Capitolul III

CONICE

§ 1. Cercul

Fie xOy reperul cartezian în plan și $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ două puncte. Reamintim expresia distanței

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct fixat și r un număr real strict pozitiv fixat. *Cercul C de centru M_0 și rază r* este mulțimea punctelor $M(x, y)$ cu proprietatea $M_0M = r$ (fig. III.1).

T e o r e m ă. *Punctul $M(x, y)$ aparține cercului C de centru $M_0(x_0, y_0)$ și rază r dacă și numai dacă*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Demonstrație. $M \in C \Leftrightarrow M_0M = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Astfel $C = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$ sau mai scurt $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Ecuația $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se numește *ecuația carteziană implicită a cercului C de centru (x_0, y_0) și rază r*. Această ecuație este echivalentă cu două *ecuații parametrice* în $\mathbb{R}^2$ (fig. III.2),

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t, \\ y = y_0 + r\sin t,\ t \in [0, 2\pi],\ t = \text{parametru}, \end{cases}$$

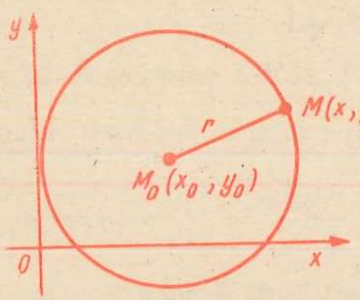

Fig. III.1

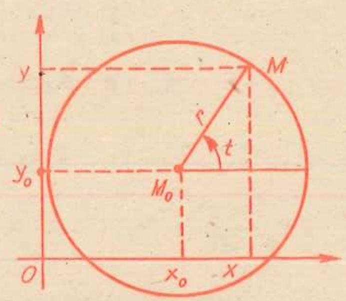

Fig. III.2

Se observă că $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ este un polinom de gradul doi în x și y, termenul de gradul doi fiind $x^2 + y^2$. Aceasta sugerează să cercetăm mulțimea

$$\Gamma : x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

Deoarece ecuația lui Γ se transcrie

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2 - c$$

rezultă:

1) dacă $a^2 + b^2 - c > 0$, atunci Γ este un cerc cu centrul în $x_0 = -a$, $y_0 = -b$ și de rază $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$;

2) dacă $a^2 + b^2 - c = 0$, atunci $\Gamma = \{(-a, -b)\}$;

3) dacă $a^2 + b^2 - c < 0$, atunci $\Gamma = \emptyset$.

Ecuația

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,\ a^2 + b^2 - c > 0,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

se numește *ecuația carteziană generală a cercului*. Evident această ecuație este echivalentă cu

$$d(x^2 + y^2) + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0,\ d \neq 0,\ a_1^2 + b_1^2 - dc_1 > 0.$$

Un cerc $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ separă planul $\mathfrak{P}$ în două submulțimi disjuncte: *interiorul* lui C notat $\operatorname{int}(C)$ și *exteriorul* lui C notat $\operatorname{ext}(C)$. Dacă $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2$, atunci (fig. III.3) $\operatorname{int}(C) = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}$, $C = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$, $\operatorname{ext}(C) = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}$. Evident $\operatorname{int}(C) \cap \operatorname{ext}(C) = \emptyset$, $\operatorname{int}(C) \cup C \cup \operatorname{ext}(C) = \mathfrak{P}$.

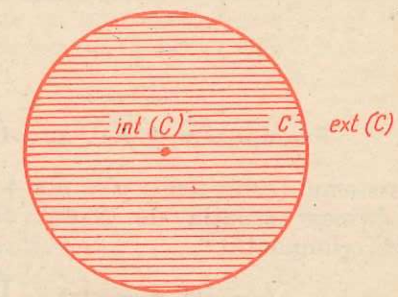

Fig. III.3

T e o r e m ă. 1) *Mulțimile* $\operatorname{int}(C)$ *și* $\operatorname{int}(C) \cup C$ *sînt convexe.*

2) $\forall M_1 \in \operatorname{int}(C)$, $\forall M_2 \in \operatorname{ext}(C)$, *segmentul* $[M_1M_2]$ *taie pe* C.

Demonstrație. Fără a scădea generalitatea putem presupune $x_0 = y_0 = 0$. Fie $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$, două puncte din plan. Segmentul $[M_1M_2]$ este caracterizat prin ecuațiile parametrice $x = (1 - t)x_1 + tx_2$, $y = (1 - t)y_1 + ty_2$, $t \in [0, 1]$.

1) Dacă $M_1, M_2 \in \operatorname{int}(C)$, adică $f(x_i, y_i) = x_i^2 + y_i^2 - r^2 < 0$, $i = 1, 2$, atunci $f(x, y) = f((1 - t)x_1 + tx_2, (1 - t)y_1 + ty_2) = ((1 - t)x_1 + tx_2)^2 + ((1 - t)y_1 + ty_2)^2 - r^2 = (1 - t)^2x_1^2 + 2(1 - t)tx_1x_2 + t^2x_2^2 + (1 - t)^2y_1^2 + 2(1 - t)ty_1y_2 + t^2y_2^2 - r^2 \leqslant {}^{*}(1 - t)(x_1^2 + y_1^2 - r^2) + t(x_2^2 + y_2^2 - r^2) = (1 - t)f(x_1, y_1) + tf(x_2, y_2) < 0$, $\forall t \in [0, 1]$. Cu alte cuvinte $[M_1M_2] \subset \operatorname{int}(C)$.

2) Fie $M_1 \in \operatorname{int}(C)$, adică $f(x_1, y_1) < 0$ și $M_2 \in \operatorname{ext}(C)$, adică $f(x_2, y_2) > 0$. Rezultă funcția continuă $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f((1 - t)x_1 + tx_2, (1 - t)y_1 + ty_2) = ((1 - t)x_1 + tx_2)^2 + ((1 - t)y_1 + ty_2)^2 - r^2$, cu proprietățile $\varphi(0) = f(x_1, y_1) < 0$ și $\varphi(1) = f(x_2, y_2) > 0$. De aceea există o valoare $t_0 \in [0, 1]$ astfel încît $0 = \varphi(t_0) = ((1 - t_0)x_1 + t_0x_2)^2 + ((1 - t_0)y_1 + t_0y_2)^2 - r^2$ și deci $M_0((1 - t_0)x_1 + t_0x_2, (1 - t_0)y_1 + t_0y_2) \in C$.

Intersecția dintre o dreaptă și un cerc. (fig. III.4) Fie dreapta $h : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ și cercul $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, de centru $M_0(x_0, y_0)$ și rază r. Poziția dreptei h față de cercul C se poate stabili calculînd distanța

$$d(M_0;\ h) = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

și comparînd această distanță cu r. Dacă $d(M_0;\ h) < r$, atunci dreapta h și cercul C au exact două puncte comune (h este *secantă*); dacă $d(M_0;\ h) = r$, atunci dreapta h și cercul C au exact un punct comun (h este *tangentă la cercul C*); dacă $d(M_0;\ h) > r$, atunci dreapta h și cercul C nu au puncte comune (h este *exterioară* cercului C).

* Se ordonează după t, apoi t^2 se majorează cu t, coeficientul său fiind pozitiv.

Intersecția $h \cap C$ este caracterizată de soluțiile în $\mathbf{R}^2$ ale sistemului

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \end{cases}$$

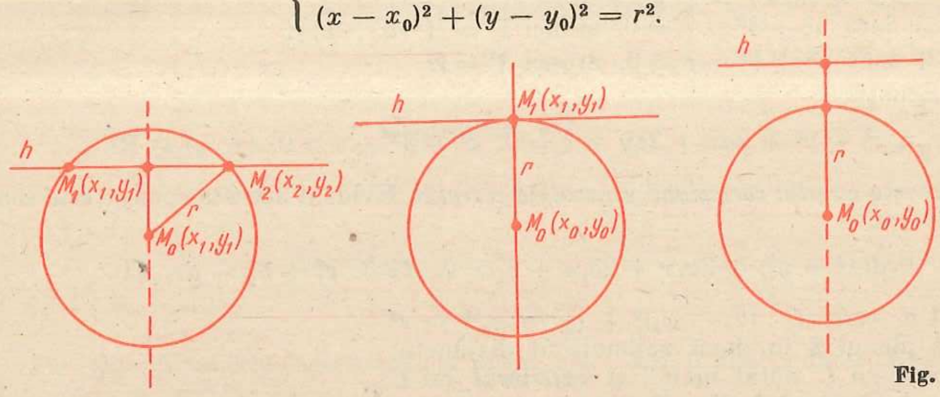

Fig. III.4

Presupunem $\beta \neq 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ și notăm $m = -\dfrac{\alpha}{\beta}$, $n = -\dfrac{\gamma}{\beta}$. Rezultă sistemul (echivalent) $y = mx + n$, $x^2 + y^2 = r^2$. Înlocuind pe y în a doua ecuație obținem ecuația de gradul al doilea $(1 + m^2)x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0$, cu discriminantul

$$\Delta = 4(1 + m^2)\left(r^2 - \left(\frac{|n|}{\sqrt{1 + m^2}}\right)^2\right) = 4(1 + m^2)(r^2 - d^2(0;\ h)).$$

Dacă $\Delta > 0$, adică $r > d(0;\ h)$, atunci ecuația în x are soluțiile x_1, x_2 care sînt abscisele punctelor de intersecție M_1, M_2. Ordonatele acestor puncte sînt $y_i = mx_i + n$, $i = 1, 2$ și $h \cap C = \{M_1, M_2\}$.

Dacă $\Delta = 0$, adică $r = d(0;\ h)$, atunci $x_1 = x_2$ și dreapta h este tangentă cercului în punctul $M_1(x_1, mx_1 + n)$, adică $h \cap C = \{M_1\}$.

Dacă $\Delta < 0$, adică $r < d(0; h)$, atunci ecuația de gradul al doilea în x nu are rădăcini reale și deci $d \cap C = \emptyset$.

Situația $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ se discută analog, iar cazul $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ se reduce la precedentul prin translația $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$.

Prin dedublări înțelegem substituirile $x^2 \to xx_1$, $y^2 \to yy_1$, $xy \to \dfrac{1}{2}(xy_1 + x_1y)$, $x \to \dfrac{1}{2}(x + x_1)$, $y \to \dfrac{1}{2}(y + y_1)$. Prin dedublata ecuației de gradul al doilea $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$ în punctul $M_1(x_1, y_1)$ înțelegem ecuația $a_{11}x_1x + a_2(y_1x + x_1y) + a_{22}y_1y + a_{10}(x + x_1) + a_{20}(y + y_1) + a_{00} = 0$ care are cel mult gradul întîi.

Fie cercul $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, cu centrul $M_0(x_0, y_0)$ și raza r, iar $M_1(x_1, y_1)$ un punct fixat pe cercul C. Dedublata ecuației cercului C în punctul $M_1(x_1, y_1)$, adică ecuația de gradul întîi

$$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) = r^2$$

reprezintă *tangenta la cercul C în punctul M_1*. Dreapta

$$M_0M_1 : \frac{x - x_1}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_0}$$

se numește *normală* la cercul C în punctul M_1 întrucît este perpendiculară pe tangenta în M_1 (fig. III.4).

Observații: 1) Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă și $y = f(x)$ ecuația carteziană explicită a graficului său. Tangenta la grafic în punctul $M_0(x_0, y_0 = f(x_0))$, $x_0 \in I$, are ecuația $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Dreapta care trece prin M_0 și este perpendiculară pe tangentă se numește *normala* la grafic în punctul M_0.

Coordonate polare (fig. III.5) Fie xOy reperul cartezian în planul $\mathfrak{X}$. Fiecărui punct $M(x, y) \neq O(0, 0)$ îi punem în corespondență o pereche ordonată (r, θ) de numere reale $r \in (0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$ determinată prin $r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ și $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ sau echivalent $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Numerele r și θ se numesc *coordonatele polare* ale punctului M și se scrie $M(r, \theta)$.

