y), (a,z), (b,y), (b,z), (c,t), (d,t)\}$

În general: $S \circ R \overset{def}{=} \{(a,d) \in A \times D \mid \exists x \in B \cap C$ a.î. $(a,x) \in R$ și $(x,d) \in S\}$

adică $\forall (a,d) \in A \times D$, avem

$$\boxed{a\, \sigma \circ \rho\, d \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists x \in B \cap C \text{ a.î. } a \rho x \text{ și } x \sigma d}$$

Propoziție (Proprietățile compunerii)

1) relația identică este element neutru față de „$\circ$"

Fie $\rho = (A,B,R)$. Atunci $\rho \circ 1_A = 1_B \circ \rho = \rho$

2) compunerea relațiilor este asociativă:

Fie $\rho = (A,B,R)$, $\sigma = (C,D,S)$, $\tau = (E,F,T)$

Atunci: $\tau \circ (\sigma \circ \rho) = (\tau \circ \sigma) \circ \rho$

tau τ

Dem

1) $1_A = (A, A, \Delta_A)$, $\rho \circ 1_A = (A, B, R \circ \Delta_A)$

$1_B = (B, B, \Delta_B)$, $1_B \circ \rho = (A, B, \Delta_B \circ R)$

Deci toate au același domeniu și același codomeniu

Fie $(a,b) \in A \times B$. Avem: $a\, \rho \circ 1_A\, b \Leftrightarrow \exists x \in A \cap A$ a.î.

$a\, 1_A\, x$ și $x \rho b \Leftrightarrow a \rho b$

$a = x$

temă: $a\, 1_B \circ \rho\, b \; ? \Leftrightarrow a \rho b$

2) $\sigma \circ \rho = (A, D, S \circ R)$

$\tau \circ (\sigma \circ \rho) = (A, F, T \circ (S \circ R))$

$\tau \circ \sigma = (C, F, T \circ S)$

$(\tau \circ \sigma) \circ \rho = (A, F, (T \circ S) \circ R)$

Au același dom și codom.

Fie $(a,f)\in A\times F$. Avem:

$a\,\tau\circ(\sigma\circ\rho)\, f \iff (\exists y)\, y\in D\cap E$ și $a\,\sigma\circ\rho\, y$ și $y\,\tau f$

$\iff (\exists y)\, y\in D\cap E$ și $((\exists x)\, x\in B\cap C$ și $a\rho x$ și $x\sigma y)$ și $y\tau f$

taut. din manual (2.3.9)

$\iff (\exists y)(\exists x)\, y\in D\cap E$ și $x\in B\cap C$ și $a\rho x$ și $x\sigma y$ și $y\tau f$

2.3.9. (8)

$\exists x(A\wedge C(x)) \iff A\wedge\exists x C(x)$

$\iff (\exists x)\, x\in B\cap C$ și $a\rho x$ și $(\exists y)\, y\in D\cap E$ și $x\sigma y$ și $y\tau f$

$\iff (\exists x)\, x\in B\cap C$ și $a\rho x$ și $x\,\tau\circ\sigma\, f$

$\iff a(\tau\circ\sigma)\circ\rho\, f$

2.3.9.(1) $\exists x\exists y A \iff \exists y\exists x A$

Am mai folosit tautologiile: $A\wedge B\iff B\wedge A$

$A\wedge(B\wedge C)\iff(A\wedge B)\wedge C$

TEMA DE CASĂ

ex. 20 – 31