26. Se dă triunghiul cu vîrfurile $A(7, 0)$, $B(4, 4)$, $C(-1, -8)$. Să se afle coordonatele piciorului bisectoarei BB' a triunghiului.

[Se ține seama de raportul în care bisectoarea împarte latura opusă. $B'\left(\frac{43}{9}, -\frac{20}{9}\right)$.]

27. Se dau punctele $A(5, 1)$, $B(3, 5)$, $C(-3, 2)$, $D(-1, -2)$. Se iau apoi punctele M și N, astfel ca ele să împartă în același raport k segmentele orientate $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$. Să se arate că oricare ar fi raportul k, mijlocul segmentului $\overline{MN}$ este fix. Să se explice geometric proprietatea.

[$x = 1$, $y = \frac{3}{2}$. Dreapta MN trece prin centrul paralelogramului $ABCD$.]

28. Să se arate că figura formată de punctele $A\left(a\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$, $B\left(\frac{a-b}{2}, b\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(a\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$, $D\left(\frac{a+b}{2}, b\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ este romb; a, b sînt două numere reale oarecare.

[Mijloacele diagonalelor coincid și diagonalele sînt perpendiculare. *Altfel:* laturile sînt două cîte două paralele și toate sînt egale. Mai trebuie arătat că figura nu este pătrat, deci AB, AD nu sînt perpendiculare.]

29. Să se calculeze coordonatele mijlocului segmentului care unește mijloacele diagonalelor unui patrulater.

[Media aritmetică a coordonatelor vîrfurilor.]

30. Cunoscînd mijloacele laturilor BC, CA, AB, anume $D\left(\frac{5}{2}, 3\right)$, $E\left(0, \frac{5}{2}\right)$, $F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, să se calculeze coordonatele vîrfurilor.

[$A(-1, 1)$, $B(4, 2)$, $C(1, 4)$.]

Capitolul 2

Dreapta, diferite forme ale ecuației ei

1. Fie $M(x, y)$ un punct din planul xOy. Dacă dăm coordonatelor x și y valori la întîmplare, punctele rezultate vor fi împrăștiate în tot planul, fără nici o ordine. Pentru ca M să descrie o anumită curbă, va trebui să existe o legătură între cele două coordonate, astfel încît dacă se dă lui x (de ex.) o valoare, y să nu mai poată fi luat la întîmplare, ci să rezulte din valoarea lui x. Această legătură dintre coordonate se exprimă algebric printr-o ecuație cu două necunoscute $f(x, y) = 0$, din care se poate scoate uneori $y = g(x)$ sau $x = \varphi(y)$ (adică se ajunge în mod explicit la una sau mai multe funcții), ceea ce ușurează studiul și reprezentarea grafică, așa cum se face în analiza matematică.

În cele ce urmează vom căuta legătura ce trebuie să existe între coordonatele unui punct variabil, astfel încît el să descrie o *linie dreaptă*. Punctul variabil se mai numește și *punct curent* (lat.: currere = a alerga). Vom porni de la cazurile particulare și ne vom ridica apoi la cazul general.

A. Drepte particulare față de axele de coordonate

2. *Ecuația unei drepte paralelă la axa Oy.* Presupunem că $A(2, 0)$ este punctul unde o paralelă la Oy taie axa Ox, deci $\overline{OA} = 2$. Pe această paralelă considerăm mai multe puncte M, N, P etc. (fig. 8) și observăm că oricare ar fi ordonata lor, ele au toate aceeași abscisă $x = 2$. *Reciproc*, ecuația $x = 2$ nu conține pe y, deci pentru orice y, $x = 2$, dar toate punctele care au $x = 2$ sînt situate pe o paralelă la Oy (locul lor geometric) la distanța $OA = 2$. Prin urmare ecuația $x = 2$ caracterizează toate punctele situate pe această paralelă. Zicem că $x = 2$ este ecuația acestei paralele.

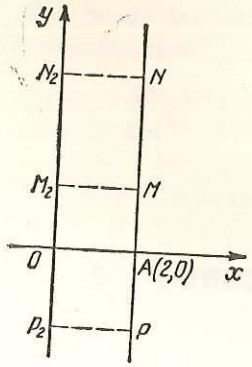

Fig. 8

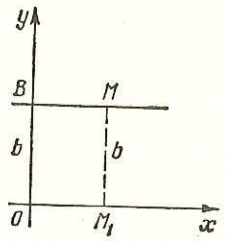

Fig. 9

Întemeiați pe același raționament putem spune că $x = a$ este ecuația unei paralele la Oy. Dacă $a > 0$ paralela se află la dreapta originii, dacă $a < 0$ este la stînga.

În particular $x = 0$ este ecuația axei Oy.

3. *Ecuația unei paralele la Ox.* Considerăm acum paralela MB la axa Ox, unde $B(0, b) \in Oy$ (fig. 9). Un raționament analog cu cel de mai înainte arată că toate punctele de pe această paralelă au $y = \overline{OB} = b$ și invers, că ecuația $y = b$ reprezintă locul geometric al tuturor punctelor care au distanța de b unități față de axa Ox. Zicem că $y = b$ este ecuația unei paralele la axa Ox. Dacă $b > 0$ paralela este situată deasupra originii, iar dacă $b < 0$ este sub origine.

În particular $y = 0$ este ecuația axei Ox.

Observare. Paralelele cu ecuațiile $x = a$ (la Oy) și $y = b$ (la Ox) au ca intersecție punctul $M(a, b)$.

4. *Direcția unei drepte; coeficient unghiular.* Dacă din punct de vedere geometric direcția unei drepte se poate da prin unghiul α pe care aceasta îl face cu sensul pozitiv al axei Ox, din punctul de vedere al geometriei analitice, pentru nevoile de calcul, direcția se dă prin una din funcțiile trigonometrice ale unghiului α. Cea mai des folosită este $\operatorname{tg}\alpha$, care se notează de obicei cu m (sau λ, μ etc.) și se numește *coeficientul unghiular* sau panta dreptei.

Pentru fixarea poziției unei drepte nu este suficient să cunoaștem direcția ei (coeficientul unghiular), ci mai trebuie un punct al dreptei. Cu aceste două elemente poziția dreptei este determinată.

5. *Ecuația unei drepte ce trece prin origine.* Dacă α este unghiul pe care îl face dreapta (D) cu sensul pozitiv al axei Ox, atunci elementele care determină dreapta sînt: *originea* și *coeficientul unghiular* (panta) $m = \operatorname{tg}\alpha$. Pentru a stabili ecuația dreptei (D) alegem un punct curent $M(x, y) \in (D)$ și căutăm legătura care există între coordonatele lui (§ 1). Fie M_1 proiecția lui M pe Ox, deci $OM_1 = x$, $M_1M = y$. Avem evident (fig. 10)

$$\frac{\overline{M_1M}}{\overline{OM_1}} = \operatorname{tg}\alpha = \text{constant}, \quad \text{adică} \quad \frac{y}{x} = m$$

sau

$$y = mx. \qquad (1)$$

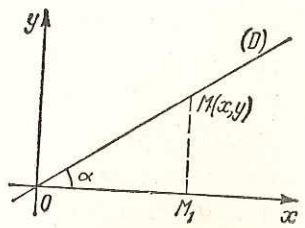

Fig. 10

Această ecuație de gradul I cu două necunoscute reprezintă legătura căutată între coordonatele (x, y) ale lui $M \in (D)$, deci este *ecuația dreptei* (D). Trebuie dovedit însă că și *reciproc*, ecuația $y = mx$ reprezintă o dreaptă ce trece prin origine și face cu axa Ox unghiul α, dat de $\operatorname{tg}\alpha = m$.

În adevăr, se vede imediat că originea $O(0, 0)$ verifică ecuația (1), deci este un punct al dreptei. Apoi din (1) se deduce $\frac{y}{x} = m$, adică raportul dintre ordonata și abscisa punctului M este constant. Dar din triunghiul dreptunghic OM_1M avem

$$\frac{y}{x} = \frac{\overline{M_1M}}{\overline{OM_1}}, \quad \text{deci} \quad \frac{\overline{M_1M}}{\overline{OM_1}} = m = \operatorname{tg}\alpha = \text{const.}$$

Rezultă că $\sphericalangle MOx = \alpha = \text{const.}$ În aceste condiții punctul nu poate descrie decît dreapta care trece prin origine și face unghiul α cu axa Ox.

Dacă $m > 0$, dreapta trece prin cadranele I și III, cînd $m < 0$ trece prin cadranele II și IV.

Așadar: ecuația $y = mx$ reprezintă o dreaptă ce trece prin origine și face cu Ox un unghi a cărui tangentă este m.

Cazuri particulare. a) Ecuația $y = x$ reprezintă bisectoarea primului și celui de-al treilea cadran, deoarece $m = \operatorname{tg}\varphi = 1$, deci $\varphi = 45°$ (sau $225°$). Se numește mai scurt prima bisectoare a axelor și se mai scrie sub forma $x - y = 0$.

Se obține același lucru pornind de la proprietatea că orice punct al bisectoarei este egal depărtat de laturile unghiului și ținînd seama că în cadranele I și III coordonatele sale sînt egale și de același semn.

b) Ecuația $y = -x$ sau $x + y = 0$ reprezintă bisectoarea cadranelor II și IV, deoarece $m = -1$, deci $\varphi = -45°$. Ea este a doua bisectoare a axelor. La fel se poate stabili ecuația ei pornind de la proprietatea geometrică a bisectoarei.

Exemple. a) *Ecuația* $y = \sqrt{3}\,x$ *este a unei drepte ce trece prin origine și face un unghi de* $60°$ *cu axa* Ox ($m = \sqrt{3}$, *deci* $\varphi = 60°$).

b) $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ *reprezintă o dreaptă ce trece prin origine și e înclinată la* $150°$ *(sau* $-30°$*) pe* Ox.

B. Ecuația unei drepte oarecare

6. *Forma explicită sau ecuația dreptei date prin coeficientul unghiular și ordonata la origine.* Fiind dată o dreaptă oarecare (D) să facem notațiile: $B \equiv (D) \cap Oy$, $\overline{OB} = n$ și $\sphericalangle [Ox, (D)] = \alpha$ (fig. 11). Considerăm un

punct curent $M(x, y)$ pe (D) şi ducem $MM_1 \| Oy$ $(M_1 \in Ox)$, apoi prin B paralela la Ox, care întîlneşte pe MM_1 în N. Avem evident: $\overline{BN} = \overline{OM_1} = x$, $\overline{NM} = y - n$ şi $\frac{\overline{NM}}{\overline{BN}} = \operatorname{tg} \alpha = m$ (const), *coeficientul unghiular* sau *panta dreptei* (§ 4). Rezultă imediat $\frac{y-n}{x} = m$, de unde se deduce

$$\boxed{y = mx + n} \tag{2}$$

$\overline{OB} = n$ se numeşte *ordonata la origine a dreptei* (D). Ecuaţia (2) reprezintă legătura dintre coordonatele x, y ale unui punct curent $M \in (D)$; este deci *ecuaţia dreptei date prin coeficientul unghiular* (m) *şi ordonata la origine* (n).

Reciproc, ecuaţia (2) are ca reprezentare geometrică o dreaptă cu direcţia dată de m şi ordonata la origine n. În adevăr din (2) se deduce $\frac{y-n}{x} = m$ sau (fig. 11), $\frac{\overline{NM}}{\overline{BN}} = \operatorname{tg} \alpha = \text{const}$.

Deoarece punctul B este fix şi $\sphericalangle MBN = \alpha$, constant, M descrie dreapta care trece prin B şi face unghiul α cu sensul pozitiv al axei Ox. Dacă $n > 0$, B este deasupra originii, dacă $n < 0$ este sub origine. Presupunînd m constant şi n variabil, obţinem mulţimea dreptelor din plan care au aceeaşi direcţie, deci toate dreptele paralele cu (D). În particular pentru $n = 0$ se obţine dreapta paralelă cu (D), *care trece prin origine*: $y = mx$. Considerînd acum şi pe m variabil se obţine mulţimea tuturor dreptelor din plan. De aceea se spune că $y = mx + n$ *este ecuaţia unei drepte oarecare din planul* xOy.

Observare. Pentru ca afirmaţiile de mai sus să fie corecte trebuie dovedit că din ecuaţia (2) se pot obţine şi dreptele particulare faţă de axele de coordonate, anume cele paralele cu axele.

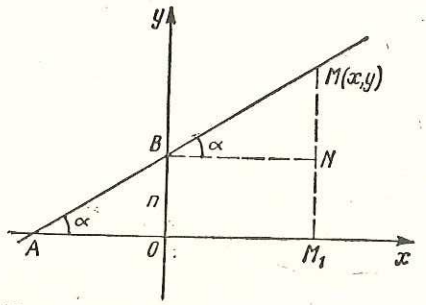

Fig. 11

a) Dacă $(D) \| Ox$, atunci $\alpha = 0$, deci $m = 0$ şi rămîne $y = n$ care reprezintă o paralelă la Ox (§ 3).

b) Dacă $A \equiv (D) \cap Ox$, atunci $m = \frac{\overline{OB}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{OB}}{-\overline{OA}} = -\frac{n}{a}$.

$[OA = a, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)]$, de unde $\frac{n}{m} = -a = \text{const.}$, dacă A este fix. Scriind

ecuaţia (2) sub forma $\frac{y}{m} = x + \frac{n}{m}$ şi făcînd $\alpha \to \frac{\pi}{2}$, deci $m \to \infty$ (A fix), rezultă $x - a = 0$, ecuaţia unei paralele la Oy (în figură $\overline{OA} = a < 0$).

