Seminar 2

Ecuaţii diferenţiale de ordinul 2 rezolvabile

2.1 Ecuaţii de forma $y''(x) = f(x)$

Cea mai simplă ecuaţie diferenţială de ordinul 2 este ecuaţia de forma

$$y''(x) = f(x) \tag{2.1}$$

unde f este funcţie continuă. Soluţia generală se obţine integrând de două ori ecuaţia, după fiecare integrare adăugându-se câte o constantă de integrare.

Expresia soluţiei generale este:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)(x-s)ds + c_1(x-x_0) + c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

Exerciţiul 2.1.1 *Să se rezolve:*

1. $y'' = x + \cos x + \sin x$;
2. $y'' = \dfrac{1}{x}$;
3. $y'' = \ln x$;
4. $y'' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$;
5. $y'' = xe^x$;
6. $y'' = \dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2}$.

Soluţii:

1. Avem:
$$(y')' = x + \cos x + \sin x$$
deci
$$\begin{aligned} y' &= \int (x + \cos x + \sin x)\, dx + c_1 \\ y' &= \frac{x^2}{2} + \sin x - \cos x + c_1. \end{aligned}$$
şi
$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} + \sin x - \cos x + c_1 \right) dx + c_2$$
de unde obţinem soluţia generală
$$y(x) = \frac{x^3}{2} - \cos x - \sin x + c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Rezolvăm această ecuaţie în ipoteza că $x \in (0, +\infty)$, astfel
$$\begin{aligned} (y')' &= \frac{1}{x} \\ y' &= \int \frac{1}{x} dx + c_1 \\ y' &= \ln x + c_1 \\ y &= \int (\ln x + c_1)\, dx + c_2 = \\ &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$
deci soluţia generală a ecuaţiei este:
$$y(x) = x \ln x - x + c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Soluţia generală: $y(x) = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln x - \frac{3}{4} x^2 + c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

4. Soluţia generală: $y(x) = -\ln(\cos x) + c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

5. Soluţia generală: $y(x) = (x - 2) \cdot e^x + c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

6. Soluţia generală: $y(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2) + c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

2.2 Ecuaţii de forma $y''(x) = f(x, y')$

Acest tip de ecuaţii diferenţiale permite reducerea ordinului cu o unitate prin substituţia:
$$z(x) = y'(x) \tag{2.3}$$

şi astfel se obţine o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi

$$z'(x) = f(x, z(x)).$$

Rezolvarea ecuaţiei $y'' = f(x, y')$ revine la rezolvarea a două ecuaţii diferenţiale:

$$z'(x) = f(x, z(x))$$

dacă aceasta este o ecuaţie rezolvabilă efectiv şi

$$y'(x) = z(x)$$

care este o ecuaţie de forma (2.1).

Exerciţiul 2.2.1 *Să se rezolve:*

1. $xy'' + y' + x = 0$;
2. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$;
3. $y'' - 2y' = -x^2$;
4. $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$;
5. $(1 + x^2)y'' = 2xy'$;
6. $y'\left(1 + (y')^2\right) = ay''$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Soluţii:

1. Facem substituţia $y' = z$, deci $y'' = z'$ şi astfel obţinem ecuaţia

$$xz' + z + x = 0$$

sau după împărţirea prin x a ecuaţiei obţinem

$$z' + \frac{1}{x}z = -1$$

adică o ecuaţie liniară neomogenă de ordinul 1. Aplicăm metoda de rezolvare corespunzătoare. Mai întâi rezolvăm ecuaţia omogenă

$$z' + \frac{1}{x}z = 0$$

adică

$$\begin{aligned} z' &= -\frac{1}{x}z \\ \frac{dz}{dx} &= -\frac{1}{x}z \\ \frac{dz}{z} &= -\frac{1}{x}dx \end{aligned}$$

