Clase de relații omogene

- **Def** Fie $\rho = (A, A, R)$ o rel. omogenă. Spunem că ρ este
  - reflexiv, dc $\forall x \in A$, $x \rho x$
  - tranzitiv, dc $\forall x, y, z \in A$ $x \rho y$ și $y \rho z \rightarrow x \rho z$
  - simetric, dc $\forall x, y \in A$ $x \rho y \rightarrow y \rho x$
  - antisim., dc $\forall x, y \in A$ $x \rho y$ și $y \rho x \rightarrow x = y$.

$\underbrace{\text{reflexiv + tranzitiv}}_{\text{rel. de preordine}}$ $\times$ simetric = rel. de echiv.

$\times$ antisimetric = rel. de ordine.

- **Obs.**

1) ρ este reflexiv $\Leftrightarrow$ $1_A \subseteq \rho$
2) ρ este tranzitiv $\Leftrightarrow$ $\rho^2 \subseteq \rho$
3) ρ este simetric $\Leftrightarrow$ $\rho = \rho^{-1}$.
4) ρ este antisimetric $\Leftrightarrow$ $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq 1_A$

- Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție, at. putem defini rel. $\ker f$:

$$x_1 \ker f \, x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

- Dacă ρ este o rel. de echiv. at.:

$$[x] = \rho\langle x \rangle = \{ y \in A \mid x \rho y \}.$$

clasa lui x. x este doar un reprezentant.

$\underbrace{A/\rho}_{\text{mulțimea factor a lui } A \text{ modulo } \rho}$ $= \{ [x] \mid x \in A \}$ (mulț. tuturor claselor de echiv. ale lui A)

Def $\pi \subseteq \mathcal{P}(A)^*$ s.n partiție a lui A dc:

$\forall x \in A, \exists!\, B \in \pi$ aî $x \in B$.

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \bigcup\limits_{B \in \pi} B = A \\ B \cap B' = \emptyset, \ \forall B, B' \in \pi, \ B \neq B'. \end{cases}$$

Th. 1) Dc. ρ este rel de echiv pe A at A/ρ este o partiție a lui A.

2) Dc π este o partiție a lui A at ρ_π este o rel de echiv.

unde $\rho_\pi = (A, A, \rho_\pi)$, iar $x \rho_\pi y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists B \in \pi$ aî $x, y \in B$.

Ex 69/pg 39

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

a) $\rho = \{(1,1)\ (2,2)\ (3,3)\ (4,4)\ (1,2)\ (2,1)\ (1,3)\ (3,1)\ (2,3)\ (3,2)\}$

Să se determine partiția A/ρ

$\pi = \{\{1,2\}\ \{3\}\ \{4\}\}$ $\quad \rho_\pi = ?$

Sol $\rho\langle 1\rangle = \{1, 2, 3\}$

$\rho\langle 2\rangle = \{1, 2, 3\}$

$\rho\langle 3\rangle = \{1, 2, 3\}$

$\rho\langle 4\rangle = \{4\}$

$A/\rho = \{\{1,2,3\}\ \{4\}\}$ este partiție deci ρ este relație de echivalență

b) $\rho_\pi = \{(1,1)\ (1,2)\ (2,1)\ (2,2)\ (3,3)\ \ (4,4\}$

$\rho_\pi\langle 1\rangle = \{1,2\} = \rho_\pi\langle 2\rangle$ • Dacă $\pi = \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$, să se determine rel. de echiv. coresp.

$\rho_\pi\langle 3\rangle = \{3\}$

$\rho_\pi\langle 4\rangle = \{4\}$

$A/_{\rho_\pi} = \tilde{\pi}$

Exercițiul 70: Să se determine toate rel de echivalență pe o mulțime cu 1, 2, 3, resp 4 elemente.

Soluție: Vom scrie toate partițiile unei mulțimi cu 1, 2, 3 resp. 4 elemente și apoi rel de echivalență coresp.

• Fie $A=\{1\}$, $\pi = \{\{1\}\}$ $\rho_\pi = \{(1,1)\}$

• Fie $A=\{1,2\}$; $\pi_1 = \{\{1,2\}\}$ $\rho_{\pi_1} = \{(1,1)(1,2)\ (2,1)(2,2)\}$

$\pi_2 = \{\{1\},\{2\}\}$ $\rho_{\pi_2} = \{(1,1),(2,2)\} = 1_A$

• Fie $A=\{1,2,3\}$ $\pi_1 = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

$\pi_2 = \{\{1\},\{2,3\}\}$

$\pi_3 = \{\{1,2\},\{3\}\}$

$\pi_4 = \{\{1,3\},\{2\}\}$

$\pi_5 = \{\{1,2,3\}\}$

Temă pentru A={1,2,3,4}

Ex. 73/pg. 39 Fie ρ_1 şi ρ_2 două relaţii de echiv. pe mult. A.

