CURS 1

2+1+1

Nota : 1p. LCS
1p LCL
8p LS examen

Sage Math
www.sagemath.org
SageMath.Notebook

Introducere în teoria ecuațiilor diferențiale

1. Noțiunea de ecuație dif. și soluție

ecuație algebrică

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x_1 = 0, \ x_2 = 1$

sol.

x – necunoscuta este număr

$x^2 - 2 = 0$

$x^2 = 2$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

Ecuație diferențială: ecuație funcțională (necunoscuta este o funcție) în care pe lângă funcția necunoscută apar și derivatele acesteia.

Exemple

1) $y'(x) = y(x)$ $\qquad$ $y' = y$

$y(x) = e^x$ este soluție

$y(x) \equiv 0$

$y(x) = c \cdot e^x, \ c \in \mathbb{R}$ soluția generală a ec.

2) Problema primitivelor

$f \in C[a,b]$ fct dată

să se det $y \in C^1[a,b]$

$\boxed{y' = f}$ $\qquad$ $y(x) = \int_a^x f(s)ds + c, \ c \in \mathbb{R}$

În general în expresia unei ecuații dif. pot să apară și derivate de ordin superior a fct. nec.

$y'' + y = 0$ — ec. dif. de ordin 2

$y''' \cdot y' + y + x \cdot y'' = x^2$ — ec. dif. de ordin 3

Forma generală a unei ecuații dif.

(1) $\boxed{F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0}$ forma implicită a unei ec. dif.

x — variab. indep.

$y = y(x)$ — fct. necunoscută

n — ordinul ecuației dif.

(2) $\boxed{y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))}$ forma explicită (forma Cauchy sau forma normală) a unei ec. dif.

$f : D_f \to \mathbb{R}$ $\quad D_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

D_f — dom. ec. dif.

Def. O funcție $y \in C^n(I)$ este soluție a ec. (2) dacă:

(i) $I \subseteq \mathbb{R}$ interval nedegenerat

(ii) $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in D_f$, $\forall x \in I$.

(iii) $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$, $\forall x \in I$.

$n = 1$.

Ecuația dif. de ordinul 1

$$(3) \qquad \boxed{y'(x) = f(x, y(x))} \qquad f : D_f \to \mathbb{R}, \quad D_f \subseteq \mathbb{R}^2$$

Def. O funcție $y \in C^1(I)$ este sol. a ec. (3) dacă:

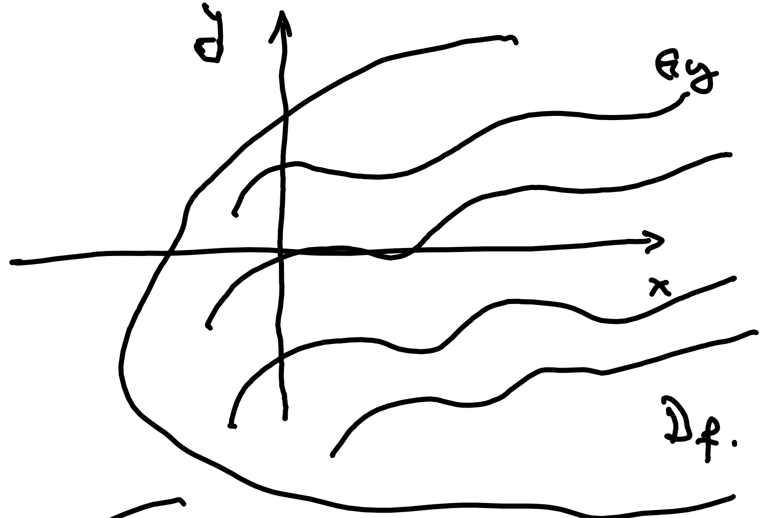
(i) $I \subseteq \mathbb{R}$ interval nedegenerat

(ii) $(x, y(x)) \in D_f$, $\forall x \in I$

(iii) $y'(x) = f(x, y(x))$, $\forall x \in I$.