şi integrăm

$$\begin{aligned}\int \frac{dz}{z} &= -\int \frac{1}{x}dx \\ \ln z &= -\ln x + \ln c\end{aligned}$$

de unde obţinem că soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$z_0(x) = \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Pentru determinarea soluţiei particulare aplicăm metoda variaţiei constantei, adică vom căuta soluţia particulară de forma

$$z_p(x) = \frac{c(x)}{x}$$

şi determinăm funcţia necunoscută $c(x)$ din condiţia ca z_p să fie soluţie a ecuaţiei neomogene, adică

$$z_p' + \frac{1}{x}z_p = -1.$$

Înlocuind, obţinem:

$$\frac{c'(x)}{x} - \frac{c(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{c(x)}{x} = -1$$

adică

$$\begin{aligned}\frac{c'(x)}{x} &= -1 \\ c'(x) &= -x\end{aligned}$$

deci

$$c(x) = -\int x dx = -\frac{x^2}{2},$$

de unde deducem că

$$z_p(x) = \frac{c(x)}{x} = -\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{x}{2}.$$

Astfel, soluţia generală a ecuaţiei liniare neomogene în z este

$$z = z_0 + z_p$$

$$z(x) = \frac{c}{x} - \frac{x}{2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Folosind $z(x)$ determinat, revenim la substituţie şi obţinem că

$$y' = \frac{c_1}{x} - \frac{x}{2},$$

am înlocuit constanta c din expresia lui $z(x)$ cu c_1 deoarece urmează o nouă integrare. Astfel, avem că

$$y = \int \left(\frac{c_1}{x} - \frac{x}{2}\right) dx + c_2$$

de unde deducem expresia soluţiei generale a ecuaţiei în y

$$y(x) = c_1 \cdot \ln|x| - \frac{x^2}{4} + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Observăm că ecuaţia poate fi scrisă în forma

$$y'' = \frac{y'}{x} \ln \frac{y'}{x}.$$

Dacă facem substituţia $y' = z$ vom obţine o ecuaţie omogenă în sens Euler şi vom fi nevoiţi să mai facem încă o substituţie de forma $u = \frac{z}{x}$ care să ne conducă la o ecuaţie cu variabile separabile. Pentru a reduce volumul de calcul putem combina cele două substituţii, adică, în acest caz, vom nota

$$z = \frac{y'}{x}$$

de unde deducem

$$y' = xz \Longrightarrow y'' = z + xz'.$$

Înlocuind în ecuaţie vom avea

$$z + xz' = z \ln z$$

adică obţinem

$$z' = \frac{z \cdot (\ln z - 1)}{x},$$

o ecuaţie cu variabile separabile

$$z' = f(x) \cdot g(z)$$

în care $f(x) = \frac{1}{x}$ şi $g(z) = z \cdot (\ln z - 1)$. Studiul existenţei soluţiilor singulare ne conduce la ecuaţia

$$g(z) = 0 \Longrightarrow z \cdot (\ln z - 1) = 0$$

adică $z = 0$ şi $z = \dot{e}$. Soluţia $z = 0$ nu convine deoarece funcţia ln nu este definită în 0, deci soluţia singulară este

$$z(x) \equiv e.$$

Rezolvăm ecuaţia în z cu variabile separabile

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{z \cdot (\ln z - 1)}{x} \\ \frac{dz}{z \cdot (\ln z - 1)} &= \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{z \cdot (\ln z - 1)} &= \int \frac{1}{x} dx \\ \ln(\ln z - 1) &= \ln x + \ln c \end{aligned}$$

Având în vedere că în membrul stâng am obţinut un ln am utilizat ca şi constantă de integrare $\ln c$. Astfel, deducem

$$\begin{aligned} \ln z - 1 &= cx \\ \ln z &= cx + 1 \end{aligned}$$

de unde obţinem soluţia generală

$$z(x) = e^{cx+1}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Se observă că prin artificiul de calcul utilizat am inclus şi soluţia singulară $z(x) \equiv e$ în expresia soluţiei generale, aceasta putând fi obţinută pentru constanta $c = 0$.

