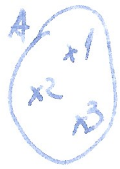
Seminar 3 | **Mulțimi** | 22 octombrie 2019

- Definiție „naivă": O mulțime este o colecție de obiecte abstracte bine determinate, unice, numite elementele sale.
- O mulțime poate fi dată prin:
  - → enumerarea elementelor: $A=\{1,2,3\}$ $1\in A$, $4\notin A$.
  - → diagrame Venn-Euler  Obs. ordinea elem.
  - → printr-o proprietate $A=\{x \mid P(x)\}$
    predicat: x nr nat, $1\le x\le 3$.
- $\{\} \stackrel{not}{=} \emptyset$.
- $A\subseteq B$ înseamnă $\forall x\,(x\in A \to x\in B)$

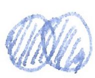
  $A=B$ înseamnă $\forall x\,(x\in A \leftrightarrow x\in B)$

  $$\Updownarrow$$

  $$A\subseteq B \text{ și } B\subseteq A$$
- $\mathcal{P}(M)=\{S \mid S\subseteq M\}$ mulțimea părților (mulț. putere)

  $|M|=n \Rightarrow |\mathcal{P}(M)|=2^n$ Hint: elem.
- Operații: Fie U = universul discursului și $A,B\subseteq U$.

  $C_A=\{x \mid x\notin A\}$

  $A\cup B=\{x \mid x\in A \vee x\in B\}$ 

  $A\cap B=\{x \mid x\in A \wedge x\in B\}$ 

  $A\setminus B=\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$ 

  $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ 

  $=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_n$ mulțimi.

$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n\}$

Exerciții (pg 23) Fie $A, B, C \subseteq U$

$\boxed{Ex\ 19}$ e) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ asociativitatea reuniunii

Soluție: Fie $x \in U$.

$x \in (A \cup B) \cup C \iff x \in A \cup B$ sau $x \in C$.

$\iff (x \in A$ sau $x \in B)$ sau $x \in C \overset{\text{asoc lui } \vee}{\iff}$

$x \in A$ sau $(x \in B$ sau $x \in C) \iff x \in A$ sau $x \in B \cup C$

$\iff x \in A \cup (B \cup C)$. ▲

$\boxed{Ex\ 20}$ b) $A \setminus B = A \cap C_B$.

Soluție: Fie $x \in U$.

$x \in A \setminus B \iff x \in A$ și $\underbrace{x \notin B}_{\neg(x \in B) \text{ sau } \overline{x \in B}} \iff x \in A$ și $x \in C_B \iff x \in A \cap C_B$.

▲

g) $C(A \cup B) = C(A) \cap C(B)$ $\quad C(A \cap B) = C(A) \cup C(B)$

„formulele lui De Morgan".

Soluție: Fie $x \in U$.

$x \in C(A \cup B) \iff \overline{x \in A \cup B} \iff \overline{x \in A \text{ sau } x \in B} \overset{\text{De Morgan}}{\iff}$

$\overline{x \in A}$ și $\overline{x \in B} \iff x \in C_A$ și $x \in C_B \iff x \in C_A \cap C_B$.

▲

$\boxed{\text{Ex 21}}$ e) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

„Intersecția este distributivă față de diferența simetrică"

Soluție: $A\cap(B\Delta C)\overset{def}{=}A\cap\big((B\setminus C)\cup(C\setminus B)\big)=$

$=A\cap\big((B\cap C_C)\cup(C\cap C_B)\big)$ distrib. $\cap$ față de $\cup$

$=(A\cap B\cap C_C)\cup(A\cap C\cap C_B)$.

$(A\cap B)\Delta(A\cap C)=\big((A\cap B)\cap C_{A\cap C}\big)\cup\big((A\cap C)\cap C_{A\cap B}\big)$ asociativ

$=(A\cap B\cap C_{A\cap C})\cup(A\cap C\cap C_{A\cap B})$ De Morgan

$=\big(A\cap B\cap(C_A\cup C_C)\big)\cup\big(A\cap C\cap(C_A\cup C_B)\big)$ distrib.

$=\big(\underbrace{(A\cap B\cap C_A)}_{\text{comut } \emptyset}\cup(A\cap B\cap C_C)\big)\cup\big(\underbrace{(A\cap C\cap C_A)}_{\text{comut } \emptyset}\cup(A\cap C\cap C_B)\big)$ asoc.

