SEMINAR 11

1) Fie $p \in \mathbb{N}$ un număr prim. Să se arate că operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire înzestrează pe

$$V = \{a + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

cu o structură de $\mathbb{Q}$-spaţiu vectorial şi să se determine o bază şi dimensiunea acestui spaţiu vectorial.

2) Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune $n \in \mathbb{N}^*$ şi A, B subspaţii ale lui V. Să se arate că dacă $\dim A = n - 1$ şi $B \nsubseteq A$ atunci

$$\dim(A \cap B) = \dim B - 1 \text{ şi } A + B = V.$$

3) Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită şi A, B subspaţii ale lui V care verifică egalitatea

$$\dim(A + B) = \dim(A \cap B) + 1.$$

Să se arate că $A \subseteq B$ sau $B \subseteq A$.

4) Fie f şi g endomorfisme ale unui K-spaţiu vectorial V de dimensiune finită. Dacă $f + g$ este un automorfism al lui V şi $f \circ g$ este endomorfismul nul atunci

$$\dim V = \dim f(V) + \dim g(V).$$

5) În $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideră subspaţiile generate astfel:
a) $S = \langle u_1, u_2 \rangle$, cu $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1, 1)$,
$T = \langle v_1, v_2 \rangle$, cu $v_1 = (0, 0, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0)$;
b) $S = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, cu $u_1 = (1, 2, -1, -2)$, $u_2 = (3, 1, 1, 1)$, $u_3 = (-1, 0, 1, -1)$,
$T = \langle v_1, v_2 \rangle$, cu $v_1 = (-1, 2, -7, -3)$, $v_2 = (2, 5, -6, -5)$.
Găsiţi câte o bază şi dimensiunea pentru fiecare dintre subspaţiile S, T, $S + T$ şi $S \cap T$.

6) În $\mathbb{Q}$-spaţiul vectorial $\mathbb{Q}^3$ considerăm vectorii

$$a = (-2, 1, 3),\ b = (3, -2, -1),\ c = (1, -1, 2),\ d = (-5, 3, 4),\ e = (-9, 5, 10).$$

Are loc egalitatea $\langle a, b \rangle = \langle c, d, e \rangle$?