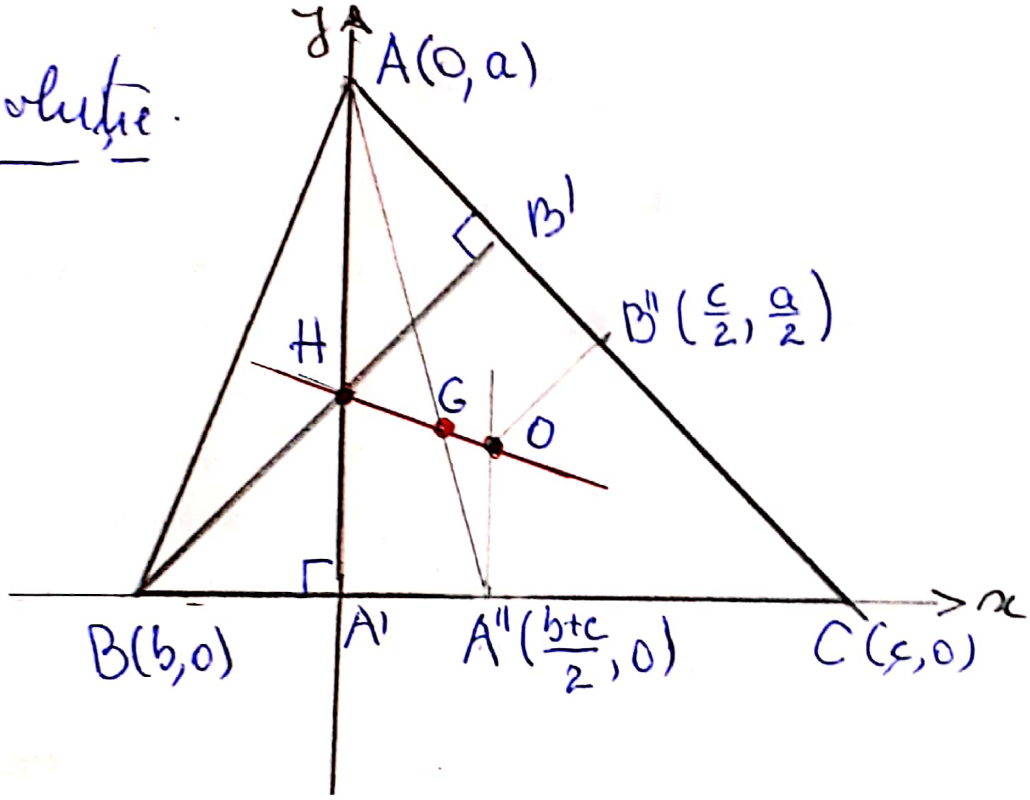
20.11.2020

Seminar 8 gr. 314

(1). Fie ABC un triunghi oarecare.
Să se demonstreze că H, G, O sunt coliniare și $HG = 2 \cdot GO$.



Soluție.

$AC: \frac{x}{c} + \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow ax + cy - ac = 0$

$m_{AC} = -\frac{a}{c}$

$BB' \perp CA \Rightarrow m_{BB'} = -\frac{1}{m_{AC}} \Leftrightarrow m_{BB'} = \frac{c}{a}$

$$\begin{aligned} BB' &: \begin{cases} y = \frac{c}{a}(x-b) \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{bc}{a} \\ AA' &: \end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{H\left(0, -\frac{bc}{a}\right)}$.

$$x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3}$$

(Rezultă din $\vec{r}_G = \frac{1}{3}(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C) \Leftrightarrow$
$x_G\vec{i}+y_G\vec{j} = \frac{1}{3}[(x_A+x_B+x_C)\vec{i} + (y_A+y_B+y_C)\vec{j}]$)

$$\rightarrow x_G = \frac{b+c}{3}, \ y_G = \frac{a}{3}$$

$$\boxed{G\left(\frac{b+c}{3}, \frac{a}{3}\right)}$$

Ecuația mediatoarei lui BC este

1) $x = \frac{b+c}{2}$ (este paralelă cu axa y-ecuația: $x=0$ și trece prin A'' mijlocul lui BC).

Ecuația mediatoarei lui AC este:

2) $y - \frac{a}{2} = \frac{c}{a}\left(x - \frac{c}{2}\right)$ ($y - y_0 = m(x-x_0)$ unde (x_0, y_0) sunt coordonatele mijlocului B'' a lui AC, iar m este ~~…~~ $\frac{c}{a}$ ca pentru BB').