E x e m p l e. a) *Dreapta* $y = x - 1$(*) *este paralelă cu prima bisectoare* $(m = 1)$ *şi taie axa* Oy *în punctul* $(0, -1)$.

b) *Dreapta* $y = -x + n$ *reprezintă o paralelă oarecare la a doua bisectoare a axelor.*

7. *Ecuaţia generală.* Ecuaţia generală de gradul I în x şi y este

$$Ax + By + C = 0. \tag{3}$$

Rezolvînd în raport cu y găsim:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad (B \neq 0) \tag{3'}$$

şi dacă punem $m = -\frac{A}{B}$, $n = -\frac{C}{B}$, am adus-o la forma $y = mx + n$. Prin urmare ecuaţia (3) reprezintă o dreaptă oarecare din plan, avînd coeficientul unghiular $-\frac{A}{B}$ şi ordonata la origine $-\frac{C}{B}$. O vom numi *ecuaţia generală* a dreptei. Justificarea acestei numiri se va vedea în cele ce urmează.

Reciproc de la ecuaţia dreptei sub forma explicită $y = mx + n$ se poate trece la ecuaţia generală (3) scriind $mx - y + n = 0$ şi eliminînd numitorii lui m şi n, dacă aceştia sînt fracţionari. Trecerea de la o formă la alta este ilustrată prin exemplele care urmează.

8. *Ecuaţiile dreptelor particulare deduse din* (3)

a) Presupunem întîi $A = 0$, în ecuaţia generală (3). Rămîne $By + C = 0$, sau $y = -\frac{C}{B} = \text{const.}$, care reprezintă o paralelă la Ox.

b) Fie acum $B = 0$. Rămîne $Ax + C = 0$ sau $x = -\frac{C}{A} = \text{const.}$, adică o paralelă la Oy.

c) Dacă $C = 0$, ecuaţia rămasă este $Ax + By = 0$ sau $y = -\frac{A}{B}x = mx$, ecuaţia unei drepte care trece prin origine.

Să considerăm acum cîte doi coeficienţi nuli.

d) $A = C = 0$. Rămîne $By = 0$, deci $y = 0$, adică ecuaţia axei Ox.

e) $B = C = 0$. Rămîne $Ax = 0$, deci $x = 0$, adică ecuaţia axei Oy.

f) $A = B = 0$, imposibil fiindcă rămîne $C = 0$, însă $C \neq 0$ prin ipoteză. După cum se vede dacă ecuaţia dreptei sub forma (2) nu conţine dreptele paralele cu Oy (pe care le-am dedus prin trecere la limită) ecuaţia, (3)

* $y = x - 1$ nu este o dreaptă, ci *ecuaţia* unei drepte; totuşi în geometria analitică se foloseşte des acest limbaj pentru prescurtare.

conține toate dreptele planului inclusiv toate dreptele particulare. Pentru acest motiv (3) se numește ecuația generală a dreptei.

Din cele spuse mai înainte se desprinde următoarea concluzie importantă: orice ecuație de gradul I în două variabile x și y, raportată la sistemul cartezian dreptunghiular xOy reprezintă o dreaptă și reciproc o dreaptă oarecare din plan este reprezentată printr-o ecuație de gradul I în două variabile (eventual poate lipsi una din variabile).

Prin urmare, dreapta în plan este caracterizată printr-o ecuație de gradul I. Pentru acest motiv o ecuație de gradul I se numește *ecuația liniară*.

Exemple

I. *Trecerea de la forma explicită la ecuația generală.*

1) *Ecuația* $y = \sqrt{3}\,x - 5$ *se scrie sub forma generală* $\sqrt{3}\,x - y - 5 = 0$.

2) *Ecuația* $y = -\frac{3}{2}x - 4$ *se scrie sub forma generală* $3x + 2y + 8 = 0$.

II. *Trecerea de la ecuația generală la forma explicită.*

3) *Ecuația* $3x + 4y - 16 = 0$ *se scrie* $y = -\frac{3}{4}x + 4$ (coef. *unghiular* $m = -\frac{3}{4}$, *ordonata la origine* $n = 4$).

4) $x - 2y + 5 = 0$ *se scrie* $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ $\left(\text{coef. unghiular } m = \frac{1}{2}\text{, ordonata la origine } n = \frac{5}{2}\right)$.

9. Consecințe. a) *Condiția ca două drepte să fie paralele este ca să aibă aceeași înclinare* α *față de axa* Ox, deci să aibă același coeficient unghiular.

Dacă dreptele sînt date prin ecuațiile $y = mx + n$ și $y = m'x + n'$, condiția de paralelism este

$$m = m'. \tag{4}$$

Dacă dreptele sînt date prin ecuațiile $Ax + By + C = 0$ și $A'x + B'y + C' = 0$, atunci $m = -\frac{A}{B}$, $m' = -\frac{A'}{B'}$ și condiția devine $-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$ sau

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \tag{4'}$$

(coeficienții lui x și y proporționali).

b) *Pentru ca două drepte să coincidă, pe lîngă faptul că sînt paralele trebuie să aibă și un punct comun.* Punctul comun îl luăm pe axa Oy, deci ordonatele la origine trebuie să fie egale: $n = n'$. Atunci pentru ca două drepte date prin forma explicită să coincidă trebuie ca

$$m = m'; \qquad n = n'. \tag{5}$$

Dacă dreptele sînt date prin ecuațiile lor generale, atunci pe lîngă (4') trebuie să avem $n = n'$, adică $-\frac{C}{B} = -\frac{C'}{B'}$ sau $\frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$. Dar $\frac{B}{B'}$ se găsește și în relația (4') deci

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \tag{5'}$$

(toți coeficienții proporționali).

Recapitulînd: (4) sau (4') reprezintă condiția de paralelism; (5) sau (5') reprezintă condițiile de coincidență (suprapunere) a două drepte.

Observare importantă. Ecuațiile care diferă numai prin termenul liber

$$Ax + By + C = 0; \quad Ax + By + C' = 0 \tag{6}$$

reprezintă două drepte paralele.

Exemple. a) $3x - 5y + 2 = 0$ *și* $6x - 10y + 7 = 0$ *reprezintă drepte paralele, deoarece* $\frac{6}{3} = \frac{-10}{-5}$ *fără a fi egale și cu* $\frac{7}{2}$.

b) $2x + 6y - 5 = 0$; $4x + 12y - 10 = 0$ *sînt două drepte confundate, căci au toți coeficienții proporționali.*

10. *Condiția ca un punct să se afle pe o dreaptă este ca* ecuația dreptei să fie verificată de coordonatele acelui punct.

De exemplu *punctul* $M(1, -3)$ *se găsește pe dreapta* $3x + 5y + 12 = 0$, *deoarece* $3 \cdot 1 + 5(-3) + 12 = 0$.

Putem pune și problema inversă, ca fiind dată o dreaptă să găsim puncte situate pe acea dreaptă. Este de ajuns să luăm o valoare pentru x (sau y) și se găsește cealaltă coordonată y (sau x). De pildă, referindu-ne la dreapta de mai sus, pentru $x = -3$ rezultă $y = -\frac{3}{5}$, deci punctul $\left(-3, -\frac{3}{5}\right)$.

În general vom scrie că punctul $M(x_0, y_0)$ se găsește pe dreapta $Ax + By + C = 0$, arătînd că verifică ecuația dreptei, adică $Ax_0 + By_0 + C = 0$.

La fel, dacă ecuația dreptei este dată sub altă formă. *În particular* o dreaptă care trece prin origine $y = mx$ este determinată dacă se mai cunoaște un alt punct $M_0(x_0, y_0)$ prin care trece acea dreaptă. Acesta trebuie să verifice ecuația dreptei, deci $y_0 = mx_0$, de unde $m = \frac{y_0}{x_0}$. Rezultă *că ecuația dreptei determinată de origine și de un alt punct* $M_0(x_0, y_0)$ *este*

$$y = \frac{y_0}{x_0}x \text{ sau } y_0x - x_0y = 0. \tag{7}$$

11. *Ecuația dreptei prin tăieturi.* Se numesc tăieturi punctele unde o dreaptă taie axele de coordonate. Coordonatele acestor puncte sînt *coordona-*

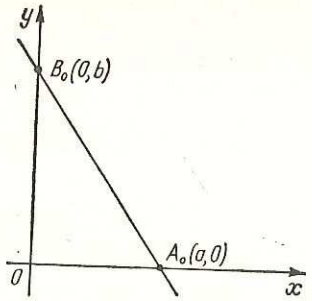

Fig. 12

tele la origine ale dreptei. Dacă $A_0(a, 0)$ și $B_0(0, b)$ sînt cele două puncte pe axe, a este abscisa la origine și b ordonata la origine (fig. 12). Pentru ca ecuația

$$Ax + By + C = 0$$

să reprezinte chiar dreapta A_0B_0 trebuie ca coordonatele celor două puncte să o verifice, adică să avem

$$Aa + C = 0 \text{ și } Bb + C = 0, \text{ de unde}$$

$$A = -\frac{C}{a}, \quad B = -\frac{C}{b}.$$

Înlocuind, ecuația dreptei devine

$$-\frac{C}{a}x - \frac{C}{b}y + C = 0.$$

Deoarece dreapta nu trece prin origine ($C \neq 0$), se poate împărți cu $(-C)$ și se obține forma definitivă

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \tag{8}$$

pe care o vom numi ecuația dreptei *prin tăieturi* sau *prin coordonatele la origine*.

Invers, dacă dreapta este dată printr-o altă formă, se determină punctul unde taie axa Ox făcînd $y = 0$ și punctul pe Oy făcînd $x = 0$. Pentru ecuația generală $Ax + By + C = 0$, tăieturile sînt $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ și $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$.

E x e m p l e. a) *Dreapta ce trece prin punctele* $A(3, 0)$ și $B(0, 5)$ *are ecuația* $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} - 1 = 0$ *sau* $5x + 3y - 15 = 0$.

b) *Dreapta simetrică celei precedente față de Ox trece prin punctele* $A(3, 0)$ *și* $B(0, -5)$ Ecuația ei este

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-5} - 1 = 0 \quad \text{sau} \quad 5x - 3y - 15 = 0.$$

12. *Construcția dreptelor.* 1) *Drepte care trec prin origine.* Mai este necesar încă un punct al dreptei, care se obține dînd lui x o valoare arbitrară și găsind valoarea corespunzătoare a lui y.

E x e m p l e. a) *Să se figureze dreapta* $y = 3x$. Pentru $x = 1$ avem $y = 3$. Punctul diferit de origine este $A(1, 3)$ (fig. 13).

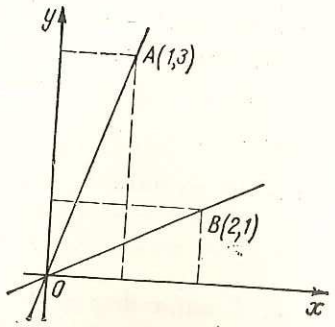

Fig. 13

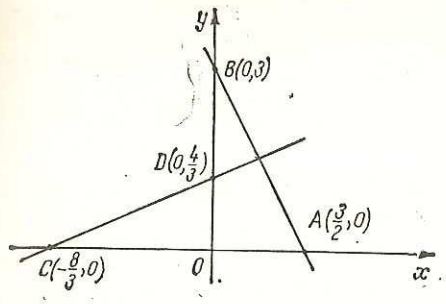

Fig. 14, a

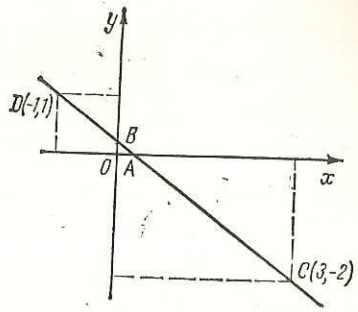

Fig. 14, b

b) *Să se figureze dreapta* $y = \frac{1}{2}x$. Luăm $x = 2$ și corespunde $y = 1$, deci $B(2, 1)$ (fig. 13).

c) *Să se figureze dreapta* $y = -16x$. Aici e bine să luăm $x = \frac{1}{4}$, care dă $y = -4$, deci punctul este $\left(\frac{1}{4}, -4\right)$.

2) *Drepte oarecare.* În general dreapta se figurează căutînd punctele pe axe, adică tăieturile (§ 11).

E x e m p l e. a) $y = -2x + 3$. Tăieturile sînt $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ și $B(0, 3)$ (fig. 14-a).

b) $3x - 6y + 8 = 0$. Făcînd $x = 0$, apoi $y = 0$ se obțin tăieturile $C\left(-\frac{8}{3}, 0\right)$ și $D\left(0, \frac{4}{3}\right)$. Dreapta este CD (fig. 14, *a*). Uneori e preferabil să renunțăm la tăieturi, de exemplu cînd acestea sînt prea apropiate și construcția dreptei este neprecisă, sau cînd tăieturile ies din cadrul figurii.

Ca exemplu considerăm dreapta $3x + 4y - 1 = 0$. Punctele pe axe $A\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{1}{4}\right)$ fiind prea apropiate, alegem alte puncte: $C(3, -2)$ și $D(-1, 1)$ (fig. 14, *b*).

Exerciții și probleme

31. Să se figureze dreptele: $3x - 5 = 0$; $2y + 3 = 0$; $2x + 5y = 0$; $4x - y = 0$; $3x + 5y - 15 = 0$; $4x + 3y - 1 = 0$; $2x - 3y + 1 = 0$.

23. Să se găsească coordonatele numerice a patru puncte, după voie, aparținînd dreptei $5x + 6y + 30 = 0$.

33. Să se scrie ecuația unei drepte paralelă cu dreapta $y = -3x$ și trecînd prin punctul $A(0, -4)$.

34. Să se scrie ecuațiile dreptelor care trec prin perechile de puncte:
a) $A(2, 0)$, $B(0, 5)$; b) $C(5, 0)$, $D(0, -5)$; c) $E(-4, 0)$, $F(0, 3)$; d) $G(-8, 0)$, $H(0, -6)$
și să se aducă la forma generală.