$G_y = \{ (x, y(x)) \mid x \in I \}$

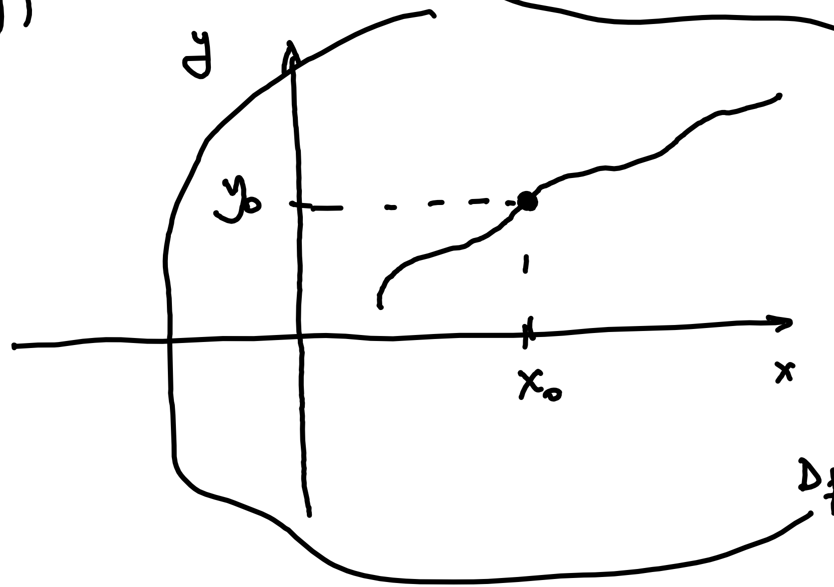
(ii) $\Longleftrightarrow$ $G_y \subseteq D_f$



<u>Probleme cu valori inițiale</u>

sau probleme Cauchy

$$(4) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



Dacă problema Cauchy (4) admite soluție unică spunem că punctul (x_0, y_0) este pct de existență și unicitate.

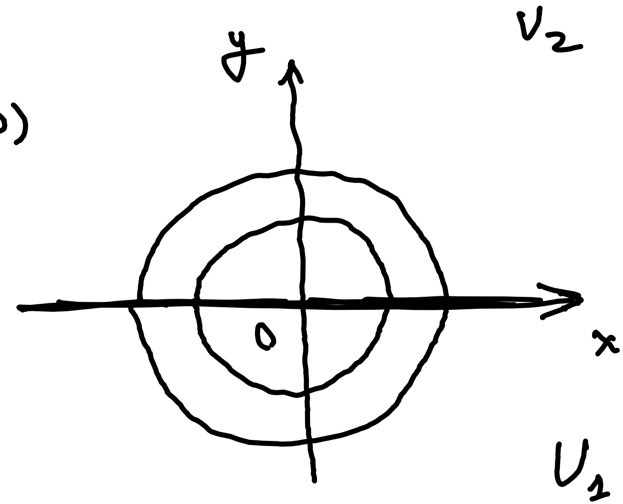
Dacă problema Cauchy (4) are mai multe soluții spunem că punctul (x_0, y_0) este punct singular.

Exemple

1) $y' = -\frac{x}{y}$ $\quad f(x,y) = -\frac{x}{y}$ $\quad D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* = U_1 \cup U_2$

unde $U_1 = \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$

$U_2 = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$



$$y' = -\frac{x}{y} \Rightarrow y \cdot y' = -x \quad | \cdot 2$$

$$2 \cdot y \cdot y' = -2x$$

$$(y^2)' = -2x$$

$$y^2 = -\int 2x\,dx + c$$

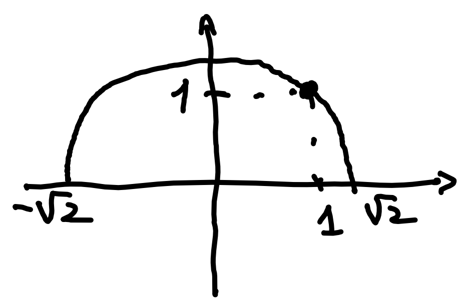
$$\boxed{y^2 = -x^2 + c \,,\ c \in \mathbb{R}}$$ solutia gen. în formă implicită

$$\boxed{x^2 + y^2 = c} \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{y(x) = \pm\sqrt{-x^2 + c} \,,\ c \in \mathbb{R}}$$ sol. gen. în formă explicită

