VIII. ECUAŢIILE CANONICE ALE CONICELOR

A. *ELIPSA RAPORTATĂ LA AXELE SALE*

§ 1. Definiţie. Ecuaţie. Reprezentare

Definiţia 1.1. Elipsa. *Elipsa* este locul geometric al punctelor a căror sumă a distanţelor la două puncte fixe, pe care le numim focare, este constantă.

Teorema 1.1. (Ecuaţia canonică a elipsei.) *Ecuaţia elipsei raportate la axele sale este*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Demonstraţie: Notăm punctele fixe cu F', F şi fie M un punct al elipsei. Stabilim ecuaţia curbei luînd $F'F$ ca axă Ox şi mediatoarea segmentului $F'F$ ca axă Oy (fig. VIII.1). Dacă luăm $F'F=2c$, pe care o numim distanţa focală, atunci avem coordonatele $F'(-c,\ 0)$ şi $F(c,\ 0)$. Scriem că suma distanţelor $MF'+MF$ este egală cu $2a$ şi obţinem astfel relaţia pe care o verifică coordonatele $(x,\ y)$ ale unui punct M de pe curbă.

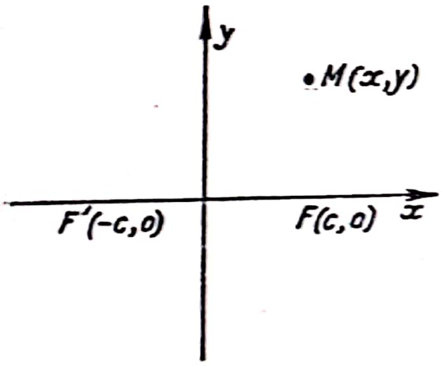

Fig. VIII. 1

Avem $MF'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ şi

$$MF=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Ecuaţia locul geometric este deci

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a, \quad (1)$$

care are o formă iraţională. S-o facem raţională. Trecînd primul radical în membrul drept şi ridicînd ambii membri la pătrat, obţinem

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2.$$

După reduceri şi simplificări, deducem

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx.$$

În cazul cînd se trece al doilea radical în membrul drept și se procedează la fel ca și cu relația precedentă, obținem

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx. \tag{2}$$

Printr-o nouă ridicare la pătrat, reduceri de termeni asemenea și gruparea termenilor după x^2 și y^2, obținem

$$(a^2-c^2)\,x^2+a^2y^2=a^2\,(a^2-c^2).$$

Deoarece $MF'+MF>F'F$, avem $a>c$, astfel că a^2-c^2 este un număr pozitiv și se poate nota $a^2-c^2=b^2$. Substituind aceasta în ultima egalitate, obținem ecuația simplificată a curbei

$$b^2x^2+a^2b^2=a^2b^2$$

sau

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \tag{3}$$

care este ecuația canonică a elipsei.

Intersecția curbei cu axa $Ox\,(y=0)$ ne dă punctele $A'(-a,\ 0)$ și $A\,(a,\ 0)$, iar cu $Oy\,(x=0)$ punctele $B'\,(0,\ -b)$ și $B\,(0,\ b)$. Curba admite atît pe Ox cît și pe Oy ca axe de simetrie, pentru că punctele $M_1\,(x,\ -y)$ și $M_2\,(-x,\ y)$ verifică ecuația o dată cu punctul $M\,(x,\ y)$. De asemenea, dat fiind că punctul $M_3\,(-x,\ -y)$ verifică ecuația o dată cu $M\,(x,\ y)$, rezultă că originea este centrul de simetrie. Segmentul $A'A=2a$ se numește axa mare a elipsei, iar $B'B=2b$ axa mică. Din notația $a^2-c^2=b^2$ rezultă valoarea lui c cînd se cunosc semiaxele curbei a și b.

Pentru a trasa curba vom folosi metoda de reprezentare grafică a funcțiilor din analiză.

Din ecuație, deducem

$$y=\varepsilon\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\qquad (\varepsilon=\pm 1) \tag{4}$$

de unde se vede că domeniul de definiție a funcției y este

$$-a\leqslant x\leqslant a.$$

Ținînd seama de cele două axe de simetrie, este suficient să trasăm ramura de curbă situată în primul cadran, după care luăm simetricele acestei părți față de cele două axe.

Folosind derivata funcției $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; $y'=\frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$, obținem tabloul de variație pentru x variind de la 0 la a.

x	0					a
y'	0	—	—	—	—	$\to\infty$
y	b		descrește			0

La acest tablou corespunde arcul din primul cadran BMA (fig. VIII.2), care are în B o tangentă paralelă cu axa Ox şi în A o tangentă paralelă cu Oy.

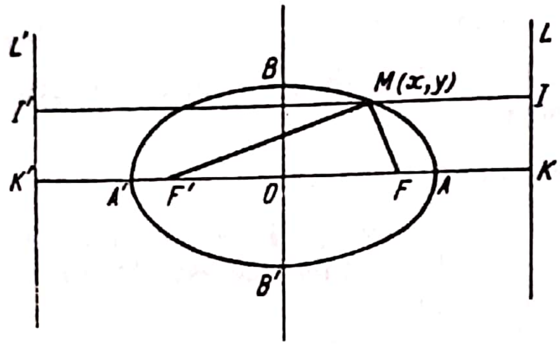

Fig. VIII. 2

Observaţie. Din relaţia (2), avem

$$a \cdot MF = a^2 - cx$$

sau

$$a \cdot MF = c\left(\frac{a^2}{c} - x\right),$$

de unde rezultă

$$\frac{MF}{\dfrac{a^2}{c} - x} = \frac{c}{a}. \qquad (5)$$

Ţinînd seama că $\frac{a^2}{c} - x$ este distanţa MI a punctului $M(x, y)$ pînă la dreapta KL fig. VIII.2) paralelă cu Oy, dreaptă numită directoare, a cărei ecuaţie este $x = \frac{a^2}{c}$, înseamnă că avem

$$\frac{MF}{MI} = \frac{c}{a} < 1.$$

Din relaţia $a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$, avem $a \cdot MF' = c\left(\frac{a^2}{c} + x\right)$ sau $\frac{MF'}{\frac{a^2}{c} + x} = \frac{c}{a}$. Avînd în vedere că $\frac{a^2}{c} + x$ este distanţa $I'M$ de la punctul $M(x, y)$ pînă la directoarea $K'L'$ de ecuaţie $x = -\frac{a^2}{c}$, rezultă

$$\frac{MF'}{I'M} = \frac{c}{a} < 1.$$

Deci, elipsa este şi locul punctelor pentru care raportul distanţelor la un punct fix (numit focar) şi o dreaptă fixă (numită directoare) este constant şi mai mic ca 1.

Raportul constant $\frac{c}{a}$, pe care-l notăm cu e, se numeşte *excentricitatea* elipsei. Cînd sînt date a şi e, deducem $c = ae$, iar $b = a\sqrt{1 - e^2}$. Constatăm că e poate varia între 0 şi 1. Cînd $e = 0$, avem $c = 0$ şi $b = a$, deci elipsa devine cerc. Pe măsură ce e creşte tinzînd spre 1, semiaxa b descreşte tinzînd la 0.

Aplicaţii: 1° Raportul dintre pătratul lungimii perpendicularei duse dintr-un punct al unei elipse pe axă şi produsul segmentelor pe care le determină această perpendiculară pe axă este constant.

Trebuie demonstrat că avem (fig. VIII.3).

$$\frac{IM^2}{A'I \cdot IA} = \text{constant}.$$

Fie $M(x, y)$ şi ecuaţia elipsei raportate la axe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Avem

$$A'I = x + a;$$

$$IA = a - x \text{ şi } IM = y,$$

de unde rezultă

$$\frac{IM^2}{A'I \cdot IA} = \frac{y^2}{a^2 - x^2} = \frac{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}{a^2 - x^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

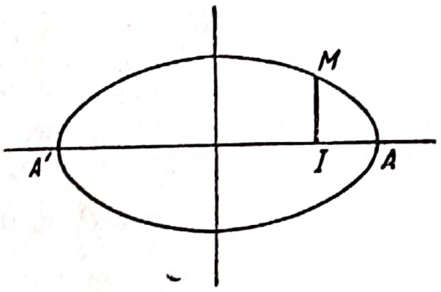

Fig. VIII. 3

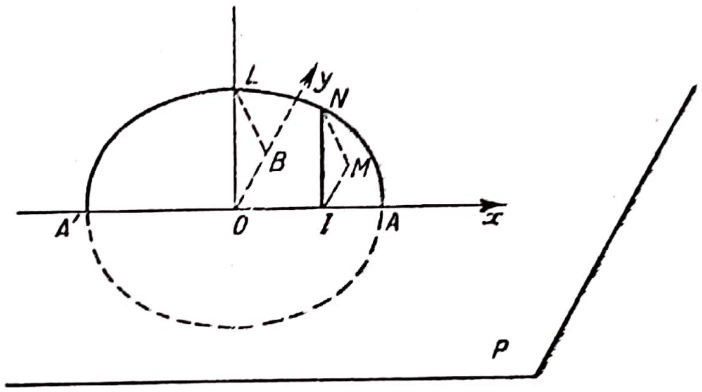

Fig. VIII. 4

2° Proiecţia ortogonală a unui cerc pe un plan este o elipsă care are ca axă mare diametrul cercului.

Ducem planul de proiecţie P prin centrul O al cercului şi fie $A'A = 2a$ un diametru al său (fig. VIII. 4), aşezat în planul P. Alegem ca axe de coordonate $A'A$ ca Ox şi OB perpendiculară pe $A'A$ ca Oy, ambele axe aşezate în planul P. Să stabilim relaţia între coordonatele x, y ale unui punct M, proiecţia lui N de pe cerc. Dacă notăm cu I piciorul perpendicularei din M pe axa Ox, rezultă:

$$x = OI \quad \text{şi} \quad y = IN \cos\alpha,$$

unde α este înclinarea planului cercului pe planul P.

Avînd în vedere că $OI^2 + IN^2 = ON^2$ rezultă

$$x^2 + \frac{y^2}{\cos^2\alpha} = a^2$$

sau

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a\cos\alpha)^2} - 1 = 0,$$

ceea ce demonstrează că proiecţia cercului este o elipsă care are semiaxele a şi $b = a\cos\alpha$.

Teorema 1.2. (Ecuații parametrice ale elipsei.) *Pentru elipsa raportată la axele sale se pot lua ca ecuații parametrice următoarele expresii*

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta, \end{cases} \tag{6}$$

unde θ *este un parametru care variază de la* 0 *la* 2π.

Demonstrație: Să trasăm două cercuri concentrice (fig. VIII.5) unul de rază a și altul de rază b $(a > b)$, și două diametre OA, OB perpendiculare care se intersectează în centrul O comun al celor două cercuri. O rază variabilă taie cercul mic în P și pe cel mare în Q. Ducem prin P și Q paralelele PM și QM la cele două diametre perpendiculare fixe. Să aflăm locul geometric al punctului M cînd dreapta OPQ variază.