35. Să se determine parametrii λ și μ, astfel ca ecuațiile

$$(3 + \lambda)(x - 5y + 4 = 0 \text{ și } 5x - (4 - \mu)\, y - 5 = 0$$

să reprezinte aceeași dreaptă.

$$\left[\lambda = -7;\ \mu = \frac{41}{4}.\right]$$

36. Să se determine a și b, astfel ca ecuațiile

$$ax + 3y - 8 = 0 \text{ și } 4x + by + 20 = 0$$

să reprezinte: 1) aceeași dreaptă; 2) drepte paralele.

$$\left[1)\ a = -\frac{8}{5},\ b = -\frac{15}{2};\ 2)\ \text{o infinitate de soluții: } ab = 12.\right]$$

37. Se dă dreapta $6x + 5y - 15 = 0$. a) Să se scrie ecuația ei cu ajutorul tăieturilor; b) să se scrie ecuațiile simetricelor ei față de axa Ox, față de axa Oy și față de origine.

38. Aceleași probleme pentru cazul general $Ax + By + C = 0$.

[b) $Ax - By + C = 0$; $-Ax + By + C = 0$; $Ax + By - C = 0$.]

39. Să se scrie ecuațiile laturilor rombului cu centrul în origine, cu diagonalele pe axe, știind că lungimile acestora sînt $AC = 2a$ (AC pe Ox) și $BD = 2b$.

40. Se dau dreptele
$2x + 3y - 12 = 0$; $x - 3y + 6 = 0$; $4x + 6y + 9 = 0$;
$3x - 9y - 8 = 0$ și se cere să se demonstreze că
a) formează un paralelogram; b) punctele

$$A\left(2, \frac{8}{3}\right),\ B\left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{6}\right),\ C\left(-\frac{11}{18}, -\frac{59}{54}\right),\ D\left(\frac{44}{9}, \frac{20}{27}\right)$$

sînt vîrfurile paralelogramului.

41. Să se demonstreze că punctele $A(5, 0)$ $B(2, 2)$, $C(0, 1)$, $D(3, -1)$ sînt vîrfurile unui paralelogram. Care sînt coordonatele centrului?

C. Dreapta determinată prin condiții date

13. *Dreapta determinată de un punct și o direcție.* Fie $M_0(x_0, y_0)$ punctul dat și direcția definită prin coeficientul unghiular $m = \operatorname{tg} \alpha$ (α unghiul dreptei cu axa Ox). Pornim de la ecuația dreptei care conține coeficientul unghiular

$$y = mx + n$$

și scriem că M_0 aparține acestei drepte

$$y_0 = mx_0 + n.$$

Deoarece m este dat, trebuie să eliminăm parametrul n și aceasta se obține prin simplă scădere:

$$y - y_0 = m(x - x_0), \tag{9}$$

Aceasta este legătura între coordonatele x, y ale punctului curent M pentru ca acesta să descrie dreapta definită prin condițiile date. Putem verifica imediat că (9) reprezintă ecuația dreptei date. În adevăr: a) ecuația este de gradul I în x și y, deci reprezintă o dreaptă; b) are coeficientul unghiular m dat; c) $M_0(x_0, y_0)$ verifică ecuația dreptei.

Prin urmare (9) *este ecuația dreptei determinată de un punct* $M_0(x_0, y_0)$ *și de direcția dată prin* $m = \operatorname{tg}\alpha$.

Caz particular. Dacă dreapta trece prin origine, putem considera $M_0 \equiv O$ (0, 0) și (9) devine

$$y = mx, \tag{10}$$

ecuația dreptei ce trece prin origine și are coeficientul unghiular m. Am regăsit astfel rezultatul de la [2, § 5].

E x e m p l e. 1) *Să se scrie ecuația dreptei determinată de punctul* $A(-2, 3)$ *și coeficientul unghiular* $m = \frac{3}{2}$.

Înlocuind în (9) avem $y - 3 = \frac{3}{2}(x + 2)$ sau $3x - 2y + 12 = 0$.

2) *Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul* $A(1, 1)$ *și face* $120°$ *cu axa* Ox.
Coeficientul unghiular este $m = \operatorname{tg} 120° = -\sqrt{3}$, deci ecuația dreptei este $y - 1 = -\sqrt{3}(x - 1)$ sau $\sqrt{3}x + y - (1 + \sqrt{3}) = 0$.

14. *Ecuația dreptei determinată prin două puncte.* Fie $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ punctele care determină dreapta și $M(x, y)$ un punct curent al ei. Pentru ca dreapta scrisă sub forma generală $Ax + By + C = 0$ să coincidă cu dreapta

M_1M_2 trebuie ca ecuaţia ei să fie verificată de coordonatele (x_1, y_1), (x_2, y_2) ale celor două puncte şi evident de orice $M(x, y) \in M_1M_2$, adică trebuie ca

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Ax_1 + By_1 + C = 0 \\ Ax_2 + By_2 + C = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Am obţinut astfel un sistem omogen cu necunoscutele A, B, C, care trebuie să admită şi soluţii *diferite de cea banală* ($A = B = C = 0$). Reamintim din algebră condiţiile ca un sistem omogen de *trei* ecuaţii cu *trei* necunoscute să aibă soluţii diferite de cea banală:

1) Să existe cel puţin un *determinant de ordinul II din matricea coeficienţilor diferit de zero*; 2) determinantul caracteristic *să fie nul.*

Prima condiţie este de la sine îndeplinită fiindcă cel puţin unul din determinanţii $\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}$ este diferit de zero. În adevăr, dacă ambii ar fi nuli, atunci $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ şi ar rezulta $M_1 \equiv M_2$; problema nu mai are sens.

Rămîne să fie satisfăcută a doua condiţie:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

Ceea ce am obţinut este chiar *ecuaţia dreptei* M_1M_2. Pentru a dovedi acest lucru să observăm întîi că dacă dezvoltăm determinantul după prima linie, obţinem o ecuaţie de gradul I în x şi y, adică ecuaţia unei drepte. Apoi dacă înlocuim x, y prin x_1, y_1, determinantul este nul ca avînd două linii identice, deci dreapta trece prin M_1. La fel înlocuind x, y prin x_2, y_2 se constată că dreapta (12) trece prin M_2. Atunci (12) reprezintă chiar ecuaţia dreptei M_1M_2.

E x e m p l u. *Dreapta definită de punctele* $A(-1, -1)$, $B(2, 6)$ *are ecuaţia*

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -7x + 3y - 4 = 0 \quad \text{sau } 7x - 3y + 4 = 0.$$

15. *Altă formă a ecuaţiei dreptei determinată de două puncte.* Dacă în determinantul din ecuaţia (12) a dreptei M_1M_2 scădem linia a II-a din prima şi din a III-a obţinem

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{12'}$$

de unde se deduce ecuaţia dreptei sub forma

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{sau} \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{13}$$

În sfîrşit aceasta se mai poate scrie şi astfel

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{13'}$$

De aici rezultă coeficientul unghiular al dreptei:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{13''}$$

Regăsim în acest fel un rezultat cunoscut din **1**, (10) anume: *coeficientul unghiular al dreptei determinată de două puncte* M_1, M_2 *este egal cu raportul dintre diferenţa ordonatelor şi diferenţa absciselor celor două puncte.*

C a exemplu reluăm pe cel precedent: *dreapta determinată de* $A(-1, -1)$ *şi* $B(2, 6)$. Avem două posibilităţi:

a) folosim forma (13), deci $\frac{x + 1}{2 + 1} = \frac{y + 1}{6 + 1}$ adică $7(x + 1) = 3(y + 1)$ sau sub formă generală $7x - 3y + 4 = 0$.

b) Se calculează întîi coeficientul unghiular $m = \frac{6 + 1}{2 + 1} = \frac{7}{3}$, apoi se scrie ecuaţia dreptei care trece prin A, cu direcţia dată de m, adică $y + 1 = \frac{7}{3}(x + 1)$, care se aduce la forma generală.

O b s e r v a r e. Este bine ca elevii să se obişnuiască să verifice rezultatele obţinute. De pildă în exemplul de mai înainte, să se vadă dacă coordonatele punctelor A, B satisfac ecuaţia găsită.

16. *Cazul particular al dreptei determinată de origine şi de un punct* $M_1(x_1, y_1)$ *al planului* se obţine din cele precedente considerînd $M_2 \equiv 0$, deci $x_2 = y_2 = 0$.

Rezultă ecuaţia dreptei OM_1 sub formele

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{b)}\ y_1 x - x_1 y = 0 \Rightarrow \text{c)} \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} \tag{14}$$

iar din $y = \frac{y_1}{x_1} x$ se deduce coeficientul unghiular

$$m = \frac{y_1}{x_1}. \tag{14'}$$

17. *Ecuațiile parametrice ale dreptei determinată de două puncte.* Formulele care dau coordonatele unui punct M care împarte segmentul $\overline{M_1M_2}$ în raportul dat k sînt (1, 6):

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \quad y = \frac{y_1 - k\,y_2}{1 - k} \tag{15}$$

Cînd k ia toate valorile de la $-\infty$ la $+\infty$, M se deplasează pe dreapta M_1M_2 și anume în interiorul segmentului M_1M_2 pentru $k < 0$ și în exterior pentru $k > 0$. Așadar formulele (15), cînd k variază, dau poziția oricărui punct situat pe dreapta M_1M_2 și pentru acest motiv se numesc ecuațiile parametrice ale dreptei M_1M_2. Pentru a arăta și mai clar că este vorba de un parametru și nu de un număr fix k, se obișnuiește să se noteze raportul variabil $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = \lambda$ și ecuațiile parametrice (15) ale dreptei M_1M_2 apar sub forma

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}. \tag{15'}$$

18. *Condiția ca trei puncte să fie în linie dreaptă.*

Ne propunem să găsim condiția ca trei puncte distincte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ să fie coliniare. Pentru aceasta scriem ecuația dreptei M_2M_3 sub formă de determinant (12)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

și punem condiția ca punctul M_1 să verifice ecuația, adică

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

Aceasta reprezintă, sub formă de determinant, *condiția ca cele trei puncte să fie în linie dreaptă.* Dacă se pornește de la ecuația dreptei M_1M_3 sub forma

$$\frac{x - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y - y_1}{x_3 - x_1}$$

și se scrie că $M_2 \in M_1M_3$ se obține condiția de coliniaritate sub forma

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}. \tag{16'}$$

Ordinea în care se iau punctele rămîne la alegerea noastră.

E x e m p l u. *Punctele* $A(-1, -1)$, $B(1, 3)$, $C(2, 5)$ *sînt coliniare* deoarece

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Al doilea determinant s-a obținut din primul adunînd ultima coloană la primele două.

NOTĂ. Elevii pot face verificarea folosind condiția (16').

Exerciții și probleme

42. Se dau punctele $A(3, 5)$, $B(-1, 3)$, $C(4, 1)$. Se cere:
a) ecuația dreptei dusă prin A, paralelă cu BC.
b) ecuația medianei din A a triunghiului ABC.

[a) Coeficientul unghiular al dreptei BC este $m = -\frac{2}{5}$. Ecuația cerută $2x + 5y - 31 = 0$; b) ecuația medianei $2x - y - 1 = 0$.]

43. Aceleași date ca mai sus. Să se scrie ecuația dreptei AM unde $M \in BC$ și $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\frac{3}{4}$.

[$20x - 13y + 5 = 0$.]

44. Să se stabilească ecuația dreptei prin tăieturi, scriind dreapta determinată de punctele pe axe, sub formă de determinant.

45. Se dă punctul fix $A(a, b)$ și punctul variabil $M(\alpha - b, \alpha - a)$, α fiind un parametru. Să se arate că dreapta AM este fixă și să se scrie ecuația ei.

[Coeficientul unghiular al dreptei AM este constant; $x - y - a + b = 0$.]

46. Se dă punctul $A(1, 3)$, punctul variabil $M(\alpha, \alpha - 1)$ și dreapta $5x - 3y + 10 = 0$. Să se determine coordonatele lui M astfel ca AM să fie paralelă cu dreapta dată.

$\left[M\left(-\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}\right).\right]$

47. Se dau grupele de cîte trei puncte:

$$A\left(-\frac{4}{5}, 2\right), \quad B\left(\frac{2}{5}, 4\right), \quad C(1, 5);$$

$$A'\left(-\frac{7}{5}, 1\right), \quad B'\left(-1, \frac{5}{8}\right), \quad C'(2, -5).$$

$A''(3, 0)$, $B''(1, 1)$, $C''(-2; 2{,}5)$.

Să se spună în care grupă punctele sînt coliniare și să se scrie ecuația dreptei respective.

[$5x - 3y + 10 = 0$; $x + 2y - 3 = 0$.]

48. Să se determine λ, astfel ca punctele $A(-1, -2)$, $B(2, 3)$, $C(5, \lambda)$ să fie în linie dreaptă.

[$\lambda = 8$.]

49. Să se determine punctul $M(\lambda, \lambda)$ astfel ca să fie în linie dreaptă cu punctele $A(1, -2)$, $B(2, 4)$.

$\left[\lambda = \frac{8}{5}.\right]$

50. Se dau punctele $A\left(\frac{14}{3}, \frac{7}{3}\right)$, $B\left(\frac{7}{4}, \frac{21}{4}\right)$, $C(3, 4)$, $D(-7, 14)$.

a) Să se arate că cele patru puncte sînt coliniare.

b) Să se arate că C și D sînt conjugate față de A și B.

[a) Se consideră întîi A, B, C, apoi A, B, D. b) Se calculează raportul în care C și D împarte segmentul $\overline{AB}$.]

51. Să se scrie ecuațiile medianelor triunghiului format de punctele $A(1, 4)$, $B(3, -1)$, $C(8, -2)$. Să se verifice că centrul de greutate se află pe fiecare din ele.

[$3x + y - 7 = 0$; $y - 1 = 0$; $x + 2y - 4 = 0$ $G(2, 1)$.]

52. Se dau punctele $A(0, 5)$, $B(4, 1)$ și dreapta $(D) = x - 4y + 7 = 0$. Să se găsească coordonatele punctului C, așezat pe dreapta (D), astfel ca triunghiul ABC să fie isoscel cu baza AB.

[Se ia un punct $M(\alpha, \beta)$ și se scrie că $MA \equiv MB$ și $M \in (D)$. Se găsește $M(1, 2)$.]

53. Se dau punctele $A(8, 0)$, $B(3, 6)$, $C(0, 3)$. Dreapta BC taie axa Ox în D și dreapta AB taie axa Oy în E.

Să se arate că mijloacele segmentelor OB, AC, DE sînt coliniare.

