Teorie

Şiruri, convergență, şir Cauchy (fundamental)

şir **monoton** crescător: $x_n \le x_{n+1}, \forall n \in \mathrm{N}$; descrescător: $x_n \ge x_{n+1}, \forall n \in \mathrm{N}$

şir **mărginit** $\exists M \in \mathrm{R}_+$ a.î. $|x_n| \le M, \forall n \in \mathrm{N}$ sau $\exists c_1, c_2 \in \mathrm{R}$ a.î. $c_1 \le x_n \le c_2, \forall n \in \mathrm{N}$

şir **convergent** x_n este convergent şi are limita *x* dacă

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î $|x_n - x| < \varepsilon, \forall n \ge n_\varepsilon$

subşir dacă $n_1 < n_2 < \ldots$ atunci $\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots\}$ se numeşte subşir (al şirului x_n)

şir **Cauchy** (fundamental).

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î $|x_n - x_m| < \varepsilon, \forall n, m \ge n_\varepsilon$ sau, echivalent,

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \forall n \ge n_\varepsilon \forall p \in \mathrm{N}$

În mulțimea numerelor reale sunt adevărate următoarele afirmații

orice şir mărginit conține un subşir convergent (lema lui Cesaro)
orice şir Cauchy este marginit (in particular, conține un subşir convergent)
un şir este convergent dacă şi numai dacă este Cauchy

Convergența şirurilor monotone: un şir monoton şi mărginit este convergent.

Lema Stoltz Cesaro:

dacă $\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$ şi (b_n) este nemărginit şi monoton, atunci $\lim \frac{a_n}{b_n} = l$.

Serii de numere reale

Fie $(x_n)_{n \in \mathrm{N}}$ şir de numere reale. Numim serie expresia infinită $x_0 + x_1 + \ldots + x_n + \ldots$ Şirul $s_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$ se numeşte şirul sumelor parțiale iar x_n se numeşte termenul general.

Definiție. Dacă s_n este convergent, atunci spunem că seria este convergentă iar limita se notează cu $\sum_n x_n$.

Convergența seriilor cu termeni pozitivi: dacă $x_n > 0$ atunci s_n este crescător, deci este convergent dacă şi numai dacă este mărginit. **În consecință, pentru ca o serie cu termeni pozitivi să fie convergentă, este necesar şi suficient ca şirul sumelor parțiale să fie mărginit (superior).**

Propoziție. Dacă s_n este convergent atunci $x_n \to 0$

Consecință. Dacă $x_n \nrightarrow 0$ atunci seria $\sum_n x_n$ nu este convergentă

Criteriile de comparație ale seriilor cu termeni pozitivi

Fie $\sum_n u_n$, $\sum_n v_n$ două serii cu termeni pozitivi

Criteriul I. Dacă $\exists n_0, u_n \le v_n, \forall n \ge n_0$ atunci $\begin{cases} \text{dacă} \sum_n v_n \text{ convergentă, atunci } \sum_n u_n \text{ convergentă} \\ \text{dacă} \sum_n u_n \text{ divergentă, atunci } \sum_n v_n \text{ divergentă} \end{cases}$

Criteriul II. Dacă $\exists n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n}, \forall n \ge n_0$ atunci $\begin{cases} \text{dacă} \sum_n v_n \text{ convergentă, atunci } \sum_n u_n \text{ convergentă} \\ \text{dacă} \sum_n u_n \text{ divergentă, atunci } \sum_n v_n \text{ divergentă} \end{cases}$

Criteriul III. Dacă $\exists \lim \frac{u_n}{v_n} = l, 0 < l < \infty$ atunci seriile au aceeaşi natură (convergente sau divergente).

Criteriul rădăcinii (Cauchy) Fie $\sum_n u_n$ o serie cu termeni pozitivi

1.Dacă $\exists q \in \mathrm{R}, 0 < q < 1, \exists n_0 \in \mathrm{N}^*$ a.î. $\sqrt[n]{u_n} \le q, \forall n \ge n_0$ atunci seria converge

2.Dacă pentru o infinitate de termeni avem $\sqrt[n]{u_n} \ge 1$ atunci seria diverge

Consecință Dacă $\lim \sqrt[n]{u_n} < 1$ atunci seria converge iar dacă $\lim \sqrt[n]{u_n} > 1$ atunci seria diverge

Criteriul raportului (D'Alembert) Fie $\sum_n u_n$ o serie cu termeni pozitivi

1.Dacă $\exists q \in \mathrm{R}, 0 < q < 1, \exists n_0 \in \mathrm{N}^*$ a.î. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q, \forall n \ge n_0$ atunci seria converge

