136. Se cere ecuația cercului determinat de punctele $A(-4, 0)$, $B(4, 4)$ și originea axelor.

$[x^2 + y^2 + 4x - 12y = 0.]$

137. Se dau punctele $A(-1, 4)$, $B(3, -2)$. Să se scrie ecuația cercului care are pe AB ca diametru.

[Se determină centrul și raza; $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$.]

138. Se dau punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Să se scrie ecuația cercului cu diametrul AB.

[Generalizarea problemei precedente. $x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y + x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.]

139. Să se scrie ecuația cercului care trece prin origine și este tangent dreptei $x + 2 = 0$, în punctul $(-2, -3)$.

$$\left[a = \lambda,\ b = -3,\ r = \lambda + 2.\ \text{Se găsește}\ \lambda = \frac{5}{4};\ x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x + 6y = 0.\right]$$

140. Să se scrie ecuația cercului tangent axei Ox în origine și care trece prin punctul $A\,(\sqrt{3}, -3)$. Să se determine centrul și raza.

$[x^2 + y^2 + 4y = 0.\ C(0, -2),\ r = 2.]$

B. Elipsa

8. **Definiție.** *Elipsa este locul geometric al punctelor care au suma distanțelor la două puncte fixe constantă.*

Punctele fixe se numesc *focare* și se notează cu F și F'. Dacă M este un punct curent pe elipsă, distanțele FM, $F'M$ poartă numele de *raze vectoare*.

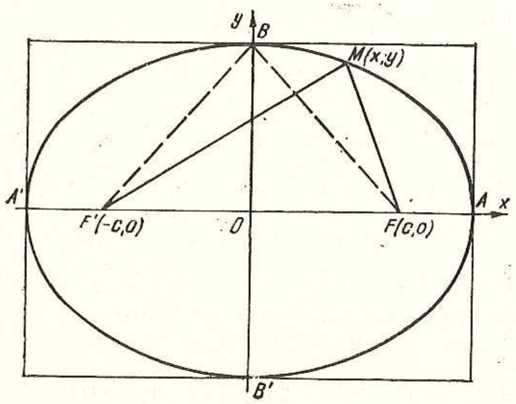

Fig. 34

Potrivit definiției, relația geometrică pe care o satisface punctul M este

$$MF + MF' = 2a\ \text{(constant)}. \tag{13}$$

Pentru a găsi *ecuația elipsei* este de ajuns să transformăm analitic această relație. Alegem pe FF' ca axă Ox și mediatoarea segmentului FF' ca axă Oy (fig. 34). Se notează $FF' = 2c$,

prin urmare $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$; iar punctul curent M are coordonatele (x, y). Relația (13) devine

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \tag{14}$$

Ecuația curbei trebuie dată însă sub formă rațională. De aceea izolăm un radical și ridicăm la pătrat. Obținem

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2$$

sau, după reduceri de termeni și izolarea radicalului rămas:

$$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + cx. \tag{15}$$

Se ridică din nou la pătrat și se ordonează termenii. În acest fel se obține ecuația

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0. \tag{16}$$

În triunghiul MFF' se știe că $MF + MF' > FF'$ sau $2a > 2c$, deci $a > c$, astfel că $a^2 - c^2 > 0$. Se poate nota prin urmare

$$a^2 - c^2 = b^2 \tag{17}$$

și împărțind în (16) cu a^2b^2 se capătă forma definitivă a ecuației elipsei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{18}$$

Pentru a găsi punctele de intersecție ale curbei cu axele de coordonate facem pe rînd $y = 0$ și $x = 0$. Rezultă $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$ pe Ox și $B(0, b)$, $B'(0, -b)$ pe Oy. $AA' = 2a$ se numește axa mare a elipsei, iar $BB' = 2b$ axa mică. Jumătățile lor, adică $OA = a$ și $OB = b$ sînt semiaxele elipsei. Cînd $M \equiv B$ avem $BF + BF' = 2a$, dar $BF = BF'$, astfel că $BF = a$. Din triunghiul dreptunghic OBF se deduce

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{19}$$

care de fapt este relația (17) interpretată acum geometric.

9. *Forma elipsei.* Din ecuația (18) a elipsei se scoate

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{20}$$

Vom studia numai ramura de curbă $y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, pentru care $y \geqslant 0$. Cealaltă se deduce prin simetrie față de axa Ox.

Forma curbei rezultă din reprezentarea ei grafică. Domeniul de existență este dat de condiția $a^2 - x^2 \geqslant 0$, prin urmare $-a \leqslant x \leqslant a$, deci curba numai între A' și A. Deoarece în (18) x și y se găsesc la puteri pare, curba este simetrică atît în raport cu Ox cît și în raport cu Oy, deci și în raport cu originea. De aici rezultă că este de ajuns să se studieze numai porţiunea de curbă cuprinsă în cadranul 1, adică între O şi A. Derivata pentru funcţia considerată [cu semnul $(+)$] este

$$y' = -\frac{b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \tag{21}$$

Pentru $x > 0$, y' este negativ deci curba descreşte; în plus $y'(0) = 0$ şi $\lim\limits_{x \to a} y'(x) = -\infty$, deci tangenta în B este paralelă cu Ox, iar cea din A paralelă cu Oy. Tabloul de variaţie rezumă acest studiu

x	0		a
$y'(x)$	0	$-$	$-\infty$
y	b	descreşte	0

Reprezentarea grafică este dată, cu completările din celelalte cadrane, în figura 34 şi arată că toată curba este închisă în dreptunghiul format de paralelele la axe duse prin punctele A, A', B, B'. Aceste patru puncte poartă numele de *vîrfurile elipsei*.

Dacă $b = a$, elipsa *devine cerc*, iar *distanţa focală este nulă*.

Ecuaţia elipsei apare sub forma simplă (18) fiindcă s-au ales ca axe de coordonate tocmai axele ei de simetrie. De aceea se zice că (18) reprezintă ecuaţia elipsei, raportată la axele ei.

În cazul cînd elipsa este raportată la axe dreptunghiulare oarecare, ecuaţia rămîne de gradul al II-lea, dar forma nu mai este simplă.

NOTĂ. Profităm de faptul că ştim să efectuăm o translaţie de axe, pentru a arăta care este ecuaţia unei elipse raportate la axe paralele cu axele ei de simetrie. În adevăr, fie xOy un sistem de axe paralele cu axele elipsei şi $x'Oy'$ sistemul de referinţă format din axele elipsei.

