8.5 Probleme care se rezolvă în reper cartezian general

Problema 8.5.1 *(Teorema lui Menelaus) Fie ABC un triunghi oarecare şi A', B', C' trei puncte coliniare distincte astfel ca $A' \in BC$, $B' \in CA$ şi $C' \in AB$. Atunci are loc relaţia:*

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

şi reciproc, dacă punctele A', B', C' situate pe dreptele BC, CA, AB astfel încât două dintre ele sunt în interiorul laturilor triunghiului şi celălalt pe prelungirea celei de-a treia laturi, sau toate trei pe prelungirile laturilor şi are loc relaţia

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

atunci cele trei puncte sunt coliniare.

Demonstraţie.

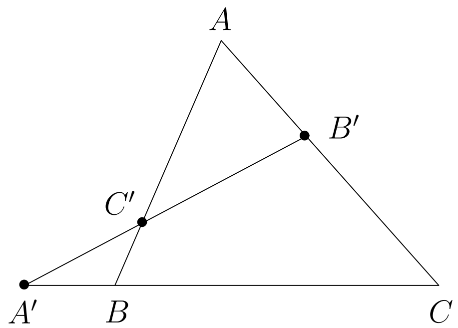

Figura 8.5

Considerăm reperul cartezian general $\mathcal{R} = \{B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\}$. Atunci $B(0,0)$, $C(1,0)$, $A(0,1)$. Notăm

$$\frac{A'B}{A'C} = \alpha, \quad \frac{B'C}{B'A} = \beta, \quad \frac{C'A}{C'B} = \gamma \;\Rightarrow$$

$$\frac{A'B}{BC} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{A'B} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \overrightarrow{BC} \;\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{BA'} = \frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \overrightarrow{BC} \;\Rightarrow\; A'\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}, 0\right)$$

$$\frac{B'C}{B'A} = \beta \;\Rightarrow\; B'\left(\frac{1+\beta\cdot 0}{1+\beta}, \frac{0+\beta\cdot 1}{1+\beta}\right) \;\Leftrightarrow\; B'\left(\frac{1}{1+\beta}, \frac{\beta}{1+\beta}\right)$$

$$\frac{C'A}{C'B} = \gamma \;\Leftrightarrow\; \frac{BA}{C'B} = \gamma + 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{BC'}{BA} = \frac{1}{\gamma+1} \;\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{BC'} = \frac{1}{\gamma+1}\overrightarrow{BA} \;\Leftrightarrow\; C'\left(0, \frac{1}{\gamma+1}\right)$$

$$A', B', C' \text{ coliniare } \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} \dfrac{\alpha}{\alpha-1} & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{\gamma+1} & 1 \\ \dfrac{1}{1+\beta} & \dfrac{\beta}{1+\beta} & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\alpha}{\alpha-1} & 0 & 1 \\ \dfrac{\alpha}{1-\alpha} & \dfrac{1}{\gamma+1} & 0 \\ \dfrac{1}{1+\beta} - \dfrac{\alpha}{\alpha-1} & \dfrac{\beta}{1+\beta} & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\alpha}{1-\alpha} & \dfrac{1}{\gamma+1} \\ \dfrac{\alpha-1-\alpha-\alpha\beta}{(1+\beta)(\alpha-1)} & \dfrac{\beta}{\beta+1} \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{1+\beta} \begin{vmatrix} -\alpha & \dfrac{1}{\gamma+1} \\ -1-\alpha\beta & \beta \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{1+\beta}\left(-\alpha\beta + \frac{1+\alpha\beta}{\gamma+1}\right) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{1+\beta} \cdot \frac{1}{1+\gamma}(-\alpha\beta\gamma - \alpha\beta + 1 + \alpha\beta) = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha\beta\gamma = 1$$

Observaţie. În această configuraţie α nu poate fi 1 iar $\beta, \gamma > 0$ deci nu pot fi -1, aşadar fracţiile care intervin au sens.

Problema 8.5.2 *(Teorema lui Ceva) Fie ABC un triunghi oarecare şi AA', BB', CC' trei drepte concurente, unde $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$. Atunci are loc relaţia:*

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

şi reciproc, dacă punctele $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$ sunt situate toate trei în interiorul laturilor triunghiului ABC sau unul în interiorul unei laturi şi celelalte două pe prelungirile celorlalte două laturi şi are loc relaţia

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1,$$

atunci dreptele AA', BB', CC' sunt concurente (fig.8.6).

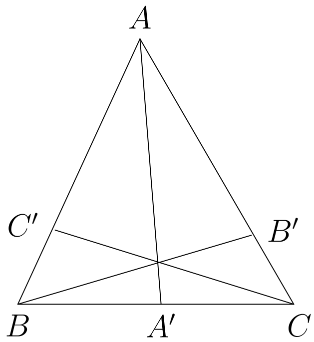

Figura 8.6

Demonstraţie. Fie $\mathcal{R} = \{B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\}$ un reper cartezian general. Atunci $B(0,0)$, $C(1,0)$ şi $A(0,1)$.