Problema Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad x_0 = 1 \,,\ y_0 = 1$$



$$(1,1) \in U_2 \Rightarrow y(x) = \sqrt{-x^2 + c}$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow \sqrt{-1 + c} = 1 \Rightarrow -1 + c = 1$$

$$c = 2$$

soluția probl. Cauchy

$y(x) = \sqrt{2-x^2} \qquad y : (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow (1,1)$ este punct de existență și unicitate

2) $\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad f(x,y) = \sqrt{y} \qquad f : D_f \to \mathbb{R}$

$D_f = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$

$y' = \sqrt{y} \qquad y(x) \equiv 0$ este soluție a probl. Cauchy

$y \neq 0 \qquad \dfrac{y'}{\sqrt{y}} = 1 \;\Big|\cdot \dfrac{1}{2}$

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}$$

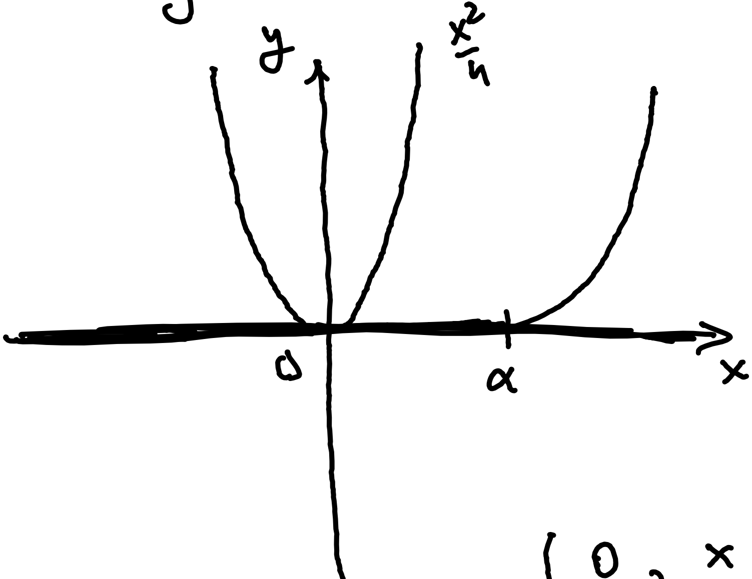
$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{y} = \int \frac{1}{2}\,dx + c = \frac{1}{2}x + c$$

$\rightarrow \boxed{y(x) = \left(\frac{1}{2}x + c\right)^2, \; c \in \mathbb{R}}$ sol. gen. a ec.

$y(0)=0 \Rightarrow c^2=0 \Rightarrow c=0$

$\Rightarrow y(x)=\frac{x^2}{4}$ sol. a probl. Cauchy $\Rightarrow$ $(0,0)$ este pct <u>singular</u>