Translaţia de axe care aduce pe O în $O'(p, q)$ ne dă relaţiile $x = p + x'$, $y = q + y'$. Ecuaţia elipsei, raportată la axele ei, este

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0,$$

prin urmare faţă de vechile axe xOy va fi

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b} - 1 = 0$$

unde (p, q) sînt coordonatele centrului O' al elipsei faţă de sistemul de axe xOy.

E x e m p l e. a) *Să se determine vîrfurile şi semiaxele elipsei* $2x^2 + 4y^2 - 5 = 0$.

Ecuaţia se scrie $\dfrac{x^2}{\frac{5}{2}} + \dfrac{y^2}{\frac{5}{4}} - 1 = 0$, din care se deduce $a = \sqrt{\dfrac{5}{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$, $b = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Vîrfurile sînt $A\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}, 0\right)$, $A'\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{2}, 0\right)$, $B = \left(0, \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$, $B'\left(0, -\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

b) *Să se determine elementele elipsei* $3x^2 + 5y^2 + 9 = 0$. Din ecuaţia dată se deduce $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{\frac{9}{5}} + 1 = 0$ care seamănă cu ecuaţia elipsei, dar nu poate fi verificată pentru valori reale ale lui x şi y, deoarece suma a trei numere pozitive nu poate fi nulă. Este o *elipsă imaginară*, lucru care se constată dacă vrem să aflăm semiaxele, intersectînd cu $y = 0$ şi cu $x = 0$.

10. 1) *Construcţia elipsei prin mişcare continuă*. Fie F, F' focarele elipsei de construit şi $UV = 2a$ lungimea axei mari. Se înfig în foaia de hîrtie, şi anume în F şi F', două ace, apoi se trece peste ele un fir ale cărui capete s-au înnodat între ele, astfel ca lungimea totală a firului, după ce s-a făcut nodul, să fie $l = FF' + 2a$. Se întinde bine firul cu vîrful unui creion, apoi se mişcă vîrful M al creionului pe foaia de hîrtie (fig. 35). Curba desenată de vîrful creionului M este elipsa cu focarele F, F' şi axa mare $2a$, deoarece $MF + MF' = l - FF' = 2a$.

În acest fel construiesc grădinarii ronduri eliptice de flori, înfigînd în pămînt doi ţăruşi peste care se trece o sfoară întinsă de un al treilea ţăruş mobil care trasează pe teren elipsa.

2) *Construcţia elipsei prin puncte. Metoda I*. Fie F, F' focarele elipsei. Desenăm separat un segment $UV = AA' = 2a$. Cu o deschidere de compas $VR < VU$ tragem un cerc cu centrul în F', iar cu raza RU un alt cerc cu centrul în F (fig. 36). Cele două cercuri se taie în două puncte M şi M'

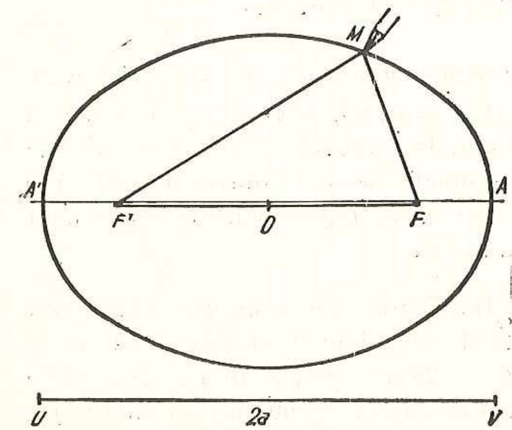

Fig. 35

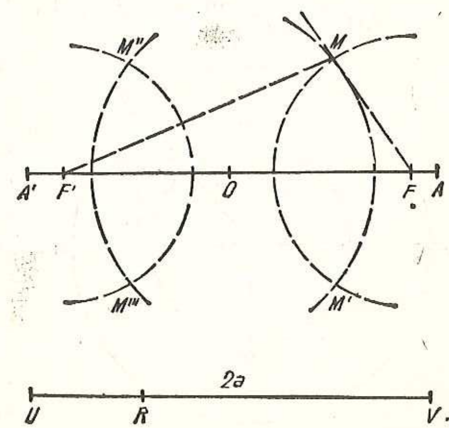

Fig. 36

(simetrice față de AA'), care aparțin elipsei, deoarece $MF + MF' = VR + RU = 2a$.

Schimbînd între ele centrele F și F', ale celor două cercuri, se obțin încă două puncte, simetrice cu primele față de BB'. Se găsesc astfel pentru fiecare punct $R \in UV$ cîte patru puncte ale elipsei. Construim atîtea puncte, cîte sînt necesare pentru a trage curba.

Observare. Dacă nu se cunoaște distanța focală FF', ci axa mare și axa mică, focarele se construiesc pe baza observării pe care am făcut-o că $BF = BF' = a$. Cercul cu centrul în B și cu raza a taie axa mare în punctele F, F', focarele elipsei. De aici încolo construcția se face ca mai înainte.

Metoda a II-a. Presupunem cunoscute axa mare și axa mică, dar nu mai folosim focarele. Să notăm cu y ordonata elipsei și cu Y ordonata cercului de rază a, avînd același centru ca și elipsa. Ținînd seama de relația (20) avem $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, însă din ecuația cercului rezultă $Y = \sqrt{a^2 - x^2}$, prin urmare se poate scrie

$$\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}. \qquad (22)$$

Să ducem acum cercurile concentrice cu razele a și b, apoi doi diametri perpendiculari, unul care taie cercul mare în A și A', al doilea care taie cercul mic în B și B' (fig. 37). Aceste patru puncte sînt vîrfurile elipsei.

O rază variabilă întîlnește cercul mic în P și pe cel mare în Q. Se duce prin P o paralelă la AA' și prin Q o paralelă $QN (N \in AA')$ la BB'. Fie M punctul lor comun. Teorema lui Thales ne dă

$$\frac{NM}{NQ} = \frac{OP}{OQ}, \text{ însă } NQ = Y,\ OP = b,\ OQ = a, \text{ deci } \frac{MN}{Y} = \frac{b}{a}.$$

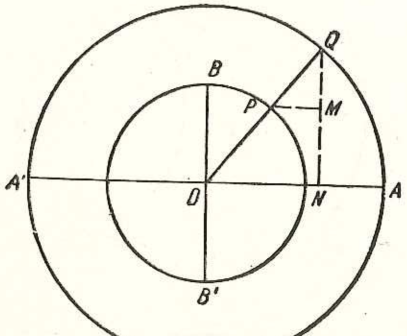

Fig. 37

Aceasta comparată cu relația (22) arată că $\overline{NM} = y$, adică M este un punct al elipsei. În acest fel se pot construi oricîte puncte vrem. Să observăm însă că la fiecare rază OQ obținem un singur punct M.

