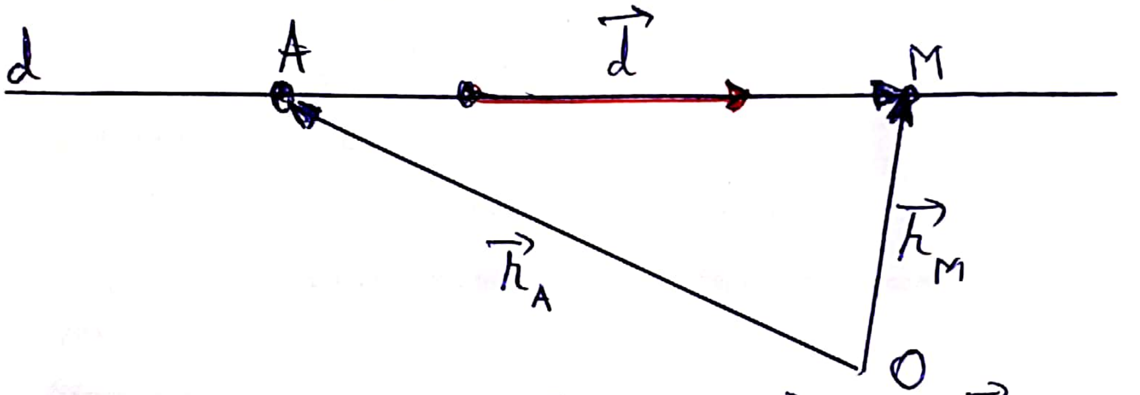
Curs 2.

Ecuațiile vectoriale ale dreptelor

(Caracterizarea vectorială a dreptelor)

1. Fie d o dreaptă, $A \in d$ un punct fixat, $M \in d$ un punct variabil și $\vec{d}$ un vector nenul situat pe dreaptă ($\vec{d}$ se numește vector director al dreptei).

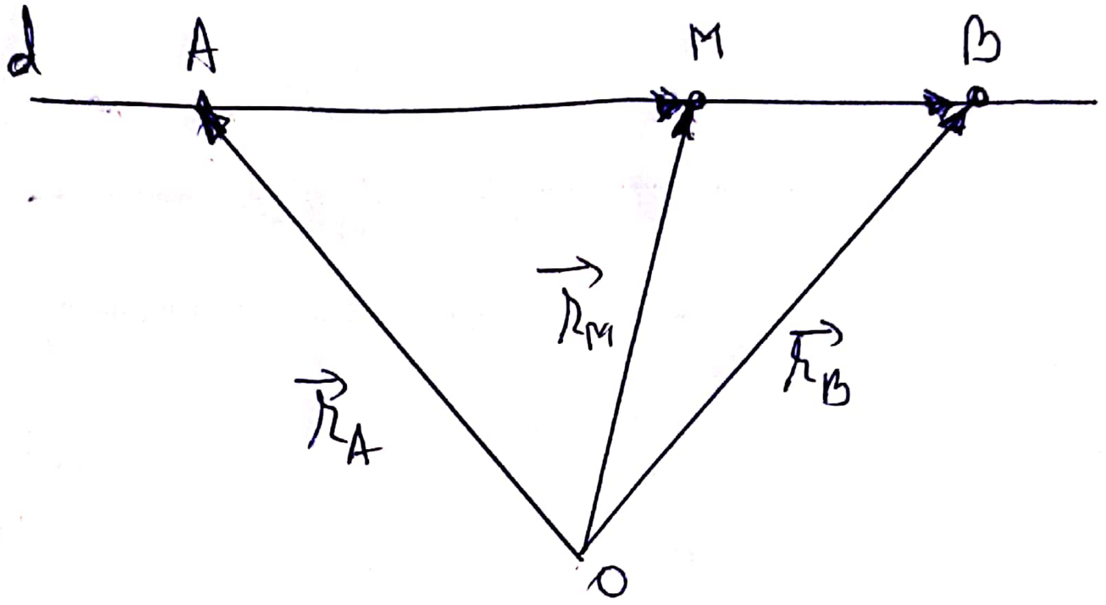


Avem $\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{AM}$, $\vec{AM} = \lambda \vec{d}$

$$\Rightarrow \boxed{r_M = r_A + \lambda \vec{d}} \qquad (2.1)$$

Ecuația vectorială a dreptei prin punct și vector director (direcție).