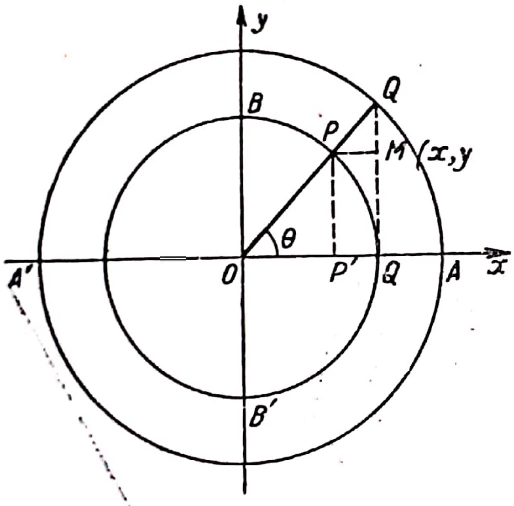

Fig. VIII. 5

Luăm OA ca axă Ox și OB ca Oy. Să stabilim relația între coordonatele (x, y) ale punctului M. Dacă notăm cu θ unghiul AOP și cu P', Q' proiecțiile lui P și Q pe axa Ox, atunci din triunghiurile dreptunghice OQQ' și OPP' avem

$$OQ' = OQ \cos \theta \quad \text{și} \quad P'P = OP \sin \theta$$

sau

$$x = a \cos \theta \quad \text{și} \quad y = b \sin \theta.$$

Din eliminarea parametrului θ, rezultă

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

de unde deducem că M descrie elipsa cu axa mare $A'A = 2a$ și axa mică $B'B = 2b$. Coordonatele x și y exprimate în funcție de parametrul θ reprezintă ecuații parametrice ale elipsei.

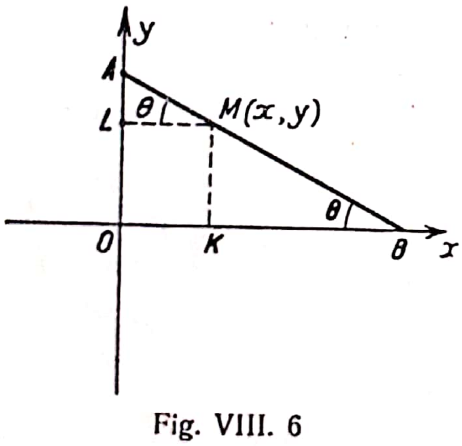

Fig. VIII. 6

Observații. 1° Dacă substituim în ecuațiile parametrice obținute mai sus pe $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ prin u, atunci obținem noi ecuații parametrice ale elipsei

$$x = \frac{a(1 - u^2)}{1 + u^2} \quad \text{și} \quad y = \frac{2bu}{1 + u^2}. \tag{7}$$

Tot astfel putem deduce pentru elipsă oricît de multe ecuații parametrice, dat fiind că putem alege un parametru într-o infinitate de moduri.

2° Modul de construcție a punctului M indică un procedeu de a obține puncte ale elipsei prin schimbarea direcției dreptei OPQ. Cînd θ variază de la 0 la 2π, punctul M descrie elipsa, trecînd de la A la B, A', B' și ajungînd înapoi în A.

Aplicație: Se consideră un segment de lungime constantă $AB = a + b$ (fig. VIII.6), care se mişcă cu extremitatea A pe axa Oy şi cu extremitatea B pe axa Ox. Pe acest segment luăm punctul M, astfel ca $MA = a$ şi $MB = b$ şi determinăm locul geometric al acestui punct cînd segmentul AB se mişcă cu extremitățile pe axe.

Notăm coordonatele punctului M cu (x, y), unghiul variabil OBM cu θ, iar cu K, L proiecțiile lui M pe cele două axe. Din triunghiurile dreptunghice LAM şi KMB avem

$$LM = MA \cos\theta \quad \text{şi} \quad KM = MB \sin\theta$$

sau

$$x = a\cos\theta \quad \text{şi} \quad y = b\sin\theta.$$

Eliminînd θ între cele două relații, deducem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Astfel, rezultă că în timpul mişcării segmentului AB, punctul M descrie elipsa cu axa mare $2a$ şi axa mică $2b$, aşezate pe axele Ox, Oy şi avînd centrul în O.

Observație. Constatarea de mai sus ne conduce la construirea unui instrument cu care se pot trage elipse, elipsograful. Ca axe se iau două bare cu şanțuri, încrucişate, în care se pot mişca în voie A şi B (fig. VIII.7). În M se pune un vîrf de creion, care poate fi mutat de-a lungul lui AB, atunci cînd vrem să trasăm elipsa cu diferite valori pentru a şi b.

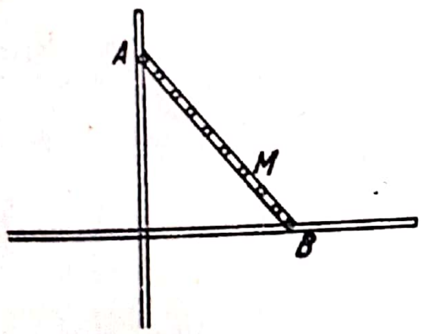

Fig. VIII. 7

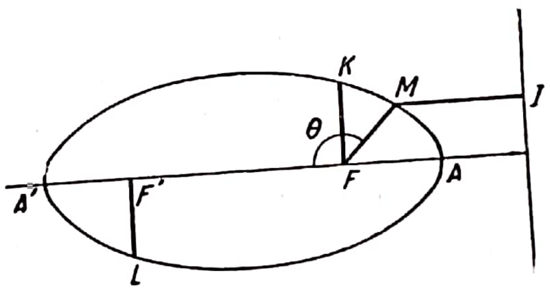

Fig. VIII. 8

Teorema 1.3. **(Ecuația elipsei în coordonate polare.)** *Ecuația elipsei în coordonate polare este*

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\theta} \tag{8}$$

unde

$$0 < e < 1.$$

Demonstrație: Să luăm ca pol unul din focare şi axa polară aşezată pe axa mare cu sensul pozitiv de la pol spre vîrful mai îndepărtat de pe axa polară. Astfel, în figura VIII.8 polul este luat F şi atunci sensul pozitiv al axei polare se ia de la F spre A'. Unui punct M îi corespund coordonatele polare $FM = \rho$ şi $\widehat{A'FM} = \theta$. Folosind proprietatea că elipsa este locul geometric al punctelor M pentru care avem

$$\frac{MF}{MI} = e < 1,$$

unde I este piciorul perpendicularei din M pe directoarea focarului F, atunci avem

$$\frac{\rho}{\frac{a^2}{c} - c + \rho\cos\theta} = e.$$

Ţinînd seama că $\frac{a^2}{c} - c = \frac{b^2}{c}$ şi că $e \cdot \frac{b^2}{c} = \frac{b^2}{a}$, din ecuaţia precedentă rezultă

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\theta}, \tag{9}$$

unde am notat pe $\frac{b^2}{a}$ cu p.

Observaţii. 1° Numărul $p = \frac{b^2}{a}$ se numeşte parametrul elipsei şi este lungimea perpendicularei ridicate dintr-un focar pe axa mare pînă la una din intersecţiile ei cu elipsa.

Astfel, pe figura VIII.8 parametrul elipsei este lungimea segmentului FK sau a lui $F'L$.

2° Dacă luăm ca pol pe F' şi sensul pozitiv al axei polare de la F' spre A, ecuaţia elipsei în coordonate polare este aceeaşi ca mai sus.

Aplicaţie: Suma inverselor segmentelor pe care le determină un focar pe o coardă ce trece prin el este constantă.

Fie MN o coardă (fig. VIII.9) ce trece prin focarul F'. Să demonstrăm că

$$\frac{1}{F'M} + \frac{1}{F'N} = \text{constantă}.$$

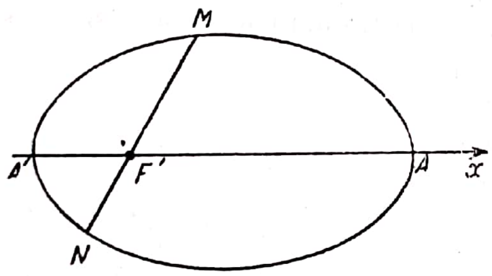

Fig. VIII. 9

Considerăm ecuaţia elipsei în coordonate polare

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\theta} \quad \text{(polul în } F' \text{ şi axa } F'A).$$

Dacă $F'M$ formează unghiul θ cu axa $F'A$, atunci $F'N$ formează unghiul $\pi + \theta$, astfel că avem din ecuaţia elipsei în coordonate polare

$$F'M = \frac{p}{1 - e\cos\theta} \quad \text{şi} \quad F'N = \frac{p}{1 - e\cos(\pi + \theta)}.$$

Rezultă

$$\frac{1}{F'M} + \frac{1}{F'N} = \frac{1 - e\cos\theta}{p} + \frac{1 + e\cos\theta}{p} = \frac{2}{p}.$$

§ 2. Intersecţia unei elipse cu o dreaptă

Teorema 2.1. *O dreaptă intersectează o elipsă în două puncte, ale căror coordonate sînt date de soluţiile sistemului de ecuaţii*

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ y = mx + n. \end{cases} \tag{10}$$

D e m o n s t r a ț i e: Pentru a determina coordonatele punctelor de intersecție dintre elipsă și dreapta de ecuație $y = mx + n$, se rezolvă sistemul

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0; \qquad y = mx + n.$$

Substituind y din ecuația dreptei în prima ecuație, eliminînd numitorii și ordonînd după puterile lui x, se obține ecuația de gradul al doilea

$$(a^2m^2 + b^2)\,x^2 + 2a^2mnx + a^2\,(n^2 - b^2) = 0, \tag{11}$$

care dă abscisele x_1, x_2 ale punctelor de intersecție dintre elipsă și dreaptă. Prin substituirea acestor abscise în $y = mx + n$, se obțin ordonatele

$$y_1 = mx_1 + n \text{ și } y_2 = mx_2 + n.$$

Rădăcinile x_1, x_2 pot fi reale și distincte, confundate sau imaginare, după cum discriminantul

$$\Delta = a^2b^2\,(a^2m^2 + b^2 - n^2) \tag{12}$$

este pozitiv, nul sau negativ.

Semnul lui Δ este același cu semnul expresiei

$$E = a^2m^2 + b^2 - n^2. \tag{13}$$

Rezultă:

1° Dacă $E > 0$, atunci punctele de intersecție sînt reale și distincte, iar dreapta este o secantă a elipsei.

2° Dacă $E = 0$, punctele de intersecție sînt reale și confundate. Dreapta este în acest caz tangentă la elipsă.

3° Dacă $E < 0$, punctele de intersecție sînt imaginare și dreapta este exterioară elipsei.

