Seminar 9 Mulțimi ordonate

1. Relații de ordine

• Recap: Def. Fie $\rho = (A, A, R)$ o rel. omogenă.
ρ este o rel. de ordine dacă ρ este:

$$\left.\begin{cases} \to \text{reflexivă}: & x\rho x, \forall x \in A \ (1_A \subseteq \rho) \\ \to \text{tranzitivă}: & \forall x,y,z \in A, x\rho y \text{ și } y\rho z \Rightarrow x\rho z. \ (\rho^2 \subseteq \rho) \\ \to \text{antisimetrică}: & \forall x,y \in A, x\rho y \text{ și } y \rho x \Rightarrow x = y \ (\rho \cap \rho^{-1} \subseteq 1_A) \end{cases}\right] \begin{matrix}\rho \cap \rho^{-1} = 1_A \\ \text{și} \\ \rho^2 = \rho\end{matrix}$$

În această situație (A, ρ) este o mult. ordonată.

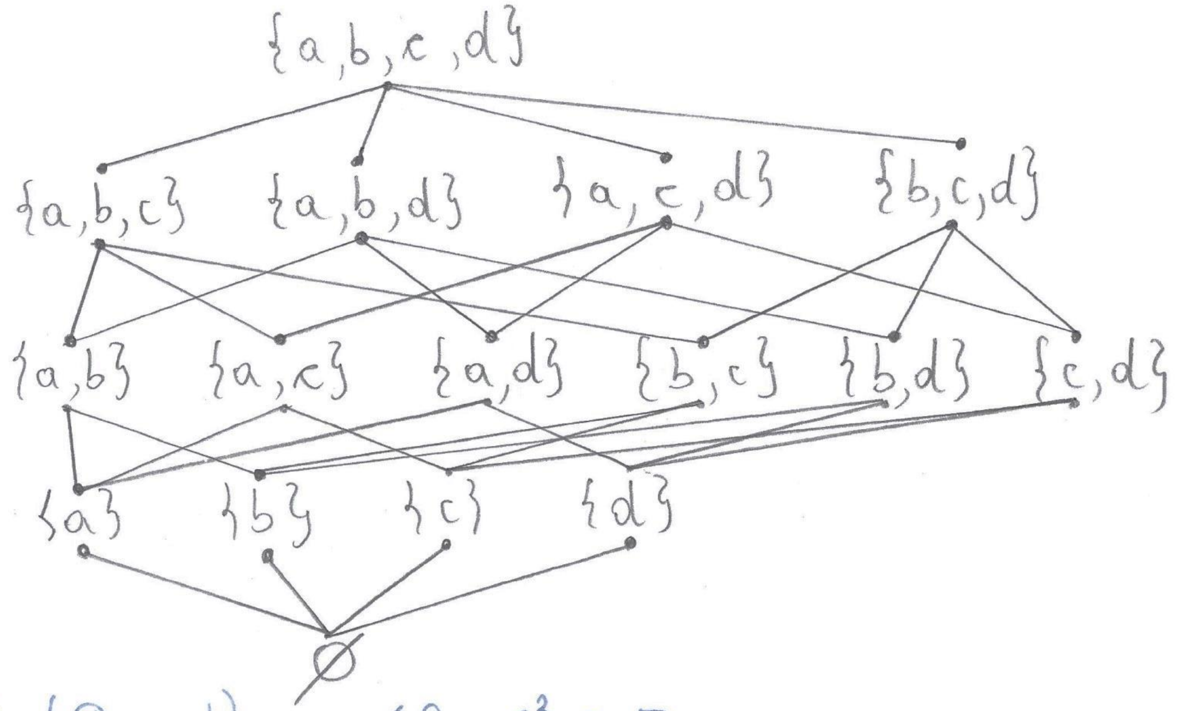
Def (A, ρ) este o mult total ordonată (lanț)
dc în plus $\forall x, y \in A$ avem $x\rho y$ sau $y \rho x$.