2. Fie d o dreaptă, $A, B \in d$ două puncte distincte fixate și $M \in d$ un punct variabil.



Avem $\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{AM}$, $\vec{AM} = \alpha \vec{AB}$

$\Rightarrow \vec{r}_M = \vec{r}_A + \alpha \vec{AB}$.

Dar, $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

$\Rightarrow \vec{r}_M = \vec{r}_A + \alpha(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{r}_M = (1-\alpha)\vec{r}_A + \alpha \vec{r}_B} \quad (2.2)$$

Ecuația vectorială a dreptei dată prin două puncte distincte.

<u>Obs.</u> Dacă $\alpha \in (0,1) \Rightarrow M \in (AB)$,

pt. $\alpha = 0 \Rightarrow M \equiv A$, pt. $\alpha = 1 \Rightarrow M \equiv B$

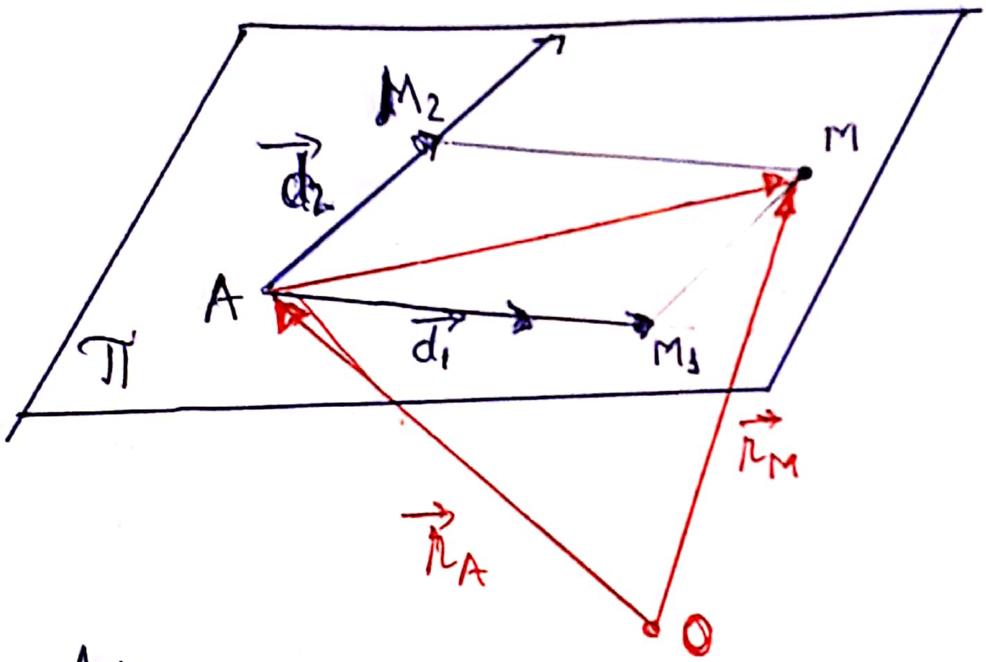
pt. $\alpha > 1 \Rightarrow AM > AB$ deci $M \in d \setminus (BA$

pt $\alpha < 0 \Rightarrow \vec{AM}$ și $\vec{AB}$ au sensuri opuse

deci $M \in d \setminus (AB$.

Ecuațiile vectoriale ale planelor
(Caracterizarea vectorială a planelor)

Fie π un plan, $A \in \pi$, $\vec{d_1}$ și $\vec{d_2}$ doi vectori nenuli și necoliniari situați în plan, M un punct variabil în plan.



Avem

$\vec{r_M} = \vec{r_A} + \vec{AM}$. Vectorul $\vec{AM}$ se descompune în mod unic după vectorii $\vec{d_1}$ și $\vec{d_2}$:

Prin M se duce paralela MM_1 la $\vec{d_2}$ și paralela MM_2 la d_1, deci $\exists! \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\vec{AM_1} = \lambda_1 \vec{d_1}$, $\vec{AM_2} = \lambda_2 \vec{d_2}$.

