Seminar 5

29 octombrie 2020

Secțiunea unei relații după o submulțime

Fie $\rho = (A, B, R)$, $R \subseteq A \times B$ o relație binară și $X \subseteq A$.

$$\rho(X) = \{ b \in B \mid \exists x \in X \text{ a.î. } x \rho b \} \subseteq B.$$

Fie $Y \subseteq B$.

$$\rho^{-1}(Y) = \{ a \in A \mid \exists y \in Y \text{ a.î. } y \rho^{-1} a \} \subseteq A$$

retracție

$$\Updownarrow$$

$$a \rho y.$$

32 Fie mulțimile $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, $X = \{a_2, a_4\}$, $Y = \{b_1, b_2, b_4, b_5\}$ și considerăm relația $R = \{(a_1, b_2), (a_3, b_5), (a_1, b_3), (a_2, b_4)\} \subseteq A \times B$. Să se det. mulț. $R(X)$, $R\langle a_2 \rangle$, $R^{-1}(Y)$, $R^{-1}\langle b_5 \rangle$, $R^{-1}(B)$ și $R(A)$.

Soluție:

$R(X) = \{b_4\}$

$R\langle a_2 \rangle = \{b_4\}$

$R^{-1}(Y) = \{a_1, a_2, a_3\}$

$R^{-1}\langle b_5 \rangle = \{a_3\}$

$R^{-1}(B) = \{a_1, a_2, a_3\}$

$R(A) = \{b_2, b_3, b_4, b_5\}$

(33) Fie $\delta = (\mathbb{N}, \mathbb{N}, |)$ relația de divizibilitate.
Să se det. mult. $\delta\langle 1\rangle$, $\delta^{-1}(\{4,9\})$, $\delta^{-1}(\mathbb{N})$ și $\delta(\mathbb{N})$.

Soluție: $\delta\langle 1\rangle = \{b \in \mathbb{N} \mid 1 | b\} = \mathbb{N}$

$$\delta^{-1}(\{4,9\}) = \{a \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \{4,9\} \text{ a.î. } a | y\}$$
$$= \{a \in \mathbb{N} \mid a | 4 \text{ sau } a | 9\}$$
$$= \{1, 2, 4, 3, 9\}.$$

$$\delta^{-1}(\mathbb{N}) = \{a \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \text{ a.î. } a | y\} = \mathbb{N}$$

$$\delta(\mathbb{N}) = \{b \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} \text{ a.î. } x | b\} = \mathbb{N}.$$

$\boxed{Ex\ 34/pg\ 28}$ Fie $\rho = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x^2+y^2=1\}$.

a) Dc $X=[-2,\frac{1}{2}]$ și $Y=[-\frac{1}{2},1]$ det $\rho(X\cap Y)$ și $\rho(X)\cap\rho(Y)$

Soluție:

a) • $X\cap Y=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

$\rho(X\cap Y)=\{b\in\mathbb{R} \mid \exists x\in X\cap Y$ ai $x\rho b\}$.

Fie $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ ai $x\rho b \Leftrightarrow x^2+b^2=1$
și $b\in\mathbb{R}$

$-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0\leq x^2\leq\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\leq -x^2\leq 0 \mid +1 \Leftrightarrow \frac{3}{4}\leq 1-x^2\leq 1 \Leftrightarrow$

$\frac{3}{4}\leq b^2\leq 1 \Leftrightarrow b\in[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{3}}{2},1]$

Așadar $\rho(X\cap Y)=[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{3}}{2},1]$.

• $\rho(X)=\{b\in\mathbb{R} \mid \exists x\in X=[-2,\frac{1}{2}]$ ai $x\rho b\}$.

Fie $x\in[-2,\frac{1}{2}]$ ai $x\rho b \Leftrightarrow x^2+b^2=1 \Rightarrow b\in[-1,1]$.
$b\in\mathbb{R}$

$-2\leq x\leq\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0\leq x^2\leq 4 \Leftrightarrow -4\leq -x^2\leq 0 \Leftrightarrow -3\leq 1-x^2\leq 1 \Leftrightarrow$

$-3\leq b^2\leq 1 \Leftrightarrow b\in[-1,1] \Rightarrow \rho(X)=[-1,1]$.

• $\rho(Y)=\{b\in\mathbb{R} \mid \exists y\in Y=[-\frac{1}{2},1]$ ai $y\rho b\}$.

