XI. STUDIUL CUADRICELOR PE ECUAȚIILE LOR CANONICE

§ 1. Elipsoidul

Definiția 1.1. Elipsoidul. Se numește *elipsoid* suprafața a căre ecuație este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Teorema 1.1. *Elipsoidul are trei plane de simetrie: xOy, yOz, zOx, trei axe de simetrie: Ox, Oy, Oz, și un centru de simetrie: O (0, 0, 0).*

Demonstrație: Ecuația canonică a elipsoidului fiind

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0;\ a>b>c, \tag{1}$$

planele de coordonate sînt plane de simetrie. Pentru a demonstra că planul xOy este plan de simetrie, luăm un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ situat pe elipsoid, deci coordonatele punctului verifică ecuația elipsoidului. Avem condiția

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1=0. \tag{2}$$

Fie $M_0'(x_0, y_0, -z_0)$ simetricul punctului M_0 față de planul xOy. Înlocuind coordonatele punctului M_0' în ecuația elipsoidului, avem

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{(-z_0)^2}{c^2}-1=0. \tag{3}$$

Observăm că condiția (3) este identică cu condiția (2), căci z în ecuația elipsoidului figurează la puterea a doua, ceea ce înseamnă că dacă punctul M_0 se găsește pe elipsoid, atunci și simetricul lui, M_0', în raport cu planul xOy se găsește tot pe elipsoid. Cum punctul M_0 nu îndeplinea altă condiție decît că era situat pe elipsoid, rezultă că toate punctele elipsoidului sînt simetrice față de planul xOy; deci planul xOy este un plan de simetrie al elipsoidului.

În ecuația elipsoidului, x figurînd de asemenea numai la puterea a doua, rezultă că planul yOz este un plan de simetrie al elipsoidului. La fel și planul xOz este un plan de simetrie, deoarece y figurează în ecuația elipsoidului numai la puterea a doua.

În concluzie, elipsoidul (1) are trei plane de simetrie, planele de coordonate. Ele se numesc și *plane principale.*

Elipsoidul are trei axe de simetrie, deoarece planele de simetrie se intersectează două cîte două; elipsoidul, fiind simetric față de aceste plane, este simetric și față de dreptele de intersecție. Rezultă că axele de coordonate sînt axe de simetrie.

Elipsoidul are un centru de simetrie, punctul $O(0, 0, 0)$, care este punctul de intersecție a celor trei plane de simetrie.

Teorema 1.2. **(Intersecția elipsoidului cu planele de simetrie.)** *Planele de simetrie intersectează elipsoidul după elipse reale.*

Demonstrație: Intersecția elipsoidului cu planul xOy este dată de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ z = 0, \end{cases} \tag{4}$$

format din ecuația elipsoidului și ecuația planului xOy. Acest sistem este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ z = 0, \end{cases} \tag{5}$$

de unde se vede că intersecția este o elipsă reală.

Intersecția elipsoidului cu planul yOz este dată de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ x = 0, \end{cases} \tag{6}$$

echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ x = 0, \end{cases} \tag{7}$$

deci intersecția este o elipsă reală.

În mod analog, intersecția elipsoidului cu planul xOz este dată de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ y = 0, \end{cases} \tag{8}$$

echivalent cu

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ y = 0, \end{cases} \tag{9}$$

deci o elipsă reală.

Teorema 1.3. (**Secțiuni într-un elipsoid cu plane paralele cu planele de simetrie.**) *Orice secțiune făcută într-un elipsoid cu plane paralele cu planele de simetrie este o elipsă.*

Demonstrație: Fie planul de secțiune paralel cu planul xOy, ecuația acestui plan fiind $z = h_1$. Intersecția elipsoidului cu acest plan este dată de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ z = h_1 \end{cases} \tag{10}$$

sau de sistemul echivalent

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1 - \dfrac{h_1^2}{c^2}\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{h_1^2}{c^2}\right)} - 1 = 0 \\ z = h_1, \end{cases} \tag{11}$$

de unde se vede că intersecțiile sînt elipse reale, dacă $-c < h_1 < c$. Elipsa de intersecție se reduce la un punct pentru $h_1 = \pm c$ și este imaginară, dacă $h_1 < -c$ sau $h_1 > c$.

În mod analog se arată că intersecția elipsoidului cu plane paralele cu planul yOz este formată din elipse ale căror ecuații sînt date de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{h_2^2}{a^2}\right)} + \dfrac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{h_2^2}{a^2}\right)} - 1 = 0 \\ x = h_2 \end{cases} \tag{12}$$

Elipsele de intersecție sînt reale pentru $-a < h_2 < +a$, imaginare pentru $h_2 < -a$, $h_2 > a$ și se reduc la un punct pentru $h_2 = \pm a$.

În același fel obținem intersecția elipsoidului cu plane paralele cu xOz. Ecuațiile elipsei de intersecție sînt date de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1 - \dfrac{h_3^2}{b^2}\right)} + \dfrac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{h_3^2}{b^2}\right)} - 1 = 0 \\ y = h_3. \end{cases} \tag{13}$$

Aceste elipse sînt reale dacă $-b < h_3 < b$, imaginare dacă $h_3 < -b$, $h_3 > b$ și se reduc la un punct dacă $h_3 = \pm b$.

23—2097

Definiţia 1.2. Vîrfuri. Punctele de intersecţie ale elipsoidului cu axele de simetrie se numesc *vîrfuri*.

Teorema 1.4. (Elipsoidul are şase vîrfuri reale.) *Pentru a obţine vîrfurile elipsoidului, luăm intersecţia cu axele de simetrie. Aceasta înseamnă să rezolvăm sistemul format de ecuaţia elipsoidului şi ecuaţiile axelor de simetrie.*

Vîrfurile elipsoidului de pe axa Ox sînt date de sistemul

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \tag{14}$$

sau

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-1=0 \\ y=0 \\ z=0, \end{cases} \tag{15}$$

adică $A(a, 0, 0)$ și $A'(-a, 0, 0)$.

În acelaşi fel găsim pe axa Oy vîrfurile $B(0, b, 0)$ și $B'(0, -b, 0)$, *iar pe axa Oz — vîrfurile* $C(0, 0, c)$ și $C'(0, 0, -c)$.

Observaţii. 1° Din cele expuse mai sus, elipsoidul apare ca o suprafaţă închisă, situată în interiorul unui paralelipiped dreptunghic avînd feţele paralele cu planele de coordonate care trec prin vîrfurile elipsoidului.