E x e m p l u: Să se determine intersecția elipsei

$$3x^2 + 8y^2 = 35$$

cu dreapta

$$x + 2y - 5 = 0.$$

Avem

$$a^2 = \frac{35}{3}; \quad b^2 = \frac{35}{8}; \quad m = -\frac{1}{2} \text{ și } n = \frac{5}{2},$$

astfel că

$$E = a^2m^2 + b^2 - n^2 = \frac{35}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{35}{8} - \frac{25}{4} = \frac{25}{24} > 0,$$

de unde rezultă că dreapta intersectează elipsa în două puncte distincte.

Rezolvînd sistemul, obținem punctele M (3, 1) și N (1, 2).

Observație. Pentru a determina intersecția curbei cu dreapta de la infinit, scriem ecuația elipsei în coordonate omogene

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - Z^2 = 0,$$

în care se pune $Z = 0$. Obţinem

$$b^2X^2 + a^2Y^2 = 0; \quad Z = 0$$

sau

$$Y = \pm \frac{bi}{a} X \qquad (i = \sqrt{-1}) \qquad \text{şi } Z = 0.$$

Astfel, se constată că dreapta de la infinit taie elipsa în puncte imaginare, ale căror coordonate omogene sînt

$$(a, bi, 0) \text{ şi } (a, -bi, 0). \tag{14}$$

§ 3. Tangente la elipsă

Teorema 3.1. (Tangenta la elipsă, paralelă cu o dreaptă dată.) *Tangentele la elipsa*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

paralele cu o direcţie de pantă m sînt date de ecuaţia

$$y = mx + \varepsilon\sqrt{a^2m^2 + b^2} \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{15}$$

Demonstraţie: Ecuaţia tangentei va avea forma $y = mx + \lambda$. Necunoscuta din această ecuaţie este coeficientul λ. Să-l determinăm, scriind că $y = mx + \lambda$ este tangentă. Pe baza celor stabilite mai sus (teorema 2.1.), trebuie să avem

$$a^2m^2 + b^2 - \lambda^2 = 0.$$

Rezultă că $\lambda = \varepsilon\sqrt{a^2m^2 + b^2}$ şi, prin urmare, aflăm două tangente paralele cu direcţia dată, avînd ecuaţiile cuprinse în formula

$$y = mx + \varepsilon\sqrt{a^2m^2 + b^2}. \tag{16}$$

Observaţie. Aceste tangente sînt simetrice faţă de centrul elipsei pentru că sînt paralele şi au ordonatele la origine egale şi de semne contrare.

Aplicaţie: Produsul distanţelor de la focarele unei elipse pînă la o tangentă oarecare este o cantitate constantă.

Ecuaţia unei tangente oarecare de pantă m este

$$mx - y + \varepsilon\sqrt{a^2m^2 + b^2} = 0,$$

de unde rezultă că distanţele d şi d' de la focarele F şi F' pînă la tangentă sînt date de expresiile

$$d = \frac{|mc + \varepsilon\sqrt{a^2m^2 + b^2}|}{\sqrt{m^2+1}} \quad \text{şi} \quad d' = \frac{|-mc + \varepsilon\sqrt{a^2m^2 + b^2}|}{\sqrt{m^2+1}}.$$

Rezultă

$$dd' = \frac{|a^2m^2 + b^2 - m^2c^2|}{m^2+1} = \frac{m^2(a^2 - c^2) + b^2}{m^2+1} = \frac{m^2b^2 + b^2}{m^2+1} = b^2.$$

Teorema 3.2. (Tangente la elipsă duse dintr-un punct exterior.) *Tangentele duse din punctul $M_0(x_0, y_0)$ la elipsa*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

sînt date de ecuaţiile

$$y - y_0 = m_1 (x - x_0) \text{ şi } y - y_0 = m_2 (x - x_0),$$

unde m_1, m_2 sînt rădăcinile ecuaţiei de gradul al doilea

$$(x_0^2 - a^2) m^2 - 2x_0y_0m + (y_0^2 - b^2) = 0. \qquad (17)$$

Demonstraţie: Să considerăm un punct $M_0(x_0, y_0)$ care nu se află pe elipsă. Ecuaţia unei drepte oarecare ce trece prin M_0 este

$$y - y_0 = m (x - x_0).$$

Deoarece această dreaptă trebuie să fie tangenta de pantă m, ecuaţia ei va avea forma

$$y = mx + \varepsilon \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

Scriind că $M_0(x_0, y_0)$ verifică această relaţie, obţinem o ecuaţie cu necunoscuta m

$$y_0 = mx_0 + \varepsilon \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

După raţionalizare şi ordonare faţă de necunoscuta m, obţinem

$$(x_0^2 - a^2) m^2 - 2x_0y_0m + (y_0^2 - b^2) = 0. \qquad (18)$$

Această ecuaţie ne dă pentru m două valori, m_1, m_2, care sînt pantele tangentelor duse din $M_0(x_0, y_0)$ la elipsă. Ecuaţiile celor două tangente vor fi

$$y - y_0 = m_1(x - x_0) \text{ şi } y - y_0 = m_2(x - x_0). \qquad (19)$$

Exemplu: Să se determine ecuaţiile tangentelor duse din punctul $M_0(3, 2)$ la elipsa de ecuaţie $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

Ecuaţia elipsei se scrie sub forma $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. O dreaptă prin M_0 va avea ecuaţia $y - 2 = m(x - 3)$. Ecuaţia tangentei de pantă m este $y = mx \pm \sqrt{4m^2 + 1}$. Punînd condiţia ca această tangentă să treacă prin $M_0(3, 2)$, obţinem ecuaţia în m

$$5m^2 - 12m + 3 = 0,$$

ale cărei rădăcini sînt

$$m_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{21}}{5}.$$

Ecuaţiile celor două tangente duse prin M_0 sînt deci

$$y - 2 = \frac{6 - \sqrt{21}}{5}(x - 3) \text{ şi } y - 2 = \frac{6 + \sqrt{21}}{5}(x - 3).$$

Aplicaţii: 1° Locul geometric al punctelor de unde se pot duce la o eplisă tangente perpendiculare între ele este un cerc.

Fie M_0 (x_0, y_0) un punct de unde se pot duce tangente perpendiculare între ele. Pantele celor două tangente m_1, m_2 sînt date de ecuaţia (18) şi dat fiind că tangentele sînt perpendiculare între ele, avem

$$m_1 m_2 = -1$$

sau

$$\frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2} = -1.$$

Rezultă că M_0 (x_0, y_0) verifică ecuaţia

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2,$$

care reprezintă un cerc.

2° Tangentele la elipsă duse dintr-un punct exterior M_0 (x_0, y_0) sînt egal înclinate pe dreptele care unesc pe M_0 cu focarele F şi F' ale elipsei.

Pantele dreptelor FM_0, $F'M_0$ sînt, respectiv, $u_0 = \dfrac{y_0}{x_0 - c}$ şi $v_0 = \dfrac{y_0}{x_0 + c}$, iar pantele m_1, m_2 ale tangentelor duse din M_0 la elipsă sînt date de ecuaţia (18).

Dacă notăm cu α unghiul dreptei FM_0 cu tangenta de pantă m_1 şi cu β unghiul dreptei $F'M_0$ cu tangenta de pantă m_2, avem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_1 - u_0}{1 + m_1 u_0}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{v_0 - m_2}{1 + m_2 v_0}.$$

Rezultă

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\dfrac{m_1 - u_0}{1 + m_1 u_0} + \dfrac{m_2 - v_0}{1 + m_2 v_0}}{1 - \dfrac{(m_1 - u_0)(m_2 - v_0)}{(1 + m_1 u_0)(1 + m_2 v_0)}} =$$

$$= \frac{(m_1 + m_2)(1 - u_0 v_0) + (m_1 m_2 - 1)(u_0 + v_0)}{(1 + m_1 u_0)(1 + m_2 v_0) - (m_1 - u_0)(m_2 - v_0)}$$

sau, dat fiind că

$$m_1 + m_2 = \frac{2x_0 y_0}{x_0^2 - a^2}, \; m_1 m_2 = \frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2}; \quad u_0 + v_0 = \frac{2x_0 y_0}{x_0^2 - c^2} \text{ şi } u_0 v_0 = \frac{y_0^2}{x_0^2 - c^2},$$

atunci

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = 0,$$

ceea ce demonstrează afirmaţia.

Teorema 3.3. **(Tangenta într-un punct de pe elipsă.)** *Tangenta la elipsă într-un punct dat M_0 (x_0, y_0) are ecuaţia*

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} - 1 = 0. \tag{20}$$

Demonstraţie: Panta tangentei la elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

într-un punct oarecare este derivata funcției y în raport cu x, unde x și y sînt legați prin relația de mai sus. Deoarece y este funcție implicită de x, avem

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Rezultă că panta tangentei în $M_0(x_0, y_0)$ este

$$y'_{x_0} = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0},$$

iar ecuația tangentei în M este

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$$

sau

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) = 0.$$

Ținînd seama că $M_0(x_0, y_0)$ este pe elipsă, avem

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

astfel că ecuația tangentei în M_0 este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0. \tag{21}$$

Observație. Ecuația normalei în punctul $M(x_0, y_0)$ este ecuația unei perpendiculare pe tangentă în acel punct. Avînd în vedere rezultatul precedent, se obține ecuația normalei în $M_0(x_0, y_0)$ la elipsă

$$\frac{a^2}{x_0}x - \frac{b^2}{y_0}\cdot y = c^2. \tag{22}$$

Aplicație: Tangenta și normala la elipsă într-un punct M sînt bisectoarele razelor vectoare $F'M$ și FM, unde $F'M$ și FM sînt drepte care unesc un punct de pe elipsă cu focarele. Într-adevăr, dacă notăm $M_0(x_0, y_0)$, $F'(-c, 0)$ și $F(c, 0)$, ecuațiile dreptelor $F'M_0$ și FM_0 sînt

$$(F'M_0)\quad y_0x - (x_0 + c)y - cy_0 = 0$$

$$(FM_0)\quad y_0x - (x_0 - c)y - cy_0 = 0.$$

Avînd în vedere că

$$\sqrt{y_0^2 + (x_0 + c)^2} = \pm\frac{a^2 + cx_0}{a} \text{ și } \sqrt{y_0^2 + (x_0 - c)^2} = \pm\frac{a^2 - cx_0}{a},$$

ecuațiile bisectoarelor dreptelor $F'M_0$ și FM_0 sînt

$$\frac{y_0x - (x_0 + c)\,y + cy_0}{a^2 + cx_0} = \pm\frac{y_0x - (x_0 - c)\,y - cy_0}{a^2 - cx_0}.$$

Dacă luăm ecuaţia cu + şi facem suma numărătorilor pe suma numitorilor egală cu diferenţa numărătorilor pe diferenţa numitorilor, găsim ecuaţia unei bisectoare a dreptelor $F'M_0$, FM_0

$$a^2y_0x - b^2x_0y - c^2x_0y_0 = 0$$

sau

$$\frac{a^2}{x_0}x - \frac{b^2}{y_0}y - c^2 = 0,$$

adică normala. Cealaltă bisectoare, fiind perpendiculară pe prima, este tangenta, ceea ce demonstrează teorema.

