Seminar 3

Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

3.1 Mulţimea soluţiilor. Sistem fundamental de soluţii

Se consideră sistemul liniar omogen:

$$\begin{cases} y_1'(x) & = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) \\ y_2'(x) & = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1,2}$. Dacă notăm cu

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

obţinem forma vectorială a sistemului (3.1)

$$Y' = A \cdot Y \tag{3.2}$$

unde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Notăm cu S_0 mulţimea soluţiilor sistemului liniar omogen (3.1).

Teorema 3.1.1 *S_0 este un subspaţiu finit dimensional cu* $\dim S_0 = 2$ *al spaţiului* $C^1(I, \mathbb{R}^2)$.

$\{Y^1, Y^2\}$ bază în S_0 se numeşte **sistem fundamental de soluţii**, iar matricea

$$U = \left(Y^1\ Y^2\ ...\ Y^n\right)$$

se numeşte **matrice fundamentală de soluţii**.

Soluţia generală a sistemului liniar omogen:

$$Y = U \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

3.2 Metoda reducerii la o ecuaţie cu coeficienţi constanţi

Considerăm cazul sistemelor de două ecuaţii

$$\begin{cases} y_1' = & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' = & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$$

Se alege una dinrte ecuaţiile sistemului şi se derivează

$$\begin{aligned} y_1'' &= a_{11}\left(a_{11}y_1 + a_{12}y_2\right) + a_{12}\left(a_{21}y_1 + a_{22}y_2\right) \\ &= \left(a_{11}^2 + a_{12}a_{21}\right)y_1 + \left(a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22}\right)y_2 \end{aligned}$$

Pentru simplificarea scrierii vom nota

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11}^2 + a_{12}a_{21} \\ \alpha_2 &= a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22}, \end{aligned}$$

astfel, obţinem

$$y_1'' = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

Folosind această relaţie şi ecuaţia sistemului de la care am pornit obţinem sistemul:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 & = y_1' \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 & = y_1'' \end{cases} \tag{3.4}$$

din care îl exprimăm pe y_2 în funcţie de y_1, y_1':

$$y_2 = \frac{1}{a_{12}}\left(y_1' - a_{11}y_1\right) \tag{3.5}$$

şi prin înlocuirea în cea de a doua ecuaţie obţinem

$$\begin{aligned} y_1'' &= \alpha_1 y_1 + \frac{\alpha_2}{a_{12}}\left(y_1' - a_{11}y_1\right) \\ y_1'' &= \frac{\alpha_2}{a_{12}}y_1' + \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 a_{11}}{a_{12}}\right)y_1 \end{aligned}$$

adică o ecuaţiei cu coeficienţi constanţi de ordinul 2 cu necunoscuta y_1:

$$y_1'' + \beta_1 y_1' + \beta_2 y_1 = 0, \tag{3.6}$$

unde $\beta_1 = -\frac{\alpha_2}{a_{12}}$, $\beta_2 = -\left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 a_{11}}{a_{12}}\right)$. Prin rezolvarea acestei ecuaţii folosind metoda de rezolvare a ecuaţiilor liniare omogene de ordinul 2 cu coeficienţi constanţi obţinem

$$y_1(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

unde $\{\phi_1, \phi_2\}$ este sistemul fundamental de soluţii corespunzător ecuaţiei (3.6). Expresia celei de a doua componente a sistemului se obţine din (3.5) prin înlocuirea lui y_1 cu expresia determinată.

Exerciţiul 3.2.1 *Să se rezolve (folosind metoda reducerii la o ecuaţie cu coeficienţi constanţi):*

$$(a)\ \begin{cases} y_1' = & y_2 \\ y_2' = & y_1 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} y_1' = & y_1 - y_2 \\ y_2' = & y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} y_1' = & y_1 - 5y_2 \\ y_2' = & 2y_1 - y_2 \end{cases} \qquad (e)\ \begin{cases} y_1' = & 7y_1 + y_2 \\ y_2' = & 7y_2 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} y_1' = & y_1 + y_2 \\ y_2' = & -2y_1 + 4y_2 \end{cases} \qquad (f)\ \begin{cases} y_1' = & 2y_1 - y_2 \\ y_2' = & 3y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

Soluţii:

