6.11.2020

Seminar 6 gr. 314

1. Să se scrie ecuația unui plan.
 a) paralel cu planul xOy și care trece prin punctul $(2,-5,3)$;
 b) care trece prin axa Oz și prin punctul $(-3, 1, -2)$.
 c) paralel cu axa Ox și care trece prin două puncte $(4,0,-2)$ și $(5,1,7)$

2. Să se calculeze înălțimea piramidei dusă din vârful S, piramida având vârfurile $S(0,6,4)$, $A(3,5,3)$; $B(-2,11,-5)$; $C(1,-1,4)$.

3 Se dau planele

$$(P_1): 3x-y+z+1=0$$
$$(P_2): x+y-z-2=0$$

Să se afle ecuația planului care trece prin punctul $M_0(1,-5,-3)$ și este perpendicular pe planele P_1 și P_2 și să se calculeze unghiul dintre planele P_1 și P_2.

$$\left(\cos\varphi = \frac{\vec{n}_{P_1} \cdot \vec{n}_{P_2}}{\|\vec{n}_{P_1}\| \cdot \|\vec{n}_{P_2}\|} = \frac{\sqrt{33}}{33} \right)$$

4. Să se afle ecuația planului care trece prin mijlocul segmentului AB: $A(1,7,2)$, $B(-1,-5,-3)$ este paralel cu dreapta

$$D: \frac{x+2}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z-6}{4}$$ și este perpendicular pe planul $P: x+y-1=0$

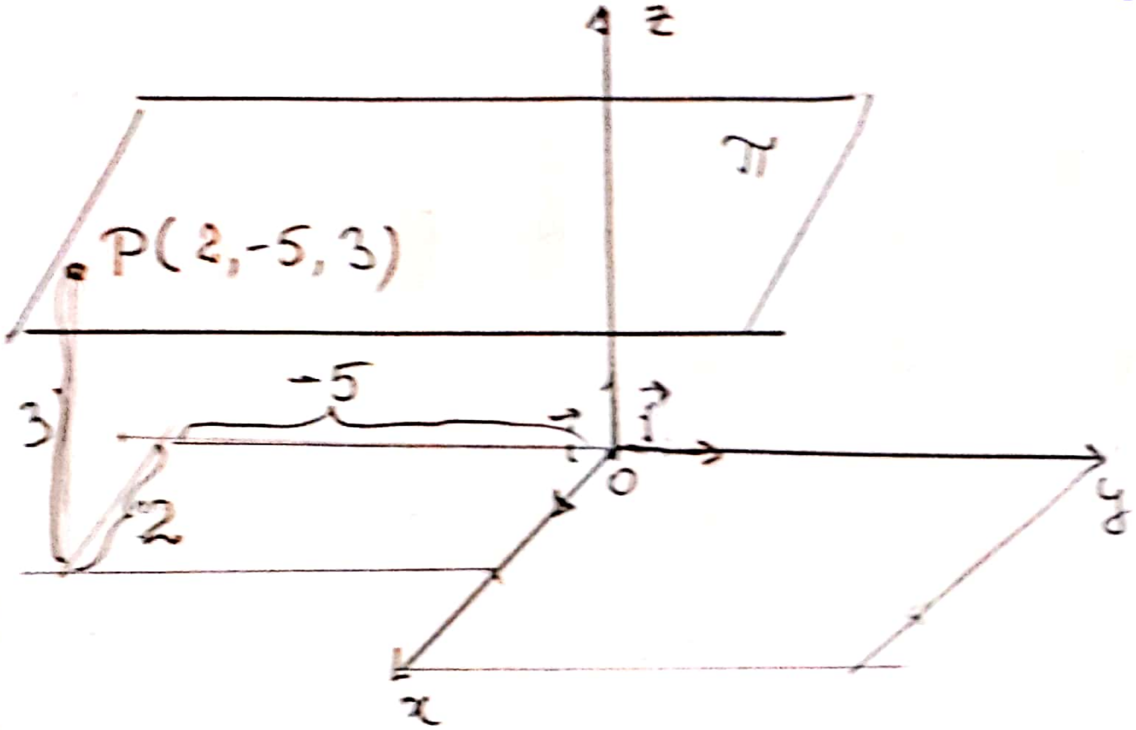
5. Să se scrie ecuațiile dreptei care se află în planul xOz, trece prin origine și este perpendiculară pe dreapta:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-5}{1}.$$

6. Să se scrie ecuațiile perpendicularei coborâte din punctul $P(-2,3,1)$ pe dreapta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+2}{4}$.

