Seminar – Vectori și valori proprii

1. a) Determinați vectorii și valorile proprii ale matricei
$$A=\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R}).$$

b) Să se arate că $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-2x_3,\,3x_2,\,3x_3)$ este un endomorfism al $\mathbb{R}$-sp. vectorial $\mathbb{R}^3$, apoi să se determine vectorii și valorile proprii ale lui f.

Soluție:

a) $$\underbrace{p_A(\lambda)}_{\text{polinomul caract. al lui } A}=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&-2\\0&3-\lambda&0\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2(2-\lambda).$$

$p_A(\lambda)=0\implies \lambda_1=\lambda_2=3$ și $\lambda_3=2$ (sunt în $\mathbb{R}$).

Prin urmare 2 și 3 sunt valorile proprii ale matricii A.

Pentru a determina vectorii proprii ai lui A aflăm $V(2)$ și $V(3)$.

și mulțimea vectorilor proprii este $V(2)\cup V(3)\setminus\{(0,0,0)\}$.

Obs: Cum $A\in M_3(\mathbb{R})$ spațiul vectorial cu care lucrăm este ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$.

$$V(2)=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,/\, (A-2I_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

$$\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}-2x_3=0\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}\iff\begin{cases}x_1\in\mathbb{R}\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}$$

$V(2)=\{(x_1,0,0)\,/\,x_1\in\mathbb{R}\}$

$$V(3)=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,/\, (A-3I_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff -x_1-2x_3=0\iff\begin{cases}x_1=-2x_3\\x_2\in\mathbb{R}\\x_3\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$V(3)=\{(-2x_3,x_2,x_3)\,/\,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}.$

Vectorii proprii ai lui A sunt elem. reuniunii

$$\{(x_1,0,0)\,/\,x_1\in\mathbb{R}^*\}\cup\{(-2x_3,x_2,x_3)\,/\,x_2,x_3\in\mathbb{R},\ x_2^2+x_3^2\neq 0\}$$

Obs: i) $V(2)=\{(x_1,0,0)\,/\,x_1\in\mathbb{R}\}=\{x_1\cdot(1,0,0)\,/\,x_1\in\mathbb{R}\}=\langle\underbrace{(1,0,0)}_{=v_1\text{ nenul}}\rangle$

$\implies (v_1)$ bază în $V(2)$ ($\implies\dim V(2)=1$).

ii) $V(3)=\{(-2x_3,x_2,x_3)\,/\,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}=\{(0,x_2,0)+(-2x_3,0,x_3)\,/\,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$

$= \{ x_2 \underline{(0,1,0)} + x_3 \underline{\underline{(-2,0,1)}} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \} = \langle \underbrace{(0,1,0)}_{=v_2}, \underbrace{(-2,0,1)}_{=v_3} \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle$

v_2, v_3 l. indep. $\Longrightarrow (v_2, v_3)$ bază în ${}_{\mathbb{R}}V(3)$ ($\Rightarrow \dim V(3) = 2$).

b) f transf. liniară (temă)

Fie $e = (e_1, e_2, e_3)$ baza canonică a lui ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ $\qquad [f]_e = ?$

$f(e_1) = f(1,0,0) = (2,0,0)$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (0,3,0)$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (-2,0,3)$

$$[f]_e = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array}$

Se continuă ca la a). $\leftarrow$ temă.

2. Să se studieze care dintre următoarele endomorfisme sunt diagonalizabile: a) $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, $f(x,y,z) = (-z, -x, -y)$;

b) $f \in End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3)$, $f(x,y,z) = (-z, -x, -y)$;

c) $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, $f(x,y,z) = (-2y - 3z, x + 3y + 3z, z)$;

d) $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_1, -2x_2, 3x_3, x_3 + 3x_4)$?

Soluție: a) $e = (e_1, e_2, e_3)$ baza canonică a lui ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$

$f(e_1) = f(1,0,0) = (0,-1,0)$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (0,0,-1)$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,0,0)$

$$[f]_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{l_1+l_2+l_3}{=\!=\!=} (-\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda-1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$$

$p_f(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1 \in \mathbb{R}$

și

$\lambda_{2,3} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$!

Deci f nu este diagonalizabil.

b) $[f]_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $p_f(\lambda) = -(\lambda+1)(\underbrace{\lambda^2 - \lambda + 1}_{\in \mathbb{R}[X]})$

$p_f(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = -1 \in \mathbb{C}$ și $\lambda_2 \neq \lambda_3$ sunt în $\mathbb{C}$

și $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ sunt răd. simple ale lui p_f.

Deci f este diagonalizabil.

c) $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, $f(x,y,z) = (-2y-3z,\ x+3y+3z,\ z)$.