54. Se dau punctul $A(2, 1)$ și dreptele (D) $2x-3y+1=0$, (D') $x+2y-7=0$. Să se determine punctul M de pe dreapta (D), știind că mijlocul segmentului AM se află pe (D').

[Se scrie că $M(\alpha, \beta) \in (D)$ și mijlocul lui $\overline{AM}$ se află pe (D') $M(4, 3)$.]

55. Se cer condițiile ca să existe puncte reale $A(\lambda, b)$, $B(a, \lambda)$, unde λ este un parametru real, astfel ca ele să fie în linie dreaptă cu punctul dat $C(h, h)$.

[$a > h$, $b > h$ sau $a < h$, $b < h$, în care cazuri există două perechi A_1, B_1 și A_2, B_2.]

Capitolul 3

Poziţiile relative ale dreptelor în plan

A. Două drepte

1. *Intersecţia a două drepte.* Fiind date ecuaţiile a două drepte

$$Ax + By + C = 0 \text{ şi } A'x + B'y + C' = 0 \qquad (1)$$

dacă ele sînt concurente, coordonatele punctului de intersecţie trebuie să verifice ambele ecuaţii, fiindcă punctul se găseşte pe fiecare din ele. Prin urmare cele două coordonate reprezintă soluţia sistemului de ecuaţii liniare (1), anume:

$$x = -\frac{CB' - C'B}{AB' - A'B}; \quad y = -\frac{AC' - A'C}{AB' - A'B} \qquad (2)$$

cu condiţia ca $AB' - A'B \neq 0$.

Discuţie. 1) Sistemul (1) în care $AB' - A'B \neq 0$ este au sistem Cramer şi are soluţia unică (2), prin urmare cele două drepte au un punct comun, bine determinat. Dreptele sînt deci concurente.

2) Dacă $AB' - A'B = 0$, adică $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$ şi $CB' - C'B \neq 0$ (sau $AC' - A'C \neq 0$) atunci sistemul este imposibil, prin urmare cele două drepte nu au nici un punct comun la distanţă finită. Dreptele sînt deci paralele. Am regăsit astfel condiţia de paralelism a două drepte, care a fost dată la (2, § 9).

3) Dacă $AB' - A'B = 0$ şi de asemenea $CB' - C'B = 0$, atunci rezultă $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$, deci şi $AC' - A'C = 0$. Sistemul este nedeterminat, deoarece notînd cu $\frac{1}{k}$ valoarea comună a rapoartelor, a doua ecuaţie din (1) devine $k(Ax + By + C) = 0$, adică se reduce la prima. Cele două drepte au o infinitate de puncte comune, prin urmare coincid. Se regăsesc astfel rezultatele de la cap. 2, § 9.

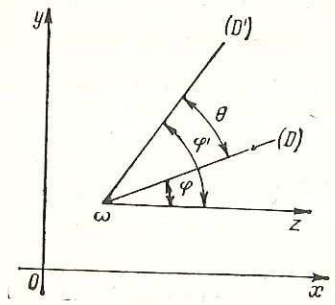

Fig. 15

2. *Unghiul a două drepte.* Presupunem dreptele (D) şi (D') date sub fo mele $y = mx + n$ şi $y = m'x + n'$ şi ne propunem să calculăm unghiul format de ele.

Prin punctul lor de intersecţie ω ducem $\omega z \parallel Ox$ şi notăm $\sphericalangle[\omega z, (D)] = \varphi$, $\sphericalangle[\omega z, (D')] = \varphi'$ $\sphericalangle[(D), (D')] = 0$.

Se ştie că $m = \operatorname{tg}\varphi$ şi $m' = \operatorname{tg}\varphi'$ (fig. 15), iar unghiul celor două drepte este evident $\theta = \varphi' - \varphi$. Rezultă

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\varphi' - \varphi) = \frac{\operatorname{tg}\varphi' - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\varphi'\operatorname{tg}\varphi}$$

sau

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m' - m}{1 + mm'}. \qquad (3)$$

Atunci cînd se dau ecuaţiile dreptelor rămîne să hotărîm noi care este (D) şi care (D'), dar după cum facem o alegere sau alta obţinem, din cauza diferenţei $(m' - m)$, două valori egale şi de semne contrare pentru $\operatorname{tg}\theta$. Aceasta corespunde faptului geometric că cele două drepte fac între ele două unghiuri suplementare. Convenim să alegem valoarea pozitivă, adică să calculăm unghiul ascuţit al dreptelor, afară de cazul cînd există consideraţii care ne obligă la alegerea contrară.

Exemple. 1) *Să se afle unghiul ascuţit al dreptelor*

$$x - 5y + 8 = 0 \text{ şi } 3x - 2y - 12 = 0.$$

Coeficienţii unghiulari sînt $m = \frac{1}{5}$, $m' = \frac{3}{2}$, deci

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{5}}{1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}} = 1, \text{ de unde } \theta = 45°.$$

1) *Unghiul dreptelor* $x + y + 1 = 0$ şi $3x + y - 6 = 0$ *este dat de*

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-1 - (-3)}{1 + (-1)(-3)} = \frac{1}{2}; \quad \theta = 26°33'54''.$$

Dacă dreptele sînt date sub forma generală

$$Ax + By + C = 0; \; A'x + B'y + C' = 0,$$

atunci $m = -\frac{A}{B}$, $m' = -\frac{A'}{B'}$, şi formula (3) devine

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{AB' - A'B}{AA' + BB'}. \qquad (3')$$

Exemplele precedente se pot trata direct cu relaţia (3').

Dacă în (3) $m = m'$, atunci $\operatorname{tg}\theta = 0$, deci $\theta = 0$ (sau π) și dreptele sînt paralele. Găsim și pe această cale condiția de paralelism a două drepte. Condiția de paralelism dedusă din (3') este $AB' - A'B = 0$ sau $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$ ceea ce am găsit și pe alte căi.

Observare importantă. Dreptele $Ax + By + C = 0$ și $Ax + By + C' = 0$, care diferă numai prin termenul liber, sînt evident paralele fiindcă îndeplinesc condiția.

Reciproc, două drepte paralele pot fi aduse să difere numai prin termenul liber. În adevăr, dacă notăm $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = k$, atunci $A' = kA$, $B' = kB$ și ecuația $A'x + B'y + C' = 0$ devine $kAx + kBy + C' = 0$ sau $Ax + By + \frac{C'}{k} = 0$ care diferă numai prin termenul liber de $Ax + By + C = 0$.

Exemplu. *O paralelă oarecare la dreapta* $3x - 5y + 15 = 0$ *se scrie* $3x - 5y + \lambda = 0$, λ *fiind un parametru.*

3. *Condiția ca două drepte să fie perpendiculare* se deduce dacă pornim de la inversa tangentei, adică de la

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{1 + mm'}{m' - m}.$$

Pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$ avem cotangenta nulă, deci $1 + mm' = 0$ de unde rezultă

$$m' = -\frac{1}{m} \qquad (4).$$

Din (4) se deduce regula ușor de ținut minte: *dacă două drepte sînt perpendiculare, coeficientul unghiular al uneia din ele este invers și de semn contrar cu al celeilalte.*

Dacă dreptele sînt date sub forma generală

$$(D)\ Ax + By + C = 0;\ (D')\ A'x + B'y + C' = 0$$

atunci prima condiție (4) devine:

$$AA' + BB' = 0. \qquad (4')$$

4. Aplicații. 1. *Să se ducă prin punctul* $M_0(x_0, y_0)$ *paralelă la dreapta* $Ax + By + C = 0$.

Dreapta care trece prin M_0 și are coeficientul unghiular m este $y - y_0 = m(x - x_0)$. Însă dreapta dată are $m = -\frac{A}{B}$ deci paralela prin M_0 este $y - y_0 = -\frac{A}{B}(x - x_0)$ sau

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (5)$$

Altă metodă. O paralelă la dreapta dată are ecuația $Ax + By + \lambda = 0$. Obligînd această paralelă să treacă prin M_0 avem $Ax_0 + By_0 + \lambda = 0$. Prin scăderea celor două relații se elimină λ și se obține (5).

2) *Prin punctul* $M_0(x_0, y_0)$ *să se ducă perpendiculara pe o dreaptă dată.*

a) Dreapta este dată sub formă explicită $y = mx + n$. Orice perpendiculară pe această dreaptă are coeficientul unghiular $m' = -\frac{1}{m}$ deci ecuația dreptei cerute este

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0). \qquad (6)$$

b) Dreapta este dată sub forma generală $Ax + By + C = 0$. Atunci $m = -\frac{A}{B}$, deci $m' = \frac{B}{A}$ și ecuația dreptei cerute este $y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0)$ sau

$$B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0. \qquad (6')$$

Forma (6') se folosește practic mai rar decît (6).

Exemple. 1) *Să se scrie perpendiculara dusă prin punctul* $M_0(-2, 1)$ *la dreapta* $y = 3x + 2$.

Ecuația dreptei căutate este $y - 1 = -\frac{1}{3}(x + 2)$ sau $x + 3y - 1 = 0$.

2) *Să se afle unghiul dreptelor* $y = mx + n$ și $y = \frac{m-1}{m+1}x + k$.

Avem $\operatorname{tg}\theta = -\dfrac{m - \frac{m-1}{m+1}}{1 + m\frac{m-1}{m+1}} = \dfrac{m^2+1}{m^2+1} = 1$, deci $\theta = 45°$.

B. Trei drepte

5. Pozițiile relative a trei drepte pot fi următoarele:

a) *Dreptele se taie două cîte două și determină un triunghi.*

b) *Două drepte sînt paralele și a treia le intersectează (unul din vîrfurile triunghiului este aruncat la infinit).*

c) *Cele trei drepte sînt paralele (punctul de concurență aruncat la infinit).*

d) *Cele trei drepte sînt concurente.*

e) *Două drepte sînt confundate, a treia taie dreapta dublă.*

f) *Două drepte confundate, a treia paralelă cu dreapta dublă.*

g) *Cele trei drepte sînt confundate.*

În cele ce urmează vom presupune că dreptele sînt distincte, deci nu vom considera ultimele trei cazuri. Din punct de vedere analitic trebuie să regăsim cazurile pe care le-am enunțat aici.

Presupunem deci că dreptele sînt date prin ecuațiile

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \\ A''x + B''y + C'' = 0 \end{cases} \tag{7}$$

În general un astfel de sistem nu este compatibil (posibil), adică nu există o pereche de valori (x_0, y_0) care să verifice toate ecuațiile. Aceasta înseamnă că cele trei drepte nu trec prin același punct, adică nu sînt concurente.

Dacă

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \neq 0; \quad \begin{vmatrix} A & B \\ A'' & B'' \end{vmatrix} \neq 0; \quad \begin{vmatrix} A' & B \\ A'' & B'' \end{vmatrix} \neq 0 \tag{8}$$

atunci ecuațiile (7), luate cîte două formează sisteme Cramer, compatibile și determinate. Dreptele se intersectează două cîte două și formează un triunghi. *Este cazul* (a). Dacă *numai unul* oarecare din determinanții (8) este nul (de exemplu primul), atunci două drepte (primele două) sînt paralele, dar fiecare din ele intersectează pe a treia, deoarece ecuațiile lor formează sistem Cramer. *Este cazul* (b). Dacă doi determinanți din (8) sînt nuli, atunci al treilea este de la sine nul. În adevăr fie $AB' - A'B = 0$ și $AB'' - A''B = 0$, de unde rezultă

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} = \frac{A''}{B''}, \tag{9}$$

deci $A'B'' - A''B' = 0$.

Interpretarea geometrică este că dacă două drepte sînt paralele cu a treia, ele sînt paralele între ele. *Este cazul* (c).

În acest caz, din cauza egalităților (9), determinantul format cu toți coeficienții ecuațiilor este nul:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0 \tag{9'}$$

deoarece are elementele a două coloane proporționale.

6. *Condițiile ca trei drepte să fie concurente* [*cazul* (d)]. Ecuațiile dreptelor sînt cele date la (7). Pentru ca dreptele să fie concurente trebuie să existe un punct $M_0(x_0, y_0)$ care să verifice toate cele trei ecuații. Aceasta înseamnă că cele *trei ecuații* cu *două necunoscute* (7) trebuie să formeze sistem compatibil și determinat. Pentru aceasta condițiile necesare și suficiente sînt:

a) Să existe un determinant de ordinul II, format cu coeficienții lui x și y diferit de zero, deci unul din determinanții (8) să fie diferit de zero:

b) $$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

Prima condiție (a) înseamnă din punct de vedere analitic, că două din drepte sînt concurente. Condiția (b), adică relația (10) arată că a treia dreaptă trece prin punctul de intersecție al primelor două.

Acestea sînt condițiile ca trei drepte să fie concurente. Coordonatele punctului comun se găsesc rezolvînd sistemul format de două oarecare din cele trei ecuații.

Să presupunem acum că prima condiție (a) nu este îndeplinită; aceasta înseamnă că toți determinanții (8) sînt nuli, iar cele trei drepte sînt paralele [cazul (c)]. În studiul făcut mai înainte am văzut însă că atunci (9') sau (10) este îndeplinită ca o consecință.

Prin urmare dacă este îndeplinită numai a doua condiție (b) nu rezultă că dreptele sînt concurente; ele pot fi și paralele.

Rezumăm discuția de mai sus în următorul enunț:

Dacă determinantul tuturor coeficienților a trei drepte (10) *este nul, atunci cele trei drepte sînt concurente sau paralele; dacă două din ele sînt concurente, atunci toate trei sînt concurente, iar dacă două sînt paralele, atunci și a treia este paralelă cu ele.*

O enunțare și mai concisă este următoarea:

Egalitatea (10) reprezintă condiția ca trei drepte să fie concurente la distanță finită sau la infinit.