Soluții

1. a) Deoarece planul este paralel cu planul xOy, el are ca vectori directori $\vec{d_1}=\vec{i}$ și $\vec{d_2}=\vec{j}$.



Ecuația planului prin punct și 2 vectori directori este:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & q_1 & k_1 \\ p_2 & q_2 & k_2 \end{vmatrix} = 0$$

În cazul nostru: $P(2,-5,3)$, $\vec{d_1}=\vec{i}(1,0,0)$, $\vec{d_2}=\vec{j}(0,1,0)$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\cdot(x-2) - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}(y+5) + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}(z-3) = 0$$

$$\iff z-3=0.$$

Altă variantă:

Planul π fiind paralel cu xOy are ca vector normal vectorul $\vec{k}(0,0,1)$. Ecuația planului care trece printr-un punct și are vectorul normal $\vec{n}(A,B,C)$ este:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

În cazul nostru:

$$0\cdot(x-2)+0(y+5)+1\cdot(z-3)=0 \Leftrightarrow z-3=0 \ \#.$$

b). Un vector director al planului este $\vec{k}(0,0,1)$ (versorul lui Oz) iar altul poate fi $\overrightarrow{OM}$ unde $O(0,0,0)\in Oz$ și $M(-3,1,-2)$ din ipoteză. $\overrightarrow{OM}(-3,1,-3)$

Ecuația planului:

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\cdot z - \begin{vmatrix} x & y \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\cdot 1 - 3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x+3y=0$ (am dezvoltat după coloana a treia).

c). Planul π este paralel cu Ox și trece prin punctele $A(4,0,-2)$ și $B(5,1,7)$.

Atunci doi vectori directori ai planului π sunt $\vec{i}$ (versorul lui Ox) și $\overrightarrow{AB}(1,1,9)$.

Ecuația planului π este:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-4 & y & z+2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9y - z - 2 = 0.$$

2. Înălțimea piramidei (tetraedrului) SABC dusă din S este distanța de la S la planul ABC.

Ecuația planului prin trei puncte este:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_B & 1 \end{vmatrix} = 0.$$ În cazul nostru:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 1 \\ -2 & 11 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$ Dezvoltăm după prima linie:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 11 & -5 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 11 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -2 & 11 & -5 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & -8 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -5 & -8 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} 3 & 8 & -9 \\ -2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-42x + 21y + 42z - 105 = 0 \quad \Big| : (-21)$$

$$\boxed{2x - y - 2z + 5 = 0}$$

Distanța de la un punct la un plan:

$$d = \frac{|Ax_0 + By + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$. În cazul nostru

$A = 2$, $B = -1$, $C = -2$, $D = 5$

$(x_0, y_0, z_0) = (0, 6, 4)$ (punctul S).

Rezultă înălțimea din S este:

$$h = \frac{|2 \cdot 0 + (-1) \cdot 6 + (-2) \cdot 4 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-9|}{3} = 3 \#$$

3. Planul care trece prin $M_0(1, -5, -3)$ este:

Π: $A(x-1) + B(y+5) + C(z+3) = 0$

Vectorii normali ai planelor Π, P_1 și P_2 sunt:

$\vec{n}_\Pi (A, B, C)$, $\vec{n}_{P_1}(3, -1, 1)$ $\vec{n}_{P_2}(1, 1, -1)$

$$\Pi \perp P_1 \Leftrightarrow \vec{n}_\Pi \perp \vec{n}_{P_1} \Leftrightarrow \vec{n}_\Pi \cdot \vec{n}_{P_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3A - B + C = 0$$

$$\Pi \perp P_2 \Leftrightarrow \vec{n}_\Pi \perp \vec{n}_{P_2} \Leftrightarrow \vec{n}_\Pi \cdot \vec{n}_{P_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow A + B - C = 0$$

$$\begin{cases} 3A-B+C=0 \\ A+B-C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A-B=-C \\ A+B=C \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4A=0 \Rightarrow A=0$ și $B=C$

$\Leftrightarrow \vec{n}(0,C,C)$ sau $\vec{n}(0,1,1)$

$\Rightarrow \pi: 0(x-1)+C\cdot(y+5)+C(z+3)=0$

$\Leftrightarrow y+5+z+3=0 \Leftrightarrow \boxed{y+z+8=0}$ //.