S' arăt. a) ρ_1^{-1} şi $\rho_1 \cap \rho_2$ sunt rel. de echiv. (chiar $\bigcap_{i \in I} \rho_i$)

b) C_{ρ_1} şi $\rho_1 \cup \rho_2$ în general NU sunt rel. de echiv.

c) $\rho_1 \circ \rho_2$ este rel de echiv $\Leftrightarrow$ $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$.

În acest caz $\rho_1 \circ \rho_2$ este cea mai mică rel. de echiv. ce conţine pe ρ_1 şi ρ_2.

Soluţie: a) ρ_1 este simetrică $\Rightarrow \rho_1^{-1} = \rho_1 \Rightarrow \rho_1^{-1}$ rel de echiv.

ρ_1 şi ρ_2 rel de echiv $\Rightarrow$

* ρ_1 şi ρ_2 reflexive $\Rightarrow \forall a \in A$ $a \rho_1 a$ şi $a \rho_2 a \Rightarrow a\, \rho_1 \cap \rho_2\, a$ $\Leftrightarrow$ $\rho_1 \cap \rho_2$ reflexivă

* ρ_1 şi ρ_2 tranzitive

Fie $a, b, c \in A$ a.î. $a\, \rho_1 \cap \rho_2\, b$ şi $b\, \rho_1 \cap \rho_2\, c$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{cases} a \rho_1 b \text{ şi } b \rho_1 c \xRightarrow{\rho_1 \text{ tranz}} a \rho_1 c \\ a \rho_2 b \text{ şi } b \rho_2 c \xRightarrow{\rho_2 \text{ tranz}} a \rho_2 c \end{cases}\right| \Rightarrow a\, \rho_1 \cap \rho_2\, c \Rightarrow \rho_1 \cap \rho_2 \text{ tranzitivă}$$

* ρ_1 şi ρ_2 simetrice

Fie $a, b \in A$ a.î. $a\, \rho_1 \cap \rho_2\, b \Rightarrow a \rho_1 b$ şi $a \rho_2 b$

$\Downarrow \rho_1$ sim. $\qquad \Downarrow \rho_2$ sim.

$\underbrace{b \rho_1 a \qquad b \rho_2 a}$

$\Rightarrow b\, \rho_1 \cap \rho_2\, a \Rightarrow \rho_1 \cap \rho_2$ sim.

Aşadar $\rho_1 \cap \rho_2$ este o rel. de echiv.

b) C_{ρ_1} clar NU este reflexivă $\Rightarrow$ NU este o rel. de echiv.

Contraexemplu pt. $\rho_1 \cup \rho_2$: $A = \{1, 2, 3\}$ $\rho_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$

$\rho_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,1)\}$. P.p. RA $\rho_1 \cup \rho_2$ rel de echiv.

$$\left.\begin{matrix} 1 \rho_1 2 \Rightarrow 1\, \rho_1 \cup \rho_2\, 2 \\ 3 \rho_2 1 \Rightarrow 3\, \rho_1 \cup \rho_2\, 1 \end{matrix}\right| \Rightarrow 3\, \rho_1 \cup \rho_2\, 2, \text{ dar } 3 \not\rho_2 2 \text{ şi } 3 \not\rho_1 2. \quad \square$$

c) „$\Rightarrow$" Pp. $\rho_1 \circ \rho_2$ rel. de echiv. Vrem $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$.

Fie $a, b \in A$ ai $a \rho_1 \circ \rho_2 b$ $\quad \exists c \in A \cap A = A$ ai

$b \rho_2 c$ și $c \rho_1 a$ $\quad \overset{\text{sim.}}{\Downarrow}$ $b \rho_1 \circ \rho_2 a \xLeftrightarrow[\text{sim.}]{\rho_1, \rho_2} a \rho_1 c$ și $c \rho_2 b$

Vrem $a \rho_2 \circ \rho_1 b \Leftrightarrow \exists d \in A \cap A = A$ ai $a \rho_1 d$ și $d \rho_2 b$.

„$\Leftarrow$" Pp. $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$. Vrem $\rho_1 \circ \rho_2$ rel. de echiv.

- Fie $a \in A$

$\left.\begin{array}{l} \rho_2 \text{ refl} \Rightarrow a \rho_2 a \\ \rho_1 \text{ refl} \Rightarrow a \rho_1 a \end{array}\right| \Rightarrow a \rho_1 \circ \rho_2 a \Rightarrow \rho_1 \circ \rho_2$ reflexivă.

