CURS 4

Rangul unei matrice

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$, K corp comutativ.

Definiţia 1. Fie $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \in \mathbb{N}^*$ cu $1 \le i_1 < \dots < i_k \le m$ şi $1 \le j_1 < \dots < j_l \le n$. O matrice

$$\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_lj_1} & a_{i_lj_2} & \dots & a_{i_lj_k} \end{pmatrix}$$

Obs: $\exists\ C_m^k \cdot C_n^k$ submatrici de tipul (k, l) ale lui A (nu neapărat diferite)

formată din elementele matricei A situate la intersecţiile liniilor $i_1, \dots, i_k$ cu coloanele $j_1, \dots, j_l$ se numeşte **submatrice a matricei** A de tipul (k, l). Determinantul unei submatrice de tipul (k, k) se numeşte **minor de ordinul** k **al matricei** A. Formarea unui minor de ordinul $k+1$ prin adăugarea unei linii şi unei coloane la un minor de ordinul k se numeşte **bordare**.

Definiţia 2. Fie $A \in M_{m,n}(K)$. Dacă A este nenulă, adică $A \neq O_{m,n}$, spunem că **rangul matricei** A este r, şi scriem $\operatorname{rang} A = r$, dacă există un minor de ordinul r al lui A nenul şi toţi minorii lui A de ordin mai mare decât r (dacă există) sunt nuli. Prin definiţie, $\operatorname{rang} O_{m,n} = 0$. $(r \in \mathbb{N})$

Observaţia 3. a) $\operatorname{rang} A \le \min\{m, n\}$.
b) Dacă $A \in M_n(K)$ atunci $\operatorname{rang} A = n$ dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$.
c) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} {}^tA$.

În continuare vom considera $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ şi $A \neq O_{m,n}$.

Determinarea rangului matricei A după definiţie necesită, în general, calculul unui număr mare de minori. Teorema următoare este un prim pas pentru a reduce numărul acestor calcule.

Teorema 4. $\operatorname{rang} A = r$ dacă şi numai dacă există un minor de ordinul r al lui A nenul şi toţi minorii lui A de ordinul $r+1$ (dacă există) sunt nuli.

Demonstraţie. „$\Rightarrow$" evidentă

„$\Leftarrow$" Din dezv. unui determinant după o linie (col.) se deduce că orice minor de ordinul $r+2$ este o comb. liniară de minori de ordinul $r+1$ $\Rightarrow$ toţi minorii de ordinul $r+2$ sunt nuli ş.a.m.d.

Obs: Pres. că $\operatorname{rang} A = r$ şi am găsit un minor nenul de ordin r, folosind definiţia, mai avem de calculat
$C_m^{r+1} C_n^{r+1} + C_m^{r+2} C_n^{r+2} + \dots$

T4

Teorema 5. Rangul matricei A este numărul maxim de coloane (linii) ce se pot alege dintre coloanele (liniile) lui A astfel încât nici una să nu fie o combinaţie liniară a celorlalte.

Demonstraţie. Să considerăm că matricea A are rangul r. Atunci A un minor de ordinul r nenul. Pentru a nu complica notaţiile, putem presupunem că

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

şi orice minor de ordinul $r+1$ este zero. (Demonstraţia cazului general nu prezintă alte dificultăţi decât, eventual, de notaţie.) Prin urmare, determinantul

$$D_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

de ordinul $r+1$, obţinut prin adăugarea la d a liniei i şi a coloanei j, cu $1 \leq i \leq m$ şi $r < j \leq n$, este zero, adică $D_{ij} = 0$. Să observăm că dacă $1 \leq i \leq r$ atunci D_{ij} are două linii egale, iar dacă $r < i \leq m$ şi $r < j \leq n$, atunci D_{ij} se obţine din d prin bordarea lui d cu linia i şi coloana j. Dezvoltând determinantul D_{ij} după linia $r+1$ primim

$$a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + \cdots + a_{ir}d_r + a_{ij}d = 0$$

unde complemenţii algebrici $d_1, d_2, \dots, d_r$ nu depind de linia adăugată. Rezultă