Din 1) și 2) rezultă coordonatele lui O.

$$y = \frac{a}{2} + \frac{c}{a}\left(\frac{b+c}{2} - \frac{c}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{a}{2} + \frac{bc}{2a} \Leftrightarrow y = \frac{a^2+bc}{2a}$$

$$\boxed{O\left(\frac{b+c}{2}, \frac{a^2+bc}{2a}\right)}.$$

Condiția de coliniaritate:

$$\begin{vmatrix} x_H & y_H & 1 \\ x_G & y_G & 1 \\ x_O & y_O & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & -\frac{bc}{a} & 1 \\ \frac{b+c}{3} & \frac{a}{3} & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{a^2+bc}{2a} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{b+c}{36a} \begin{vmatrix} 0 & -6bc & 1 \\ 2 & 2a^2 & 1 \\ 3 & 3a^2+3bc & 1 \end{vmatrix} = 0$$

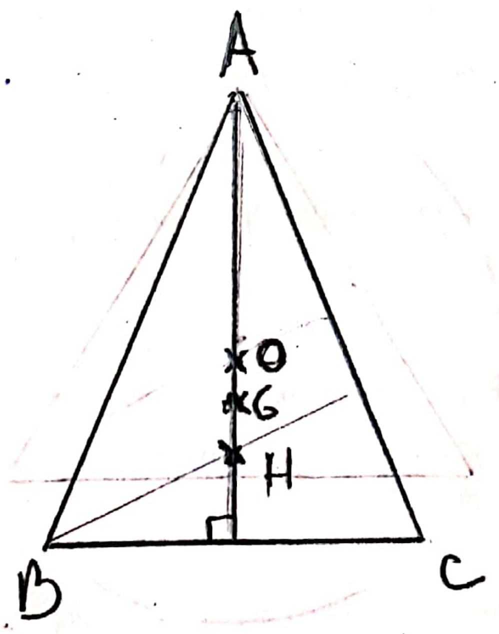
$+6bc$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c}{36a} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2(a^2+3bc) & 1 \\ 3 & 3(a^2+3bc) & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c}{36a} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2(a^2+3bc) \\ 3 & 3(a^2+3bc) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{„A"} \; (\forall a,b,c \in \mathbb{R}).$$

<u>Observație</u>. 1). $a \neq 0$, în caz contrar A, B, C ar fi coliniare.

$b+c=0 \Rightarrow b=-c \Rightarrow \Delta ABC$ este isoscel și proprietatea de coliniaritate este evidentă.



$$HG = \sqrt{(x_G - x_H)^2 + (y_G - y_H)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{b+c}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3} + \frac{bc}{a}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2(b+c)^2 + (a^2+3bc)^2}{9a^2}} =$$

$$= \frac{1}{3a}\sqrt{a^2(b+c)^2 + (a^2+3bc)^2}.$$

$$GO = \sqrt{(x_O - x_G)^2 + (y_O - y_G)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{b+c}{2} - \frac{b+c}{3}\right)^2 + \left(\frac{a^2+bc}{2a} - \frac{a}{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{b+c}{6}\right)^2 + \left(\frac{a^2+3bc}{6a}\right)^2} =$$