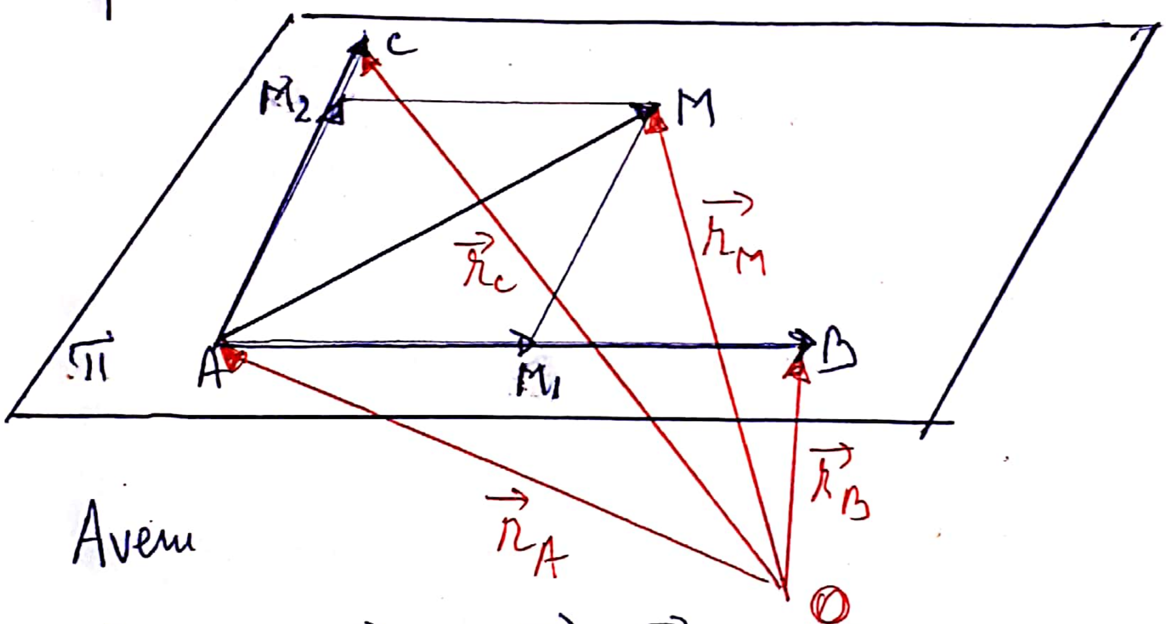
Rezultă $\vec{AM} = \vec{AM_1} + \vec{AM_2}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \lambda_1 \vec{d}_1 + \lambda_2 \vec{d}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}_M = \vec{r}_A + \lambda_1 \vec{d}_1 + \lambda_2 \vec{d}_2} \quad (2.3.)$$

Ecuația planului prin punct și doi vectori directori.

Fie π un plan A, B, C trei puncte fixate în plan, distincte, necoliniare și fie $M \in \pi$ un punct variabil.



Avem

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \overrightarrow{AM}, \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM_2},$$

$$\overrightarrow{AM_1} = \lambda \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AM_2} = \mu \overrightarrow{AC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}_M = \vec{r}_A + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$$

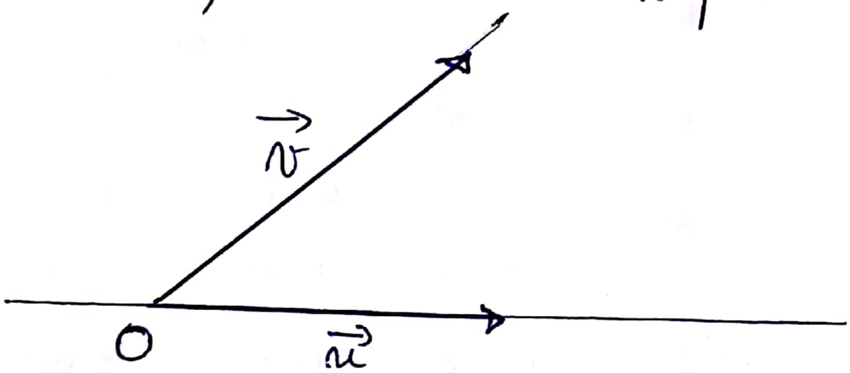
$$\Leftrightarrow \vec{r}_M = \vec{r}_A + \lambda(\vec{r}_B - \vec{r}_A) + \mu(\vec{r}_C - \vec{r}_A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{r}_M = (1 - \lambda - \mu)\vec{r}_A + \lambda \vec{r}_B + \mu \vec{r}_C} \quad (2.4.)$$

Ecuația planului prin trei puncte necoliniare.