2.Dacă $\exists n_0 \in \mathrm{N}^*$ a.î. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1, \forall n \ge n_0$ atunci seria diverge

Consecință Dacă $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ atunci seria converge iar dacă $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ atunci seria diverge

Criteriul lui Raabe-Duhamel Fie $\sum_n u_n$ o serie cu termeni pozitivi

1.Dacă $\exists q > 1, \exists n_0 \in \mathrm{N}^*$ a.î. $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \ge q, \forall n \ge n_0$ atunci seria converge

2.Dacă $\exists n_0 \in \mathrm{N}^*$ a.î. $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \le 1, \forall n \ge n_0$ atunci seria diverge

Consecință Dacă $\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1$ atunci seria converge iar dacă $\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1$ atunci seria diverge

Serii cu termeni oarecare

Criteriul general (Cauchy)

$$\sum u_n \text{ convergentă} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \text{ a.î. } \left| u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} \right| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathrm{N}$$

Criteriul Abel-Dirichlet Fie $\sum a_n v_n$; dacă: $\begin{cases} t_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n \text{ este mărginit} \\ a_n \downarrow 0 \,(\text{descrescător şi convergent la } 0) \end{cases}$ atunci $\sum a_n v_n$ convergentă

Seriile alternate sunt seriile de forma $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$

Criteriul lui Leibnitz Dacă $a_n \downarrow 0$ (monoton descrescător şi convergent la 0) atunci $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge.

Seriile absolut convergente sunt seriile pentru care $\sum_{n \geq 0} |u_n| < \infty$.

Teoremă. Orice serie **absolut convergentă** este **convergentă**

Seriile convergente care nu sunt absolut convergente se numesc ***serii semiconvergente***

Seriile **necondiționat convergente** sunt seriile care au aceeaşi limită indiferent de ordinea termenilor.

Teoremă. Orice serie absolut convergentă este necondiționat convergentă

Tema: şir Cauchy, convergenţa şirurilor monotone, lema Stoltz-Cesaro

1. Şirul $x_n = \frac{\cos 1}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n}{n \cdot (n+1)}$ este convergent

Demonstraţie.

Utilizăm afirmaţia: **un şir este Cauchy dacă şi numai dacă este convergent**.

Reamintim definiţia şirului Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \text{ a.î. } \forall n, m \geq n_\varepsilon, |x_n - x_m| < \varepsilon$$

sau, echivalent

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \text{ a.î. } \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathrm{N}, |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

Ultima afirmaţie exprimă faptul că şirul de forma $x_{n-p} - x_n \to 0, n \to \infty$, independent de p

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{\cos(n+1)}{(n+1)\cdot(n+2)} + \ldots + \frac{\cos(n+p)}{(n+p)\cdot(n+p+1)} \right| \leq \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)\cdot(n+p+1)} =$$

$$\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] + \left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right] + \ldots + \left[\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1}\right] = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} \to 0, n \to \infty,$$

independent de p

2. Şirul $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ este convergent

Demonstraţie. Utilizăm afirmaţia: **un şir monoton şi mărginit este convergent.**

Pornim de la formula lui Lagrange pentru funcţia $\ln : [n, n+1] \to \mathrm{R}, n > 0$, aşadar $\exists c \in (n, n+1)$ a.î. $\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{c}$. Cum $c \in (n, n+1)$ rezultă $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$, ceea ce conduce la inegalitatea: $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}, n \in \mathrm{N}^*$.

Prin calcul direct avem: $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n < 0$ adică şirul este descrescător (în particular, mărginit superior).

Demonstrăm că este mărginit inferior:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n > (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \ldots + (\ln(n+1) - \ln n) - \ln n = \ln(n+1) - \ln n > 0$$

3. Dacă $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$

Demonstraţie.

Utilizăm **Lema Stoltz Cesaro.**

Notăm $x_n = \ln \sqrt[n]{|u_n|} = \frac{\ln|u_n|}{n}$ şi aplicăm **Lema**, $\frac{\ln|u_{n+1}| - \ln|u_n|}{n+1-n} = \ln\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \ln l$, $\ln \sqrt[n]{|u_n|} \to \ln l$

Tema: seria geometrică şi seria armonică

1. Seria geometrică: $\sum_{n\geq 0} q^n = 1 + q + q^2 + ... + q^n + ...$ este convergentă pentru $q \in (-1,1)$ şi divergentă pentru $|q| \geq 1$

Demonstraţie. Prin definiţie, o serie este convergentă dacă şirul sumelor parţiale este un şir converegent. În cazul nostru, şirul sumelor parţiale este dat de:

$s_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n$

Pentru $q = 1$, $s_n = n \to \infty$, $n \to \infty$, deci seria nu este convergentă (este divergentă).

