Cuadraturi de tip Gauss

Cuprinsul

Formule Gauss-Legendre

Să se calculeze integralele $\int_{-1}^{1} \sin x^2 \mathrm{d}x$ și $\int_{-1}^{1} \cos x^2 \mathrm{d}x$ cu precizia $\varepsilon = 10^{-7}$ folosind o cuadratură gaussiană. Câte noduri sunt necesare?

Vom folosi o formulă de tip Gauss-Legendre

```
f1=@(x) sin(x.^2);
f2=@(x) cos(x.^2);
tol=1e-7;
n0=5;
[g_n1,g_c1]=Gauss_Legendre(n0);
v1(1)=vquad(g_n1,g_c1,f1);
v2(1)=vquad(g_n1,g_c1,f2);
k=1;
for n=n0+1:4*n0
    [gn,gc]=Gauss_Legendre(n);
    k=k+1;
    v1(k)=vquad(gn,gc,f1);
    if abs(v1(k)-v1(k-1)) < tol
        disp([gn,gc'])
        fprintf('I1(%2d)=%10.6f\n',n,v1(k))
        break;
    end
end
```

```
  -0.960289856497536   0.101228536290376
  -0.796666477413627   0.222381034453374
  -0.525532409916329   0.313706645877887
  -0.183434642495650   0.362683783378362
   0.183434642495650   0.362683783378362
   0.525532409916329   0.313706645877888
   0.796666477413627   0.222381034453374
```

```
   0.960289856497536   0.101228536290376
I1( 8)=  0.620537
```

```
k=1;
for n=n0+1:4*n0
    [gn,gc]=Gauss_Legendre(n);
    k=k+1;
    v2(k)=vquad(gn,gc,f2);
    if abs(v2(k)-v2(k-1)) < tol
        fprintf('I2(%2d)=%10.6f\n',n,v2(k))
        break;
    end
end
```

```
I2( 8)=  1.809048
```

Verificare simbolică

```
syms t rest f(t) xi
vpa(int(sin(t^2),t,-1,1))
```

ans =

$0.62053660344676220361630484633079$

```
vpa(int(cos(t^2),t,-1,1))
```

ans =

$1.8090484758005441629495767336651$

Verificare cu formula restului

```
po=legendreP(n,t);
c=coeffs(po,'All');
po=po/c(1)
```

po =

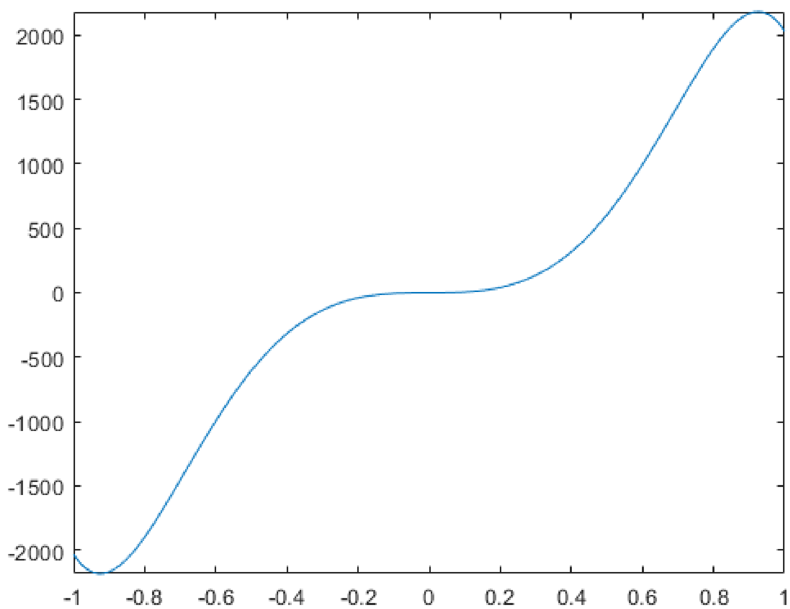
$$\frac{7}{1287}-\frac{28\,t^2}{143}+\frac{14\,t^4}{13}-\frac{28\,t^6}{15}+t^8$$

```
rest=1/factorial(2*n)*int(po^2,t,-1,1)*subs(diff(f(t),t,n),t,xi);
[rest,vpa(rest)]
```

ans =

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{7573384136472607\,\frac{\partial^8}{\partial \xi^8}\,f(\xi)}{3404126326545748309514119859404800} & 0.000000000000000002224765889977270125691636407827\,\frac{\partial^8}{\partial \xi^8}\,f(\xi) \end{array}\right)$$

```
fplot(diff(sin(t^2),t,7),[-1,1])
```



Formule Gauss-Cebîșev #1

Să se aproximeze

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{dx}$$

folosind o formulă gaussiană cu 10 noduri. Care este eroarea de aproximare?