Exemple: 1) $(\mathbb{N}, \leq), (\mathbb{Z}, \leq), (\mathbb{Q}, \leq), (\mathbb{R}, \leq)$ sunt mult. total ordonate.
2) $(\mathbb{N}, |)$ este o mult. ordonată, dar NU este total ordonată
ex: 2 și 3 NU sunt comparabile
3) Dacă A este mulțime. $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ este mult. ordonată
dacă A are mai mult de un elem, atunci $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ NU este total ordonată.

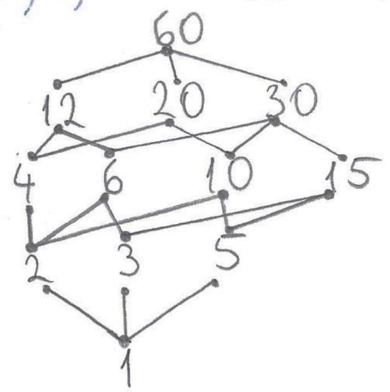
Notație: $\mathcal{O}(A) = \{ \rho = (A, A, R) \mid \rho \text{ este relație de ordine} \}$

• Ex 88/pg. 44 Să se întocmească diagramele Hasse ale următoarelor mulțimi ordonate:

a) $(\mathcal{P}(\{a,b,c,d\}), \subseteq)$

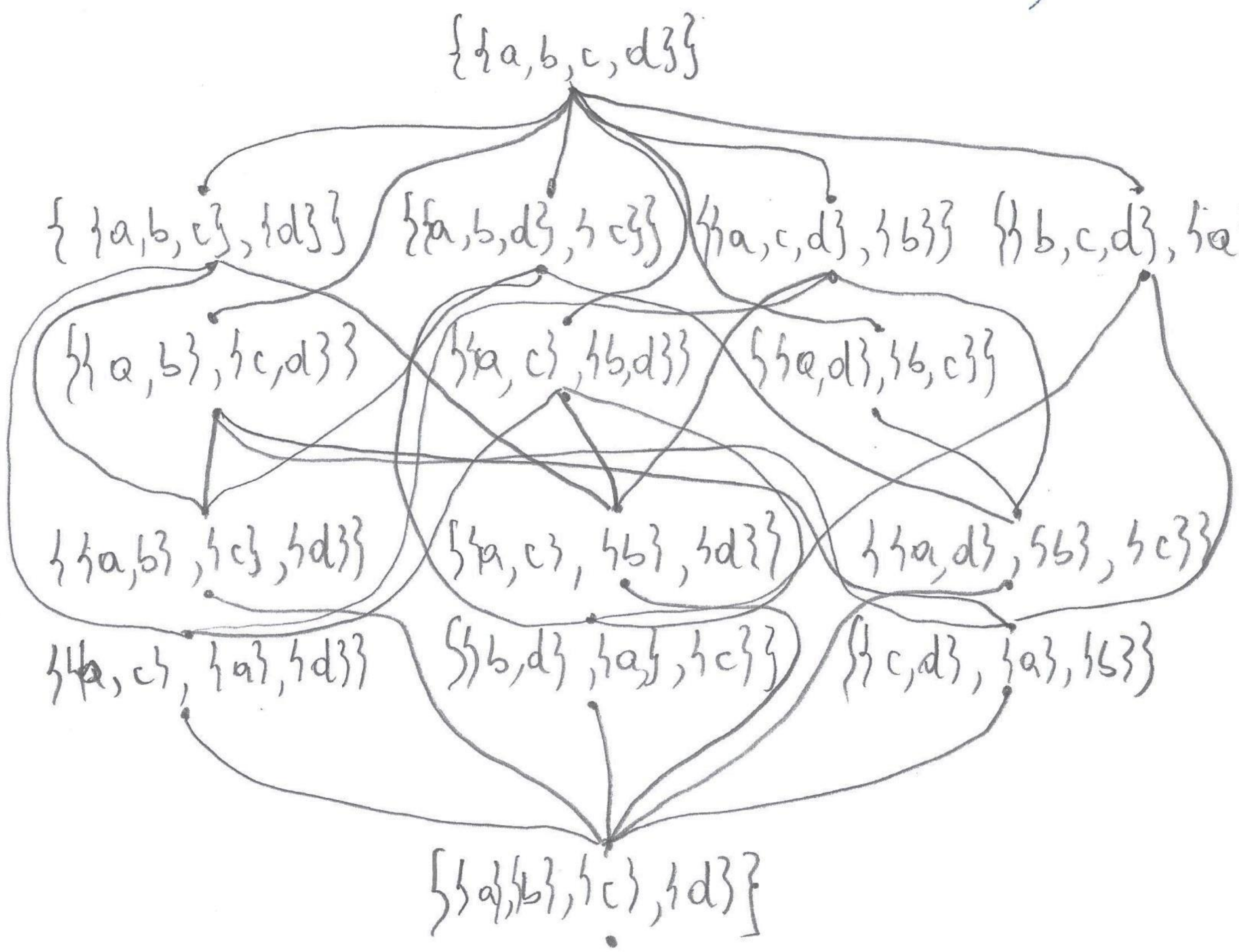


b) $(\mathcal{D}_{60}, |)$ $\qquad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$



c) Mulțimea partițiilor mulț $\{a, b, c, d\}$ ordonată de relația „mai fin" $\leq$.

(temă)



• **Ex 87/pg 43** Fie $A \neq \emptyset$, $\rho, \rho' \in \mathcal{O}(A)$. S.s.a.c.

a) $\rho \cap \rho'$, $\rho^{-1} \in \mathcal{O}(A)$.

Soluție: Reflexivitate:

Fie $a \in A$. $\rho, \rho' \in \mathcal{O}(A) \Rightarrow \rho$ și ρ' sunt reflexive $\Rightarrow$

