Suport seminar algoritmica grafurilor
II. Algoritmi pentru drumuri de cost minim de la un vârf la toate vârfurile

Pentru o problemă de drum de cost minim, se dă un graf un graf orientat și ponderat $G = (V, E)$ cu funcția de pondere $w : E \rightarrow \mathbb{R}$. Ponderea $w(p)$ drumului $p = \langle v_0, v_1, ..., v_k \rangle$ este suma ponderilor arcelor ce formează drumul:

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i).$$

Se definește costul drumului minim $\delta(u, v)$ de la u la v:

$$\delta(u,v) = \begin{cases} min\{w(p) : u \overset{p}{\rightsquigarrow} v\} & \text{dacă există un drum de la } u \text{ la } v, \\ \infty & \text{altfel.} \end{cases}$$

Astfel, un drum de cost minim de la vârful u la vârful v în graful $G = (V, E)$ este definit ca orice drum p cu ponderea $w(p) = \delta(u, v)$.

2.1 Cost minim în grafuri neorientate

Un algoritm care determină drumul de cost minim pentru grafuri neorientate este algoritmul lui Moore.

Moore(G, u)
$l(u) := 0$
for toate vârfurile $v \in V(G),\ v \neq u$ **do**
  $l(v) := \infty$
$Q = \varnothing$
$u \rightarrow Q$
while $Q \neq \emptyset$ **do**
  $Q \rightarrow x$
  for toți vecinii $y \in N(x)$ **do**
    if $l(y) = \infty$ **then**
      $p(y) := x$
      $l(y) := l(x) + 1$
      $y \rightarrow Q$
return l, p

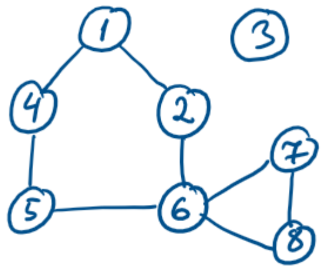
notații:

- u - nod sursă;
- $l(v)$ - lungimea drumului până la vârful v;
- $p(v)$ - părintele vârfului v;
- Q - structură de date de tip coadă.

Problema 1. Pentru graful din figura alăturată să se aplice algoritmul lui Moore și să se determine valorile l și p pentru fiecare vârf dacă vârful de pornire este 1.

Soluție

	1	2	3	4	5	6	7	8
l	0	1	∞	1	2	2	3	3
p	-	1	-	1	4	2	6	6



2.2 Cost minim pentru grafuri orientate

Algortmul Bellman-Ford Rezolvă problema drumului de cost minim pentru cazul general (ponderile pot lua valori negative). Pentru un graf $G = (V, E)$ orientat și ponderat cu vârful sursă s și funcția de pondere $W : E \to \mathbb{R}$, algoritmul Bellman-Ford întoarce o valoare booleană care arată dacă există un circuit de pondere negativă accesibil din s. Dacă există un astfel de circuit de pondere negativ algoritmul indică faptul că nu există soluție.

Pentru a reprezenta drumul de cost minim (pentru a cunoaște vârfurile care compun drumul de cost minim) se reține pentru fiecare vârf $v \in V$ din gragul $G = (V, E)$ **predecesorul** acestuia, notat cu $v.\pi$, predecesorul poate fi un alt vârf din graf sau **NIL**.

Pentru fiecare vârf $v \in V$ din graful $G = (V, E)$ se mai reține atributul $v.d$ care reprezintă limita superioară a ponderii drumului de la vârful s la vârful v. Atributul $v.d$ se mai numește **estimarea drumului de cost minim**.