(a) Pentru sistemul

$$\begin{cases} y_1' = & y_2 \\ y_2' = & y_1 \end{cases}$$

alegem prima ecuaţie şi o derivăm:

$$y_1'' = y_2'.$$

Dar, din a doua ecuaţie a sistemului avem

$$y_2' = y_1,$$

de unde deducema că

$$y_1'' = y_1,$$

adică obţinem ecuaţie liniară omogenă de ordinul 2 în y_1

$$y_1'' - y_1 = 0.$$

Ecuaţia caracteristică ataşată este de forma

$$r^2 - 1 = 0$$

cu rădăcinile

$$r_{1,2} = \pm 1.$$

Astel, sistemul fundamental de soluţii corespunzător acestei ecuaţii este:

$$\phi_1(x) = e^x,\ \phi_2(x) = e^{-x}\ ,$$

deci soluţia corespunzătoare y_1 este

$$y_1(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)\,,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

$$y_1(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Expresia celei de a doua componente a sistemului se obţine din prima ecuaţie a sistemului, ştim că

$$y_2 = y_1',$$

deci

$$y_2(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

În concluzie, soluţia sistemului este:

$$\begin{cases} y_1(x) = & c_1 e^x + c_2 e^{-x} \\ y_2(x) = & c_1 e^x - c_2 e^{-x} \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Pentru sistemul

$$\begin{cases} y_1' = & y_1 - 5y_2 \\ y_2' = & 2y_1 - y_2 \end{cases}$$

Alegem prima ecuaţie a sistemului şi o derivăm

$$y_1'' = y_1' - 5y_2'.$$

Folosind relaţiile sistemului obţinem

$$\begin{aligned} y_1'' &= y_1 - 5y_2 - 5(2y_1 - y_2) = \\ &= y_1 - 5y_2 - 10y_1 + 5y_2 = \\ &= -9y_1, \end{aligned}$$

adică y_1 este soluţie a ecuaţiei

$$y_1'' + 9y_1 = 0.$$

Rezolvăm această ecuaţie. Ecuaţia caracteristică ataşată este

$$r^2 + 9 = 0$$

şi are rădăcinile $r_{1,2} = \pm 3i$. Astfel, sistemul fundamental de soluţii corespunzător este format din funcţiile

$$\phi_1(x) = \cos(3x), \; \phi_2(x) = \sin(3x),$$

deci

$$y_1(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Cea de doua componentă a sistemului se determină din prima ecuaţie

$$y_2 = \frac{1}{5}(y_1 - y_1'),$$

adică

$$y_2(x) = \frac{1}{5}\left[c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) + 3c_1 \sin(3x) - 3c_2 \cos(3x)\right],$$

de unde obţinem

$$y_2(x) = c_1\left[\frac{1}{5}\cos(3x) + \frac{3}{5}\sin(3x)\right] + c_2\left[\frac{1}{5}\sin(3x) - \frac{3}{5}\cos(3x)\right],$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

În concluzie, soluţia sistemului este:

$$\begin{cases} y_1(x) = & c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x), \\ y_2(x) = & c_1\left[\frac{1}{5}\cos(3x) + \frac{3}{5}\sin(3x)\right] + c_2\left[\frac{1}{5}\sin(3x) - \frac{3}{5}\cos(3x)\right], \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Soluţie: $\begin{cases} y_1(x) = & c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \\ y_2(x) = & c_1 e^{2x} + 2c_2 e^{3x} \end{cases}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(d) Soluţie: $\begin{cases} y_1(x) = & c_1 e^{x} \sin(x) + c_2 e^{x} \cos(x) \\ y_2(x) = & -c_1 e^{x} \cos(x) + c_2 e^{x} \sin(x) \end{cases}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(e) Soluţie: $\begin{cases} y_1(x) = & c_1 e^{7x} + c_2 x e^{7x} \\ y_2(x) = & c_2 e^{7x} \end{cases}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(f) Soluţie: $\begin{cases} y_1(x) = & c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} \\ y_2(x) = & c_1 e^{x} + 3c_2 e^{-x} \end{cases}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3.3 Metoda ecuaţiei caracteristice (metoda valorilor proprii)

Considerăm sistemul liniar omogen cu coeficienţi constanţi (3.1) scris în forma vectorială (3.2)

$$Y' = A \cdot Y.$$

Căutăm soluţii de forma

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

astfel încât $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0)$. Deoarece Y trebuie să fie soluţie a sistemului (3.2) atunci

$$Y' - A \cdot Y = 0$$

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda E_2 - A) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

adică (α_1, α_2) este soluţie a sistemului liniar omogen

$$(\lambda E_2 - A) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

şi cum $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0)$ atunci

$$\det(\lambda E_2 - A) = 0. \tag{3.9}$$

Ecuaţia (3.9) se numeşte **ecuaţia caracteristică** ataşată sistemului (3.2) şi se observă că soluţiile ecuaţiei caracteristice sunt valorile proprii ale matricii A, iar coeficienţii (α_1, α_2) sunt vectorii proprii corespunzători valorilor proprii λ.

