Seminar 12

1. Integrale din funcții trigonometrice

Fie I o integrală de tipul $\int R(\sin x, \cos x)dx$ unde $R(u,v)$ e o funcție rațională de 2 variabile.
Uneori $tg\frac{x}{2} = t$ duce la calcule dificile. $\Rightarrow$

putem folosi substituțiile următoare:

(i) dacă $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$
$\cos x = t$.

(ii) dacă $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$
$\sin x = t$

(iii) dacă $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$
$tg\, x = t$.

! Obs 1: Substituția $tg\frac{x}{2} = t$ e recomandată dacă nu ne aflăm în cazurile i, ii sau iii!

Reamintim: 1. Dacă $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

□

2. Dacă $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = t^2 \;\Big|\downarrow + \Rightarrow$

$$\frac{\sin^2 x}{\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1}} = \frac{t^2}{1+t^2} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \Rightarrow$$

$$\sin x = \pm\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \text{ analog } \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Cum $x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$

□

Exemple:

① Calculați:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}\,dx.$

În acest caz $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\cos(x)}{2-\cos^2(x)}$

ne încadrăm în (ii)!

$\Rightarrow R$ e impară în cos $\Rightarrow$ facem subst $\sin x = t \Rightarrow$

$\cos x \, dx = dt \Rightarrow$

I devine $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{2-(1-t^2)} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}.$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx$

Avem $R(\sin x, \cos x) = \sin^2 x \cdot \cos^3 x$. $\Rightarrow$ tot cazul

ii $\Rightarrow$

Fie $\sin x = t \Rightarrow \cos x \, dx = dt \Rightarrow$ I devine

$$I = \int_0^1 t^2(1-t^2)\,dt = \int_0^1 t^2 - t^4 \, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}.$$

$R(-\sin x, \cos x) = \sin^2 x \cdot \cos^3 x$

$-R(\sin x, \cos x) = -\sin^2 x \cdot \cos^3 x$

NU sunt egale

$\Rightarrow$ NU ne aflăm în cazul (i).

c) Fie $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x}\,dx.$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x} \Rightarrow \text{cazul (iii)!} \Rightarrow$$

Facem subst $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$,

$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \Rightarrow I$ devine

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+t^4+2t^2}{t^4}\, dt$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t^4} + 1 + \frac{2}{t^2} \right) dt$$

$$= \left. \frac{t^{-3}}{-3} + t \cancel{+} - \frac{2}{t} \right|_1^{\sqrt{3}} = \dots \quad \checkmark$$

$\square$

Obs: De obicei substituția noastră e de forma $f(x) = t \Rightarrow f'(x)dx = dt$.

Dacă $x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)dt$ $\square$

Obs 2: Fie $I = \int_a^b f(x)dx$. Efectuăm substituția $g(x) = t \Rightarrow I$ devine $\int_{g(a)}^{g(b)} f(g^{-1}(t))dt$ $\square$

Alte subst. trigonometrice:

(i) dacă integrala conține $\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x = a\sin y$ sau $x = a\cos y$.

(ii) — " — $\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow x = a\,tg\,y$ sau $x = a \cdot ctg\,y$.

Dacă $x = a\,tg\,y \Rightarrow \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2\left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)} = |a| \cdot \frac{1}{|\cos x|}$

(iii) — " — $\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow x = \frac{a}{\sin t}$; $x = \frac{a}{\cos t}$.

Ex: $I = \int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx$ □

2. Substituțiile lui Euler

Fie $I = \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ o integrală unde R e o funcție rațională. Atunci se recomandă substituțiile:

(i) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x \cdot \sqrt{a} \pm t$, $a > 0$

(ii) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm tx \pm \sqrt{c}$ $c \geq 0$

(iii) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_1)$ dacă $\Delta \geq 0$

unde x_1 e o rădăcină reală a eq.

$ax^2+bx+c=0$. □

Exemple:

Fie $I = \int_1^2 \frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$. Calculați I.