Fie $e = (e_1, e_2, e_3)$ baza canonică a lui ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$

$f(e_1) = f(1,0,0) = (0,1,0)$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (-2,3,0)$ $\qquad [f]_e = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (-3,3,1)$

$$p_f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -3 \\ 1 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

$p_f(\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \leftarrow$ răd. dublă (m. alg $= 2$) ?

și

$\lambda_3 = 2 \leftarrow$ răd. simplă (m. alg. $= 1 =$ m. geom.) ✓

Deci toate răd. lui p_f sunt în $\mathbb{R}$ (ele sunt 1 și 2).

$\dim V(1) = 3 - \text{rang}(f - 1 \cdot 1_{\mathbb{R}^3}) =$

$= 3 - \text{rang}([f]_e - 1 \cdot I_3) = 3 - \text{rang}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$= 3 - 1 = 2 =$ m. alg. a lui 1

Deci f este diagonalizabil.

d) $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$, $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-2x_1, -2x_2, 3x_3, x_3+3x_4)$.

Fie $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ baza canonică a lui ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$

$f(e_1) = f(1,0,0,0) = (-2,0,0,0)$

$f(e_2) = f(0,1,0,0) = (0,-2,0,0)$ $\qquad [f]_e = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$f(e_3) = f(0,0,1,0) = (0,0,3,1)$

$f(e_4) = f(0,0,0,1) = (0,0,0,3)$

$$p_f(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2(3-\lambda)^2$$

$p_f(\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = -2 \in \mathbb{R}$ ✓

și

$\lambda_3 = \lambda_4 = 3 \in \mathbb{R}$ ✓

$\underbrace{\dim V(-2)}_{\text{m.geom. } -2} = 4 - \operatorname{rang}([f]_e + 2I_4) = 4 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} =$

$= 4 - 2 = 2 = $ m.alg. a lui -2

$\dim V(3) = 4 - \operatorname{rang}([f]_e - 3I_4) = 4 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$= 4 - 3 = 1 \neq 2 = $ m.alg. a lui 3

Deci f nu e diagonalizabil.

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. ← matricea de la 2c)

a) Să se arate că A este diagonalizabilă. ✓ — Da!

b) Să se determine o matrice $S \in GL_3(\mathbb{R})$ pentru care $S^{-1} \cdot A \cdot S$ este diagonală.

c) Calculați A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție: a) vezi 2c) Fie f endom. de la 2c).

b) 1 și 2 sunt valorile proprii (1 are m.alg. 2, 2 are m.alg. 1).

$V(1) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (A - I_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(-2x_2 - 3x_3, x_2, x_3) / x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(-2x_2, x_2, 0) + (-3x_3, 0, x_3) / x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_2 \underline{(-2, 1, 0)} + x_3 \underline{(-3, 0, 1)} / x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$V(1) = \langle \underbrace{(-2, 1, 0)}_{= v_1}, \underbrace{(-3, 0, 1)}_{= v_2} \rangle$, v_1, v_2 vectori proprii l. indep. coresp. val. proprii 1

$V(2) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(-x_2, x_2, 0) / x_2 \in \mathbb{R}\} =$

$= \{x_2(-1, 1, 0) / x_2 \in \mathbb{R}\} = \langle \underbrace{(-1, 1, 0)}_{= v_3} \rangle$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

v_3 vector propriu coresp. val. proprii 2

$v = (v_1, v_2, v_3)$ bază a lui ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ (🗸)
f. din vectori proprii

$f(v_1) = 1 \cdot v_1$
$f(v_2) = 1 \cdot v_2$
$f(v_3) = 2 \cdot v_3$

$$\Longrightarrow [f]_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$= B$

$[f]_v = S^{-1} \cdot \underbrace{[f]_e}_{A} \cdot S$, unde $v = e \cdot S$ ← are pe col. coord. elem. din v în e

$$S = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ← inversabilă și $\underline{S^{-1} \cdot A \cdot S = B}$ diagonală.

c) $A^n = ?$, $n \in \mathbb{N}^*$

$S \cdot / S^{-1} \cdot A \cdot S = B / \cdot S^{-1} \Longrightarrow A = S \cdot B \cdot S^{-1} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow A^n = \underbrace{\underline{S \cdot B \cdot S^{-1}} \cdot \underline{S B \cdot S^{-1}} \cdots \underline{S B \cdot S^{-1}}}_{n \text{ factori}} = S \cdot B^n \cdot S^{-1} =$$

$$= S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot S^{-1} =$$

$= \ldots$

4. Calculați $A^4 - 11A^2 + 22A$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$