2° Cantităţile a, b, c se numesc semiaxe. Dacă $a = b$, elipsoidul este de rotaţie în jurul axei Oz. Dacă $a = b = c$, elipsoidul se reduce la o sferă.

3° Din proprietăţile studiate, elipsoidul poate fi generat de o elipsă care se deformează şi se deplasează paralel cu ea însăşi, sprijinindu-se pe o elipsă fixă.

Fie

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\lambda \\ z=\mu \end{cases} \tag{16}$$

ecuaţiile unei elipse variabile care în deplasarea ei trebuie să se sprijine pe elipsa fixă dată de ecuaţiile

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \\ y=0. \end{cases} \tag{17}$$

Pentru ca elipsa (16) să se sprijine pe elipsa (17), trebuie ca sistemul

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\lambda \\ z=\mu \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \\ y=0 \end{cases} \tag{18}$$

să fie compatibil. Relația de compatibilitate a sistemului (18) este

$$\lambda + \frac{\mu^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{19}$$

iar ecuația elipsoidului se obține eliminînd pe λ și μ între ecuațiile sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \lambda \\ z = \mu \\ \lambda + \dfrac{\mu^2}{c^2} - 1 = 0. \end{cases} \tag{20}$$

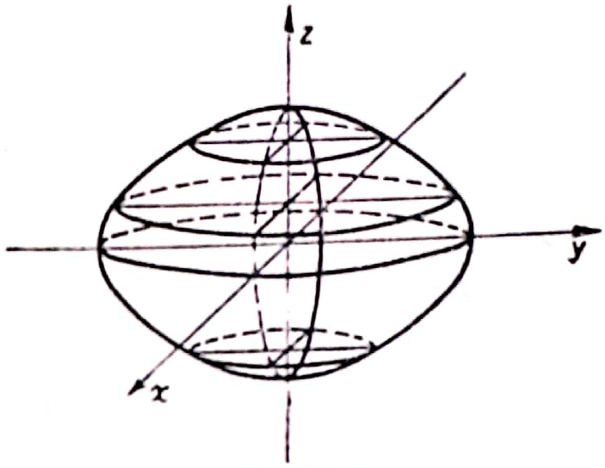

Fig. XI. 1

Făcînd eliminarea, se obține ecuația elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{21}$$

4° Forma elipsoidului este cea din figura XI.1, care rezultă din teoremele referitoare la intersecția planelor paralele cu planele de simetrie și axele de simetrie. Această metodă este generală pentru a stabili forma suprafeței cînd îi cunoaștem ecuația.

5° Ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

reprezintă un elipsoid imaginar, deoarece nici un punct cu coordonate reale nu satisface această ecuație.

§ 2. Hiperboloidul cu o pînză

Definiția 2.1. Hiperboloidul cu o pînză. Se numește *hiperboloid cu o pînză* suprafața a cărei ecuație este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Teorema 2.1. *Hiperboloidul cu o pînză* (fig. XI.2) *are trei plane de simetrie: xOy, yOz, zOx, trei axe de simetrie: Ox, Oy, Oz, și un centru de simetrie: O* (0, 0, 0).

Demonstrație: Ecuația canonică a hiperboloidului cu o pînză fiind

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0; \quad a > b, \tag{22}$$

se observă, ca și la teorema 1.1, că z figurează la puterea a doua în ecuația suprafeței, deci planul xOy este un plan de simetrie. În mod analog, cum

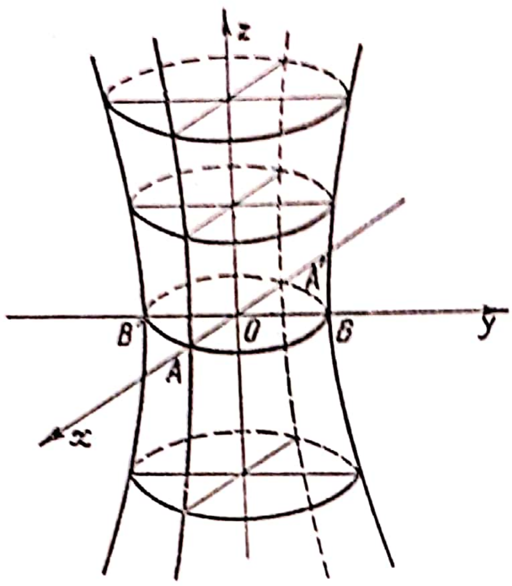

Fig. XI. 2

şi x şi y figurează numai la puterea a doua, rezultă că şi planele yOz şi zOx sînt plane de simetrie. Deci planele de coordonate sînt plane de simetrie ale hiperboloidului cu o pînză.

Hiperboloidul cu o pînză are trei axe de simetrie, deoarece planele de coordonate se intersectează două cîte două după axele de coordonate care sînt axe de simetrie; rezultă că axele de coordonate sînt axe de simetrie.

Cele trei plane de simetrie se intersectează în origine, deci originea este un centru de simetrie.

Teorema 2.2. (Intersecţia hiperboloidului cu o pînză cu planele de simetrie.) *Planele de simetrie intersectează hiperboloidul cu o pînză după o elipsă reală şi două hiperbole.*

Demonstraţie: Intersecţia hiperboloidului cu o pînză cu planul xOy este dată de sistemul

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ z = 0, \end{cases} \tag{23}$$

care este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ z = 0, \end{cases} \tag{24}$$

deci intersecţia este o elipsă reală. Această elipsă din planul de simetrie se numeşte elipsă-colier (elipsă de gît).

Ecuaţiile curbei de intersecţie a hiperboloidului cu o pînză prin planul yOz sînt date de sistemul

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ y = 0, \end{cases} \tag{25}$$

deci intersecţia este o hiperbolă.

În mod analog, ecuaţiile curbei de intersecţie a hiperboloidului cu o pînză prin planul yOz sînt date de sistemul

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ x = 0, \end{cases} \tag{26}$$

deci tot o hiperbolă.