Soluție:

Fie $R(x, \sqrt{x^2-x+1}) = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

Cum $a = 1 > 0 \Rightarrow$ putem face o substituție de tipul I. $\Rightarrow$

Fie $\boxed{x+\sqrt{x^2-x+1} = t}$ (*) (i) subst de primul tip

$\Rightarrow \sqrt{x^2-x+1} = t - x \quad |^2 \Rightarrow$

$\cancel{x^2} - x + 1 = t^2 - 2tx + \cancel{x^2} \Rightarrow$

$1 - x = t^2 - 2tx \Rightarrow$

$1 - t^2 = x - 2tx \Rightarrow$

$\dfrac{1-t^2}{1-2t} = x$ sau $x = \dfrac{t^2-1}{2t-1} \Rightarrow$

$dx = \left(\dfrac{t^2-1}{2t-1}\right)' dt$ adică

$$dx = \frac{2t(2t-1) - 2(t^2-1)}{(2t-1)^2} dt \Rightarrow$$

$$dx = \frac{4t^2 - 2t - 2t^2 + 2}{(2t-1)^2} dt \Rightarrow$$

$$dx = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(2t-1)^2} dt \Rightarrow$$

integrala noastră devine:

$$I = \int_{2}^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{t} \cdot \frac{2t^2 - 2t + 2}{(2t-1)^2} dt$$

Cum $x + \sqrt{x^2 - x + 1} = t \Rightarrow$

$x = 1 \Rightarrow \quad 1 + 1 = t \Rightarrow 2 = t$

$x = 2 \Rightarrow \quad 2 + \sqrt{4 - 2 + 1} = 2 + \sqrt{3} = t$

$\Rightarrow$

Deci am obținut că

$$I = \int_2^{2+\sqrt{3}} \frac{2t^2 - 2t + 2}{t(2t-1)^2}\,dt = I_1 + I_2 + I_3$$

unde:

$$I_1 = \int_2^{2+\sqrt{3}} \frac{2t}{(2t-1)^2}\,dt \;;\; I_2 = \int_2^{2+\sqrt{3}} \frac{-2}{(2t-1)^2}\,dt$$

$$I_3 = \int_2^{2+\sqrt{3}} \frac{2}{t(2t-1)^2}\,dt.$$

Soluții pt I_j, $j=\overline{1,3}$:

$$I_2 = \int_2^{2+\sqrt{3}} \frac{-2}{(2t-1)^2}\,dt = \left.\frac{1}{2t-1}\right|_2^{2+\sqrt{3}} \checkmark$$

$$I_1 = \int_2^{2+\sqrt{3}} \frac{2t}{(2t-1)^2}\,dt = \int_{\cdots}^{\cdots} \frac{2t-1+1}{(2t-1)^2}\,dt$$

$$= \int_{\cdots}^{\cdots} \frac{1}{2t-1}\,dt + \left.\int_{\cdots}^{\cdots} \frac{1}{(2t-1)^2}\,dt\right\}\text{ exact a } I_1$$

$$\frac{\ln(2t-1)}{2}$$

$$I_3 = \int_2^{2+\sqrt{3}} \frac{2}{t(2t-1)^2}\,dt = ?$$

Căutăm $A, B, C \in \mathbb{R}$:

$$\frac{2}{t(2t-1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2t-1} + \frac{C}{(2t-1)^2}.$$

(Metoda coef. nedeterminați)

După I_3 e simplu.

În final avem I. $\square$

Ex:

Fie $I = \int_5^{10} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2-5x+4}}$. Calculați I.

Soluție:

Vom folosi substituțiile lui Euler:

Fie $\sqrt{x^2-5x+4} = t(x-1) \quad |^2$

$$t^2 = \frac{x-4}{x-1} \Rightarrow x = \frac{t^2-4}{t^2-1} \Rightarrow$$

$$dx = \left(\frac{t^2-4}{t^2-1}\right)' dt = \frac{6t}{(t^2-1)^2} dt \Rightarrow$$

integrala devine

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{54}}{9}} \frac{\frac{6t}{(t^2-1)^2}}{\frac{t^2-4}{t^2-1} \cdot t} dt$$

$$= \int_{\dots}^{\dots} \frac{6}{(t^2-4)(t^2-1)} dt. \text{ Cum}$$

$$\frac{6}{(t^2-4)(t^2-1)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{t+1}$$

$A, B, C, D \in \mathbb{R} \Rightarrow$ ultima integrală se rezolvă cu metoda coeficienților nedeterminați.

Se finalizează exercițiul!