Observaţie. Pentru o altă demonstraţie a teoremei se putea folosi proprietatea că bisectoarele interioare şi exterioare ale unui unghi dintr-un triunghi determină pe latura opusă o diviziune armonică.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Să se scrie ecuaţia elipsei sub formă canonică, ştiind că semiaxa mare este egală cu 20, iar excentricitatea 0,3.

R. $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{364} - 1 = 0.$

2. Un triunghi AB are baza $BC = 14$ cm şi totodată fixă. Să se determine locul geometric al vîrfului A, variabil, ştiind că perimetrul triunghiului este constant egal cu 32 cm.

R. Locul este elipsa $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{32} - 1 = 0.$

3. Să se scrie ecuaţia elipsei prin punctele M_1 (1, 2) şi M_2 (3, —1), luînd ca axe de coordonate axele ei.

R. $3x^2 + 8y^2 - 35 = 0.$

4. Meridianul globului pămîntesc are forma unei elipse cu raportul axelor egal cu $\frac{299}{300}$. Să se determine excentricitatea acestui meridian.

R. $e = \sqrt{1 - \left(\frac{299}{300}\right)^2}.$

5. Să se afle punctele de intersecţie a elipsei $5x^2 + 8y^2 - 77 = 0$ cu dreapta $x + 2y - 7 = 0$.

R. $M_1(1, 3)$; $M_2(3, 2)$.

6. Să se scrie ecuaţiile tangentelor duse din $A(-6, 3)$ la elipsa $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1.$

R. $y = 3$ şi $12x + 7y + 51 = 0.$

7. Ce valoare trebuie să aibă λ pentru ca dreapta $4x - y + \lambda = 0$ să fie tangentă la elipsa $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} - 1 = 0$? După determinarea lui λ, să se afle coordonatele punctului de contact al tangentei.

R. $\lambda_1 = \sqrt{65}$ şi $\lambda_2 = -\sqrt{65}$; $T_1\left(-\frac{16}{\sqrt{65}}; \frac{1}{\sqrt{65}}\right)$ şi $T_2\left(\frac{16}{\sqrt{65}}, \frac{-1}{\sqrt{65}}\right).$

8. O elipsă este tangentă la dreptele $x + y - 5 = 0$ şi $x - 4y - 10 = 0$. Să se scrie ecuaţia acestei elipse cu condiţia ca axele ei să coincidă cu axele de coordonate.

R. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} - 1 = 0$.

9. Să se scrie ecuaţiile tangentelor comune la elipsele

$$\frac{x^2}{6} + y^2 - 1 = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0.$$

R. $2x + y \pm 5 = 0; 2x - y \pm 5 = 0$.

10. Fiind dată elipsa $16x^2 + 36y^2 - 16 \cdot 36 = 0$, se cere să se afle ecuaţiile normalelor paralele cu dreapta $2x + y + 3 = 0$.

R. $2x + y \pm 4 = 0$.

B. *HIPERBOLA RAPORTATĂ LA AXELE SALE*

§ 1. Definiţie. Ecuaţie. Reprezentare

Definiţia 1.1. Hiperbola. *Hiperbola* este locul geometric al punctelor a căror diferenţă a distanţelor la două puncte fixe, numite focare, este constantă.

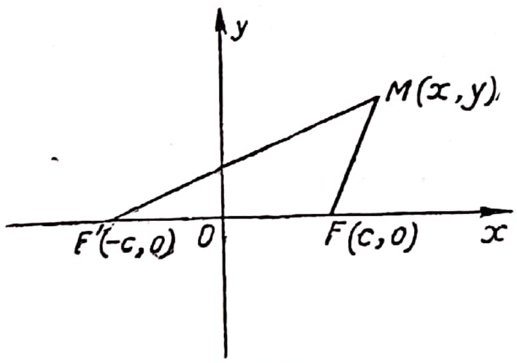

Fig. VIII. 10

Teorema 1.1. (Ecuaţia canonică a hiperbolei.) *Ecuaţia hiperbolei raportată la axe este*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Demonstraţie: Notăm punctele fixe cu F' şi F (fig. VIII.10), iar cu M un punct al hiperbolei.

Dacă luăm $F'F$ ca axă Ox şi mediatoarea segmentului $F'F$ ca Oy, atunci, după ce notăm $M(x, y)$, găsim ecuaţia curbei scriind că diferenţa dintre $F'M$ şi FM este o constantă egală cu $2a$. Presupunînd distanţa dintre focare, distanţa focală, egală cu $2c$, avem $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$, $F'M = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$ şi $FM = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$.

Ecuaţia locului geometric este deci

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a, \tag{23}$$

care are o formă iraţională. Trecînd unul din radicali în membrul drept şi ridicînd ambii membri la pătrat, obţinem egalitatea

$$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = cx + a^2 \tag{24}$$

sau

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

Printr-o nouă ridicare la pătrat, a uneia din egalităţile (24), reduceri de termeni asemenea, şi gruparea termenilor după x^2 şi y^2, obţinem

$$(c^2 - a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2\,(c^2 - a^2).$$

Deoarece $F'F > MF' - MF$, avem $c > a$, astfel că $c^2 - a^2$ este număr pozitiv şi putem nota $c^2 - a^2 = b^2$. Ecuaţia precedentă, ecuaţia simplificată a curbei, devine

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

sau

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{25}$$

care este ecuaţia canonică a hiperbolei. Atît axa Ox cît şi Oy sînt axe de simetrie pentru curbă, dat fiind că punctele $M_1\,(x, -y)$ şi $M_2\,(-x, y)$ verifică ecuaţia o dată cu $M\,(x, y)$. Deoarece Ox şi Oy sînt axe de simetrie, originea axelor este un centru de simetrie pentru curbă.

Curba are puncte de intersecţie reale numai cu axa $Ox\,(y = 0)$, care sînt $A'\,(-a, 0)$ şi $A\,(a, 0)$. Cealaltă axă, $Oy\,(x = 0)$, intersectează curba în puncte imaginare.

Axa Ox se numeşte axa transversă a curbei, iar Oy este o axă netransversă.

Explicitînd ecuaţia hiperbolei, avem

$$y = \varepsilon\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad (\varepsilon = \pm 1) \tag{26}$$

de unde rezultă că locul geometric este o curbă reală pentru $x \leqslant -a$ sau $x \geqslant a$.

Ţinînd seama că axele Ox şi Oy sînt axe de simetrie, este suficient să trasăm ramura de curbă aşezată în primul cadran al axelor, după aceea trasăm simetricele acestei părţi faţă de Ox şi Oy.

Utilizînd derivata funcţiei $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$; $y' = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}$; obţinem următorul tablou de variaţie cînd x ia valori mai mari decît a (cadranul I):

x	a							∞
y'	∞	+	+	+	+	+	+	+ +
y	0	↗		creşte			↗	∞

Din tabloul de variaţie se constată că pentru $x \to \infty$ avem $y \to \infty$, deci se impune să cercetăm dacă există asimptote *. Ştim că panta m a unei asimptote este

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\varepsilon \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \varepsilon \cdot \frac{b}{a},$$

astfel că ecuaţia asimptotelor este de forma

$$y = \varepsilon \cdot \frac{b}{a} x + \lambda.$$

Valoarea lui λ o determinăm din relaţia

$$\lambda = \lim_{x \to \infty} \left(\varepsilon \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \varepsilon \cdot \frac{b}{a} x \right).$$

Găsim $\lambda = 0$ şi astfel se constată că hiperbola are două asimptote, ale căror ecuaţii sînt

$$y = \frac{b}{a} x \quad \text{şi} \quad y = -\frac{b}{a} x. \tag{27}$$

Cele două asimptote trec prin punctele $P(a, b)$; $Q(a, -b)$; $R(-a, -b)$; $S(-a, b)$ (fig. VIII.11), de unde rezultă că ele sînt aşezate pe diagonalele dreptunghiului $PQRS$. La intersecţia axelor cu laturile PQ şi RS se află vîrfurile A şi A' ale hiperbolei. Ţinînd seama de tabloul de variaţie a lui $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ şi de asimptote, hiperbola are forma din figura VIII.11.

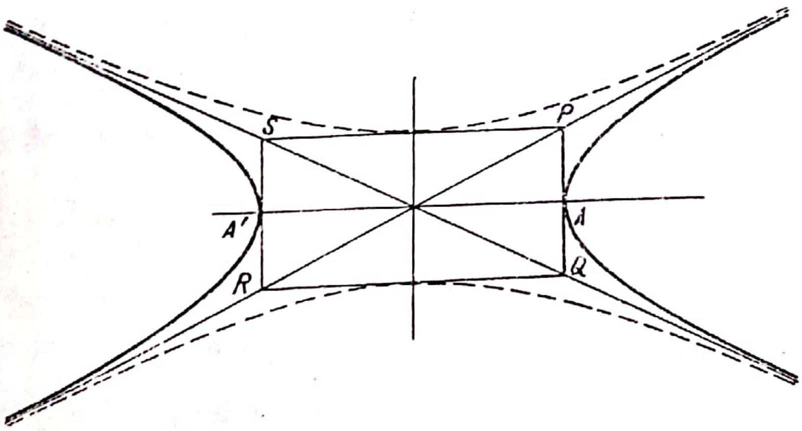

Fig. VIII. 11

Observaţii. 1° Ecuaţia $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$, reprezentată grafic după aceeaşi metodă ca mai sus, ne conduce tot la o hiperbolă, avînd aceleaşi axe şi asimptote

* Reamintim că se numeşte asimptotă la o curbă C o dreaptă care are puncte comune cu curba C la infinit.

ca şi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, dar care are ca axă transversă pe Oy, şi pe Ox ca axă netransversă. Ea se reprezintă ca în figura VIII.11, prin linia punctată, şi se numeşte hiperbola conjugată a hiperbolei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Hiperbola conjugată taie axa Oy în punctele reale $B(0, b)$ şi $B'(0, -b)$.

2° O hiperbolă care are asimptotele perpendiculare se numeşte hiperbolă echilateră. Deoarece în acest caz trebuie să avem

$$\frac{b}{a} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = -1,$$

rezultă că la o hiperbolă echilateră $b = a$, iar ecuaţia hiperbolei echilatere raportate la axele ei de simetrie este

$$x^2 - y^2 - a^2 = 0. \tag{28}$$

Asimptotele hiperbolei echilatere sînt bisectoarele axelor, $y = \pm x$.