Notăm
$$\frac{A'B}{A'C} = \alpha, \quad \frac{B'C}{B'A} = \beta, \quad \frac{C'A}{C'B} = \gamma.$$

Avem:

$$\frac{A'B}{A'C} = \alpha \ \Rightarrow \ \frac{BA'}{BC} = \frac{\alpha}{\alpha+1} \ \Rightarrow \ \overrightarrow{BA'} = \frac{\alpha}{\alpha+1} \cdot \overrightarrow{BC} \ \Rightarrow \ A'\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}, 0\right)$$

$$\frac{C'A}{C'B} = \gamma \ \Rightarrow \ \frac{BA}{BC'} = \gamma+1 \ \Rightarrow \ \overrightarrow{BC'} = \frac{1}{\gamma+1} \cdot \overrightarrow{BA} \ \Rightarrow \ C'\left(0, \frac{1}{\gamma+1}\right)$$

$$\frac{B'C}{B'A} = \beta \Rightarrow B'\left(\frac{1+0\cdot\beta}{1+\beta}, \frac{0+\beta\cdot 1}{1+\beta}\right) \Leftrightarrow B'\left(\frac{1}{1+\beta}, \frac{\beta}{1+\beta}\right)$$

Ecuaţia dreptei AA' este:

$$AA': \frac{x}{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + \frac{y}{1} = 1 \text{ (ecuaţia dreptei prin tăieturi)} \Leftrightarrow$$

$$AA': (\alpha+1)x + \alpha y - \alpha = 0.$$

Ecuaţia dreptei CC' este:

$$CC': \frac{x}{1} + \frac{y}{\frac{1}{\gamma+1}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$CC': x + (\gamma+1)y - 1 = 0$$

Ecuaţia dreptei BB' este:

$$BB': \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{1+\beta} & \frac{\beta}{1+\beta} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y \\ \frac{1}{1+\beta} & \frac{\beta}{1+\beta} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1+\beta}\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & \beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \beta x - y = 0$$

Condiţia de concurenţă a celor trei drepte este

$$\begin{vmatrix} \alpha+1 & \alpha & -\alpha \\ 1 & \gamma+1 & -1 \\ \beta & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Înmulţim a doua linie cu $-\alpha$ şi o adunăm la prima linie. Rezultă

$$\begin{vmatrix} 1 & -\alpha\gamma & 0 \\ 1 & \gamma+1 & -1 \\ \beta & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -1 + \alpha\beta\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

Problema 8.5.3 *(Dreapta lui Newton-Gauss) Fie $ABCDEF$ un patrulater complet. Să se demonstreze că mijloacele diagonalelor AC, BD şi EF sunt coliniare.*

Observaţii. 1) Dreapta determinată de cele trei puncte se numeşte dreapta lui Newton-Gauss.

2) Un patrulater complet este un patrulater oarecare $ABCD$ cu laturile opuse neparalele şi ale căror prelungiri se intersectează în E şi F (fig.8.7).

Demonstraţie.

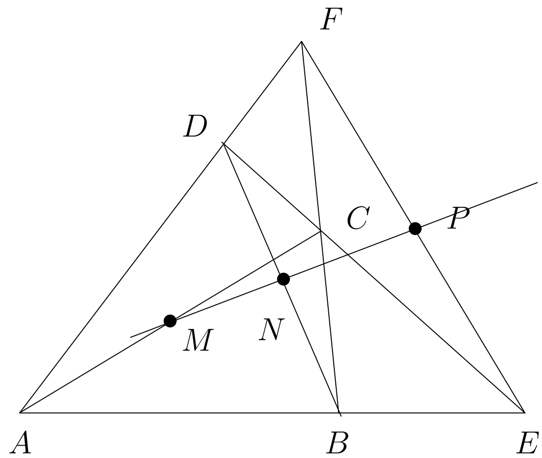

Figura 8.7

Fie reperul cartezian general $\mathcal{R} = \{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$ şi M mijlocul lui AC, N mijlocul lui BD, P mijlocul lui EF. Atunci $A(0,0)$, $B(1,0)$, $D(0,1)$, $E(p,0)$, $F(0,q)$.