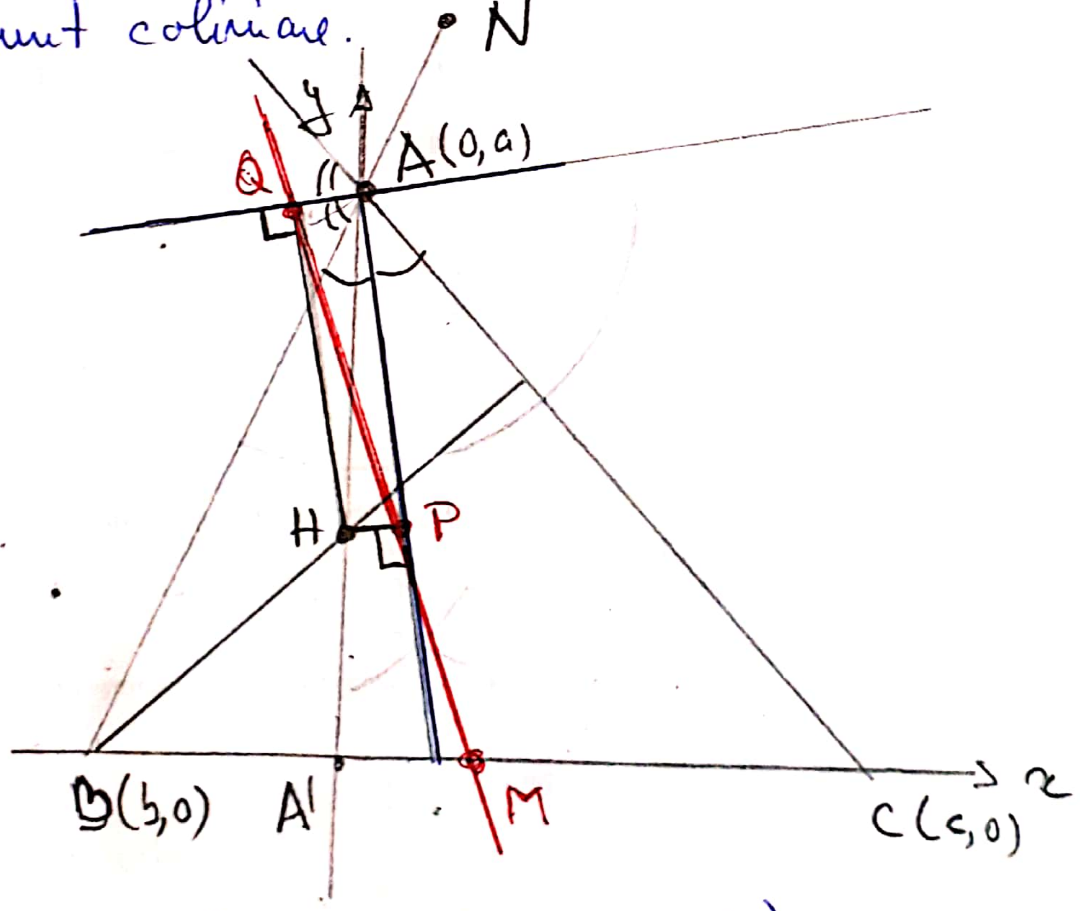
$$= \frac{1}{6a}\sqrt{a^2(b+c)^2 + (a^2+3bc)^2}.$$

$\Rightarrow HG = 2 \cdot GO.$

#

Scanned with CamScanner

② Fie ABC un triunghi oarecare și M mijlocul laturii $[BC]$. Se notează cu N un punct pe AB astfel ca $A \in (BN)$. Ortocentrul H al triunghiului ABC se proiectează pe bisectoarele unghiurilor $\widehat{BAC}$ și $\widehat{CAN}$ respectiv în punctele P și Q. Să se arate că M, P și Q sunt coliniare.



Soluție ???!!! (așa nu!)

1) $A(0,a)$, $B(b,0)$, $C(c,0)$.

2) $H\left(0, -\frac{bc}{a}\right)$.

3) $AC: \frac{x}{c} + \frac{y}{a} - 1 = 0 \Leftrightarrow ax + cy - ac = 0$

$AB: \frac{x}{b} + \frac{y}{a} - 1 = 0 \Leftrightarrow ax + by - ab = 0$

4). Ecuațiile bisectoarelor:

$$\frac{ax + cy - ac}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \pm \frac{ax + by - ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)x + \left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)y - \frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}} + \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

și

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)x + \left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)y - \frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}} - \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

5). Se scriu ecuațiile perpendicularelor din H pe cele două bisectoare.

6). Se rezolvă două sisteme pentru determinarea coordonatelor lui P și Q

7). Se verifică condiția de coliniaritate.

În concluzie:

$$\frac{P_1O}{P_1M}\cdot\frac{QM}{QN}\cdot\frac{P_2N}{P_2O}=\frac{ON}{OM}\cdot\frac{OM^2}{ON^2}\cdot\frac{ON}{OM}=1$$

$\Rightarrow$ MP_2, NP_1 şi OQ sunt concurente.

Problema 8.6.17 *Fie ABC un triunghi oarecare şi M mijlocul laturii $[BC]$. Se notează cu N un punct pe AB astfel ca $A \in (BN)$. Ortocentrul H al triunghiului ABC se proiectează pe bisectoarele unghiurilor $\widehat{BAC}$ şi $\widehat{CAN}$ respectiv în punctele P şi Q. Să se arate că punctele M, P şi Q sunt coliniare.*

(Droz Farny, 1864 şi
concurs de ocupare a catedrelor vacante, 1994)

Soluţie.

