SEMINAR 12

1) În $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideră subspaţiile generate astfel:
c) $S = \langle u_1, u_2 \rangle$, cu $u_1 = (1, 2, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 1, 1)$,
$T = \langle v_1, v_2 \rangle$, cu $v_1 = (2, -1, 0, 1)$, $v_2 = (1, -1, 3, 7)$;
d) $S = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, cu $u_1 = (1, 2, 1, -2)$, $u_2 = (2, 3, 1, 0)$, $u_3 = (1, 2, 2, -3)$,
$T = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, cu $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1, -1)$, $v_3 = (1, 3, 0, -3)$.
Găsiţi câte o bază şi dimensiunea pentru fiecare dintre subspaţiile S, T, $S + T$ şi $S \cap T$.

2) a) Fie $\varphi \in \mathbb{R}$. Să se arate că rotaţia în plan de unghi φ, adică funcţia

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ h(x, y) = (x \cos\varphi - y \sin\varphi, x \sin\varphi + y \cos\varphi),$$

este automorfism al lui $\mathbb{R}^2$. Să se scrie matricea lui h în baza canonică a lui $\mathbb{R}^2$ (adică în baza (e_1, e_2), cu $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$).
b) Să se arate că funcţiile $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, -y)$ (simetria în raport cu axa Ox) şi $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (-x, y)$ (simetria în raport cu axa Oy) sunt automorfisme ale lui $\mathbb{R}^2$. Să se scrie matricele lui f, g, $f - g$, $f + 2g$ şi $g \circ f$ în baza canonică.

3) Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x+y, 2x-y, 3x+2y)$. Să se arate că f este o transformare liniară, să se arate că $v = ((1, 2), (-2, 1))$, respectiv $v' = ((1, -1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1))$ este bază în $\mathbb{R}^2$, respectiv $\mathbb{R}^3$ şi să se scrie matricea lui f în perechea de baze (v, v').

Suplimentar: Să se arate că fiecare dintre mulţimile ordonate de vectori (v_1, v_2, v_3) şi (v_1', v_2', v_3') cu

$$v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (2, 3, 3), v_3 = (3, 7, 1) \text{ şi } v_1' = (3, 1, 4), v_2' = (5, 2, 1), v_3' = (1, 1, -6)$$

formează câte o bază a lui $\mathbb{R}^3$ şi să se găsească legătura dintre coordonatele unui vector scris în cele două baze.

4) Fie $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ o bază a $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^4$, vectorii

$$u_1 = v_1,\ u_2 = v_1 + v_2,\ u_3 = v_1 + v_2 + v_3,\ u_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$$

şi $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ cu

$$[f]_v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ este o bază a lui $\mathbb{R}^4$ şi să se scrie matricea $[f]_u$.

5) Fie V un spaţiu vectorial real, $v = (v_1, v_2, v_3)$ o bază a spaţiului V, vectorii

$$u_1 = v_1 + 2v_2 + v_3,\ u_2 = v_1 + v_2 + 2v_3,\ u_3 = v_1 + v_2$$

şi $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$. Să se arate că $u = (u_1, u_2, u_3)$ este o bază a lui V şi să se scrie matricea lui $[f]_v$ ştiind că

$$[f]_u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

6) Fie V, V' două $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale, $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ câte o bază în V, respectiv V' şi $f : V \to V'$ o transformare liniară a cărei matrice în perechea de baze (a, b) este

$$[f]_{a,b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Să se determine:
i) $f(v)$ pentru orice $v \in V$;
ii) dimensiunea spaţiilor vectoriale $\operatorname{Im} f$ şi $\operatorname{Ker} f$;
iii) matricea $[f]_{a',b'}$, unde $a' = (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3)$ şi $b' = (b_1, b_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3)$.

7) Fie V, V' $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale, $v = (v_1, v_2, v_3)$ o bază în V, $v' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ o bază în V' şi $f : V \to V'$ transformarea liniară cu

$$[f]_{v,v'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Să se determine:
i) dimensiunea şi câte o bază pentru $\operatorname{Im} f$ şi $\operatorname{Ker} f$;
ii) $[f]_{v,e'}$ în cazul în care $V' = \mathbb{R}^3$, $v'_1 = (1, 0, 0)$, $v'_2 = (0, 1, 1)$, $v'_3 = (0, 0, 1)$ şi e' este baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$;
iii) $f(x)$ pentru $x = 2v_1 - v_2 + 3v_3$, în condiţiile de la ii).

8) Fie $f \in End_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4)$ pentru care matricea în baza canonică este

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ 5 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine câte o bază în $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ şi $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$.

TEMĂ: 1) Fie $S = \{(t, 2t, 3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ şi $T = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$.
i) Să se arate că S şi T sunt subspaţii ale lui ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$.
ii) Să se determine câte o bază în S şi T.
iii) Să se determine $S \cap T$ şi $S + T$.

2) Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ aplicaţia liniară definită pe baza canonică astfel:

$$f(e_1) = (1, 2, 3, 4),\ f(e_2) = (4, 3, 2, 1),\ f(e_3) = (-2, 1, 4, 1).$$

Să se determine:
i) $f(v)$ pentru orice $v \in \mathbb{R}^3$;
ii) matricea lui f în bazele canonice;
iii) câte o bază în $\operatorname{Im} f$ şi $\operatorname{Ker} f$.