Formula va fi de tip Gauss-Cebîșev de speța I. Calculăm nodurile și coeficienții. Coeficienții sunt egali cu $\frac{\pi}{10}$, iar nodurile sunt rădăcinile polinomului Cebîșev de speța 1 de grad 10, $T_n(x) = \cos(10 \arccos x)$, adică $\cos \frac{(2k-1)\pi}{2n+2},\ k = 1..11,\ n = 10$.

```
[g_n,g_c]=Gauss_Cheb1(10);
disp([g_n,g_c'])
```

```
   0.987688340595138   0.314159265358979
   0.891006524188368   0.314159265358979
   0.707106781186548   0.314159265358979
   0.453990499739547   0.314159265358979
   0.156434465040231   0.314159265358979
  -0.156434465040231   0.314159265358979
  -0.453990499739547   0.314159265358979
  -0.707106781186547   0.314159265358979
  -0.891006524188368   0.314159265358979
  -0.987688340595138   0.314159265358979
```

Valoarea aproximativă a integralei este

```
format long
vI=vquad(g_n,g_c,@cos)
```

```
vI =
   2.403939430634413
```

Deoarece $\left|\cos^{(n)} x\right| \leq 1$, restul va fi mai mic decât

```
po=chebyshevT(10,t)/2^(9)
```

po =

$$-\frac{1}{512} + \frac{25\,t^2}{256} - \frac{25\,t^4}{32} + \frac{35\,t^6}{16} - \frac{5\,t^8}{2} + t^{10}$$

```
rest=1/factorial(20)*int(po^2/sqrt(1-t^2),t,-1,1)
```

rest =

$$\frac{8536795713241637\,\pi}{10889035741470030830827987437816582766592}$$

```
double(vpa(rest))
```

```
ans =
     2.462948541511184e-24
```

Putem face și o verificare simbolică. Valoarea exactă a integralei este

```
ve=int(cos(t)/sqrt(1-t^2),t,-1,1)
```

ve =

$\pi\, \mathrm{J}_0\,(1)$

Diferența dintre valoarea exactă și cea calculată:

```
double(ve)
```

```
ans =
   2.403939430634413
```

```
abs(double(ve)-vI)
```

```
ans =
     4.440892098500626e-16
```

Explicați de ce este mai mare decât restul.

Formule Gauss-Cebîșev #2

Să se aproximeze

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\cos\left(x\right)\mathrm{dx}$$

folosind o formulă gaussiană cu 5 noduri. Care este eroarea de aproximare?

Formula va fi de tip Gauss-Cebîșev de speța II. Calculăm nodurile și coeficienții. Nodurile sunt rădăcinile polinomului Cebîșev de speța II de grad 5, $U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

```
[g_n,g_c]=Gauss_Cheb2(5);
disp([g_n,g_c'])
```

```
  -0.866025403784439   0.130899693899575
  -0.500000000000000   0.392699081698724
  -0.000000000000000   0.523598775598299
   0.500000000000000   0.392699081698724
   0.866025403784439   0.130899693899575
```

Valoarea aproximativă a integralei este

```
format long
vI=vquad(g_n,g_c,@cos)
```

```
vI =
   1.382459687798957
```

Deoarece $\left|\cos^{(n)} x\right| \leq 1$, restul va fi mai mic decât

```
po=chebyshevU(5,t)/2^5
```

po =

$$\frac{3\,t}{16} - t^3 + t^5$$

```
rest=1/factorial(10)*int(po^2*sqrt(1-t^2),t,-1,1)
```

rest =

$$\frac{1301357606610903\,\pi}{9671406556917033397649408}$$

```
double(vpa(rest))
```

```
ans =
     4.227239825522600e-10
```

Putem face și o verificare simbolică. Valoarea exactă a integralei este

```
ve=int(cos(t)*sqrt(1-t^2),t,-1,1)
```

ve =

$\pi\,\mathrm{J}_1\,(1)$

Diferența dintre valoarea exactă și cea calculată:

```
double(ve)
```

```
ans =
   1.382459687384169
```

```
abs(double(ve)-vI)
```

```
ans =
     4.147882037841555e-10
```

Ea este în concordanță cu restul.