11. *Elipsa este proiecția unui cerc.* Cercul cu diametrul cît axa mare $AA' = 2a$ a elipsei se numește *cerc principal* al elipsei. Vrem să arătăm în cele ce urmează că *elipsa este proiecția cercului său principal pe un anumit plan.* Pentru aceasta să reluăm relația (22) pe care o punem sub forma $y = Y \cdot \frac{b}{a}$. Însă $\frac{b}{a} < 1$, deci se poate găsi un unghi α pentru care $\cos \alpha = \frac{b}{a}$ și atunci $y = Y \cos \alpha$. Să ne închipuim că elipsa rămîne în planul ei, în timp ce rotim cercul său principal în jurul axei mari AA', cu unghiul α. Ordonata QN a cercului rămîne într-un plan perpendicular pe AA' și fie Q_1 noua poziție a lui Q și M proiecția lui Q_1 pe planul elipsei. (Se poate folosi figura 38, unde Q se va considera ca fiind Q_1). Prin urmare $\sphericalangle MNQ_1 = \alpha$ și $\overline{NM} = \overline{NQ_1} \cos \alpha = Y \cos \alpha = Y \cdot \frac{b}{a}$, cu alte cuvinte $\overline{NM} = y$, ordonata elipsei. Așadar ordonata elipsei este proiecția ordonatei cercului său principal, înclinat cu unghiul α, dat de $\cos \alpha = \frac{b}{a}$, pe planul elipsei. Aceasta arată că punctele elipsei sînt proiecțiile punctelor de pe cerc, sau că elipsa însăși este proiecția cercului său principal.

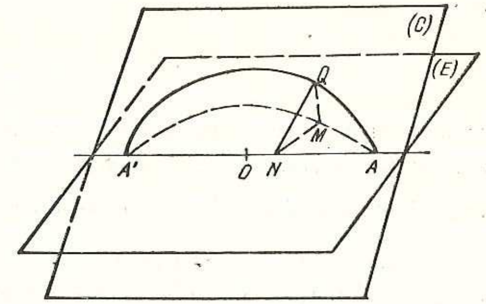

Fig. 38

Acest lucru se poate arăta și pe altă cale, analitică. Fie un cerc cu diametrul $AA' = 2a$ așezat într-un plan (C) (fig. 38). Prin AA' ducem un alt plan (E) și să notăm cu α unghiul lor diedru. Unghiul plan corespunzător unghiului diedru este format din două perpendiculare duse dintr-un punct al muchiei comune AA', una în planul (C) și una în planul (E). Fie Q un punct pe cerc, N proiecția lui pe AA' și M proiecția lui pe planul (E). Conform celor spuse mai înainte avem $\alpha = \sphericalangle QNM$.

În planul (C) punctul Q are coordonatele $X = \overline{ON}$ și $Y = \overline{NQ}$. În planul (E), punctul M are coordonatele $x = \overline{ON}$ și $y = \overline{NM} = \overline{NQ} \cos \alpha$. Deci

$$x = X;\ y = Y \cos \alpha \text{ sau } Y = \frac{y}{\cos \alpha}. \qquad (23)$$

Coordonatele punctului Q trebuie să verifice ecuația cercului cu diametrul $AA' = 2a$, deci

$$X^2 + Y^2 - a^2 = 0.$$

Locul geometric al punctului M se află înlocuind pe X și Y în ecuația cercului, deci

$$x^2 + \frac{y^2}{\cos^2 \alpha} - a^2 = 0,$$

sau

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 \cos^2 \alpha} - 1 = 0;$$

aceasta reprezintă o elipsă cu semiaxele a și $b = a \cos \alpha$. Deducem că: *elipsa este proiecția cercului său principal, așezat într-un plan care face cu planul elipsei un unghi α dat de relația $\cos \alpha = \frac{b}{a}$.*

12. *Ecuațiile parametrice ale elipsei.* În figura 37 să notăm $\sphericalangle NOQ = \theta$. Știm că punctul M aparține elipsei, dar coordonatele lui M sînt $x = \overline{ON} = OQ \cos \theta = a \cos \theta$ și $y = \overline{NM} = OP \sin \theta = b \sin \theta$. Prin urmare coordonatele parametrice ale elipsei sînt

$$x = a \cos \theta, \ y = b \sin \theta. \qquad (24)$$

Ca verificare, dacă se scot $\cos\theta$ și $\sin\theta$ și se introduc în relația fundamentală $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ se obține ecuația carteziană a elipsei.

Ținem să atragem atenția asupra unui lucru, anume că θ este unghiul făcut de raza cercului principal (OQ) cu axa mare a elipsei și în general este diferit de unghiul făcut de raza vectoare OM a elipsei cu axa mare, adică în general $\theta \neq \sphericalangle AOM$. Aceste două unghiuri sînt egale numai cînd M coincide cu A, B, A' sau B', deci pentru valorile $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

13. *Aria elipsei.* Am văzut că elipsa este proiecția cercului său principal pe un plan care face cu planul cercului unghiul dat de $\cos \alpha = \frac{b}{a}$. Aria cercului principal fiind πa^2, aria elipsei va fi aria cercului înmulțită cu cosinusul unghiului de proiecție adică

$$\mathcal{A} = (\pi a^2) \cos\alpha = \pi a^2 \frac{b}{a} = \pi ab.$$

C. Hiperbola

13. Definiție. *Hiperbola este locul geometric al punctelor care au modulul diferenței distanțelor la două puncte fixe constantă.*

Punctele fixe se numesc focare și se notează în mod obișnuit cu F și F'. Dacă M este un punct curent al hiperbolei, MF și MF' poartă numele de raze vectoare. Conform definiției, relația geometrică pe care trebuie să o satisfacă punctul M este

$$|MF' - MF| = 2a$$

sau

$$MF' - MF = \pm 2a \text{ (const.)} \qquad (25)$$

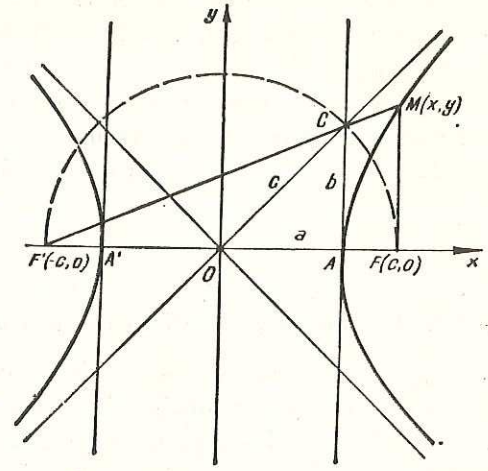

Fig. 39

Ecuația locului geometric al punctului M se găsește transformînd analitic această relație geometrică. Se aleg axele de coordonate astfel: FF' ca axă Ox și mediatoarea lui FF' ca axă Oy (fig.39).