$y(x)\equiv 0$ — " — " —

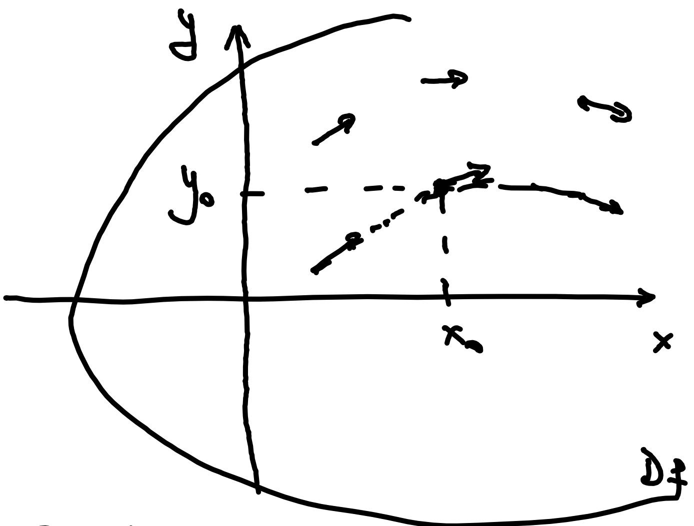


<u>$\alpha>0$</u> $\quad y_\alpha(x)=\begin{cases} 0, & x\le\alpha \\ \frac{(x-\alpha)^2}{4}, & x>\alpha \end{cases}$

$y_\alpha \in C^1 \Rightarrow y_\alpha$ este o sol. a probl. Cauchy $\forall \alpha\in[0,+\infty)$

interpretare geometrică

$y' = f(x,y)$, $f : D_f \to \mathbb{R}$



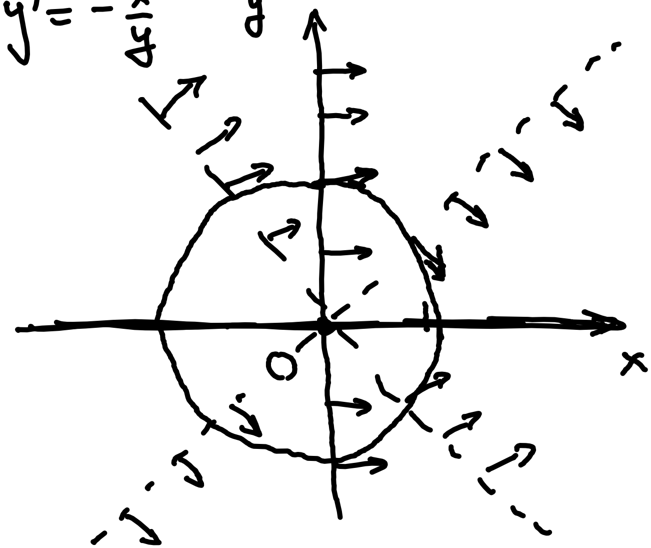
$(x_0, y_0) \in D_f$.

$f(x_0, y_0) = y'(x_0)$

valoarea $f(x,y)$ returnează panta tangentei la graficul unei soluții

Rezolvarea unei ecuații dif. revine la determinarea unei funcții $y = y(x)$ care se racordează la pantele tangentelor la graficul dat. de valorile lui $f(x,y)$.

$y' = -\frac{x}{y}$



câmp de direcții

$f(x,y) = -\frac{x}{y}$

$D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

$M(0, y_0) \in Oy$, $y_0 \neq 0$

$f(0, y_0) = 0$

$M \in$ primei bisectoare

$y = x$

$M(x, x)$

$f(x,x) = -\frac{x}{x} = -1$

$M \in$ celei de-a doua bisect

$y = -x$

$M(x, -x)$

$f(x,-x) = -\frac{x}{-x} = 1$

Sisteme de ecuații diferențiale

$y_1, y_2, \dots, y_n \to$ fcț. necunoscute

$x \to$ variab. indip

$y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$

$$(5) \quad \begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \dots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{cases}$$

forma normală a unui sistem de n ecuații dif. de ord. 1.

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$(6) \quad \boxed{Y'(x) = f(x, Y(x))}$$

forma vectorială a unui sist. de n. ec. dif. de ord. 1.

$$f : D_f \to \mathbb{R}^n, \quad D_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

Def. O funcție $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ este sol. a sist (5) dacă:

(i) $I \subseteq \mathbb{R}$ interval nedegenerat

(ii) $(x, Y(x)) \in D_f$, $\forall x \in I$

(iii) $Y'(x) = f(x, Y(x))$, $\forall x \in I$.

Obs. Orice ecuație dif. de ordinul n poate fi scrisă în mod echivalent sub forma unui sistem. de n ecuații dif. de ord. 1.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

$$y = y_1$$

$$y' = y_2$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)} = y_n$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$