Rezultă o bijecție între $\mathfrak{X} - \{O\}$ și $(0, \infty) \times [0, 2\pi)$ numită *sistem de coordonate polare* determinat de reperul cartezian xOy.

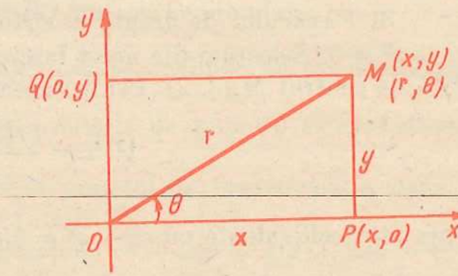

Fig. III.5

PROBLEME

1. Să se găsească ecuațiile cercurilor fixate respectiv prin:

1) centrul cercului $M_0(2, -3)$, raza cercului $r = 7$;
2) centrul cercului $M_0(1, 1)$, o tangentă la cerc $d : 3x + 4y + 8 = 0$;
3) extremitățile unui diametru $A(3, 2)$, $B(-1, 6)$;
4) punctele $A(3, 1)$ și $B(-1, 3)$, o dreaptă care conține centrul $d : 3x - y - 2 = 0$;
5) punctele $M_1(-1, 5)$, $M_2(-2, -2)$ și $M_3(5, 5)$.

Soluție parțială. 2) Raza r a acestui cerc este distanța de la M_0 la dreapta d. Deci,

$$r = \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 8}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3.$$

Astfel

$$C : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 3^2.$$

Ecuația carteziană este echivalentă cu ecuațiile parametrice $x = 1 + 3\cos t$, $y = 1 + 3\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$.

5) Se folosește ecuația carteziană generală $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ și se pune condiția ca fiecare punct să fie situat pe cerc.

Se găsește sistemul liniar

$$\begin{cases} -2a + 10b + c = -26, \\ -4a - 4b + c = -8, \\ 100a + 10b + c = -50 \end{cases}$$

cu soluția $a = -2$, $b = -1$, $c = -20$. De aceea cercul căutat are ecuația $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

2. 1) Să se arate că ecuația $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$ reprezintă un cerc C, punîndu-se în evidență centrul $M_0(x_0, y_0)$ și raza r.

2) Să se scrie ecuația carteziană a tangentei la C în punctul $A(2, 0)$.

3) Să se găsească ecuațiile carteziene ale tangentelor duse prin $D(8, 7)$ la cercul C.

Soluție. 1) Ecuația dată se transcrie $(x-3)^2+(y-2)^2=5$ și deci ea reprezintă un cerc cu centrul în $M_0(3, 2)$ și de rază $r=\sqrt{5}$.

2) Punctul A aparține lui C, adică coordonatele sale verifică ecuația lui C. Ecuația carteziană a tangentei la C în punctul $A(2, 0)$ se poate obține utilizînd dedublata ecuației lui C, $(x_1-3)(x-3)+(y_1-2)(y-2)=5$. Rezultă $-(x-3)-2(y-2)=5$ sau $x+2y-2=0$.

3) Fasciculul de drepte cu vîrful $D(8, 7)$ are ecuația $r(x-8)+s(y-7)=0$, $r^2+s^2\neq 0$. Selectăm din acest fascicul dreptele care se găsesc la distanța $r=\sqrt{5}$ față de centrul $M_0(3, 2)$. Pentru aceasta se impune condiția

$$\sqrt{5}=\frac{|r(3-8)+s(2-7)|}{\sqrt{r^2+s^2}},$$

care este echivalentă cu $r^2+s^2=5(r+s)^2$. Rezultă $r=-\frac{1}{2}s$, $r=-2s$ și deci $x-2y+6=0$ respectiv $2x-y-9=0$ sînt ecuațiile căutate.

3. Punctul $M_0(3, -1)$ este centrul unui cerc ce determină pe dreapta $2x-5y+18=0$ o coardă de lungime 6. Să se scrie ecuația cercului.

4. Să se arate că cercul $C: x^2+y^2=1$ nu este graficul nici unei funcții, dar este reuniunea graficelor a două funcții.

Soluție. Se știe că graficul unei funcții este intersectat de o dreaptă paralelă cu Oy cel mult într-un punct. Se observă însă că axa Oy intersectează cercul C în două puncte de coordonate $(0, -1)$, $(0, +1)$. De aceea C nu este graficul nici unei funcții.

Semicercul superior $x^2+y^2=1$, $y\geqslant 0$ este graficul funcției $f:[-1, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, iar semicercul inferior $x^2+y^2=1$, $y<0$ este graficul funcției $g:(-1, 1)\to\mathbb{R}$, $g(x)=-\sqrt{1-x^2}$. Cercul C este reuniunea acestor două grafice.

5. Pe un cerc C de diametru dat $[AB]$, de lungime $4a$, $a>0$ și centru O, se consideră un punct mobil M.

1) Să se scrie ecuațiile cercurilor circumscrise triunghiurilor AOM și BOM.

2) Să se arate că produsul distanțelor de la centrele P și Q ale acestor cercuri la dreapta AB este constant și că dreptele AP și BQ sînt perpendiculare.

3) Să se găsească locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor AP și BQ.

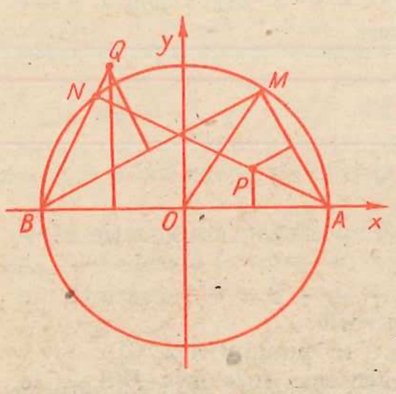

Fig. III.6

1) *Soluție.* 1) Fixăm mai întîi reperul cartezian ca în figura III.6 considerînd dreapta AB ca Ox și mediatoarea segmentului AB ca Oy. Rezultă $A(2a, 0)$, $B(-2a, 0)$ și $C: x^2+y^2-4a^2=0$. Fie $M(\alpha, \beta)$; $M\in C\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-4a^2=0$(1). Cercul circumscris triunghiului AOM are centrul P situat pe mediatoarea segmentului $[OA]$. Fie $P(a, \lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$; atunci raza este $r=\sqrt{a^2+\lambda^2}$, iar ecuația este $x^2+y^2-2ax-2\lambda y=0$ cu condiția $\alpha^2+\beta^2-2a\alpha-2\lambda\beta=0$ (2).

Analog găsim ecuația cercului circumscris triunghiului BOM, cu centrul $Q(-a, \mu)$ $\mu\in\mathbb{R}$ și anume $x^2+y^2+2ax-2\mu y=0$ cu condiția $\alpha^2+\beta^2+2a\alpha-2\mu\beta=0$ (3).

2) Din relațiile (1), (2), (3) deducem

$$PP'=\left|\frac{a(2a-\alpha)}{\beta}\right|, QQ'=\left|\frac{a(2a+\alpha)}{\beta}\right|, \beta\neq 0, \quad PP'\cdot QQ'=\frac{a^2\beta^2}{\beta^2}=a^2=\text{const.}$$

Panta dreptei AP este $m_1=-\frac{\lambda}{a}$, iar a dreptei BQ este $m_2=\frac{\mu}{a}$. Deoarece $m_1m_2=-\frac{\lambda\mu}{a^2}=-\frac{a^2}{a^2}=-1$, dreptele AP și BQ sînt perpendiculare.

Observație. Produsul $\lambda\mu$ este pozitiv, oricare ar fi poziția punctului M pe cercul C.

3) Fie $\{L\}=AP\cap BQ$. Locul geometric descris de punctul L este chiar cercul $C: x^2+y^2-4a^2=0$.

6. Să se găsească locul geometric descris de punctul de intersecție a dreptelor $d: x\cos\alpha+y=1$, $d': x-y\cos\alpha=1$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

7. Să se discute natura rădăcinilor ecuației $x^2+2(a+b)x+2ab=0$, dacă a și b sînt doi parametri reali.

Indicație. Calculînd discriminantul se găsește $\Delta=a^2+b^2-4$. Pentru discuție se folosește separarea planului aOb în regiuni.

§ 2. Elipsa

Fie c un număr real pozitiv și F', F două puncte fixate din plan astfel încît $F'F=2c$ (fig. III.7).

Definiție. Fie $a>c$. Mulțimea E a punctelor M cu proprietatea

$$MF'+MF=2a$$

se numește elipsă.

Dacă $c=0$, atunci elipsa se reduce la cercul de rază a. Punctele F' și F se numesc *focarele elipsei*, dreapta $F'F$ se numește *axa focală*, distanța $F'F=2c$ se numește *distanța focală*, iar segmentele $[MF']$, $[MF]$ se numesc *razele focale* ale punctului M.

Elipsa nu este o mulțime vidă, deoarece cercul cu centrul în F și de rază a taie mediatoarea segmentului $[F'F]$ în două puncte B' și B care aparțin lui E. Elipsa poate fi trasată ca în figura III.7; firul inextensibil de lungime $2a$ are capetele fixate în focare, iar vîrful creionului se mișcă întinzînd acest fir.

Dreapta $F'F$ și mediatoarea $B'B$ a segmentului $[F'F]$ sînt *axe de simetrie* pentru E. Fie $F'F\cap B'B=\{O\}$. Punctul O este *centru de simetrie*. Aceste elemente fixează reperul cartezian din figura III.8. Rezultă $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$, $B'(0, -\sqrt{a^2-c^2})$, $B(0, \sqrt{a^2-c^2})$.

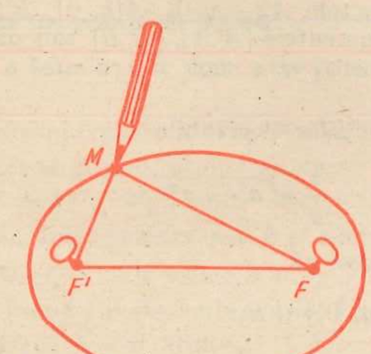

Fig. III.7

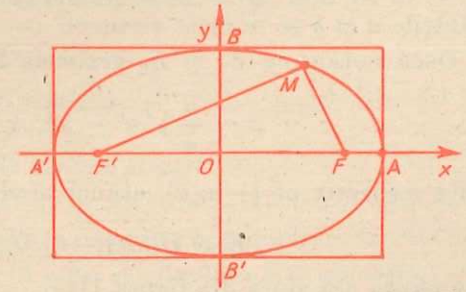

Fig. III.8

Teoremă. *Punctul $M(x, y)$ aparține elipsei E dacă și numai dacă*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ b^2 = a^2 - c^2.$$

Demonstrație. $M \in E \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$. Transferînd al doilea termen din partea stîngă în partea dreaptă și ridicînd la pătrat, obținem $(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Calcule similare conduc la $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$.

Notînd $b^2 = a^2 - c^2$, ultima ecuație se transcrie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Astfel $E = \left\{ M(x, y) \,\middle|\, (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$ sau mai scurt

$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ecuația $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, se numește *ecuația carteziană implicită* a elipsei. Ea este echivalentă cu ecuațiile parametrice în $\mathbf{R}^2$,

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t,\ t \in [0, 2\pi),\ t = \text{parametru} \end{cases}$$

(pentru semnificația lui t, vezi soluția problemei 27, Cap. IV)

Considerăm elipsa E de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \\ \text{sau} \\ y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \end{cases} ,x \in [-a, a].$$

Ecuația $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ reprezintă porțiunea din elipsă cuprinsă în semiplanul $y \geqslant 0$, iar ecuația $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ reprezintă porțiunea din elipsă cuprinsă în semiplanul $y \leqslant 0$. Acestea se numesc ecuații *carteziene explicite*.