Notăm, ca și la elipsă, $FF' = 2c$, deci $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$.

$M(x, y)$ fiind punctul curent al locului geometric, relația (13) scrisă analitic este

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a. \qquad (25')$$

Ecuația curbei trebuie adusă la formă rațională. Pentru aceasta trecem al doilea radical în partea a doua a ecuației și ridicăm la pătrat. Obținem

$$(x + c)^2 + y^2 = (x - c)^2 + y^2 \pm 4a \sqrt{(x - c)^2 + y^2} + 4a^2.$$

După reducerea termenilor asemenea și trecerea în prima parte a tuturor celor care nu conțin radicali, avem

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

O nouă ridicare la pătrat ne dă, după ordonarea termenilor

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 - a^2(c^2 - a^2) = 0. \qquad (25'')$$

Este cazul să observăm aici că am obținut *exact aceeași ecuație* (16) *de la elipsă*, ceea ce rezultă imediat înmulțind cu (-1) și schimbînd semnele în paranteze.

Deosebirea vine din altă parte. Dacă la elipsă am avut $a > c$, la hiperbolă din triunghiul MFF' rezultă $FF' > |MF' - MF| = 2a$, adică $c > a$ și atunci expresia $c^2 - a^2$ este pozitivă. Prin urmare se poate nota

$$c^2 - a^2 = b^2 \qquad (26)$$

și ecuația ((25)) devine, după împărțirea cu a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (27)$$

care este forma definitivă a ecuației hiperbolei.

Punctele de intersecţie cu axele se obţin făcînd succesiv $y = 0$ şi $x = 0$. Pe axa Ox avem $A(a, 0)$ şi $A'(-a, 0)$, iar pe axa Oy se constată că *nu avem puncte reale*, deci axa Oy nu taie hiperbola.

Pentru aceste motive AA' se numeşte *axa transversă*, iar A şi A' sînt vîrfurile hiperbolei, pe cîtă vreme axa Oy este axa netransversă.

14. *Forma hiperbolei.* Din (27) se deduce

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{28}$$

şi este de ajuns să se studieze ramura $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, deoarece cealaltă se trage prin simetrie faţă de axa Ox. Ceva mai mult, dînd lui x valori egale şi semne contrare se obţine pentru y aceeaşi valoare; punctele căpătate astfel sînt simetrice faţă de Oy, prin urmare curba este simetrică şi faţă de Oy.

De aceea este de ajuns să studiem curba în primul cadran şi restul se construieşte simetric faţă de ambele axe şi faţă de origine.

Ne ocupăm deci numai de ramura

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{28'}$$

care, pe partea pozitivă a axei Ox, are domeniul de existenţă dat de $x^2 - a^2 \geqslant 0$, adică $x \geqslant a$.

Asimptote. Se observă imediat că nu există asimptote paralele cu axele ($\lim\limits_{x \to \infty} y = \infty$). Căutăm deci asimptotele oblice.

Avem $m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a}$;

$n = \lim\limits_{x \to \infty} (y - mx) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right) = \frac{b}{a} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0$, astfel că asimptota este $y = \frac{b}{a} x$. Ţinînd seama de simetria curbei faţă de axe înseamnă că avem în total două asimptote, anume

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \tag{29}$$

Acestea de fapt se deduc din ecuaţia hiperbolei (16) *dacă se lasă la o parte termenul liber*, adică

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \tag{29'}$$

Derivata pentru ramura (8') este $y' = \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, care pentru $x > 0$ rămîne mereu pozitivă, deci funcţia este crescătoare. Avem apoi $\lim\limits_{x \to a} y' = \infty$ care arată că tangenta în A este perpendiculară pe Ox şi $\lim\limits_{x \to \infty} y' = \frac{b}{a}$, care arată că există o dreaptă de coeficient unghiular $\frac{b}{a}$, care este tangentă hiperbolei în punctul de la infinit; aceasta este asimptota $y = \frac{b}{a} x$.

Tabloul de variaţie se reduce deci la

x	a			$+\infty$
y'	∞	$+$	$+$	$+\frac{b}{a}$
y	0	creşte		$+\infty$

Acum se poate construi bine curba, avînd grijă ca ramurile ei să se apropie necontenit de asimptote, cu tendinţa de a deveni tangentele lor la infinit. Forma hiperbolei este dată în figura 39.

Se atrage atenţia că forma simplă (27) sub care se prezintă ecuaţia hiperbolei, se datoreşte faptului că este *raportată la axele ei de simetrie*. Cazul cînd sistemul de referinţă este oarecare depăşeşte cadrul manualului.

O b s e r v a r e. Ecuaţia hiperbolei se capătă imediat din ecuaţia elipsei, dacă se înlocuieşte b^2 prin $(-b^2)$. Aceasta înseamnă că semiaxa b se înlocuieşte cu bi, unde $i^2 = -1$. Vom vedea în cele ce urmează că multe din proprietăţile elipsei se transpun la hiperbolă prin această simplă înlocuire.

NOTĂ. Se poate arăta, ca şi la elipsă şi în mod cu totul asemănător, că dacă axele hiperbolei sînt paralele cu axele de coordonate, atunci ecuaţia hiperbolei este

$$\frac{(x - p)^2}{a^2} - \frac{(y - q)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

unde $O'(p, q)$ este centrul hiperbolei. Elevii pot face acest lucru ca un exerciţiu de translaţie a axelor.

E x e m p l u. *Să se determine vîrfurile, focarele şi asimptotele hiperbolei* $2x^2 - 5y^2 - 8 = 0$.

Se scrie hiperbola sub forma $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{8}{5}} - 1 = 0$, de unde rezultă imediat: $a^2 = 4$, $b^2 = \frac{8}{5}$, $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{28}{5}$. Prin urmare, vîrfurile sînt $A(2, 0)$, $A'(-2, 0)$ şi focarele $F\left(2\sqrt{\frac{7}{5}}, 0\right)$, $F'\left(-2\sqrt{\frac{7}{5}}, 0\right)$. Ecuaţiile asimptotelor se deduc uşor: $y = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}\, x$.

15. Pentru ca ecuațiile (18) și (27) să reprezinte în întregime locul geometric al punctelor care au *suma* sau *diferența* distanțelor la punctele fixe F, F' constantă, trebuie dovedit că *reciproc* orice punct M care satisface una sau alta din aceste ecuații aparține locului geometric respectiv, adică $MF + MF' = 2a =$ constant sau $|MF - MF'| = 2a =$ const.