7. *Altă metodă de a dovedi concurența a trei drepte.*

Să arătăm că dacă trei drepte sînt concurente, ecuația uneia din ele rezultă ca o combinație liniară* a celorlalte două. În adevăr dacă dreptele sînt concurente și notăm ecuațiile lor din (7) cu $D = 0$, $D' = 0$, $D'' = 0$, atunci se pot determina doi coeficienți λ și μ astfel ca să avem

$$D'' = \lambda D + \mu D'. \tag{11}$$

Aceasta înseamnă că trebuie să avem

$$\lambda A + \mu A' = A''; \quad \lambda B + \mu B' = B''; \quad \lambda C + \mu C' = C''. \tag{12}$$

* Prin *combinație liniară* a două expresii E_1 și E_2 se înțelege suma acelor expresii, înmulțite fiecare cu cîte un factor: $\alpha E_1 + \beta E_2$. Dacă E_1 și E_2 sînt ridicate la puteri, combinația nu mai este liniară.

Am obținut un sistem de 3 ecuații cu două necunoscute λ, μ, care este compatibil și determinat deoarece există determinanți de ordinul II diferiți de zero, iar

$$\begin{vmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix} = 0$$

care nu este decît condiția (10) în care coloanele determinantului s-au schimbat în linii. Așadar se pot determina λ și μ astfel ca relația (11) să fie satisfăcută.

Elevii vor demonstra reciproca: dacă (11) este îndeplinită cele trei drepte sînt concurente.

O b s e r v a r e. Dacă λ și μ sînt fracționari, prin eliminarea numitorilor relația (11) devine

$$pD'' = mD + nD'.$$

E x e m p l e. 1) *Să se cerceteze dacă dreptele* $5x - 2y + 8 = 0$; $3x + 4y - 5 = 0$; $x - 3y + 6{,}5 = 0$ *sînt concurente.*

Metoda I. a) Avem

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & -3 & 6{,}5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 13 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & -3 & 6{,}5 \end{vmatrix} = 0,$$

deoarece liniile I și III au elementele proporționale. S-a scăzut linia a II-a din prima.

Metoda a II-a. Adunăm a doua ecuație cu a treia înmulțită cu 2 și obținem prima ecuație, deci dreptele sînt concurente.

2) *Dreptele* $6x + y - 8 = 0$; $4x + 3y - 5 = 0$; $2x - 2y - 3 = 0$ sînt concurente, deoarece *ultima se obține prin scăderea primelor două.*

3) *Să se determine* α *astfel ca dreptele* $2x + y - 4 = 0$; $5x - 2y + 3 = 0$; $\alpha x + 3y - 2 = 0$, *să fie concurente.*

Aici e preferabil să se folosească prima metodă. Se observă că

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ deci trebuie să avem } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 5 & -2 & 3 \\ \alpha & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

care dezvoltat după ultima linie dă $5\alpha + 60 = 0$, de unde $\alpha = -12$.

Aplicație. *Să se determine ecuația dreptei care prin intersecția dreptelor* $2x - y + 5 = 0$, $3x + 2y - 3 = 0$ *și prin punctul* $A(-3, -2)$.

Metoda I. Intersecția dreptelor date este punctul $\omega(-1, 3)$, care se obține rezolvînd sistemul celor două ecuații. Dreapta ωA are ecuația

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5x - 2y + 11 = 0.$$

Metoda a II-a. Scriem o dreaptă oarecare ce trece prin A, $y + 2 = m(x + 3)$, deci $mx - y + 3m - 2 = 0$ și punem condiția ca aceasta, împreună cu dreptele date, să fie concurente

$$\begin{vmatrix} m & -1 & 3m - 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

ecuație în care determinantul se dezvoltă după linia I și dă $m = \frac{5}{2}$, prin urmare ecuația dreptei este $y + 2 = \frac{5}{2}(x - 3)$, adică aceeași dreaptă.

8. *Îndrumări pentru rezolvarea problemelor.* În exemplele și aplicațiile luate pînă aici am căutat să formăm deprinderea de a lucra cu coordonatele și cu metodele geometriei analitice. Pentru acest motiv am folosit date numerice, ceea ce înseamnă că toate figurile au fost legate de axele de coordonate.

Geometria analitică servește însă la rezolvarea oricărei probleme de geometrie, al cărei enunț nu se referă la axe. Atunci trebuie să *ne alegem noi* sistemul de referință, adică axele de coordonate. Alegerea axelor de coordonate are o foarte mare importanță, căci de aceasta depinde ușurarea calculelor. Nu există reguli precise pentru alegerea sistemului de referință, însă putem da unele îndrumări care pot fi de folos, după cum urmează:

a) dreptele care se aleg ca axe trebuie să fie fixe;

b) dacă printre datele problemei apare sau putem noi duce o axă de simetrie, aceasta se va lua ca axă Ox sau Oy;

c) dacă putem pune în evidență două axe de simetrie, acestea se vor alege ca axe de coordonate;

d) dacă un punct este centru de simetrie pentru datele problemei, atunci este bine ca el să fie luat ca origine;

e) dacă în enunțul problemei este vorba de un unghi drept, un triunghi dreptunghic, un dreptunghi, pătrat etc., laturile unghiului drept se vor lua ca axe;

f) dacă nu avem nici o indicație în sensul celor arătate mai înainte, atunci alegerea se face astfel încît cît mai multe puncte să aibă o parte din coordonate nule, sau dreptele să aibă poziții particulare (paralele cu axele, sau să treacă prin origine etc.), pentru a ușura calculul.

Trebuie totuși să atragem atenția că sînt cazuri cînd este bine să renunțăm la simplificări de calcul și să alegem axele oarecare, pentru a nu strica simetria rezultatelor, care pot folosi pentru demonstrații, interpretări etc. Ca exemplu vom arăta cum se află ecuațiile medianelor unui triunghi (exemplul 3).

Îndemînarea de a alege axele se capătă prin exerciții cît mai multe. Pentru ilustrarea concretă a îndrumărilor precedente, dăm cîteva exemple.

1) *Se dă un pătrat $ABCD$, pe laturile căruia se iau, în sensul $A - B - C - D$, segmentele $BM = CN$. Să se demonstreze că dreptele AM și BN sînt perpendiculare.*

Axele de coordonate se aleg laturile pătratului: AB ca axă Ox și AD ca axă Oy. Să notăm cu a latura pătratului și $BM = CN = \lambda$ variabil. Coordonatele punctelor A, B, C, M, N, se scriu direct urmărind figura 16:

$$A(0,\ 0),\ B(a,\ 0),\ C(a,\ a),\ D(0,\ a),\ M(a,\ \lambda),\ N(a - \lambda,\ a).$$

Coeficienții unghiulari ai dreptelor AM, BN sînt

$$m = \frac{\lambda}{a},\quad m' = \frac{a}{(a - \lambda) - a} = -\frac{a}{\lambda},$$

de unde se vede că $mm' = -1$ și dreptele sînt perpendiculare.

2) *Pe o latură a unui unghi se iau punctele A, B, iar pe cealaltă latură punctele C, D. Fie $E \equiv AD \cap BC$, F intersecția paralelelor duse prin A și C la laturile unghiului și G intersecția paralelelor duse prin B și D la aceleași laturi. Să se demonstreze că E, F, G sînt coliniare.*

Dacă am considera cazul particular cînd unghiul este drept, este evident că laturile unghiului ar trebui luate ca axe.

În cazul general problema se tratează cu ușurință în *axe oblice**. Axele vor fi chiar laturile unghiului.

Pentru un unghi oarecare, în axe dreptunghiulare, cea mai mare simplificare pe care o putem face este să alegem vîrful unghiului ca origine și latura AB ca axă Ox. Axa Oy va fi perpendiculară în O pe AB.

Ecuația dreptei CD va fi $y = mx$, iar punctele vor avea coordonatele: $A(a,\ 0)$, $B(b,\ 0)$, $C(c,\ cm)$, $D(d,\ md)$. Ecuațiile dreptelor AD și BC (fig. 17) sînt

$$(AD)\quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ d & md & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = mdx + (a - d)y - mad = 0$$

$$(BC)\quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ c & mc & 1 \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix} = mcx + (b - c)y - mbc = 0.$$

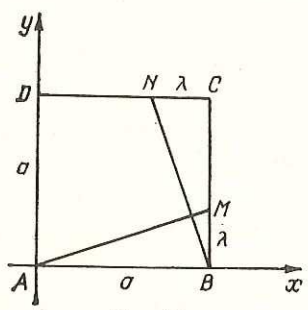

Fig. 16

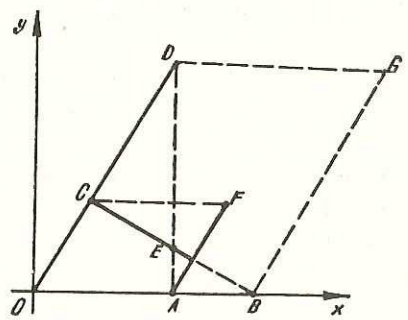

Fig. 17

* Elevii care doresc vor putea încerca, cu titlu de exercițiu, să trateze astfel problema, sub îndrumarea profesorului.

Rezolvînd sistemul se găsește

$$E\left[\frac{bd(a + c) - ac(b + d)}{bd - ac},\ \frac{mcd\,(b - a)}{bd - ac}\right].$$

Dreptele AF, CF au ecuațiile

$$(AF)\ y = m(x - a);\qquad (CF)\ y = mc$$

deci $F(a + c,\ mc)$.

În mod asemănător $G(b + d,\ md)$. Condiția ca punctele să fie coliniare este

$$\begin{vmatrix} \dfrac{bd(a + c) - ac(b + d)}{bd - ac} & \dfrac{mcd\,(b - a)}{bd - ac} & 1 \\ c + a & mc & 1 \\ b + d & md & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau, dînd factor pe prima linie pe $\dfrac{1}{bd - ac}$ și pe a doua coloană pe m:

$$\frac{m}{bd - ac}\begin{vmatrix} bd(a + c) - ac(b + d) & cd(b - a) & bd - ac \\ a + c & c & 1 \\ b + d & d & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Deoarece $m \neq 0$, trebuie ca determinantul să fie nul. Acesta se descompune într-o diferență de doi determinanți, amîndoi nuli, deoarece primul are liniile I și II proporționale, iar al doilea liniile I și III, după cum se observă

$$\begin{vmatrix} bd(a + c) & bdc & bd \\ a + c & c & 1 \\ b + d & d & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ac(b + d) & acd & ac \\ a + c & c & 1 \\ b + d & d & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Punctele E, F, G sînt deci coliniare.

3) *Să se demonstreze că medianele unui triunghi sînt concurente.* Dacă am alege ca origine un vîrf al triunghiului și una din laturile ce trec prin acest vîrf ca axă Ox, trei din coordonatele vîrfurilor ar fi nule și am avea numai trei coordonate diferite de zero.

Dezavantajul este însă că se rupe simetria ecuațiilor și sîntem nevoiți să reluăm calculul de la început pentru fiecare mediană. De aceea nu vom particulariza sistemul de axe și vom vedea că după ce am stabilit ecuația unei mediane, celelalte se deduc prin permutări circulare.

Fie deci, față de un sistem de axe $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$ vîrfurile triunghiului. Mijlocul laturii BC este $A'\left(\dfrac{x_2 + x_3}{2},\ \dfrac{y_2 + y_3}{2}\right)$ și mediana AA' are ecuația

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \dfrac{x_2 + x_3}{2} & \dfrac{y_2 + y_3}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 + x_3 & y_2 + y_3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

care scrisă dezvoltat este

$$(AA')\ (2y_1 - y_2 - y_3)x - (2x_1 - x_2 - x_3)y + x_1(y_2 + y_3) - y_1(x_2 + x_3) = 0.$$

Ecuațiile celorlalte mediane se scriu permutînd circular vîrfurile triunghiului, adică pe x_1, x_2, x_3 și y_1, y_2, y_3. Ele se scriu deci direct

$$(BB')\quad (2y_2 - y_3 - y_1)x - (2x_2 - x_3 - x_1)y + x_2(y_3 + y_1) - y_2(x_3 + x_1) = 0$$

$$(CC')\quad (2y_3 - y_1 - y_2)x - (2x_3 - x_1 - x_2)y + x_3(y_1 + y_2) - y_3(x_1 + x_2) = 0.$$

Dacă adunăm cele trei ecuații obținem în prima parte zero, deci una din ecuații este o combinație liniară a celorlalte două. Aceasta arată că medianele sînt concurente (v. § 7).

Observare. Dacă s-ar scrie condiția de concurență sub formă de determinant și s-ar aduna toate liniile la prima, s-ar obține pe prima linie toate elementele nule, deci determinantul este nul și condiția este verificată.

Exerciții și probleme

56. Se dau punctele $A(3, 5)$, $M(-1, 3)$, $N(4, 1)$. Să se afle ecuațiile dreptelor duse prin A, înclinate la 45° și 135° față de MN.

[$3x - 7y + 26 = 0$; $7x + 3y - 36 = 0$.]

57. a) Se dă punctul $A(-3, 5)$. Să se scrie ecuația mediatoarei segmentului OA.

b) Se dă punctul $A(x_1, y_1)$. Să se scrie ecuația mediatoarei segmentului OA.

[a) $3x - 5y + 17 = 0$; b) $x_1x + y_1y = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2)$.]

58. Să se scrie ecuația mediatoarei segmentului format de punctele $A(5, 3)$, $B(-1, -2)$.

[$12x + 10y - 29 = 0$.]

59. Se dau punctele $A(0, 5)$, $B(4, 1)$ și dreapta (D) $x - 4y + 7 = 0$. Să se găsească coordonatele punctului $C \in (D)$ astfel ca triunghiul ABC să fie isoscel cu baza AB.

[Mediatoarea laturii $AB \cap (D)$; $C(1, 2)$.]

60. Se dau punctele $A(3, 0)$ și $B(-1, 8)$. Prin A se duce o paralelă (D) la prima bisectoare.

a) Să se determine coeficientul unghiular al unei drepte ce trece prin B, care să taie dreapta (D) într-un punct C, astfel încît triunghiul ABC să fie isoscel cu baza AB.

b) Să se calculeze coordonatele punctului H de întîlnire a înălțimilor triunghiului.

c) Să se găsească centrul O al cercului circumscris.

