Topologie pe R

Exerciţiul 1

închisă

Completaţi umătorul tabel, folosind ✓ atunci când mulţimea este închisă şi ✗ atunci când ea nu este închisă :

$(-1,2]$	$(-1,1)$	$[-1,1]$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$	$\{1,2,3\}$	$\mathbb{R}\setminus(0,1)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
✗	✗	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✗	✓

Argumentaţi (demonstraţi) fiecare afimaţie folosind rezultatele teoretice de la curs.

Exerciţiul 2

Specificaţi caracterul umătoarelor mulţimi (deschise sau închise) cu demonstaţii.

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} \left(-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right), \quad B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$$

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} \left(-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) \quad D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$$

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right] \quad D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$$

Exerciţiul 3

Completaţi umătorul tabel, folosind ✓ atunci când mulţimea este vecinătate a lui -1 şi ✗ atunci când ea nu este :

$(-1,2]$	$(-2,1)$	$[-1,1]$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$	Z	$\mathbb{R}\setminus(-1,0)$	$\mathbb{Q}$
✗	✓	✗	✓	✗	✗	✗

Argumentaţi (demonstraţi) fiecare afimaţie folosind rezultatele teoretice de la curs.

Temă 1 - Topologie pe $\mathbb{R}$

Demonstrații, completări

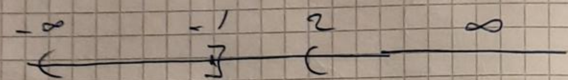
Ex 1

$(-1,2]$ nu e deschisă pt că

$\nexists r_2$ a.î. $B(2, r_2) \subseteq (-1,2]$

nu e închisă pt că $(-\infty,-1] \cup (2,\infty)$

nu e deschisă $\nexists r_{-1}$ a.î. $B(-1, r_{-1}) \subseteq (-\infty,-1] \cup (2,\infty)$



$\mathbb{R}\setminus\{1\} = (-\infty,1)\cup(1,\infty)$

- orice reuniune de mulțimi deschise rămâne deschisă

$\mathbb{R}\setminus(0,1) = (-\infty,0]\cup[1,\infty)$

nu e deschisă pt că $\nexists r_0$ a.î. $B(0,r_0)\subseteq \mathbb{R}\setminus(0,1)$

Complementara: $(0,1)$ deschisă =>

=> închisă.

$\mathbb{Z}$ - mulțime discretă => închisă

$\mathbb{Q}$ nici, nici

Presupunem că e deschisă =>

=> - $\exists r_x$ aî ~~B(r_x~~, $B(x, r_x) \subseteq \mathbb{Q}$

- x arbitrar ales

Pentru că oricum am lua x, vom găsi elemente $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, avem o contradicție

=> nu e deschisă

complementara $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nici nici =>

=> nu e închisă $\mathbb{Q}$

Ex2

A - reuniune de deschise => A deschisă

la rem. $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$

$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} \left(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$

$n = 2 \left(-1 + \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$n = 3 \left(-1 + \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$n = 4 \left(-1 + \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ =>

$\Rightarrow C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Dem că $C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

„$\subseteq$" evident

„$\supseteq$" fie $x \in C \Rightarrow -1+\frac{1}{n} < x < 1-\frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N} - \{1\}$

$\Rightarrow |x| < 1-\frac{1}{n} \quad \Big| \lim_{n\to\infty}$

$\lim_{n\to\infty} |x| < \lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} |x| < 1-\frac{1}{\infty}$

$|x| < 1 \qquad -1 \leq x < 1$

$C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ deschisă

$D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$

Analog ca la c) $D = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

D e închisă

$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$

$n=1 \Rightarrow [-2, 2]$ $\qquad n=3 \Rightarrow \left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right] \Leftrightarrow$

$n=2 \Rightarrow \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ $\qquad n=4 \Rightarrow [$

=> interv. se micșorează =>

=> $E = [-2, 2]$ => E e închisă.

Dem că $E = [-2, 2]$

"$\subseteq$" evid.

"$\supseteq$" fie $x \in E$ => $-1-\frac{1}{n} < x < 1+\frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} -1-\frac{1}{n} < x < \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n}$$

$$-1 < x < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \subseteq [-2, 2]$$

$$F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$$

$F = \{0\}$ => F închisă

Ex 3

$[-1, 1]$ nu e vec a lui -1

Presupunem că $[-1, 1]$ e vec =>

=> $\exists\, r_{-1}$ a.î. $B(-1, r_{-1}) \subseteq [-1, 1]$ =>

=> $-1 - r_{-1} < -1 < -1 + r_{1}$

r_{-1} nu poate fi $\neq 0$ => contrad.

$\mathbb{Z}$ mulț. discretă => nu e vec.

$\mathbb{R} \setminus (-1,0) = (-\infty,-1] \cup [0,\infty)$

nu e vec, ~~pt~~

Ex 4

1. $A = (-\infty,-1] \cup (2,\infty)$

$\text{int}\, A = (-\infty,-1) \cup (2,\infty)$ cea mai mare mulț. deschisă $\{x \in \mathbb{R} \mid A \in V(x)\}$

$\text{bd}\, A = \{-1,2\}$

- bilele de centru $-1, 2$ au vecinătăți și în A și în $\mathbb{R} \setminus A$

$\text{cl}\, A = (-\infty,-1] \cup [2,\infty)$ cea mai mică mulț. închisă care cuprinde A

$\text{ext}\, A = (-1,2) = \text{int}(\mathbb{R} \setminus A)$

$\text{Izo}\, A = \emptyset$ pt că $\nexists$ ~~$V(x)$~~ $V \in \mathcal{V}(x)$ aî $V \cap A = \emptyset$

$A' = \text{cl}\, A \setminus \text{Izo}\, A$

- Nu știu momentan demonstrații matematice

Excercițiul 4 Completați umatorul tabel şi argumentați (demonstrați) structura acestor mulțimi pentru exemplele 1,3,5,6,9,11 folosind rezultatele teoretice de la curs:

Nr.	A	int A	bd A	cl A	ext A	Izo A	A'
1	$(-\infty,-1]\cup(2,+\infty)$	$(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$	$\{-1,2\}$	$(-\infty,-1]\cup[2,\infty)$	$(-1,2)$	$\emptyset$	$(-\infty,-1]\cup[2,\infty)$
2	$(-1,9]\cup[10,20)$	$(-1,9)\cup(10,20)$	$\{-1,9,10,20\}$	$[-1,9]\cup[10,20]$	$(9,10)$	$\emptyset$	$[-1,9]\cup[10,20]$
3	$((-1,9]\cup[10,20))\cap\mathbb{N}$	$\emptyset$	$((-1,9]\cup\{10,20))\cap\mathbb{N}$	$((-1,9]\cup[10,20))\cap\mathbb{N}$	$(-\infty,1)\cup(2,3)\cup\ldots\cup(10,20)$	$([-1,9]\cup[10,20))\cap\mathbb{N}$	$\emptyset$
4	$\{1,2,3\}$	$\emptyset$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$(-\infty,1)\cup(2,3)\cup(3,\infty)$	$\{1,2,3\}$	$\emptyset$
5	$\mathbb{N}$	$\emptyset$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$\emptyset$
6	$\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$	$\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$
7	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$
8	$\mathbb{Z}$	$\emptyset$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\emptyset$
9	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$
10	$\mathbb{Q}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$
11	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$
12	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$