Seminar 12

Fie K corp comutativ, V K-sp. vectorial

- $x_1, \dots, x_n \in V$, $x_1, \dots, x_n$ liniar independenți dacă

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0 \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K).$$

Lista 10

(7.) a) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$f_1 = (X-b)(X-c)$, $f_2 = (X-a)(X-c)$, $f_3 = (X-a)(X-b)$.

Să se arate că

i) f_1, f_2, f_3 liniar indep. $\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$.

ii) Dacă $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ atunci orice $f \in \mathbb{R}[X]$, cu grad $f \leq 2$ se scrie în mod unic sub forma $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$ (1) $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R})$.

b) Să se găsească $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ când $f = 1 + 2X - X^2$, $a = 1$, $b = 2$ și $c = 3$.

a) i) f_1, f_2, f_3 l. indep. : $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0 \Rightarrow$ (*)
$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

$$\begin{aligned}\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 &= \alpha_1 (X-b)(X-c) + \alpha_2 (X-a)(X-c) + \alpha_3 (X-a)(X-b) \\ &= \alpha_1 \left[X^2 - (b+c)X + b \cdot c\right] + \alpha_2 \left[X^2 - (a+c)X + a \cdot c\right] \\ &\quad + \alpha_3 \left[X^3 - (a+b)X + a \cdot b\right].\end{aligned}$$

$(= \dots)$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -(b+c)\alpha_1 - (a+c)\alpha_2 - (a+b)\alpha_3 = 0 \\ bc\, \alpha_1 + ac\, \alpha_2 + ab\, \alpha_3 = 0 \end{cases} \quad (**)$$

↳ sist. omogen cu nec. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.
vreau ca singura sol. să fie 0 (= sist. comp. det.)

f_1, f_2, f_3 l. indep. $\Leftrightarrow$ sist. $(**)$ este compatibil det. $\Leftrightarrow$ det. sist. $(**)$ este nenul.

$\iff$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -(b+c) & -(a+c) & -(a+b) \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2-C_1 \\ C_3-C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b-c & -a+b & -a+c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(c-a) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ c & -b \end{vmatrix} = (a-b)(c-a)(b-c) \neq 0.$$

ii) $P_2(\mathbb{R}) = \{ f \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad } f \leq 2 \} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]$

Fie $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$.

f se scrie în mod unic sub forma (1) $\iff$ f_1, f_2, f_3 formează o bază în $P_2(\mathbb{R})$

$\overset{f_1, f_2, f_3 \text{ l. indep. } ?}{\iff}$ $P_2(\mathbb{R}) = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \iff \forall f \in P_2(\mathbb{R}),\ \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ a.î. (1).

$f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$(1) \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_2 \\ -(b+c)\lambda_1 - (a+c)\lambda_2 - (a+b)\lambda_3 = a_1 \\ bc\lambda_1 + ac\lambda_2 + ab\lambda_3 = a_0 \end{cases} \qquad (***)$$

care este compatibil pt. că det. său este nenul $\Rightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ a.î. (1).

b) $\underbrace{(1-2)}_{(-1)} \cdot \underbrace{(2-3)}_{(-1)} \cdot \underbrace{(3-1)}_{2} \neq 0$. $\quad (-1)\cdot(-1)\cdot 2 = 2$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -1 \\ -5\lambda_1 - 4\lambda_2 - 3\lambda_3 = 2 \\ 6\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \end{cases}$$

Rescrieți pe (***), rezolvați $\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (temă).

(8) Fie $n \in \mathbb{N}$ și $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin^n x$. Să se arate că $L = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este o submulțime liberă a $\mathbb{R}$-sp. vect. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

L liberă $\iff \forall k \in \mathbb{N}, \forall i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$, $f_{i_1}, \dots, f_{i_k}$ l. indep.

<u>Soluția 1</u>: Fie $f_{i_1}, \dots, f_{i_k} \in L$, $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ distincte.

$$\alpha_1 f_{i_1} + \alpha_2 f_{i_2} + \dots + \alpha_k f_{i_k} = \theta \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}) \qquad (1)$$

ca 2 fcții să fie egale trebuie să aibă aceeași lege de compoziție

(1) $\iff \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 \sin^{i_1} x + \dots + \alpha_k \sin^{i_k} x = 0$$

$\sin x = t$

$\iff \forall t \in [-1, 1]$, $\alpha_1 t^{i_1} + \dots + \alpha_k t^{i_k} = 0$

$\iff t$ este rădăcină a polinomului $\alpha_1 X^{i_1} + \dots + \alpha_k \cdot X^{i_k} \in \mathbb{R}[X]$.

$\Rightarrow \alpha_1 X^{i_1} + \alpha_2 X^{i_2} + \dots + \alpha_k X^{i_k} = 0$ (având o infinitate de răd.)

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$

Prin urmare, L liberă.

<u>Soluția 2</u>:

Fie $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_k} \in L$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ nr. naturale,

$f_{i_1}, \dots, f_{i_k} \overset{?}{}$ liniar indep.

$m = \max\{i_1, \dots, i_k\}$

Este destul să arătăm că $f_0, f_1, \dots, f_m$ liniar independenți.

$$\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_m f_m = \theta \quad (\alpha_0, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot \sin x + \dots + \alpha_m \cdot \sin^m x = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. $\qquad (2)$

Fie $x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ a.î. $\sin x_i \neq \sin x_j$, $\forall i, j \in \{0, \dots, m\}$, $i \neq j$.