(a) **Cazul valorilor proprii simple**

Dacă matricea A admite 2 valori proprii simple λ_1, λ_2 atunci pentru fiecare valoare proprie λ_i, $i = \overline{1,2}$, se determină un vector propriu nenul din sistemul (3.8) de forma (α_1^i, α_n^i), $i = 1,2$. Astfel, se construiesc 2 soluţii

$$Y^i(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1^i e^{\lambda_i x} \\ \alpha_2^i e^{\lambda_i x} \end{pmatrix}, \ i = \overline{1,2},$$

ce vor forma sistemul fundamental de soluţii corespunzător sistemului (3.2). Deci, matricea fundamentală de soluţii va fi de forma

$$U(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 e^{\lambda_1 x} & \alpha_1^2 e^{\lambda_2 x} \\ \alpha_2^1 e^{\lambda_1 x} & \alpha_2^2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

de unde deducem soluţia generală a sistemului

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) **Cazul valorilor proprii complexe**

Dacă matricea A admite o valori proprii complexe conjugate $\lambda = \alpha \pm i\beta$, ceea ce înseamnă că o pereche de valori proprii conjugate vor genera două soluţii în sistemul fundamental. Principiul este identic cu cel din cazul ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, şi anume,

$$Z(x) = Z_1(x) + i \cdot Z_2(x)$$

este soluţie a sistemului (3.2) dacă şi numai dacă partea reală $Z_1(x)$ şi partea imaginară $Z_2(x)$ sunt soluţii a sistemului (3.2).

Astfel, în cazul unei valori proprii complexe se determină un vector propriu nenul în $\mathbb{C}^2$ din sistemul (3.8) de forma $(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2) \neq (0, 0)$ şi se determină soluţia corespunzătoare

$$Z(x) = \begin{pmatrix} (a_1 + ib_1) e^{(\alpha + i\beta)x} \\ (a_2 + ib_2) e^{(\alpha + i\beta)x} \end{pmatrix}$$

după care determinăm partea reală şi partea imaginară folosind relaţia

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + i \cdot \sin(\beta x)].$$

În urma calculelor, obţinem

$$Z(x) = Z^1(x) + i \cdot Z^2(x)$$

unde

$$Z^1(x) = \begin{pmatrix} e^{\alpha x} [a_1 \cos(\beta x) - b_1 \sin(\beta x)] \\ e^{\alpha x} [a_2 \cos(\beta x) - b_2 \sin(\beta x)] \end{pmatrix},$$
$$Z^2(x) = \begin{pmatrix} e^{\alpha x} [a_1 \sin(\beta x) + b_1 \cos(\beta x)] \\ e^{\alpha x} [a_2 \sin(\beta x) + b_2 \cos(\beta x)] \end{pmatrix},$$

iar cele două soluţii din sistemul fundamental generate de valorile proprii complexe conjugate $\alpha \pm i\beta$ vor fi $Z^1(x)$ şi $Z^2(x)$.

(c) **Cazul valorilor proprii multiple**

Dacă λ este valoare proprie reală a matricii A cu ordinul de multiplicitate 2, adică λ este rădăcină de ordin 2 a ecuaţiei caracteristice (3.9), atunci ea va genera 2 soluţii în sistemul fundamental de soluţii de forma

$$\begin{aligned} Y^1(x) &= e^{\lambda x} u_1 \\ Y^2(x) &= e^{\lambda x} \left(\tfrac{x}{1!} u_1 + u_2 \right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

unde u_1, u_2 sunt vectorii proprii generalizaţi ai matricii A, adică

$$\begin{aligned} Au_1 &= \lambda u_1, \\ Au_2 &= \lambda u_2 + u_1, \end{aligned}$$

sau u_1, u_2 sunt soluţii a sistemelor

$$\begin{aligned} (A - \lambda E_2)\, u_1 &= 0, \\ (A - \lambda E_2)\, u_2 &= u_1, \end{aligned} \tag{3.12}$$