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} \ \Rightarrow \ N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AF} \ \Rightarrow \ P\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Vom calcula coordonatele lui C rezolvând sistemul format de ecuaţiile dreptelor BF şi DE. Ecuaţia dreptei BF este:

$$BF: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & q & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & q & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(am scăzut a treia coloană din prima) $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y \\ -1 & q \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow qx + y - q = 0$$

Ecuaţia dreptei DE este:

$$DE: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(am scăzut a treia coloană din a doua) $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x & y-1 \\ p & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + py - p = 0$$

Rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} qx + y - q = 0 \\ x + py - p = 0 \end{cases}$$

obţinem $C\left(\dfrac{p(1-q)}{1-pq}, \dfrac{q(1-p)}{1-pq}\right)$ şi deci $M\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p(1-q)}{1-pq}, \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{q(1-p)}{1-pq}\right)$.

Condiţia de coliniaritate este:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p(1-q)}{1-pq} & \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{q(1-p)}{1-pq} & 1 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 1 \\ \dfrac{p}{2} & \dfrac{q}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

care după un scurt calcul se dovedeşte a fi adevărată.

Problema 8.5.4 *Fie $ABCD$ un paralelogram şi fie punctele $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CD)$ şi $S \in (DA)$ astfel încât $PR \| AD$ şi $QS \| AB$. Să se demonstreze că dreptele PQ şi SR se intersectează într-un punct situat pe diagonala AC sau sunt paralele cu AC (fig.8.8).*

Observaţie. Problema se poate reformula astfel: Să se arate că dreptele PQ, SR şi AC sunt concurente sau paralele.

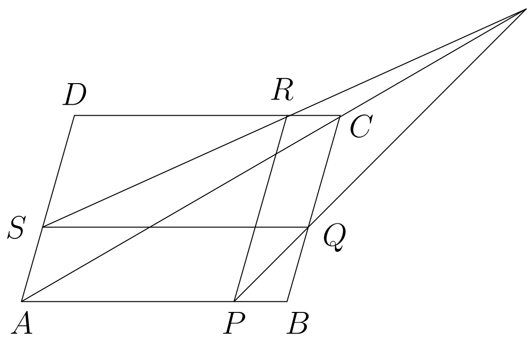

Figura 8.8

Demonstraţie. Considerăm reperul cartezian general $\mathcal{R} = \{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$. Atunci $A(0,0)$, $B(1,0)$, $D(0,1)$, $P(\alpha,0)$, $S(0,\beta)$, $Q(1,\beta)$, $R(\alpha,1)$, $C(1,1)$.

Ecuaţiile celor trei drepte sunt:

$$PQ: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-\beta & 0 \\ \alpha-1 & -\beta & 0 \\ 1 & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-\beta \\ \alpha-1 & -\beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\beta x + \beta - \alpha y + \alpha\beta + y - \beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\beta x + (\alpha - 1)y - \alpha\beta = 0$$

$$SR: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & \beta & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-\alpha & y-1 & 0 \\ -\alpha & \beta-1 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x-\alpha & y-1 \\ -\alpha & \beta-1 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; (\beta-1)x - \alpha\beta + \alpha + \alpha y - \alpha = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$(\beta-1)x + \alpha y - \alpha\beta = 0$$

$$AC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; x - y = 0$$

Condiţia de concurenţă este:

$$\begin{vmatrix} \beta & \alpha-1 & -\alpha\beta \\ \beta-1 & \alpha & -\alpha\beta \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} \beta & \alpha+\beta-1 & -\alpha\beta \\ \beta-1 & \alpha+\beta-1 & -\alpha\beta \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta-1 & -\alpha\beta \\ \alpha+\beta-1 & -\alpha\beta \end{vmatrix} = 0$$

care este evident satisfăcută.

Dacă $PQ \| AC$ atunci $\dfrac{\beta}{1} = \dfrac{\alpha-1}{-1} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{\beta-1}{1} = \dfrac{\alpha}{-1}$ adică şi $SR \| AC$.

Problema 8.5.5 *Fie a şi b două drepte concurente în punctul O şi punctele distincte $A_1, A_2, A_3 \in a$, $B_1, B_2, B_3 \in b$. Să se demonstreze că punctele $C_1 = A_2B_3 \cap A_3B_2$, $C_2 = A_1B_3 \cap A_3B_1$, $C_3 = A_1B_2 \cap A_2B_1$ sunt coliniare. (Teorema lui Pappus)*

Demonstraţie. Se presupune, bineînţeles, că dreptele A_iB_j şi A_jB_i, $i \neq j$, nu sunt paralele, deci punctele C_1, C_2, C_3 există.