Axele de coordonate taie elipsa în punctele $A'(-a, 0)$, $A(a, 0)$, $B'(0, -b)$, $B(0, b)$ care se numesc *vîrfurile elipsei*. Segmentele $[A'A]$, $[B'B]$ sau distanțele $d(A', A) = 2a$, $d(B'\,B) = 2b$ se numesc respectiv *axa mare* și *axa mică* a elipsei. Jumătățile a și b se numesc *semiaxe*.

Dacă notăm cu E_1 și E_2 graficele funcțiilor derivabile

$$x \to \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},\ x \to -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

definite respectiv pe $(-a, a)$, atunci se observă că

$$E = E_1 \cup \{(-a, 0), (a, 0)\} \cup E_2$$

și deci elipsa are alura din figura III.8.

O elipsă are proprietatea că separă planul în două submulțimi disjuncte (fig. III.9): interiorul lui E notat $\text{int}(E)$ și exteriorul lui E notat $\text{ext}(E)$. Utilizînd funcția

$$f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1, \text{ avem}$$

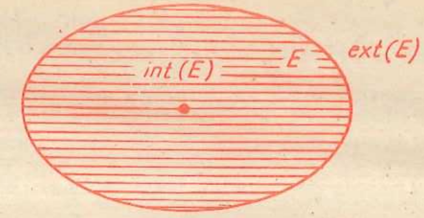

Fig. III.9

$$\text{int}(E) = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\},$$
$$E = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\},$$

$\text{ext}(E) = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}$, $\text{int}(E) \cap \text{ext}(E) = \varnothing$, $\text{int}(E) \cup E \cup \text{ext}(E) = \mathfrak{P}$. Mai mult, mulțimile $\text{int}(E)$ și $\text{int}(E) \cup E$ sînt convexe și conțin centrul O și focarele F', F.

Intersecția dintre dreapta h: $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ și elipsa E: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ este descrisă de soluțiile în $\mathbf{R}^2$ ale sistemului

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

De aceea $h \cap E$ conține cel mult două puncte (fig. III.10).

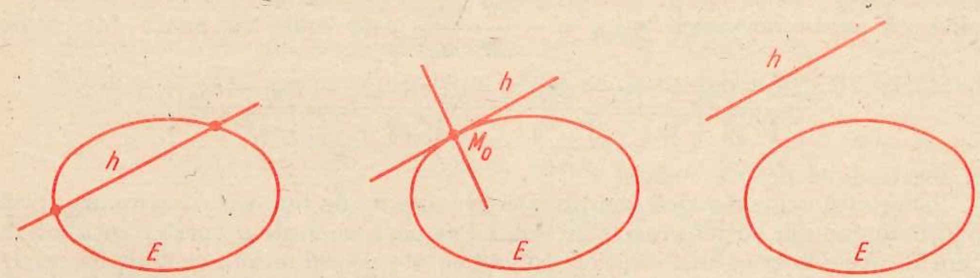

Fig. III.10

Presupunem $\beta \neq 0$ și notăm $m = -\frac{\alpha}{\beta}$, $n = -\frac{\gamma}{\beta}$. Rezultă sistemul (echivalent) $y = mx + n$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Înlocuind pe y în a doua ecuație obținem ecuația de gradul al doilea

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0,$$

cu discriminantul $\Delta = 4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - n^2)$.

Dacă $\Delta > 0$, atunci sistemul are soluțiile distincte (x_1, y_1), (x_2, y_2) și deci $h \cap E = \{M_1, M_2\}$, unde $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$.

În acest caz dreapta h se numește *secanta elipsei*.

Dacă $\Delta = 0$, adică $n = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$, dreapta h taie elipsa într-un singur punct (două puncte confundate). În acest caz dreapta h se numește *tangentă* elipsei.

Dacă $\Delta < 0$, atunci $h \cap E = \varnothing$. În acest caz dreapta h se numește *exterioară* elipsei.

Fie elipsa E: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ și $M_0(x_0, y_0) \in E$. *Dedublata ecuației elipsei E* în punctul $M_0(x_0, y_0)$, adică ecuația de gradul întîi

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

reprezintă *tangenta la elipsa* E în punctul M_0. Perpendiculara pe tangentă în punctul M_0 se numește *normala elipsei E în punctul* M_0 (fig. III.10).

Teoremă. *Tangenta și normala la elipsă în punctul* M_0 *sînt bisectoarele unghiurilor determinate de suporturile razelor focale ale lui* M_0.

Demonstrație. Fie elipsa E: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $b^2 = a^2 - c^2$ și $M_0(x_0, y_0) \in E$, adică $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0$. Fie $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$ focarele lui E. Suporturile razelor vectoare $[M_0F']$ și $[M_0F]$ sînt dreptele (fig. III.11) M_0F' : $y_0x - (x_0 + c)y - cy_0 = 0$, respectiv FM_0 : $-y_0x + (x_0 - c)y - cy_0 = 0$.

Dacă $x_0 = 0$, atunci triunghiul $F'M_0F$ este isoscel, tangenta M_0T este orizontală, iar normala M_0N este verticală (coincide cu Oy). Presupunem $x_0 \neq 0$ și ținem seama de identitățile

$$\sqrt{y_0^2 + (x_0 + c)^2} = \frac{a^2 + cx_0}{a}, \sqrt{y_0^2 + (x_0 - c)^2} = \frac{a^2 - cx_0}{a}.$$

Rezultă că panta normalei, $m_{M_0N} = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y_0}{x_0}$, este egală cu panta bisectoarei

$$\frac{y_0x - (x_0 + c)y - cy_0}{\sqrt{y_0^2 + (x_0 + c)^2}} = \frac{-y_0x + (x_0 - c)y - cy_0}{\sqrt{y_0^2 + (x_0 - c)^2}}.$$

Deci aceste două drepte coincid.

Proprietatea geometrică menționată în teorema de mai sus corespunde următorului fenomen din optică: razele de lumină ce pornesc dintr-o sursă fixată într-unul din focarele unei oglinzi eliptice sînt reflectate de oglindă în celălalt focar. De aceea teorema este cunoscută sub numele de *proprietatea optică a elipsei*.

Construcția elipsei prin puncte (fig. III.12). Presupunem că se dau axa mare $[A'A]$ de lungime $2a$ și axa mică $[B'B]$ de lungime $2b$.

1) Fixăm un punct O al planului drept mijlocul segmentelor perpendiculare $[A'A]$ și $[B'B]$.

2) Se ia în compas distanța a și cu centrul în B se descrie un arc de cerc care taie pe $[A'A]$ în focarele F' și F.

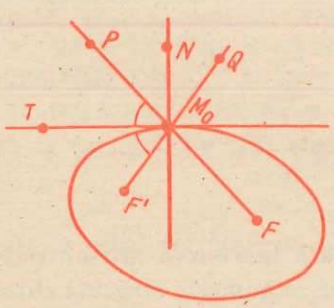

Fig. III.11

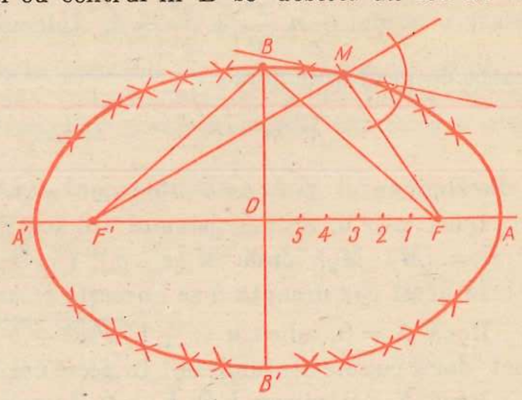

Fig. III.12

3) Se consideră un număr de puncte 1, 2, 3, ... pe axa mare.

4) Se ia în compas distanța de la A' la 1, apoi cu centrul în F' se trasează arce de cerc deasupra și dedesubtul axei mari.

5) Se ia în compas distanța de la A la 1; apoi cu centrul în F se trasează arce de cerc care intersectează arcele construite la 4). Astfel se obțin două puncte ale elipsei de pe jumătatea din dreapta.

6) Se repetă pașii 4), și 5) schimbînd pe F' cu F și astfel se obțin două puncte ale elipsei situate pe jumătatea din stînga.

7) Se repetă pașii 4) 5), 6) folosind distanțele de la A' la 2, de la A la 2,... pînă cînd se precizează un număr suficient de puncte pentru a construi elipsa.

Punctul M a fost construit folosind distanțele de la A' la 4 și de la A la 4.

Desigur, trebuie să ținem seama de faptul că elipsa nu este „ascuțită" în vecinătatea vîrfurilor iar tangenta în punctul M al elipsei este bisectoarea „exterioară" a unghiurilor dreptelor MF' și MF.

PROBLEME

1. Se consideră elipsele date prin:
1) focarele $F'(-1, 0)$, $F(1, 0)$, axa mare $a = 5$;
2) focarul $F(1, 1)$, centrul $C(1, 3)$, axa mare $a = 10$;
3) centrul $C(2, 1)$, vîrfurile $A(2, 6)$, $B(1, 1)$.
Să se deseneze aceste elipse și să se găsească ecuațiile lor.

2. Se dau elipsele E_1: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $E_2 : 3x^2 + 2y^2 = 12$. Pentru fiecare să se determine vîrfurile, axele și focarele.

3. Să se calculeze aria unui pătrat avînd două vîrfuri ce coincid cu focarele

elipsei E: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0$.

Indicație. Avem $a^2 = 25$, $b^2 = 16$ de unde $c^2 = 25 - 16 = 9$ și focarele vor fi $F(3, 0)$ și $F'(-3, 0)$. Segmentul $[FF']$ poate coincide cu latura pătratului sau cu diagonala și se calculează aria pentru fiecare caz.

4. Dacă M este un punct al elipsei E: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, iar F și F' focarele sale, să se arate că se verifică relația

$$MF \cdot MF' + MO^2 = a^2 + b^2.$$

Indicație. Se face un calcul similar cu cel de la deducerea ecuației elipsei, dar se ține seama de formula medianei în triunghiul MFF'.

5. Se consideră punctele $A(7, -6)$, $B(-1, 4)$, $C(3, 5)$ și se cere să se precizeze care este situat pe elipsa E: $25x^2 + 9y^2 = 450$. În acest punct să se scrie ecuația tangenței la elipsă.

Indicație. Se găsește că C aparține elipsei. Ecuația tangentei se scrie prin dedublare.

6. Se consideră punctele variabile $A(\alpha, 0)$, $B(0, \beta)$, astfel încît $AB = 6$.

Să se găsească locul geometric al punctului M care împarte segmentul $[AB]$ în raportul $\frac{1}{2}$, punîndu-se în evidență ecuația carteziană implicită, ecuațiile parametrice.

Soluție (fig. III.13). Fie $M(x, y)$. Rezultă $x = \frac{2\alpha}{3}$, $y = \frac{\beta}{3}$ și $\alpha^2 + \beta^2 = 36$.

Eliminînd parametrii α, β între aceste trei relații, obținem elipsa

$$E: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \text{ de semiaxe } a = 4,\ b = 2.$$

Ecuațiile parametrice ale lui E sînt $x = 4\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$.

7. Se consideră triunghiurile de tipul $M_1M_2M_3$ înscrise în elipsa $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, astfel încît centrele lor de greutate să coincidă cu centrul elipsei.

Să se demonstreze că normalele la elipsă, duse prin vîrfurile fiecărui triunghi, sînt concurente.