3° Dacă rotim axele Ox, Oy cu un unghi de $-45°$, hiperbola echilateră va avea ca axe de coordonate asimptotele Ox', Oy' ale curbei (fig. VIII.12). Ecuaţia hiperbolei echilatere raportate faţă de asimptote se obţine făcînd substituţiile

$$x = x' \cos(-45°) - y' \sin(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' + x')$$

$$y = x' \sin(-45°) + y' \cos(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' - x'),$$

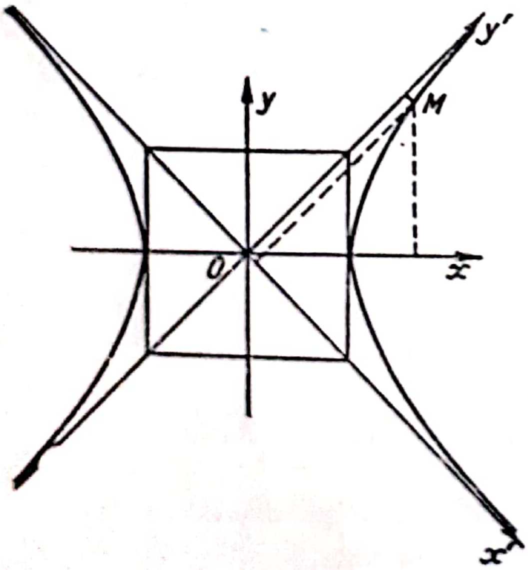

Fig. VIII. 12

de unde rezultă ecuaţia curbei faţă de noile axe

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(y' + x'\right)\right]^2 - \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(y' - x'\right)\right]^2 = a^2$$

sau

$$x'y' = \frac{a^2}{2}. \tag{29}$$

4° Din relaţiile (24), deducem

$$a \cdot MF = cx - a^2$$

şi

$$a \cdot MF' = cx + a^2,$$

de unde rezultă

$$\frac{MF}{x - \frac{a^2}{c}} = \frac{c}{a}$$

sau

$$\frac{MF'}{x + \frac{a^2}{c}} = \frac{c}{a}.$$

Ţinînd seama că $x - \frac{a^2}{c}$ este distanţa IM a punctului $M(x, y)$ pînă la dreapta KL (fig. VIII.13), paralelă cu Oy, a cărei ecuaţie este $x = \frac{a^2}{c}$, şi că distanţa $I'M$ a aceluiaşi punct M pînă la dreapta KL', de ecuaţie $x = -\frac{a^2}{c}$, este $x + \frac{a^2}{c}$, înseamnă că avem

$$\frac{MF}{IM} = \frac{c}{a} > 1 \quad \text{şi} \quad \frac{MF'}{I'M} = \frac{c}{a} > 1. \tag{30}$$

Dreptele $KL \left(x = \frac{a^2}{c}\right)$ şi $K'L' \left(x = -\frac{a^2}{c}\right)$ se numesc, respectiv, directoarea focarului F şi directoarea focarului F'. Aceste directoare taie axa Ox, respectiv, între (O, A) şi (O, A'), pentru că avem $\frac{a^2}{c} < a$ $(c > a)$.

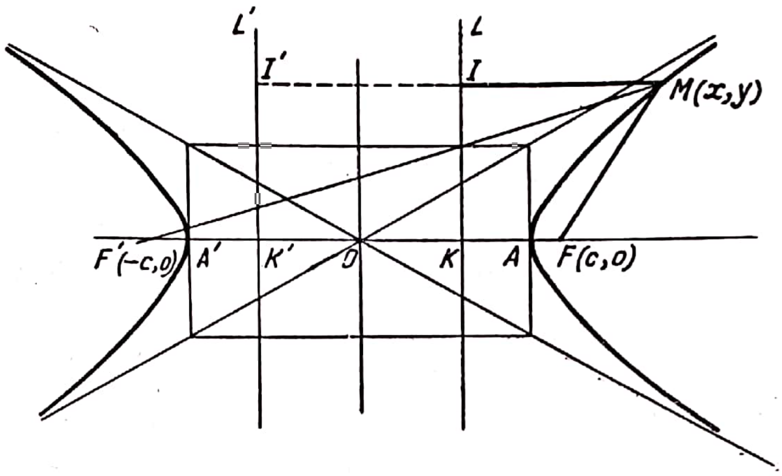

Fig. VIII. 13

Avînd în vedere cele de mai sus, rezultă o a doua definiţie a hiperbolei :
Hiperbola este locul punctelor pentru care raportul distanţelor la un punct fix numit focar şi o dreaptă (numită directoare) este constant şi mai mare ca 1.

Raportul constant $\frac{c}{a}$, pe care-l notăm cu e, se numeşte excentricitatea hiperbolei. Cînd sînt date a şi e, deducem $c = ae$, iar $b = a\sqrt{e^2 - 1}$. Constatăm astfel că e poate varia de la 1 la infinit.

Aplicaţie: Să se determine locul geometric al vîrfului A al unui triunghi care are baza BC fixă şi diferenţa unghiurilor de la bază egală cu un unghi drept.

Luăm ca axe CB ca Ox şi mediatoarea laturii CB ca Oy (fig. VIII.14). Dacă notăm $B(a, 0)$, $C(-a, 0)$ şi $A(x, y)$, atunci pantele dreptelor BA, CA sînt respectiv

$$\frac{y}{x-a} \quad \text{şi} \quad \frac{y}{x+a}.$$

Ţinînd seama că $\hat{B} - \hat{C} = 90°$, atunci $-\operatorname{tg} C = \operatorname{ctg} B$ sau $\operatorname{tg}(\pi - B) \cdot \operatorname{tg} C = 1$. Substituind $\operatorname{tg}(\pi - B) = \frac{y}{x-a}$ şi $\operatorname{tg} C = \frac{y}{x+a}$, în ultima relaţie, obţinem

$$\frac{y^2}{x^2 - a^2} = 1$$

sau

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

de unde rezultă că locul căutat este o hiperbolă echilateră.

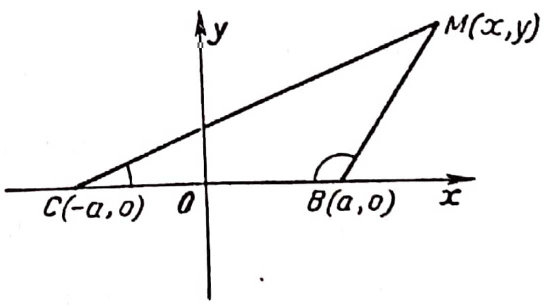

Fig. VIII. 14

Teorema 1.2. (Ecuaţii parametrice ale hiperbolei.) *Pentru hiperbola* *raportată la axele sale se pot lua ecuaţii parametrice următoarele egalităţi*

$$x = a \text{ ch } t \text{ şi } y = b \text{ sh } t. \tag{31}$$

Demonstraţie: Ţinînd seama că între funcţiile hiperbolice ch t şi sh t există relaţia

$$\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1,$$

avem

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ceea ce demonstrează că un punct oarecare $M(x, y)$ se află pe hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Observaţii. 1° Un alt sistem de ecuaţii parametrice ale hiperbolei îl formează egalităţile

$$x = a \sec \theta \text{ şi } y = b \text{ tg } \theta. \tag{32}$$

Aceasta rezultă din următorul loc geometric. Trasăm un cerc de rază a (fig. VIII.15 şi o dreaptă D, depărtată de centrul O al cercului cu distanţa b. O secantă variabilă ce trece prin O taie cercul în P şi dreapta în Q. Tangenta în P la cerc taie diametrul perpendicular pe D în T. Paralela din T la D şi perpendiculara din Q pe D se taie în M. Să aflăm locul punctelor M cînd secanta variază. Luăm perpendiculara pe dreapta D ca axă Ox şi paralela din O la dreapta D ca axă Oy. Notînd cu θ unghiul format de secantă cu axa Ox şi cu I intersecţia dreptei D cu Ox, aflăm din triunghiurile dreptunghice OTP şi OIQ.

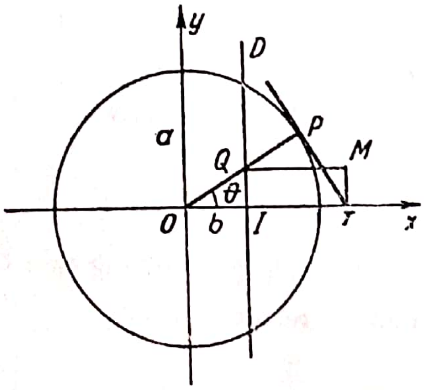

Fig. VIII. 15

$$OT = \frac{OP}{\cos \theta} \text{ şi } TM = IQ = OI \cdot \text{tg } \theta.$$

Dacă însemnăm coordonatele punctului M cu (x, y), relaţiile de mai sus devin

$$x = \frac{a}{\cos \theta} \text{ şi } y = b \text{ tg } \theta.$$

Din eliminarea parametrului θ între cele două ecuaţii, rezultă

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

de unde deducem că M descrie hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Coordonatele x şi y exprimate în funcţie de parametrul θ reprezintă ecuaţii parametrice ale hiperbolei

$$x = a \sec \theta; \; y = b \text{ tg } \theta. \tag{33}$$

2° Modul de construcţie a punctului M indică un procedeu de a obţine puncte ale hiperbolei prin schimbarea direcţiei secantei OQP.

Teorema 1.3. **(Ecuația hiperbolei în coordonate polare.)** *Ecuația hiperbolei în coordonate polare este*

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}, \tag{34}$$

unde $e > 1$.

Demonstrație: Luăm ca pol focarul corespunzător ramurii de hiperbolă a cărei ecuație vrem s-o scriem în coordonate polare. Axa polară o așezăm pe axa transversă a hiperbolei cu sensul pozitiv de la pol spre partea opusă vîrfului hiperbolei. Unui punct M (fig. VIII.16) de pe hiperbolă îi corespund coordonatele polare θ și ρ. Folosind a doua definiție a hiperbolei, avem

$$\frac{MF}{IM} = e.$$

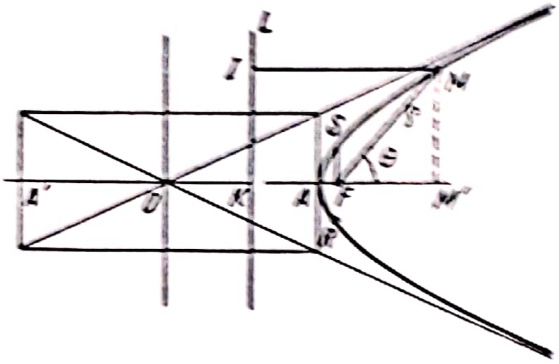

Fig. VIII. 16

Avînd în vedere că O este centrul hiperbolei, F focarul, K piciorul directoarei pe axa $A'A$ și M' proiecția lui M pe axa polară, substituim în relația de mai sus

$$MF = \rho \text{ și } IM = KF + FM'$$

sau

$$IM = c - \frac{a^2}{c} + \rho \cos \theta = \frac{b^2}{c} + \rho \cos \theta.$$

După înlocuire în egalitatea $\frac{MF}{IM} = e$, obținem

$$\frac{\rho}{\frac{b^2}{c} + \cos \theta} = e$$

sau

$$\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - e \cos \theta}.$$

Dacă notăm $\frac{b^2}{a} = p$, ecuația precedentă devine

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta},$$

care este ecuația hiperbolei în coordonate polare.