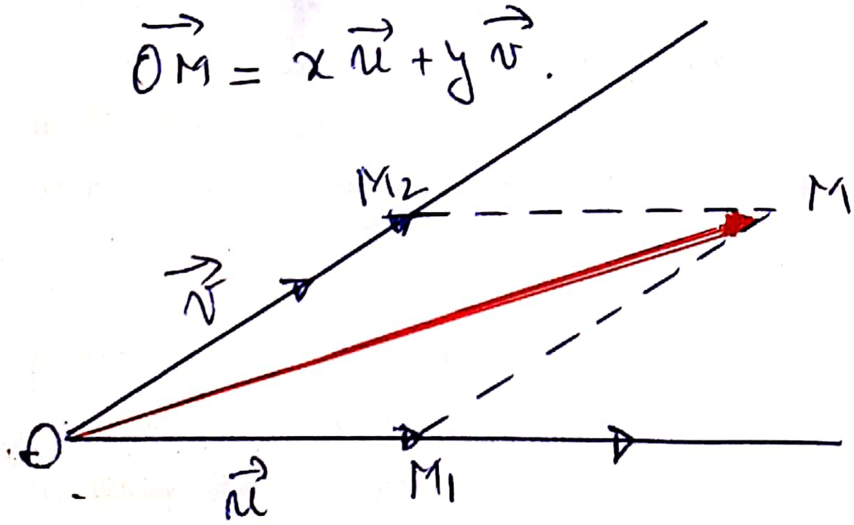
Ecuațiile carteziene ale dreptelor și planelor

Definiție Se numește reper cartezian (general) în plan mulțimea $R = \{O; \vec{u}, \vec{v}\}$ unde O este un punct fixat în plan iar $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt doi vectori nenuli și necoliniari din plan.



Fie M un punct oarecare în plan. Vectorul de poziție al lui M ~~este~~ se descompune în mod unic într-o combinație liniară a vectorilor $\vec{u}$ și $\vec{v}$:

$$\vec{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}.$$

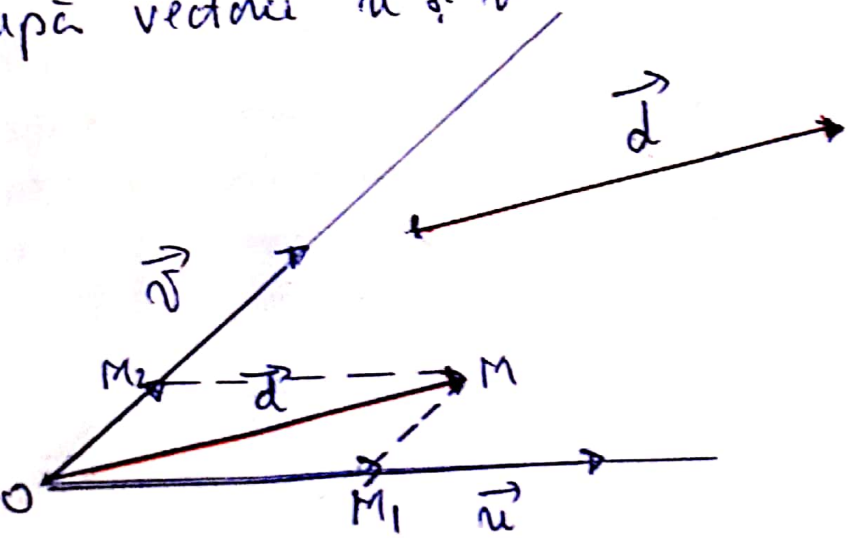


Într-adevăr, $\vec{OM} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2}$ și $\exists!\, x \in \mathbb{R}$ și $\exists!\, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{OM_1} = x\vec{u}$, $\vec{OM_2} = y\vec{v}$, deci

$\vec{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$, x și y fiind unic determinați (datorită unicității paralelelor MM_1 și MM_2).

Numerele reale (unic determinate) x și y se numesc coordonatele carteziene ale punctului M față de reperul cartezian (general) $\mathcal{R} = \{0; \vec{u}, \vec{v}\}$. Se folosește notația $M(x, y)$.