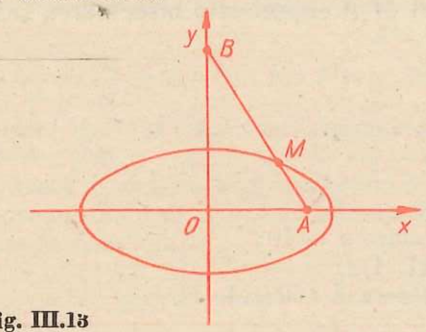

Fig. III.13

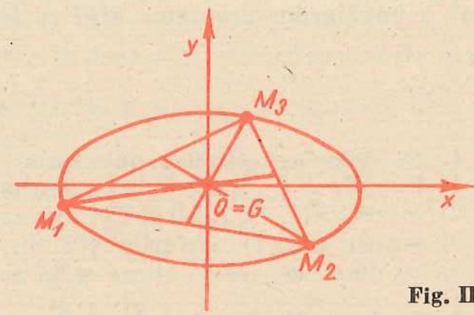

Fig. III.14

Soluție (fig. III.14). Fie $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$; $M_i \in E \Leftrightarrow \frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} - 1 = 0$.

Relația $\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{x_i}{a}\right)^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{y_i}{b}\right)^2 = 3$, conduce la $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$.

Centrul de greutate $G(x_G, y_G)$ are coordonatele $x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$, iar $G = O$, implică $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ și $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.

Ecuațiile tangentelor la elipsa E, în punctele $M_i(x_i, y_i)$ sînt $\frac{x_ix}{a^2} + \frac{y_iy}{b^2} - 1 = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Ecuațiile normalelor în punctele $M_i(x_i, y_i)$ sînt

$$a^2y_1x - b^2x_1y + (b^2 - a^2)x_1y_1 = 0.$$
$$a^2y_2x - b^2x_2y + (b^2 - a^2)x_2y_2 = 0.$$
$$a^2y_3x - b^2x_3y + (b^2 - a^2)x_3y_3 = 0.$$

Aceste trei ecuații formează un sistem cu două necunoscute x, y, care este compatibil determinat deoarece avem

$$\begin{vmatrix} a^2y_1 & -b^2x_1 \\ a^2y_2 & -b^2x_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a^2y_1 & -b^2x_1 & (b^2 - a^2)x_1y_1 \\ a^2y_2 & -b^2x_2 & (b^2 - a^2)x_2y_2 \\ a^2y_3 & -b^2x_3 & (b^2 - a^2)x_3y_3 \end{vmatrix} =$$

$$= -a^2b^2(b^2 - a^2)\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & x_1y_1 \\ y_2 & x_2 & x_2y_2 \\ y_3 & x_3 & x_3y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultă că cele trei normale sînt concurente.

8. Să se arate că:

1) dintre toate triunghiurile avînd lungimea bazei și perimetrul date, triunghiul isoscel are aria maximă;

2) dintre toate triunghiurile avînd lungimea bazei și aria date, triunghiul isoscel are cel mai mic perimetru.

Soluție (fig. III.15). 1) Considerăm punctele fixe A, B și un sistem cartezian de axe ca în figură. Triunghiul ABM are perimetrul constant dacă și numai dacă M aparține elipsei de focare A și B. Este evident că triunghiul cu cea mai mare înălțime are cea mai mare arie; aceasta are loc pentru $M = C$, adică în cazul cînd ABC este un triunghi isoscel.

2) Se fixează baza $[AB]$ și lungimea înălțimii OC, unde $O(0, 0)$, $C(0, v)$, $C'(0, -v)$. Orice punct $N(x, y)$ din plan cu proprietățile $|y| = v : N \neq C, N \neq C'$ aparține exteriorului elipsei de focare A, B și deci perimetrul triunghiului ABN este mai mare decît perimetrul triunghiului ABC.

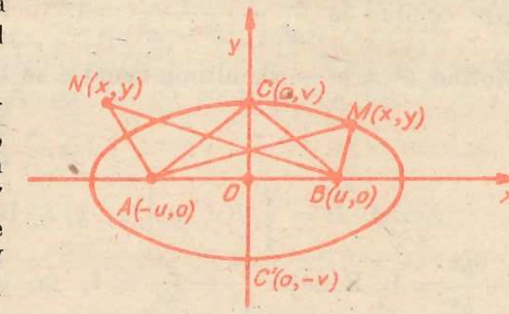

Fig. III.15

§ 3. Hiperbola

Fie c un număr real strict pozitiv și F', F două puncte fixate din plan astfel încît $F'F = 2c$.

Definiție. Fie $a \in (0, c)$. **Mulțimea** H **a punctelor** M **cu proprietatea**

$$|MF' - MF| = 2a$$

se numește hiperbolă.

Punctele F' și F se numesc *focarele hiperbolei*, dreapta $F'F$ se numește *axa focală*, distanța $F'F = 2c$ se numește *distanța focală*, iar segmentele $[MF']$, $[MF]$ se numesc *razele focale* ale punctului M.

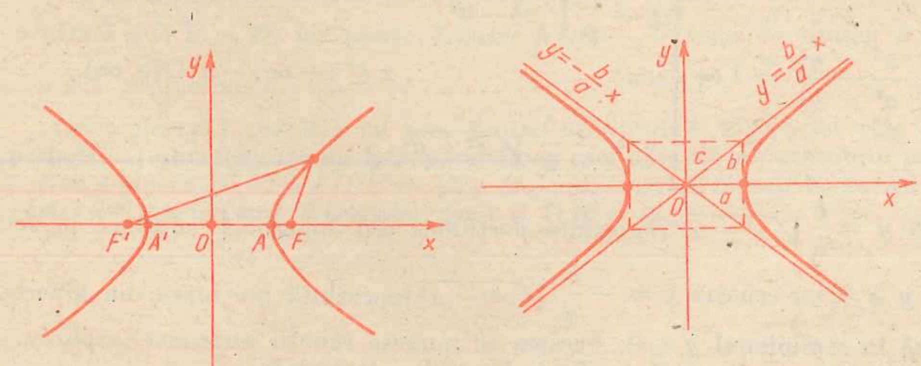

Fig. III.16

Problemă. Să se arate că hiperbola nu este mulțimea vidă.

Dreapta $F'F$ și mediatoarea segmentului $F'F$ sînt *axe de simetrie* pentru H. Punctul lor comun O este *centru de simetrie*. Acestea fixează reperul cartezian din figura III.16. Rezultă $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$.

Teoremă. *Punctul $M(x, y)$ aparține hiperbolei H dacă și numai dacă*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ b^2 = c^2 - a^2.$$

Demonstrație. $M \in H \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$. Transferînd al doilea termen din partea stîngă în partea dreaptă și ridicînd la pătrat, obținem $(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$. Calcule similare conduc la $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$

Notînd $b^2 = c^2 - a^2$, ultima ecuație se transcrie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Astfel, $H = \left\{M(x, y) \,\middle|\, (x, y) \in \mathbf{R}^2, \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ sau mai scurt $H: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Ecuația $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, se numește *ecuația carteziană implicită* a hiperbolei. Axa Ox taie hiperbola H în punctele $A'(-a, 0)$, $A(a, 0)$ numite *vîrfurile hiperbolei.* De aceea axa Ox se numește *axa transversă* a hiperbolei. Axa Oy nu intersectează pe H (axă netransversă). Folosind funcția *cosinus hiperbolic*, ch : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\operatorname{ch} t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ și funcția *sinus hiperbolic*, sh: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\operatorname{sh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, care satisfac identitatea $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, ajungem la următoarele concluzii: ramura $H': \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $x \leqslant -a$, are *ecuațiile parametrice* $x = -a\operatorname{ch} t$, $y = b\operatorname{sh} t$, $t \in \mathbf{R}$ ramura $H'': \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $x \geqslant a$ are *ecuațiile parametrice* $x = a\operatorname{ch} t$, $y = b\operatorname{sh} t$, $t \in \mathbf{R}$.

Fie hiperbola H de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \\ \text{sau} \\ y = -\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \end{cases},\ x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty).$$

Ecuația $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ reprezintă porțiunea din hiperbolă cuprinsă în semiplanul $y \geqslant 0$, iar ecuația $y = -\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ reprezintă porțiunea din hiperbolă cuprinsă în semiplanul $y \leqslant 0$. Acestea se numesc ecuații *carteziene explicite.*

Dacă notăm cu H_1 și H_2 graficele funcțiilor derivabile

$$x \to \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},\ x \to -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

definite respectiv pe $(-\infty, -a) \cup (a, \infty)$, atunci se observă că (fig. III.16)

$$H = H_1 \cup \{(-a, 0), (a, 0)\} \cup H_2.$$

Dreptele care trec prin origine și au pantele $\pm \dfrac{b}{a}$ se numesc *asimptotele hiperbolei H*. Ecuația reuniunii asimptotelor este $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0.$

O hiperbolă are proprietatea că separă planul în două submulțimi disjuncte (fig. III.17): *interiorul* lui H notat $\operatorname{int}(H)$ și *exteriorul* lui H notat $\operatorname{ext}(H)$. Utilizînd funcția $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1$ avem $\operatorname{int}(H) = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}$, $H = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$, $\operatorname{ext}(H) = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}$, $\operatorname{int}(H) \cap \operatorname{ext}(H) = \emptyset$, $\operatorname{int}(H) \cup H \cup \operatorname{ext}(H) = \mathcal{P}$, $\operatorname{int}(H) = \operatorname{int}(H') \cup \operatorname{int}(H'')$, $\operatorname{int}(H') \cap \operatorname{int}(H'') = \emptyset$. Mulțimea $\operatorname{ext}(H)$ conține centrul O. Mulțimea $\operatorname{int}(H)$ conține focarele F' și F.

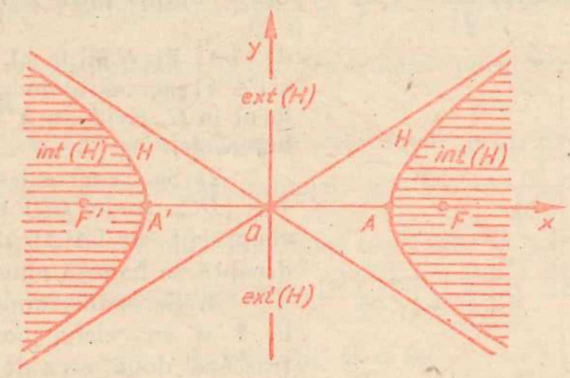

Fig. III.17

Intersecția dintre dreapta h: $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ și hiperbola $H: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ este caracterizată de sistemul:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, (x, y) \in \mathbf{R}^2. \end{cases}$$

De aceea $h \cap H$ conține cel mult două puncte (fig. III.18).

Dacă $h \cap H = \emptyset$, iar panta dreptei h este $-\dfrac{b}{a}$ sau $\dfrac{b}{a}$ atunci h este o *asimptotă* a hiperbolei.

Orice dreaptă paralelă cu una dintre asimptotele hiperbolei este *secantă* hiperbolei. O dreaptă care nu este paralelă cu nici una dintre asimptote poate fi: (1) *secantă* hiperbolei dacă $d \cap H = \{M_1, M_2\}$; (2) *tangentă* hiperbolei dacă $d \cap H = \{M_0\}$; (3) *exterioara* hiperbolei dacă $d \cap H = \emptyset$.

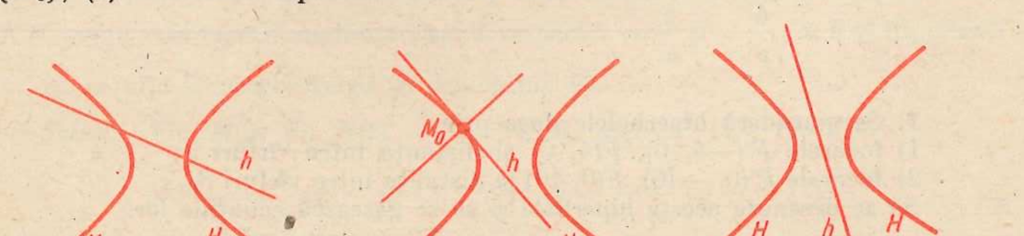

Fig. III.18

Fie hiperbola $H\colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ și $M_0(x_0, y_0) \in H$. *Dedublata ecuației hiperbolei* H în punctul $M_0(x_0, y_0)$, adică ecuația de gradul întîi

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

reprezintă *tangenta la hiperbola* H în punctul M_0. Perpendiculara pe tangentă în punctul M_0 se numește *normala* hiperbolei H în punctul M_0 (fig. III.18).