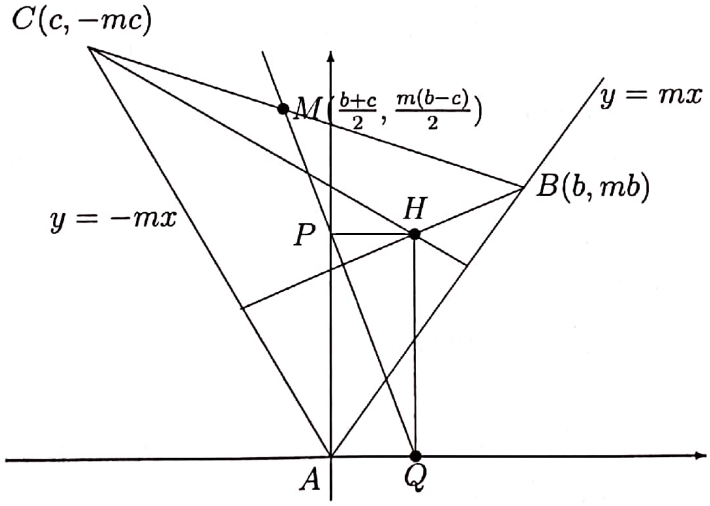


Figura 8.24

Alegem axa Ox bisectoarea exterioară şi Oy bisectoarea interioară. Atunci ecuaţiile laturilor AB şi AC vor fi $y = mx$ şi $y = -mx$.

Fie $B(b, mb)$, $C(c, -mc)$. Determinăm ecuaţiile înălţimilor din C şi B.

$$y + mc = -\frac{1}{m}(x - c); \quad y - mb = \frac{1}{m}(x - b)$$

Determinăm coordonatele lui H

$$2y + m(c - b) = \frac{c - b}{m}$$

$$y = \frac{(c - b)(1 - m^2)}{2m}$$

$$\frac{2x - c - b}{m} = -m(c + b)$$

$$x = \frac{(c + b)(1 - m^2)}{2}$$

Deci $Q\left(\frac{(b + c)(1 - m^2)}{2}, 0\right)$,

$P\left(0, \frac{(c - b)(1 - m^2)}{2m}\right)$, $M\left(\frac{b + c}{2}, \frac{m(b - c)}{2}\right)$.

Condiţia ca trei puncte să fie coliniare este:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

În cazul nostru

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{c-b}{2} \cdot \frac{1-m^2}{m} & 1 \\ \frac{(b+c)(1-m^2)}{2} & 0 & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{m(b-c)}{2} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{b + c}{2} \cdot \frac{c - b}{2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1-m^2}{m} & 1 \\ 1 - m^2 & 0 & 1 \\ 1 & -m & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{b + c}{2} \cdot \frac{c - b}{2} \left(\frac{1 - m^2}{m} - (1 - m^2)m - \frac{(1 - m^2)^2}{m}\right) =$$

$$= \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c-b}{2}(1-m^2)\left[\frac{1}{m} - m - \frac{1-m^2}{m}\right] = 0.$$

Observaţie. Determinantul este nul şi în cazurile 1) $b = -c$ sau 2) $m = \pm 1$. Cazul 1) arată că triunghiul ABC este isoscel şi P, Q, M sunt coliniare aflându-se pe înălţimea din A. Cazul 2) înseamnă că triunghiul ABC este dreptunghic în A şi configuraţia este degenerată, H, P şi Q coincizând cu A.

Problema 8.6.16 *Se consideră reperul cartezian xOy şi P un punct pe prima bisectoare a axelor de coordonate. Fie P_1 şi P_2 proiecţiile ortogonale ale lui P pe axa absciselor respectiv pe axa ordonatelor. O dreaptă variabilă d care trece prin P intersectează axa absciselor în M şi axa ordonatelor în N. Să se demonstreze că pentru orice poziţie a dreptei d, dreptele MP_2, NP_1 şi perpendiculara pe d care trece prin O sunt trei drepte concurente.*

(concurs de ocupare a catedrelor vacante, 1993)

Soluţia I.

Fie $P(a, a)$, $d:\ y - a = m(x - a)$.

Determinăm coordonatele lui M şi N.