Pentru $q = -1$ şirul s_n este şirul alternat 1,0,1,0,1,... care este divergent

Pentru $q \neq 1$, $s_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$ este convergent dacă şi numai dacă $|q| < 1$ şi în acest caz $\sum_{n\geq 0} q^n = \frac{1}{1-q}$

5. Seria armonică: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$ este divergentă

Demonstraţie.

Grupăm termenii astfel: $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{2^k + 1} + ... + \frac{1}{2^k + 2^k}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2}}_{k} = 1 + \frac{k+1}{2}$,

adică $s_{2^{k+1}} > 1 + \frac{k+1}{2} \to \infty$, $k \to \infty$, deci seria este divergentă deoarece şirul sumelor parţiale nu este mărginit.

6. Seria armonică generalizată: $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha} + ..., \alpha > 0$ este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha > 1$

Demonstraţie. Pentru $\alpha > 1$ avem $\left(\frac{1}{\left(2^k\right)^\alpha} + ... + \frac{1}{\left(2^k + 2^k - 1\right)^\alpha}\right) < 2^k \cdot \frac{1}{\left(2^k\right)^\alpha} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k = q^k$, unde am notat $q = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$, $q \in (0,1)$.

Grupăm:

$$s_{2^{k+1}-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + ... + \left(\frac{1}{\left(2^k\right)^\alpha} + ... + \frac{1}{\left(2^k + 2^k - 1\right)^\alpha}\right) < 1 + q + q^2 + ... + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} < \frac{1}{1-q}$$

deci şirul $(s_n)_n$ este mărginit deci convergent.

Pentru $\alpha = 1$ am văzut deja că seria armonică este divergentă (nemărginită)

Pentru $\alpha < 1$ utilizăm: $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \to \infty$, $n \to \infty$ deci seria armonică generalizată este divergentă.

Tema: criteriile de convergență ale seriilor cu termeni pozitivi

1. Seria $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+2^n}$ este convergentă

Demonstrație.

Utilizăm **criteriul I de comparație** cu seria geometrică, astfel:

$$\frac{1}{n+2^n}\leq\frac{1}{2^n}$$

Cum seria geometrică $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ este convergentă rezultă convergența seriei date.

2. Seria $\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{n!}$, $a>0$, este convergentă

Demonstrație.

Utilizăm **criteriul II de comparație** cu seria geometrică. Astfel, pornim de la:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n}=\frac{a}{n+1}$$

Ştim că seria $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ este convergentă, iar dacă notăm cu v_n termenul ei general, avem $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{2}$. Inegalitatea $\frac{a}{n+1}<\frac{1}{2}$ este adevărată pentru $n>2a-1$ aşadar rezultă că $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{v_{n+1}}{v_n}$ deci seria dată este convergentă.

3. Seria $\sum_{n\geq 0}\frac{1+\sqrt{n}}{3n+2}$ este divergentă

Demonstrație.

Utilizăm **criteriul III de comparație** cu seria armonică generalizată pentru $\alpha=\frac{1}{2}$. Sugestia asupra acestei soluții este dată de diferența puterilor maxime ale lui *n*, la numitor respectiv numărător.

Avem: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+\sqrt{n}}{3n+2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+n}{3n+2}=\frac{1}{3}$ iar seria armonică generalizată, pentru $\alpha=\frac{1}{2}$, este divergentă

4. Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$ este convergentă

Demonstrație.

Utilizăm **criteriul raportului:** $u_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$, $u_{n+1}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n+2)}$.

Avem $\dfrac{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n+2)}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}}=\frac{2n+1}{3n+2}\to\frac{2}{3}<1$

deci seria este convergentă.

5. Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$ este convergentă

Demonstrație.

Utilizăm **criteriul radical:**

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}}=\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2+\frac{1}{n}}\to\frac{1}{2}<1$$

deci seria este convergentă

6. Analizați convergența seriei $\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)},\alpha>0$

Soluție.

