0.1 Şiruri fundamentale. Teorema lui Cauchy

Definiţia limitei unui şir de numere reale nu este, în general, convenabilă pentru a stabili în practică dacă un şir dat are sau nu limită şi aceasta pentru că, în definiţia limitei, intervine limita în mod explicit.

A.L. Cauchy a reuşit să dea o definiţie echivalentă a unui şir convergent, definiţie în care nu mai intervine limita şirului, ci numai termenii şirului.

Definiţia 0.1.1 *Fie (x_n) un şir de numere reale. Spunem că şirul (x_n) este* **fundamental** (*sau* **Cauchy**) *dacă oricare ar fi numărul real $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε astfel încât oricare ar fi numerele naturale n şi k cu $n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_n - x_{n+k}| < \varepsilon$.*

Teorema 0.1.2 *Orice şir convergent este fundamental.*

Demonstraţie. Fie (x_n) un şir convergent şi fie $x \in \mathbb{R}$ limita sa. Pentru a dovedi că şirul (x_n) este fundamental, fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că şirul (x_n) converge către x, există un număr natural n_ε astfel încât

$$|x_n - x| < \varepsilon/2 \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon. \tag{0.1.1}$$

Fie acum $n, k \in \mathbb{N}$ cu $n \geq n_\varepsilon$. Evident $n + k \geq n_\varepsilon$ şi, deci, dacă ţinem seama de (0.1.1), obţinem delimitările $|x_n - x_{n+k}| = |(x_n - x) - (x_{n+k} - x)| \leq |x_n - x| + |x_{n+k} - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Aşadar şirul (x_n) este fundamental. $\square$

Teorema 0.1.3 *Orice şir fundamental este mărginit.*

Demonstraţie. Fie (x_n) un şir fundamental. Atunci (pentru $\varepsilon = 1$) există un număr natural p astfel încât

$$|x_n - x_{n+k}| < 1 \text{ oricare ar fi } n, k \in \mathbb{N},\ n \geq p.$$

De aici deducem că pentru orice $k \in \mathbb{N}$ avem

$$|x_{p+k}| = |x_{p+k} - x_p + x_p| \leq |x_{p+k} - x_p| + |x_p| < 1 + |x_p|.$$

Notând cu $a := \max\{|x_1|, \ldots, |x_{p-1}|, 1 + |x_p|\}$ obţinem că $a > 0$ şi $|x_n| \leq a$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare şirul (x_n) este mărginit. $\square$

Teorema 0.1.4 *Fie (x_n) un şir fundamental de numere reale. Dacă şirul (x_n) conţine un subşir convergent (x_{n_k}), atunci şirul (x_n) este convergent şi*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}.$$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că şirul (x_n) este fundamental, deducem că există un număr natural n_ε cu proprietatea că pentru fiecare număr natural $n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon/2$ oricare ar fi $p \in \mathbb{N}$.

Pe de altă parte, din faptul că şirul (x_{n_k}) este convergent către $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$, rezultă că există un număr natural k_ε astfel încât oricare ar fi numărul natural $k \geq k_\varepsilon$ avem

$$|x_{n_k} - x| < \varepsilon/2.$$

Fie acum $q = \max\{n_\varepsilon, k_\varepsilon\}$. Atunci $n_q \geq n_{n_\varepsilon} \geq n_\varepsilon$ şi $n_q \geq n_{k_\varepsilon}$, deci avem că

$$|x_n - x_{n_q}| < \varepsilon/2 \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_q$$

şi

$$|x_{n_q} - x| < \varepsilon/2.$$

Prin urmare, pentru fiecare număr natural $n \geq n_q$ avem

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_q}| + |x_{n_q} - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

ceea ce ne arată că şirul (x_n) este convergent şi $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. $\square$

Teorema 0.1.5 (teorema lui Augustin Louis Cauchy) *Un şir de numere reale este convergent dacă şi numai dacă este şir fundamental.*

Demonstraţie. **Necesitatea** rezultă din teorema 0.1.2.
Suficienţa. Fie (x_n) un şir fundamental. Atunci, în baza teoremei 0.1.3, şirul (x_n) este mărginit. Teorema lui Cesàro ne asigură că şirul (x_n) conţine un subşir (x_{n_k}) convergent. Prin urmare şirul fundamental (x_n) conţine un subşir convergent; atunci, în baza teoremei 0.1.4, şirul (x_n) este convergent. Teorema este demonstrată. $\square$

Exemplul 0.1.6 Şirul (x_n) cu termenul general

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

este fundamental.

Într-adevăr, pentru fiecare $n, p \in \mathbb{N}$ avem

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} < \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) = \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Fie acum $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, deducem că există un număr natural n_ε astfel încât $1/n < \varepsilon$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$. Rezultă că

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \text{ oricare ar fi } n, p \in \mathbb{N} \text{ cu } n \geq n_\varepsilon.$$

Prin urmare şirul (x_n) este fundamental. În baza teoremei lui Cauchy, şirul (x_n) este convergent. $\square$