CURS 11

Două formule importante referitoare la dimensiune

Fie K un corp comutativ.

Teorema 1. Dacă V şi V' sunt K-spaţii vectoriale şi $f : V \to V'$ este o transformare liniară, atunci

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim f(V). \tag{4}$$

$X \cup X'$ - bază
$X \cap X' = \emptyset$
$\Rightarrow \dim V =$
$= |X \cup X'| =$
$= |X| + |X'| =$
$= \dim \operatorname{Ker} f$
$+ |X'|$.

Demonstraţie. Fie X o bază în $\operatorname{Ker} f$ şi $X \cup X'$ cu $X \cap X' = \emptyset$ o completare a lui X la o bază a lui V. Din $X \cap X' = \emptyset$ şi unicitatea scrierii unui vector ca şi combinaţie liniară de vectori dintr-o bază rezultă $\langle X \rangle \cap \langle X' \rangle = \{0\}$. Dacă $x_1', x_2' \in X'$ şi $f(x_1') = f(x_2')$ atunci

$$f(x_1' - x_2') = 0 \Rightarrow x_1' - x_2' \in \langle X' \rangle \cap \operatorname{Ker} f \overset{\operatorname{Ker} f = \langle X \rangle}{=} \langle X' \rangle \cap \langle X \rangle = \{0\} \Rightarrow x_1' - x_2' = 0 \Rightarrow x_1' = x_2'.$$

Deci $f|_{X'} : X' \to f(X')$ este bijecţie, ceea ce ne arată că $|X'| = |f(X')|$. Demonstrăm că $f(X')$ este o bază a lui $f(V)$. Pentru orice $y \in f(V)$ există $x \in V$ astfel ca $y = f(x)$, dar $X \cup X'$ fiind o bază a lui V, există $x_1, \dots, x_m \in X$, $x_{m+1}', \dots, x_n' \in X'$ astfel ca

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m + \alpha_{m+1} x_{m+1}' + \cdots + \alpha_n x_n',$$

de unde ţinând seama de $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \in \operatorname{Ker} f$ deducem

$$y = f(x) = f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m) + \alpha_{m+1} f(x_{m+1}') + \cdots + \alpha_n f(x_n') =$$

$$= \alpha_{m+1} f(x_{m+1}') + \cdots + \alpha_n f(x_n') \in \langle f(X') \rangle$$

ceea ce ne arată că $f(V) = \langle f(X') \rangle$. Dacă $y_1, \dots, y_l \in f(X')$ atunci există $x_i' \in X'$ astfel încât $y_i = f(x_i')$ $(i = 1, \dots, l)$. Pentru $\beta_1, \dots, \beta_l \in K$ cu $\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_l y_l = 0$ avem $\Rightarrow \beta_1 f(x_1') + \dots + \beta_l f(x_l') = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad f(\beta_1 x_1' + \cdots + \beta_l x_l') = 0 \Rightarrow \beta_1 x_1' + \cdots + \beta_l x_l' \in \langle X' \rangle \cap \operatorname{Ker} f = \langle X' \rangle \cap \langle X \rangle = \{0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_1 x_1' + \cdots + \beta_1 x_l' = 0 \Rightarrow \beta_1 = \cdots = \beta_l = 0$$ (pt că X' e l.i.).

ceea ce arată că $f(X')$ este liberă. Deci $f(X')$ este o bază a lui $f(V)$ şi $|X'| = |f(X')|$ de unde rezultă că $\dim f(V) = |X'|$ ceea ce împreună cu faptul că $X \cup X'$ este bază pentru V, iar X este bază pentru $\operatorname{Ker} f$ şi $X \cap X' = \emptyset$ implică pe (4).

Cu notaţiile din Teorema 1, $\dim \operatorname{Ker} f$ se numeşte **defectul** lui f, iar $\dim f(V)$, **rangul** lui f.

$|A \cup B| =$
$|A| + |B| - |A \cap B|$

Corolarul 2. a) Fie V un K-spaţiu vectorial şi A, B subspaţii ale lui V. Atunci

$$\dim A + \dim B = \dim(A \cap B) + \dim(A + B). \tag{5}$$

Într-adevăr, funcţia $f : A \times B \to A + B$, $f(a, b) = a - b$ este o transformare liniară surjectivă şi $\operatorname{Ker} f = \{(x, x) \mid x \in A \cap B\}$. Din (4) rezultă

$$\dim(A \times B) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(A + B). \tag{6}$$

