4.12.2020

Seminar 10 gr. 314

1. Formați ecuația cercului care trece prin punctul $A(1,-1)$ și prin punctele de intersecție ale cercurilor

$$x^2+y^2+2x-2y-23=0$$
$$x^2+y^2-6x+12y-35=0$$

Soluție (Fascicul de cercuri).

$$\mathcal{C}_\lambda : x^2+y^2+2x-2y-23+\lambda(x^2+y^2-6x+12y-35)=0$$

$$(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2+2(1-3\lambda)x-2(1-6\lambda)y-23-35\lambda=0$$

$$A\in\mathcal{C}_\lambda \Rightarrow 1+\lambda+1+\lambda+2-6\lambda+2-12\lambda-23-35\lambda=0$$

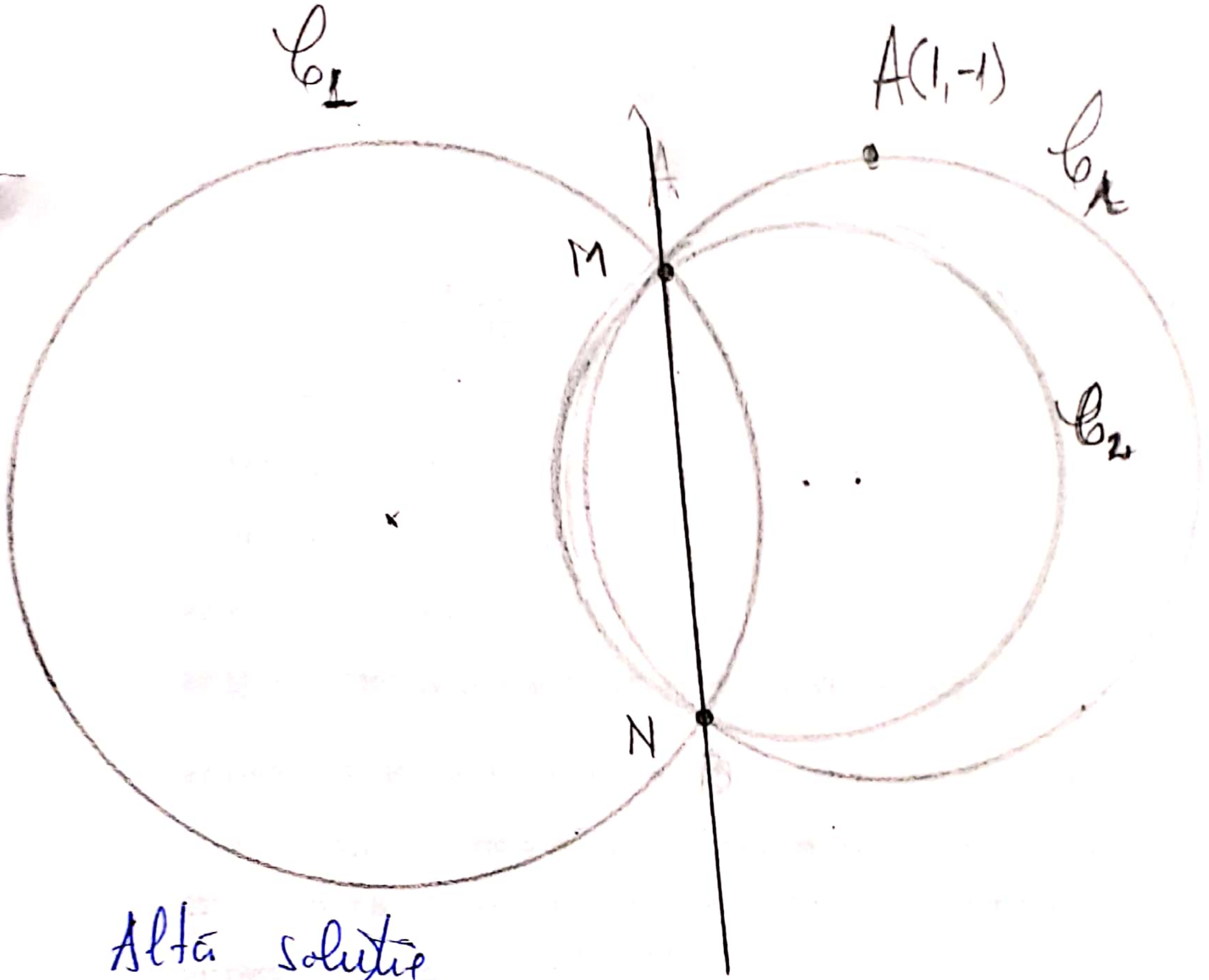
$$\Leftrightarrow -51\lambda-17=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=-\frac{1}{3}}$$

$$\mathcal{C}: x^2+y^2+2x-2y-23-\frac{1}{3}(x^2+y^2-6x+12y-35)=0$$

$$3x^2+3y^2+6x-6y-69-x^2-y^2+6x-12y+35=0$$

$$2x^2+2y^2+12x-18y-34=0 \quad |:2$$

$$\boxed{x^2+y^2+6x-9y-17=0}$$



<u>Altă soluție</u>

- Scădem ecuațiile cercurilor și obținem ecuația dreptei MN (coarda comună).