Fie $y\in[-\frac{1}{2},1]$ ai $y\rho b \Leftrightarrow y^2+b^2=1 \Rightarrow b\in[-1,1]$
$b\in\mathbb{R}$

$-\frac{1}{2}\leq y\leq 1 \Leftrightarrow 0\leq y^2\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq -y^2\leq 0 \Leftrightarrow 0\leq 1-y^2\leq 1$

$\Leftrightarrow 0\leq b^2\leq 1 \Leftrightarrow b\in[-1,1] \Rightarrow \rho(Y)=[-1,1]$.

• Așadar $\rho(X)\cap\rho(Y)=[-1,1]\cap[-1,1]=[-1,1]$

$\square$

b) Dacă $\rho' = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x > 2\}$ şi $X = (0,3)$ să se determine mulţimile $(\rho \cap \rho')(X)$ şi $\rho(X) \cap \rho'(X)$.

b) $\rho \cap \rho' = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid \underbrace{x^2+y^2=1}_{\Downarrow} \text{ şi } x > 2\}$

$x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow \rho \cap \rho' = \emptyset \Rightarrow (\rho \cap \rho')(X) = \emptyset$.

Calculăm acum $\rho(X) \cap \rho'(X)$.

$\rho(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in X \text{ a.î. } x^2+y^2=1\}$.

$$\left.\begin{array}{l} x \in X \Rightarrow x \in (0,3) \\ x^2+y^2=1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \in (0,1] \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow y \in (-1,1)$$

$\Downarrow$

$\rho(X) = (-1,1)$.

$\rho'(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \underset{(0,3)}{X} \text{ a.î. } \underbrace{x\rho' y}_{x>2}\} = \mathbb{R}$

Aşadar $\rho(X) \cap \rho'(X) = (-1,1) \cap \mathbb{R} = (-1,1)$.

(35) Fie $\rho = (A, B, R)$ și $\rho' = (A, B, R')$ relații și fie $X, X' \subseteq A$.

Să se demonstreze:

a) dacă $X \subseteq X'$ și $\rho \subseteq \rho'$, atunci $\rho(X) \subseteq \rho'(X')$

b) $\boxed{\rho(X \cup X') = \rho(X) \cup \rho(X')}$ $\quad (\rho \cup \rho')(X) = \rho(X) \cup \rho'(X)$

c) $\rho(X \cap X') \subseteq \rho(X) \cap \rho(X')$ $\quad (\rho \cap \rho')(X) \subseteq \rho(X) \cap \rho'(X)$.

Soluție: b) Fie $b \in \rho(X \cup X') \Longleftrightarrow \exists a \in X \cup X'$ a.î. $a \rho b$

$\Longleftrightarrow \exists a \in A$ cu $(a \in X$ sau $a \in X')$ și $a \rho b$.

$\xleftrightarrow{\text{distrib}} \exists a \in A$ a.î. $(a \in X$ și $a \rho b)$ sau $(a \in X'$ și $a \rho b)$

$\xleftrightarrow{\exists x (A \text{ sau } B) \Leftrightarrow \exists x A \text{ sau } \exists x B} (\exists a \in A$ a.î. $a \in X$ și $a \rho b)$ sau

$(\exists a \in A$ a.î. $a \in X'$ și $a \rho b) \Longleftrightarrow$

$(\exists a \in X$ a.î. $a \rho b)$ sau $(\exists a \in X'$ a.î. $a \rho b)$

$\Longleftrightarrow b \in \rho(X)$ sau $b \in \rho(X') \Longleftrightarrow b \in \rho(X) \cup \rho(X')$.

(37) Fie $f=(A,B,R)$ o relație. S.o.a.c urm. afirm. sunt echivalente:

(i) $\forall x \in A, |R\langle x\rangle| \leq 1$

(ii) $R \circ R^{-1} \subseteq \Delta_B$

(iii) $\forall$ mult B', $\forall$ relațiile $S_1, S_2 \subseteq B \times B'$ avem:

$$(S_1 \cap S_2) \circ R = (S_1 \circ R) \cap (S_2 \circ R)$$

...

Soluție: Pp. că $R \circ R^{-1} \subseteq \Delta_B$. Fie o mult B' și relațiile $S_1, S_2 \subseteq B \times B'$. Vrem $\underset{B}{(S_1 \cap S_2)} \circ R = \underset{B'\ A\ B}{(S_1 \circ R) \cap (S_2 \circ R)}$.

Fie $(a, b') \in A \times B'$.