Proprietatea optică a hiperbolei. Tangenta și normala la hiperbolă în punctul M_0 sînt bisectoarele unghiurilor determinate de suporturile razelor focale ale lui M_0.

Construcția hiperbolei prin puncte (fig. III.19). Presupunem că se dau focarele F', F și numărul $2a = |MF' - MF|$ cuprins între zero și distanța focală $F'F = 2c$.

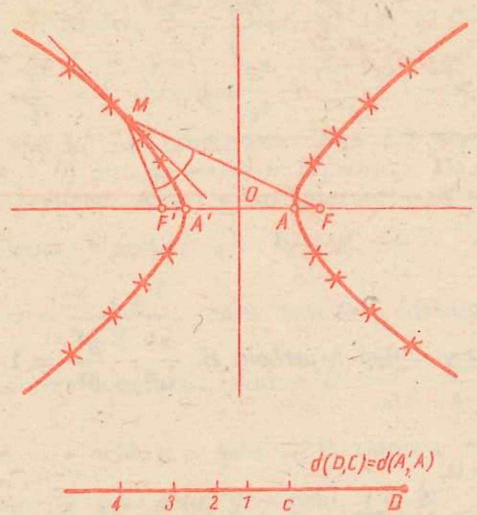

Fig. III.19

1) Fie O mijlocul segmentului $[F'F]$ și $[A'A]$ segmentul de lungime $2a$ cu mijlocul în O. Evident A', A sînt puncte ale hiperbolei.

2) Se construiește o semidreaptă $[DC$, unde $[DC]$ este un segment congruent cu $[A'A]$. Pe această semidreaptă se fixează punctele 1, 2, 3,... .

3) Se ia în compas distanța de la D la 1 și cu vîrful compasului în F se trasează două arce de cerc deasupra și dedesubtul axei focale.

4) Se ia în compas distanța de la C la 1 și cu vîrful compasului în F' se trasează arce de cerc care intersectează arcele construite la 3). Intersecțiile acestor arce dau două puncte ale hiperbolei pe ramura din stînga.

5) Se repetă pașii 3) și 4) schimbînd F cu F' și astfel se obțin două puncte ale hiperbolei pe ramura din dreapta.

6) Se repetă pașii 3), 4), 5) folosind distanțele de la D la 2, de la C la 2,... pînă cînd se precizează un număr suficient de puncte pentru a putea trasa hiperbola.

Pentru desenarea efectivă se poate ține seama și de faptul că hiperbola nu este „ascuțită" în vecinătatea vîrfurilor, iar tangenta în punctul M al hiperbolei este bisectoarea „interioară" a unghiurilor dreptelor MF' și MF.

PROBLEME

1. Se consideră hiperbolele date prin:
1) focarele $F'(-4, 0)$, $F(4, 0)$ și distanța între vîrfuri 5;
2) focarele $F'(0, -10)$, $F(0, 10)$ și distanța între vîrfuri 8.
Să se deseneze aceste hiperbole și să se găsească ecuațiile lor.

2. Se dau hiperbolele $H_1\colon x^2 - y^2 = 1$, $H_2\colon \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Pentru fiecare să se determine vîrfurile, focarele și asimptotele.

3. Se dă hiperbola $H\colon 2x^2 - 5y^2 - 10 = 0$.

1) Să se determine vîrfurile și asimptotele hiperbolei H.

2) Să se scrie ecuațiile parametrice ale ramurilor hiperbolei H.

3) Să se găsească ecuația tangentei și ecuația normalei în punctul de coordonate $(\sqrt{10}, \sqrt{2})$.

Soluție. 1) Scriem ecuația lui H sub forma $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} - 1 = 0$. Rezultă $a^2 = 5$, $b^2 = 2$ și deci $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{2}$. Vîrfurile lui H sînt $A'(-\sqrt{5}, 0)$, $A(\sqrt{5}, 0)$. Relația $c^2 = a^2 + b^2$ dă $c^2 = 7$ și deci focarele sînt $F'(-\sqrt{7}, 0)$, $F(\sqrt{7}, 0)$.

Reuniunea asimptotelor lui H are ecuația $2x^2 - 5y^2 = 0$. Explicit cele două asimptote au respectiv ecuațiile $y = \sqrt{\frac{2}{5}}\,x$, $y = -\sqrt{\frac{2}{5}}\,x$.

2) Ramura din semiplanul $x \geqslant \sqrt{5}$ are ecuațiile parametrice $x = \sqrt{5}\,\mathrm{ch}\,t$, $y = \sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,t$, $t \in \mathbf{R}$.

3) Ecuația carteziană a tangentei se obține prin dedublare: $2\sqrt{10}x - 5\sqrt{2}y - 10 = 0$. Rezultă ecuația normalei: $y - \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}(x - \sqrt{10})$.

4. Să se scrie ecuația unei hiperbole raportate la axele sale de simetrie știind că hiperbola conține punctele $M\left(5, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ și $N\left(4, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$

R. $a^2 = 10$, $b^2 = 3$.

5. Dacă se consideră hiperbola $H\colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, avînd focarele F și F', iar M este un punct arbitrar de pe hiperbolă, să se verifice relația

$$OM^2 - MF \cdot MF' = a^2 - b^2.$$

6. Să se calculeze aria triunghiului format de asimptotele hiperbolei $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - 1 = 0$ și dreapta $9x + 2y - 24 = 0$.

7. Să se scrie tangentele la hiperbola $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ în punctele de pe hiperbolă avînd abscisa egală cu 3.

Indicație. Cele două puncte de pe hiperbolă sînt $(3, -\sqrt{2})$, $(3, \sqrt{2})$ și ecuațiile tangentelor se scriu prin dedublare.

8. Pe axa Ox a reperului cartezian xOy se iau punctele M și N astfel încît produsul absciselor lor să fie constanta a^2. Prin M și N se duc două drepte MP și NP, avînd coeficienții unghiulari egali respectiv cu $\frac{b}{a}$ și $-\frac{b}{a}$, $a, b \in (0, +\infty)$.

Să se afle locul geometric al punctului P.

Soluție. Fie $M(\alpha, 0)$, $N(\beta, 0)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha\beta = a^2$ (1). Rezultă

$$MP\colon y = \frac{b}{a}(x - \alpha) \ (2); \quad NP\colon y = -\frac{b}{a}(x - \beta) \ (3).$$

Pentru a scrie ecuația carteziană a locului geometric descris de punctul P, vom elimina parametrii α și β, între relațiile (1), (2), (3).

Ecuațiile (2) și (3) se mai pot scrie astfel $y - \frac{b}{a}x = -\frac{b}{a}\alpha$, $y + \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\beta$.

Înmulțind aceste două ecuații membru cu membru și ținînd cont de relația (1), obținem ecuația unei hiperbole

$$H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 4 = 0.$$

9. Se consideră dreptele d_m: $(m^2 + 1)x + 2my + 1 - m^2 = 0$, $m \in \mathbf{R}$.

1) Există trei drepte distincte d_{m_1}, d_{m_2}, d_{m_3} care trec printr-un punct dat al planului?

2) Cîte drepte d_m trec printr-un punct dat al planului?

Soluție. 1) Fie

$$\begin{cases} (m_1^2 + 1)x + 2m_1y + 1 - m_1^2 = 0, \\ (m_2^2 + 1)x + 2m_2y + 1 - m_2^2 = 0, \\ (m_3^2 + 1)x + 2m_3y + 1 - m_3^2 = 0 \end{cases}$$

sistemul format cu ecuațiile celor trei drepte distincte d_{m_1}, d_{m_2}, d_{m_3}.

Deoarece

$$\begin{vmatrix} m_1^2 + 1 & 2m_1 & 1 - m_1^2 \\ m_2^2 + 1 & 2m_2 & 1 - m_2^2 \\ m_3^2 + 1 & 2m_3 & 1 - m_3^2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} m_1^2 & m_1 & 1 \\ m_2^2 & m_2 & 1 \\ m_3^2 & m_3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(m_1 - m_2)(m_1 - m_3)(m_2 - m_3) \neq 0$$

(determinant Vandermonde), nu există trei drepte distincte concurente.

2) Se observă că $d_m : m^2(x - 1) + 2my + x + 1 = 0$. Fie $x = 1$; atunci ecuația în m este de gradul unu, $my + 1 = 0$. De aceea prin fiecare punct de coordonate $(1, y)$, $y \neq 0$ trece o singură dreaptă d_m, iar prin punctul de coordonate $(1, 0)$ nu trece nici o dreaptă d_m.

Fie $x \neq 1$. Ecuația de gradul doi în m are soluții reale numai dacă $x^2 - y^2 - 1 \leqslant 0$. Dar ecuația $x^2 - y^2 - 1 = 0$ reprezintă o hiperbolă H. Astfel prin fiecare punct al lui H diferit de punctul de coordonate $(1, 0)$ trece o singură dreaptă d_m, prin fiecare punct al regiunii $\text{ext}(H) - \{(1, y),\ y \neq 0\}$ trec două drepte distincte, iar prin fiecare punct al regiunii $\text{int}(H)$ nu trece nici o dreaptă.

Evident a doua întrebare o conține pe prima.

Comentariu (fig. III.20). 1) Dreptele d_m, $m = \pm 1$, sînt asimptotele hiperbolei H.

2) Fie $M_0(x_0, y_0) \in H$, adică $x_0^2 - y_0^2 - 1 = 0$ și $xx_0 - yy_0 - 1 = 0$ ecuația tangentei la H în punctul M_0. Deoarece $x_0^2 - y_0^2 - 1 = 0$ dacă și numai dacă $\frac{x_0}{m^2 + 1} = \frac{-y_0}{2m} = \frac{-1}{1 - m^2}$, $\forall m \neq \pm 1$ rezultă că toate dreptele d_m, $m \neq \pm 1$ sînt tangente la H.

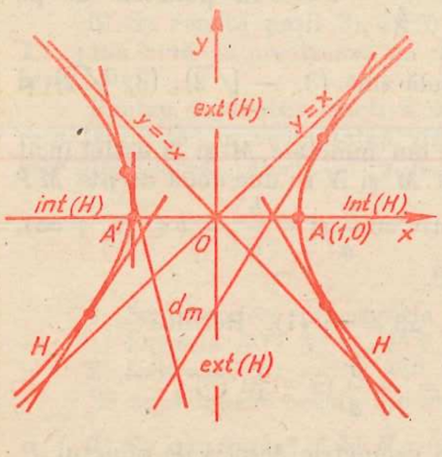

Fig. III.20

§ 4. Parabola

Fie h o dreaptă din plan și F un punct care nu aparține lui h.

Definiție. Mulțimea P a punctelor M cu proprietatea

$$d(M; h) = MF$$

se numește parabolă.

Punctul F se numește *focarul parabolei*, dreapta h se numește *directoarea parabolei*, iar segmentul $[M_0F]$ se numește *raza focală* a punctului M_0. Parabola nu este vidă: fie $B \in h$, un punct fixat, fie k perpendiculara în B pe h și l mediatoarea segmentului $[BF]$; notînd $\{M\} = k \cap l$ rezultă $M \in P$.

