Seminar 4 — 22 octombrie 2020

Relații

Def Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $A_1, \dots, A_n$ mulțimi.
Numim relație n-ară sistemul $\rho = (A_1, \dots, A_n, R)$, unde $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$.

Pt. $n = 2$ $\rho = (A_1, A_2, R)$ cu $R \subseteq A_1 \times A_2$ este o rel. binară.

A_1 – domeniu, A_2 – codomeniu, R – grafic

Notație: $(a, b) \in R \iff a \rho b$

Exemplu: Relația identică pe A (rel. diagonală)
$1_A = (A, A, \Delta_A)$, $\Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$.
$a\, 1_A\, b \iff a = b$ (rel. de egalitate).

Operații: 1) Subrelație

$$\rho = (A, B, R) \subseteq \sigma = (A, B, S) \iff R \subseteq S$$

$$a \rho b \implies a \sigma b.$$

2) Fie $\rho = (A, B, R)$, $\rho' = (A, B, R')$

Intersecția rel: $\rho \cap \rho' = (A, B, R \cap R')$

$$a\, \rho \cap \rho'\, b \iff a \rho b \text{ și } a \rho' b$$

Reuniunea rel.: $\rho \cup \rho' = (A, B, R \cup R')$

$$a\, \rho \cup \rho'\, b \iff a \rho b \text{ sau } a \rho' b.$$

Complementara rel.: $C_\rho = (A, B, C_R)$ $\leftarrow (A\times B)\setminus R$

$a \, C_\rho \, b \iff a \not\rho \, b$

Inversa rel.: $\rho^{-1} = (B, A, R^{-1})$, $R^{-1} \subseteq B\times A$.
$R^{-1} = \{(b,a)\in B\times A \mid a \rho b\}$

$b \, \rho^{-1} a \iff a \rho b.$

3) Compunerea rel.

Fie $\rho = (A, B, R)$ și $\sigma = (C, D, S)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho"] \arrow[rr, bend right, "\sigma\circ\rho"'] & B\cap C \arrow[r, "\sigma"] & D \end{tikzcd}$$

$a \in A$, $\exists x \in B\cap C$, $d \in D$

$\sigma\circ\rho = (A, D, S\circ R)$ $\quad S\circ R \subseteq A\times D$

$S\circ R = \{(a,d)\in A\times D \mid \exists x \in B\cap C \text{ a.î. } a\rho x \text{ și } x\sigma d\}$

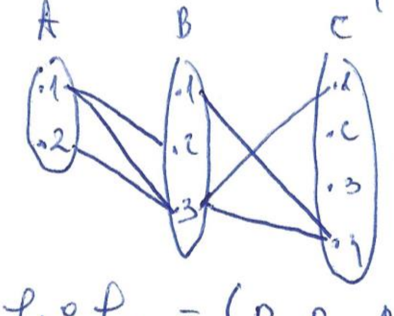
$\underline{a} \; \sigma\circ\rho \; \underline{d} \iff \exists x \in B\cap C$ a.î. $a \rho x$ și $x \sigma d$

Ex.28 Fie mulț $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$, $C = \{1,2,3,4\}$

$R_1 = \{(1,2),(1,3),(2,3)\} \subseteq A \times B$ $\quad f_1 = (A, B, R_1)$

$R_2 = \{(1,4),(3,1),(3,4)\} \subseteq B \times C$ $\quad f_2 = (B, C, R_2)$

Să se det rel: $f_2 \circ f_1$, $f_1 \circ f_2$, f_2^{-1}, f_1^{-1}, $(f_1 \circ f_2)^{-1}$, $f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$



$f_2 \circ f_1 = (A, C, R_2 \circ R_1)$

$R_2 \circ R_1 = \{(1,1),(1,4),(2,1),(2,4)\}$

$f_1 \circ f_2 = (B, B, R_1 \circ R_2)$ $\quad R_1 \circ R_2 = \{(3,2),(3,3)\}$

$f_1^{-1} = (B, A, R_1^{-1})$ $\quad R_1^{-1} = \{(2,1),(3,1),(3,2)\}$

$f_2^{-1} = (C, B, R_2^{-1})$ $\quad R_2^{-1} = \{(4,1),(1,3),(4,3)\}$

$(f_1 \circ f_2)^{-1} = \{(2,3),(3,3)\}$

$f_2^{-1} \circ f_1^{-1} = \{(2,3),(3,3)\}$. Se observă $(f_1 \circ f_2)^{-1} = f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$.

temă!

