Seminar 7 _ gr. 314.

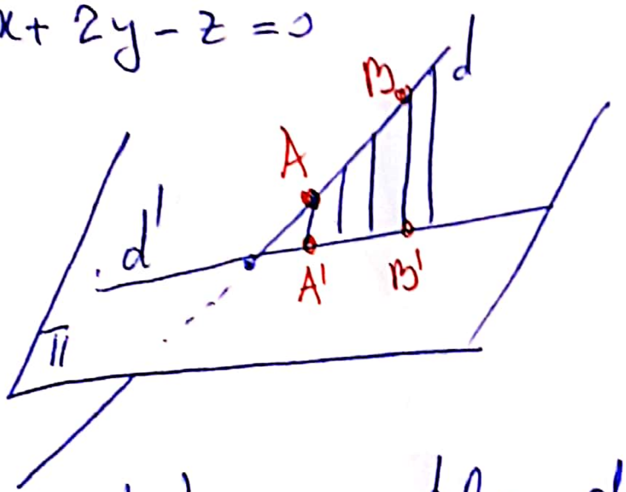
① Să se găsească ecuațiile proiecției dreptei

$$d: \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

pe planul

$\Pi: x + 2y - z = 0$

Soluție.



Proiecțiile tuturor punctelor de pe dreapta d pe planul Π determină dreapta d'. Sunt suficiente 2 puncte pentru a determina o dreaptă.

$$d: \begin{cases} 2x - y = -z + 1 \\ x + y = z - 1 \end{cases}, \quad z = \alpha$$

$3x = 0 \Rightarrow x = 0, \ y = \alpha - 1$

$S = \{(0, \alpha-1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

Pt $\alpha = 1$ obținem $A(0,0,1)$ două puncte pe d.

pt $\alpha = 0$ obținem $B(0,-1,0)$

Fie $A' = pr_{\pi}(A)$ și $B' = pr_{\pi}(B)$ $\Rightarrow AA' \perp \pi,\ BB' \perp \pi$

$AA' : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{-1} = t$ (vectorul directoare este $\vec{n}_{\pi}(1,2,-1)$)

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -t+1 \\ x+2y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} t+4t+t-1=0 \\ t = \frac{1}{6} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = -\frac{1}{6}+1 = \frac{5}{6} \end{array} \Rightarrow A'\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$$

$BB' : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-1} = t$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t-1 \\ z = -t \\ x+2y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} t+4t-2+t=0 \\ 6t = 2 \quad t = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3}-1 = -\frac{1}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \qquad B'\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$A'B' : \frac{x-\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}} = \frac{y+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = \frac{z+\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}+\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-\frac{1}{3}}{-1} = \frac{y+\frac{1}{3}}{4} = \frac{z+\frac{1}{3}}{7}.$$

Altă soluție.

Ecuația fasciculului de plane determinat de dreapta „d" este

$\Pi_\lambda : 2x - y + z - 1 + \lambda(x + y - z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \Pi_\lambda : (2+\lambda)x + (-1+\lambda)y + (1-\lambda)z - 1 + \lambda = 0$

$\Pi_\lambda \perp \Pi \Leftrightarrow \vec{n}_{\Pi_\lambda} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{n}_{\Pi_\lambda} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2+\lambda, -1+\lambda, 1-\lambda) \cdot (1, 2, -1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{2}+\lambda \cancel{-2}+2\lambda - 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \Pi_{\frac{1}{4}} : 2x - y + z - 1 + \frac{1}{4}(x + y - z + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Pi_{\frac{1}{4}} : 8x - 4y + 4z - 4 + x + y - z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \Pi_{\frac{1}{4}} : 9x - 3y + 3z - 3 = 0 \quad | :3$

$\boxed{\Pi : 3x - y + z - 1 = 0}$

Deci $d' : \begin{cases} 3x - y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$.

Sau: Planul proiectant π' este determinat de vectorul $\vec{AB}$ și vectorul $\vec{n}$

$\vec{AB}\,(0,-1,-1)$

$\vec{n}\,(1,2,-1)$

$$\pi': \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} (z-1) = 0$$

$$\pi': 3x - y + z - 1 = 0$$

Deci $d': \begin{cases} \pi' = 0 \\ \pi = 0 \end{cases}$ adică

$$d': \begin{cases} 3x - y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

\#.

