

Șiruri de numere reale - partea 1

Exercițiul 1: Studiați monotonia, mărginirea și convergența șirului de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cu termenul general:

$$a) \quad x_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n}, \quad b) \quad x_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad c) \quad x_n = \frac{2^n}{n!}, \quad d) \quad x_n = \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Exercițiul 2: Folosind teorema de caracterizare cu ε demonstrați că

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} = 0 \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{-2n + 4} = -\infty.$$

Exercițiul 3: Calculați limitele următoarelor șiruri de numere reale având următorii termeni generali:

$$a) \quad \frac{5^n + 1}{7^n + 1}, \quad b) \quad \frac{4^n + (-2)^n}{4^{n-1} + 2}, \quad c) \quad \left(\sin \frac{\pi}{10}\right)^n, \quad d) \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n,$$

$$e) \quad \left(5 + \frac{1 - 2n^3}{3n^4 + 2}\right)^2, \quad f) \quad \sqrt[3]{n^3 + n + 3} - \sqrt[3]{n^3 + 1}, \quad g) \quad \left(\frac{n^3 + 5n + 1}{n^2 - 1}\right)^{\frac{1-5n^4}{6n^4+1}},$$

$$h) \quad \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Exercițiul 4: Fie $t \in \mathbb{R}$.

- a) Demonstrați că există un șir strict crescător de numere raționale care are ca limită t .
- b) Demonstrați că există un șir strict descrescător de numere raționale care are ca limită t .

Exercițiul 5: Fie $a > 0$ și $x_0 \in \mathbb{R}$ fie a.î. $0 < x_0 < \frac{1}{a}$. Considerați șirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit recursiv prin:

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Studiați convergența șirului urmând etapele:

- a) Demonstrați prin inducție că $x_n < \frac{1}{a}, \forall n \in \mathbb{N}$.
- b) Demonstrați prin inducție că $0 < x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
- c) Folosind a) și b) demonstrați că $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict crescător.
- d) Calculați valoarea limitei.