Pentru determinarea soluţiei corespunzătoare ecuaţiei în y revenim la substituţia utilizată

$$y' = xz,$$

deci

$$y' = xe^{c_1x+1},$$

unde am înlocuit constanta c din expresia lui $z(x)$ cu c_1. Astfel, avem că

$$y = \int xe^{c_1x+1}dx + c_2.$$

Pentru a calcula această integrală trebuie să considerăm două cazuri: $c_1 = 0$ şi $c_1 \neq 0$. Cazul $c_1 = 0$ corespunde soluţiei singulare $z(x) \equiv e$, faptul ca am introdus soluţia singulară în expresia soluţiei generale a ecuaţiei în z nu ne ajută în determinarea soluţiei corespunzătoare ecuaţiei în y din cauza formei integralei, va trebui să le tratăm separat.

Dacă $c_1 = 0$ atunci

$$y = \int x \cdot e \cdot dx + c_2 = e \cdot \frac{x^2}{2} + c_2$$

adică

$$y(x) = e \cdot \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

este soluţie singulară a ecuaţiei în y.

Dacă $c_1 \neq 0$ atunci

$$\begin{aligned} y &= \int xe^{c_1x+1}dx + c_2 = \frac{1}{c_1}\int x \cdot \left(e^{c_1x+1}\right)' dx + c_2 \\ &= \frac{1}{c_1} \cdot x \cdot e^{c_1x+1} - \frac{1}{c_1}\int e^{c_1x+1}dx + c_2 \\ &= \frac{1}{c_1} \cdot x \cdot e^{c_1x+1} - \frac{1}{c_1^2}e^{c_1x+1} + c_2 \end{aligned}$$

deci soluţia generală a ecuaţiei este

$$y(x) = \frac{1}{c_1} \cdot x \cdot e^{c_1x+1} - \frac{1}{c_1^2}e^{c_1x+1} + c_2, \ c_1 \in \mathbb{R}^*, \ c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Soluţia generală: $y(x) = \frac{1}{2}c_1e^{2x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

4. Soluţia generală: $y(x) = -\frac{x}{c_1} + \left(1 + \frac{1}{c_1^2}\right)\ln|1 + c_1x| + c_2$, $c_1 \in \mathbb{R}^*$, $c_2 \in \mathbb{R}$, şi $y(x) = -\frac{x^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$, $(c_1 = 0)$.

5. Soluţia generală: $y(x) = c_1 \left(\frac{x^3}{3} + x\right) + c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

6. Soluţia generală: $y(x) = \arcsin\left(c_1 e^{\frac{x}{a}}\right) + c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2.3 Ecuaţii liniare cu coeficienţi constanţi

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constanţi este:

$$y'' + ay' + by = f(x), \tag{2.4}$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$. Ecuaţia (2.4) este ecuaţia liniară neomogenă, iar ecuaţia

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{2.5}$$

este ecuaţia liniară omogenă.

În cazul ecuaţiei liniare omogene cu coeficienţi constanţi, sistemul fundamental de soluţii se construieşte cautând soluţii de forma $y(x) = e^{rx}$, astfel se obţine **ecuaţia caracteristică** ataşată ecuaţiei liniare omogene:

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{2.6}$$

Algoritmul de determinare a soluţiei generale pentru ecuaţia liniară omogenă:

Pasul 1. Se ataşează ecuaţiei diferenţiale liniare omogene (2.5) ecuaţia caracteristică (2.6).

Pasul 2. Se determină rădăcinile ecuaţiei caracteristice (2.6).

Pasul 3. Fiecărei rădăcini r_1 şi r_2 i se ataşează funcţiile y_1 şi y_2 în modul următor:

(a) dacă r_1 şi r_2 sunt reale astfel încât $r_1 \neq r_2$ (cazul $\Delta > 0$) atunci:

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \text{ şi } y_2(x) = e^{r_2 x}$$

(b) dacă r_1 şi r_2 sunt reale astfel încât $r_1 = r_2$ (cazul $\Delta = 0$) atunci:

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \text{ şi } y_2(x) = x e^{r_1 x}$$

(c) dacă r_1 şi r_2 sunt complexe, $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ (cazul $\Delta < 0$) atunci:

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ şi } y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Pasul 4. Se scrie soluţia generală de forma:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

În cazul ecuaţiei liniare neomogene cu coeficienţi constanţi, soluţia generală este de forma:

$$y\left(x\right)=y_{0}\left(x\right)+y_{p}\left(x\right),$$

unde y_0 este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene (se determină folosind algoritmul anterior), iar y_p este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene (se determină prin metoda variaţiei constantei sau în cazuri speciale pentru funcţia f prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi).