Teorema 2.3. (Secţiuni într-un hiperboloid cu o pînză cu plane paralele cu planele de simetrie.) *Secţiunile făcute într-un hiperboloid cu o pînză cu plane paralele cu planele de simetrie sînt elipse sau hiperbole.*

Demonstraţie: Fie planul de secţiune paralel cu planul xOy; ecuaţia acestui plan este $z = h_1$. Ecuaţiile curbei de intersecţie a hiperboloidului cu o pînză cu acest plan sînt date de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ z = h_1 \end{cases} \tag{27}$$

sau

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1 + \dfrac{h_1^2}{c^2}\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(1 + \dfrac{h_1^2}{c^2}\right)} - 1 = 0 \\ z = h_1, \end{cases} \tag{28}$$

de unde se vede că pentru orice valoare a lui h_1 intersecţia este o elipsă reală.

Intersecţia hiperboloidului cu o pînză cu plane paralele cu planul yOz este dată de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ x = h_2 \end{cases} \tag{29}$$

sau

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{h_2^2}{a^2}\right)} - \dfrac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{h_2^2}{a^2}\right)} - 1 = 0 \\ x = h_2, \end{cases} \tag{30}$$

deci intersecţiile sînt hiperbole.

În mod analog se arată că intersecţia hiperboloidului cu o pînză prin plane $y = h_3$ paralele cu xOz este formată din hiperbole ale căror ecuaţii sînt date de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1 - \dfrac{h_3^2}{b^2}\right)} - \dfrac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{h_3^2}{b^2}\right)} - 1 = 0 \\ y = h_3 \end{cases} \tag{31}$$

Teorema 2.4. *Hiperboloidul cu o pînză are patru vîrfuri.*

Demonstraţie: Vîrfurile se obţin luînd intersecţia hiperboloidului cu o pînză cu axele de simetrie (fig. XI. 2). Aceasta revine la a rezolva sistemul format de ecuaţia hiperboloidului cu o pînză cu axele de simetrie, adică cu axele de coordonate.

Intersecţia cu axa Ox conduce la rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \tag{32}$$

sau

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - 1 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0, \end{cases} \tag{33}$$

de unde rezultă vîrfurile $A(a, 0, 0)$ şi $A'(-a, 0, 0)$.

În mod analog, intersecţia cu axa Oy ne dă vîrfurile $B\ (0, b, 0)$ şi $B'(0, -b, 0)$.

Intersecţia cu axa Oz conduce la rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \dfrac{-z^2}{c^2} - 1 = 0, \end{cases} \tag{34}$$

care ne dă soluţii imaginare. Rezultă că axa Oz nu intersectează suprafaţa.

Observaţii. 1° Din proprietăţile studiate ale hiperboloidului cu o pînză rezultă că această suprafaţă poate fi generată de o elipsă mobilă

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \lambda \\ z = \mu, \end{cases} \tag{35}$$

care, depinzînd de doi parametri, λ şi μ, se deplasează paralel cu ea însăşi şi se deformează, sprijinindu-se pe hiperbola

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ y = 0. \end{cases} \tag{36}$$

Pentru ca un punct al elipsei (35) să se sprijine pe hiperbola (36), trebuie ca sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \lambda \\ z = \mu \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \tag{37}$$

să fie compatibil.

Scanned with CamScanner

Sistemul (37), fiind format din patru ecuaţii cu trei necunoscute, nu poate fi compatibil fără o relaţie de compatibilitate între parametrii λ şi μ. Această relaţie se obţine eliminînd pe x, y, z între ecuaţiile sistemului (37); ea este

$$\lambda - \frac{\mu^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{38}$$

Avînd ecuaţiile elipsei generatoare (35), conţinînd doi parametri, λ şi μ, între care avem relaţia de legătură (38), obţinem ecuaţia suprafeţei prin eliminarea parametrilor între ecuaţiile sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \lambda \\ z = \mu \\ \lambda - \dfrac{\mu^2}{c^2} - 1 = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Ecuaţia suprafeţei astfel obţinute este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

adică un hiperboloid cu o pînză.

2° Intersecţiile hiperboloidului cu o pînză prin vîrfurile $A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$ cu plane paralele cu planul yOz şi $B(0, b, 0)$, $B'(0, -b, 0)$ cu plane paralele cu planul xOz sînt hiperbole degenerate. Deci intersecţiile cu aceste plane sînt drepte concurente trecînd prin vîrfuri, ale căror ecuaţii sînt date de sistemele

$$\begin{cases} x = \pm a \\ \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} y = \pm b \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0. \end{cases}$$

3° Din cele expuse mai sus rezultă că pe hiperboloidul cu o pînză sînt aşezate drepte. Vom arăta, la sfîrşitul acestui capitol, că pe hiperboloidul cu o pînză există generatoare rectilinii, deci hiperboloidul cu o pînză este o suprafaţă riglată.

4° Cantităţile a, b, c se numesc semiaxe. Dacă $a = b$, hiperboloidul cu o pînză este de rotaţie în jurul axei Oz.

5° Conul

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{40}$$

se numeşte con asimptotic al hiperboloidului cu o pînză.

Acest lucru se demonstrează uşor arătînd că planul de la infinit intersectează hiperboloidul cu o pînză după aceeaşi curbă ca şi conul (40).

Într-adevăr, această curbă de intersecţie a hiperboloidului cu o pînză este dată de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - t^2 = 0 \\ t = 0, \end{cases} \tag{41}$$

format din ecuaţia paraboloidului cu o pînză scrisă în coordonate omogene şi ecuaţia planului de la infinit.

Sistemul (41) este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0 \\ t=0, \end{cases} \tag{41'}$$

care este format din ecuaţia conului (40) şi ecuaţia planului de la infinit.

§ 3. Hiperboloidul cu două pînze

Definiţia 3.1. Hiperboloidul cu două pînze. Se numeşte *hiperboloid cu două pînze* suprafaţa a cărei ecuaţie este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0.$$

Teorema 3.1. *Hiperboloidul cu două pînze are trei plane de simetrie: xOy, yOz, zOx, trei axe de simetrie: Ox, Oy, Oz, şi un centru de simetrie: O* (0,0,0).

Demonstraţie: Ecuaţia canonică a hiperboloidului cu două pînze fiind

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0, \tag{42}$$

se observă, ca şi la teorema 1.1, că x, y, z figurează la puterea a doua, deci planele de coordonate sînt plane de simetrie. Deci, şi axele de coordonate sînt axe de simetrie şi originea este centru de simetrie.