$a \rho a$ și $a \rho' a \Rightarrow a \rho \cap \rho' a \Rightarrow \rho \cap \rho'$ reflexivă.

$\Downarrow$

$a \rho^{-1} a \Rightarrow \rho^{-1}$ reflexivă

Tranzitivitate:

Fie $a, b, c \in A$ ai $a \rho \cap \rho' b$ și $b \rho \cap \rho' c$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$a\rho b$ și $a \rho' b$ $\quad b \rho c$ și $b \rho' c$

$a \rho b$ și $b \rho c \xRightarrow{\rho \text{ tranz}} a \rho c$.

$a \rho' b$ și $b \rho' c \xRightarrow{\rho' \text{ tranz}} a \rho' c$ $\Big| \Rightarrow a \rho \cap \rho' c. \Rightarrow \rho \cap \rho'$ tranz

Fie $a, b, c \in A$ ai $a \rho^{-1} b$ și $b \rho^{-1} c$ $\qquad \rho^{-1}$ tranz.

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\qquad \Uparrow$

$b \rho a$ și $c \rho b \xRightarrow{\text{tranz } \rho} c \rho a \Rightarrow a \rho^{-1} c$.

Antisimetrie:

Fie $a, b \in A$ ai $a \rho \cap \rho' b$ și $b \rho \cap \rho' a \Rightarrow$

$a \rho b$ și $b \rho a \xRightarrow{\rho \text{ antisim}} a = b \Rightarrow \rho \cap \rho'$ antisim.

$a \rho' b$ și $b \rho' a$

Fie $a, b \in A$ ai $a \rho^{-1} b$ și $b \rho^{-1} a \Rightarrow b \rho a$ și $a \rho b \xRightarrow{\rho \text{ antisim}} a = b$

$\Rightarrow \rho^{-1}$ antisim.