Formule Gauss-Laguerre

Să se aproximeze

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin(x)\,\mathrm{dx}$$

folosind o formulă gaussiană cu 6 noduri. Care este eroarea de aproximare?

Formula este de tip Gauss-Laguerre.

Nodurile formulei vor fi rădăcinile polinomului Laguerre de grad 6, ortogonal pe $(0,\infty)$ în raport cu ponderea $w(x)=e^{-x}$.

```
po=laguerreL(6,0,t)
```

po =

$1-6\,t+\frac{15\,t^2}{2}-\frac{10\,t^3}{3}+\frac{5\,t^4}{8}-\frac{t^5}{20}+\frac{t^6}{720}$

```
c=coeffs(po,'All');
po=po/c(1)
```

po =

$$720 - 4320\,t + 5400\,t^2 - 2400\,t^3 + 450\,t^4 - 36\,t^5 + t^6$$

Coeficienții și nodurile se obțin astfel

```
[g_n,g_c]=Gauss_Laguerre(6);
disp([g_n,g_c'])
```

```
   0.222846604179261   0.458964673949964
   1.188932101672623   0.417000830772121
   2.992736326059315   0.113373382074045
   5.775143569104513   0.010399197453149
   9.837467418382587   0.000261017202815
  15.982873980601699   0.000000898547906
```

Valoarea integralei

```
format long
vI=vquad(g_n,g_c,@sin)
```

```
vI =
   0.500049474797675
```

Deoarece $\left|\sin^{(n)} x\right| \leq 1$, restul va fi mai mic decât

```
rest=1/factorial(12)*int(po^2*exp(-t),t,0,Inf)
```

rest =

$$\frac{1277696559217977675}{1180591620717411303424}$$

```
double(vpa(rest))
```

```
ans =
   0.001082251082251
```

Putem face și o verificare simbolică. Valoarea exactă a integralei este

```
ve=int(sin(t)*exp(-t),t,0,Inf)
```

ve =

$$\frac{1}{2}$$

Diferența dintre valoarea exactă și cea calculată:

```
double(ve)
```

```
ans =
   0.500000000000000
```

```
abs(double(ve)-vI)
```

```
ans =
     4.947479767514196e-05
```

Ea este în concordanță cu restul.

Formule Gauss-Hermite

Să se aproximeze

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\left(\cos\left(x\right)+\sin\left(x\right)\right)\mathrm{dx}$$

cu 8 zecimale exacte.

Formula este de tip Gauss-Hermite. Vom obține numărul de noduri din formula restului. Derivata de orice ordin a lui $\cos x + \sin x$ este $\leq \sqrt{2}$

```
syms R
for n=5:15
    po=hermiteH(n,t);
    c=coeffs(po,'All');
    po=po/c(1);
    R=int(po^2*exp(-t^2),t,-Inf,Inf)/factorial(2*n);
    if double(R) < 1e-8/sqrt(2)
        po, R
        disp([double(R),n])
```

```
        break
    end
end
```

```
po =
```

$$-\frac{105\,t}{8}+\frac{105\,t^3}{4}-\frac{21\,t^5}{2}+t^7$$ `R =`

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2214051840}$$

```
   0.000000000800548   7.000000000000000
```

Calculăm nodurile, coeficienții și valoarea aproximativă a integralei

```
f=@(x) sin(x)+cos(x);
[g_n,g_c]=Gauss_Hermite(n);
disp([g_n,g_c'])
```

```
  -2.651961356835232   0.000971781245100
  -1.673551628767471   0.054515582819127
  -0.816287882858965   0.425607252610128
   0.000000000000000   0.810264617556807
   0.816287882858964   0.425607252610128
   1.673551628767471   0.054515582819127
   2.651961356835233   0.000971781245100
```

```
vI=vquad(g_n,g_c,f)
```

```
vI =
   1.380388447754078
```

Valoarea exactă a integralei

```
ve=int(exp(-t^2)*(cos(t)+sin(t)),t,-Inf,Inf)
```

```
ve =
```

$$\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$$

```
abs(double(ve)-vI)
```

```
ans =
     7.109348665323978e-10
```

este în concordanță cu restul.