[a) Mediatoarea laturii AB taie pe (D) în punctul C (13, 10). $m_{BC} = \frac{1}{7}$.

b) Mediatoarea lui AB este și înălțime. Mai trebuie o înălțime; $H\left(\frac{7}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

c) $O\left(\frac{19}{3}, \frac{20}{3}\right)$.]

61. Să se calculeze unghiurile formate de dreptele $2x - y - 5 = 0$ și $x - 3y + 4 = 0$. Care este mărimea unghiului în care se află originea axelor?

[45°].

62. Se dau punctele $A(a, 0)$ și $C(2a, 3a)$. Perpendiculara dusă în A pe AC taie dreapta $x + 2a = 0$ în B. Să se arate că triunghiul ABC este isoscel.

[$AB = AC = a\sqrt{10}$.]

63. Se dă dreptunghiul $ABCD$ și din punctul A se duce perpendiculara AE pe diagonala BD, unde $E \in BC$. Să se arate că lățimea AB a dreptunghiului este medie proporțională între lungimea lui și segmentul BE.

[BC se ia ca Ox, BA ca Oy; $C(a, 0)$, $A(0, b)$. Se găsește $E\left(\frac{b^2}{a}, 0\right)$.]

64. Fie M un punct variabil pe prima bisectoare și $A(a, b)$, $B(b, c)$ două puncte fixe. Dreapta MA taie axa Ox în P, iar MB taie axa Oy în Q. Să se demonstreze că dreapta PQ are o direcție fixă.

[Coeficientul unghiular al dreptei PQ este $m = \frac{b - c}{a - b} = \text{const.}$]

65. Se dau punctele $A(2, 1)$ și $B(-5, -3)$. Să se afle punctul M, pe dreapta $y = x + 4$, astfel ca $\sphericalangle AMB = 90°$.

[$M(\alpha, \alpha + 4)$. Se scrie că $MA \perp MB$ și se află α. Două soluții: $M_1(-1, 3)$ și $M_2\left(-\frac{11}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.]

66. Se dau dreptele $x + y - 2 = 0$ și $3x - 2y + 1 = 0$.

Să se determine: a) dreapta care trece prin intersecția dreptelor date și prin punctul $M(2, 3)$; b) dreapta care trece prin intersecția dreptelor date și este paralelă cu prima bisectoare.

[a) $8x - 7y + 5 = 0$; b) $5x - 5y + 4 = 0$.]

67. Se dau punctele $A(6, 0)$, $B(0, 4)$, $C(1, 5)$. Să se arate că:

a) există relația $OA \cdot BC + OB \cdot AC = OC \cdot AB$;

b) picioarele perpendicularelor duse din origine pe laturile triunghiului ABC sînt coliniare.

68. Se dau dreptele: $x + y - 1 = 0, x + y - 2 = 0; x - 2y + 1 = 0;$ $x - 2y - 3 = 0$, care sînt laturile unui paralelogram. Să se găsească ecuațiile diagonalelor (c.d.p.).

[$3x + 6y - 5 = 0$ și $5x - 2x - 7 = 0$.]

69. Să se scrie ecuațiile înălțimilor triunghiului format de dreptele $x - y + 2 = 0$; $3x - y + 1 = 0$; $x + 2y + 2 = 0$.

[$4x - 2y + 3 = 0$; $x + 3y + 2 = 0$; $7x + 7y + 9 = 0$.]

70. Să se determine λ astfel ca dreapta $5x + \lambda y - 2 = 0$ să treacă prin intersecția dreptelor

$$x + 6y - 5 = 0;\ 3x + 4y + 8 = 0$$

[$\lambda = 16$.]

71. Se dă dreapta

$$(\alpha - 1)x + (\alpha - 2)y - \alpha + 3 = 0,$$

depinzînd de parametrul real α. Să se determine α astfel că dacă A, B sînt intersecțiile ei cu Ox, Oy să avem

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = 10.$$

[Două soluții: $\alpha_1 = \frac{5}{2}$ și $\alpha_2 = \frac{17}{4}$.]

72. Să se demonstreze că mediatoarele unui triunghi sînt concurente.

[Ecuația unei mediatoare: $(x_2 - x_3)x +) y_2 - y_3)y -$

$$- \frac{x_2^2 - x_3^2}{2} - \frac{y_2^2 - y_3^2}{2} = 0 \text{ etc.}]$$

73. Se dau două drepte perpendiculare (D) și (D'). Pe (D) se iau trei puncte oarecare A, B, C, iar pe (D') la fel trei puncte A', B', C'. Să se demonstreze că punctele $E \equiv AB' \cap A'B$, $F \equiv BC' \cap B'C$, $G \equiv CA' \cap C'A$ sînt în linie dreaptă.

74. Față de sistemul de referință xOy se iau punctele $A(a, 0)$ și $B(0,b)$. Să se determine punctul M, situat pe dreapta $y = mx$, astfel ca unghiul AMB să fie drept.

Fie C al patrulea vîrf al dreptunghiului $OACB$. Să se demonstreze că $CM \perp OM$

[Abscisa lui M este $\alpha = \frac{a + mb}{m^2 + 1}$.]

75. Aceleași date ca mai înainte, însă M se află pe dreapta $x + y - b = 0$

[$M\left(\frac{a + b}{2}, \frac{b - a}{2}\right)$.]

76. Pe axele Ox, Oy se iau punctele fixe A, B și segmentele variabile $AA' = BB'$. Să se arate că mediatoarea segmentului $A'B'$ taie a doua bisectoare a axelor într-un punct fix.

[Punctul fix $P\left(\frac{a - b}{2}, -\frac{a - b}{2}\right)$.]

77. Pe o latură a unui unghi drept se dau punctele fixe A și B, iar pe cealaltă latură punctul mobil M. Se proiectează vîrful O al unghiului drept pe dreptele MA și MB, respectiv în P și Q.

a) Să se arate că dreapta PQ taie latura AB a unghiului drept într-un punct fix L.

b) Să se calculeze raportul în care L împarte segmentul $\overline{AB}$.

[a) $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $M(0, \lambda)$. Ecuația dreptei PQ:

$\lambda(a + b)x + (ab - \lambda^2)y - \lambda ab = 0$. $L\left(\frac{ab}{a + b}, 0\right)$;

b) $\frac{\overline{LA}}{\overline{LB}} = \frac{a^2}{b^2}$.]

78. Pe catetele AB și AC ale unui triunghi dreptunghic se construiesc, în afară, pătrate în care vîrfurile opuse lui A sînt respectiv D și E. Să se demonstreze că dreptele CD, BE și înălțimea AH a triunghiului sînt concurente.

79. Se dă paralelogramul $ABCD$. O paralelă oarecare la AB taie laturile AD și BC, respectiv în M și N, iar o paralelă la AD taie laturile AB și CD, respectiv în P și Q. Fie $E \equiv MP \cap NQ$. Să se arate că D, B, E sînt coliniare.

[Este preferabil să se arate că MP, NQ și DB sînt concurente.]

80. Fie punctele $A(1, 2)$, $B(5, 4)$ și un punct mobil pe axa Ox. Dreptele MA, MB intersectează prima bisectoare în punctele N, U, iar axa Oy în punctele V, P. Să se arate că

a) dreapta NP trece printr-un punct fix situat pe dreapta AB;

b) dreapta UV are o direcție fixă. Să se precizeze această direcție.

(Olimpiada mat. 1960, enunț parțial)

[a) $NP \cap AB$ dă $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$; b) $UV \parallel AB$.]

Capitolul 4

Separarea planului în regiuni

1. *Raportul în care o dreaptă împarte un segment.* Fiind date punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ se cere să se afle raportul în care dreapta (D) de ecuație $(D) = Ax + By + C = 0$ împarte segmentul $\overline{M_1M_2}$ (fig. 18).

Fie $M \equiv M_1M_2 \cap (D)$ și $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = k$.

Urmează să găsim expresia lui k.

Punctul M fiind pe dreapta M_1M_2 are coordonatele

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \quad y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}.$$

Însă $M \in (D)$ prin urmare trebuie să verifice ecuația, adică:

$$A\frac{x_1 - kx_2}{1 - k} + B\frac{y_1 - ky_2}{1 - k} + C = 0$$

sau

$$Ax_1 + By_1 + C - k(Ax_2 + By_2 + C) = 0,$$

care dă

$$k = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C} = \frac{(D_1)}{(D_2)} \qquad (1)$$

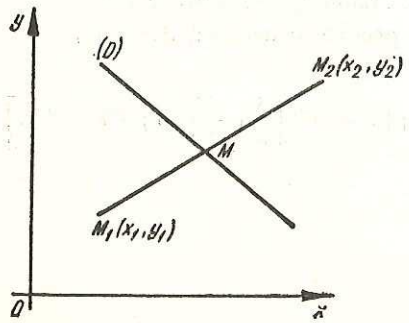

Fig. 18

unde s-a notat $(D_1) = Ax_1 + By_1 + C$ și $(D_2) = Ax_2 + By_2 + C$.

Pentru $k < 0$, punctul M este interior segmentului $\overline{M_1M_2}$, pentru $k > 0$ M este exterior.

E x e m p l u. *Dreapta* $2x - y + 2 = 0$ *împarte segmentul format de punctele* $A(3, 2)$, $B(-1, 4)$ *în raportul*

$$k = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{6 - 2 + 2}{-2 - 4 + 2} = -\frac{3}{2},$$

deci M se află între A și B. Verificarea se face prin calculul coordonatelor lui M, anume

$M\left(\frac{3}{5}, \frac{16}{5}\right)$.

2. *Separarea planului în regiuni de către o dreaptă.* Orice dreaptă împarte planul în două semiplane, pe care le vom numi regiuni și le vom numerota: cu I regiunea (semiplanul) care conține originea și cu II regiunea cealaltă (fig. 19). Ecuația dreptei (D) o considerăm sub forma generală

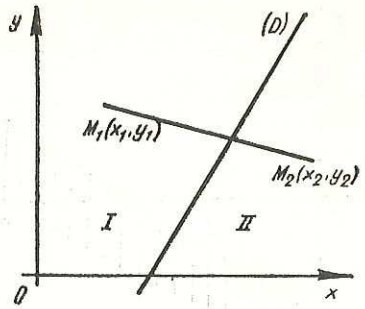

Fig. 19

$$Ax + By + C = 0. \qquad (2)$$

Dacă un punct $M_0(x_0, y_0) \in (D)$ atunci coordonatele lui verifică ecuația (2), adică $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Dacă însă punctul $M_0(x_0, y_0)$ nu se află pe dreaptă, atunci $Ax_0 + By_0 + C \neq 0$, adică expresia numerică obținută are o valoare oarecare, strict pozitivă sau strict negativă.

Vom demonstra următoarele proprietăți.

a) *polinomul general de gradul I în două variabile* $f(x, y) = Ax + By + C$ *păstrează același semn pentru toate punctele situate într-o aceeași regiune;*

b) *același polinom ia valori de semne contrare pentru punctele din regiuni diferite.*

a) Dacă punctele M_1 și M_2 sînt situate în aceeași regiune, dreapta (D) taie dreapta M_1M_2 în exteriorul segmentului $\overline{M_1M_2}$ și raportul $k = \frac{(D_1)}{(D_2)} > 0$. Prin urmare (D_1) și (D_2) au același semn.

b) Dacă punctele M_1 și M_2 sînt în regiuni diferite, dreapta (D) întîlnește dreapta M_1M_2 într-un punct interior segmentului $\overline{M_1M_2}$ (fig. 19) și $k = \frac{(D_1)}{(D_2)} < 0$, adică (D_1) și (D_2) au semne contrare.

O dată demonstrate proprietățile enunțate, este de ajuns să cercetăm semnul polinomului în una din regiuni, fiindcă în cealaltă rezultă.

Dacă dreapta nu trece prin origine, atunci se caută semnul în regiunea care conține originea. Acesta este dat de

$$f(0, 0) = C. \qquad (3)$$

Dacă dreapta trece prin origine, atunci se alege alt punct, de exemplu (1,0) sau (0, 1) etc.

E x e m p l e. a) *Care sînt punctele din plan pentru care avem* $2x - 3y - 6 < 0$?

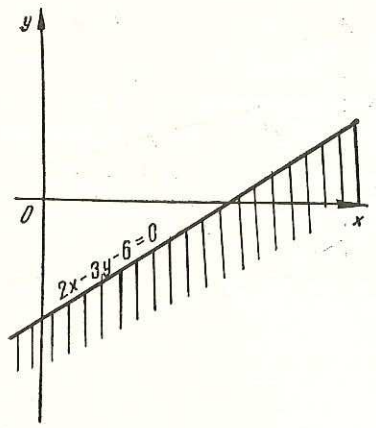

Fig. 20

Se reprezintă dreapta $2x - 3y - 6 = 0$ (fig. 20) Termenul liber este (-6), deci punctele din semiplanul care conține originea fac polinomul negativ și verifică inecuația. Se pot face verificări cu diferite puncte (0, 1), (1, 1), (3, 1) etc. Regiunea hașurată nu convine.

Altă metodă. Din $2x - 3y - 6 < 0$ rezultă $y > \frac{2x - 6}{3}$, iar din ecuația dreptei $2x - 3y - 6 = 0$ rezultă $y = \frac{2x - 6}{3}$. Se observă că punctele pentru care se verifică *inecuația* dată au ordonatele mai mari decît punctele cu aceeași abscisă din *ecuația dreptei.*

Așadar mulțimea punctelor din semiplanul situat deasupra dreptei de ecuație $2x - 3y - 6 = 0$ constituie soluțiile inecuației date.

b) *Să se rezolve inecuațiile simultane*

$$x - y < 0; \quad 3x + 4y - 12 > 0.$$

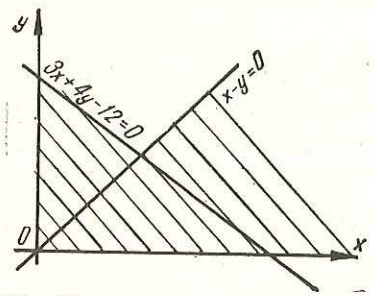

Fig. 21

Dacă facem $y=0$ în primul polinom, se vede că obținem valori negative numai pentru $x < 0$, deci regiunea care convine este cea *care conține semiaxa negativă.* A doua inecuație este verificată de regiunea *opusă originii.*

Mulțimea punctelor care satisfac simultan inecuațiile date este intersecția mulțimilor care verifică pe fiecare în parte, adică unghiul nehașurat din figura 21.

c) *Se cere mulțimea punctelor pentru care avem simultan*

$$x + 2y - 4 = 0 \text{ și } 2x - y - 2 > 0.$$

Egalitatea este verificată de toate punctele dreptei BC (fig. 22), inecuația de punctele din semiplanul opus originii.