Observație. Numărul $p = \frac{b^2}{a}$ se numește parametrul hiperbolei și este lungimea perpendicularei ridicate din focar pe axa transversă pînă la una din intersecțiile ei cu ramura de hiperbolă. Astfel, pe figura VIII.16 parametrul hiperbolei este lungimea segmentului FS sau FR.

§ 2. Intersecţia unei hiperbole cu o dreaptă

Teorema 2.1. *O dreaptă intersectează o hiperbolă în două puncte, ale căror coordonate sînt date de soluţiile sistemului de ecuaţii*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + n. \end{cases} \tag{35}$$

Demonstraţie: Pentru a găsi coordonatele punctelor de intersecţie dintre hiperbolă şi dreapta de ecuaţie $y = mx + n$, rezolvăm sistemul

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ şi } y = mx + n.$$

Ecuaţia care dă abscisele punctelor de intersecţie se obţine înlocuind în ecuaţia corespunzătoare de la elipsă pe b^2 cu $-b^2$.

Această ecuaţie este

$$(a^2m^2 - b^2) \cdot x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 + b^2) = 0. \tag{36}$$

Celor două abscise x_1, x_2 le corespund ordonatele

$$y_1 = mx_1 + n \text{ şi } y_2 = mx_2 + n.$$

Discriminantul ecuaţiei este

$$\Delta = -a^2b^2(a^2m^2 - b^2 - n^2),$$

al cărui semn depinde de

$$E = -(a^2m^2 - b^2 - n^2). \tag{37}$$

Dacă $E > 0$, atunci dreapta taie hiperbola în două puncte reale şi distincte.

În cazul $E = 0$, dreapta este tangentă, iar cînd avem $E < 0$, dreapta nu taie hiperbola. Dacă $a^2m^2 - b^2 = 0$, $m = \pm \frac{b}{a}$, atunci obţinem pentru x o singură valoare. Aşadar, dreptele paralele cu asimptotele taie curba într-un singur punct situat la distanţă finită şi în altul de la infinit.

Observaţie. Punctele de intersecţie a hiperbolei cu dreapta de la infinit le obţinem făcînd $Z = 0$ în ecuaţia hiperbolei scrisă cu coordonatele omogene

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - Z^2 = 0.$$

Aceste puncte sînt date de ecuaţiile

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0 \text{ şi } Z = 0.$$

Astfel se constată că dreapta de la infinit taie hiperbola în punctele reale ale căror coordonate omogene sînt

$$(a, b, 0) \text{ şi } (a, -b, 0).$$

Aplicație: Două hiperbole care au aceleași asimptote determină pe o dreaptă oarecare segmente de aceeași lungime.

Să luăm bisectoarele asimptotelor date ca axe Ox, Oy (fig. VIII.17). Ecuațiile a două hiperbole care au aceleași asimptote sînt în acest caz

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-p=0 \quad \text{și} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-q=0.$$

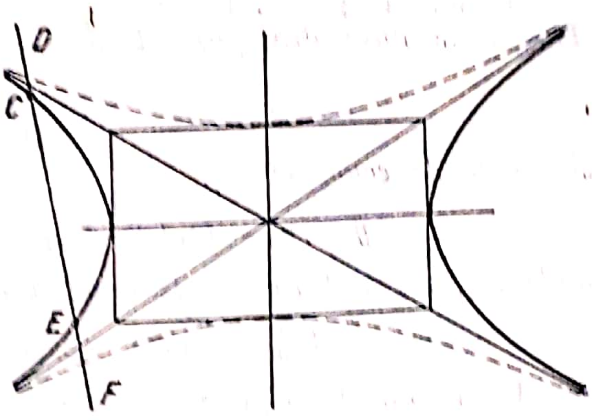

Fig. VIII. 17

O dreaptă de ecuație $y = mx + n$ taie cele două hiperbole în punctele C, D, E, F.

Să demonstrăm că $CD = EF$. În acest scop, este suficient să arătăm că segmentele CE și DF au același mijloc. Abscisele punctelor (C, E) și (D, F) sînt date de intersecția dreptei $y = mx + n$ cu fiecare din hiperbolele de mai sus. Ecuațiile de gradul al doilea care dau aceste abscise sînt

$$(b^2-a^2m^2)\,x^2-2a^2mnx-a^2(n^2+pb^2)=0$$

și

$$(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2mnx-a^2(n^2+qb^2)=0,$$

care au aceeași semisumă a rădăcinilor

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{a^2mn}{b^2-a^2m^2},$$

ceea ce demonstrează afirmația din enunț.

§ 3. Tangente la hiperbolă

Teorema 3.1. (Tangente la hiperbolă paralele cu o dreaptă dată.) *Tangentele la hiperbola*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

paralele cu direcția de pantă m sînt date de ecuația

$$y=mx+\varepsilon\sqrt{a^2m^2-b^2} \qquad (\varepsilon=\pm 1). \tag{39}$$

Demonstrație: Dacă direcția este dată prin panta m, atunci ecuația tangentelor se obține din ecuația corespunzătoare de la elipsă, înlocuind pe b^2 prin $-b^2$.

Aceste tangente au ecuațiile

$$y=mx+\varepsilon\sqrt{a^2m^2-b^2} \tag{40}$$

și ele sînt reale numai dacă $a^2m^2-b^2>0$, de unde rezultă $m\leqslant-\frac{b}{a}$ sau $m\geqslant\frac{b}{a}$. Așadar, nu există tangente reale paralele cu o direcție a cărei pantă este cuprinsă între pantele asimptotelor.

Aplicație: Două hiperbole care au aceleași asimptote determină pe o dreaptă oarecare segmente de aceeași lungime.

Să luăm bisectoarele asimptotelor date ca axe Ox, Oy (fig. VIII.17). Ecuațiile a două hiperbole care au aceleași asimptote sînt în acest caz

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-p=0 \quad \text{și} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-q=0.$$

O dreaptă de ecuație $y = mx + n$ taie cele două hiperbole în punctele C, D, E, F.

Să demonstrăm că $CD = EF$. În acest scop, este suficient să arătăm că segmentele CE și DF au același mijloc. Abscisele punctelor (C, E) și (D, F) sînt date de intersecția dreptei $y = mx + n$ cu fiecare din hiperbolele de mai sus. Ecuațiile de gradul al doilea care dau aceste abscise sînt

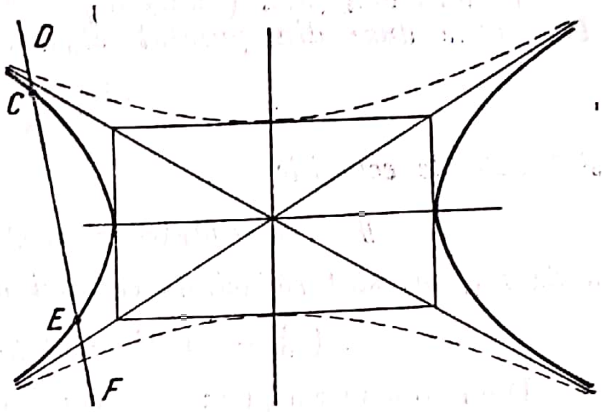

Fig. VIII. 17

$$(b^2-a^2m^2)\,x^2-2a^2mnx-a^2(n^2+pb^2)=0$$

și

$$(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2mnx-a^2(n^2+qb^2)=0,$$

care au aceeași semisumă a rădăcinilor

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{a^2mn}{b^2-a^2m^2},$$

ceea ce demonstrează afirmația din enunț.

§ 3. Tangente la hiperbolă

Teorema 3.1. **(Tangente la hiperbolă paralele cu o dreaptă dată.)** *Tangentele la hiperbola*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

paralele cu direcția de pantă m sînt date de ecuația

$$y = mx + \varepsilon\sqrt{a^2m^2-b^2} \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{39}$$

Demonstrație: Dacă direcția este dată prin panta m, atunci ecuația tangentelor se obține din ecuația corespunzătoare de la elipsă, înlocuind pe b^2 prin $-b^2$.

Aceste tangente au ecuațiile

$$y = mx + \varepsilon\sqrt{a^2m^2-b^2} \tag{40}$$

și ele sînt reale numai dacă $a^2m^2 - b^2 \geqslant 0$, de unde rezultă $m \leqslant -\frac{b}{a}$ sau $m \geqslant \frac{b}{a}$. Așadar, nu există tangente reale paralele cu o direcție a cărei pantă este cuprinsă între pantele asimptotelor.

Aplicaţie: Produsul distanţelor de la focarele unei hiperbole pînă la o tangentă oarecare este constant.

Procedînd întocmai ca la elipsă, se găseşte că produsul distanţelor este egal cu $-b^2$.

Teorema 3.2. (Tangente la hiperbolă duse dintr-un punct exterior.) *Tangentele duse din punctul $M_0(x_0, y_0)$ la hiperbola*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

sînt date de ecuaţiile

$$y-y_0=m_1(x-x_0) \text{ şi } y-y_0=m_2(x-x_0),$$

unde m_1, m_2 sînt rădăcinile ecuaţiei de gradul al doilea

$$(x_0^2-a^2)m^2-2x_0y_0m+(y_0^2+b^2)=0. \tag{41}$$

Demonstraţie: Să considerăm că punctul M_0 de coordonate (x_0, y_0) nu se află pe hiperbolă şi să scriem ecuaţiile tangentelor duse din acest punct.

Ecuaţia unei astfel de tangente este $y-y_0=m(x-x_0)$. Această dreaptă fiind tangenta de pantă m la hiperbolă, ecuaţia ei are forma

$$y=mx+\varepsilon\sqrt{a^2m^2-b^2}.$$

Scriind că $M_0(x_0, y_0)$ este situat pe această dreaptă, obţinem ecuaţia care dă pe m

$$(x_0^2-a^2)m^2-2x_0y_0m+(y_0^2+b^2)=0. \tag{42}$$

Găsim pentru m două valori, m_1 şi m_2, iar ecuaţiile tangentelor sînt

$$y-y_0=m_1(x-x_0) \text{ şi } y-y_0=m_2(x-x_0). \tag{43}$$

Aplicaţii: 1° Să se determine locul geometric al punctelor de unde se pot duce tangente la hiperbolă, perpendiculare între ele.

Procedînd la aflarea locului geometric întocmai ca la elipsă, se găseşte că punctul M_0 se află pe cercul de ecuaţie

$$x^2+y^2=a^2-b^2.$$

2° Tangentele duse dintr-un punct $M_0(x_0, y_0)$ la o hiperbolă sînt egal înclinate pe dreptele care unesc pe M_0 cu focarele F şi F'. Demonstraţia acestei aplicaţii este identică cu aceea corespunzătoare pentru elipsă.