Din (2) $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 \sin x_0 + \alpha_2 \sin^2 x_0 + \dots + \alpha_m \sin^m x_0 = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 \sin x_1 + \alpha_2 \sin^2 x_1 + \dots + \alpha_m \sin^m x_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1 \sin x_m + \alpha_2 \sin^2 x_m + \dots + \alpha_m \sin^m x_m = 0 \end{cases}$$

Determinantul sistemului este:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin x_0 & \sin^2 x_0 & \dots & \sin^m x_0 \\ 1 & \sin x_1 & \sin^2 x_1 & \dots & \sin^m x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \sin x_m & \sin^2 x_m & \dots & \sin^m x_m \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le m} (\sin x_j - \sin x_i) \overset{0}{\not\equiv} \neq 0$$

$\Rightarrow$ singura soluție a sistemului este $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$.

Lista 11

(1.) Fie $p \in \mathbb{N}$ nr. prim. Să se arate că operațiile uzuale de adunare și înmulțire pe

$$V = \{ a + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} \mid a, b, c \in \mathbb{Q} \}$$ $\to$ submulț. a lui $\mathbb{R}$

form. o structură de $\mathbb{Q}$ - sp. vectorial și să se determine o bază și dimensiunea lui ${}_{\mathbb{Q}}V$.

V $\mathbb{Q}$ - sp. vectorial. ?

· Varianta 1 : pe baza def.

· Varianta 2 : Orice corp com. poate fi privit ca un ~~subspațiu~~ sp. vectorial peste orice subcorp al său.

K corp, S subcorp în K.

$+ : K \times K \to K$, $(K, +)$ grup abelian.

$\cdot : S \times K \to K$, $(\underset{S}{\alpha}, \underset{K}{x}) \mapsto \alpha \cdot x \in K$ produs din K. verifică 1) - 4) din def. sp. vect.

$\hookrightarrow$ restricționăm op. de înmulțire

$\Rightarrow K$ S - sp. vect.

În cazul nostru, $\mathbb{R}$ $\mathbb{Q}$ - sp. vect., $V \overset{?}{\le}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$

V subcorp. în $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
$\Downarrow$ $(V, +, \cdot)$ corp com.
$\mathbb{Q}$ subcorp în $(V, +, \cdot)$
$\Rightarrow V$ $\mathbb{Q}$ - sp vect.

· Varianta 3 : V subcorp în $\mathbb{R}$ ce conține pe $\mathbb{Q}$ ca subcorp. (?)

Temă: Varianta 2 (Var. 3 doar pt. cei interesați).

$\forall z \in V$, $\exists a, b, c \in \mathbb{Q}$ a.î. $z = a \cdot 1 + b \cdot \sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \{ a \cdot 1 + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} \mid a, b, c \in \mathbb{Q} \} = \langle 1, \sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{p^2} \rangle$

$1, \sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{p^2}$ l. indep. $\Rightarrow (1, \sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{p^2})$ bază în ${}_{\mathbb{Q}}V \Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}} V = 3$

$(a \cdot 1 + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} = 0 \Rightarrow a = b = c = 0)$

$\sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{p^2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$\begin{array}{l} a + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} = 0 \;/\sqrt[3]{p} \\ cp + a\sqrt[3]{p} + b\sqrt[3]{p^2} = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot(-b) \\ \cdot c \end{array} \right. + \Rightarrow c^2 p - ab + (ac - b^2)\sqrt[3]{p} = 0$$

Presupunând că $ac - b^2 \neq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{p} = \frac{ab - c^2 p}{ac - b^2} \in \mathbb{Q}$ imposibil.

Prin urmare $ac - b^2 = 0 / \cdot b$

$$\Rightarrow c^2 p - ab = 0 / \cdot c \quad +$$

$$c^3 p - b^3 = 0$$

Pp. că $c^3 \neq 0 \Rightarrow p = \frac{b^3}{c^3} \Rightarrow \sqrt[3]{p} = \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$ fals.

Așadar $c = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = 0$.

• $\dim_{\mathbb{Q}} V = 3$ (V $\mathbb{Q}$-sp. vect. ; $X = \{1, \sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{p^2}\}$ bază în $V \Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}} V = |X| = 3$)

Reamintim

1) V, V' K-sp. vect., $f : V \to V'$ transf. liniară, $\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.

2) V K-sp. vect., $A, B \leq_K V$. Atunci
$\dim A + \dim B = \dim (A + B) + \dim (A \cap B)$.

3) Fie V K-sp. vect., $\dim V < \infty$.
$A \leq_K V$, $\dim A = \dim V \Rightarrow A = V$.

Atenție! Dacă $\dim V = \infty$ prop. de mai sus nu e, în general, adevărată.

dem: $V = \mathbb{R}[X]$, $K = \mathbb{R}$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X] = |\mathbb{N}| (= \aleph_0)$ alef ($\{1, X, \dots, X^n, \dots\}$ bază în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[X]$)

$A = <\underbrace{1, X^2, X^4, \dots, X^{2n}, \dots}_{\text{liberă = bază pt. } A}> \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} A = |\{1, X^2, X^4, \dots\}| = |\mathbb{N}| (= \aleph_0) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]$

$\mathbb{N} \to \{1, X^2, \dots, X^{2n}, \dots\}$, $k \to X^{2k}$ bijecție.

$A \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]$

$A \neq \mathbb{R}[X]$.

$\not\ni X$