Teorema 3.2. (Intersecţia hiperboloidului cu două pînze cu planele de simetrie.) *Planele de simetrie intersectează hiperboloidul cu două pînze după o elipsă imaginară şi două hiperbole.*

Demonstraţie: Intersecţia hiperboloidului cu două pînze cu planul xOy este dată de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}+1=0 \\ z=0, \end{cases} \tag{43}$$

echivalent cu

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+1=0 \\ z=0, \end{cases} \tag{44}$$

deci o elipsă imaginară.

Intersecţia cu planul xOz este dată de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}+1=0 \\ y=0, \end{cases} \tag{45}$$

deci o hiperbolă.

Intersecția cu planul yOz este dată de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \\ x = 0, \end{cases} \tag{46}$$

deci tot o hiperbolă.

T e o r e m a 3.3. (Secțiuni într-un hiperboloid cu două pînze cu plane paralele cu planele de simetrie.) *Secțiunile făcute într-un hiperboloid cu două pînze cu plane paralele cu planele de simetrie sînt elipse sau hiperbole.*

D e m o n s t r a ț i e: Fie $z = h_1$ ecuația planului paralel cu planul xOy. Ecuațiile curbei de intersecție a hiperboloidului cu două pînze cu acest plan sînt date de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \\ z = h_1 \end{cases} \tag{45'}$$

sau

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(\dfrac{h_1^2}{c^2} - 1\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{h_1^2}{c^2} - 1\right)} - 1 = 0 \\ z = h_1, \end{cases} \tag{46'}$$

de unde se vede că intersecțiile sînt elipse reale pentru

$$-\infty < h_1 < -c \text{ și } c < h_1 < +\infty.$$

Intersecția hiperboloidului cu două pînze cu plane paralele cu planul yOz este dată de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \\ x = h_2 \end{cases} \tag{47}$$

sau

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{h_2^2}{a^2} + 1\right)} - \dfrac{z^2}{c^2\left(\dfrac{h_2^2}{a^2} + 1\right)} + 1 = 0 \\ x = h_2, \end{cases} \tag{48}$$

deci intersecțiile sînt hiperbole.

În mod analog, ecuaţiile curbei de intersecţie a hiperboloidului cu două pînze cu plane $y = h_3$, paralele cu xOz, sînt date de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(\dfrac{h_3^2}{b^2}+1\right)} - \dfrac{z^2}{b^2\left(\dfrac{h_3^2}{b^2}+1\right)} + 1 = 0 \\ y = h_3, \end{cases} \tag{49}$$

deci tot hiperbole.

Teorema 3.4. *Hiperboloidul cu două pînze are două vîrfuri.*

Demonstraţie. Vîrfurile fiind punctele de intersecţie ale hiperboloidului cu două pînze cu axele de simetrie, sîntem conduşi să rezolvăm sistemele formate de ecuaţiile axelor de simetrie, adică ale axelor de coordonate, şi ecuaţia hiperboloidului cu două pînze.

Intersecţia cu axa Ox conduce la rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \tag{50}$$

sau

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + 1 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0, \end{cases} \tag{51}$$

care are soluţii imaginare. Deci axa Ox nu intersectează suprafaţa.

În mod analog, intersecţia cu axa Oy ne dă soluţii imaginare, deci axa Oy nu intersectează suprafaţa.

Intersecţia cu axa Oz ne dă vîrfurile reale $C\ (0,\ 0,\ c)$ şi $C'(0,\ 0,\ -c)$.

Observaţii. 1° Din proprietăţile de mai sus ale hiperboloidului cu două pînze rezultă că această suprafaţă poate fi generată de o elipsă mobilă

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda \\ &z = \mu, \end{aligned} \tag{52}$$

care, depinzînd de doi parametri, λ şi μ, se deplasează paralel cu ea însăşi şi se deformează, sprijinindu-se pe hiperbola

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \\ y = 0. \end{cases} \tag{53}$$

Pentru ca un punct al elipsei (52) să se sprijine pe hiperbola (53), trebuie ca sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \lambda \\ z = \mu \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \tag{54}$$

să fie compatibil.

Sistemul (54), fiind format din patru ecuaţii cu trei necunoscute, nu poate fi compatibil fără o relaţie de legătură între parametrii λ şi μ. Această relaţie se obţine eliminînd pe x, y, z între ecuaţiile sistemului (54); ea este

$$\lambda - \frac{\mu^2}{c^2} + 1 = 0. \tag{55}$$

Avînd ecuaţiile elipsei generatoare (52), ale cărei ecuaţii depind de doi parametri între care este relaţia de legătură (55), obţinem ecuaţia suprafeţei prin eliminarea parametrilor între ecuaţiile sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \lambda \\ z = \mu \\ \lambda - \dfrac{\mu^2}{c^2} + 1 = 0. \end{cases} \tag{56}$$

Ecuaţia suprafeţei astfel obţinute este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

adică, ecuaţia hiperboloidului cu două pînze.

2° Dacă $a = b$, hiperboloidul cu două pînze este de rotaţie în jurul axei Oz.

3° Conul de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

este conul asimptotic al hiperboloidului cu două pînze.

Demonstraţia este aceeaşi ca şi la hiperboloidul cu o pînză, arătînd că curba de intersecţie cu planul de la infinit este aceeaşi şi pentru conul asimptotic, şi pentru hiperboloidul cu două pînze.

4° Forma hiperboloidului cu două pînze este cea din figura XI.3.

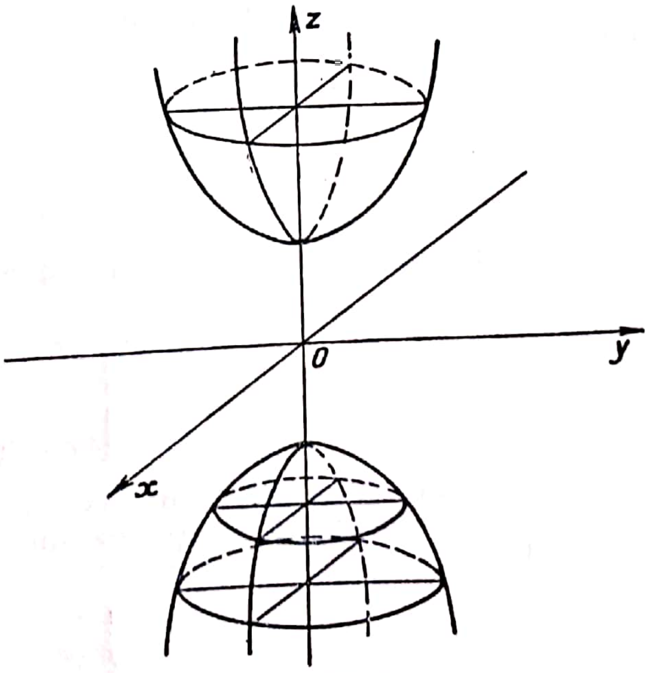

Fig. XI. 3

§ 4. Paraboloidul eliptic

Definiţia 4.1. Paraboloidul eliptic. Se numeşte *paraboloid eliptic* suprafaţa a cărei ecuaţie este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z; \quad a \neq b.$$

