CURS 3

Ecuații diferențiale de ordinul 2 rezolvabile

$y = y(x) \qquad y'' = f(x, y, y')$

1) Ecuații de forma $y'' = f(x)$

$y'' = f(x) \Rightarrow (y')' = f(x) \Rightarrow y' = \underbrace{\int f(x)\,dx}_{F(x)} + c_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = F(x) + c_1 \Rightarrow y(x) = \int (F(x) + c_1)\,dx + c_2$

$$\boxed{y(x) = \int F(x)\,dx + c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$ sol. generală

2) Ecuații de forma $y'' = f(x, y')$

subst $y' = z \Rightarrow y'' = z'$

$\Rightarrow \boxed{z' = f(x, z)}$ ec. dif. de ord. 1.

dacă ecuația de ord. 1 $z' = f(x, z)$ este rezolvabilă și soluția se obține în formă explicită, adică

$\boxed{z(x) = \varphi(x, c_1)}$, $c_1 \in \mathbb{R}$

$y' = z \Rightarrow y' = \varphi(x, c_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = \int \varphi(x, c_1)\,dx + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$

3) Ecuații liniare de ordinul 2

$$y'' + a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y = f(x) \qquad a, b, f \text{ fcț. cont.}$$

$y'' + a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y = 0$ ecuație liniară omogenă

$y'' + a(x)\, y' + b(x)\cdot y = f$ ecuație liniară neomogenă

I Cazul omogen

$$y'' + a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y = 0$$

$$L : C^2[\alpha, \beta] \to C[\alpha, \beta]$$

$$L(y)(x) = y''(x) + a(x)\cdot y'(x) + b(x)\cdot y(x)$$

L este un operator liniar $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow L(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 L(y_1) + \lambda_2 \cdot L(y_2)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\forall y_1, y_2 \in C^2[\alpha, \beta]$

S_0 = mulțimea sol. ecuației liniare omogene

$$S_0 = \{ y \in C^2[\alpha, \beta] \mid Ly = 0 \} = \ker L$$

Teorema 1. ($T\exists!$ a soluției probl. Cauchy atașate ec. liniare)

Problema Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + a(x)\cdot y' + b(x)\, y = f(x) \\ y(x_0) = r_1 \\ y'(x_0) = r_2 \quad , x_0 \in [\alpha, \beta] \end{cases}$$

are o soluție unică $y(\cdot\,; x_0, r_1, r_2, f)$ pt $\forall\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.

Teorema 2. Mulțimea soluțiilor ecuației liniare omogene S_0 este un subspațiu liniar al spațiului liniar $C^2[\alpha, \beta]$ cu $\dim S_0 = 2$.

Dem. S_0 subspațiu liniar al sp. $C^2[\alpha,\beta]$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $y_1, y_2 \in S_0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ atunci $\underline{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2} \in S_0$.

$\dim S_0 = 2 \Leftrightarrow \varphi : \mathbb{R}^2 \to S_0$

$r \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow r = (r_1, r_2) \longmapsto y(\cdot\,; \alpha, r_1, r_2, 0)$ sol. probl. Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y = 0 \\ y(\alpha) = r_1 \\ y'(\alpha) = r_2 \end{cases}$$

T1 $\Rightarrow$ φ bijecție

φ morfism de spații liniare.

$$\varphi(r^1 + r^2) \overset{?}{=} \varphi(r^1) + \varphi(r^2), \quad \forall r^1, r^2 \in \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(\lambda \cdot r) \overset{?}{=} \lambda \cdot \varphi(r), \quad \forall r \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\varphi(r^1+r^2)$: sol. probl. Cauchy $\begin{cases} Ly=0 \\ y(\alpha)=r_1^1+r_1^2 \\ y'(\alpha)=r_2^1+r_2^2 \end{cases}$ $(*)$

$r^1=(r_1^1,r_2^1)$

$r^2=(r_1^2,r_2^2)$

$\varphi(r^1)$: sol. probl. Cauchy $\begin{cases} Ly=0 \\ y(\alpha)=r_1^1 \\ y'(\alpha)=r_2^1 \end{cases} \longmapsto y(\cdot;\alpha,r^1,0)$

$\varphi(r^2)$: sol. probl. Cauchy $\begin{cases} Ly=0 \\ y(\alpha)=r_1^2 \\ y'(\alpha)=r_2^2 \end{cases} \longmapsto y(\cdot;\alpha,r^2,0)$

$u(x)=y(x;\alpha,r^1,0)+y(x;\alpha,r^2,0)$ este o sol. a ec. $Ly=0$.