Bellman_Ford(G, w, s)

```
INITIALIZARE_S(G,s)
for i = 1 la |V| − 1 do
    for fiecare arc (u, v) ∈ E do
        RELAX(u, v, w)
for fiecare arc (u, v) ∈ E do
    if v.d > u.d + w(u, v) then
        return FALSE
return TRUE
```

Inițializarea atributelor se face astfel:

INITIALIZARE_S(G, s)

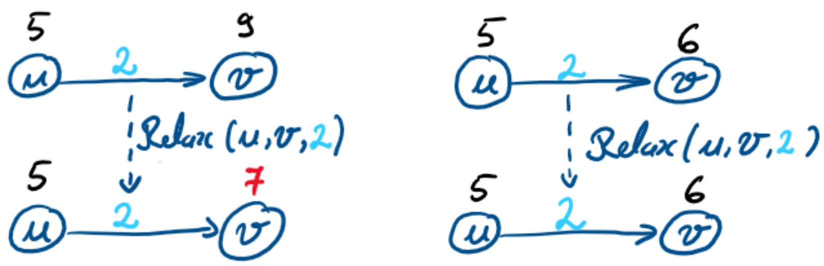
```
for v ∈ V do
    v.d = ∞
    v.π = NIL
s.d = 0
```

După inițializare: $v.\pi = NIL\ \forall v \in V$, $s.d = 0$ și $v.d = \infty\ \forall v \in V - \{s\}$. Cu ajutorul procedurii de relaxare se determină/testează dacă se poate îmbunătăți drumul de cost minim de la s la v dacă drumul ar trece prin nodul u, se actualizează $v.d$ și $v.\pi$ dacă drumul se îmbunătățește.

RELAX(u, v, w)

```
if v.d > u.d + w(u,v) then
    v.d = u.d + w(u,v)
    v.π = u
```

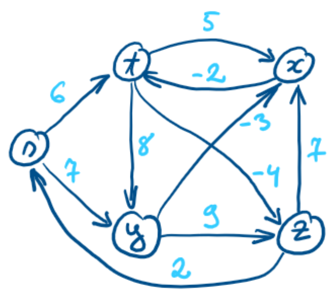
Figura de mai jos prezintă două exemple de relaxare a unui arc. Deasupra fiecărui vârf se reprezintă estimarea drumului de cost minim ($v.d$).



(a) (b)

Figura 1: Pentru figura (a), deoarece $v.d > u.d + w(u, v)$, valoarea lui $v.d$ scade (drumul are un cost mai mic dacă trece prin vârful u). Pentru figura (b) $v.d \leq u.d + w(u, v)$ şi valoarea $v.d$ rămâne neschimbată.

Problema 2. Pentru graful din figura alăturată să se aplice algoritmul lui Bellman-Ford. Vârful sursă este vârful s.