Pentru $M:\ y = 0 \ \Rightarrow\ -a = m(x-a) \ \Rightarrow$

$$x = a - \frac{a}{m} = a\frac{m-1}{m} \ \Rightarrow\ M\left(a\frac{m-1}{m}, 0\right).$$

Pentru $N:\ x = 0 \ \Rightarrow\ y - a = -am \ \Rightarrow$

$$y = a(1-m) \ \Rightarrow\ N(0, a(1-m))$$

$$P_1(a,0),\ P_2(0,a).$$

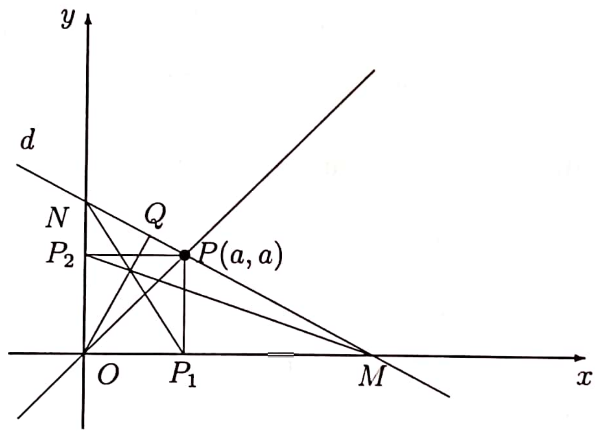


Figura 8.23

$$MP_2:\ \frac{x}{\dfrac{a(-1+m)}{m}} + \frac{y}{a} = 1 \ \Leftrightarrow$$

$$mx + (-1+m)y - a(-1+m) = 0$$

$$NP_1:\ \frac{x}{a} + \frac{y}{a(1-m)} = 1 \ \Leftrightarrow$$

$$(1-m)x + y - a(1-m) = 0$$

$$m_{OP} = -\frac{1}{m}$$

$$OP: \ y = -\frac{1}{m}x \ \Leftrightarrow \ x + my = 0$$

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca trei drepte $a_i x + b_i y + c_i = 0$, $i = \overline{1,3}$ să fie concurente este:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Calculăm:

$$\begin{vmatrix} m & m-1 & -a(m-1) \\ 1-m & 1 & -a(1-m) \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix},$$

adunăm linia 2 la linia 1 şi avem

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ 1-m & 1 & -a(1-m) \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

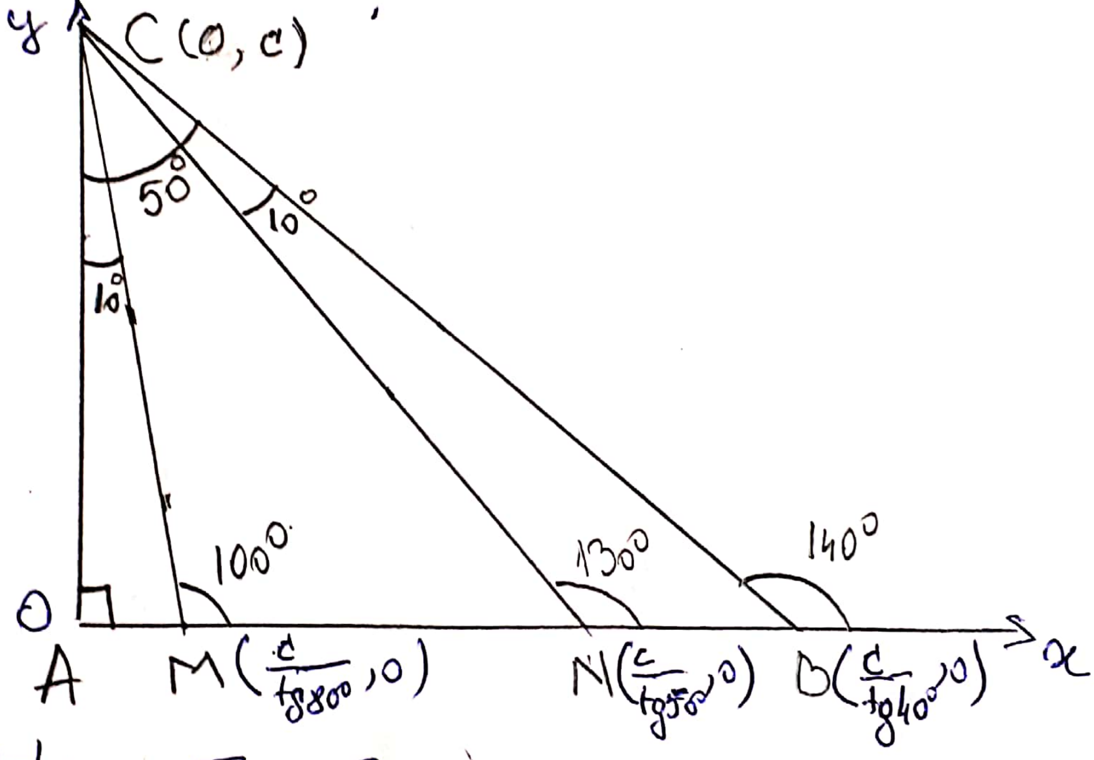
Deci dreptele sunt concurente.