$$a_{ij} = -d^{-1}d_1 a_{i1} - d^{-1}d_2 a_{i2} - \cdots - d^{-1}d_r a_{ir}$$

pentru $i = 1, 2, \dots, m$ şi $j = r+1, \dots, n$ ceea ce ne arată că

$$c_j = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_r c_r \text{ pentru } j = r+1, \dots, n,$$

unde $\alpha_k = -d^{-1}d_k$, $1 \leq k \leq r$, adică c_j este combinaţie liniară de $c_1, c_2, \dots, c_r$. Astfel am arătat că numărul maxim de coloane ce se pot alege dintre coloanele lui A astfel încât nici una să nu fie o combinaţie liniară a celorlalte este cel mult r. Dacă acest număr ar fi strict mai mic decât r, ar rezulta că una dintre coloanele $c_1, \dots, c_r$ ar fi o combinaţie liniară a celorlalte, ceea ce ar implica $d = 0$ ceea ce este fals. Aşadar, numărul maxim de coloane ce se pot alege dintre coloanele lui A astfel încât nici una să nu fie o combinaţie liniară a celorlalte este egal cu r, ceea ce completează demonstraţia teoremei.

Corolarul 6. $\operatorname{rang} A = r$ dacă şi numai dacă există un minor nenul d de ordinul r al lui A şi toate celelalte linii (coloane) ale lui A sunt combinaţii liniare de liniile (coloanele) matricii A ale căror elemente formează pe d.

Corolarul 7. Dacă $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ şi $B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(K)$ (K corp comutativ), atunci $\operatorname{rang}(AB) \leq \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}$.

Dacă vreuna dintre cele două matrici este nulă, proprietatea este evidentă. Putem, aşadar, să considerăm că ambele matrici sunt nenule şi că

$$\min\{\operatorname{rang} A,\ \operatorname{rang} B\} = \underline{\operatorname{rang} B} = r \in \mathbb{N}^*$$

şi că un minor nenul al lui B „se decupează" din coloanele $\underline{j_1, \ldots, j_r}$ cu $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq p$. (Pentru celălalt caz, reformulăm proprietatea pentru transpuse şi aceeaşi soluţie va conduce la rezultatul dorit.) Coloanele lui AB sunt

$$A\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix}, \ldots,\ A\begin{pmatrix} b_{1p} \\ b_{2p} \\ \vdots \\ b_{np} \end{pmatrix}.$$

Conform corolarului 6, pentru orice $k \in \{1, \ldots, p\} \setminus \underline{\{j_1, \ldots, j_r\}}$, există $\alpha_{1k}, \ldots, \alpha_{rk} \in K$ astfel ca

$$A \cdot \Bigg\{ \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = \alpha_{1k}\begin{pmatrix} b_{1j_1} \\ b_{2j_1} \\ \vdots \\ b_{nj_1} \end{pmatrix} + \alpha_{2k}\begin{pmatrix} b_{1j_2} \\ b_{2j_2} \\ \vdots \\ b_{nj_2} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_{rk}\begin{pmatrix} b_{1j_r} \\ b_{2j_r} \\ \vdots \\ b_{nj_r} \end{pmatrix}.$$

Rezultă că

$$A\begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = \alpha_{1k} \cdot A\begin{pmatrix} b_{1j_1} \\ b_{2j_1} \\ \vdots \\ b_{nj_1} \end{pmatrix} + \alpha_{2k} A \cdot \begin{pmatrix} b_{1j_2} \\ b_{2j_2} \\ \vdots \\ b_{nj_2} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_{rk} \cdot A\begin{pmatrix} b_{1j_r} \\ b_{2j_r} \\ \vdots \\ b_{nj_r} \end{pmatrix},$$

adică în AB toate coloanele $k \in \{1, \ldots, p\} \setminus \{j_1, \ldots, j_r\}$ sunt combinaţii liniare de coloanele $j_1, \ldots, j_r$. Prin urmare, rangul matricii AB este <u>cel mult</u> r.