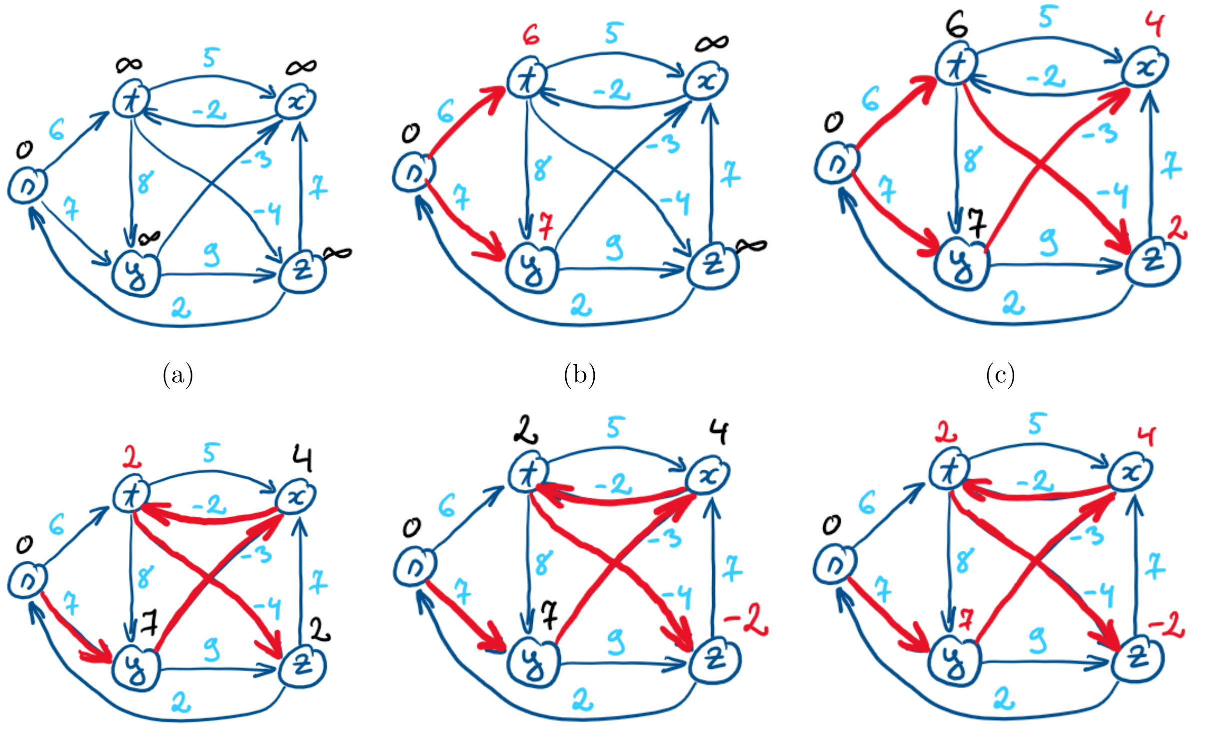
Rezolvare Vârful sursă este vârful s. Atributul d este reprezentat deasupra fiecărui vârf (culoarea roșie indică schimbare în bucla respectivă). Arcele colorate în roșu arată predecesorul unui vârf, astfel dacă arcul (u, v) are culoarea roșie atunci $v.\pi = u$. Pentru acest exemplu se presupune că ordinea de parcurgere a arcelor din graf (liniile 3-4 din algoritm) este: (t, x), (t, y), (t, z), (x, t), (y, x), (y, z), (z, x), (z, s), (s, t), (s, y). Figura 2 prezintă execuția algoritmului Bellman-Ford.

Tabela 1: Valoarea atributelor d şi π la finalul execuţiei algoritmului pentru graful dat la problema 2.

$v \in V$	s	t	x	y	z
$v.d$	0	2	4	7	-2
$v.\pi$	NIL	x	y	s	t

Algoritmul Dijkstra Algoritmul lui Dijkstra rezolvă problema drumului de cost minim pentru un graf $G = (V, E)$ orientat și ponderat pentru care toate ponderile nu sunt negative. Pentru fiecare arc $(u, v) \in E$ ponderile $w(u, v) \geq 0$.

Algoritmul menține un set S de vârfuri pentru care s-a determinat ponderea drumului minim de la vârful sursă s. Algoritmul alege vârful $u \in V - S$ pentru care estimarea costului drumului



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

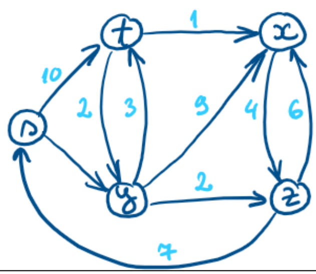
Figura 2: Execuţia algoritmului Bellman-Ford. Figura (a) reprezinta graful dat cu valoarea atributului d pentru fiecare vârf după iniţializare. Figurile (b)-(e) prezintă atributele d şi π pentru fiecare vârf după fiecare iteraţie a buclei for din algoritm (linia 2 algoritm Bellman-Ford). Figura (f) prezintă graful după terminarea execuţiei algoritmului. Pentru acest exemplu algoritmul întoarce *TRUE*.

este minimă ($\min_{u \in V-S} u.d$), adaugă u în S și relaxează toate arcele care pleacă din u. Pentru implementare se folosește o coadă minimă de priorități în care elementele sunt ordonate după atributul d.