Ex 30/pg 27 Fie $A = \{1,2,3,4\}$ și $R, S, S' \subseteq A \times A$ unde $R = \{(1,2),(1,4),(2,3),(4,1),(4,3)\}$, $S = \{(1,1),(2,4),(3,4)\}$, $S' = \{(1,4),(4,4)\}$. Să se determine relațiile $(S \cap S') \circ R$, $(S \circ R) \cap (S' \circ R)$, $R \circ (S \cap S')$ și $(R \circ S) \cap (R \circ S')$.

$\boxed{Ex\ 31/pg\ 27}$ Fie relațiile $\rho = (A,B,R)$, $\rho' = (A,B,R')$, $\sigma = (C,D,S)$ și $\sigma' = (C,D,S')$. S.s.a.c.

a) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$ $\quad (C_\rho)^{-1} = C_{\rho^{-1}}$

b) $(\sigma\circ\rho)^{-1} = \rho^{-1}\circ\sigma^{-1}$

c) $(\rho\cap\rho')^{-1} = \rho^{-1}\cap\rho'^{-1}$ $\quad (\rho\cup\rho')^{-1} = \rho^{-1}\cup\rho'^{-1}$

d) $\sigma\circ(\rho\cup\rho') = (\sigma\circ\rho)\cup(\sigma\circ\rho')$ $\quad (\sigma\cup\sigma')\circ\rho = (\sigma\circ\rho)\cup(\sigma'\circ\rho)$

e) $\sigma\circ(\rho\cap\rho^{-1}) \subseteq (\sigma\circ\rho)\cap(\sigma\circ\rho')$ $\quad (\sigma\cap\sigma')\circ\rho \subseteq (\sigma\circ\rho)\cap(\sigma'\circ\rho)$

f) dc $\sigma\subseteq\sigma^*$, $\rho\subseteq\rho'$ $\Rightarrow$ $\sigma\circ\rho\subseteq\sigma'\circ\rho^{-1}$!

b) $(\sigma\circ\rho)^{-1} = (D, A, (S\circ R)^{-1})$ $\quad \rho^{-1}\circ\sigma^{-1} = (D, A, R^{-1}\circ S^{-1})$

Fie $(d, a) \in D\times A$.

$d(\sigma\circ\rho)^{-1}a \Leftrightarrow a(\sigma\circ\rho)d \Leftrightarrow \exists x\in B\cap C$ ai $a\rho x$ și $x\sigma d$

$\Leftrightarrow \exists x\in B\cap C$ ai $x\rho^{-1}a$ și $d\sigma^{-1}x \Leftrightarrow d\rho^{-1}\circ\sigma^{-1}a$

d) $\underbrace{\sigma\circ(\rho\cup\rho')}_{(A,\,D,\,S\circ(R\cup R'))} = \underbrace{(\sigma\circ\rho)\cup(\sigma\circ\rho')}_{(A,\,D,\,(S\circ R)\cup(S\circ R'))}$

$(A, D, S\circ(R\cup R')) = (A, D, (S\circ R)\cup(S\circ R'))$

Fie $(a,d)\in A\times D$.

$a\,\sigma\circ(\rho\cup\rho')\,d \Leftrightarrow \exists x\in B\cap C$ ai $a\rho\cup\rho^{-1}x$ și $x\sigma d$. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists x\in B\cup C$ ai $(a\rho x$ sau $a\rho^{-1}x)$ și $x\sigma d$.