Cazuri speciale de determinare a lui y_p:

Cazul I. Dacă $f\left(x\right)=P_{m}\left(x\right)$ atunci:

(a) dacă $b\neq 0$ atunci $y_{p}\left(x\right)=Q_{m}\left(x\right)$;

(b) dacă $b=0$ şi $a\neq 0$ atunci $y_{p}\left(x\right)=xQ_{m}\left(x\right)$;

Cazul II. Dacă $f\left(x\right)=e^{rx}P_{m}\left(x\right)$ atunci:

(a) dacă r nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice (2.6) atunci:

$$y_{p}\left(x\right)=e^{rx}Q_{m}\left(x\right)$$

(b) dacă r este rădăcină a ecuaţiei caracteristice (2.6) cu ordinul de multiplicitate μ atunci:

$$y_{p}\left(x\right)=x^{\mu}e^{rx}Q_{m}\left(x\right)$$

Cazul III. Dacă $f\left(x\right)=e^{\alpha x}P_{m}\left(x\right)\cos\beta x$ sau $f\left(x\right)=e^{\alpha x}P_{m}\left(x\right)\sin\beta x$ atunci:

(a) dacă $\alpha+i\beta$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice (2.6) atunci:

$$y_{p}\left(x\right)=e^{\alpha x}\left[Q_{m}\left(x\right)\cos\beta x+R_{m}\left(x\right)\sin\beta x\right]$$

(b) dacă $\alpha+i\beta$ este rădăcină a ecuaţiei caracteristice (2.6) atunci:

$$y_{p}\left(x\right)=xe^{\alpha x}\left[Q_{m}\left(x\right)\cos\beta x+R_{m}\left(x\right)\sin\beta x\right]$$

Observaţia 2.3.1 (Principiul superpoziţiei) *Dacă funcţia f apare ca sumă de două funcţii*

$$f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)+f_{2}\left(x\right)$$

astfel încât f_1, respectiv f_2 se încadrează într-unul din cazurile speciale de determinare a soluţiei particulare y_p atunci putem aplica principiul superpoziţiei pentru determinarea soluţiei particulare, adică soluţia particulară y_p a ecuaţiei neomogene

$$y''+ay'+by=f_{1}\left(x\right)+f_{2}\left(x\right)$$

este de forma

$$y_{p}=y_{p1}+y_{p2}$$

unde y_{p1} este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene

$$y''+ay'+by=f_{1}\left(x\right)$$

şi y_{p2} este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene

$$y''+ay'+by=f_{2}\left(x\right).$$

Demonstraţie. Întradevăr

$$\begin{aligned} y_p'' + ay_p' + by_p &= (y_{p1} + y_{p2})'' + a\,(y_{p1} + y_{p2})' + b\,(y_{p1} + y_{p2}) \\ &= y_{p1}'' + ay_{p1}' + by_{p1} + y_{p2}'' + ay_{p2}' + by_{p2} \\ &= f_1\,(x) + f_2\,(x) \end{aligned}$$

■

Exerciţiul 2.3.1 *Să se determine soluţiile generale corespunzătoare următoarelor ecuaţii diferenţiale:*

1. $y'' - y = 0;$
2. $y'' + 2y' + y = 0;$
3. $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2;$
4. $y'' + 3y' + 2y = e^x;$
5. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x} + 2x + 4;$
6. $y'' + y' - 2y = 10\sin 2x;$
7. $y'' - 3y' + 2y = 3e^x + 10\sin x;$
8. $y'' + y = 4xe^{-x} + 2\cos x;$