Teorema 4.1. *Paraboloidul eliptic are două plane de simetrie, yOz şi xOz, şi o axă de simetrie, Oz.*

Demonstraţie: Ecuaţia canonică a paraboloidului eliptic fiind

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \tag{57}$$

observăm, ca la teorema 1.1 a acestui capitol, că x figurează în ecuaţie numai la puterea a doua, deci planul yOz este un plan de simetrie. În mod analog, şi y este numai la puterea a doua, deci şi planul xOz este un plan de simetrie.

Cele două plane de simetrie se intersectează după axa Oz, care este axă de simetrie.

Observaţii. 1° Ecuaţia (57) a paraboloidului eliptic nu are termen liber, deci suprafaţa trece prin origine.

2° Membrul întîi al ecuaţiei paraboloidului eliptic, fiind format dintr-o sumă de două pătrate, este totdeauna pozitiv; rezultă că suprafaţa nu există decît pentru $z \geqslant 0$, deci paraboloidul eliptic este situat deasupra planului xOy.

Teorema 4.2. (Intersecţia paraboloidului eliptic cu planele de simetrie.) *Planele de simetrie intersectează paraboloidul după două parabole.*

Demonstraţie: Intersecţia paraboloidului eliptic cu planul yOz este dată de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ x = 0, \end{cases} \tag{58}$$

format din ecuaţia paraboloidului şi a planului yOz. Acest sistem este echivalent cu

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ x = 0 \end{cases} \tag{59}$$

care reprezintă o parabolă a cărei axă de simetrie este Oz.

În mod analog, intersecţia paraboloidului cu planul xOz este dată de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ y = 0, \end{cases} \tag{60}$$

echivalent cu

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = 2z \\ y = 0, \end{cases} \tag{61}$$

care reprezintă tot o parabolă avînd axa de simetrie Oz.

Definiția 4.2. Vîrfuri. Punctele de intersecție a paraboloidului eliptic cu axa de simetrie se numesc *vîrfuri.*

Teorema 4.3. *Paraboloidul eliptic are un vîrf.*

Demonstrație: Pentru a obține vîrful, luăm intersecția paraboloidului eliptic cu axa de simetrie, adică intersecția cu axa Oz; rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ x = 0 \\ y = 0, \end{cases} \tag{62}$$

care ne dă $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Deci originea este vîrful paraboloidului eliptic.

Observație. Planul xOy nu este plan de simetrie. Intersecția paraboloidului eliptic cu acest plan este dată de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ z = 0, \end{cases} \tag{63}$$

care are soluția $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ adică originea (vîrful).

Teorema 4.4. (Secțiuni într-un paraboloid eliptic cu plane paralele cu planele de coordonate.) *Secțiunile făcute într-un paraboloid cu plane paralele cu planele de coordonate sînt elipse și parabole.*

Demonstrație: Intersecțiile paraboloidului eliptic cu plane paralele cu planul xOy sînt date de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ z = h_1 \end{cases} \tag{64}$$

sau

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2h_1 \\ z = h_1, \end{cases} \tag{65}$$

care reprezintă elipse reale pentru $h_1 > 0$.

Intersecţiile paraboloidului eliptic cu plane paralele cu planul xOz sînt date de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z \\ y=h_2 \end{cases} \tag{66}$$

sau încă

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}=2z-\dfrac{h_2^2}{b^2} \\ y=h_2, \end{cases} \tag{67}$$

care reprezintă parabole avînd axa de simetrie paralelă cu axa Oz.

În mod analog, intersecţiile paraboloidului eliptic cu plane paralele cu planul yOz sînt date de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}=2z-\dfrac{h_3^2}{a^2} \\ x=h_3, \end{cases} \tag{68}$$

adică parabole avînd axa de simetrie paralelă cu axa Oz.

Observaţii. 1° Suprafaţa paraboloidului eliptic poate fi generată de o elipsă mobilă

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda \\ z=\mu, \end{cases} \tag{69}$$

care, depinzînd de doi parametri, λ şi μ, se deplasează paralel cu ea însăşi şi se deformează, sprijinindu-se pe parabola

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-2z=0 \\ y=0. \end{cases} \tag{70}$$

Pentru ca un punct al elipsei (69) să se sprijine pe parabola (70), trebuie ca sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda \\ z=\mu \\ \dfrac{x^2}{a^2}-2z=0 \\ y=0 \end{cases} \tag{71}$$

să fie compatibil.

Sistemul (71), format din patru ecuaţii cu trei necunoscute, nu poate fi compatibil fără o relaţie de compatibilitate între parametrii λ şi μ. Această relaţie obţinută prin eliminarea necunoscutelor din sistemul (71) este

$$\lambda-2\mu=0. \tag{72}$$

Avînd ecuațiile elipsei generatoare, care conțin doi parametri, λ și μ, între care avem relația (72), ecuația suprafeței se obține eliminînd parametrii λ și μ între ecuațiile sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda \\ z=\mu \\ \lambda-2\mu=0. \end{cases} \tag{73}$$

Eliminarea este imediată și ecuația suprafeței este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0.$$

2° Dacă $a=b$, paraboloidul este de rotație în jurul axei Oz.

3° Forma paraboloidului eliptic este cea din figura XI.4.