$\Leftrightarrow \exists x\in B\cup C$ ai $(a\rho x$ și $x\sigma d)$ sau $(a\rho^{-1}x$ și $x\sigma d)$

$\Leftrightarrow \exists x\in B\cup C$ ai $(a\rho x$ și $x\sigma d)$ sau $\exists x\in B\cup C$ $(a\rho^{-1}x$ și $x\sigma d)$

$\Leftrightarrow$ $a\,\sigma\circ\rho\,d$ sau $a\,\sigma\circ\rho^{-1}d \Leftrightarrow a\,(\sigma\circ\rho)\cup(\sigma\circ\rho^{-1})\,d$.

e) $\sigma\circ(\rho\cap\rho')\subseteq(\sigma\circ\rho)\cap(\sigma\circ\rho')$

$(\sigma\cap\sigma')\circ\rho\subseteq(\sigma\circ\rho)\cap(\sigma'\circ\rho)$

f) dacă $\sigma\subseteq\sigma'$, $\rho\subseteq\rho'$ atunci $\sigma\circ\rho\subseteq\sigma'\circ\rho'$.

e) $\rho\cap\rho'=(A,B,R\cap R')$

$\sigma\circ(\rho\cap\rho')=(\underline{A},\underline{\underline{D}},S\circ(R\cap R'))$

$\left.\begin{aligned}\sigma\circ\rho&=(A,D,S\circ R)\\ \sigma\circ\rho'&=(A,D,S\circ R')\end{aligned}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow(\sigma\circ\rho)\cap(\sigma\circ\rho')=(\underline{A},\underline{\underline{D}},(S\circ R)\cap(S\circ R'))$

Rămâne să demonstrăm că $S\circ(R\cap R')\subseteq(S\circ R)\cap(S\circ R')$

Fie $a\in A$, $d\in D$ a.î. $a\,\sigma\circ(\rho\cap\rho')\,d\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\exists\, x\in B\cap C$ aî $a\,\rho\cap\rho'\,x$ și $x\,\sigma\,d\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\exists\, x\in B\cap C$ aî $(a\,\rho\,x$ și $a\,\rho'\,x)$ și $x\,\sigma\,d\xLeftrightarrow[\text{idemp. și comut. și}]{\text{asoc. și}}$

$\Leftrightarrow\exists\, x\in B\cap C$ aî $(a\,\rho\,x$ și $x\,\sigma\,d)$ și $(a\,\rho'\,x$ și $x\,\sigma\,d)\Rightarrow$

$\overset{!}{\Rightarrow}(\exists\, x\in B\cap C$ aî $a\,\rho\,x$ și $x\,\sigma\,d)$ și $(\exists\, x\in B\cap C$ aî $a\,\rho'\,x$ și $x\,\sigma\,d)\Leftrightarrow a\,\sigma\circ\rho\,d$ și $a\,\sigma\circ\rho'\,d\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\,(\sigma\circ\rho)\cap(\sigma\circ\rho')\,d$.

A doua incluziune de demonstrat este similară.

„$\overset{!}{\Rightarrow}$" = acolo merge doar implicația, reciproca nu are loc și de acolo avem doar incluziune.

f) dacă $\sigma \subseteq \sigma'$ și $\rho \subseteq \rho'$, atunci $\sigma \circ \rho \subseteq \sigma' \circ \rho'$.

<u>Soluție:</u>

Știm $\sigma \subseteq \sigma' \Rightarrow S \subseteq S'$
$\rho \subseteq \rho' \Rightarrow R \subseteq R'$

$\sigma \circ \rho = (\underline{A}, \underline{D}, S \circ R)$
$\sigma' \circ \rho' = (\underline{A}, \underline{D}, S' \circ R')$
Rămâne să demonstrăm că $S \circ R \subseteq S' \circ R'$

Fie $a \in A$, $d \in D$ a.î. $a\, \sigma \circ \rho\, d \Rightarrow \exists\, x \in B \cap C$ a.î. $a \rho x$ și $x \sigma d$

$a \rho x$ și $\rho \subseteq \rho' \Rightarrow a \rho' x$
$x \sigma d$ și $\sigma \subseteq \sigma' \Rightarrow x \sigma' d$
$\Rightarrow a\, \sigma' \circ \rho'\, d$.

$\square$.