Avem sistemul:

$$\begin{aligned} 19A - 22B + 5C &= 0 \\ 5B - 5A - 5D &= 0 \\ A + 2B + 5C &= 0 \end{aligned}$$

cu soluţiile:

$$A = -4D, B = -3D, C = 2D$$

deci ec.planului căutat este:

$$\begin{aligned} -4Dx - 3Dy + 2Dz + D &= 0 \\ -4x - 3y + 2z + 1 &= 0. \end{aligned}$$

3.5 Sfera

Definitia 3.5.1 *Se numeşte sferă mulţimea tuturor punctelor din spaţiu pentru care distanţa la un punct fix numit centrul sferei este egală cu un număr numit raza sferei.*

Aria sferei:

$$S = 4\pi R^2$$

Volumul "bilei":

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Fie centrul sferei $C\left(a, b, c\right)$ şi raza sferei R.

Teorema 3.5.1 *Punctul $M\left(x, y, z\right)$ aparţine sferei dacă şi numai dacă (ddacă) coordonatele sale verifică ecuaţia:*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \tag{3.5.1}$$

Demonstraţie: distanţa de la M la C este egală cu $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ care egalată cu R este echivalentă cu (3.5.1).□

Dacă în ecuaţia de mai sus se fac calculele şi se reduc termenii asemenea obţinem:

$$x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0 \tag{EGS}$$

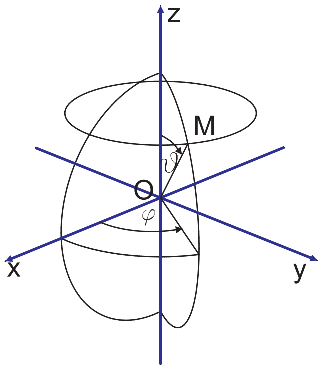
ecuaţie care poartă denumirea de ecuaţia generală a sferei. (EGS) reprezintă o sferă cu centrul în punctul $C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, -\frac{p}{2}\right)$ şi de rază $R = \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ dacă expresia de sub radical este pozitivă.

Remarca 3.5.1 Sfera se mai poate da şi folosind ecuaţiile parametrice:

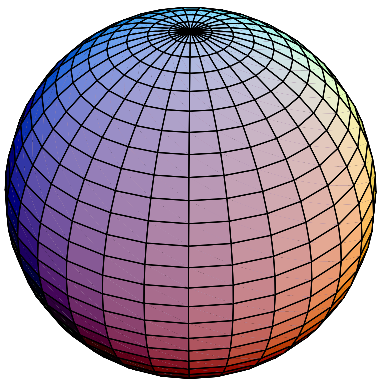
$$\left\{\begin{array}{l} x = R\cos\varphi\sin\vartheta + a \\ y = R\sin\varphi\sin\vartheta + b \\ z = R\cos\vartheta + c \end{array}\right. , \quad \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \pi] \tag{EPS}$$

$$\text{sau } \varphi \in [-180, 180], \vartheta \in [0, 180] \tag{3.5.2}$$

unde parametrii sunt unghiurile φ, ϑ din figura de mai jos:



pentru φ constant se obţin pe sferă jumătăţi de cecuri mari ("meridiane"), iar pentru ϑ constant se obţin pe sferă cercuri ("paralele").



Legat de sferă ne propunem să determinăm ecuaţia unui plan tangent la sferă **într-un punct de pe sferă**. Fie $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ un punct pe sferă.

Teorema 3.5.2 *Ecuaţia planului tangent la sferă în punctul M_0 este:*

$$\left(x-a\right)\left(x_0-a\right)+\left(y-b\right)\left(y_0-b\right)+\left(z-c\right)\left(z_0-c\right)=R^2 \qquad \text{(EPTS)}$$

Demonstraţie***: Planul tangent la sferă în M_0 este determinat de M_0 şi normala $\overrightarrow{CM_0}=\left(x_0-a\right)\bar{\imath}+$ ... (planul este perpendicular pe rază), deci ecuaţia sa este (unde (x, y, z) sunt coordonatele unui punct din planul tangent):

$$\left(x-x_0\right)\left(x_0-a\right)+\left(y-y_0\right)\left(y_0-b\right)+\left(z-z_0\right)\left(z_0-c\right)=0$$

Dar $x-x_0=\left(x-a\right)-\left(x_0-a\right)$, .. care înlocuite în ecuaţia de mai sus dau:

$$\left(x-a\right)\left(x_0-a\right)+\left(y-b\right)\left(y_0-b\right)+\left(z-c\right)\left(z_0-c\right)-\left(\left(x_0-a\right)^2+\left(y_0-b\right)^2+\left(z_0-c\right)^2\right)=0$$

Ţinând cont de faptul că coordonatele lui M_0 verifică ecuaţia sferei, rezultă (EPTS).□

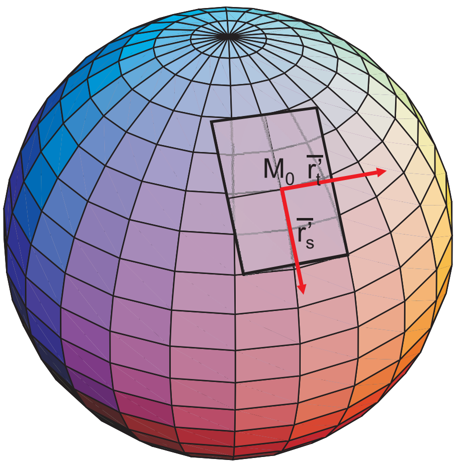
Remarca 3.5.2 Ecuaţia planului tangent la sferă se obţine din (EGS) prin dedublare :

$$\left(x-a\right)^2=\left(x-a\right)\left(x-a\right)\rightarrow\left(x-a\right)\left(x_0-a\right), \ldots$$

Remarca 3.5.3 Dacă sfera este dată sub formă generală atunci ecuatia planului tangent în punctul M_0 de pe sferă este:

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 + m\frac{x+x_0}{2} + n\frac{y+y_0}{2} + p\frac{z+z_0}{2} + q = 0$$

dedublarea fiind: $x^2 = xx \to xx_0$, $x = \frac{x+x}{2} \to \frac{x+x_0}{2}$.



Remarca 3.5.4 In general un plan este tangent la sferă dacă distanţa de la centrul sferei la plan este egală cu raza.

3.6 Cuadrice pe ecuaţii reduse

3.6.1 Elipsoid

Definitia 3.6.1 *Se numeşte elipsoid mulţimea punctelor din spaţiu $M(x, y, z)$ care într-un sistem de coordonate bine ales verifică ecuaţia:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{Elips}$$