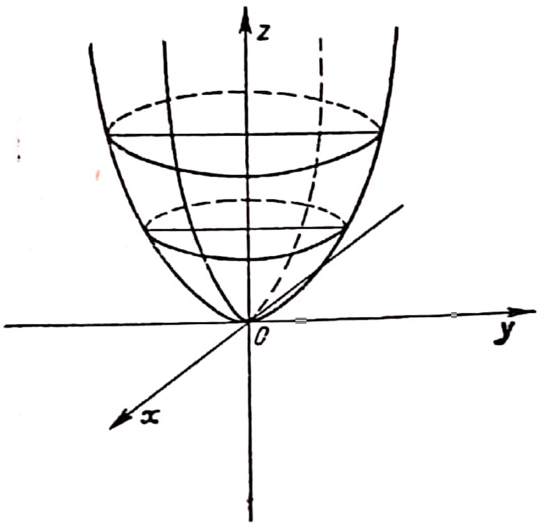

Fig. XI. 4

§ 5. Paraboloidul hiperbolic

D e f i n i ț i a 5.1. Paraboloidul hiperbolic. Se numește *paraboloid hiperbolic* suprafața a cărei ecuație este

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

T e o r e m a 5.1. *Paraboloidul hiperbolic are două plane de simetrie: xOz, yOz, și o axă de simetrie: axa Oz.*

D e m o n s t r a ț i e: Ecuația canonică a paraboloidului hiperbolic fiind

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z, \tag{74}$$

observăm, ca la teorema 4.1 a acestui capitol, că ecuația (74) conține pe x și y la puterea a doua, deci suprafața este simetrică, respectiv cu planele yOz și zOx.

Avînd două plane de simetrie, dreapta de intersecție este o axă de simetrie, axa Oz.

T e o r e m a 5.2. (Intersecția paraboloidului hiperbolic cu planele de simetrie.) *Intersecția paraboloidului hiperbolic cu planele de simetrie este formată din două parabole.*

D e m o n s t r a ț i e: Intersecția paraboloidului hiperbolic cu planul yOz este dată de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z \\ x=0 \end{cases} \tag{75}$$

sau

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = -2z \\ x = 0, \end{cases} \tag{76}$$

care este o parabolă avînd axa Oz ca axă de simetrie, dirijată în sensul negativ.

În mod analog, intersecţia paraboloidului hiperbolic cu planul xOz este dată de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ y = 0 \end{cases} \tag{77}$$

sau

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = 2z \\ y = 0, \end{cases} \tag{78}$$

care este o parabolă avînd axa Oz ca axă de simetrie, dirijată în sensul pozitiv al axei Oz.

Observaţii. 1° Planul xOy nu este un plan de simetrie. Intersecţia paraboloidului hiperbolic cu acest plan este dată de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ z = 0, \end{cases} \tag{79}$$

echivalent cu

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \tag{80}$$

sau

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = 0 \\ z = 0, \end{cases} \tag{81}$$

care se descompune în sistemele

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \tag{82}$$

şi

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0 \\ z = 0, \end{cases} \tag{83}$$

reprezentînd două drepte trecînd prin origine.

2° La sfîrşitul acestui capitol vom arăta că pe paraboloidul hiperbolic există generatoare rectilinii, deci el este o suprafaţă riglată.

Teorema 5.3. *Paraboloidul hiperbolic are un vîrf O* (0, 0, 0).
Demonstrație: Pentru a obține vîrful, luăm intersecția paraboloidului hiperbolic cu axa de simetrie adică cu axa Oz. Vîrful este dat de sistemul

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$
$$x=0 \qquad (84)$$
$$y=0,$$

care ne dă soluția $x=0$, $y=0$, $z=0$. Deci originea este vîrful paraboloidului hiperbolic.

Teorema 5.4. (Secțiuni într-un paraboloid hiperbolic făcute cu plane paralele cu planele de coordonate.) *Secțiunile făcute într-un paraboloid hiperbolic cu plane paralele cu planele de coordonate sînt hiperbole și parabole.*

Demonstrație: Secțiunile făcute în paraboloidul hiperbolic cu plane paralele cu planul xOy sînt date de sistemul

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z\\ z=h_1,\end{cases} \qquad (85)$$

echivalent cu

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2h_1\\ z=h_1,\end{cases} \qquad (86)$$

care reprezintă hiperbole.

Secțiunile făcute în paraboloidul hiperbolic cu plane paralele cu planul xOz sînt date de sistemul

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z\\ y=h_2\end{cases} \qquad (87)$$

sau

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}=2z+\dfrac{h_2^2}{b^2}\\ y=h_2,\end{cases} \qquad (88)$$

care reprezintă parabole.

În mod analog, secțiunile făcute în paraboloidul hiperbolic cu plane paralele cu planul yOz sînt date de sistemul

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z\\ x=h_3\end{cases} \qquad (89)$$

sau

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}=-2z+\dfrac{h_3^2}{a^2}\\ x=h_3,\end{cases} \qquad (90)$$

adică tot parabole.

Observaţii. 1° Suprafaţa paraboloidului hiperbolic poate fi generată de parabola variabilă

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + 2z = \lambda \\ x = \mu, \end{cases} \tag{91}$$

care se sprijină pe parabola fixă, ale cărei ecuaţii sînt:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - 2z = 0 \\ y = 0. \end{cases} \tag{92}$$

Pentru ca un punct al parabolei (91) să se sprijine pe parabola (92), trebuie ca sistemul

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + 2z = \lambda \\ x = \mu \\ \frac{x^2}{a^2} - 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \tag{93}$$

să fie compatibil.

Condiţia de compatibilitate se găseşte eliminînd pe x, y, z între ecuaţiile sistemului (93).

Obţinem prin eliminare relaţia

$$\frac{\mu^2}{a^2} - \lambda = 0. \tag{94}$$

Ecuaţiile parabolei generatoare (91) depinzînd de doi parametri, λ şi μ, între care avem relaţia de legătură (94), ecuaţia suprafeţei se obţine eliminînd parametrii λ şi μ între ecuaţiile sistemului

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + 2z = \lambda \\ x = \mu \\ \frac{\mu^2}{a^2} - \lambda = 0. \end{cases} \tag{95}$$

Se obţine ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0,$$

care este ecuaţia suprafeţei paraboloidului hiperbolic.

2° Forma paraboloidului hiperbolic este cea din figura XI.5.