Teorema 3.3. (Tangenta la hiperbolă într-un punct dat.) *Tangenta la hiperbolă într-un punct dat $M_0(x_0, y_0)$ are ecuaţia*

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}-1=0. \tag{44}$$

Demonstraţie: Ecuaţia tangentei în punctul $M_0(x_0, y_0)$ de pe hiperbolă se obţine din ecuaţia corespunzătoare la elipsă, unde se înlocuieşte b^2 cu $-b^2$. Demonstraţia se face întocmai ca la elipsă. Ecuaţia tangentei este

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}-1=0. \tag{45}$$

Observație. În punctul M_0 (x_0, y_0), ecuația normalei se obține din ecuația corespunzătoare la elipsă, înlocuind b^2 prin $-b^2$. Ea este

$$\frac{a^2}{x_0} \cdot x + \frac{b^2}{y_0} y = c^2. \tag{46}$$

Urmînd aceeași cale ca la elipsă, se demonstrează teorema :

Tangenta și normala la hiperbolă sînt bisectoarele unghiului format de razele vectoare.

Aplicație: Aria cuprinsă între asimptote și o tangentă oarecare la o hiperbolă este constantă.

Asimptotele taie o tangentă $y = mx + \varepsilon \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ la hiperbolă în punctele (fig. VIII.18)

$$C\left(x_1, \frac{b}{a} x_1\right) \text{ și } D\left(x_2, -\frac{b}{a} x_2\right),$$

unde

$$x_1 = \frac{\varepsilon a \sqrt{a^2m^2 - b^2}}{b - am}$$

și

$$x_2 = -\frac{\varepsilon a \sqrt{a^2m^2 - b^2}}{b + am},$$

astfel că aria triunghiului OCD este

$$A = \frac{b}{a} x_1 x_2 = ab.$$

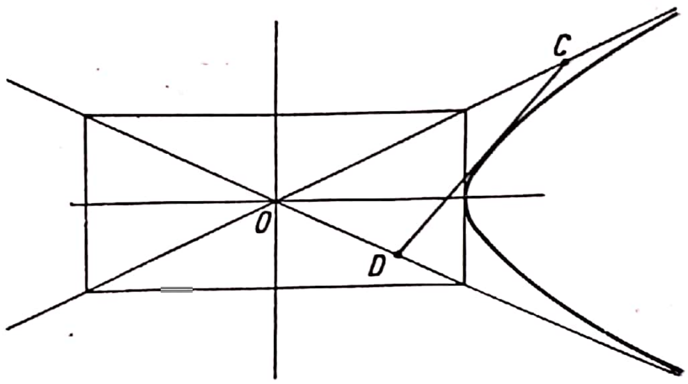

Fig. VIII. 18

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Să se determine ecuația hiperbolei ale cărei axe coincid cu axele de coordonate, știind că ea trece prin punctele $M_1(-5, 2)$ și $M_2(2\sqrt{5}, \sqrt{2})$.

R. $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} - 1 = 0.$

2. Să se determine ecuația unei hiperbole, cunoscînd coordonatele focarelor $F_1(10, 0)$, $F_2(-10, 0)$ și coordonatele unuia din punctele hiperbolei $M(12, 3\sqrt{5})$.

R. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} - 1 = 0.$

3. Să se demonstreze că segmentele tăiate de directoare pe asimptote (măsurate de la centrul hiperbolei) sînt egale cu semiaxa reală. Folosind această proprietate, să se construiască directoarele hiperbolei.

4. Să se determine pe hiperbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ un punct astfel încît razele sale vectoare să fie perpendiculare.

R. $x = \pm \frac{4}{3}\sqrt{34}$; $y = \pm \frac{9}{5}$.

5. Să se demonstreze că produsul distanțelor de la un punct oarecare al hiperbolei pînă la cele două asimptote este constant.

6. Să se ducă o tangentă la hiperbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}-1=0$, care să fie egal depărtată de centru și de focar.

R. $8x \pm y\sqrt{11}-20=0$.

7. Să se scrie ecuația hiperbolei, cunoscînd ecuațiile asimptotelor $x \pm 2y = 0$ și că $5x-6y-8=0$ este o tangentă.

R. $x^2-4y^2-4=0$.

8. Să se demonstreze că o hiperbolă și o elipsă care au aceleași focare sînt ortogonale.

9. Să se determine locul geometric al mijloacelor razelor vectoare ale focarului cu abscisă pozitivă, aparținînd hiperbolei $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

R. $\frac{\left(x-\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1$.

10. Să se găsească locul geometric al punctelor de intersecție dintre perpendicularele coborîte dintr-un focar al hiperbolei $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ pe tangentele ei cu dreptele care unesc centrul curbei cu punctele de contact corespunzătoare.

R. Directoarea hiperbolei care corespunde focarului din care sînt coborîte perpendicularele.

C. *PARABOLA*

§ 1. Definiție. Ecuație. Reprezentare

Definiția 1.1. Parabola. *Parabola* este locul geometric al punctelor care sînt egal depărtate de un punct fix, numit focar, și o dreaptă fixă, numită directoare.

Teorema 1.1. (Ecuația canonică a parabolei.) *Ecuația parabolei raportate la axă și tangenta ei din vîrf este*

$$y^2-2px=0.$$

Demonstrație: Notăm punctul fix cu F și depărtarea FA a acestuia pînă la directoarea D cu p.

Pentru a scrie ecuația parabolei luăm ca axă Ox perpendiculara din F pe dreapta dată D (fig. VIII.19) și ca Oy perpendiculara pe segmentul AF în mijlocul său O.

Ecuația parabolei se obține stabilind relația între coordonatele (x, y) ale unui punct M de pe curbă, pe baza faptului că depărtarea MF pînă la focar este egală cu distanța MI pînă la directoarea D.

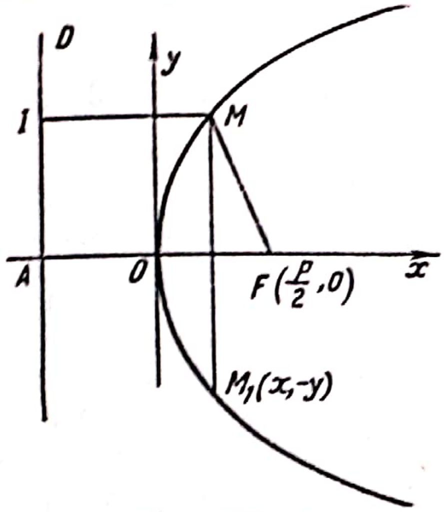

Fig. VIII. 19

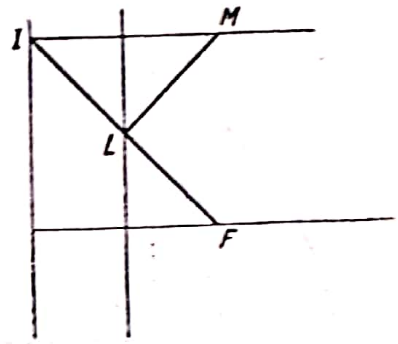

Fig. VIII. 20

Deoarece coordonatele lui F sînt $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, avem

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x.$$

Ridicînd ambii membri la pătrat și efectuînd reducerile, obținem ecuația rațională a parabolei

$$y^2 = 2px, \tag{47}$$

care este ecuația redusă sau forma canonică a parabolei.

Originea O aparține curbei și se numește vîrful parabolei, iar Oy este tangenta în vîrf. Curba admite axa Ox ca axă de simetrie pentru că punctul $M_1(x, -y)$ verifică ecuația o dată cu punctul $M(x, y)$.

Pentru reprezentarea grafică a curbei utilizăm metoda indicată în cursul de analiză. Studiem numai ramura de curbă $y = \sqrt{2px}$ așezată deasupra axei Ox; după aceea curba se completează printr-o simetrie față de axa Ox. Forma curbei este dată în figura VIII.19.

Observații. Avînd în vedere definiția parabolei, triunghiul IFM este isoscel $(FM = IM)$ (fig. VIII.20), astfel că M se află la intersecția paralelei IM la axa parabolei cu mediatoarea LM a segmentului FI. Variind I pe directoare, obținem prin construcția de mai sus puncte ale parabolei situate deasupra axei și apoi, prin simetrie față de axă, alte puncte, situate sub axa parabolei.

Teorema 1.2. (**Ecuații parametrice ale parabolei.**) *Pentru parabola raportată la axă și tangenta ei din vîrf se pot lua ca ecuații parametrice următoarele egalități*

$$\begin{cases} x = 2p\lambda^2 \\ y = 2p\lambda. \end{cases} \tag{48}$$

Demonstraţie: Luăm ca parametru panta $\frac{1}{\lambda}$ a unei drepte care uneşte un punct M de pe parabolă cu originea axelor. Intersectînd această dreaptă $y = \frac{x}{\lambda}$ cu parabola $y^2 = 2px$, obţinem coordonatele punctului M

$$x = 2p\lambda^2 \text{ şi } y = 2p\lambda.$$

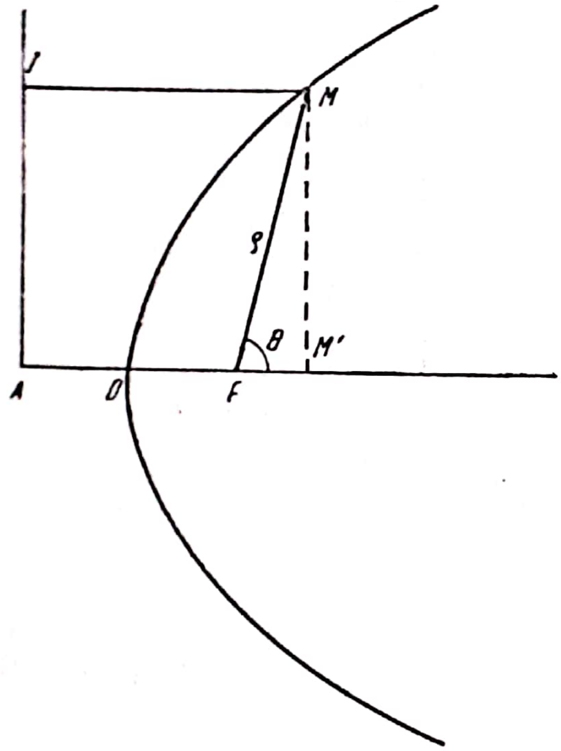

Fig. VIII. 21

Astfel putem lua ca ecuaţii parametrice ale parabolei egalităţile

$$x = 2p\lambda^2 \text{ şi } y = 2p\lambda.$$

Variind pe λ de la 0 la ∞, obţinem toate punctele parabolei situate deasupra axei Ox şi, cînd λ variază de la 0 la $-\infty$, găsim toate punctele situate sub axă.