Alegem reperul cartezian general $\mathcal{R} = \{O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$ unde A şi B sunt două puncte oarecare pe a respectiv b. Atunci $A_1(a_1, 0)$, $A_2(a_2, 0)$, $A_3(a_3, 0)$ şi $B_1(0, b_1)$, $B_2(0, b_2)$, $B_3(0, b_3)$. Coordonatele punctului C_1 se obţin din sistemul:

$$\begin{cases} A_2B_3: \; \dfrac{x}{a_2} + \dfrac{y}{b_3} = 1 \\ \\ A_3B_2: \; \dfrac{x}{a_3} + \dfrac{y}{b_2} = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1\left(\frac{\dfrac{1}{b_2} - \dfrac{1}{b_3}}{\dfrac{1}{a_2b_2} - \dfrac{1}{a_3b_3}}, \frac{\dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{a_3}}{\dfrac{1}{a_2b_2} - \dfrac{1}{a_3b_3}} \right).$$

Analog:

$$C_2\left(\frac{\frac{1}{b_3}-\frac{1}{b_1}}{\frac{1}{a_3b_3}-\frac{1}{a_1b_1}}, \frac{\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_1}}{\frac{1}{a_3b_3}-\frac{1}{a_1b_1}}\right) \quad \text{şi}$$

$$C_3\left(\frac{\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_2}}{\frac{1}{a_1b_1}-\frac{1}{a_2b_2}}, \frac{\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}}{\frac{1}{a_1b_1}-\frac{1}{a_2b_2}}\right).$$

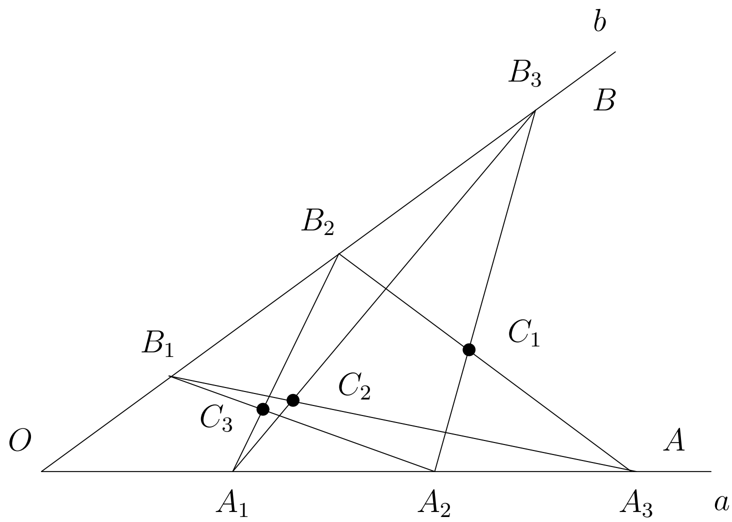

Figura 8.9

Condiţia de coliniaritate este:

$$\begin{vmatrix} x_{C_1} & y_{C_1} & 1 \\ x_{C_2} & y_{C_2} & 1 \\ x_{C_3} & y_{C_3} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

În cazul nostru determinantul din membrul stâng este:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\dfrac{1}{b_2}-\dfrac{1}{b_3}}{\dfrac{1}{a_2b_2}-\dfrac{1}{a_3b_3}} & \dfrac{\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3}}{\dfrac{1}{a_2b_2}-\dfrac{1}{a_3b_3}} & 1 \\ \dfrac{\dfrac{1}{b_3}-\dfrac{1}{b_1}}{\dfrac{1}{a_3b_3}-\dfrac{1}{a_1b_1}} & \dfrac{\dfrac{1}{a_3}-\dfrac{1}{a_1}}{\dfrac{1}{a_3b_3}-\dfrac{1}{a_1b_1}} & 1 \\ \dfrac{\dfrac{1}{b_1}-\dfrac{1}{b_2}}{\dfrac{1}{a_1b_1}-\dfrac{1}{a_2b_2}} & \dfrac{\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}}{\dfrac{1}{a_1b_1}-\dfrac{1}{a_2b_2}} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\left(\dfrac{1}{a_1b_1}-\dfrac{1}{a_2b_2}\right)\left(\dfrac{1}{a_2b_2}-\dfrac{1}{a_3b_3}\right)\left(\dfrac{1}{a_3b_3}-\dfrac{1}{a_1b_1}\right)}\cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \dfrac{1}{b_2}-\dfrac{1}{b_3} & \dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3} & \dfrac{1}{a_2b_2}-\dfrac{1}{a_3b_3} \\ \dfrac{1}{b_3}-\dfrac{1}{b_1} & \dfrac{1}{a_3}-\dfrac{1}{a_1} & \dfrac{1}{a_3b_3}-\dfrac{1}{a_1b_1} \\ \dfrac{1}{b_1}-\dfrac{1}{b_2} & \dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2} & \dfrac{1}{a_1b_1}-\dfrac{1}{a_2b_2} \end{vmatrix} = 0$$

pentru că dacă adunăm a doua şi a treia linie la prima linie, aceasta devine nulă.

8.6 Probleme rezolvate în reper cartezian ortonormat

Problema 8.6.1 *Într-un reper ortogonal xOy se consideră punctele $A(-a,0)$, $B(a,0)$, $(a>0)$ şi dreptele $d_1 \perp Ox$ în A şi $d_2 \perp Ox$ în*