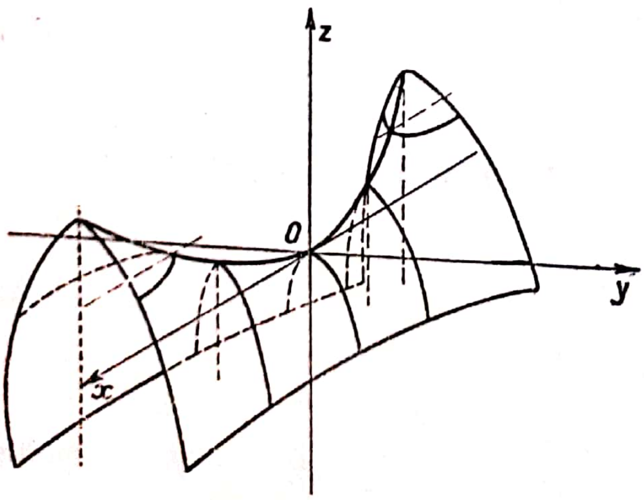

Fig. XI. 5

§ 6. Generatoare rectilinii ale hiperboloidului cu o pînză

Observații. Din studiul făcut asupra hiperboloidului cu o pînză, § 2, am văzut că secțiunile făcute în această suprafață prin plane paralele cu planele de coordonate sînt elipse sau hiperbole. Elipsele de secțiune sînt totdeauna reale și nedegenerate; hiperbolele de secțiune pot fi degenerate în două drepte, totdeauna reale. Aceste drepte sînt situate pe hiperboloidul cu o pînză și se numesc generatoare rectilinii.

In § 2 am obținut generatoarele rectilinii care trec prin cele patru vîrfuri ale hiperboloidului cu o pînză.

In cele ce urmează vom studia generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pînză, demonstrînd în felul acesta că hiperboloidul cu o pînză este o suprafață riglată.

Definiția 6.1. Suprafață riglată. Numim *suprafață riglată* o suprafață care este generată de o dreaptă.

Definiția 6.2. Generatoare rectilinii. Numim *generatoare rectilinii* ale unei suprafețe o familie de drepte astfel încît orice dreaptă din familie poate genera suprafața.

Teorema 6.1. (Generatoare rectilinii pe hiperboloidul cu o pînză.) *Hiperboloidul cu o pînză de ecuație*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

are două familii de generatoare rectilinii, date de sistemele

$$(D_\lambda)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda}\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$$

și

$$(D_\mu)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\mu\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\mu}\left(1+\dfrac{y}{b}\right). \end{cases}$$

Demonstrație: Fie ecuația hiperboloidului cu o pînză

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0, \tag{96}$$

care poate fi scrisă sub forma

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2} \tag{97}$$

de diferențe de pătrate.

Descompunînd fiecare membru al ecuaţiei (97) în produs de sumă prin diferenţă, avem

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right). \tag{98}$$

Să considerăm ecuaţiile

$$(D_\lambda)\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\\[2mm] \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda}\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\end{cases} \tag{99}$$

unde λ este un parametru, ceea ce înseamnă că sistemul (99) reprezintă o familie de drepte.

Dacă considerăm ecuaţiile

$$(D_\mu)\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\mu\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\\[2mm] \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\mu}\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\end{cases} \tag{100}$$

unde μ este un parametru, sistemul (100) constituie a doua familie de drepte.

Să arătăm că dreptele D_λ se găsesc pe hiperboloidul cu o pînză.

Pentru aceasta, observăm că ecuaţiile dreptei D_λ conţin un parametru λ, deci dreptele D_λ reprezintă o familie de drepte cînd λ variază, care se deplasează în spaţiu; dar, după teorema 1.1 din capitolul IX, aceste drepte nu umplu tot spaţiul; ele generează o suprafaţă a cărei ecuaţie se obţine eliminînd parametrul λ între ecuaţiile (99) ale dreptei D_λ.

Ecuaţia suprafeţei se obţine prin eliminarea parametrului λ între ecuaţiile (99).

Înmulţind, membru cu membru, ecuaţiile sistemului (99), avem

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{98}$$

sau

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}, \tag{97}$$

de unde, trecînd totul în membrul întîi, avem

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0, \tag{96}$$

ecuaţia hiperboloidului cu o pînză.

În acelaşi mod se demonstrează că generatoarele D_μ se găsesc pe hiperboloidul cu o pînză.

Rezultă că pe hiperboloidul cu o pînză avem două sisteme de generatoare rectilinii: una formată din dreptele D_λ, date de ecuaţiile sistemului (99), şi a doua formată din dreptele D_μ, date de ecuaţiile sistemului (100). Orice dreaptă aşezată pe hiperboloidul cu o pînză face parte din una din cele două familii de generatoare.

Teorema 6.2. *Prin orice punct al suprafeţei hiperboloidului cu o pînză trece o generatoare D_λ, şi numai una.*

Demonstraţie: Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct al hiperboloidului cu o pînză.

Pentru ca o generatoare D_λ să treacă prin acest punct, trebuie ca sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c} = \lambda\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right) \\ \dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c} = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right) \end{cases} \tag{101}$$

să fie compatibil.

Eliminînd pe λ între aceste ecuaţii, prin înmulţire membru cu membru, avem condiţia de compatibilitate

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1 - \frac{y_0^2}{b^2}$$

şi, trecînd totul în membrul întîi

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{102}$$

găsim tocmai condiţia ca punctul M_0 să fie pe hiperboloidul cu o pînză, ceea ce era dat prin ipoteză. Rezultă că sistemul (101) este compatibil, deci prin M_0 trece o generatoare şi numai una din sistemul D_λ, căci ecuaţiile sistemului (101) sînt de gradul întîi în λ, prin urmare, determină o singură valoare pentru λ.

În mod analog se arată că prin orice punct al hiperboloidului cu o pînză trece o generatoare din sistemul D_μ.

Observaţii. 1° Din cele arătate mai sus rezultă că printr-un punct al hiperboloidului cu o pînză trece o generatoare din sistemul D_λ şi una din sistemul D_μ.

2° De asemenea, rezultă că două generatoare din acelaşi sistem nu se întîlnesc.

Teorema 6.3. *Orice generatoare din sistemul D_λ întîlneşte toate generatoarele din sistemul D_μ, şi reciproc.*

Demonstraţie: Pentru ca o generatoare oarecare a sistemului D_λ să întîlnească toate generatoarele sistemului D_μ, trebuie ca sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \lambda\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \mu\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\mu}\left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{103}$$

format din ecuaţiile celor două sisteme de generatoare, D_λ şi D_μ, să fie compatibil, oricare ar fi valorile lui λ şi μ. Acest lucru este îndeplinit, căci sistemul (103), format din patru ecuaţii cu trei necunoscute, x, y, z, liniar şi neomogen, este compatibil.