Corolarul 8. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi K un corp comutativ. O matrice $A \in M_n(K)$ este inversabilă (în inelul $(M_n(K), +, \cdot)$) dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$.

Într-adevăr, „$\Leftarrow$" o știm din cursul anterior.

„$\Longrightarrow$" A inv. în $M_n(K) \iff \exists\, B \in M_n(K) : AB = I_n = BA$.

$AB = I_n \underset{C7}{\Longrightarrow} n = \operatorname{rang}(I_n) = \operatorname{rang}(AB) \leq \operatorname{rang} A \leq n$

$\Longrightarrow \operatorname{rang} A = n \iff \det A \neq 0$.

(este vorba de $\underbrace{(m-r)\cdot(n-r)}_{\leq C_m^{r+1} C_n^{r+1}}$ minori de ordinul $r+1$)

Corolarul 9. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ şi $A \neq O_{m,n}$. Rangul matricii A este r dacă şi numai dacă există un minor nenul d de ordinul r al lui A şi toţi minorii lui A de ordinul $r + 1$ obţinuţi prin bordarea acestuia (dacă există) sunt nuli.

Procedeu pentru determinarea rangului unei matrici:

Corolarul 9 ne arată că $\operatorname{rang} A$ cu $A \neq O_{m,n}$ se poate determina astfel: se porneşte de la un minor nenul d al lui A şi se calculează minorii care îl bordează pe d până se găseşte unul nenul căruia i se aplică acelaşi procedeu şi se continuă aşa mai departe. După un număr finit de paşi se ajunge la un minor de ordinul r nenul cu proprietatea că toţi minorii care îl bordează sunt zero. Rezultă $r = \operatorname{rang} A$.

Sisteme de ecuaţii liniare

Considerăm un sistem de m ecuaţii liniare cu n necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

unde $a_{ij}, b_j \in K$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$. Fie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Reamintim că matricea $A \in M_{m,n}(K)$ se numeşte **matricea sistemului**, iar matricea $\overline{A}$ de tipul $(m, n+1)$ obţinută din A prin adăugarea coloanei B formată din termenii liberi se numeşte **matricea extinsă a sistemului**. Dacă toţi termenii liberi sunt zero, adică $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, atunci sistemul (1) se numeşte **sistem liniar şi omogen**. Notând

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

sistemul (1) se scrie sub formă de ecuaţie matriceală, astfel:

$$AX = B \tag{2}$$

Sistemul de ecuaţii $AX = O_{m,1}$ se numeşte **sistemul omogen asociat** sistemului $AX = B$.

Definiţia 10. Un n-uplu $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$ se numeşte **soluţie a sistemului** (1) dacă înlocuind în (1) pe x_i cu α_i $(i = 1, \dots, n)$ egalităţile obţinute sunt adevărate. Un sistem de ecuaţii care are cel puţin o soluţie se numeşte **compatibil**. Un sistem de ecuaţii care are o singură soluţie respectiv mai multe soluţii se numeşte **compatibil determinat** respectiv **compatibil nedeterminat**. Un sistem de ecuaţii care nu are soluţii se numeşte **incompatibil**. $(\emptyset \neq \{\emptyset\})$

Observaţiile 11. a) Regula lui Cramer afirmă că în cazul $m = n$ şi $\det A \neq 0$ sistemul (1) este compatibil determinat şi unica sa soluţie poate fi găsită cu formulele lui Cramer.
b) Dacă sistemul (1) este omogen, atunci $(0, 0, \ldots, 0) \in K^n$ este soluţie a sistemului numită **soluţia nulă** sau **soluţia banală**. Deci orice sistem liniar şi omogen este compatibil.

Teorema următoare este un instrument important în studiul compatibilităţii unui sistem de ecuaţii liniare.

Teorema 12. (Kronecker-Cappelli) Sistemul (1) este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse, adică $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A}$.