Dijkstra(G, w, s)

```
INITIALIZARE_S(G,s)
S = ∅
Q = V
while Q ≠ ∅ do
    u = EXTRACT_MIN(Q)
    S = S ∪ {u}
    for v ∈ G.Adj[u] do
        RELAX(u,v,w)
```

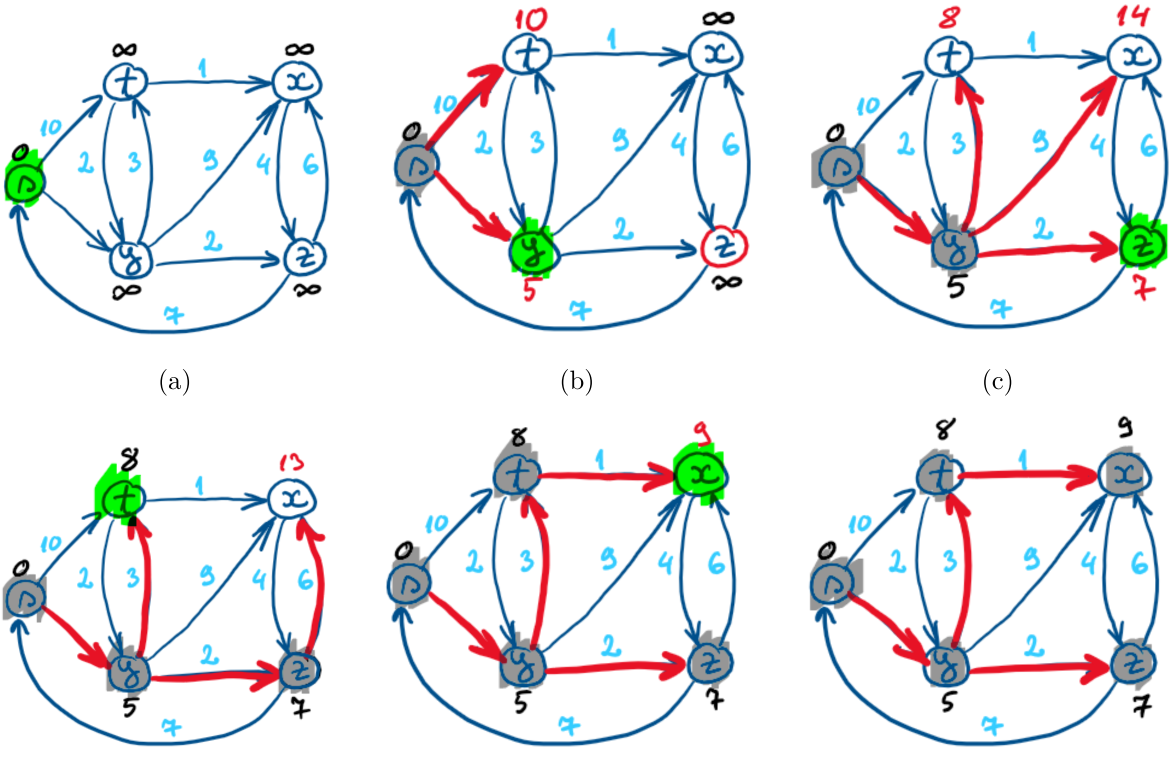
Problema 3. Pentru graful alăturat să se ruleze algoritmul lui Dijkstra și să se găsească drumul de cost minim începând din vârful s.



Rezolvare Vârful sursă este vârful s. Atributul d este reprezentat deasupra fiecărui vârf (culoarea roșie indică schimbare în bucla respectivă). Arcele colorate în roșu arată predecesorul unui vârf, astfel dacă arcul (u, v) are culoarea roșie atunci $v.\pi = u$. Culoarea verde indică vârful extras din Q, un vârf colorat în gri aparține setului S. Figura 3 prezintă execuția agoritmului Dijkstra.

Tabela 2: Valoarea atributelor d şi π la finalul execuţiei algoritmului pentru graful dat la problema 3.

