Seminar 6 gr. 111

10.11.2020

1. Să se scrie ecuația planului care taie axele de coordonate în punctele $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$.

2. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul $M(-2,3,4)$ și care este paralel cu vectorii $\vec{v}_1=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ și $\vec{v}_2=3\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$.

3. Să se scrie ecuația planului definit de punctele $M_1(2,3,4)$ și $M_2(4,6,5)$ și care e paralel cu vectorul $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$.

4. Să se scrie ecuația unui plan știind că punctul $P(3,-6,2)$ este piciorul perpendicularei coborâte din origine pe acest plan.

5. a) Să se scrie ecuațiile fețelor tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(0,0,2)$, $B(3,0,5)$, $C(1,1,0)$ și $D(4,1,2)$.

   b) Să se calculeze volumul tetraedrului determinat de punctele A, B, C, D.

6. Să se scrie ecuația unui plan care trece prin punctele $M_1(1,1,1)$ și $M_2(2,2,3)$ și care este perpendicular pe planul $x+y-z=0$.

7. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul $M_1(1,-1,1)$ și care este perpendicular pe planele $x-y+z-1=0$, $2x+y+z+1=0$.

8. Să se calculeze unghiurile dintre următoarele perechi de plane:

a) $4x-5y+3z-1=0$ și $x-4y-z+9=0$

b) $3x-y+2z+15=0$ și $5x+9y-3z-1=0$

c) $6x+2y-4z+17=0$ și $9x+3y-6z+4=0$

Soluții:

1. $$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ ecuația planului prin 3 puncte.

În cazul nostru:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix} \cdot x - \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix} y +$$

$$+ \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} \cdot 1 = 0 \iff$$

$$\iff bc \cdot x + ac y + ab z - abc = 0 \quad | : (abc)$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$ ecuația planului prin tăieturi

2. $$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

ecuația planului prin punct și vector director.

În cazul nostru: $$\begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \cdot (x+2) - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot (y-3) + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot (z-4) = 0$$

$\Leftrightarrow -10(x+2)-(y-3)+8(z-4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -10x - y + 8z - 49 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{10x + y - 8z + 49 = 0}$

(3) Punctele M_1 și M_2 determină un vector director al planului căutat:

$$\overrightarrow{M_1M_2}(4-2, 6-3, 5-4) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2}(2,3,1)$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot (x-2) - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} (y-3) + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (z-4) = 0$$

$$7(x-2) - 5(y-3) + (z-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \boxed{7x - 5y + z - 3 = 0}$

(4). Vectorul $\overrightarrow{OP}$ este un vector normal al planului. El are componentele $(3-0, -6-0, 2-0) = (3, -6, 2)$. Punctul $P(3,-6,2)$ aparține planului căutat.

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

ecuația planului prin punct și vector normal.

În cazul nostru:

$$3(x-3)-6(y+6)+2(z-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{3x-6y+2z-49=0}$$

(5). a) Ecuația planului ABC:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot x - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} y +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot z - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} y + 3z - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x + 9y + 3z - 6 = 0 \quad |:(-3)$$

$$\boxed{x - 3y - z + 2 = 0}$$

Ecuația planului BCD:

$2x - 11y - 3z + 9 = 0$ (temă)

Ecuația planului ABD

$x - 4y - z + 2 = 0$ (temă)

Ecuația planului ACD

$2x - 8y - 3z + 6 = 0$ (temă).

5). Volumul este $V=\frac{1}{6}\left|(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})\right|$

$\vec{AB}(3,0,3)$, $\vec{AC}(1,1,-2)$, $\vec{AD}(4,1,0)$.

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot 3\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right| =$$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-1| = \frac{1}{2} \text{ (unități cubice)}$$

6). Un vector director al planului căutat este $\overrightarrow{M_1M_2}(2-1, 2-1, 3-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2}(1,1,2)$, iar al vector director este vectorul normal al planului dat, adică $(1,1,-1)$. Deci

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}(x-1) - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}(y-1) + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\cdot(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3(x-1) + 3(y-1) + 0\cdot(z-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(x-1) + (y-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x+y = 0 \Leftrightarrow \boxed{x-y=0}$$

Altă soluție

Ecuația prin punct și vector normal al planului căutat Π este

$\Pi:\ A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$

unde $\vec{n}_{\Pi}(A,B,C)$ și punctul este $M_1(1,1,1)$.