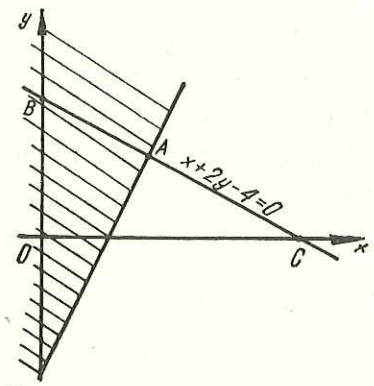

Fig. 22

Mulțimea care verifică ambele relații este formată din punctele semidreptei AC.

d) *Se dă ecuația* $x^2 - 2(\alpha + 1)x + \alpha^2 + \beta - 1 = 0$. *Considerînd pe* α, β *drept coordonate ale unui punct din plan, să se afle regiunea pentru care ecuația dată are rădăcini reale.*

Realizantul ecuației este $R = 4(2\alpha - \beta + 2)$; trebuie ca $2\alpha - \beta + 2 \geqslant 0$. Originea verifică inecuația, deci regiunea care dă rădăcini reale pentru ecuație este semiplanul *închis* (inclusiv dreapta) care conține originea. De-a lungul dreptei $2\alpha - \beta + 2 = 0$ ecuația dată are rădăcini reale, confundate.

3. *Aplicații la programarea liniară.* Producția unei întreprinderi, a unei unități agricole, transportul mărfurilor etc. care altădată se făceau oarecum empiric, ridică astăzi probleme de planificare în așa fel încît ținînd seamă de condițiile de lucru, posibilitățile de aprovizionare etc. să se ajungă pe totalul întreprinderii, unității agricole etc. la realizarea unui plan cu minimum de cheltuieli și cu venituri cît mai mari.

Condițiile de lucru se exprimă prin *ecuații sau inecuații de condiții*, iar realizarea finală printr-o funcție numită *de scop*, *de obiectiv* sau *de eficiență.* Cînd ecuațiile, inecuațiile și funcția sînt de gradul I, programarea se numește *liniară.*

Nu putem da mai multe lămuriri în cadrul manualului, dar cîteva aplicații vor arăta cum la unele probleme simple, rezolvarea se poate face cu ajutorul geometriei analitice. Metoda se numește „metoda grafică".

E x e m p l u l 1. *O unitate agricolă trebuie să realizeze pe un teren de* 8 *ha două feluri de culturi* A *și* B. *Cheltuielile de investiții și venitul net pe ha, la fiecare cultură sînt în mii de lei:*

	A	B
investiții	2	3
venit net	4	5

Știind că unitatea agricolă dispune de cel mult 18 mii lei pentru aceste culturi, se cere în cazul soluției optime:

a) *repartiția terenului pentru cele două culturi;*

b) *venitul net maxim realizat.*

Să notăm cu x și y suprafețele destinate respectiv culturilor A și B. Condițiile de lucru sînt:

$$x + y = 8; \qquad 2x + 3y \leqslant 18. \tag{α}$$

Venitul net este dat de funcția (de eficiență)

$$f = 4x + 5y. \tag{β}$$

Trebuie să ținem seama în plus că $x \geqslant 0$ și $y \geqslant 0$, care se numesc *condiții de nenegativitate.*

Problema se pune astfel: ținînd seama de condițiile (α) de lucru (o ecuație și o inecuație) și de condițiile de nenegativitate, să se determine x și y care fac funcția (β) maximă.

Pentru aceasta căutăm mulțimea punctelor care satisfac sistemul: $x + y - 8 = 0$ și $2x + 3y - 18 \leqslant 0$.

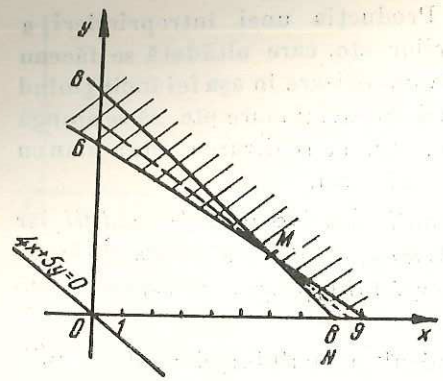

Fig. 23

Inecuaţia este verificată pe semiplanul care conţine originea (s-a haşurat partea care nu convine), deci porţiunea din dreapta $x + y - 8 = 0$ (cadranul I) care intră în acest semiplan este segmentul $\overline{MN}$.

Ecuaţia (β) se scrie $y = -\frac{4}{5}x + \frac{f}{5}$ şi considerînd pe f ca parametru, reprezintă drepte paralele de coeficient unghiular $m = -\frac{4}{5}$ şi ordonata la origine $n = \frac{f}{4}$ (în figura 23 este desenată dreapta care trece prin origine şi dă direcţia). Ordonata la origine creşte cînd dreapta taie segmentul MN într-un punct care se mişcă de la N la M: este deci maximă cînd dreapta trece prin M. Însă M are coordonatele (6, 2), astfel că $f_{max} = 4 \cdot 6 + 5 \cdot 2 = 34$ (mii de lei).

Programarea cea mai avantajoasă este deci: cultura A pe 6 ha ($x = 6$) şi cultura B pe 2 ha. Investiţiile sînt de $2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 18$ mii lei şi venitul de 34 mii lei. Problema are o soluţie unică.

Observări. a) Să presupunem că în aceleaşi condiţii de lucru venitul net ar fi acelaşi pentru ambele culturi, de pildă 4 (mii de lei). În acest caz funcţia de eficienţă ar fi $f = 4x + 4y$. Ecuaţia $4x + 4y - f = 0$ reprezintă o dreaptă paralelă cu MN, care dacă este verificată de un punct al lui MN, coincide cu MN. Atunci însă orice punct al segmentului MN este soluţie, deci avem o infinitate de soluţii.

Alegerea se face în acest caz după alte criterii de bună gospodărire.

b) Dacă am presupune veniturile astfel încît coeficientul unghiular al dreptei ce rezultă din funcţia de eficienţă să fie $m > -1$, atunci valoarea cea mai mare a lui f corespunde punctului N, prin urmare $y = 0$. S-ar face numai cultura A pe întreg termenul.

2. *Un centru alimentar este aprovizionat de trei centre furnizoare care dispun: primul de* 5 *autocamioane, al doilea de* 4 *autocamioane, al treilea de* 6. *Centrul alimentar are planificat să primească pe un interval dat de timp* 12 *autocamioane de marfă.*

Ştiind că transportul costă de la fiecare centru respectiv 4, 6 *şi* 5 *zeci de lei, să se determine programarea maşinilor astfel încît costul transportului total să fie minim.*

Notînd cu x, y, z numărul de maşini pe care trebuie să-l dea fiecare furnizor, condiţiile sînt următoarele: $x + y + z = 12$; $x \leqslant 5$, $y \leqslant 4$, $z \leqslant 6$,

apoi condiţiile de nenegativitate $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Funcţia de eficienţă este $f = 4x + 6y + 5z$ şi ea trebuie să fie minimă.

Fiind vorba de trei necunoscute, nu mai putem trata problema ca în cazul precedent. Vom proceda astfel: din prima ecuaţie rezultă $z = 12 - x - y \leqslant 6$, adică inecuaţia $x + y \geqslant 6$, la care se adaugă $x \leqslant 5$, $y \leqslant 4$. Înlocuind pe z în funcţia de eficienţă se deduce $y = x + f - 60$.

Rezumînd avem condiţiile $x + y \geqslant 6$; $0 \leqslant x \leqslant 5$; $0 \leqslant y \leqslant 4$ care reprezentate în figura 24 ne dau ca regiune convenabilă interiorul triunghiului ABC.

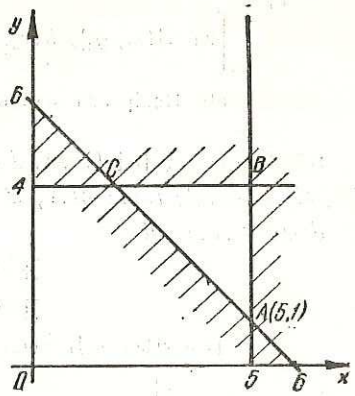

Fig. 24

Dreapta $y = x + f - 60$ paralelă cu prima bisectoare va avea ordonata la origine ($f - 60$) minimă cînd trece prin punctul cel mai de jos al triunghiului ABC, adică prin $A(5, 1)$. Înlocuind obţinem $1 = 5 + f - 60$, deci $f = 56$.

Programarea este: centrul I, cinci maşini, centrul II, 1 maşină, centrul III, 6 maşini. Costul minim al transportului $56 \times 10 = 560$ lei.

Exerciţii şi probleme

81. Se dau punctele $A(3, 1)$, $B(-2, 4)$ şi dreapta $5x - y - 8 = 0$. Se cere raportul în care dreapta împarte segmentul $\overline{AB}$. Punctul de intersecţie cu dreapta AB este interior sau exterior segmentului?

$$\left[k = -\frac{3}{11}, \text{interior.}\right]$$

82. *Se dă punctul fix* $A(1, -1)$ *şi punctul variabil* $M\left(\frac{4\alpha - 6}{\alpha}, \frac{\alpha - 2}{\alpha}\right)$. Să se arate că dreapta $x - 3y + 9 = 0$ împarte segmentul AM într-un raport, constant, oricare ar fi M.

83. Teorema lui Menelaus. *O dreaptă oarecare taie laturile* BC, CA, AB *ale unui triunghi, respectiv în punctele* M, N, P. *Să se demonstreze că există relaţia*

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$$

Reciproca este adevărată?

[Fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ şi $(D) = 0$ ecuaţia dreptei. $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{(D_2)}{(D_3)}$ etc. Reciproca se demonstrează geometric, prin reducere la absurd.]

84. Teorema lui Ceva. *Fie M un punct în planul unui triunghi şi A', B', C' punctele unde MA, MB, MC taie respectiv laturile BC, CA, AB. Să se demonstreze că*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

[Fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $M(x_0, y_0)$. Ecuaţia dreptei AM este

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \text{ Avem } = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} \Bigg]$$

85. *Se dă un triunghi dreptunghic ABC ($A = 90°$) şi un punct oarecare P. Să se cerceteze dacă există un unghi drept cu vîrful în P, astfel ca laturile lui să determine pe catetele AB, AC rapoarte egale.*

[Se iau AB, AC ca axe Ox, Oy. $B(a, 0)$, $C(0, b)$, $P(x_0, y_0)$. Laturile unghiului drept: $\lambda(x - x_0) - (y - y_0) = 0$; $x - x_0 + \lambda(y - y_0) = 0$ Rapoartele sînt $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{-\lambda x_0 + y_0}{\lambda(a - x_0) + y_0}$, $\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = \frac{-x_0 - \lambda y_0}{-x_0 + \lambda(b - y_0)}$ etc.]

86. Să se rezolve sistemul $x > 3$; $3x + y - 6 > 0$; $x - 2y - 1 > 0$.

[Regiunea din dreapta lui $x = 3$, cuprinsă în unghiul celorlalte două drepte.]

87. Să se rezolve sistemul: $3x + 2y - 6 > 0$; $y - x + 1 > 0$; $y - \frac{x}{5} - 1 < 0$.

[Interiorul triunghiului format din cele trei drepte.]

88. Să se rezolve sistemul $x^2 - 4 < 0$; $x + y - 1 < 0$.

[Fîşia dintre paralelele $x = \pm 2$ care conţine originea şi este mărginită de dreapta dată.]

89. Se consideră inecuaţiile $2x + 3y \geqslant 6$, $6x + 2y \leqslant 11$ şi funcţia $f = x + 4y$. Să se determine valorile lui x şi y care satisfac inecuaţiile şi fac funcţia f minimă.

[Regiunea convenabilă este cuprinsă în unghiul ascuţit al dreptelor $2x + 3y - 6 = 0$ şi $6x + 2y - 11 = 0$, dinspre Oy. Dreapta $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}f$ are ordonata la origine minimă în punctul comun celor două drepte: $x = \frac{3}{2}$, $y = 1$, deci $f_{min} = \frac{11}{2}$].

Capitolul 5

Distanţa de la un punct la o dreaptă. Aria unui triunghi

1. Distanţa de la origine la o dreaptă. Considerăm dreapta sub forma generală

$$(D) \quad Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

şi ne propunem să găsim distanţa $p = OP$ de la origine la această dreaptă (fig. 25).

Coordonatele la origine se deduc imediat

$$OA_0 = -\frac{C}{A}; \; OB_0 = -\frac{C}{B} \tag{2}$$

Să observăm acum că coeficientul unghiular al dreptei (D) este $m = -\frac{A}{B}$ şi deci coeficientul unghiular al dreptei OP ($\perp D$) este $m_{OP} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{A}$. Cunoscînd tangenta se deduce imediat $\cos\alpha$ şi $\sin\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{3}$$

Rezultă

$$OP = p = OA_0 \cos\alpha = -\frac{C}{A} \cdot \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ deci}$$

$$p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{4}$$

Distanţa de la origine la dreaptă se va socoti, prin convenţie totdeauna pozitivă şi pentru aceasta se va alege convenabil semnul din faţa radicalului de la numitor.