$v \in V$	s	t	x	y	z
$v.d$	0	8	9	5	7
$v.\pi$	NIL	y	t	s	y



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

Figura 3: Execuţia algoritmului Dijkstra. Vârful sursă este vârful s, vârfurile cu fundal gri sunt în setul S iar vârfurile pe un fundal alb sunt în $Q = V - S$. Figura (a) reprezinta graful dat înainte de prima iteraţie a buclei while (liniile 4-8) cu valoarea atributului d pentru fiecare vârf după iniţializare. Vârful care are un fundal verde este cel cu valoarea minimă din Q şi este vârful u din linia 5 a algoritmului. Figurile (b)-(f) prezintă atributele d şi π pentru fiecare vârf după fiecare iteraţie a buclei while din algoritm, vârful care are un fundal verde este cel cu atributul d minim în fiecare iteraţie (vârful u din linia 5 a algoritmului).

Algoritmul Bellman Kalaba Rezolvă problema drumului de cost minim de la toate vârfurile la un vârf dat pentru un graf $G = (V, E)$ simplu orientat sau neorientat. Este un algoritm matricial, se folosește de matricea de adiacență a grafului. Se alege un vârf (o coloană din matricea de adiacență) și se determină distanțele de la toate vârfurile la acest vârf. Coloana aleasă (vârful ales) este notată cu $V^{(1)} = (V_i^{(1)})_{i=\overline{1,n}}$. Dacă matricea de adiacența a grafului este $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, unde $a_{ij} = d_{ij}^{(0)}$. Elementele matricii de adiacența au valoarea:

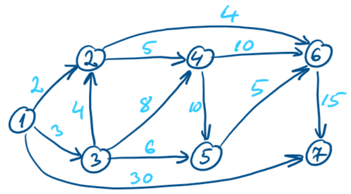
$$a_{ij} = \begin{cases} w(v_i, v_j) & \text{dacă } (v_i, v_j) \in E, \\ 0 & \text{dacă } i = j, \\ \infty & \text{dacă } (v_i, v_j) \notin E. \end{cases}$$

Se determină vectorii pentru $k = 1, 2, ..., n$:

$$V_i^{(k)} = \min_{j=\overline{1,n}} \{a_{ij} + V_j^{(k-1)}\}, \text{ pentru } i = 1, 2, ..., n$$

până când $V^{(t)} = V^{(t-1)}$ pentru un t.

Problema 4. Pentru graful alăturat să se determine folosind algoritmul lui Bellman-Kalaba dostul minim pentru drumurile care duc în vârful 7.



Soluție Matricea de adiacentă asociată grafului este

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \infty & \infty & \infty & 30 \\ \infty & 0 & \infty & 5 & \infty & 4 & \infty \\ \infty & 4 & 0 & 8 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 10 & 10 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

iar vectorii distanță sunt

$$V^{(1)} = \begin{pmatrix} 30 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}, V^{(2)} = \begin{pmatrix} 30 \\ 19 \\ \infty \\ 25 \\ 20 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}, V^{(3)} = \begin{pmatrix} 21 \\ 19 \\ 23 \\ 25 \\ 20 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}, V^{(4)} = \begin{pmatrix} 21 \\ 19 \\ 23 \\ 25 \\ 20 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Problema 5 Pentru algoritmul lui Dijkstra, dacă se schimbă linia 4 cu următoarea linie

while $|Q| > 1$

schimbarea face ca bucla while să se execute de $|V| - 1$ ori în loc de $|V|$ ori. Mai este acest algoritm corect (găsește drumul de cost minim de la vârful s la fiecare vârf din graf accesibil din s)?

Problema 6. Modificați algoritmul lui Bellman-Ford astfel încât $v.d = -\infty$ pentru toate vârfurile v ce aparțin unui circuit de pondere negativă de pe un drum de la s la v. Graful alăturat conține un circuit negativ accesibil din vârful sursa (sursa este vârful s).