Un vector $\vec{d}$ se descompune în mod unic după vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$

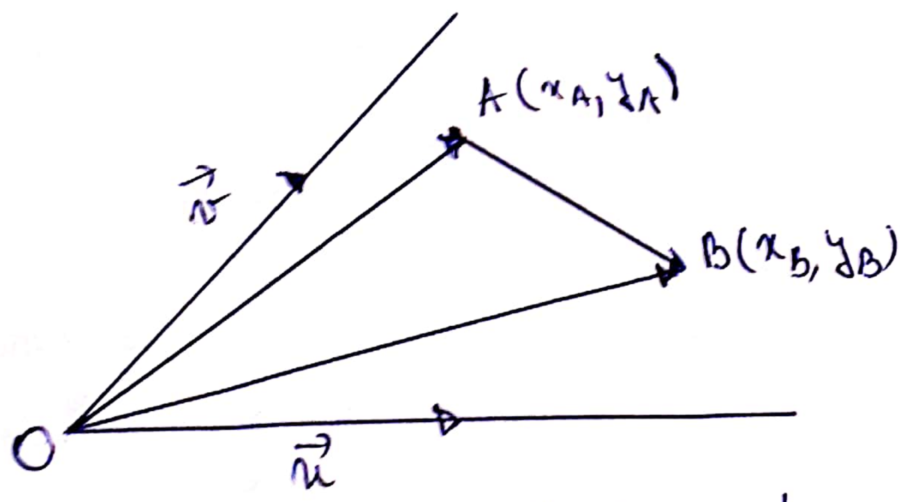


$\vec{d} = \vec{OM}$ și $\vec{OM} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2}$ $\Rightarrow$ $\vec{d} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2}$ și $\exists!\, p \in \mathbb{R}$ și $\exists!\, q \in \mathbb{R}$ a.î. $\vec{OM_1} = p\vec{u}$, $\vec{OM_2} = q\vec{v}$, deci

$\boxed{\vec{d} = p\vec{u} + q\vec{v}}$. Spunem că p și q sunt componentele sau coordonatele vectorului $\vec{d}$ față de vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ și scriem $\vec{d}(p,q)$.

Dacă $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ atunci
$\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Într-adevăr $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} =$
$= x_B\vec{u} + y_B\vec{v} - (x_A\vec{u} + y_A\vec{v}) =$
$= (x_B - x_A)\vec{u} + (y_B - y_A)\vec{v}$.



Ecuația carteziană a dreptei dată prin punct și vector director (direcție)

Fie $d: \vec{r}_M = \vec{r}_A + \lambda\vec{d}$ ecuația vectorială a dreptei d dată prin punctul A și vectorul director $\vec{d}$. Fie reperul $R = (O: \vec{u}, \vec{v})$.

Fie (x_A, y_A) coordonatele lui A față de reperul $\mathcal{R}$ și (p, q) componentele lui $\vec{d}$ $(A(x_A, y_A), \vec{d}(p,q))$. Atunci ecuația vectorială se scrie:

$$x\vec{u} + y\vec{v} = x_A\vec{u} + y_A\vec{v} + \lambda(p\vec{u} + q\vec{v})$$ unde

(x, y) sunt coordonatele lui M față de $\mathcal{R}$.

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_A + \lambda p \\ y = y_A + \lambda q \end{cases}} \quad (2.5)$$ ecuațiile parametrice ale dreptei d.

Eliminând parametrul λ obținem:

$$\boxed{\frac{x - x_A}{p} = \frac{y - y_A}{q}} \quad (2.6)$$ ecuația carteziană a dreptei d prin punct și vector director

<u>Observație</u> dacă $p = 0$ atunci ecuația dreptei d este $x = x_A$. d este o dreaptă paralelă cu vectorul $\vec{v}$ iar dacă $q = 0$ ecuația dreptei este $y = y_A$, dreapta d este paralelă cu vectorul $\vec{u}$.

Ecuația carteziană a dreptei prin două puncte

Fie reperul $\mathcal{R}=\{O;\vec{u},\vec{v}\}$ și $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ două puncte fixate iar $M(x,y)$ un punct variabil pe dreapta d. Ecuația vectorială a dreptei $d=AB$ este: $d: \vec{r}_M=\vec{r}_A+\alpha\vec{AB} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x\vec{u}+y\vec{v}=x_A\vec{u}+y_A\vec{v}+\alpha[(x_B-x_A)\vec{u}+(y_B-y_A)\vec{v}].$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=x_A+\alpha(x_B-x_A) \\ y=y_A+\alpha(y_B-y_A)\end{cases}} \quad (2.7)$$
ecuațiile parametrice ale dreptei $AB=d$

Eliminând parametrul α se obține:

$$\boxed{\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}} \quad (2.8)$$
ecuația carteziană a dreptei AB

Aceasta se mai poate scrie:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}=0} \quad (2.9)$$