Presupunem deci că $M(x_0, y_0)$ este un punct arbitrar *situat pe elipsa (E), adică*

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow y_0^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2). \tag{30}$$

Atunci

$$MF^2 = (x_0 - c)^2 + y_0^2 = x_0^2 - 2cx_0 + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x_0^2 =$$

$$= \frac{c^2}{a^2}x_0^2 - 2cx_0 + a^2 = \left(a - \frac{c}{a}x_0\right)^2.$$

Dar la elipsă $\frac{c}{a} < 1$ și din (30) rezultă $|x_0| < a$ prin urmare $a - \frac{c}{a}x_0 > 0$, astfel că

$$MF = \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} = a - \frac{c}{a}x_0. \tag{31}$$

Schimbînd pe c în $(-c)$ se obține

$$MF' = \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2} = a + \frac{c}{a}x_0 \tag{31'}$$

și prin adunare

$$MF + MF' = 2a.$$

Rezultă că oricare ar fi $M(x_0, y_0) \in (E)$, este satisfăcută relația de definiție a elipsei.

Pentru hiperbolă calculul este asemănător, dar trebuie ținut seama că de data aceasta avem

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ și } |x_0| > a, \text{ deci } \frac{c}{a}x_0 - a > 0. \text{ Se găsește}$$

$$MF = \frac{c}{a}x_0 - a$$

$$MF' = \frac{c}{a}x_0 + a$$

de unde se deduce $|MF - MF'| = 2a$ și relația de definiție a hiperbolei este satisfăcută.

16. *Hiperbola echilateră raportată la axele ei* este un caz particular al hiperbolei, anume cazul cînd $b = a$. Ecuația hiperbolei echilatere este așadar

$$x^2 - y^2 - a^2 = 0 \text{ sau } x^2 - y^2 = a^2. \tag{32}$$

Asimptotele se deduc imediat: $y = \pm x$, adică bisectoarele axelor de coordonate. Hiperbola echilateră are prin urmare asimptotele perpendiculare.

17. *Hiperbola echilateră raportată la asimptote.* Faptul că asimptotele hiperbolei echilatere sînt perpendiculare face ca ele să poată fi luate drept axe de coordonate. Desigur, ecuația capătă altă înfățișare, care trebuie neapărat cunoscută, fiindcă sub această formă intervine în unele fenomene fizice.

Considerăm prima bisectoare ca axă transversă (fig. 40), cu vîrfurile A_1, A'_1, deci $OA_1 = OA'_1 = a$ și focarele F_1, F_1', deci $OF_1 = OF'_1 = a\sqrt{2}$ $(c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2)$. Proiectînd pe axe, sub unghiul de 45°, obținem coordonatele vîrfurilor și ale focarelor

$$A_1\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$A_1'\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, -\frac{a\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$F_1(a, a), \; F_1'(-a, -a).$$

Pentru a găsi ecuația hiperbolei echilatere scriem că punctul curent $M(x, y)$ satisface relația

$$MF_1 - MF'_1 = \pm 2a$$

care transformată analitic devine

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - a)^2} -$$

$$- \sqrt{(x + a)^2 + (y + a)^2} = \pm 2a.$$

Se trece al doilea radical în partea a doua a ecuației, se ridică la pătrat și se reduc termenii asemenea. Se obține

$$\pm \sqrt{(x + a)^2 + (y + a)^2} =$$

$$= a + x + y.$$

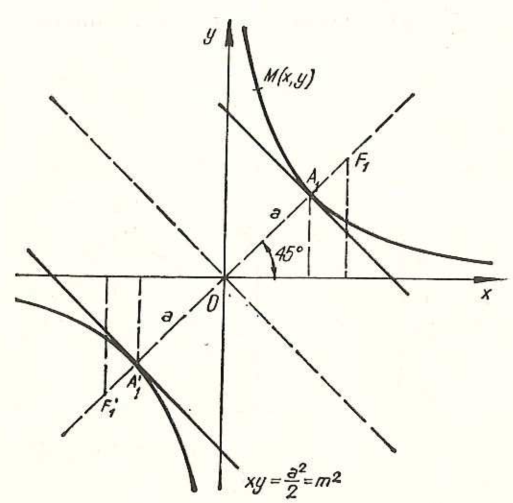

Fig. 40

O nouă ridicare la pătrat ne dă, după ce se fac reducerile,

$$xy = \frac{a^2}{2} = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2. \tag{33}$$

Aceasta este ecuaţia hiperbolei echilatere. Dacă se notează $\frac{a}{\sqrt{2}} = m$, ecuaţia hiperbolei echilatere se scrie

$$xy = m^2. \tag{33'}$$

Din această ecuaţie se deduce

$$y = \frac{m^2}{x}, \tag{33''}$$

de unde se vede că y variază invers proporţional cu x. Toate mărimile aritmetice, geometrice, mecanice, fizice etc. care variază invers proporţional cu variabila de care depind, au ca reprezentare grafică hiperbole echilatere raportate la asimptote.

E x e m p l e: *Laturile unui dreptunghi a cărui arie este constantă $xy = a^2$, legea lui Boyle-Mariotte* $pv =$ const. etc.

Hiperbola echilateră (33) au (33′) are vîrfurile pe prima bisectoare, în $A_1(m, m)$, $A(-m, -m)$; de fapt ea se obţine din hiperbola raportată la axele de simetrie printr-o rotaţie de 45°, în sens trigonometric (fig. 40).

Dacă rotirea se face în sens invers, deci cu unghiul de (−45°), axa transversă este cea de-a doua bisectoare, iar ecuaţia hiperbolei are forma

$$xy = -m^2.$$

18. *Hiperbola conjugată.* Ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \tag{34}$$

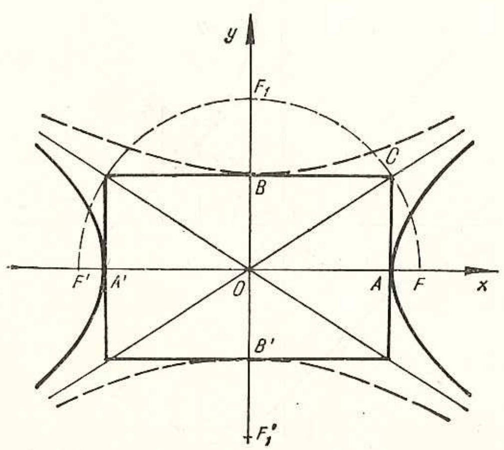

Fig. 41

reprezintă de asemenea o hiperbolă, care însă taie axa Oy în două puncte $B(0, b)$ şi B' $(0, -b)$, dar nu taie axa Ox (fig. 41, hiperbola punctată). Prin urmare, de data aceasta *Oy este axa transversă* şi *Ox axa netransversă.*

Hiperbola (34) şi hiperbola studiată mai înainte

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{34'}$$

au aceleaşi axe şi aceleaşi asimptote $y = \pm \frac{b}{a} x$, însă (34) este aşezată în unghiul asimptotelor care cuprinde axa Oy, adică acolo unde nu există nici un punct al hiperbolei (34′). Hiperbolele (34 şi (34′) se numesc *hiperbole conjugate.*

19. 1) *Construcţia unui arc de hiperbolă prin mişcare continuă.* Se presupun date focarele F, F' şi lungimea $2a$ a axei transverse. Este evident că vîrfurile A, A' se pot fixa imediat, dar ele rezultă şi prin trasarea ramurilor de hiperbolă.