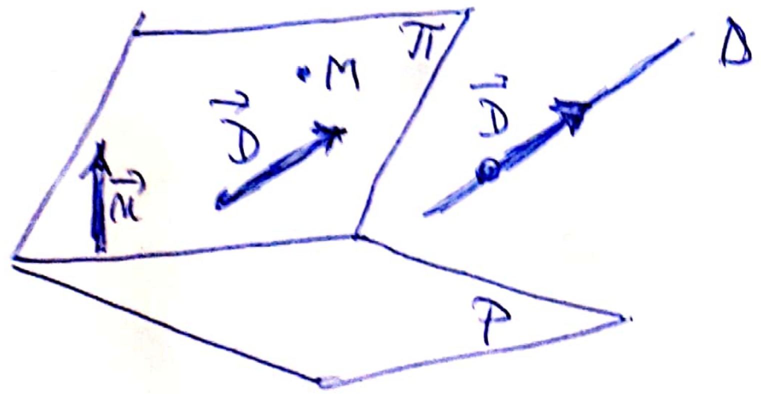
④. mijlocul M al lui AB are coordonatele

$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$, $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$, $z_M=\frac{z_A+z_B}{2}$

deci $M(0,1,-\frac{1}{2})$.

Un vector director al planului este vectorul director al dreptei D adică $\vec{D}(5,3,4)$.

Planul căutat π fiind perpendicular pe planul P va avea alt vector director vectorul normal al planului P adică $\vec{n}_P(1,1,0)$.



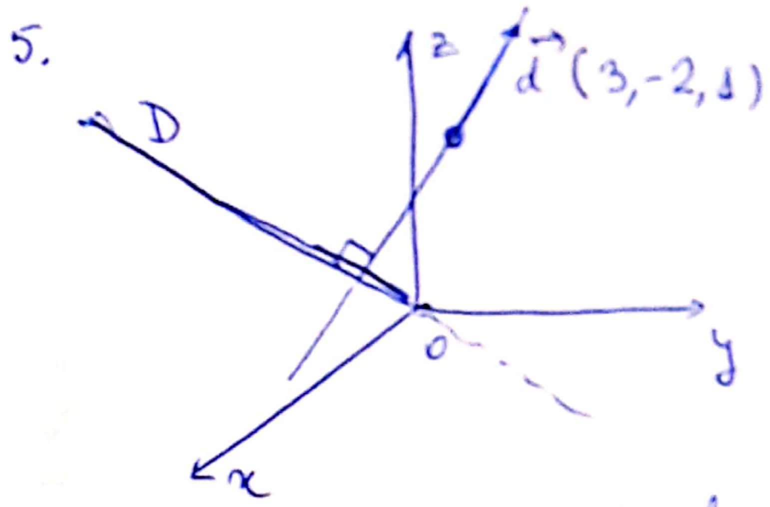
Ecuația planului:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z+\frac{1}{2} \\ 5 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff -4x + 4(y-1) + 2\left(z+\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\iff \boxed{-4x + 4y + 2z - 3 = 0}$$

5.



Dreapta D aparține planului xOz care are ecuația $y=0$, și trece prin originea $O(0,0,0)$.
Deci ecuațiile ei sunt

$$\begin{cases} \dfrac{x}{p} = \dfrac{z}{r} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \left(\frac{x-0}{p} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{r} \right)$$

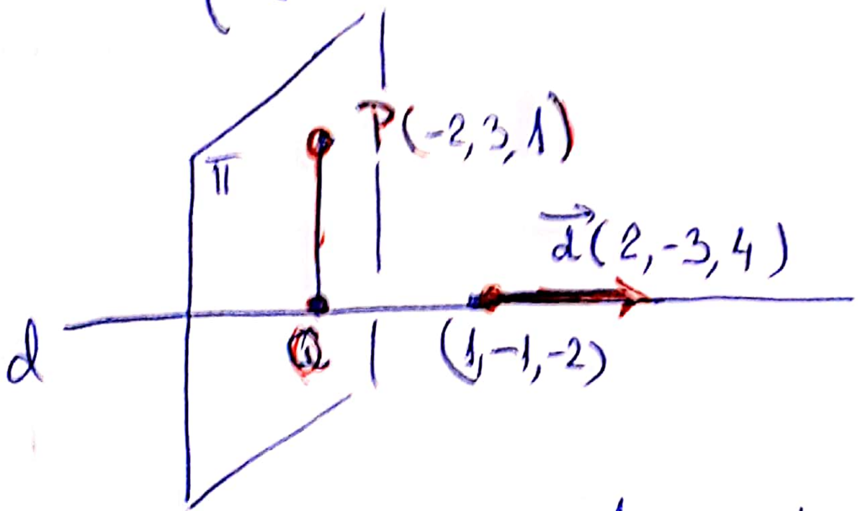
Ea este perpendiculară pe d care are vectorul director $\vec{d}(3,-2,1)$. Deci $D \perp d \iff \vec{D} \perp \vec{d} \iff$

$\Leftrightarrow \vec{B}\cdot\vec{d}=0 \Leftrightarrow p\cdot 3 - 2\cdot 0 + r\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p = \frac{r}{-3}$ adică numerele p și r sunt proporționale cu 1 și -3.