$\cong$
$A \cap B$

→ pt că f e surjectivă

Dar cum $g : A \cap B \to \operatorname{Ker} f$, $g(x) = (x, x)$ este un izomorfism de spaţii vectoriale, urmează

$$\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(A \cap B), \tag{7}$$

iar într-un exemplu din cursul anterior am văzut că

$$\dim(A \times B) = \dim A + \dim B. \tag{8}$$

Acum din (6), (7) şi (8) se obţine (5).

b) Dacă V este un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită, iar A şi B sunt subspaţii ale lui V, atunci

$$\dim(A + B) = \dim A + \dim B \Leftrightarrow A + B = A \oplus B. \quad (\text{adică } A \cap B = 0)$$

c) **(Teorema alternativei)** Dacă V, V' sunt K-spaţii vectoriale de aceeaşi dimensiune finită (i.e. $\dim V = \dim V' \in \mathbb{N}$), iar $f : V \to V'$ este o transformare liniară, atunci sunt echivalente următoarele afirmaţii:
i) f este injectivă;
ii) f este surjectivă;
iii) f este izomorfism.

Cum implicaţiile iii) $\Rightarrow$ i) şi iii) $\Rightarrow$ ii) sunt evidente, rămâne de demonstrat i) $\Leftrightarrow$ ii).
Din i) rezultă $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, prin urmare,

$$\dim V' \overset{ip}{=} \dim V \overset{Th.1}{=} \dim \operatorname{Ker} f + \dim f(V) \overset{\operatorname{Ker} f = 0}{=} \dim f(V).$$

$$\left.\begin{array}{l} f(V) \leq V' \\ \dim f(V) = \dim V' < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V' = f(V)$$

Cum $f(V) \leq_K V'$, deducem că $f(V) = V'$, deci f este surjectivă.
Reciproc, din ii) rezultă că $\dim f(V) = \dim V'$, prin urmare

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim f(V) = \dim V' - \dim f(V) = 0.$$

Aşadar, $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, deci f e injectivă.

[obs: Ipoteza că dimensiunile sunt finite este esențială].

Transformări liniare şi matrici

În acest paragraf vom arăta că studiul transformărilor liniare între două K-spaţii vectoriale V şi V' de tip finit se reduce la studiul matricelor de tipul (m, n) cu elemente din K, unde $m = \dim V'$ şi $n = \dim V$. Menţionăm că în această secţiune, bazele nu vor fi privite doar ca mulţimi ci ca mulţimi ordonate. Astfel, prin **bază** vom înţelege **bază ordonată**.

Fie K un corp comutativ, V şi V' K-spaţii vectoriale de dimansiune finită, $n = \dim V$, $m = \dim V'$ şi $u = (u_1, \ldots, u_n)$ respectiv $v = (v_1, \ldots, v_m)$ o bază a lui V respectiv V'. Fiecare vector $y \in V'$ are o reprezentare unică de forma

$$y = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m. \tag{1}$$

Scalarii $\beta_1, \ldots, \beta_m$ din (1) se numesc **coordonatele** lui y în baza v.

Dacă $f : V \to V'$ este o transformare liniară, conform proprietăţii de universalitate a spaţiilor vectoriale, f este determinată de restricţia sa la u, adică de $f(u_1), \ldots, f(u_n)$, iar fiecare vector $f(u_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$ este determinat de coordonatele sale în baza v.

Deci transformarea liniară f este determinată de scalarii α_{ij}, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ din relaţiile

$$\begin{aligned}
f(u_1) &= \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \cdots + \alpha_{m1}v_m \\
f(u_2) &= \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \cdots + \alpha_{m2}v_m \\
&\vdots \\
f(u_n) &= \alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + \cdots + \alpha_{mn}v_m.
\end{aligned} \tag{2}$$

Notăm cu $[f]_{u,v}$ matricea de tipul (m,n) care are **coloanele** formate din coordonatele vectorilor $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ în baza v, adică

$$[f]_{u,v} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matricea $[f]_{u,v}$ se numeşte **matricea transformării liniare** f **în perechea de baze** (u,v). Când $V = V'$ şi $v = u$, matricea $[f]_{u,u}$ se mai notează cu $[f]_u$ şi se numeşte **matricea lui** f **în baza** u. $[f]_{u,u} \overset{\text{not.}}{=} [f]_u$

Folosind matrice linie cu elementele vectori, relaţiile (2) se pot scrie astfel:

$$\boxed{(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = (v_1, \ldots, v_m)[f]_{u,v}.} \quad !!!$$

Dacă $x \in V$ şi x are coordonatele $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ în baza u, iar $f(x)$ are coordonatele $\beta_1, \ldots, \beta_m$ în baza v, adică

$$f \,|\; x = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n, \; f(x) = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m$$

atunci

$$f(x) = \alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_n f(u_n) = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m$$

de unde, folosind pe (2) obţinem

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\alpha_j \right) v_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i. \tag{3}$$