- $\rho_1 \circ \rho_2$ tranzitivă $\Leftrightarrow (\rho_1 \circ \rho_2)^2 \subseteq \rho_1 \circ \rho_2$

$$(\rho_1 \circ \rho_2)^2 = \rho_1 \circ \underbrace{\rho_2 \circ \rho_1} \circ \rho_2 \ \# \ \rho_1 \circ \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_2 = \rho_1^2 \circ \rho_2^2 \overset{\rho_1, \rho_2 \text{ tranz}}{\subseteq} \rho_1 \circ \rho_2.$$

- $\rho_1 \circ \rho_2$ simetrică $\Leftrightarrow \rho_1 \circ \rho_2 = (\rho_1 \circ \rho_2)^{-1}$.

$$(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1} \overset{\rho_1, \rho_2 \text{ sim}}{=} \rho_2 \circ \rho_1 \ \# \ \rho_1 \circ \rho_2.$$

- Pp că $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$, i.e $\rho_1 \circ \rho_2$ este rel. de echiv.

Trebuie dem. că (1) $\rho_1, \rho_2 \subseteq \rho_1 \circ \rho_2$

(2) $\rho_1 \circ \rho_2$ este cea mai mică rel de echiv cu prop(1)

(1): Pp. $x \rho_1 y$. Cum $y \rho_2 y \Rightarrow x \rho_2 \circ \rho_1 y \ \# \ x \rho_1 \circ \rho_2 y \Rightarrow \rho_1 \subseteq \rho_1 \circ \rho_2$

Analog $\rho_2 \subseteq \rho_1 \circ \rho_2$.

(2): Pp că $\exists$ o rel. de echiv π ai $\rho_1, \rho_2 \subseteq \pi$

Vrem $f_1 \circ f_2 \subseteq \pi$.

Fie $a\, f_1 \circ f_2\, b \Rightarrow \exists x \in A \cap A = A$ a.î. $a f_2 x$ și $x f_1 b$

$\xRightarrow{f_1, f_2 \subseteq \pi} \exists x \in A$ a.î. $a \pi x$ și $x \pi b \Rightarrow a\, \pi \circ \pi\, b$

$\Rightarrow a\, \pi^2\, b \xRightarrow{\pi \text{ tranz.}} a \pi b$. Așadar $f_1 \circ f_2 \subseteq \pi$.

Ex 76/pg 39 Dacă $f : A \to B$ o funcție, atunci:

3) f este injectiv $\Longleftrightarrow \ker f = 1_A$.

Recap: $\ker f \subseteq A \times A$, $x_1 \ker f\, x_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} f(x_1) = f(x_2)$.

Așadar este clar că $\forall f : A \to B$, $1_A \subseteq \ker f$.

Prin urmare dem că: f este inj $\Leftrightarrow \ker f \subseteq 1_A$.

„$\Rightarrow$". Știm f inj. Vrem $\ker f \subseteq 1_A$.

Fie $a_1, a_2 \in A$ a.î. $a_1 \ker f\, a_2$. Vrem $a_1 = a_2$

$\Downarrow$

$f(a_1) = f(a_2) \nearrow f$ inj.

„$\Leftarrow$" Știm $\ker f \subseteq 1_A$. Vrem f inj.

Fie a_1, a_2 a.î. $f(a_1) = f(a_2)$. Vrem $a_1 = a_2$

$\Downarrow$

$a_1 \ker f\, a_2 \xRightarrow{\ker f \subseteq 1_A} a_1 1_A a_2$. $\square$.

Restul temă.

Teorema I de factorizare

Dacă $f: A \to B$ atunci $\exists!$ fct. bij. $\bar{f}$ a.î. urm. diagr. este comutativă:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & B \\
A/\ker f \arrow[r, hook, two heads] & \operatorname{Im} f \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

$\bar{f}(\ker f\langle x \rangle) = f(x), \ \forall x \in A.$

$\boxed{Ex}$ Să se aplice teorema I de factorizare în cazul funcției $f: A \to B$, unde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, iar f este definită astfel:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	c	c	d	c	a	c	a	a.

$\ker f\langle 1 \rangle = \{1, 2, 4, 6\} = \ker f\langle 2 \rangle = \ker f\langle 4 \rangle = \ker f\langle 6 \rangle$

...

$\operatorname{Im} f = \{a, c, d\}.$

$\ker f = (A, A, \{(1,1), (2,2), \ldots, (8,8), (1,2), (2,1), (1,4), (4,1), (2,4), (4,2), (1,6), (6,1), (2,6), (6,2), (4,6), (6,4), (5,7), (7,5), (5,8), (8,5), (7,8), (8,7)\})$

$A/\ker f = \{ \underbrace{\{1, 2, 4, 6\}}_{=\hat{1}}, \underbrace{\{3\}}_{=\hat{3}}, \underbrace{\{5, 7, 8\}}_{=\hat{5}} \}$ $\quad \bar{f}: A/\ker f \to \operatorname{Im} f.$

x	$\hat{1}$	$\hat{3}$	$\hat{5}$
$\bar{f}(x)$	c	d	a.