Se ia o riglă şi se fixează cu un capăt în F', astfel ca să se poată roti în jurul lui F'. Lungimea $F'E$ a riglei trebuie să fie mai mare decît FF'. Se ia apoi un fir de lungime l, astfel ca $l = F'E - 2a$ şi se fixează un capăt al lui în F, iar celălalt la extremitatea E a riglei. Se întinde firul cu vîrful M al unui creion care se sprijină pe riglă (fig. 42). Rotind rigla în jurul focarului F', vîrful M al creionului descrie un arc de hiperbolă, deoarece

$$MF' - MF = EF' - (EM + MF) = EF' - l = 2a.$$

Schimbînd centrul de rotaţie al riglei în F şi legînd al doilea capăt al firului în F', se obţine în mod asemănător un arc din a doua ramură a hiperbolei.

2) *Construcţia hiperbolei prin puncte.* Cînd vrem să figurăm prin puncte o hiperbolă trebuie să procedăm într-o anumită ordine, aşa cum arătăm aici.

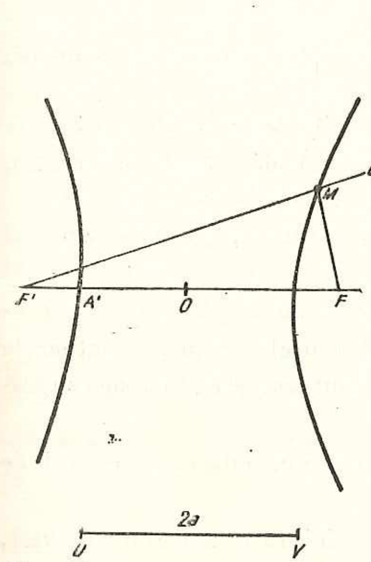

Fig. 42

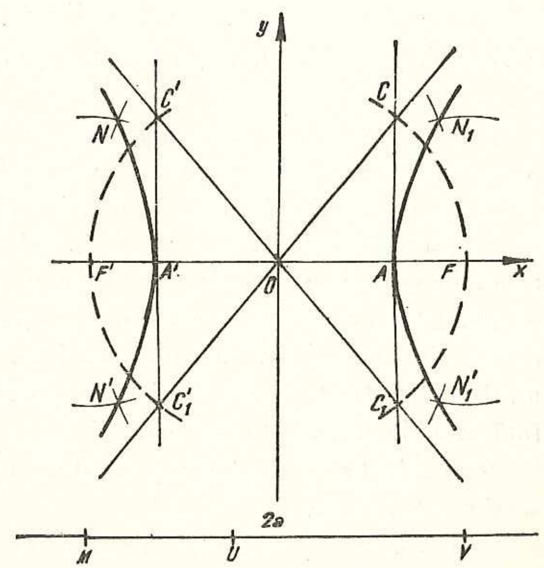

Fig. 43

a) Se așază vîrfurile A, A' și focarele F, F', care se presupun date ($AA' = 2a$, $FF' = 2c > 2a$).

b) Se desenează *asimptotele*. Pentru aceasta se duc în A și A' perpendicularele pe AA' (tangentele în A și A' la hiperbolă), apoi se descrie cercul cu centrul în O și cu raza $OF = c$, care taie cele două perpendiculare în C și C' (fig. 43). Avem $AC = b$, deoarece triunghiul dreptunghic OAC ne dă $AC^2 = OC^2 - OA^2 = c^2 - a^2 = b^2$.

Coeficientul unghiular al dreptei OC este $m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$, deci OC este chiar asimptota hiperbolei. Rezultă următoarea construcție: se duce cercul cu centrul în O și cu raza $OF = c$, care taie tangentele la vîrfurile hiperbolei în patru puncte care formează un dreptunghi. Diagonalele acestui dreptunghi sînt asimptotele hiperbolei.

În particular la hiperbola *echilateră* $a = b$ și dreptunghiul devine pătrat; diagonalele, deci asimptotele, fac 45° cu axele.

c) După ce am așezat vîrfurile, focarele și am construit asimptotele, urmează să găsim și cîteva puncte, pentru a putea trasa curba.

Luăm separat o dreaptă și pe ea segmentul $UV = AA' = 2a$, apoi luăm un punct M pe dreaptă, în afara segmentului UV. Descriem un cerc cu raza MU și cu centrul în F', apoi un al doilea cerc cu raza MV și cu centrul în F. Aceste două cercuri se taie în două puncte N, N' simetrice față de Ox. Avem

$$NF - NF' = MV - MU = 2a,$$

deci N aparține hiperbolei. Simetricul său față de Ox aparține de asemenea hiperbolei.

Dacă se păstrează razele, dar se inversează centrele, se obțin încă două puncte ale curbei, simetrice cu cele precedente, față de Oy. Prin urmare, cu un singur punct M putem construi *patru* puncte ale curbei.

Trasarea hiperbolei este mult ajutată de asimptote, ținînd seama că ramurile curbei se apropie necontenit de ele.

20. *Elipsa și hiperbola* se obțin ca secțiuni făcute cu un plan într-o suprafață conică de rotație. Suprafața conică se obține prelungind generatoarele unui con la infinit, de o parte și de cealaltă a vîrfului, astfel că întreaga suprafață este simetrică față de vîrf.

Prin vîrful suprafeței conice să ducem un plan P_v, paralel cu planul de secțiune P în suprafața conică.

a) Dacă P_v nu întîlnește suprafața conică în nici un punct afară de vîrf, secțiunea făcută de P în suprafața conică este o *elipsă*.

b) Dacă P_v taie suprafața conică după două generatoare distincte, secțiunea făcută de P în suprafața conică este o *hiperbolă*. De aceea elipsa și hiperbola se mai numesc *secțiuni conice*, sau mai scurt *conice*. Deoarece ambele curbe au *centru de simetrie*, ele poartă numele de *conice cu centru*.