Formule Gauss-Jacobi

Să se aproximeze

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{x^2}{1+x^2} \mathrm{dx}$$

folosind o formulă gaussiană cu 8 noduri. Care este eroarea de aproximare?

Formula este de tip Gauss-Jacobi.

Nodurile formulei vor fi rădăcinile polinomului Jacobi de grad 8, ortogonal pe $[-1,1]$ în raport cu ponderea $w(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

```
po=jacobiP(8,1/2,-1/2,t);
c=coeffs(po,'All');
po=po/c(1)
```

po =

$$\frac{1}{256} - \frac{t}{32} - \frac{5\,t^2}{32} + \frac{5\,t^3}{16} + \frac{15\,t^4}{16} - \frac{3\,t^5}{4} - \frac{7\,t^6}{4} + \frac{t^7}{2} + t^8$$

Coeficienții și nodurile se obțin astfel

```
[g_n,g_c]=Gauss_Jacobimodificat(8,1/2,-1/2);
disp([g_n,g_c'])
```

```
  -0.982973099683902   0.732905143792132
  -0.850217135729614   0.683838654253425
  -0.602634636379256   0.592332376475014
  -0.273662990072083   0.470744740324667
   0.092268359463302   0.335496829804836
   0.445738355776538   0.204854624665768
   0.739008917220659   0.096462078624944
   0.932472229404356   0.024958205649009
```

Valoarea integralei

```
f=@(x) x.^2./(1+x.^2);
format long
vI=vquad(g_n,g_c,f)
```

```
vI =
   0.920152566416141
```

Valoarea exactă a integralei

```
ve=int(sqrt((1-t)/(1+t))*t^2/(1+t^2),t,-1,1)
```

ve =

$$-\frac{\pi\left(\sqrt{2}-2\right)}{2}$$

```
abs(double(ve)-vI)
```

```
ans =
     1.381905530672967e-06
```

este în concordanță cu valoarea calculată.

Restul va fi

```
syms f(t) F(t)
f(t)=t^2/(1+t^2);
R=int(po^2*sqrt((1-t)/(1+t)),t,-1,1)/factorial(16)*subs(diff(F(t),t,16),t,xi)
```

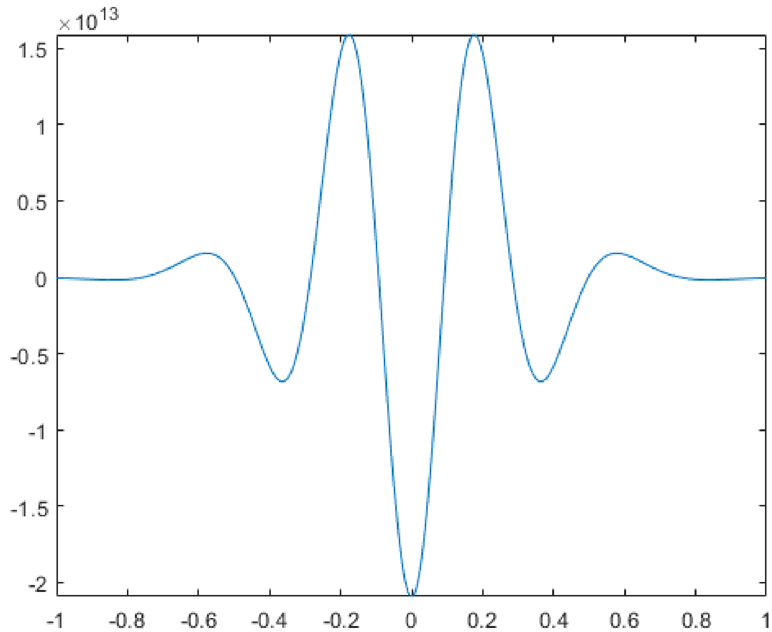
R =

$$\frac{\pi\,\frac{\partial^{16}}{\partial\xi^{16}}\,F\left(\xi\right)}{137119595809968000}$$

```
double(int(po^2*sqrt((1-t)/(1+t)),t,-1,1)/factorial(16))
```

```
ans =
     2.291133251255364e-18
```

```
fplot(diff(f(t),t,16),[-1,1])
```



Valoarea aproximativă a restului va fi

```
R=int(po^2*sqrt((1-t)/(1+t)),t,-1,1)/factorial(16)*subs(diff(f(t),t,16),t,0)
```

R =

$$-\frac{\pi}{65536}$$

```
double(R)
```

ans =
    -4.793689962142629e-05