Din (3) şi din unicitatea coordonatelor rezultă

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\alpha_j \; (i = 1, \ldots, m) \tag{4}$$

ceea ce ne arată că coordonatele lui $f(x)$ sunt combinaţii liniare ale coordonatelor lui x cu coeficienţii din **liniile** matricei $[f]_{u,v}$. Relaţiile (4) se exprimă matriceal astfel

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Menţionăm că matricea $[f]_{u,v}$ depinde de f, de bazele u, v şi de ordonările acestor baze, iar

$$\operatorname{rang} f = \operatorname{rang}\, [f]_{u,v}.$$

Exemplele 3. a) Pentru orice K-spaţiu vectorial V de dimensiune n şi orice bază u a lui V,

$$[1_V]_u = I_n.$$

$u=(u_1,\dots,u_m)$ $\quad 1_V(u_1)=u_1 = 1\cdot u_1+0\cdot u_2+\dots+0\cdot u_m$

$1_V(u_2) = 0\cdot u_1+1\cdot u_2+\dots+0\cdot u_m$

$\dots$

b) Fie $P_n(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$ - spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult n cu coeficienţii din $\mathbb{R}$. Funcţia

$$\varphi : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}),\ \varphi(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3) = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2$$

(adică funcţia care asociază unui polinom f derivata formală f' a sa) este o transformare liniară. Vom scrie matricea lui φ în perechile de baze ordonate $u = (1, X, X^2, X^3)$, $v = (1, X, X^2)$ şi $u = (1, X, X^2, X^3)$, $v' = (X^2, 1, X)$. Avem

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= 0\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 = 0\cdot X^2 + 0\cdot 1 + 0\cdot X\\
\varphi(X) &= 1\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 = 0\cdot X^2 + 1\cdot 1 + 0\cdot X\\
\varphi(X^2) &= 0\cdot 1 + 2\cdot X + 0\cdot X^2 = 0\cdot X^2 + 0\cdot 1 + 2\cdot X\\
\varphi(X^3) &= 0\cdot 1 + 0\cdot X + 3\cdot X^2 = 3\cdot X^2 + 0\cdot 1 + 0\cdot X
\end{aligned}$$

de unde rezultă

$$[\varphi]_{u,v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix} \text{ şi } [\varphi]_{u,v'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

c) Fie K un corp comutativ, $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi $A \in M_{m,n}(K)$ iar e baza canonică a lui K^n şi e' baza canonică a lui K^m. Scriind vectorii din K^n şi K^m sub formă de matrice coloane se verifică uşor că

$$f_A : K^n \to K^m,\ f_A(x_1, \dots , x_n) = A \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

este o transformare liniară şi $[f_A]_{e,e'} = A$.

Teorema 4. Fie K un corp comutativ, V, V', V'' K-spaţii vectoriale, $f : V \to V'$, $f' : V \to V'$, $g : V' \to V''$ transformări liniare şi $\alpha \in K$.
1) Dacă $u = (u_1, \dots , u_n)$ şi $v = (v_1, \dots , v_m)$ sunt baze în V, respectiv V', atunci

$$[f + f']_{u,v} = [f]_{u,v} + [f']_{u,v} \text{ şi } [\alpha f]_{u,v} = \alpha[f]_{u,v}. \tag{5}$$

$(f+f')(x)=f(x)+f'(x)$

2) Dacă $w = (w_1, \dots , w_p)$ este o bază a lui V'', atunci

$$[g \circ f]_{u,w} = [g]_{v,w} \cdot [f]_{u,v}. \tag{6}$$

Demonstraţie. 1) Dacă $[f]_{u,v} = (\alpha_{ij})$, $[f']_{u,v} = (\alpha'_{ij})$ atunci

$$(f + f')(u_j) = f(u_j) + f'(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}v_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha'_{ij}v_i = \sum_{i=1}^{m}(\alpha_{ij} + \alpha'_{ij})v_i ,$$

$\forall j=\overline{1,m} \Rightarrow$

$\Rightarrow [f+f']_{uv}=[f]_{uv}+[f']_{uv}$

şi

$$(\alpha f)(u_j) = \alpha f(u_j) = \alpha \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}v_i = \sum_{i=1}^{m}(\alpha\alpha_{ij})v_i$$

ceea ce demonstrează egalităţile (5).