$=(A\cap B\cap C_C)\cup(A\cap C\cap C_B)$ ▲

$\boxed{\text{Ex 22}}$ S.s.a.c. pt orice mulțimi A,B,C dacă $A\cap C=B\cap C$ și $A\cup C=B\cup C$ atunci $A=B$.

Soluția 1: Datorită simetriei condițiilor este suficient să arătăm că $A\subseteq B$: $\forall x\,(x\in A\longrightarrow x\in B)$.

Fie $x\in A\Rightarrow x\in A\cup C=B\cup C\Rightarrow x\in B$ sau $x\in C$.

Cazul I: Dacă $\boxed{x\in B}$ ✓

Cazul II: P.p. că $x\notin B\Rightarrow x\in C$, dar $x\in A\Rightarrow x\in A\cap C=B\cap C$
$\Rightarrow x\in B$ și $x\in C\Rightarrow x\in B$ contradicție $\Rightarrow\boxed{x\in B}$

Așadar $A=B$.

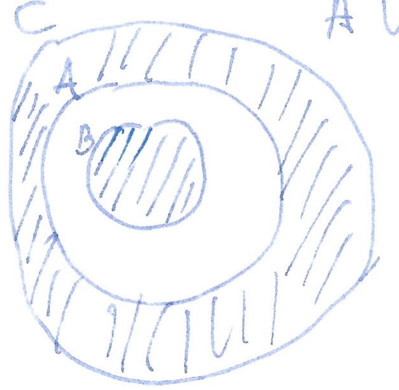
Soluția 2: Folosim proprietățile operațiilor cu mulțimi.

$$A \xlongequal{\text{absorbție}} A\cap(A\cup C) \xlongequal{\text{ip.}} A\cap(B\cup C) \xlongequal{\text{distrib}} (A\cap B)\cup(A\cap C) \xlongequal{\text{ip}}$$
$$= (A\cap B)\cup(B\cap C) \xlongequal[\text{distrib}]{\text{comut}} B\cap(A\cup C) \xlongequal{\text{ip}} B\cap(B\cup C) \xlongequal{\text{abs.}} B.$$

▲

$\boxed{\text{Ex 23}}$ Fie A, B, C mulțimi date. Să se det. mulț X care satisface:
a) $A\cap X = B$, $A\cup X = C$
b) $A\setminus X = B$, $X\setminus A = C$.

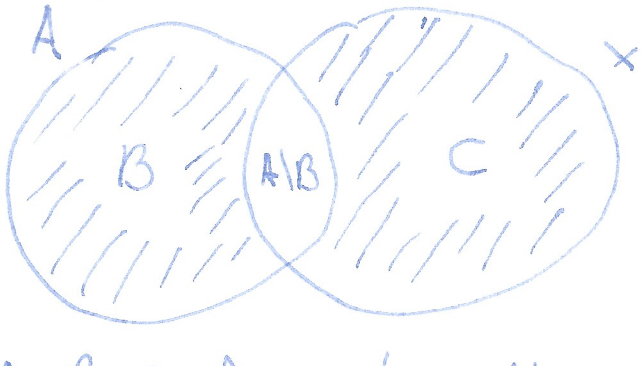
Soluție: a) $A\cap X = B \Rightarrow B\subseteq A.$
$A\cup X = C \Rightarrow \begin{cases} A\subseteq C. \\ X\subseteq C. \end{cases}$ $\Rightarrow B\subseteq A\subseteq C.$



$$\underbrace{C\setminus A\subseteq X \quad B\subseteq X}$$
$$\Downarrow$$
$$X = (C\setminus A)\cup B.$$

Dacă X ar conține și elemente din $A\setminus B$, nu am mai fi avut $A\cap X = B$.

b) Ideea:



$X = C\cup(A\setminus B)$

▲

$\boxed{\text{Ex 24}}$ Dacă A, B, C, D sunt mulțimi, atunci:
c) $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$.

Soluție: Fie $x, y \in U$.

$(x,y) \in (A \cup B) \times C \overset{def}{\iff} x \in A \cup B$ și $y \in C$

$\iff (x \in A$ sau $x \in B)$ și $y \in C \overset{distrib}{\iff}$

$(x \in A$ și $y \in C)$ sau $(x \in B$ și $y \in C) \overset{def}{\iff}$

$(x,y) \in A \times C$ sau $(x,y) \in B \times C \iff (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

▲