Această origine comună a celor două curbe, ca secțiuni conice, explică asemănarea proprietăților lor, pe care am constatat-o pînă aici și pe care o vom urmări și în cele ce urmează.

Exerciții și probleme

141. Să se găsească ecuația unei elipse avînd axele de coordonate ca axe de simetrie și trecînd prin punctele M (3, 4), N (6, 2). (C.d.p. I. Dumitriu).

[$a^2 = 45$; $b^2 = 20$.]

142. Să se găsească ecuația elipsei care trece prin punctul M (5, —3) și are axa mică egală cu $6\sqrt{2}$.

[$a^2 = 50$; $b^2 = 18$.]

143. Fie M un punct pe elipsa de semiaxe a și b, F_1 și F_2 focarele sale, iar O centrul său. Să se arate că avem relația:

$$MF_1 \cdot MF_2 + MO^2 = a^2 + b^2.$$

[Se pot folosi (31), (31'). Se poate pleca și de la relația de definiție a elipsei, se ridică la pătrat și se ține seama de teorema medianei.]

144. Se dă elipsa $(E) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ și se notează cu (E_1) rezultatul înlocuirii lui x și y din (E) prin x_1 și y_1. Să se demonstreze că:

a) dacă $P(x_1, y_1)$ este interior elipsei, atunci $(E_1) < 0$;

b) dacă $P(x_1, y_1)$ este exterior elipsei, atunci $(E_1) > 0$.

[a) Se duce prin P o paralelă la Oy care taie elipsa în $Q(x_0, y_0)$. Avem $x_1 = x_0$, $y_1 < y_0$, deci $(E_1) < 0$. b) Același procedeu.]

145. Capetele A și B ale unui segment de lungime constantă alunecă pe două drepte perpendiculare. Fie M un punct fix al acestui segment. Se cere locul punctului M.

[Se ia OA ca axă Ox și se notează $\overline{AM} = b$, $\overline{MB} = a$. Locul este elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Proprietatea se folosește la construcția elipsografului.]

146. Fie $\overline{MN}$ ordonata unui punct variabil pe un cerc cu centrul în origine și Q punctul care împarte această ordonată într-un raport constant $\frac{\overline{MQ}}{\overline{QN}} = k$. Se cere locul geometric al punctului Q.

[Elipsă.]

147. Să se afle ecuaţia hiperbolei, raportată la axele sale, ştiind că are axa transversă de 12 unităţi şi trece prin punctul $M\ (8, \sqrt{7})$.

[$a^2 = 36$; $b^2 = 9$]

148. Să se găsească ecuaţia unei hiperbole, raportată la axele sale, ştiind că trece prin punctele $C\ (5\sqrt{2};\ 2\sqrt{5})$ şi $D\ (45, 40)$

[$a^2 = 25$, $b^2 = 20$.]

149. Fiind dată hiperbola cu semiaxele a şi b, cu focarele F_1 şi F_2 şi cu centrul O, să se arate că dacă M este un punct al curbei, avem relaţia:

$$OM^2 - MF_1 \cdot MF_2 = a^2 - b^2.$$

150. Se dă hiperbola $H = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ şi se notează cu H_1 rezultatul înlocuirii în H a lui x, y prin x_1, y_1. Să se demonstreze că:

a) dacă $P\ (x_1, y_1)$ este în afara ramurilor hiperbolei, atunci $H_1 < 0$;

b) dacă $P\ (x_1, y_1)$ este interior uneia din ramurile hiperbolei, atunci $H_1 > 0$.

[a) Se duce prin P o paralelă la Ox, care taie hiperbola în $Q(x_0, y_0)$.
Avem $x_1 < x_0$, $y_1 = y_0$, deci $H_1 < \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0$.
b) Acelaşi procedeu, sensul inegalităţilor se schimbă.]

151. Într-o hiperbolă echilateră, segmentul care uneşte centrul O cu un punct oarecare de pe curbă este medie proporţională între cele două raze vectoare FM, $F'M$ care unesc focarele cu punctul M, adică

$$OM^2 = FM \cdot F'M.$$

[Se va trata direct apoi ca particularizare a problemei precedente.]

152. Fie $x^2 - y^2 = a^2$ o hiperbolă echilateră. Să se arate că ordonata MN a unui punct M de pe această curbă este egală cu tangenta dusă din N la cercul descris pe axa transversă a curbei, ca diametru (C.d.p.)

D. Parabola

21. D e f i n i ţ i e. *Parabola este locul geometric al punctelor egal depărtate de o dreaptă fixă şi de un punct fix. Dreapta fixă se numeşte* directoarea *parabolei, iar punctul fix,* focarul *parabolei.*

Pentru a găsi ecuaţia parabolei ne alegem întîi un sistem de referinţă, anume: perpendiculara din focarul F pe directoarea (D) ca axă Ox şi paralela la (D) dusă la jumătatea distanţei dintre **focar** şi **directoarea** (D), ca

axă Oy. Notăm $A \equiv (D) \cap Ox$. Fie M un punct al parabolei şi N proiecţia lui pe directoare (fig. 44).

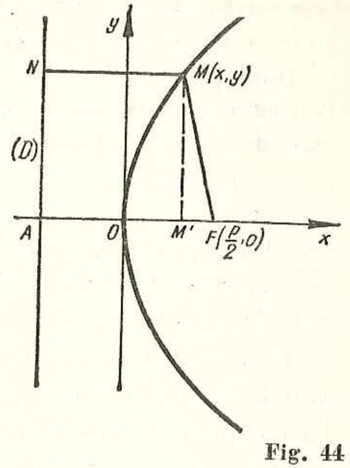

Fig. 44

Se obişnuieşte să se noteze $AF = p$, de unde rezultă: $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ şi $A\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$. MF se numeşte, ca şi la elipsă sau hiperbolă, rază vectoare. Relaţia geometrică pe care o satisface punctul M se deduce din enunţ

$$MF = MN. \tag{35}$$

Dacă $M\ (x, y)$ este un punct curent al parabolei, avem $MN = x - \left(-\frac{p}{2}\right) = x + \frac{p}{2}$, astfel încît (35) devine

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \tag{35'}$$

Ridicînd la pătrat şi trecînd toţi termenii în prima parte se obţine

$$y^2 - 2px = 0. \tag{36}$$

Elevii vor arăta, aşa cum s-a făcut la elipsă şi la hiperbolă, că reciproc, orice punct situat pe parabola $y^2 - 2px = 0$ satisface relaţia de definiţie $MF = MN$.