$a (S_1 \cap S_2) \circ R\, b' \iff \exists x \in B \cap B$ a.î. aRx și $x\, S_1 \cap S_2\, b'$

$\iff \exists x \in B \cap B$ a.î. aRx și $(x S_1 b'$ și $x S_2 b')$

$a (S_1 \circ R) \cap (S_2 \circ R) b' \iff a S_1 \circ R\, b'$ și $a S_2 \circ R\, b'$

$\iff (\exists x \in B \cap B$ a.î. $a\underline{Rx}$ și $x S_1 b')$ și

$(\exists x \in B \cap B$ a.î. $a\underline{Rx}$ și $x S_2 b')$

↖ aceste x-uri pot să difere

Dar dacă aRx și $aRy \Rightarrow xR^{-1}a$ și aRy

$\Rightarrow x\, R \circ R^{-1}\, y$, dar $R \circ R^{-1} \subseteq \Delta_B \Rightarrow x \Delta_B y \Rightarrow x = y$.

Prin urmare cele 2 x-uri trebuie să coincidă.

Așadar $a(S_1 \circ R) \cap (S_2 \circ R) b' \iff$

$\exists x \in B \cap B$ a.î. $(aRx$ și $xS_1b')$ și $(aRx$ și $xS_2b')$

$\overset{\text{asoc, com, idemp}}{\iff} \exists x \in B \cap B$ a.î. aRx și xS_1b' și xS_2b'

$\iff a(S_1 \cap S_2) \circ R\ b'$

Prin urmare rel. este adev. $\square$

Restul temă + ex. 36, 38, 39.

$*$ (iii) $\to$ (ii) Vrem $R \circ R^{-1} \subseteq \Delta_B$.

Fie $(b_1, b_2) \in B \times B$ a.î. $b_1 R \circ R^{-1} b_2$. Vrem $b_1 \Delta_B b_2 \iff b_1 = b_2$.

$$\Downarrow$$

$$\exists x \in A \cap A = A \text{ a.î. } b_1 R^{-1} x \text{ și } xRb_2$$

$$\Updownarrow$$

$$xRb_1.$$

În (iii) alegem $B' = A$, $S_1 = \{(b_1, x)\}$ și $S_2 = \{(b_2, x)\}$

Pp. RA că $b_1 \neq b_2 \Rightarrow S_1 \cap S_2 = \emptyset \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \circ R = \underline{\emptyset}$

$\| \text{ cf. (iii)}$

$S_1 \circ R = \underset{\text{știm } (x, b_1)}{\{(b_1, x)\} \circ R} \ni (x, x)$

$S_2 \circ R = \underset{\text{știm } (x, b_2)}{\{(b_2, x)\} \circ R} \ni (x, x)$

$\Rightarrow \underline{(x, x) \in} (S_1 \circ R) \cap (S_2 \circ R)$

contradicție

Așadar $b_1 = b_2 \Rightarrow b_1 \Delta_B b_2 \Rightarrow R \circ R^{-1} \subseteq \Delta_B$.

(40) Fie $R \subseteq A \times B$, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$. S.s.a.c

a) $X \subseteq R^{-1}(B) \iff X \subseteq R^{-1}(R(X))$

b) $Y \subseteq R(A) \iff Y \subseteq R(R^{-1}(Y))$. (temă)

Soluție: a) „$\Rightarrow$". Pp. $X \subseteq R^{-1}(B)$.

Vrem. $X \subseteq R^{-1}(R(X))$.

Fie $a \in X$. Vrem $a \in R^{-1}(R(X))$.

$\Downarrow$ ip

$a \in R^{-1}(B) \Rightarrow \exists b \in B$ a.î. aRb

$\Downarrow$

$bR^{-1}a$

$\left.\begin{array}{l} a \in X \\ aRb \end{array}\right| \Rightarrow \underline{b \in R(X)}$ $\Rightarrow a \in R^{-1}(R(X))$.

„$\Leftarrow$". Pp. $X \subseteq R^{-1}(R(X))$. Vrem. $X \subseteq R^{-1}(B)$

Fie $a \in X$. Vrem. $a \in R^{-1}(B)$

$\Downarrow$ ip.

$a \in R^{-1}(R(X)) \Rightarrow \exists b \in R(X)$ a.î. $bR^{-1}a$.

$R(X) \subseteq B$ și $b \in R(X) \Rightarrow b \in B$ $\Bigg| \Rightarrow a \in R^{-1}(B)$.

$\square$