b) $C_\rho \notin \mathcal{O}(A)$ Soluție: C_ρ NU este reflexivă

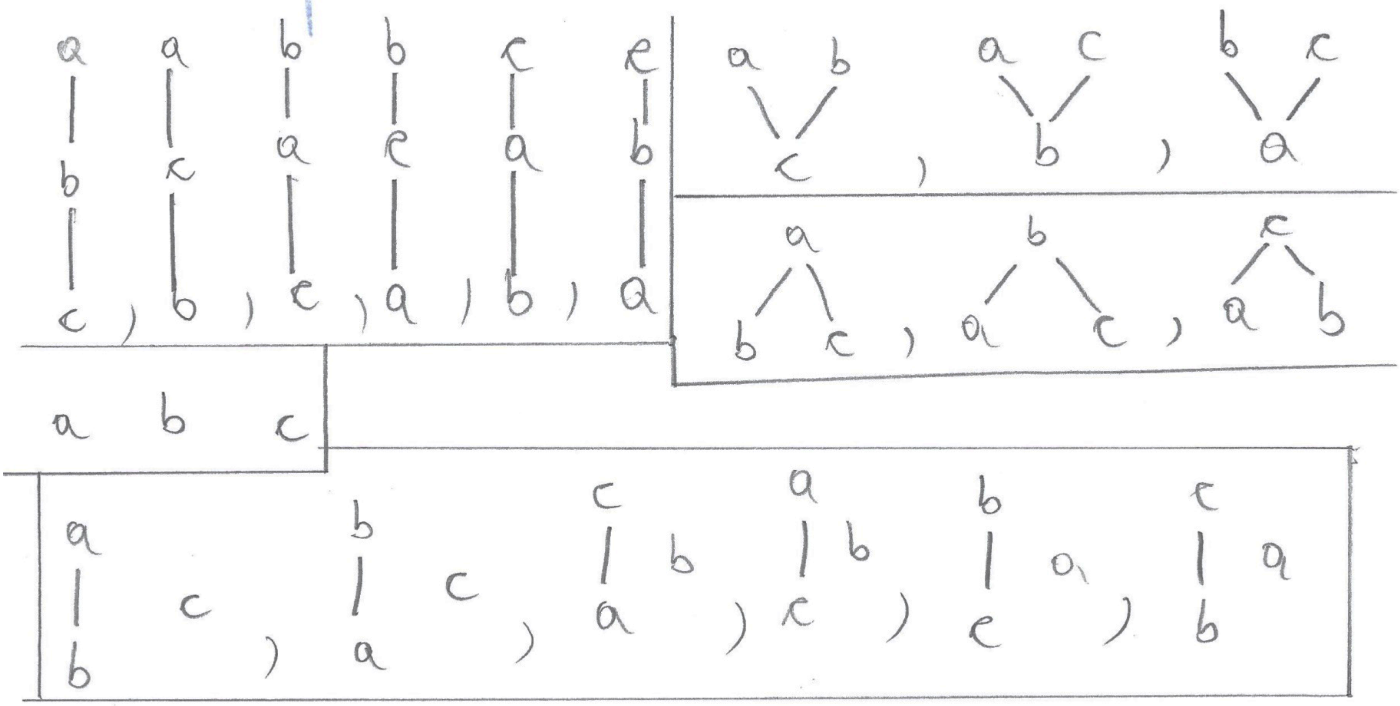
c) $\sigma := \rho \setminus 1_A$ este relație de ordine strictă pe A

c) În general $\rho \cup \rho' \notin \mathcal{O}(A)$, vezi ex din suportul de curs (Soluții)

• **Def** Fie $(A, \leq)$ și $(B, \leq)$ 2 mulț. ordonate.
Fie $f: A \to B$ o funcție. Atunci:

* f este cresc (desc) dc $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ $(f(y) \leq f(x))$
* f este izomorfism de ordine (asemănare) dacă f este cresc, bij și f^{-1} cresc.

• **Ex 89/pg 44** Să se determine toate relațiile de ordine pe mulțimea $A = \{a, b, c\}$ (folosind diagrame Hasse). Să se împartă aceste ordonări în clase de asemănare.



• <u>Ex 90/pg 44</u> Fie $(A,\leq),(B,\leq),(C,\leq)$ mulț. ordonate, și fie $f:A\to B$, $g:B\to C$ două funcții.

a) Dacă f și g sunt cresc. (descr.), at. $g\circ f$ este fct. cresc.

b) Dacă f este cresc. (descr.) și g este descr. (cresc.), at $g\circ f$ este descr.