Soluţii:
Rezolvările complete sunt date pentru exerciţiile *1.*, *3.* şi *5.*

1. Avem ecuaţia liniară omogenă cu coeficienţi constanţi

$$y'' - y = 0.$$

Ecuaţia caracteristică ataşată este

$$r^2 - 1 = 0$$

cu soluţiile

$$r_{1,2} = \pm 1.$$

Pornind de la rădăcinile ecuaţiei caracteristice construim sistemul fundamental de soluţii

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 \longmapsto y_1\,(x) = e^x, \\ r_2 &= -1 \longmapsto y_2\,(x) = e^{-x}. \end{aligned}$$

Cum ecuaţia este una omogenă, atunci soluţia generală a ecuaţiei este

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

adică

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Soluţia generală: $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3. În acest caz ecuaţia
$$y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$$
este una liniară neomogenă.

Mai întâi determinăm soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene ataşate
$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$
Ecuaţia caracteristică este
$$r^2 - 5r + 6 = 0$$
cu rădăcinile
$$r_1 = 2, \quad r_2 = 3.$$
Astfel, sistemul fundamental de soluţii este de forma
$$\begin{aligned} r_1 &= 2 \longmapsto y_1(x) = e^{2x}, \\ r_2 &= 3 \longmapsto y_2(x) = e^{3x}, \end{aligned}$$
deci soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene este
$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$
adică
$$y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Pentru determinarea soluţiei particulare corespunzătoare ecuaţiei liniare neomogene aplicăm metoda coeficienţilor nedeterminaţi. Observăm că
$$f(x) = 6x^2 - 10x + 2 = P_2(x)$$
adică $f(x)$ este un polinom de gradul 2 în x, cum termenul y apare în ecuaţie suntem în Cazul I-a., deci ecuaţia neomogenă va admite ca soluţie particulară o funcţie polinom de gradul 2. Astfel căutăm $y_p(x)$ de forma
$$y_p(x) = Q_2(x) = ax^2 + bx + c$$
şi determinăm parametrii a, b, $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $y_p(x)$ să fie soluţie a ecuaţiei neomogene, adică
$$y_p'' - 5y_p' + 6y_p = 6x^2 - 10x + 2.$$
Calculăm derivatele lui y_p
$$\begin{aligned} y_p(x) &= ax^2 + bx + c, \\ y_p'(x) &= 2ax + b \\ y_p''(x) &= 2a \end{aligned}$$
şi înlocuim în ecuaţie
$$2a - 5(2ax + b) + 6\left(ax^2 + bx + c\right) = 6x^2 - 10x + 2$$

de unde obţinem

$$6ax^2 + (-10a + 6b) \cdot x + 2a - 5b + 6c = 6x^2 - 10x + 2.$$

Cum relaţia obţinută trebuie să fie o identitate, obţinem că

$$\begin{cases} 6a &= 6 \\ -10a + 6b &= -10 \\ 2a - 5b + 6c &= 2 \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} a &= 1 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \end{cases}$$

deci

$$y_p(x) = x^2.$$

Astfel, soluţia generală a ecuaţiei neomogene este

$$y = y_0 + y_p$$

adică

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + x^2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Soluţia generală: $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \dfrac{1}{6} e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

5. Ecuaţia liniară

$$y'' + 2y' + 2y = xe^{-x} + 2x + 4$$

este una neomogenă.

Mai întâi determinăm soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene ataşate

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Ecuaţia caracteristică este

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

cu rădăcinile

$$r_{1,2} = -1 \pm i.$$

Sistemul fundamental de soluţii în acest caz este de forma

$$r_{1,2} = -1 \pm i \longmapsto y_1(x) = e^{-x} \cos x \text{ şi } y_2(x) = e^{-x} \sin x$$

deci soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene este

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

adică

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pentru determinarea soluţiei particulare a ecuaţiei neomogene vom aplica metoda coeficienţilor nedeterminaţi combinată cu principiul superpoziţiei. Observăm că funcţia $f(x)$ este de forma

