SEMINAR 8

1) Fie V un K-spaţiu vectorial, $S \leq_K V$ şi $x, y \in V$. Notăm $\langle S, x\rangle = \langle S \cup \{x\}\rangle$. Să se arate că dacă $x \in V \setminus S$ şi $x \in \langle S, y\rangle$ atunci $y \in \langle S, x\rangle$.

2) Fie V un K-spaţiu vectorial, $\alpha, \beta, \gamma \in K$, $x, y, z \in V$ astfel încât $\alpha\gamma \neq 0$ şi

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Să se arate că $\langle x, y\rangle = \langle y, z\rangle$.

3) Formează polinoamele $f_1 = 3X + 2$, $f_2 = 4X^2 - X + 1$, $f_3 = X^3 - X^2 + 3$ un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $P_3(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \operatorname{grad} f \leq 3\}$? Justificaţi răspunsul.

4) Fie V, V' K-spaţii vectoriale, $f : V \to V'$ o transformare liniară, $A \leq_K V$ şi $A' \leq_K V'$. Să se arate că:

a) $f(A) = \{f(a) \in V' \mid a \in A\} \leq_K V'$;

b) $\overset{-1}{f}(A') = \{x \in V \mid f(x) \in A'\} \leq_K V$.

5) În $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ considerăm

$$\mathbb{R}_i^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ este impară}\},\ \mathbb{R}_p^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ este pară}\}.$$

Să se arate că $\mathbb{R}_i^{\mathbb{R}}$ şi $\mathbb{R}_p^{\mathbb{R}}$ sunt subspaţii ale lui $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ şi că $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_i^{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{R}_p^{\mathbb{R}}$.

6) Să se arate că proprietatea unui subspaţiu de a fi sumand direct este tranzitivă.