Deci: $D: \begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{z}{-3} \\ y = 0 \end{cases}$ $O(0,0,0)$, $\vec{B}(1,0,-3)$. #

(6)



Ecuația planului care trece prin P și este perpendicular pe d este:

$$\pi: 2\cdot(x+2) - 3(y-3) + 4(z-1) = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \text{ unde,} \\ (x_0,y_0,z_0)=(-2,3,1) \text{ și} \\ \vec{n}(A,B,C) = \vec{d}(2,-3,4) \end{array} \right)$$

$$\pi: 2x - 3y + 4z + 9 = 0$$

Punctul Q este intersecția planului Π cu dreapta d.

$$\begin{cases} d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+2}{4} = t \\ \Pi: 2x-3y+4z+9=0 \end{cases}$$

$$d: \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -3t-1 \\ z = 4t-2 \end{cases}$$

$$2(2t+1)-3(-3t-1)+4(4t-2)+9=0$$

$$29t+6=0 \Rightarrow t = -\frac{6}{29}$$

$$x_Q = \frac{-12}{29}+1 \Leftrightarrow x_Q = +\frac{17}{29}$$

$$y_Q = \frac{18}{29}-1 = -\frac{11}{29}$$

$$z_Q = \frac{-24}{29}-2 \Leftrightarrow z_Q = \frac{-82}{29}$$

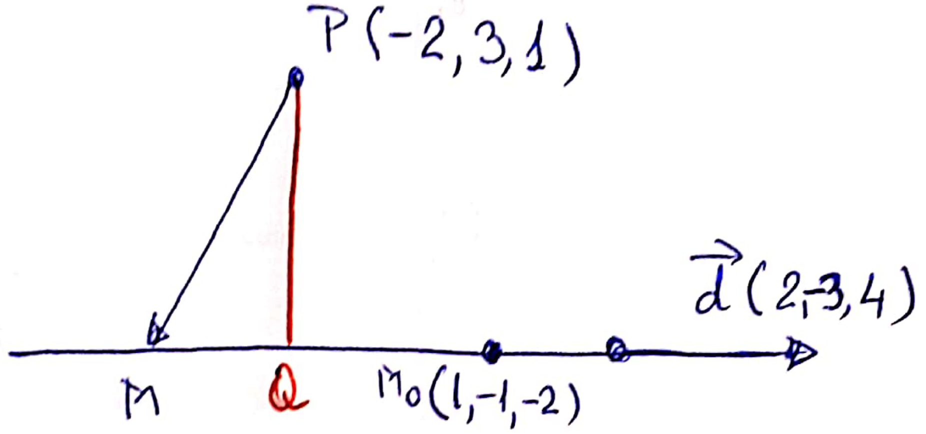
$$Q\left(\frac{17}{29}, -\frac{11}{29}, -\frac{82}{29}\right)$$

Ecuațiile lui PQ sunt:

$$\frac{x+2}{\frac{17}{29}+2} = \frac{y-3}{-\frac{11}{29}-3} = \frac{z-1}{-\frac{82}{29}-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{x+2}{75} = \frac{y-3}{-98} = \frac{z-1}{-111}}.$$

Altă soluție



$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+2}{4}=t$$

$$\begin{cases} x_M = 2t+1 \\ y_M = -3t-1 \\ z_M = 4t-2 \end{cases}$$

$\overrightarrow{PM}(2t+1+2,\ -3t-1-3,\ 4t-2-1)$

$\overrightarrow{PM}(2t+1,\ -3t-4,\ 4t-3)$.

$\overrightarrow{PM} \perp \vec{d} \Leftrightarrow \overrightarrow{PM}\cdot\vec{d}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 2(2t+3)-3(-3t-4)+4(4t-3)=0$

$\Leftrightarrow\ 29t+6=0 \Rightarrow t=-\frac{6}{29}$

$\Rightarrow Q\left(2\cdot\left(-\frac{6}{29}\right)+1,\ -3\left(-\frac{6}{29}\right)-1,\ 4\left(-\frac{6}{29}\right)-2\right)$

$Q\left(\frac{17}{29},\ -\frac{11}{29},\ -\frac{82}{29}\right)$

$\Rightarrow PQ:\ \frac{x+2}{75}=\frac{y-3}{-98}=\frac{z-1}{-111}.$