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-2y-23=0 \\ x^2+y^2-6x+12y-35=0 \quad \Big| \cdot(-1) \end{cases}$$

$$8x-14y+12=0 \quad |:2 \iff \boxed{4x-7y+6=0} \text{ MN.}$$

- Se rezolvă sistemul $\begin{cases} \mathcal{C}_1=0 \\ MN \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-2y-23=0 \\ 4x-7y+6=0 \end{cases}$$

$$x=\frac{7y-6}{4}$$

$$\left(\frac{7y-6}{4}\right)^2+y^2+2\cdot\frac{7y-6}{4}-2y-23=0$$

$$\frac{49y^2-84y+36}{16}+y^2+\frac{7y-6}{2}-2y-23=0$$

$$49y^2-84y+36+16y^2+56y-48-32y-368=0$$

$$65y^2-60y-380=0 \Leftrightarrow$$

$$13y^2-12y-76=0 \Rightarrow \begin{cases} y_1=\frac{38}{13} \\ y_2=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{7\cdot\frac{38}{13}-6}{4}=\frac{266-78}{52}=\frac{188}{52}=\frac{47}{13}$$

$$x_2=\frac{7(-2)-6}{4}=-\frac{20}{4}=-5$$

$M(-5,-2)$ $\quad$ $A(1,-1)$

$N\left(\frac{47}{13},\frac{38}{13}\right)$.

Ecuația cercului: $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 29 & -5 & -2 & 1 \\ \left(\frac{47}{13}\right)^2+\left(\frac{38}{13}\right)^2 & \frac{47}{13} & \frac{38}{13} & 1 \end{vmatrix}=0$ etc.

(2). Determinați ecuațiile tangentei la elipsa $\mathcal{E}: \frac{x^2}{10} + \frac{2y^2}{5} = 1$ paralele la dreapta $d: 3x + 2y + 7 = 0$.

<u>Soluție</u> $m_d = -\frac{3}{2}$

$d' \parallel d$ $\begin{cases} d': y = -\frac{3}{2}x + m \\ \mathcal{E}: \frac{x^2}{10} + \frac{2y^2}{5} = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{10} + \frac{^{2)}2\left(\frac{9}{4}x^2 - 3mx + m^2\right)}{5} = {}^{10)}1$$

$$x^2 + 9x^2 - 12mx + 4m^2 - 10 = 0$$

$$10x^2 - 12mx + 4m^2 - 10 = 0 \quad |:2$$

$$5x^2 - 6mx + 2m^2 - 5 = 0$$

$$\Delta = 36m^2 - 40m^2 + 100 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4m^2 + 100 = 0 \Leftrightarrow m_{1,2} = \pm 5$$

$$\Rightarrow d_1': y = -\frac{3}{2}x + 5 \Leftrightarrow \boxed{3x + 2y - 10 = 0}$$

$$d_2': y = -\frac{3}{2}x - 5 \Leftrightarrow \boxed{3x + 2y + 10 = 0}$$

(3) O elipsă trece prin punctul $A(4,-1)$ și este tangentă dreptei $x+4y-10=0$. Determinați ecuația acestei elipse știind că axele sale coincid cu axele de coordonate.

Soluție. Ecuația elipsei:

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$A(4,-1)$ aparține elipsei $\Rightarrow$

$$\frac{16}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \quad (1)$$

$$d: x+4y-10=0 \Rightarrow x = -4y+10$$

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(-4y+10)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

din (1) $\Rightarrow \frac{1}{b^2} = 1 - \frac{16}{a^2}$; înlocuim în (2).