Condiţia de compatibilitate este ca determinantul format din coeficienţii necunoscutelor şi termenii liberi să fie nul. Luînd ca necunoscute pe $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$ şi $\frac{z}{c}$, se arată uşor că acest determinant este nul, oricare ar fi valorile lui λ şi μ.

Observaţii. 1° Din ecuaţiile generatoarelor rectilinii putem deduce ecuaţiile parametrice ale hiperboloidului cu o pînză.

Într-adevăr, sistemul (103) fiind un sistem compatibil, găsim:

$$\frac{x}{a} = \frac{\lambda\mu + 1}{\mu + \lambda}; \quad \frac{y}{b} = \frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda}; \quad \frac{z}{c} = \frac{\lambda\mu - 1}{\mu + \lambda},$$

în care λ şi μ sînt doi parametri independenţi.

2° Două generatoare, D_λ şi D_μ, care trec printr-un punct M_0 al hiperboloidului cu o pînză se găsesc în planul tangent în punctul M_0 la hiperboloid. (Demonstraţia acestei proprietăţi se va face în capitolul care tratează geometria diferenţială a suprafeţelor).

§ 7. Generatoare rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

Observaţie. Din studiul făcut asupra paraboloidului hiperbolic, § 5, am văzut că secţiunea făcută cu planul xOy ne-a dat o hiperbolă degenerată în două drepte concurente trecînd prin origine. Acest lucru pune în evidenţă prezenţa unor drepte situate pe paraboloid, adică prezenţa unor generatoare rectilinii.

În cele ce urmează vom studia generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic, demonstrînd în felul acesta că paraboloidul hiperbolic este o suprafaţă riglată.

Teorema 7.1. (Generatoare rectilinii pe paraboloidul hiperbolic.) *Paraboloidul hiperbolic de ecuaţie*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

are două familii de generatoare rectilinii, date de sistemele

$$(D_\lambda)\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2\lambda z \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{\lambda} \end{cases}$$

şi

$$(D_\mu)\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 2\mu z \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{\mu}. \end{cases}$$

Demonstrație: Fie ecuația paraboloidului hiperbolic

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z, \tag{104}$$

care poate fi scrisă sub forma

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2z. \tag{105}$$

Să considerăm ecuațiile

$$(D_\lambda)\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2\lambda z\\[2mm] \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{\lambda},\end{cases} \tag{106}$$

unde λ este un parametru, ceea ce înseamnă că ecuațiile (106) reprezintă o familie de drepte.

Dacă considerăm ecuațiile

$$(D_\mu)\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2\mu z\\[2mm] \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{\mu},\end{cases} \tag{107}$$

unde μ este un parametru, sistemul (107) constituie a doua familie de drepte.

Se arată că dreptele D_λ se găsesc pe paraboloidul hiperbolic utilizînd metoda de la teorema 6.1; la fel și pentru generatoarele D_μ.

Rezultă că pe paraboloidul hiperbolic se găsesc două sisteme de generatoare rectilinii: una formată din dreptele D_λ, date de ecuațiile sistemului (106), și a doua din dreptele D_μ, date de ecuațiile sistemului (107). Orice dreaptă așezată pe paraboloidul hiperbolic face parte din una din cele două familii de generatoare.

Teorema 7.2. *Prin orice punct al paraboloidului hiperbolic trece o generatoare D_λ și numai una.*

Demonstrația este cea utilizată la teorema 6.2.

Observații. 1° În mod analog se arată că prin orice punct al paraboloidului hiperbolic trece o generatoare din sistemul D_μ.

2° Rezultă din cele expuse mai sus că printr-un punct al hiperboloidului cu o pînză trece o generatoare din sistemul D_λ și una din sistemul D_μ.

3° De asemenea, rezultă că două generatoare din același sistem nu se întîlnesc.

Teorema 7.3. *Orice generatoare din sistemul D_λ întîlnește toate generatoarele din sistemul D_μ.*

Demonstraţia este aceeaşi ca şi la teorema 6.3, *adică se arată că sistemul*

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2\lambda z \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{\lambda} \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 2\mu z \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{\mu} \end{cases} \tag{108}$$

este compatibil, oricare ar fi valorile lui λ *şi* μ.

Observaţii. 1° Din ecuaţiile (108) deducem ecuaţiile parametrice ale paraboloidului hiperbolic

$$x = a\frac{\lambda + \mu}{2\lambda\mu}; \ y = b\frac{\lambda - \mu}{2\lambda\mu}; \ z = \frac{1}{2\lambda\mu}, \tag{109}$$

unde λ şi μ sînt doi parametri independenţi.

2° Două generatoare rectilinii, D_λ şi D_μ, care trec printr-un punct M_0 al paraboloidului hiperbolic se găsesc în planul tangent în punctul M_0 la suprafaţă. (Demonstraţia acestei proprietăţi se va face la capitolul de geometrie diferenţială a suprafeţelor din cadrul acestui curs.)

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Fiind date punctele fixe $F(0, 0, c)$ şi $F'(0, 0, -c)$, se cere locul geometric al punctelor M, din spaţiu, a căror sumă a distanţelor la cele două puncte fixe este constantă şi egală cu $2a$.

2. Fie punctul fix $F(0, 0, c)$ şi planul (P) $z - \dfrac{a^2}{c} = 0$. Se cere locul geometric al punctelor M din spaţiu, astfel ca raportul distanţelor la punctul F' şi planul P să fie constant şi egal cu $\dfrac{c}{a} < 1$.

3. Fiind date punctele fixe $F(0, 0, c)$ şi $F'(0, 0, -c)$, se cere locul geometric al punctelor M din spaţiu, a căror diferenţă a distanţelor la cele două puncte fixe este constantă şi egală cu $2a$.

4. Fie punctul $F(0, 0, c)$ şi planul (P) $z - \dfrac{a^2}{c} = 0$. Se cere locul geometric al punctelor M din spaţiu, astfel ca raportul distanţelor lor la punctul F şi planul P să fie constant şi egal cu $\dfrac{c}{a} > 1$.

5. Fie punctul $F\left(0, 0, \dfrac{p}{2}\right)$ şi planul (P) $z + \dfrac{p}{2} = 0$. Se cere locul geometric al punctelor M din spaţiu, ale căror distanţe la punctul F şi planul P sînt egale.

6. Fiind dat hiperboloidul cu o pînză

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 - 1 = 0$$