Pornim de la **criteriul Raabe-Duhamel**, pentru termenul general $u_n=\frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}$, şi avem:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{\frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}}{\frac{(n+1)!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)(\alpha+n)}}-1\right)=n\left(\frac{\alpha+n}{n+1}-1\right)=\frac{(\alpha-1)n}{n+1}\to\alpha-1,$$

deci seria este convergentă pentru $\alpha>2$ şi divergentă pentru $\alpha\in(0,2)$.

Pentru $\alpha=2$ seria este $\sum\frac{1}{n+1}$ care este divergentă

Tema: criteriile de convergență ale seriilor cu termeni oarecare

1. Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin n}{2^n}$ este convergentă

Demonstrație.

Utilizăm criteriul general al lui **Cauchy**: aplicat şirului sumelor parțiale:

$$\left|s_{n+p}-s_n\right|=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|\leq$$

$$\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{p-1}}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)\leq\frac{1}{2^n}\to 0, n\to\infty,$$

independent de p.

2. Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos n}{n^3}$ este convergentă

Demonstrație.

Utilizăm criteriul **Abel-Dirichlet**, $a_n=\frac{1}{n}$, $v_n=\frac{\cos n}{n^2}$; $t_n=\cos 1+\frac{\cos 2}{2^2}+\ldots+\frac{\cos n}{n^2}$ este mărginit deoarece $\left|t_n\right|\leq 1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ iar seria armonică generalizată este convergentă pentru $\alpha=2$. În sfârşit, a_n este monoton descrescător şi convergent la 0.

3. Calculați $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots$

Soluție.

Utilizăm criteriul lui **Leibnitz**, deoarece $a_n=\frac{1}{n}$ este monoton descrescător şi convergent la 0, deci seria ese convergentă.

Pentru calcul folosim şirul $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$ care este convergent; notăm limita cu x, aşadar $x_n\to x$.

Calculăm

$$s_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots-\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=x_{2n}+\ln 2n-x_n-\ln n\to\ln 2$$

4. Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin n}{n+2^n}$ este convergentă

Demonstrație.

Utilizăm afirmația: **orice serie absolut convergentă este convergentă**.

Considerăm seria $\sum_{n\geq 1}\left|\frac{\sin n}{n+2^n}\right|$; deoarece $\left|\frac{\sin n}{n+2^n}\right|\leq\frac{1}{2^n}$, utilizăm **criteriul I de comparație** cu seria geometrică $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}$, deci seria este absolut convergentă, prin urmare convergentă.

5. Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n+(-1)^n n^2}{n^n}$ este neconditionat convergentă (este convergentă indiferent de ordinea termenilor)

Demonstrație.

Utilizăm afirmația: **orice serie absolut convergentă este necondiționat convergentă**.

Considerăm seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n+n^2}{n^n}$ care este convergentă în virtutea criteriului radical: $\sqrt[n]{\frac{n+n^2}{n^n}}=\frac{\sqrt[n]{n+n^2}}{n}\to 0,\ n\to\infty$

În continuare considerăm $\sum_{n\geq 1}\left|\frac{n+(-1)^n n^2}{n^n}\right|$ și aplicăm **primul criteriu de comparație** folosind $\left|\frac{n+(-1)^n n^2}{n^n}\right|\leq\frac{n+n^2}{n^n}$. În consecință seria este absolut convergentă, deci necondiționat convergentă

6. Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n!+(-1)^n 2^n}{n^n}$ este absolut convergentă

Demonstrație.

Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n}$ este convergentă în baza criteriului raportului iar seria $\sum_{n\geq 1}\frac{2^n}{n^n}$ este convergentă în baza criteriului radical, în consecință seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n!+2^n}{n^n}$ este convergentă.

Deoarece $\left|\frac{n!+(-1)^n 2^n}{n^n}\right|\leq\frac{n!+2^n}{n^n}$, utilizând **primul criteriu de comparație**, rezultă că seria este absolut convergentă.

7. Seria $1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}\ldots,\ z\in\mathbb{C}$ este absolut convergentă

Demonstrație.

Utilizăm afirmația: **orice serie absolut convergentă este convergentă**.

Pentru seria modulelor utilizăm criteriul raportului $\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|z|^n}=\frac{|z|}{n+1}\to 0,\ n\to\infty$.

Prin definiție, $e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}\ldots,\ z\in\mathbb{C}$

8. Seria $\sum_{n\geq 1}\cos\frac{1}{n}$, nu este convergentă.

Demonstrație. Observăm că termenul general, $\cos\frac{1}{n}$, nu tinde la zero, așadar, în baza criteriului de neconvergență, seria dată nu este convergentă.