Definitivat 2020

Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu măsura unghiului $ACB = 50^\circ$. Punctele M și N sunt situate pe latura AB astfel încât unghiurile ACM și NCB au măsura de 10°.

a) Arătați că $MB = MC$

b) Demonstrați că $BN = 2 \cdot AM$.



Soluție Fie $C(0, c)$, $c > 0$

$$\begin{cases} BC: y - c = tg\,140^\circ (x - 0) \\ Ox \equiv AB: y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B\left(-\frac{c}{tg\,140^\circ}, 0\right) \Leftrightarrow B\left(\frac{c}{tg\,40^\circ}, 0\right)$$

$$\begin{cases} CN: & y - c = tg\,130^\circ (x - 0) \\ AB: & y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N\left(-\frac{c}{tg\,130^\circ}, 0\right) \Leftrightarrow N\left(\frac{c}{tg\,50^\circ}, 0\right)$$

$$\begin{cases} AM: & y - c = tg\,100^\circ (x - 0) \\ AB: & y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\left(-\frac{c}{tg\,100^\circ}, 0\right) \Leftrightarrow M\left(\frac{c}{tg\,80^\circ}, 0\right)$$

a) $MB = MC$

$$\underline{\underline{MB}} = |x_B - x_M| = \left|\frac{c}{tg\,40^\circ} - \frac{c}{tg\,80^\circ}\right| = c\left|\frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} - \frac{\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ}\right| =$$

$$= c\,\frac{|\sin 80^\circ \cos 40^\circ - \sin 40^\circ . \cos 80^\circ|}{\sin 40^\circ . \sin 80} = c\,\frac{|\sin(80^\circ - 40^\circ)|}{\sin 40^\circ . \sin 80^\circ} =$$

$$= c \cdot \frac{\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ . \sin 80^\circ} = \frac{c}{\sin 80^\circ}.$$

$$\underline{\underline{MC}} = \sqrt{\left(\frac{c}{tg\,80^\circ} - 0\right)^2 + (0 - c)^2} = \sqrt{\frac{c^2}{tg^2 80} + c^2} =$$

$$= c\sqrt{\frac{1}{tg^2 80^\circ} + 1} = c\sqrt{\frac{\cos^2 80^\circ}{\sin^2 80^\circ} + 1} =$$

$$= c\sqrt{\frac{\cos^2 80^\circ + \sin^2 80^\circ}{\sin^2 80^\circ}} = \frac{c}{\sin 80^\circ}. \quad \#$$

b) $BN = |x_B - x_N| = \left| \frac{c}{tg\,40^\circ} - \frac{c}{tg\,50^\circ} \right| =$

$$= c \left| \frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} - \frac{\cos 50^\circ}{\sin 50^\circ} \right| = c \left| \frac{\cos 40^\circ \sin 50^\circ - \cos 50^\circ \sin 40^\circ}{\sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ} \right|$$

$$= c \, \frac{\sin(50^\circ - 40^\circ)}{\sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ} = c \cdot \frac{\sin 10^\circ}{\sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ}$$

$$AM = |x_M - x_A| = \left| \frac{c}{tg\,80} - 0 \right| =$$

$$= c \cdot \frac{\cos 80^\circ}{\sin 80} = c \cdot \frac{\sin 10^\circ}{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ} =$$

$$= c \, \frac{\sin 10^\circ}{2 \sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ}.$$

$$\Rightarrow AM = \frac{1}{2} BN \Leftrightarrow BN = 2 \cdot AM. \quad \#$$