$$\frac{16y^2 - 80y + 100}{a^2} + y^2\left(1 - \frac{16}{a^2}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{16y^2} - 80y + 100 + a^2y^2 - \cancel{16y^2} - a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2y^2 - 80y + 100 - a^2 = 0. \quad \Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6400 - 4a^2(100 - a^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a^4 - 400a^2 + 6400 = 0 \;|:4 \Leftrightarrow a^4 - 100a^2 + 1600 = 0$$

$$a^2 = t \Rightarrow t^2 - 100t + 1600 = 0 \quad t_{1,2} = \begin{cases} 20 \\ 80 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 = 20 \Rightarrow \frac{1}{b^2} = 1 - \frac{16}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1}$$

$$a^2 = 80 \Rightarrow \frac{1}{b^2} = 1 - \frac{16}{\underset{-5-}{80}} = \frac{64}{80} = \frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{\frac{4}{5}} = 1}$$

4. Calculați aria triunghiului format de asimptotele hiperbolei $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ și de dreapta $9x+2y-24=0$

Soluție. $a=2,\ b=3.$

Ecuațiile asimptotelor: $y=\pm\frac{b}{a}x \Leftrightarrow \boxed{y=\pm\frac{3}{2}x}$

Un vârf al triunghiului este $O(0,0)$.

$$\begin{cases} 9x+2y-24=0 \\ y=\frac{3}{2}x \end{cases} \Rightarrow 9x+3x-24=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=3$$

$$\begin{cases} 9x+2y-24=0 \\ y=-\frac{3}{2}x \end{cases} \Rightarrow 9x-3x-24=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow y=-6.$$

$A(2,3),\ B(4,-6)$

$$\mathcal{A}_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot|-24|=12.$$

5. Determinați ecuația tangentei la parabola $y^2=12x$ paralelă cu dreapta $3x-2y+30=0$ și calculați distanța dintre tangentă și dreaptă.

Soluție. $m_d=\frac{3}{2}$

$m_t=\frac{3}{2}$ ec. tangentei: $t: y=\frac{3}{2}x+n$

$$y^2=12x \Rightarrow \left(\frac{3}{2}x+n\right)^2-12x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}x^2+3nx+n^2-12x=0.$$

$9x^2 + 12mx + 4m^2 - 48x = 0$

$9x^2 + 12(m-4)x + 4m^2 = 0$

$\Delta = 144(m-4)^2 - 16 \cdot 9m^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 144(m^2 - 8 \cdot m + 16) - 144m^2 = 0 \quad | : 144$

$\cancel{m^2} - 8m + 16 - \cancel{m^2} = 0 \Rightarrow m = 2$

$t: y = \frac{3}{2}x + 2 \Leftrightarrow \boxed{t: 3x - 2y + 4 = 0}$

$\boxed{d: 3x - 2y + 30 = 0}$

$A(-10, 0) \in d. \Rightarrow d(t,d) = d(A,t) =$

$= \frac{|3(-10) - 2 \cdot 0 + 4|}{\sqrt{9+4}} = \frac{|-26|}{\sqrt{13}} = \frac{26 \cdot \sqrt{13}}{13} = 2\sqrt{13}$ #.

(6). Scrieți ecuațiile tangentelor la parabola $y^2 = 36x$ duse prin punctul $A(2, 9)$.

Soluție. $y - 9 = m(x-2)$ - ecuațiile dreptelor care trec prin $A(2,9)$. Formăm sistemul:

$\begin{cases} y^2 = 36x \\ y - 9 = m(x-2) \end{cases} \Rightarrow$

$[9 + m(x-2)]^2 = 36x \Leftrightarrow (9 + mx - 2m)^2 = 36x$

$\Leftrightarrow 81 + m^2x^2 + 4m^2 + 18mx - 36m - 4m^2x - 36x = 0$

$\Leftrightarrow m^2x^2 - (4m^2 - 18m + 36)x + 4m^2 - 36m + 81 = 0$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \left(4m^2-18m+36\right)^2 - 4m^2\left(4m^2-36m+81\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(2m^2-9m+18\right)^2 - 4m^2\left(4m^2-36m+81\right) = 0 \quad \Big|:4$$

$$\cancel{4m^4} + \cancel{81m^2} + 324 - \cancel{36m^3} - 324m + 72m^2 -$$

$$- \cancel{4m^4} + \cancel{36m^3} - \cancel{81m^2} = 0 \Leftrightarrow 72m^2 - 324m + 324 = 0 \quad \Big|:36$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 9m + 9 = 0 \Leftrightarrow m_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{4} = \frac{9 \pm 3}{4} = \begin{cases} 3 \\ \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_1 : y - 9 = 3(x-2) \Leftrightarrow \boxed{3x - y + 3 = 0}$$

$$t_2 : y - 9 = \frac{3}{2}(x-2) \Leftrightarrow 2y - 18 = 3x - 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{3x - 2y + 12 = 0}.$$