$(\alpha f)(x)=\alpha\cdot f(x)$

2) Fie $[g]_{v,w} = (b_{ij})$. Folosind comutativitatea lui K avem

$$(g \circ f)(u_j) = g(f(u_j)) = g\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_{kj} v_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kj} g(v_k) = \overbrace{\sum_{k=1}^{m} \alpha_{kj} \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \beta_{ik} w_i}_{g(v_k)}} = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{m} \beta_{ik}\alpha_{kj}\right) w_i,$$

de unde rezultă (6).

Corolarul 5. a) Aplicaţia

$$\varphi : Hom_K(V, V') \to M_{m,n}(K),\ \varphi(f) = [f]_{u,v}$$

este un izomorfism de K-spaţii vectoriale.

Într-adevăr din (5) urmează că φ este o transformare liniară, iar din proprietatea de universalitate a spaţiilor vectoriale rezultă că φ este bijectivă. Deci φ este izomorfism.

b) Aplicaţia

$$\varphi : End_K(V) \to M_n(K),\ \varphi(f) = [f]_u$$

este un izomorfism de K-spaţii vectoriale şi de inele.

Într-adevăr, din a) urmează că φ este un izomorfism de K-spaţii vectoriale, iar din prima egalitate din (5) şi din (6) rezultă că φ este un izomorfism de inele.

c) Aplicaţia

$$\varphi' : Aut_K(V) \to GL_n(K),\ \varphi'(f) = [f]_u$$

este un izomorfism de grupuri.

Această afirmaţie rezultă din b) şi din faptul că un izomorfism între două inele cu unitate păstrează elementele inversabile.

d) Dacă $u = (u_1, \ldots, u_n)$ este o bază a lui V şi $u'_1, \ldots, u'_n \in V$, atunci $u' = (u'_1, \ldots, u'_n)$ este o bază a lui V dacă şi numai dacă există o matrice inversabilă $S = (s_{ij}) \in M_n(K)$ unic determinată (numită matricea de trecere de la baza u la baza u') astfel încât

$$u'_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} u_i \ (j = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

adică

$$(u'_1, \ldots, u'_n) = (u_1, \ldots, u_n) \cdot S.$$

Într-adevăr, dacă $f : V \to V$ este endomorfismul definit pe baza u prin $f(u_j) = u'_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, atunci din (7) rezultă $S = [f]_u$. Deci u' este o bază dacă şi numai dacă f este un izomorfism ceea ce este echivalent cu S inversabilă. Acum, unicitatea lui S rezultă din bijectivitatea lui φ.

e) Dacă S este matricea de trecere de la baza $u = (u_1, \ldots, u_n)$ la baza $u' = (u'_1, \ldots, u'_n)$, atunci S^{-1} este matricea de trecere de la baza u' la baza u.

f) Fie $u = (u_1, \ldots, u_n)$ şi $u' = (u'_1, \ldots, u'_n)$ baze ordonate ale K-spaţiului vectorial V şi $S = (s_{ij})$ matricea de trecere de la u la u'. Dacă $x \in V$ şi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ respectiv $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ sunt coordonatele lui x în baza u respectiv u', atunci

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \alpha'_j \ (i = 1, \ldots, n), \tag{8}$$

Într-adevăr din (7) rezultă că S este matricea lui 1_V în perechea de baze (u', u) ceea ce conform lui (4) implică (8).

Teorema următoare ne dă legea de dependenţă a matricei $[f]_{u,v}$ de perechea de baze ordonate (u, v).

Teorema 6. Fie $u = (u_1, \ldots, u_n)$ şi $u' = (u'_1, \ldots, u'_n)$, respectiv $v = (v_1, \ldots, v_m)$ şi $v' = (v'_1, \ldots, v'_m)$ baze ale K-spaţiului vectorial V, respectiv V'. Dacă S este matricea de trecere de la u la u' şi T este matricea de trecere de la v la v', atunci

$$[f]_{u',v'} = T^{-1} \cdot [f]_{u,v} \cdot S. \tag{9}$$

Demonstraţie. Aşa cum am văzut (în demonstraţia Corolarului 5 f)) S coincide cu matricea lui 1_V în perechea de baze (u', u). Întrucât T este matricea de trecere de la v la v' rezultă că T^{-1} coincide cu matricea lui $1_{V'}$ în (v, v'). Acum din $f = 1_{V'} \circ f \circ 1_V$ şi din (6) deducem pe (9).

Corolarul 7. Fie $u = (u_1, \ldots, u_n)$ şi $u' = (u'_1, \ldots, u'_n)$ baze ale K-spaţiului vectorial V, S este matricea de trecere de la u la u' şi $f : V \to V$ este un endomorfism. Atunci

$$[f]_{u'} = S^{-1} \cdot [f]_u \cdot S.$$