Fie A proiecția lui F pe h. Dreapta AF este *axă de simetrie* pentru parabola P. Numărul $p = AF > 0$ se numește *parametrul parabolei*. Notînd cu O mijlocul segmentului $[AF]$ și alegînd reperul cartezian xOy ca în figura III.21 avem

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right),\quad h : x = -\frac{p}{2},\quad A\left(-\frac{p}{2}, 0\right).$$

Teoremă. *Punctul $M(x, y)$ aparține parabolei P dacă și numai dacă*

$$y^2 = 2px.$$

Demonstrație. $M \in P \Leftrightarrow d(M; h) = MF \Leftrightarrow d^2(M; h) = MF^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 = 2px.$

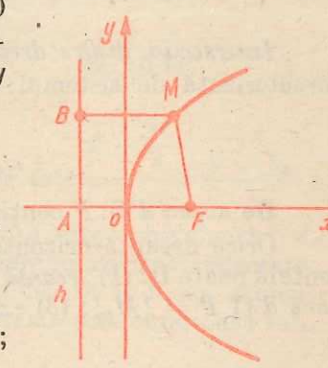

Fig. III.21

Deci $P = \{M(x, y) | (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ y^2 = 2px\}$ sau P: $y^2 = 2px$. Ecuația $y^2 = 2px$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, se numește *ecuația carteziană implicită a parabolei*. Aceasta este echivalentă cu *ecuațiile parametrice*

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p}, \\ y = t,\ t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Axa Ox taie parabola în punctul $O(0, 0)$ numit *vîrful parabolei*. De aceea Ox se numește *axă transversă*. Axa Oy este *netransversă*.

Fie parabola P de ecuație

$$y^2 = 2px,\quad x \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2px} \\ \text{sau} \\ y = -\sqrt{2px} \end{cases},\quad x \geqslant 0.$$

Ecuația $y = \sqrt{2px}$ reprezintă porțiunea din parabolă cuprinsă în primul cadran, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, iar ecuația $y = -\sqrt{2px}$ reprezintă porțiunea din parabolă cuprinsă în cadranul patru, $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$. Acestea se numesc *ecuații carteziene explicite*.

Dacă notăm cu P_1 și P_2 graficele funcțiilor derivabile

$$x \to \sqrt{2px},\ x \to -\sqrt{2px}$$

definite respectiv pe $(0, \infty)$, atunci se observă că

$$P = P_1 \cup \{(0,\ 0)\} \cup P_2$$

și deci parabola are alura din figura III.21.

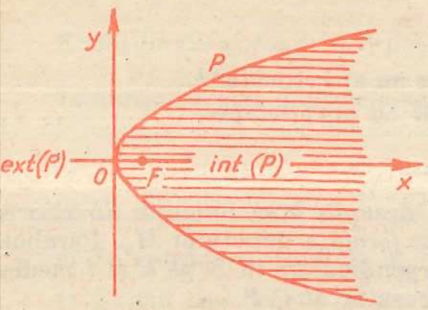

Fig. III.22

Parabola P împarte planul în două submulţimi disjuncte (fig. III.22): interiorul lui P notat $\mathrm{int}(P)$ şi exteriorul lui P notat $\mathrm{ext}(P)$. Acestea pot fi caracterizate cu ajutorul funcţiei $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = y^2 - 2px$. Anume $\mathrm{int}(P) = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}$, $P = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$, $\mathrm{ext}(P) = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}$, $\mathrm{int}(P) \cap \mathrm{ext}(P) = \emptyset$, $\mathrm{int}(P) \cup P \cup \mathrm{ext}(P) = \mathfrak{P}$.

Mulţimile $\mathrm{int}(P)$ şi $\mathrm{int}(P) \cup P$ sînt convexe şi conţin focarul F. Directoarea parabolei este conţinută în $\mathrm{ext}(P)$.

Intersecţia dintre dreapta d: $ax + by + c = 0$ *şi parabola* P: $y^2 = 2px$ este caracterizată de sistemul:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ y^2 = 2px, \ (x, y) \in \mathbf{R}^2. \end{cases}$$

De aceea $d \cap P$ conţine cel mult două puncte (fig. III.23).

Orice dreaptă orizontală este *secantă* parabolei. O dreaptă care nu este orizontală poate fi: (1) *secantă* parabolei dacă $d \cap \mathfrak{P} = \{M_1, M_2\}$; (2) *tangentă* parabolei dacă $d \cap P = \{M_0\}$; (3) *exterioară* parabolei dacă $d \cap P = \emptyset$.

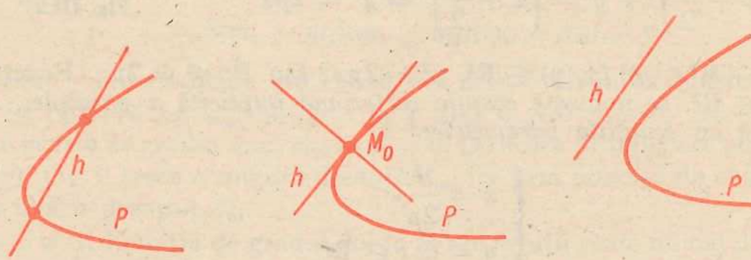

Fig. III.23

Fie parabola $P : y^2 = 2px$ şi $M_0(x_0, y_0) \in P$. *Tangenta la parabola* P *în punctul* M_0 are ecuaţia

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

(*dedublata ecuaţiei parabolei în punctul* $M_0(x_0, y_0)$). Dreapta care trece prin M_0 şi este perpendiculară pe tangentă se numeşte *normala parabolei* în punctul M_0 (fig. III.23).

Teoremă. *Tangenta şi normala la parabolă în punctul* M_0 *sînt bisectoarele unghiurilor determinate de suportul razei focale a lui* M_0 *şi de paralela prin* M_0 *la axa parabolei.*

Demonstraţie. Fie parabola P: $y^2 = 2px$, cu directoarea h: $x = -\frac{p}{2}$ şi focarul $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Fie $M_0(x_0, y_0) \in P$, adică $y_0^2 = 2px_0$ şi $B\left(-\frac{p}{2}, y_0\right)$ proiecţia lui M_0 pe h. Mai întîi observăm că proprietatea enunţată este echivalentă cu oricare dintre proprietăţile (fig. III.24):

1) Tangenta la P în M_0 este mediatoarea segmentului $[BF]$.

2) Simetricul focarului în raport cu tangenta în M_0 aparţine directoarei.

3) Proiecţia ortogonală a focarului pe tangenta în M_0 aparţine tangentei în vîrf.

Astfel este suficient să arătăm că tangenta în M_0, de ecuaţie $yy_0 = p(x + x_0)$ trece prin mijlocul lui $[BF]$ şi este perpendiculară pe dreapta BF. Dar aceste fapte devin evidente din moment ce mijlocul lui $[BF]$ are coordonatele $\left(0, \frac{y_0}{2}\right)$, ecuaţia tangentei se retranscrie $\frac{x + x_0}{y_0} = \frac{y}{p}$, iar ecuaţia dreptei BF este $\frac{x - \frac{p}{2}}{p} = \frac{y - y_0}{-y_0}$.

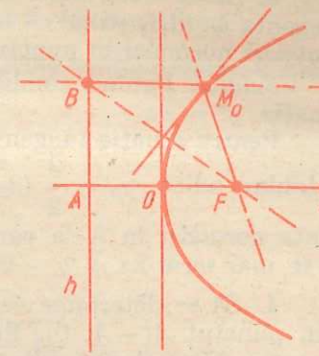

Fig. III.24

Din punctul de vedere al opticii, teorema precedentă este echivalentă cu faptul că razele de lumină paralele cu axa unei oglinzi parabolice sînt reflectate în focar sau invers, cu faptul că dacă o sursă de lumină se aşează în focar, atunci razele reflectate sînt paralele cu axa oglinzii. De aceea teorema este cunoscută sub numele de *proprietatea optică a parabolei*.

Construcţia parabolei prin puncte (fig. III.25). Presupunem că se dau focarul F şi directoarea h.

1) Se localizează focarul F şi directoarea h.

2) Se desenează dreptele 1, 2, 3,... paralele cu directoarea.

3) Se ia în compas distanţa de la directoarea h la dreapta 1. Cu vîrful compasului în focar, se trasează două arce de cerc care intersectează dreapta 1. Astfel se obţin două puncte ale parabolei.

4) Se repetă pasul 3) pentru dreptele 2, 3...

5) După determinarea unui număr suficient de puncte, se desenează parabola ţinîndu-se seamă că vîrful O este la jumătatea distanţei dintre h şi F, iar tangenta în fiecare punct M de pe parabolă este bisectoarea unghiului $\widehat{FMB}$.

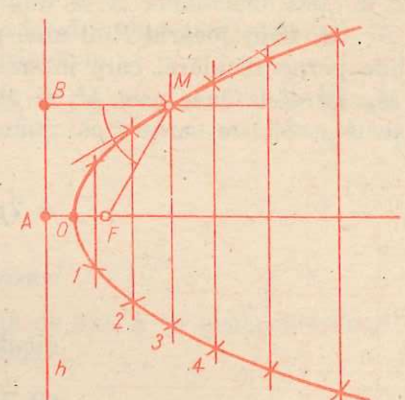

Fig. III.25

PROBLEME

1. Se consideră parabolele fixate respectiv prin:

1) vîrful $O(0, 0)$ şi focarul $F(2, 0)$;

2) focarul $F(1, 1)$ şi directoarea $x = 2$;

3) vîrful $A(2, 0)$ şi directoarea $2x - y = 0$.

Să se deseneze aceste parabole şi să se găsească ecuaţiile lor.

2. Se dau parabolele P_1: $y^2 = 2x$, P_2: $x^2 = -5y$. Pentru fiecare să se găsească vîrful, focarul, axa şi directoarea.

3. Să se determine ecuația unei parabole raportată la axa de simetrie și tangenta în vîrf, știind că trece prin punctul $A(3, 3)$. Să se scrie apoi ecuația tangentei și normalei în punctul A.

Soluție. Punînd condiția ca punctul A să se afle pe parabolă, se găsește ecuația $y^2 = 3x$.

Pentru ecuația tangentei în A la parabolă, se folosește ecuația obținută prin dedublare adică $yy_0 = \frac{3}{2}(x + x_0)$ și se obține $3y = \frac{3}{2}(x+3)$, adică $x - 2y + 3 = 0$. Panta normalei în A la parabolă este $m = -2$; găsim $y - 3 = -2(x-3)$ ceea ce se mai scrie $2x + y - 9 = 0$.

4. Să se determine ecuațiile tangentelor la parabola $P : y^2 = 2x$ care trec prin punctul $A(-1, 0)$. Prin ce punct trec normalele corespunzătoare? Să se găsească aria patrulaterului determinat de aceste tangente și normale.

5. Să se determine un punct M situat pe parabola $y^2 = 64x$, cît mai aproape posibil de dreapta $4x + 3y + 37 = 0$ și să se calculeze distanța de la punctul M la această dreaptă.

Soluție. Dacă se notează $M(a, b)$, din condiția ca să fie situat pe parabolă, rezultă $b^2 = 64a$. Calculăm distanța de la punctul M la dreapta dată. Se găsește $d = \frac{|4a + 3b + 37|}{5}$ și cum $a = \frac{b^2}{64}$, distanța devine $d(b) = \frac{|b^2 + 48b + 592|}{80} = \frac{1}{80}(b^2 + 48b + 592)$. Se observă că $d(b)$ admite un minim pentru $b = -24$. De aceea $M(9, -24)$, iar $d = \frac{1}{5}$.

6. Prin focarul F al unei parabole $P : y^2 = 2px$ se duc două drepte variabile perpendiculare, care intersectează directoarea parabolei în punctele M_1 și M_2. Paralele duse prin M_1 și M_2 la axa parabolei taie curba P în punctele N_1 și N_2. Să se arate că punctele N_1, N_2 și F sînt coliniare.