Demonstraţie. „$\Longrightarrow$" Sistemul (1) este comp. $\Longleftrightarrow \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ a.î.

$$\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_n c_n = c_{n+1} = B,$$

unde $\underbrace{c_1, c_2, \ldots, c_n}_{\text{coloanele lui } A}, c_{n+1}$ sunt coloanele lui $\overline{A}$

Cum $B (= c_{n+1}$ = col. term. liberi) din $\overline{A}$ este o comb. liniară de celelalte coloane $\Longrightarrow$ nr. maxim de col. ce pot fi scoase dintre col. lui $\overline{A}$ a.î. nici una să nu fie comb. liniară de celelalte = nr. max. de col. ale lui A ce pot fi alese a.î. nici una să nu fie comb. liniară de celelalte $\Longleftrightarrow \operatorname{rang} \overline{A} = \operatorname{rang} A$.

„$\Longleftarrow$" $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} \Longrightarrow B = c_{n+1}$ este o comb. liniară a celorlalte col.

$\Longrightarrow \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K :\ \underbrace{\alpha_1 c_1 + \ldots + \alpha_n c_n}_{\text{col. lui } A} = B \Longrightarrow \underbrace{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n}_{\text{sol. a sistemului (1)}}$

Definiţia 13. Fie sistemul (1). Dacă $\operatorname{rang} A = r$ atunci există în A un minor de ordinul r nenul şi toţi minorii din A de ordin mai mare decât r sunt nuli. Un minor al lui A de ordinul r nenul se numeşte **minor principal**. Dacă d_p este un minor principal, atunci minorii de ordinul $r + 1$ ai lui $\overline{A}$ obţinuţi prin bordarea lui d_p cu coloana termenilor liberi şi cu câte o linie care nu intervine în d_p (dacă astfel de minori există) se numesc **minori caracteristici**.

Observaţia 14. Numărul minorilor caracteristici corespunzători unui minor principal este $m - r$.

Teorema 15. (Rouché) Sistemul (1) este compatibil dacă şi numai dacă toţi minorii caracteristici corespunzători unui minor principal, dacă există, sunt nuli.

Corolarul 16. a) Un sistem liniar şi omogen are numai soluţia nulă dacă şi numai dacă numărul necunoscutelor este egal cu rangul sistemului.
b) Un sistem liniar şi omogen de n ecuaţii cu n necunoscute are numai soluţia nulă dacă şi numai dacă determinantul matricei sistemului este diferit de zero.
c) Dacă sistemul (1) este compatibil, atunci acesta are soluţie unică dacă şi numai dacă $\operatorname{rang} A = n$, adică rangul sistemului coincide cu numărul necunoscutelor.

În continuare descriem o metodă de rezolvare a sistemului (1) bazată pe teorema lui Rouché.

O metodă de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare:
Cu ajutorul teoremei lui Rouché studiem compatibilitatea sau incompatibilitatea sistemului (1). Pentru aceasta începem prin a identifica un minor principal d_p. Dacă există un minor caracteristic nenul corespunzător lui d_p, atunci sistemul este incompatibil şi procedeul se încheie. Dacă nu există minori caracteristici sau toţi minorii caracteristici corespunzători lui d_p sunt nuli, atunci sistemul este compatibil. Dacă ordinul lui d_p este r atunci cele r ecuaţii care ne dau liniile lui d_p se numesc **ecuaţii principale**, iar necunoscutele ale căror coeficienţi intervin în d_p se numesc **necunoscute principale**. Celelalte $m-r$ ecuaţii şi $n-r$ necunoscute se numesc **secundare**. Din rang $\overline{A}$ = rang $A = r$ rezultă că ecuaţiile secundare sunt combinaţii liniare a ecuaţiilor principale. ale
Prin urmare sistemul (1) are aceleaşi soluţii ca şi sistemul format numai din ecuaţiile principale, adică cele două sisteme sunt echivalente. Pentru simplificarea scrierii **presupunem că primele** r **ecuaţii şi** r **necunoscute sunt principale**. Deci sistemul (1) este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + x_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + x_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + x_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \tag{3}$$

Dacă $n = r$, adică toate necunoscutele sunt principale, atunci sistemul (3) are numărul ecuaţiilor egal cu numărul necunoscutelor şi determinantul $d_p \neq 0$. În acest caz sistemul are o soluţie unică, care se poate determina cu formulele lui Cramer.