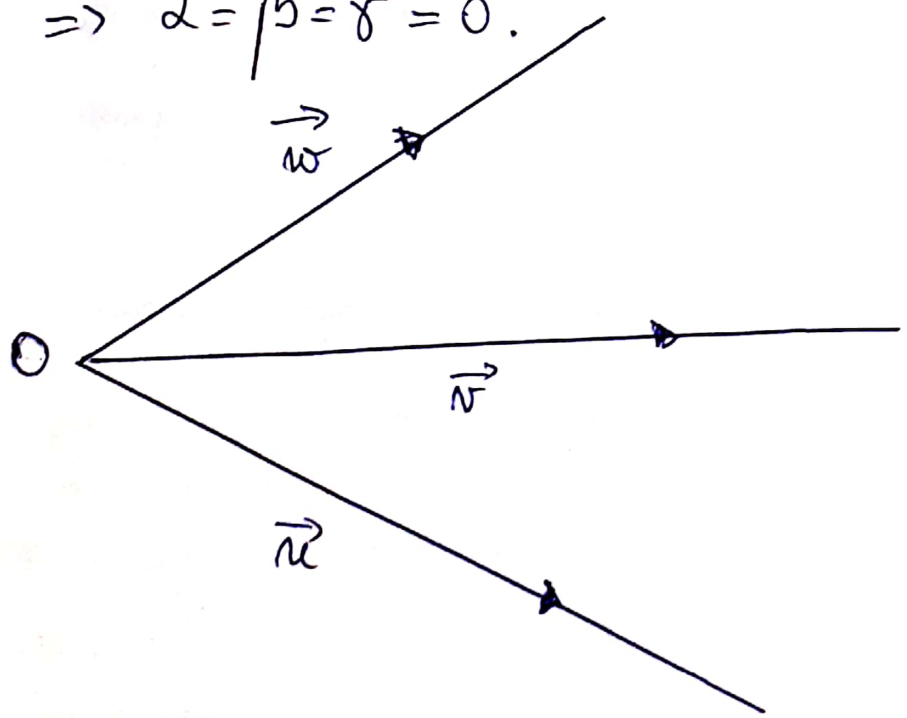
După efectuarea calculelor, ecuațiile (2,6), (2,8) sau (2,9) se pot scrie sub forma:

$$\boxed{ax+by+c=0} \quad (2,10).$$

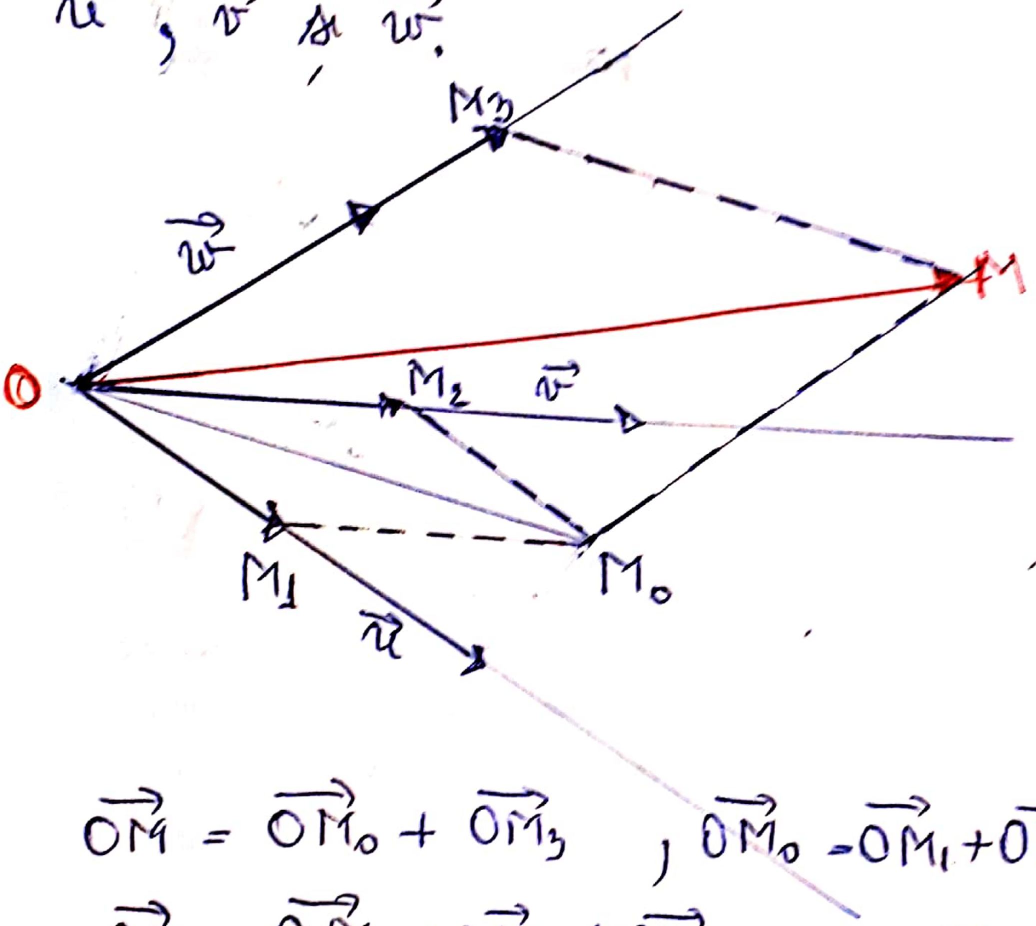
__Definiție__ Se numește reper cartezian (general) în spațiu mulțimea $R = \{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ unde O este un punct fixat în spațiu iar $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sunt trei vectori necoplanari.