Dar și $M_2 \in \Pi$, deci

$$A(2-1)+B(2-1)+C(3-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A+B+2C=0 \qquad (1)}$$

Planul Π și planul dat $P:\ x+y-z=0$ fiind perpendiculari, rezultă

$$\vec{n}_{\Pi} \perp \vec{n}_{P} \Leftrightarrow \vec{n}_{\Pi}\cdot\vec{n}_{P}=0 \Leftrightarrow A\cdot 1+B\cdot 1+C\cdot(-1)=0$$

adică $\boxed{A+B-C=0 \qquad (2)}$

Din (1) și (2) rezultă $C=0$ (prin scădere)

$\Rightarrow\ A=-B$

Deci $\Pi:\ (-B)\cdot(x-1)+B(y-1)=0 \quad \Big|:(-B)$

$\Leftrightarrow x-1-y+1=0 \Leftrightarrow \boxed{x-y=0}$.

(7) Planul căutat Π are ecuația:

$$A(x-1)+B(y+1)+C(z-1)=0.$$

El este perpendicular pe planele Π_1 și Π_2 care au vectorii normali $\vec{n}_{\Pi_1}(1,-1,1)$, $\vec{n}_{\Pi_2}(2,1,1)$.

Deci $\vec{n}_\pi \perp \vec{n}_{\pi_1} \Leftrightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi_1} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow A \cdot 1 + B \cdot (-1) + C \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A - B + C = 0} \quad (1)$$

$$\vec{n}_\pi \perp \vec{n}_{\pi_2} \Leftrightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \cdot 2 + B \cdot 1 + C \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2A + B + C = 0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A - B + C = 0 \\ 2A + B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A - B = -C \\ 2A + B = -C \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3A = -2C \quad \Rightarrow \boxed{A = -\frac{2}{3}C}$$

$$\Rightarrow B = A + C \Rightarrow B = -\frac{2}{3}C + C \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{1}{3}C}$$

$$\Rightarrow \pi : -\frac{2}{3}C(x-1) + \frac{1}{3}C(y+1) + C(z-1) = 0 \quad \Big| \cdot \frac{3}{C}$$

$$-2(x-1) + (y+1) + 3(z-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x + y + 3z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2x - y - 3z = 0}$$

Sau : $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\vec{n}_{\pi_1}$ și $\vec{n}_{\pi_2}$ sunt vectori directori ai planului π.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}(x-1) - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}(y+1) + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}(z-1) = 0$$

$$-2(x-1) + (y+1) + 3(z-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x + y + 3z = 0 \Leftrightarrow \boxed{2x - y - 3z = 0}$$

8. Unghiul dintre două plane este unghiul dintre vectorii lor normali.

a) $\vec{n}_1(4,-5,3)$, $\vec{n}_2(1,-4,-1)$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} = \frac{4\cdot 1 + (-5)\cdot(-4) + 3(-1)}{\sqrt{4^2+(-5)^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+(-4)^2+(-1)^2}} =$$

$$= \frac{4+20-3}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{18}} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

$$\boxed{\varphi = \arccos\frac{7}{10}}.$$

b) $\vec{n}_1(3,-1,2)$, $\vec{n}_2(5,9,-3)$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} = \frac{3\cdot 5 + (-1)\cdot 9 + 2(-3)}{\sqrt{9+1+4}\cdot\sqrt{25+81+9}} = 0$$

Deci $\boxed{\pi_1 \perp \pi_2}$.

c). Observăm că: $\frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{-4}{-6} = \left(\frac{2}{3}\right) \neq \frac{17}{4}$

Deci $\pi_1 \parallel \pi_2$. Sau calculăm $\cos\varphi =$

$$= \frac{6\cdot 9 + 2\cdot 3 + (-4)\cdot(-6)}{\sqrt{36+4+16}\ \sqrt{81+9+36}} = \frac{84}{\sqrt{56}\cdot\sqrt{126}} = \frac{84}{2\sqrt{14}\cdot 3\sqrt{14}} = 1.$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = 0}$$