Dacă $n > r$, atunci necunoscutele secundare $x_{r+1}, \dots, x_n$ iau valori arbitrare $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$ în K, iar necunoscutele principale se obţin, în funcţie de acestea, rezolvând cu ajutorul regulii lui Cramer sistemul de r ecuaţii cu r necunoscute

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}\alpha_{r+1} - \cdots - a_{1n}\alpha_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}\alpha_{r+1} - \cdots - a_{2n}\alpha_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}\alpha_{r+1} - \cdots - a_{rn}\alpha_n \end{cases}$$

Obs

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \\ \vdots \\ x_r = \\ x_{r+1} = \alpha_{r+1} \\ \vdots \\ x_n = \alpha_n \end{cases} \text{formulele lui Cramer} \quad (\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n \in K)$$

cu determinantul $d_p \neq 0$.

Transformări elementare asupra unei matrici. Aplicaţii

Fie K un corp comutativ, $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$.

Definiţia 17. Vom numi **transformări elementare asupra liniilor (coloanelor)** matricii A următoarele:

I) permutarea a două linii (coloane) ale lui A;

II) înmulţirea unei linii (coloane) ale lui A cu un element nenul din K;

III) înmulţirea unei linii (coloane) ale lui A cu un element din K (scalar) şi adunarea la alta.

Aplicaţia 1. Calculul determinanţilor: vezi seminarul anterior.

Să reamintim că aceste transformări pot fi folosite în calculul determinanţilor şi că nici una dintre ele nu anulează un determinant nenul şi nici nu transformă un determinant nul într-unul nenul. E uşor de dedus de aici că prin aplicarea acestor transformări asupra unei matrici A rezultă o matrice B pentru care numărul maxim de coloane (linii) ce se pot alege dintre coloanele (liniile) lui B astfel încât nici una să nu fie o combinaţie liniară a celorlalte este acelaşi ca pentru A, adică A şi B au acelaşi rang.

Pe baza acestei observaţii se poate formula un alt procedeu pentru determinarea rangului unei matrici şi, astfel, ajungem la:

Aplicaţia 2. Calculul rangului unei matrice:

Pentru a determina rangul unei matrice $A \in M_{m,n}(K)$ putem începe prin efectuarea de transformări elementare asupra liniilor şi coloanelor lui A şi a matricelor obţinute succesiv din A cu scopul de a obţine o matrice B ale cărei singure elemente nenule, dacă există, să apară pe primele poziţii ale diagonalei principale. Astfel, din A rezultă o matrice B de forma

$$\rightarrow B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang A = rang B = = nr. el. nenule de pe diag. princ.

cu $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ nenule. Matricele A şi B au acelaşi rang, şi anume r.

Exemplul 18. Să calculăm prin acest procedeu rangul matricii

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \underset{\substack{l_2-2l_1 \\ l_3-l_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_2-2c_1 \\ c_3-c_1 \\ c_4+2c_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$\rightarrow \neq$

facem cei 2 paşi împreună

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{c_4+c_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{rang } A = 3$$

CURS 5

Aplicaţia 3. Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare prin **Metoda (eliminării a) lui Gauss.** Fie K un corp comutativ şi sistemul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

cu coeficienţi în K şi $\overline{A}$ matricea extinsă a sistemului. Această metodă se bazează pe faptul că

(i) permutarea a două ecuaţii ale sistemului (1),

(ii) înmulţirea unei ecuaţii din (1) cu un (scalar) $\alpha \in K$ nenul,

(iii) înmulţirea unei ecuaţii din (1) cu un (scalar) $\alpha \in K$ şi adunarea la altă ecuaţie,

sunt transformări ale sistemului care conduc la sisteme echivalente cu (1). Cum toate aceste transformări acţionează, de fapt, asupra coeficienţilor şi termenilor liberi ai ecuaţiilor sistemului, se constată imediat că acestor transformări le corespund transformări elementare asupra liniilor matricii extinse a sistemului.