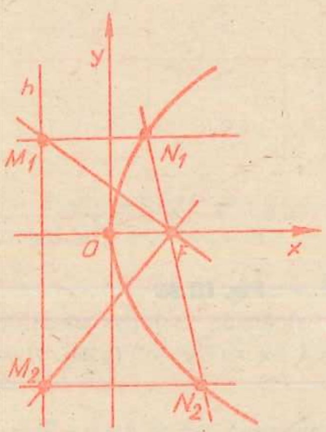

Fig. III.26

Soluție (fig. III.26). Focarul parabolei $P : y^2 = 2px$ este punctul $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, iar directoarei h îi corespunde ecuația $x = -\frac{p}{2}$. Fie dreptele perpendiculare $d : y = m\left(x - \frac{p}{2}\right)$, $d' : y = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{p}{2}\right)$, cu $m \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$$\{M_1\} = d \cap h \Rightarrow \begin{cases} y = m\left(x - \frac{p}{2}\right) \\ x = -\frac{p}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_1\left(-\frac{p}{2}, -pm\right).$$

$$\{M_2\} = d' \cap h \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{p}{2}\right) \\ x = -\frac{p}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{p}{2}, \frac{p}{m}\right).$$

Paralelele duse prin M_1 și M_2 la axa parabolei au respectiv ecuațiile $y = -pm$ și $y = \frac{p}{m}$. Coordonatele punctelor N_1 și N_2 sînt soluțiile următoarelor sisteme de ecuații

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = -pm \end{cases} \text{ și } \begin{cases} y^2 = 2px \\ y = \frac{p}{m}. \end{cases}$$

Rezolvînd aceste sisteme, obținem

$$N_1\left(\frac{pm^2}{2}, -mp\right), \quad N_2\left(\frac{p}{2m^2}, \frac{p}{m}\right).$$

Coordonatele punctelor N_1, N_2 și F verifică condiția de coliniaritate a trei puncte adică

$$\begin{vmatrix} \frac{pm^2}{2} & -mp & 1 \\ \frac{p}{2m^2} & \frac{p}{m} & 1 \\ \frac{p}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{p^2}{2} \begin{vmatrix} m^2 & -m & 1 \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{p^2}{2} \cdot 0 = 0.$$

7. Pe o parabolă se consideră un punct variabil M și simetricul său, M', față de axa de simetrie. Să se găsească locul geometric al intersecției tangentei în M la parabolă cu paralela dusă prin M' la axa de simetrie.

8. Să se arate că orice parabolă cu axa paralelă cu Oy are o ecuație de forma $y = ax^2 + bx + c$. Să se găsească vîrful, focarul și directoarea pentru o asemenea parabolă.

§ 5. Conice

Curbele de intersecție dintre un con de rotație de axă k și generatoarea g cu un plan $\mathfrak{P}$ sînt de următoarele tipuri (fig. III.27):

1) cerc sau punct, dacă $\mathfrak{P} \perp h$;

2) elipsă sau punct, dacă $(\widehat{\mathfrak{P}, h}) > (\widehat{g, h})$;

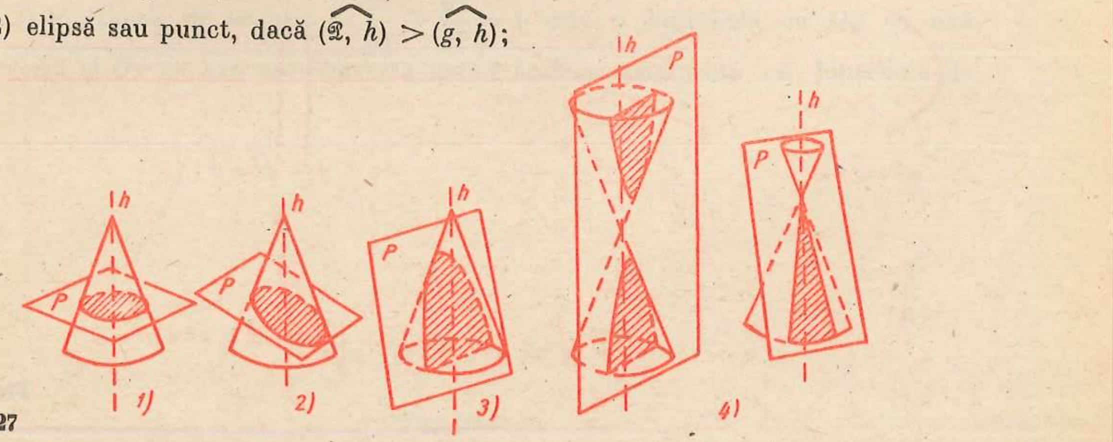

Fig. III.27

3) parabolă sau pereche de drepte confundate, dacă $(\widehat{\mathfrak{D}, h}) = (\widehat{g, h})$;

4) hiperbolă sau pereche de drepte, dacă $0^\circ \leqslant (\widehat{\mathfrak{D}, h}) < (\widehat{g, h})$.

Toate aceste curbe poartă numele de *conice* și sînt caracterizate prin ecuații de gradul doi în x și y, unde $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. De aceea apare natural să se pună problema generală a cercetării mulțimilor de puncte, din plan, ale căror coordonate constituie soluțiile unei ecuații de gradul doi în $\mathbf{R}^2$.

Fie funcția polinomială

$$g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00}.$$
$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0.$$

Definiție. Mulțimea

$$\Gamma = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ g(x, y) = 0\}$$

se numește curbă algebrică de ordinul al doilea sau conică. Pe scurt se notează $\Gamma : g(x, y) = 0$.

Teoremă. *Mulțimea Γ este congruentă cu una dintre mulțimile din figura III.28.*

Demonstrație. Subliniem că enunțul teoremei este echivalent cu fiecare dintre afirmațiile următoare:

1) Γ este fie un cerc (fig. III.28.1), o elipsă (fig. III.28.2), o hiperbolă (fig. III.28.3), o parabolă (fig. III.28.4), o reuniune de drepte (fig. III.28.5, 6, 7), o mulțime care conține un singur punct (fig. III.28.8), fie mulțimea vidă (fig. III.28.9).

2) orice ecuație de tipul $g(x, y) = 0$ poate fi redusă la una dintre *ecuațiile canonice* scrise în figura III.28.

Cazul cînd Γ reprezintă un cerc ($a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22} \neq 0$) este cunoscut din §1. De altfel cercul poate fi privit ca o elipsă particulară. De aceea acest caz este lăsat deoparte.

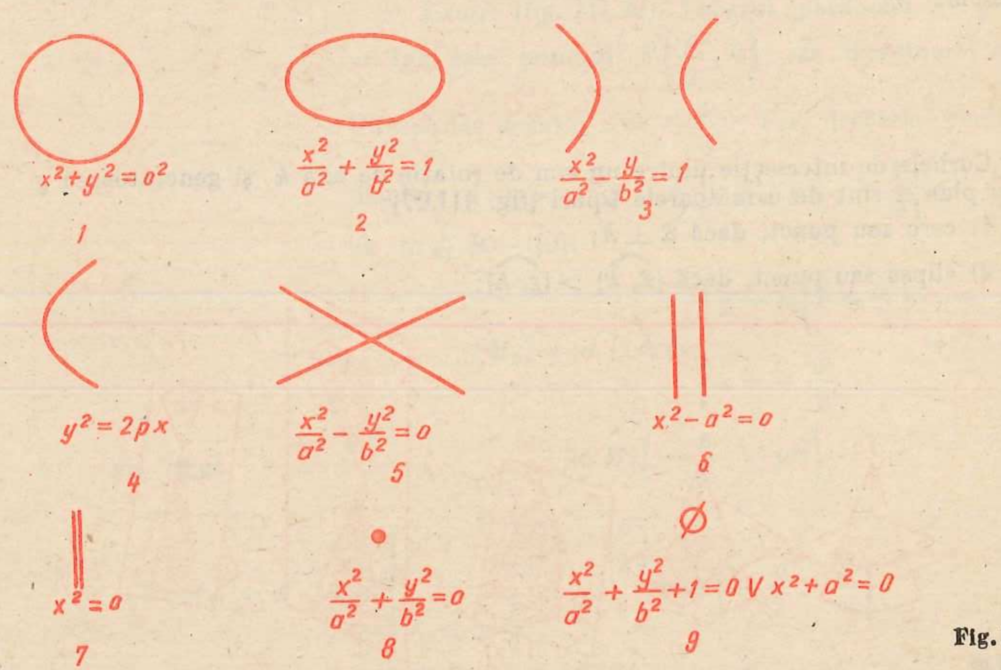

Fig. III.28

Notăm

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}$$

a) Presupunem $a_{12} = 0$. Dacă $\delta \neq 0$, atunci ecuația $g(x, y) = 0$ este echivalentă cu

$$a_{11}\left(x + \frac{a_{10}}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}\left(y + \frac{a_{20}}{a_{22}}\right)^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

și translația

$$\mathcal{T} : x' = x + \frac{a_{10}}{a_{11}},\ y' = y + \frac{a_{20}}{a_{22}}$$

justifică teorema. Dacă $\delta = 0$, de exemplu $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$, atunci ecuația $g(x, y) = 0$ este echivalentă cu

$$a_{22}\left(y + \frac{2a_{20}}{a_{22}}\right)^2 + 2a_{10}x + a_{00} - \frac{4a_{20}^2}{a_{22}} = 0$$

și teorema devine evidentă.

b) Dacă $a_{12} \neq 0$, atunci unghiul θ determinat de ecuația $(a_{11} - a_{22}) \sin 2\theta = 2a_{12} \cos 2\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$, determină o rotație în plan

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta, \\ y = y' \sin\theta + y' \cos\theta \end{cases}$$

astfel încît în ecuația $g'(x', y') = (g \circ \mathcal{R})(x', y') = 0$ coeficientul produsului $x'y'$ se anulează. Într-adevăr, coeficientul respectiv este $2a_{12} = (a_{22} - a_{11}) \sin 2\theta + 2a_{12} \cos 2\theta$. Astfel cazul $a_{12} \neq 0$ se reduce la cazul $a_{12} = 0$.

Cazuri particulare

1) Fie trinomul de gradul al doilea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Graficul $G(f)$ are ecuația carteziană explicită $y = ax^2 + bx + c$. Acest grafic este o parabolă (fig. III.29, $a > 0$) cu axa transversă paralelă cu Oy și cu vîrful

$$\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

2) Mulțimea de ecuație $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ este o hiperbolă cu Oy ca axă transversă și Ox ca axă netransversă avînd aceleași asimptote cu hiperbola de

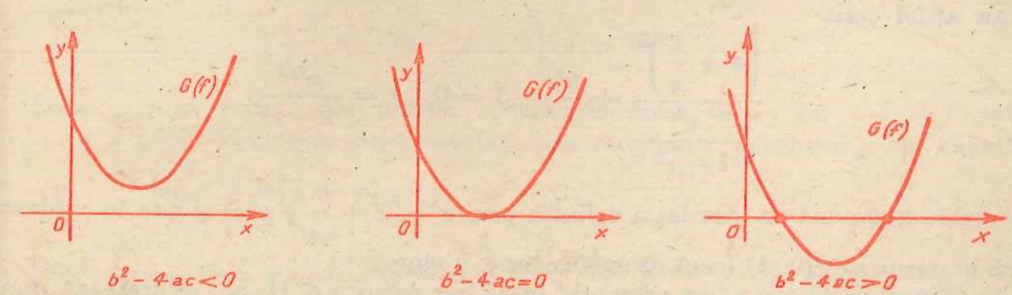

Fig. III.29

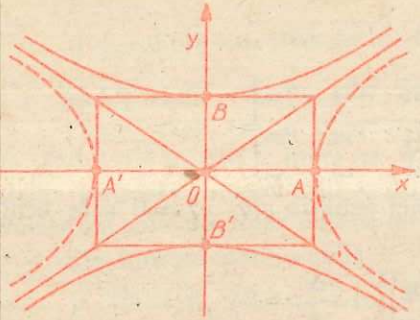

Fig. III.30

ecuație $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Aceste două hiperbole se numesc *conjugate* una alteia (fig. III.30).