2. *Distanţa de la un punct oarecare la o dreaptă.* Fiind dată dreapta (D) prin ecuaţia (1) şi punctul M_0 (x_0, y_0) se pune problema de a găsi expresia distanţei $M_0N = d$ de la punctul M_0 la dreapta (D).

Pentru aceasta, pe lîngă elementele din figura 25 vom introduce punctul $M_0(x_0, y_0)$, proiecția sa M_0' pe Ox și distanța $M_0N = d$.

Avem evident $OM_0' = x_0$, $M_0'M_0 = y_0$.

Proiectînd acum suma vectorială

$$\overrightarrow{OM_0'} + \overrightarrow{M_0'M_0} + \overrightarrow{M_0N} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{OP}$$

pe direcția OP și observînd că NP are proiecția nulă (fig. 26), obținem

$$OP = OM_0' \cos\alpha + M_0'M_0 \sin\alpha - M_0N$$

sau

$p = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - d$, cu observarea că OP și M_0N sînt considerate de sensuri contrare. Rezultă imediat

$$d = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p. \qquad (5)$$

Dacă însă M_0 este de aceeași parte cu originea atunci d își schimbă semnul și avem

$$d = -(x_0\cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p).$$

Pentru a avea distanța d exprimată în funcție de coeficienții dreptei (D) și de coordonatele lui M_0, înlocuim în expresia distanței elementele date de (3) și (4) și obținem

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (6)$$

În fața radicalului se va lua semnul în așa fel încît termenul liber $\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ să fie *negativ* dacă M_0 se

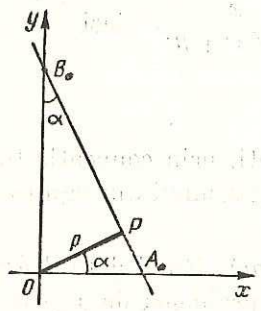

Fig. 25

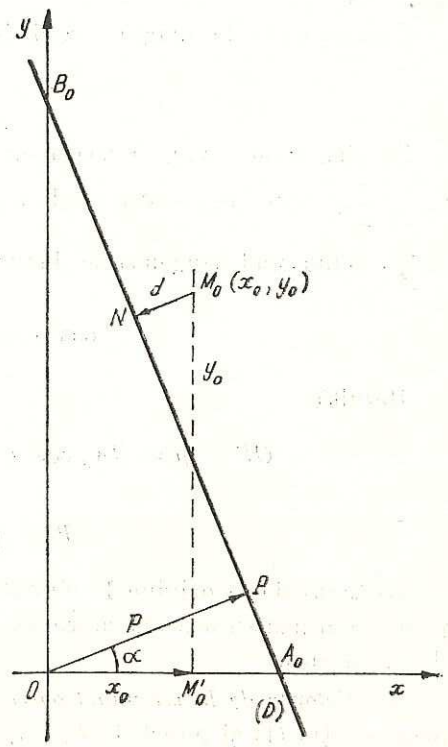

Fig. 26

află în semiplanul *opus originii*, față de (D), ceea ce corespunde expresiei (5) și se va lua semnul astfel ca termenul liber să fie *pozitiv* dacă M_0 se află în același semiplan cu originea față de (D), ceea ce corespunde expresiei (5′) a lui d.

Se impun însă unele precizări pentru ca lucrurile să fie clare.

I. Există probleme în care interesează numai mărimea distanței de la un punct la o dreaptă. În acest caz nu interesează semnul distanței și se scrie

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (6')$$

E x e m p l u. *Să se afle raza cercului cu centrul în* $\omega(-3, 2)$, *tangent dreptei* $8x - 15y - 48 = 0$.

Conform formulei (6′) *avem*

$$d = \frac{|8\cdot(-3) - 15\cdot 2 - 48|}{\sqrt{64+225}} = \frac{102}{17} = 6.$$

II. Există însă și probleme în care considerăm distanța ca avînd semn. În astfel de cazuri, dacă se dă distanța $d = k$, trebuie scris

$$\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = k \quad \text{sau} \quad \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = k,$$

de unde rezultă $\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \pm k$. Este evident același lucru.

E x e m p l u. *Să se determine punctele situate pe dreapta* $3x + 2y - 12 = 0$, *care au distanța de 3 unități pînă la dreapta* $12x - 5y + 30 = 0$.

Punctul căutat $M(\alpha, \beta)$ trebuie să satisfacă următoarele condiții:

a) să aparțină dreptei date, deci $3\alpha + 2\beta - 12 = 0$;

b) distanța de la M la dreapta $12x - 5y + 30 = 0$ trebuie să fie de 3 unități, adică

$$\frac{12\alpha - 5\beta + 30}{\pm 13} = 3.$$

Sîntem astfel conduși la următoarele sisteme

I) $3\alpha + 2\beta - 12 = 0$; $12\alpha - 5\beta - 9 = 0$

II) $3\alpha + 2\beta - 12 = 0$; $12\alpha - 5\beta + 69 = 0$

care ne dau punctele $M_1(2, 3)$ și $M_2(-2, 9)$.

Punctele M_1, M_2 se află de o parte și alta a dreptei $12x - 5y + 30 = 0$.

Interpretare geometrică. Considerînd α, β drept coordonate curente, ecuațiile $12\alpha - 5\beta - 9 = 0$ și $12\alpha - 5\beta + 69 = 0$ reprezintă două drepte paralele cu dreapta $12x - 5y + 30 = 0$, de o parte și alta a ei la 3 unități distanță. Acestea întîlnesc dreapta dată $3\alpha + 2\beta - 12 = 0$ în M_1 și M_2. În acest fel se regăsește soluția geometrică a problemei.

Distanța de la un punct $M(x_0, y_0)$ la dreapta a cărei ecuație este $Ax + By + C = 0$ se poate stabili și astfel.

Fie N piciorul perpendicularei dusă din M pe dreapta dată. Coordonatele lui N se găsesc rezolvînd sistemul

$$Ax + By + C = 0; \quad y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0).$$

Se găsește

$$N \begin{cases} x = \dfrac{B(Bx_0 - Ay_0) - AC}{A^2 + B^2} \\ y = \dfrac{-A(Bx_0 - Ay_0) - BC}{A^2 + B^2}. \end{cases}$$

De aici se deduce

$$x - x_0 = -\frac{A(Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2}; \quad y - y_0 = -\frac{B(Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2}$$

de unde

$$MN^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{(Ax_0 + By_0 + C)^2}{A^2 + B^2} \text{ și}$$

$$MN = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Calculul este aici doar schițat. Elevii îl pot face în întregime, ca exercițiu.

3. *Aria unui triunghi.* Considerăm triunghiul dat prin vîrfurile sale $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Fie AA' înălțimea din A. Aria triunghiului este dată de formula cunoscută $\mathcal{A} = \frac{1}{2} BC \cdot AA'$. Lungimea laturii BC este

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}. \tag{7}$$

Pentru calculul înălțimii AA' pornim de la ecuația dreptei BC:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{7'}$$

în care coeficienții lui x și y sînt: $(y_2 - y_3)$ și $-(x_2 - x_3)$.

Înălțimea AA' este distanța de la vîrful A la BC, deci

$$AA' = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} \tag{8}$$

Ținînd seama de valoarea lui BC din (7) și de formula ariei avem

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{9}$$

care este expresia analitică pentru aria unui triunghi, cînd se dau coordonatele vîrfurilor.*

Acum trebuie făcută o precizare: *aria în geometria analitică are un semn.* În adevăr relația (9) ne dă aria considerînd triunghiul parcurs în sensul $A-B-C$; dacă însă sensul de parcurgere este $A-C-B$, atunci ultimele două linii ale determinantului se schimbă între ele și determinantul își schimbă semnul.

Rămîne să vedem care este sensul care dă aria pozitivă. Pentru aceasta luăm un triunghi particular, anume $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(0, b)$, unde $a > 0$, $b > 0$, care dă imediat $\mathcal{A}_{AOB} = \frac{1}{2} ab$, prin urmare sensul care dă aria pozitivă este sensul trigonometric sau sensul de rotire de la Ox către Oy.

Sînt cazuri în care nu ne interesează decît mărimea ariei; atunci aceasta se ia în valoare absolută.

În particular aria triunghiului format de origine și punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, are ca expresie

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1). \tag{9'}$$

4. *Condiția ca trei puncte să fie în linie dreaptă* se poate regăsi pornind de la aria triunghiului. În adevăr condiția *necesară și suficientă* pentru ca aria triunghiului să fie nulă este ca cele trei puncte (presupuse distincte) să fie în linie dreaptă; rezultă că punctele sînt coliniare dacă

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exerciții și probleme

90. Să se găsească distanța de la punctul $A(1, 3)$ la dreapta $12x - 5y + 42 = 0$.

[$d = 3$.]

* Am făcut această precizare fiindcă există și o expresie a ariei atunci cînd se dau ecuațiile laturilor triunghiului.

91. Să se calculeze înălțimile triunghiului format de punctele $A(1, 0)$, $B(5, -2)$, $C(3, 3)$.

$\left[\text{Distanțele de la vîrfuri la laturile opuse: } \frac{16}{\sqrt{29}}, \frac{16}{\sqrt{13}}, \frac{8}{\sqrt{5}}.\right]$

92. Să se cerceteze dacă punctul $A(-2, 4)$ este interior sau exterior cercului cu centrul în ω (0,3), tangent dreptei $3x + 4y - 24 = 0$.

93. Să se cerceteze dacă dreapta $3x - 4y + 8 = 0$ este secantă sau exterioară cercului cu centrul în ω (2, 1), care trece prin A (6, 4).

94. Dintre dreptele paralele $15x - 8y + \lambda = 0$ (λ parametru real), să se aleagă acelea față de care punctul A (2, 2) are distanța de *o unitate*.

[$15x - 8y + 3 = 0$; $15x - 8y - 31 = 0$.]

95. Să se determine dreptele care trec prin punctul $P(-1, 2)$, față de care punctul $A(3, 5)$ are distanța de 3 unități.

[$y = 2$ și $24x - 7y + 38 = 0$.]

96. Să se determine λ astfel ca distanța de la punctul $A(3, 4)$ la dreapta variabilă $(\lambda + 3)\,x - (\lambda - 2)\,y + 3\lambda - 1 = 0$ să fie $d = \sqrt{10}$.

[$3x - y + 5 = 0$ și $x + 3y - 5 = 0$.]

97. Să se calculeze distanța dintre dreptele paralele

$$48x + 14y - 21 = 0 \text{ și } 24x + 7y - 28 = 0.$$

[Distanța de la un punct al unei drepte, de exemplu (0, 4) la cealaltă dreaptă; $d = 0{,}7$.]

98. Să se calculeze distanța dintre două drepte paralele, aduse la formele $Ax + By + C = 0$, $Ax + By + C' = 0$.

$\left[\text{Se poate alege } \left(-\frac{C}{A}, 0\right) \text{ de pe prima dreaptă; } d = \frac{|C' - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.\right]$

99. Să se calculeze proiecția segmentului determinat de punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, pe direcția dată de coeficientul unghiular m.

[Se scrie distanța de la A la dreapta care trece prin B perpendiculară pe direcția dată. Pr. $AB = \frac{|x_1 - x_2 + m(y_1 - y_2)|}{1 + m^2}$.]

100. Se dă dreapta $5x - 12y + 32 = 0$ și punctele $A(1, -1)$, $B(5, -3)$. Să se afle coordonatele punctului M, egal depărtat de A și B, care are distanța de 4 unități pînă la dreapta dată.

$\left[M_1(4, 0) \text{ și } M_2\left(\frac{180}{19}, \frac{208}{19}\right).\right]$

101. Să se arate că suma distanțelor de la un punct interior la laturile unui triunghi echilateral este constantă.

[Se poate lua o latură ca Ox și mediatoarea ei ca Oy. Atenție la semnele distanțelor pentru a nu face diferență în loc de sumă. Suma constantă are valoarea înălțimii.]

102. Să se găsească pe axa Oy un punct M egal depărtat de dreptele $3x - 4y + 6 = 0$ și $4x - 3y - 9 = 0$.

$\left[M_1(0, 15) \text{ și } M_2\left(0, -\frac{3}{7}\right).\right]$

103. Să se calculeze aria triunghiului format de punctele A (1, 1), $B(-2, 4)$, C $(-4, -3)$.

[$\mathcal{A} = 13{,}50$ unități pătrate.]

104. Să se calculeze aria patrulaterului format de punctele $A(3, 0)$, B (2, 5), C $(-1, 3)$, D $(1, -4)$.

[Se descompune în triunghiuri. Atenție la semnele ariilor pentru a nu face diferența în loc de sumă, $\mathcal{A} = \frac{39}{2}$.]

105. Să se demonstreze că aria unui patrulater ale cărui vîrfuri sînt $A_i (i = 1,2,3,4)$ și care are ca diagonale A_1A_3 și A_2A_4 este dată de una din formulele

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}$$

[Aceeași indicație ca mai înainte. Se va ține seama de proprietățile determinanților.]

106. Se dă dreapta $3x - 4y + 4 = 0$ și punctul A (8,0). Să se calculeze coordonatele punctelor unde dreptele ce trec prin A și fac cu axa Ox 45° și 135° taie dreapta dată. Să se afle aria triunghiului format de cele trei drepte.

[$B(36, 28)$, $C(4, 4)$. $\mathcal{A} = 112$ unități de arie.]

107. Se dau punctele A (2, 2) și B (5, 1). Să se determine punctul C, situat pe dreapta $x - 2y + 8 = 0$, astfel încît aria triunghiului ABC să fie de 17 u².

[*Indicație.* Se ia $C(\alpha, \beta)$ care trebuie să verifice dreapta dată, iar aria $ABC = \pm 17$, căci C poate fi de o parte sau alta a dreptei date. Sistemele dau $C(12, 10)$ și $C'(-16, -4)$.]

108. Fiind date punctele A (1, 0), B $(-2, 4)$, C $(-1, 4)$, D (3, 5) să se găsească pe dreapta $y = 3x - 5$ un punct M astfel încît ariile triunghiurilor MAB, MCD să fie egale.

$\left[M_1\left(2, \frac{7}{3}\right), M_2(-9, -32).\right]$