$u(\alpha)=y(\alpha;\alpha,r^1,0)+y(\alpha;\alpha,r^2,0)=r_1^1+r_1^2$

$u'(\alpha)=y'(\alpha;\alpha,r^1,0)+y'(\alpha;\alpha,r^2,0)=r_2^1+r_2^2$

$\Rightarrow u(x)$ este sol. a probl. Cauchy $(*)$

$\Rightarrow \quad u(x)=\varphi(r^1+r^2)$

$\varphi(r^1)+\varphi(r^2)=\varphi(r^1+r^2)$ analog $\varphi(\lambda r)=\lambda\varphi(r)$

$\Rightarrow \dim S_0 = 2 \Leftrightarrow \exists \{y_1, y_2\}$ bază în $S_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall y \in S_0 \quad \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a.î. $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

soluția generală a ec. liniare omogene

$$\boxed{y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 \,, \, c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

unde $\{y_1, y_2\}$ bază în S_0 (sistem fundam. de soluții)

$\{y_1, y_2\}$ bază în $S_0 \Leftrightarrow \{y_1, y_2\} \subset S_0$ și $\{y_1, y_2\}$ liniar indep.

$y_1, y_2 \in S_0$ sunt liniar dep $\Leftrightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$ a.î. $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$

$y_1, y_2 \in S_0$ sunt liniar indep $\Leftrightarrow \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$W(x; y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$ wronskianul (def. lui Wronski)

<u>Teorema 3</u>

a) dacă $y_1, y_2 \in C^1[\alpha, \beta]$ sunt liniar dependente $\Rightarrow$

$\Rightarrow W(x; y_1, y_2) \equiv 0$ pe $[\alpha, \beta]$

$\not\Leftarrow$

b) dacă $y_1, y_2 \in S_0$ sunt liniar independente $\Rightarrow$

$\Rightarrow W(x; y_1, y_2) \neq 0, \ \forall x \in [\alpha, \beta]$.

În S_0 avem următoarele posibilități:

- $y_1, y_2 \in S_0$ sunt l.d $\Rightarrow W(x; y_1, y_2) = 0$
- $y_1, y_2 \in S_0$ sunt l.i $\Rightarrow W(x; y_1, y_2) \neq 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$

Teoremă. (Criteriul wronskianului)

U.a.s.e:

(i) $\{y_1, y_2\} \subset S_0$ sistem fundam. de sol. (bază în S_0)

(ii) $W(x; y_1, y_2) \neq 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$

(iii) $\exists x_0 \in [\alpha, \beta]$ a.î. $W(x_0; y_1, y_2) \neq 0$.

Obs. În cazul general al ecuațiilor liniare cu coef. neconstanți nu există o metodă generală de construcție a sist. fundam. de sol.

Condiția minimală de rezolvabilitate a unei ec. liniare omogene cu coef. neconstanți este det. unei sol. particulare fie $y_1 \in S_0 \Rightarrow$ subst. $y = y_1 \cdot z$

$$y' = y_1' \cdot z + y_1 \cdot z'$$

$$y'' = y_1'' \cdot z + 2 y_1' z' + y_1 \cdot z''$$

se înlocuiesc în $y'' + a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow z'' + P(x) \cdot z' = 0$

$z' = u \Rightarrow u' + P(x) \cdot u = 0$ ec. liniară omog. de ord. 1

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow u(x) = \varphi(x) \cdot c_1$

$$z' = u(x) \Rightarrow z' = \varphi(x) \cdot c_1$$

$$z = c_1 \int \varphi(x)\,dx + c_2$$

$\Rightarrow y = y_1 \cdot z \Rightarrow y = c_1 \cdot y_1 \cdot \int \varphi(x)\,dx + c_2 \cdot y_1$

II Cazul neomogen. Metoda variației constantelor.

$$y'' + a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y = f(x)$$

$\Leftrightarrow \quad Ly = f$

S – mulț. sol. ec. liniare neomog.

$$\boxed{S = \underline{\ker L} + \{y_p\} = \underline{S_0 + \{y_p\}}}$$

unde y_p – o sol. partic a ec. lin. neomog.

y_0 – sol. gen. a ec. liniare omogene

y_p – o sol. partic a ec. lin. neomog.