Aşadar, putem trage concluzia ca efectuând transformări elementare asupra liniilor matricii extinse a sistemului (1) se obţine matricea extinsă a unui sistem echivalent cu (1). **Metoda lui Gauss** (numită şi **metoda eliminării parţiale**) constă în efectuarea de tranformări elementare succesive asupra liniilor unor matrici rezultate din matricea extinsă $\overline{A}$ a sistemului (1), cu scopul de a obţine o matrice în care ,,coborând" găsim din ce în ce mai multe zerouri la început de linie, matrice numită **matrice sau formă eşalon**. (Situaţia este similară cu cea din **metoda reducerii** pe care o foloseam în gimnaziu pentru a rezolva sisteme de 2 ecuaţii cu 2 necunoscute, doarece creşterea numărului de zerouri la început de linie înseamna lipsa (reducerea) numărului de necunoscute în ecuaţia corespunzătoare din sistemul aferent.)

Definiţia 19. O matrice de tipul (m, n) este într-o **formă eşalon** cu $k \leq m$ linii nenule dacă este o matrice pentru care:

a) dacă $n_0(i)$ este numărul elementelor nule de la începutul liniei i, atunci

$$0 \leq n_0(1) < n_0(2) < \cdots < n_0(k);$$

b) dacă $k < m$, atunci liniile $k + 1, \dots, m$ sunt nule.

O formă eşalon cu k linii nenule pentru care

$$n_0(1) = 0,\ n_0(2) = 1,\ n_0(3) = 2, \dots,\ n_0(k) = k - 1$$

se numeşte **formă trapezoidală**.

Observaţia 20. Orice matrice poate fi adusă la o formă eşalon exclusiv prin transformări elementare de linii.

În unele forme ale sale, inclusiv cea folosită de noi, **Metoda lui Gauss** constă în a aduce matricea $\overline{A}$ chiar la o formă trapezoidală B.

Observaţiile 21. a) Pentru a obţine forma trapezoidală B poate fi necesar uneori să permutăm câte 2 coloane ale matricii obţinute din matricea sistemului, ceea ce corespunde permutării a câte doi termeni în fiecare din ecuaţiile sistemului corespunzător, fapt care nu alterează sistemul deoarece adunarea în corpul K este comutativă.
b) Dacă pe parcursul acestui procedeu, apare într-o linie a unei matrici 0 în toate poziţiile corespunzătoare matricii sistemului şi un element nenul în ultima poziţie, adică în coloana corespunzătoare termenilor liberi atunci sistemul dat este incompatibil, ecuaţia corespunzătoare din sistemul echivalent corespunzător fiind $0 = a$, cu a nenul.

Elementele nenule $a'_{11}, \dots, a'_{kk}$ de pe diagonala formei trapezoidale (cu k linii nenule)

$$B = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1k} & a'_{1,k+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2k} & a'_{2,k+1} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{kk} & a'_{k,k+1} & \dots & a'_{kn} & b'_k \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

furnizează necunoscutele principale. Sistemul echivalent cu (1) de matrice extinsă B se rezolvă (după ce considerăm necunoscutele secundare ca parametri) începând cu ultima ecuaţie.

Observaţia 22. O ,,rafinare" a metodei lui Gauss este aşa numita **metodă Gauss-Jordan** sau **metoda eliminării totale**. Prin această metodă, $\overline{A}$ se aduce prin transformări elementare de linii şi, eventual, permutări de coloane diferite de coloana termenilor liberi la o formă trapezoidală

$$B = \begin{pmatrix} a''_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & a''_{1,k+1} & \dots & a''_{1n} & b''_1 \\ 0 & a''_{22} & 0 & \dots & 0 & a''_{2,k+1} & \dots & a''_{2n} & b''_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a''_{kk} & a''_{k,k+1} & \dots & a''_{kn} & b''_k \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

(Evident, dacă sistemul este compatibil, altfel, în ultima coloană, sub linia k, vor apărea elemente nenule.)

Aplicaţia 4. Calculul inversei unei matrice: va urma...