__Observație.__ Trei vectori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sunt __coplanari__ dacă și numai dacă unul dintre ei se poate scrie ca o combinație liniară a celorlalți doi adică (de exemplu) $\exists\, \alpha, \beta$ numere reale a.î. $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

Trei vectori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sunt necoplanari dacă și numai dacă din $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ $\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$.



Fie M un punct oarecare în spațiu. Vectorul de poziție al lui M se descompune în mod unic într-o combinație liniară a vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$ și $\vec{w}$.



$\vec{OM} = \vec{OM_0} + \vec{OM_3}$, $\vec{OM_0} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2}$

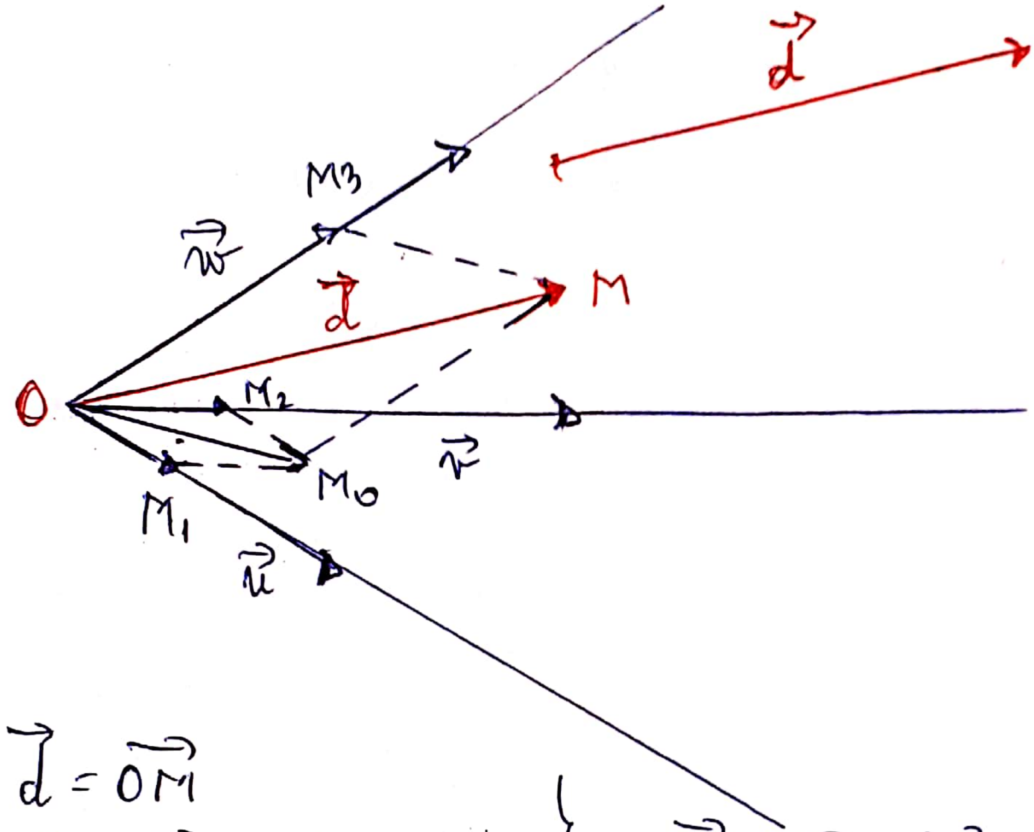
$\Rightarrow \vec{OM} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2} + \vec{OM_3}$, dar $\exists! x, y, z \in \mathbb{R}$

