Analiză matematică
EXAMEN PARŢIAL - GRUPELE 311 şi 314
Marti 15 decembrie 2020 - ora 12:00

Rezolvările trebuie scrise de mână,
menţionând numele, grupa şi varianta în antetul primei pagini

Grupele 311 şi 314 - VARIANTA 1

Exerciţiul 1.1 Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin

$$x_n = \frac{\sin\pi}{2} + \frac{\sin(\pi/2)}{2^2} + \ldots + \frac{\sin(\pi/n)}{2^n},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Exerciţiul 1.2 Studiaţi convergenţa seriei $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{e^n}$.

Exerciţiul 1.3 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \ x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{dacă } \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Determinaţi mulţimea tuturor punctelor de continuitate ale funcţiei f, apoi studiaţi dacă această mulţime este deschisă sau închisă.

Grupele 311 şi 314 - VARIANTA 2

Exerciţiul 2.1 Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin

$$x_n = \frac{\cos\pi}{1\cdot 2} + \frac{\cos(\pi/2)}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos(\pi/n)}{n(n+1)},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Exerciţiul 2.2 Studiaţi convergenţa seriei $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n^2+1}{2n^2+n}\right)^{2n}$.

Exerciţiul 2.3 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Determinaţi mulţimea tuturor punctelor de continuitate ale funcţiei f, apoi studiaţi dacă această mulţime este deschisă sau închisă.

Grupele 311 şi 314 - VARIANTA 3

Exerciţiul 3.1 Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdots\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)}$.

Exerciţiul 3.2 Studiaţi convergenţa seriei $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n+1}}$.

Exerciţiul 3.3 Să se demonstreze că există un singur număr $a \in \mathbb{R}$ pentru care mulţimea $A = (-1, +\infty) \cup \{a\}$ să fie închisă iar funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{dacă } \ x \neq 0 \\ a+2 & \text{dacă } \ x = 0. \end{cases}$$

să fie continuă.

Grupele 311 şi 314 - VARIANTA 4

Exerciţiul 4.1 Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$.

Exerciţiul 4.2 Studiaţi convergenţa seriei $\sum\limits_{n\geq 1} \left[\dfrac{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (3n)} \cdot \dfrac{1}{n+3}\right]$.

Exerciţiul 4.3 Să se demonstreze că există un singur număr $a \in \mathbb{R}$ pentru care mulţimea $A = (a, +\infty) \cup \{2e\}$ să fie închisă iar funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}} & \text{dacă } x \neq 0 \\ a - e & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

să fie continuă.