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

unde

$$\begin{aligned} f_1(x) &= xe^{-x}, \\ f_2(x) &= 2x + 4. \end{aligned}$$

Căutăm soluţia particulară y_p de forma

$$y_p = y_{p1} + y_{p2}$$

unde y_{p1} este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene

$$y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$$

şi y_{p2} este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene

$$y'' + 2y' + 2y = 2x + 4.$$

Funcţia f_1 este de forma

$$f_1(x) = P_1(x)\, e^{-x},$$

adică, se încadrează în Cazul II-a, deci căutăm y_{p1} de forma

$$y_{p1}(x) = Q_1(x) \cdot e^{-x} = (ax + b)\, e^{-x}.$$

Calculăm derivatele lui y_{p1}:

$$\begin{aligned} y_{p1}(x) &= (ax + b)\, e^{-x}, \\ y'_{p1}(x) &= ae^{-x} - (ax + b)\, e^{-x} = (-ax + a - b)\, e^{-x} \\ y''_{p1}(x) &= -ae^{-x} - (-ax + a - b)\, e^{-x} = (ax - 2a + b)\, e^{-x} \end{aligned}$$

şi înlocuind în ecuaţia neomogenă

$$y''_{p1} + 2y'_{p1} + 2y_{p1} = xe^{-x}$$

obţinem

$$(ax + bax - 2a + b)\, e^{-x} + 2(-ax + a - b)\, e^{-x} + 2(ax + b)\, e^{-x} = xe^{-x}$$

adică avem egalitatea

$$ax + b = x$$

deci

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

şi astfel deducem că
$$y_{p1}(x) = xe^{-x}.$$
Pentru determinarea lui y_{p2} observăm că funcţia f_2 este de forma
$$f_2(x) = P_1(x),$$
adică, se încadrează în Cazul I-a, deci căutăm y_{p2} de forma
$$y_{p2}(x) = Q_1(x) = ax + b.$$
Calculăm derivatele lui y_{p1}:
$$\begin{aligned} y_{p2}(x) &= ax + b, \\ y'_{p2}(x) &= a \\ y''_{p2}(x) &= 0 \end{aligned}$$
şi înlocuind în ecuaţia neomogenă
$$y''_{p2} + 2y'_{p2} + 2y_{p2} = 2x + 4$$
obţinem
$$2a + 2(ax + b) = 2x + 4$$
adică avem egalitatea
$$2ax + 2a + b = 2x + 4$$
deci
$$\begin{cases} 2a &= 2 \\ 2a + b &= 4 \end{cases}$$
adică
$$\begin{cases} a &= 1 \\ b &= 2 \end{cases}$$
şi astfel deducem că
$$y_{p2}(x) = x + 2.$$
Prin urmare o soluţie particulară a ecuaţie neomogene
$$y'' + 2y' + 2y = xe^{-x} + 2x + 4$$
este
$$y_p = y_{p1} + y_{p2}$$
adică
$$y_p(x) = xe^{-x} + x + 2,$$
iar soluţia generală este
$$y = y_0 + y_p$$
adică
$$y(x) = c_1e^{-x}\cos x + c_2e^{-x}\sin x + xe^{-x} + x + 2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

6. Soluţia generală: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \dfrac{1}{2}\cos(2x) - \dfrac{3}{2}\sin(2x)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

7. Soluţia generală: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 3xe^x + \sin x + 3\cos x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

8. Soluţia generală: $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (2x+2)\, e^{-x} + x \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Temă:

- Rezolvaţi punctele *3.*, *4.* de la Exerciţiul 2.1.1
- Rezolvaţi punctele *3.*, *4.*, *5.* de la Exerciţiul 2.2.1
- Rezolvaţi punctele *2.*, *4.*, *7.* de la Exerciţiul 2.3.1

Pentru a bifa prezenţa la Seminarul 2 trebuie să rezolvaţi exerciţiile propuse ca temă. Scrieţi rezolvările pe foi, scanaţi sau pozaţi foile (format pdf sau jpg) şi trimiteţi fişierele prin email cadrului didactic ce ţine seminarul la grupa voastră până cel târziu în data de 20 Martie 2020, ora 14.00.

Adrese email:
Marcel Şerban: mserban@math.ubbcluj.ro
Mădălina Moga: madalina.moga@math.ubbcluj.ro
Radu Truşcă: radu.trusca@math.ubbcluj.ro