$\Rightarrow$ sol. gen. a ec. lin. neomogene:

$$\boxed{y = y_0 + y_p}$$

$\{y_1, y_2\}$ un sist. fundam. de sol. $\boxed{y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2}$

se caută $y_p(x) = c_1(x)\cdot y_1(x) + c_2(x)\cdot y_2(x)$

$$y_p' = \underbrace{c_1' y_1} + c_1\cdot y_1' + \underbrace{c_2'\cdot y_2} + c_2\cdot y_2'$$

impunem condiția $\boxed{c_1'\cdot y_1 + c_2'\cdot y_2 = 0}$

$$\Rightarrow y_p' = c_1\cdot y_1' + c_2\cdot y_2'$$

$$y_p'' = c_1'\cdot y_1' + c_1\cdot y_1'' + c_2'\cdot y_2' + c_2\cdot y_2''$$

$$\Rightarrow \underline{c_1'\cdot y_1'} + c_1\cdot y_1'' + \underline{c_2'\cdot y_2'} + c_2\cdot y_2'' + a(x)\cdot\left(c_1 y_1' + c_2 y_2'\right) + b(x)\cdot\left(c_1\cdot y_1 + c_2 y_2\right) = f.$$

$$\Rightarrow c_1'\cdot y_1' + c_2'\cdot y_2' + c_1\left(\underbrace{y_1'' + a\cdot y_1' + b\cdot y_1}_{=0}\right) + c_2\cdot\left(\underbrace{y_2'' + a\cdot y_2' + b y_2}_{=0}\right) = f$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1' y_1' + c_2' y_2' = f}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1' \cdot y_1 + c_2' \cdot y_2 = 0 \\ c_1' \cdot y_1' + c_2' \cdot y_2' = f. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = \dots \\ c_2'(x) = \dots \end{cases} \overset{\int}{\Rightarrow} \begin{cases} c_1(x) = \dots \\ c_2(x) = \dots \end{cases}$$

$\Rightarrow y_p(x)$

4) Ecuații liniare cu coef. constanți

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = f. \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{y'' + ay' + by = 0}$$

căutăm $y(x) = e^{rx}$

$y'(x) = r \cdot e^{rx}$

$y''(x) = r^2 e^{rx}$

$$\Rightarrow r^2 e^{rx} + a \cdot r \cdot e^{rx} + b \cdot e^{rx} = 0 \,/ : e^{rx}$$

$$\boxed{r^2 + ar + b = 0}$$ ecuația caract.

1. $\Delta > 0 \Rightarrow \exists r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2$

$\Rightarrow y_1(x) = e^{r_1 x}, y_2(x) = e^{r_2 x}$ $\quad y_1, y_2$ l.i

$$\Rightarrow \boxed{y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}}$$

2. $\Delta = 0 \Rightarrow \exists r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$ răd. dublă

$\Rightarrow y_1(x) = e^{rx}$

r răd. dublă se arată $y_2(x) = x \cdot e^{rx}$ este sol.

y_1, y_2 l.i

$$\Rightarrow \boxed{y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}}$$

3. $\Delta < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$

$y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x, \ y_2(x) = e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$

y_1, y_2 l.i

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin\beta x$$

Cazul neomogen

$$y'' + a y' + b y = f \quad , a, b \in \mathbb{R} \quad , f \text{ fct. cont.}$$

sol. gen: $y = y_0 + y_p$

y_0 sol. gen. a ec. lin. omog.

y_p o sol. partic a ec. lin. neomog.

y_p – se poate det prin met. variației const.

sau în cazuri particulare pt $f(x)$ prin met. coef. nedeterminați.

Cazuri speciale pt. f

1. Dacă $f(x) = P_m(x)$

   a) $b \neq 0 \Rightarrow y_p = Q_m(x)$

   b) $b = 0, a \neq 0 \Rightarrow y_p = x \cdot Q_m(x)$

2. Dacă $f(x) = e^{rx} \cdot P_m(x)$

   a) dacă r nu este sol. a ec. caract $\Rightarrow$

   $\Rightarrow y_p = e^{rx} \cdot Q_m(x)$.

   b) dacă r este sol. a ec. caract cu ordinul de multipl. μ

   $\Rightarrow y_p = x^{\mu} \cdot e^{rx} \cdot Q_m(x)$

3. Dacă $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x) \cdot \cos\beta x$ sau $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_m(x) \beta \cdot \sin x$

a) $\alpha + i\beta$ nu este răd. a ec. caract $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y_p = e^{\alpha x}\left(Q_m^1(x) \cdot \cos\beta x + Q_m^2(x) \cdot \sin\beta x\right)$$

b) $\alpha + i\beta$ este răd. a ec. caract. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y_p = x \cdot e^{\alpha x}\left(Q_m^1(x)\cos\beta x + Q_m^2(x)\sin\beta x\right)$$