3) Hiperbola de ecuație $x^2 - y^2 = a^2$ se numește *hiperbolă echilateră*. Asimptotele acestei hiperbole sînt bisectoarele unghiurilor axelor de coordonate,

$$y = -x \text{ și } y = x.$$

Fie conica $\Gamma : xy = m^2$. Rotația $\mathcal{R} : x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$ pune în evidență că Γ este o hiperbolă echilateră de ecuație canonică $x'^2 - y'^2 = 2m^2$. Asimptotele lui Γ sînt axele de coordonate Ox și Oy, iar axele de simetrie sînt bisectoarele unghiurilor axelor de coordonate (fig. III.31).

Definiția comună a elipsei, hiperbolei și parabolei. Fie F un punct fix numit *focar*, h o dreaptă fixă care nu trece prin F, numită *directoare*, și $e \in (0, \infty)$ un număr numit *excentricitate*. Locul geometric al punctelor M cu proprietatea

$$\frac{d(M, F)}{d(M, h)} = e$$

este o elipsă în cazul $e \in (0, 1)$, o parabolă pentru $e = 1$ sau o hiperbolă în cazul $e \in (1, \infty)$.

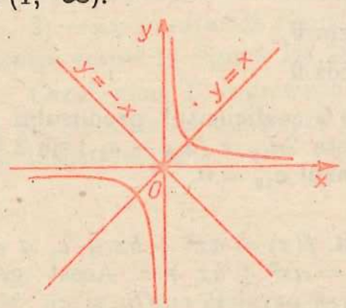

Fig. III.31

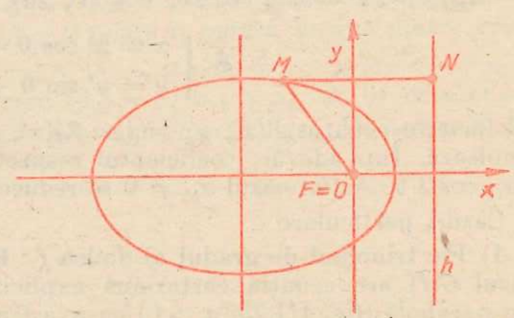

Fig. III.32

Să explicităm cazul $e \in (0, 1)$. Pentru simplificarea calculelor fixăm reperul cartezian, astfel încît Ox să fie perpendiculară pe h și $F = O$ (fig. III.32). Deci $F(0, 0)$, $h : x = \alpha > 0$. Dacă M are coordonatele (x, y), atunci relația precedentă este echivalentă cu ecuația

$$x^2 + y^2 = e^2(x - \alpha)^2,$$

sau altfel scris

$$\frac{\left(x + \frac{r}{\alpha}\right)^2}{\frac{r}{1 - e^2}} + \frac{y^2}{r} - 1 = 0, \quad r = \frac{\alpha^2 e^2}{1 - e^2}.$$

Aceasta împreună cu translația definită prin $x' = x + \frac{r}{\alpha}$, $y' = y$ pun în evidență că în cazul $e \in (0, 1)$ locul geometric este o elipsă.

Cazul parabolei a fost prezentat în §4, iar cazul $e \in (1, \infty)$ se tratează după modelul precedent.

Intersecția a două conice. Fie conicele $\Gamma_1 : g(x, y) = 0$ și $\Gamma_2 : h(x, y) = 0$. Intersecția $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ este caracterizată prin sistemul

$$\begin{cases} g(x, y) = 0, \\ h(x, y) = 0, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Deoarece fiecare dintre ecuațiile acestui sistem are gradul doi, intersecția $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ conține cel mult patru puncte.

Presupunem că Γ_1 este cercul de ecuație (1) $x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$, iar Γ_2 este cercul de ecuație (2) $x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0$. Coordonatele punctelor comune trebuie să verifice ambele ecuații, deci și ecuația obținută prin scăderea lor,

(3) $$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0.$$

Această ecuație reprezintă o dreaptă perpendiculară pe dreapta care unește centrele celor două cercuri și se numește *axa radicală* a celor două cercuri. Sistemul format din ecuațiile (1) și (2) este echivalent cu sistemul format de ecuațiile (1) și (3) sau cu cel format de ecuațiile (2) și (3).

PROBLEME

1. Să se determine locul geometric al punctelor de intersecție a parabolelor de ecuații:

$$y = x^2 - \frac{3}{2}mx + m^2 + m, \quad y = x^2 - \frac{3}{2}px + p^2 + p,$$

dacă $\frac{1}{m} + \frac{1}{p} + \frac{1}{mp} = 1$.

Soluție. Pentru găsirea ecuației carteziene a locului geometric trebuie să eliminăm parametrii m și p între următoarele ecuații

$$\begin{cases} y = x^2 - \frac{3}{2}mx + m^2 + m, \\ y = x^2 - \frac{3}{2}px + p^2 + p, \\ \frac{1}{m} + \frac{1}{p} + \frac{1}{mp} = 1. \end{cases}$$

Scăzînd primele două egalități, obținem

$$\left(\frac{3}{2}x - m - p - 1\right)(p - m) = 0.$$

Dacă $p = m$, atunci din ultima ecuație deducem $m^2 - 2m - 1 = 0$ sau $m_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$; locul geometric căutat este reuniunea parabolelor de ecuații $y = x^2 - \frac{3}{2}m_{1,2}x + m_{1,2}^2 + m_{1,2}$.

Dacă $\frac{3}{2}x = m + p + 1$, atunci $y = x^2 - mp$. Transcriind ultima ecuație în forma $m + p + 1 = mp$ și eliminînd pe $m + p + 1$ și mp, găsim ecuația

$\frac{3}{2}x = x^2 - y$, care reprezintă o parabolă cu axa $x = \frac{3}{4}$, și tangenta în vîrf $y = -\frac{9}{16}$.

2. Să se traseze graficele următoarelor funcții:

1) $f_1 : D_1 \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = \sqrt{x+1}$,

2) $f_2 : D_2 \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)(5-x)}$,

3) $f_3 : D_3 \to \mathbf{R}$, $f_3(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x^2-2x-3}$.

Indicație. 1) $D_1 = [-1, +\infty)$, $y = f_1(x)$ este ecuația graficului. Echivalența

$$y = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow y^2 = x+1,\ x \in [-1, +\infty),\ y \in [0, +\infty),$$

arată că graficul lui f_1 este un arc de parabolă.

2) $D_2 = [-1, 5]$, $y = f_2(x)$ ecuația graficului. Echivalenta

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)(5-x)} \Leftrightarrow y^2 = \frac{4}{9}[9-(x-2)^2],\ x \in [-1, 5],$$

$$y \in [0, 2] \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

$x \in [-1, 5]$, $y \in [0, 2]$ arată că graficul lui f_2 este un arc de elipsă.

3) $D_3 = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$, $y = f_3(x)$ ecuația graficului. Echivalența

$$y = \frac{3}{4}\sqrt{x^2-2x-3} \Leftrightarrow y^2 = \frac{9}{16}[(x-1)^2-4],\ x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty),$$

$$y \in [0, +\infty) \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1,\ x \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty),$$

$y \in [0, \infty)$ pune în evidență că graficul lui f_3 este o parte dintr-o hiperbolă.

3. Se dau hiperbolele $\Gamma_1 : x^2 + 2xy - y^2 = 1$, $\Gamma_2 : -x^2 + 2xy + y^2 = 1$. Să se determine $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

Soluție. Problema se reduce la rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - y^2 = 1, \\ -x^2 + 2xy + y^2 = 1, \end{cases}$$

în $\mathbf{R}^2$. Scăzînd cele două ecuații rezultă $x^2 - y^2 = 0$. Astfel sistemul inițial este echivalent cu

$$\begin{cases} (x-y)(x+y) = 0, \\ x^2 + 2xy - y^2 = 1. \end{cases}$$

Din $x = y$ și $x^2 + 2xy - y^2 = 1$ deducem soluțiile $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, iar $x + y = 0$ și $x^2 + 2xy - y^2 = 1$ nu au soluții comune. În concluzie, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ conține punctele de coordonate $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ și $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4. Se cer punctele comune ale cercurilor $C_1 : x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0$ și $C_2 : x^2 + y^2 + y - 2 = 0$.

Soluție. Sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0, \\ x^2 + y^2 + y - 2 = 0 \end{cases}$$

este echivalent cu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0, \\ 3x + y + 2 = 0. \end{cases}$$

Rezultă $A(0, -2)$, $B\left(-\frac{9}{10}, -\frac{7}{10}\right)$.

§ 6. Inegalități pătratice

Fie $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ un polinom de gradul doi. O inegalitate de forma $g(x, y) \geqslant 0$ se numește *inegalitate pătratică*. Pentru a rezolva o asemenea inegalitate este suficient să trasăm conica de ecuație $g(x, y) = 0$ și apoi să stabilim submulțimea din plan pe care g are semnul plus sau submulțimea pe care are semnul minus. Deoarece g păstrează semn constant pe o asemenea submulțime, pentru stabilirea acestui semn este suficient să alegem un punct particular (x_0, y_0) și să vedem ce semn are numărul $g(x_0, y_0)$.

A determina minimul (sau maximul) unei funcții $f(x, y) = ax + by + c$ cu restricția $g(x, y) \geqslant 0$ revine la a determina valoarea minimă (resp. maximă) a lui λ astfel încît familia de drepte paralele $ax + by + c = \lambda$ să intersecteze mulțimea $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid g(x, y) \geqslant 0\}$.

PROBLEME

1. Se dă dreapta $d : x - y - 3 = 0$ și mulțimea $M : y \geqslant x^2 - x$, $x \geqslant y^2 - y$. Să se determine punctul din mulțimea M care este cel mai apropiat de dreapta d.

Soluție. Fie parabolele $P_1 : y = x^2 - x$, $P_2 : x = y^2 - y$ cu punctele comune $O(0, 0)$, $A(2, 2)$. Mulțimea $M = (\mathrm{int} P_1 \cup P_1) \cap (\mathrm{int} P_2 \cup P_2)$ este reprezentată în figura III.33.

Punctul din M situat cel mai aproape de d este punctul din P_1 prin care trece tangenta la P_1 paralelă cu d. Sistemul $y = x + \lambda$, $y = x^2 - x$ conduce la ecuația $x^2 - 2x - \lambda = 0$, iar aceasta are soluție dublă numai dacă $\lambda = -1$. Rezultă $x = 1$, $y = 0$.

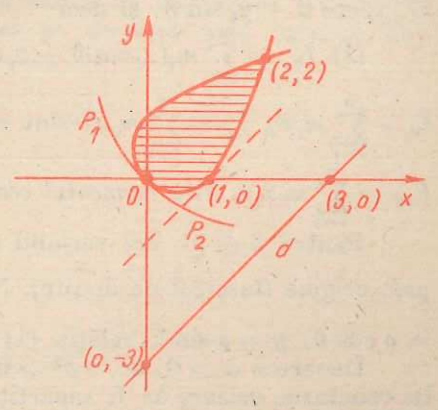

Fig. III.33

2. Să se rezolve în $\mathbf{R}^2$ sistemul

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - y^2 \geqslant 1, \\ -x^2 + 2xy + y^2 = 1. \end{cases}$$

Indicație. Soluțiile în $\mathbf{R}^2$ ale sistemului $x^2 + 2xy - y^2 = 1$, $-x^2 + 2xy + y^2 = 1$ sînt $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.