Aceasta este ecuaţia parabolei, raportată la axele alese; p se numeşte *parametrul parabolei.*

O b s e r v a r e . Dacă s-ar schimba între ele A cu F, aceasta ar însemna să se înlocuiască p cu $(-p)$ şi ecuaţia parabolei ar deveni

$$y^2 + 2px = 0. \tag{36'}$$

Parabolele (36) şi (36') sînt dispuse simetric faţă de axa Oy.

22. *Forma parabolei.* Să notăm cu (Γ) parabola. Dacă $M\ (x_0, y_0) \in (\Gamma)$, adică verifică ecuaţia (36), este clar că şi $M_1\ (x_0, -y_0)$ verifică ecuaţia, deci $M_1 \in (\Gamma)$. Însă M şi M_1 sînt simetrice faţă de Ox, astfel că parabola are punctele simetrice faţă de Ox; prin urmare Ox (perpendiculara dusă din focar pe directoare) este axa de simetrie a parabolei. Acest lucru se poate constata şi rezolvînd ecuaţia (36) în raport cu y; se obţine $y = \pm\sqrt{2px}$ care reprezintă două ramuri de curbă, simetrice faţă de Ox. Originea O apar-

ține curbei și este singurul punct care coincide cu simetricul său. Acest punct este *vîrful parabolei*. Rezultă că axa Oy taie curba în două puncte confundate, deci este tangentă la parabolă și se numește *tangenta la vîrf*. Pentru a ne da seama de forma curbei, este de ajuns să studiem ramura așezată deasupra axei Ox

$$y = \sqrt{2px}; \tag{37}$$

restul se completează prin simetrie. Curba există pentru $x \geqslant 0$ și se observă că y crește odată cu x. Nu există nici un fel de asimptote. Forma curbei este dată în figura 44.

Parabola se obține, ca și elipsa sau hiperbola, prin secțiunea unei suprafețe conice cu un plan, însă de data aceasta planul trebuie să fie paralel cu un *plan tangent la suprafața conică*, de-a lungul unei generatoare. Așadar și parabola este o *secțiune conică*, însă *fără centru de simetrie*, sau mai scurt, *conică fără centru*.

Ecuația parabolei se prezintă sub forma simplă (36) datorită faptului că am ales axele în mod particular. Se zice că (36) este ecuația parabolei, *raportată la axa de simetrie și la tangenta la vîrf*.

Dacă parabola se raportează la alte axe, ecuația ei nu mai apare sub forma simplă (36).

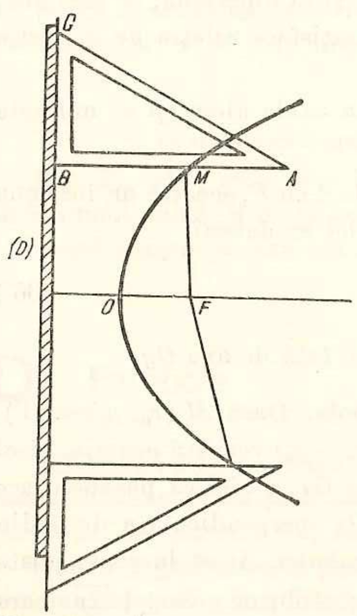

Fig. 45

23. 1) *Construcția unui arc de parabolă prin mișcare continuă*. Fie (D) directoarea și F focarul parabolei. Se așază o riglă L, astfel ca marginea ei să se suprapună dreptei (D) și un echer a cărui catetă mică BC se sprijină pe riglă. Un fir de lungime egală cu cateta mare AB a echerului se fixează cu un capăt în F și cu celălalt în vîrful A al echerului. Se întinde bine firul cu vîrful M al unui creion, care se sprijină pe cateta AB (fig. 45). Cînd echerul se deplasează, alunecînd cu cateta BC pe rigla L, punctul M descrie un arc de parabolă, deoarece $AM + MB = AM + MF$, adică $MB = MF$.

Răsturnînd echerul se descrie arcul de parabolă simetric față de perpendiculara dusă din F pe (D).

2) *Construcția parabolei prin puncte*

Metoda I. Cu vîrful compasului în F descriem un cerc cu raza r, apoi ducem o paralelă (Δ) la directoarea (D), la distanța r, de la A spre F (fig. 46). Punctele comune cercului și dreptei astfel construite aparțin parabolei deoarece sînt egal depărtate de directoare și de focar.

Metoda a II-a se desprinde din faptul că triunghiul FMN este isoscel. Se ia un punct N pe directoare, se duce prin N paralela NM la Ox, apoi mediatoarea segmentului NF, care întîlnește pe NM în M. Acesta este un punct al parabolei, deoarece $MN = MF$.

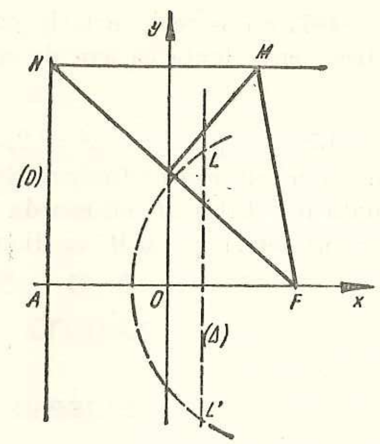

Fig. 46

Prima metodă dă deodată două puncte simetrice și se poate trage curba de ambele părți ale axei. Prin a doua metodă, la fiecare punct $N \in (D)$ se obține un singur punct M al parabolei. Vom vedea însă mai tîrziu că mediatoarea segmentului NF este chiar tangenta în M la parabolă, fapt care permite trasarea mult mai exactă a curbei în jurul punctului M.

Exerciții și probleme

153. Se dă un punct fix O și o dreaptă fixă (D). O dreaptă variabilă, care trece prin O, taie pe (D) în N. Se cere locul intersecției perpendicularelor în N pe (D) și în O pe ON.

[Se ia $Ox \perp (D)$ și $Oy \parallel (D)$; $y^2 - ax = 0$.]

154. Să se determine ecuația parabolei raportată la axă și la tangenta la vîrf, știind că trece prin punctul (2, 5).

[$2y^2 - 25x = 0$.]

155. Ce devine ecuația parabolei $y^2 - 3x = 0$, dacă se dă o translație axelor astfel ca noua origine să fie punctul O' (3, 2)?

$$\left[y'^2 + 4y' - 3x' - 5 = 0 \text{ sau } x' = \frac{1}{3}y'^2 + \frac{4}{3}y' - \frac{5}{3}.\right]$$

156. Ce devine ecuația $y^2 + 6y - 8x + 17 = 0$, dacă se mută originea, prin translație, în punctul (1, —3)?