<u>Soluție</u>: a) Pp. f și g cresc. Vrem $g\circ f$ cresc.

$g\circ f : A \to C$. Fie $a_1 \leq a_2$ în $(A,\leq)$.

$$\Downarrow f \text{ cresc}$$

$$f(a_1)\leq f(a_2) \text{ în } (B,\leq)$$

$$\Downarrow g \text{ cresc}$$

$$g(f(a_1))\leq g(f(a_2)) \text{ în } (C,\leq) \Rightarrow$$

$\Rightarrow (g\circ f)(a_1)\leq (g\circ f)(a_2) \Rightarrow g\circ f$. cresc.

Analog restul afirmațiilor. $\square$

• Ex 91/pg 44 Fie $(A, \leq)$ și $(B, \leq)$ mulț. ord și fie $f: A \to B$ o fct. bij. și cresc.

a) Dacă A este total ord, atunci f^{-1} este cresc. și B este total ord.

b) Ssac $1_{\mathbb{N}^*}: (\mathbb{N}^*, |) \to (\mathbb{N}^*, \leq)$ este bij, cresc dar NU este izo de ord.

Soluție: a) $f^{-1}: B \to A$. Fie $b_1, b_2 \in B$ aî $b_1 \leq b_2$ în $(B, \leq)$.

Vrem f^{-1} cresc., adică $f^{-1}(b_1) \leq f^{-1}(b_2)$.

Fie $a_1 = f^{-1}(b_1)$, $a_2 = f^{-1}(b_2)$ $\in A$. A este total ord $\Rightarrow a_1 \leq a_2$ sau $a_2 \leq a_1$.

* Dacă $a_2 \leq a_1 \xRightarrow{f \text{ cresc}} f(a_2) \leq f(a_1) \Rightarrow b_2 \leq b_1$, dar $b_1 \leq b_2 \xRightarrow{\text{antisim}}$ $b_1 = b_2 \Longrightarrow f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow a_1 \leq a_2$ ✓

* Dacă $a_1 \leq a_2$ ✓

Vrem B total ord. Fie $b_1, b_2 \in B \Longrightarrow f^{-1}(b_1) := a_1$ și $f^{-1}(b_2) := a_2 \in A$, dar A este total ord $\Rightarrow a_1 \leq a_2$ sau $a_2 \leq a_1 \xRightarrow{f \text{ cresc}} f(a_1) \leq f(a_2)$ sau $f(a_2) \leq f(a_1) \Rightarrow b_1 \leq b_2$ sau $b_2 \leq b_1$ ✓.

b) bijectivitate clară.

crescătoare: Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ aî $a \mid b \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ aî $b = a \cdot k$

Dacă $k = 0 \Rightarrow b = 0$ contradicție. Așadar $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow k \geq 1 \,/\cdot a$ $\Rightarrow a \cdot k \geq a \Rightarrow b \geq a$. ✓

NU e izomorf de ordine: $1_{\mathbb{N}^*}^{-1}$ NU e cresc:

$1_{\mathbb{N}^*}^{-1}: (\mathbb{N}^*, \leq) \to (\mathbb{N}^*, |)$.

$2 \leq 3$, dar $2 \nmid 3$.

• Ex 94/pg 45 Fie $(A, \leq)$ o mulț. ord. S.s.a.c. dc. $\exists$ $a = \min A$, atunci a este unicul element minimal al lui A, iar afirmația reciprocă NU e adevărată.

Soluție: Recap: $\begin{cases} a = \min A \iff a \leq x, \forall x \in A. \\ b \in A \text{ este elem. minimal dc } \forall x \in A \text{ a.î. } x \leq b \Rightarrow x = b. \end{cases}$

Pp că $\exists a = \min A$. Clar a este elem. minimal.

Pp că $\exists b \in A$, $b \neq a$ un alt elem. minimal.

$a = \min A \Rightarrow a \leq x, \forall x \in A$. Luăm $x = b \Rightarrow a \leq b$, de unde conf. def. de elem. minimal al lui $b \Rightarrow a = b$. contradicție. $\square$.