Teorema 1.3. (Ecuaţia parabolei în coordonate polare.) *Ecuaţia parabolei în coordonate polare este*

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\theta}.$$

Demonstraţie: Luăm ca pol focarul F (fig. VIII.21), iar axa polară aşezată pe axa parabolei cu sensul pozitiv de la pol spre partea opusă vîrfului. Unui punct M de pe parabolă îi corespund coordonatele polare θ şi ρ. Pentru a stabili ecuaţia în coordonate polare, folosim definiţia parabolei $MF = IM$, unde înlocuim $MF = \rho$ şi $IM = AF + FM'$ (M' este proiecţia lui M pe axa parabolei).

Rezultă egalitatea $\rho = p + \rho\cos\theta$ şi, prin urmare, ecuaţia în coordonate polare este

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\theta}. \tag{49}$$

§ 2. Intersecţia unei parabole cu o dreaptă

Teorema 2.1. *O dreaptă intersectează o parabolă în două puncte, ale căror coordonate sînt date de soluţiile sistemului de ecuaţii*

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = mx + n. \end{cases} \tag{50}$$

D e m o n s t r a ț i e: Coordonatele punctelor comune dintre parabolă și dreaptă sînt date de soluțiile sistemului

$$y^2 = 2px \text{ și } y = mx + n.$$

Substituim pe x scos din prima ecuație în cea de-a doua și avem de rezolvat ecuația de gradul al doilea

$$my^2 - 2py + 2pn = 0,$$

care ne dă ordonatele y_1, y_2 ale punctelor de intersecție dintre parabolă și dreaptă. Introducînd aceste ordonate în $y^2 = 2px$, obținem și abscisele

$$x_1 = \frac{y_1^2}{2p} \text{ și } x_2 = \frac{y_2^2}{2p}.$$

Rădăcinile y_1, y_2 pot fi reale și distincte, confundate sau imaginare, după cum discriminantul

$$\Delta = p^2 - 2mnp \tag{51}$$

este pozitiv, nul sau negativ.

Rezultă: dacă $\Delta > 0$, atunci punctele de intersecție sînt reale și distincte; în cazul cînd $\Delta = 0$, dreapta este tangentă la parabolă; cînd $\Delta < 0$, dreapta nu intersectează parabola.

Din ecuația de gradul al doilea care dă pe y_1 și y_2 rezultă că, în cazul cînd $m = 0$, dreapta $y = mx + n$ taie parabola într-un singur punct la distanță finită. Așadar, dreptele paralele cu Ox, adică cu axa parabolei, sînt singurele drepte care taie curba într-un singur punct la distanță finită, celălalt punct de intersecție fiind situat la infinit.

Observație. Punctele de intersecție a curbei cu dreapta de la infinit le obținem făcînd $Z = 0$ în ecuația parabolei scrisă cu coordonate omogene

$$Y^2 = 2pXZ.$$

Aceste puncte sînt date de ecuațiile

$$Y^2 = 0 \text{ și } Z = 0.$$

Astfel, se constată că dreapta de la infinit taie parabola în puncte reale confundate și deci este tangentă la parabolă în punctul de la infinit (1, 0, 0), care se găsește pe axa Ox. De aici deducem că dreapta de la infinit este asimptotă parabolei *.

§ 3. Tangente la parabolă

T e o r e m a 3.1. (Tangenta la parabolă paralelă cu o direcție dată.) *La parabola*

$$y^2 = 2px$$

* Se va demonstra în cadrul acestui curs că orice asimptotă la o curbă algebrică este tangentă în punctele de la infinit ale curbei.

se poate duce o singură tangentă paralelă cu o direcție de pantă m; ecuația ei este

$$y = mx + \frac{p}{2m}.$$

Demonstrație: Ecuația tangentei de pantă m are forma

$$y = mx + \lambda.$$

Scriem că această dreaptă intersectează parabola în puncte confundate, de unde deducem

$$p^2 - 2mp\lambda = 0$$

sau

$$\lambda = \frac{p}{2m},$$

astfel că ecuația tangentei la parabola de pantă dată m este

$$y = mx + \frac{p}{2m}. \tag{52}$$

Teorema 3.2. (**Tangente la parabolă duse dintr-un punct exterior.**) *Tangentele duse din $M_0(x_0, y_0)$ la parabola*

$$y^2 = 2px$$

sînt date de ecuațiile

$$y - y_0 = m_1(x - x_0) \text{ și } y - y_0 = m_2(x - x_0),$$

unde m_1, m_2 sînt rădăcinile ecuației de gradul al doilea

$$2x_0m^2 - 2y_0m + p = 0. \tag{53}$$

Demonstrație: Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct nesituat pe parabolă. Ecuația unei tangente duse din acest punct are forma

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Această dreaptă, fiind tangentă de pantă m, ecuația ei va avea forma

$$y = mx + \frac{p}{2m}.$$

Scriind că $M_0(x_0, y_0)$ se află pe această tangentă, obținem ecuația care ne dă m

$$2x_0m^2 - 2y_0m + p = 0.$$

Cele două rădăcini m_1 și m_2 ne dau pantele tangentelor duse din $M(x_0, y_0)$. Ecuațiile acestor tangente vor fi

$$y - y_0 = m_1(x - x_0) \text{ și } y - y_0 = m_2(x - x_0). \tag{54}$$

Aplicații: 1° Să aflăm locul geometric al punctelor $M_0(x_0, y_0)$ de unde se pot duce tangente perpendiculare la parabolă.

Pentru ca cele două tangente să fie perpendiculare trebuie să avem

$$m_1m_2 = -1.$$

Însă din ecuația care dă m_1, m_2 rezultă $m_1m_2 = \frac{p}{2x_0}$, astfel încît condiția ca tangentele din M_0 (x_0, y_0) să fie perpendiculare este

$$\frac{p}{2x_0} = -1,$$

de unde rezultă că M_0 (x_0, y_0) verifică ecuația

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Așadar, locul geometric căutat este directoarea parabolei.

2° Tangentele duse dintr-un punct M_0 (x_0, y_0) (fig. VIII.22) la o parabolă sînt egal înclinate pe dreapta care unește pe M_0 cu focarul F și pe paralela dusă din M_0 la axa parabolei.

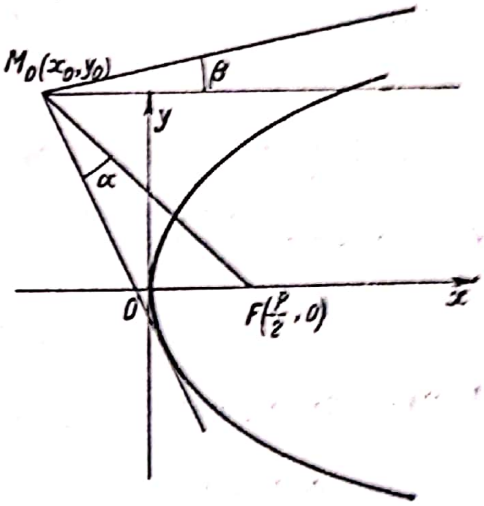

Fig. VIII. 22

Dacă parabola este luată $y^2 = 2\,px$, panta dreptei M_0F este $u_0 = \frac{2y_0}{2x_0 - p}$. Pantele m_1, m_2 ale tangentelor la parabolă duse din M_0 (x_0, y_0) sînt date de ecuația

$$2x_0m^2 - 2y_0m + p = 0.$$

Dacă notăm cu α unghiul dreptei FM_0 cu tangenta de pantă m_1 și cu β unghiul celeilalte tangente cu paralela la axă dusă prin M_0, avem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{u_0 - m_1}{1 + m_1u_0}\ ;\ \operatorname{tg}\beta = m_2,$$

de unde rezultă că $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = 0$.

Prin urmare,

$$\alpha = \beta.$$

Teorema 3.3. (Tangenta într-un punct de pe parabolă.) *Tangenta la parabolă într-un punct M_0 (x_0, y_0) are ecuația*

$$yy_0 = p\,(x + x_0).$$

Demonstrație: Fie M_0 (x_0, y_0) un punct de pe parabola $y^2 - 2px = 0$. Panta tangentei este $y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{2p}{2y} = \frac{p}{y}$, iar în M_0 (x_0, y_0) va fi $\frac{p}{y_0}$, astfel că ecuația căutată este

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0).$$

Ținînd seama că avem $y_0^2 = 2px_0$, rezultă ecuația sub forma

$$yy_0 = p\,(x + x_0). \tag{55}$$

Observaţii. 1° Din ecuaţia (55) a tangentei se constată că ea taie axa parabolei în punctul $M(-x_0, 0)$, adică în punctul simetric faţă de vîrful parabolei al proiecţiei punctului M_0 pe axa parabolei.

2° Cunoscînd panta $\frac{p}{y_0}$ a tangentei, aceea a normalei în $M_0(x_0, y_0)$ este $-\frac{y_0}{p}$, astfel încît ecuaţia normalei în acest punct devine

$$\frac{x-x_0}{p}+\frac{y-y_0}{y_0}=0. \tag{56}$$

3° În legătură cu normala la parabolă, se demonstrează ca şi la elipsă şi hiperbolă următoarea teoremă:

Tangenta şi normala într-un punct sînt bisectoarele unghiului format de raza vectoare (dreapta care uneşte punctul dat cu focarul) şi paralela la axă, dusă printr-un punct dat.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Să se afle un punct de pe parabola $y^2 = 8x$, a cărui rază vectoare este egală cu 20.

R. $A(18, 12)$ şi $B(18, -12)$.

2. Să se calculeze lungimea comună a laturilor unui triunghi echilateral înscris în parabola $y^2 = 2px$.

R. $4p\sqrt{3}$.

3. Să se determine punctele de intersecţie a parabolei $y^2 = 18x$ cu dreapta $6x + y - 6 = 0$.

R. $(2, -6)$.

4. Să se determine ecuaţia coardei comune a parabolei $y^2 = 18x$ cu cercul $(x + 6)^2 + y^2 = 100$.

R. $x = 2$.

5. Ştiind că dreapta $x + 3y + 9 = 0$ este tangentă la parabola $y^2 = 4x$, să se determine coordonatele punctului de contact.

R. $T(9, -6)$.

6. Să se calculeze parametrul parabolei $y^2 = 2px$, ştiind că ea este tangentă la dreapta $x - 2y + 5 = 0$.

R. $p = \frac{5}{2}$.

7. Să se scrie ecuaţiile tangentelor comune la elipsa $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ şi la parabola $y^2 = \frac{20}{3}x$.

R. $x \pm 3y + 15 = 0$.

8. Să se demonstreze că orice tangentă la parabolă intersectează directoarea şi coarda focală perpendiculară pe axă în puncte egal depărtate de focar.

9. Să se determine locul geometric al mijloacelor coardelor care trec prin focarul unei parabole.

R. O parabolă cu vîrful în focarul parabolei date şi cu parametrul de două ori mai mic.

10. Să se găsească locul geometric al centrelor cercurilor care trec printr-un punct dat şi sînt tangente la o dreaptă dată.

R. O parabolă care are punctul dat drept focar şi dreapta dată drept directoare.