$\vec{OM_1} = x\vec{u}$, $\vec{OM_2} = y\vec{v}$, $\vec{OM_3} = z\vec{w}$ adică

$\vec{OM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

Numerele reale (unic determinate) x, y, z se numesc coordonatele carteziene ale punctului M față de reperul cartezian (general) $R = \{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

Un vector $\vec{d}$ se descompune în mod unic după vectorii $\vec{u}, \vec{v}$ și $\vec{w}$.



$$\left.\begin{array}{l}\vec{d} = \vec{OM} \\ \vec{OM} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2} + \vec{OM_3}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{d} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2} + \vec{OM_3}$$

Dar $\exists!\, p, q, r \in \mathbb{R}$ a.î. $\vec{OM_1} = p\vec{u}$, $\vec{OM_2} = q\vec{v}$, $\vec{OM_3} = r\vec{w}$ deci

$$\boxed{\vec{d} = p\vec{u} + q\vec{v} + r\vec{w}}$$

Spunem că (p, q, r) sunt componentele sau coordonatele vectorului $\vec{d}$ față de reperul R și scriem $\vec{d}(p, q, r)$.

Dacă $A(x_A, y_A, z_A)$ și $B(x_B, y_B, z_B)$ atunci $\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$. Într-adevăr

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = x_B\vec{u} + y_B\vec{v} + z_B\vec{w} - (x_A\vec{u} + y_A\vec{v} + z_A\vec{w}) = (x_B - x_A)\vec{u} + (y_B - y_A)\vec{v} + (z_B - z_A)\vec{w}.$$

<u>Ecuațiile carteziană a dreptei prin punct și vector director.</u> Fie d o dreaptă în spațiu.

Fie $\vec{d}(p, q, r)$, $A(x_A, y_A, z_A)$ și $M(x, y, z)$. Ecuația vectorială a dreptei d determinate de A și vectorul director $\vec{d}$ este

$$d: \vec{r}_M = \vec{r}_A + \lambda\vec{d} \iff$$

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = x_A\vec{u} + y_A\vec{v} + z_A\vec{w} + \lambda(p\vec{u} + q\vec{v} + r\vec{w})$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} x = x_A + \lambda p \\ y = y_A + \lambda q \\ z = z_A + \lambda r \end{cases} \quad \text{ecuațiile parametrice ale dreptei } d}$$

Eliminând λ între cele 3 ecuații obținem:

$$\boxed{\frac{x - x_A}{p} = \frac{y - y_A}{q} = \frac{z - z_A}{r} \quad \text{ecuațiile carteziene ale dreptei } d \text{ prin punct și vector director}}$$

Observatie Dacă una dintre componentele lui $\vec{d}$ este zero, de exemplu $p=0$, atunci ecuațiile dreptei d sunt:

$$d: \begin{cases} x = x_A \\ \dfrac{y-y_A}{q} = \dfrac{z-z_A}{r} \end{cases}$$

dreapta este situată în planul $x = x_A$ care este paralel cu planul determinat de O și $\vec{v}, \vec{w}$.

Dacă două componente sunt nule, de exemplu $p=0$ și $q=0$ atunci ecuațiile dreptei d sunt $\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \end{cases}$ este o dreaptă paralelă cu dreapta determinată de $\vec{O}$ și $\vec{w}$.

Ecuațiile carteziene ale dreptei dată prin două puncte distincte. Fie dreapta d în spațiu. Fie $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B) \in d$ două puncte fixate și $M(x, y, z) \in d$ un punct variabil, coordonatele fiind raportate la un reper cartezian general $R = \{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

Ecuația vectorială a dreptei d este

$$d:\ \vec{r}_M = \vec{r}_A + \alpha \vec{AB} \iff$$

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = x_A\vec{u} + y_A\vec{v} + z_A\vec{w} +$$
$$+ \alpha\left[(x_B - x_A)\vec{u} + (y_B - y_A)\vec{v} + (z_B - z_A)\vec{w}\right] \iff$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} x = x_A + \alpha(x_B - x_A) \\ y = y_A + \alpha(y_B - y_A) \\ z = z_A + \alpha(z_B - z_A) \end{cases}}$$ Ecuațiile parametrice ale dreptei d

Dacă eliminăm α între ecuații obținem

$$\boxed{\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}}$$ ecuațiile carteziene ale dreptei dată prin două puncte în spațiu.