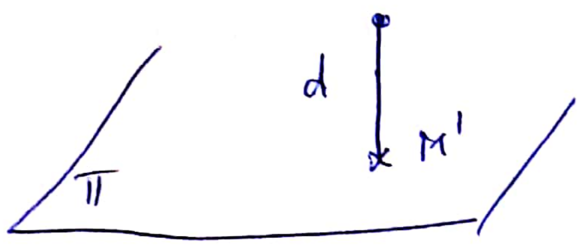
(2). Să se găsească proiecția ortogonală a punctului $(2,1,1)$ pe planul

$\pi: x + y + 3z + 5 = 0$

Soluție

$M(2,1,1)$

$\vec{d} = \vec{n}(1,1,3)$



Ecuațiile dreptei d duse prin M perpendiculară pe Π sunt:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3}=t$$

O intersectăm cu Π:

$$x+y+3z+5=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t+2 \\ y = t+1 \\ z = 3t+1 \\ x+y+3z+5=0 \end{cases}$$

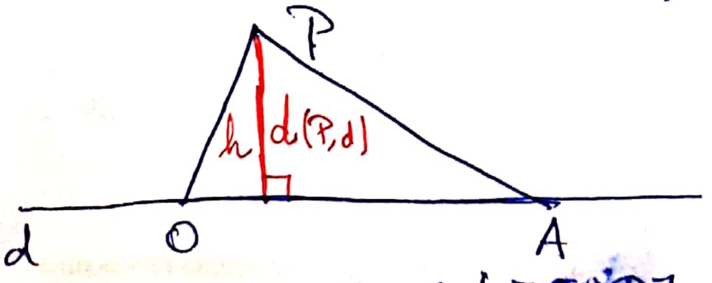
$$t+2+t+1+9t+3+5=0$$

$$11t+11=0 \Rightarrow t=-1$$

$$\Rightarrow M'(1,0,-2). \#.$$

(3). Să se găsească distanța punctului $P(1,2,-1)$ la dreapta $d: x=y=z$.

<u>Soluție</u> Pe dreapta d există punctele $O(0,0,0)$ și $A(1,1,1)$. (de exemplu).



Calculăm $h=\dfrac{2\cdot \mathcal{A}[OAP]}{OA}=d(P,d)$

$$\mathcal{A}[OAP] = \frac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OP}\| \;\frac{1}{?}$$

$$\overrightarrow{OA}(1,1,1) \;,\; \overrightarrow{OP}(1,2,-1)$$

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}[OAP] = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9+4+1} = \frac{1}{2}\sqrt{14}$$

$$OA = \|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow d(P, d) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{14}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{14}{3}} = \frac{\sqrt{42}}{3}.$$

(4) Să se găsească distanța dintre dreptele

$$d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1} \quad \text{și}$$

$$d_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{3} \quad \text{și}$$

ecuațiile perpendicularei comune.

Soluție.

d_1 este definită de punctul $M_1(1,-1,0)$ și vectorul director $\vec{d_1}(2,3,1)$

d_2 este definită de punctul $M_2(-1,0,1)$ și vectorul director $\vec{d_2}(3,4,3)$.

Distanța dintre dreptele d_1 și d_2 este dată de formula:

$$d(d_1, d_2) = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{d_1}, \vec{d_2})|}{\|\vec{d_1} \times \vec{d_2}\|}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}(-1-1, 0+1, 1-0) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2}(-2, +1, 1)$$

$$\vec{d_1} \times \vec{d_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= 5\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$$

$$\|\vec{d_1} \times \vec{d_2}\| = \sqrt{25 + 9 + 1} = \sqrt{35}$$

$$|(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{d_1}, \vec{d_2})| = \left| \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 3 \end{vmatrix} \right| = |-14| = 14$$

$$d(\vec{d_1}, \vec{d_2}) = \frac{14}{\sqrt{35}} = \frac{14 \cdot \sqrt{35}}{35} = \frac{2\sqrt{35}}{7}.$$

Ecuațiile perpendicularei comune

$$\begin{cases} \Pi_1: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_1 & p_1 \\ r_2 & p_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0 \\ \Pi_2: \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_1 & p_1 \\ r_2 & p_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

Rândul 3 din fiecare determinant conține componentele vectorului $\vec{d} = \vec{d_1} \times \vec{d_2}$

$$\vec{d}: \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= 5\vec{i} - 3\vec{j} + (-1)\vec{k}$$

$$d: \begin{cases} \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}(x-1) - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}(y+1) + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} z = 0 \\ \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}(x+1) - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}(z-1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 7(y+1) - 21 \cdot z = 0 \quad |:7 \\ 5(x+1) + 18y - 29(z-1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y - 3z + 1 \\ 5x + 18y - 29z + 34 = 0 \end{cases} //$$