Exerciţiul 3.3.1 *Să se rezolve (folosind metoda ecuaţiei caracteristice):*

$$(a) \begin{cases} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + 4y_2 \end{cases} \qquad (d) \begin{cases} y_1' = & y_1 - y_2 \\ y_2' = & y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} y_1' = & y_1 - 5y_2 \\ y_2' = & 2y_1 - y_2 \end{cases} \qquad (e) \begin{cases} y_1' = & 7y_1 + y_2 \\ y_2' = & 7y_2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} y_1' = & y_1 + y_2 \\ y_2' = & -2y_1 + 4y_2 \end{cases} \qquad (f) \begin{cases} y_1' = & 2y_1 - y_2 \\ y_2' = & 3y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

Soluţii:

(a) Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

iar ecuaţia caracteristică ataşată este

$$\det(\lambda E_2 - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0$$

adică

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

de unde obţinem valorile proprii $\lambda_1 = 2$ şi $\lambda_2 = 3$.

Pentru fiecare valoare proprie determinăm un vector propriu corespunzător. Astfel, pentru $\lambda_1 = 2$ sistemul vectorilor proprii este

$$(\lambda_1 E_2 - A) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

adică

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \end{cases}$$

deci $\alpha_1 = \alpha_2$. Alegem $\alpha_1 = 1$ de unde deducem că $\alpha_2 = 1$. Astfel, obţinem prima soluţie din sistemul fundamental de soluţii

$$Y^1(x) = e^{2x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Pentru $\lambda_2 = 3$ sistemul vectorilor proprii este

$$(\lambda_2 E_2 - A)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

adică

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 & = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 & = 0 \end{cases}$$

deci $2\alpha_1 = \alpha_2$. Alegem $\alpha_1 = 1$ de unde deducem că $\alpha_2 = 2$. Astfel, obţinem a doua soluţie din sistemul fundamental de soluţii

$$Y^1(x) = e^{3x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 2e^{3x} \end{pmatrix}.$$

Matricea fundamentală de soluţii este

$$U = \begin{pmatrix} Y^1 & Y^2 \end{pmatrix}$$

$$U(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ e^{2x} & 2e^{3x} \end{pmatrix}$$

de unde obţinem soluţia generală a sistemului

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = U(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ e^{2x} & 2e^{3x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

adică

$$\begin{cases} y_1(x) & = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \\ y_2(x) & = c_1 e^{2x} + 2c_2 e^{3x} \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

iar ecuaţia caracteristică ataşată este

$$\det(\lambda E_2 - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 5 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

adică

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) + 10 = 0$$

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

de unde obţinem valorile proprii $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Suntem în cazul valorilor proprii complexe conjugate, alegem una dintre aceste valori, de exemplu $\lambda = 3i$ şi construim soluţia de variabilă reală dar cu valori complexe $Z(x)$. Sistemul vectorilor proprii este (în $\mathbb{C}^2$) pentru $\lambda = 3i$ este

$$(\lambda_1 E_2 - A)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3i-1 & 5 \\ -2 & 3i+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

adică

$$\begin{cases} (3i-1)\,\alpha_1 + 5\alpha_2 & = 0 \\ -2\alpha_1 + (3i+1)\,\alpha_2 & = 0 \end{cases}$$

Trebuie sa determinăm o soluţie diferită de soluţia banală (nu uitaţi ca sistemul este compatibil nedeterminat, deci are o infinitate de soluţii în $\mathbb{C}$), alegem prima ecuaţie a sistemului în care luăm $\alpha_2 = \frac{1}{5}$, astfel, obţinem

$$\alpha_1 = -\frac{1}{3i-1} = \frac{1+3i}{10}.$$

Scriem soluţia $Z(x)$ de variabilă reală dar cu valori complexe

$$Z(x) = \begin{pmatrix} \frac{1+3i}{10}e^{3ix} \\ \frac{1}{5}e^{3ix} \end{pmatrix}.$$

Folosind formula lui Euler

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\left[\cos(\beta x) + i\cdot\sin(\beta x)\right]$$

obţinem

$$Z(x) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i\right)(\cos(3x) + i\sin(3x)) \\ \frac{1}{5}(\cos(3x) + i\sin(3x)) \end{pmatrix}$$

şi identificăm partea reală şi partea imaginară

$$Z(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}\cos(3x) - \frac{3}{10}\sin(3x) \\ \frac{1}{5}\cos(3x) \end{pmatrix} + i\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{10}\sin(3x) + \frac{3}{10}\cos(3x) \\ \frac{1}{5}\sin(3x) \end{pmatrix},$$

deci sistemul fundamental de soluţii va fi format din partea reală, respectiv partea imaginară a lui $Z(x)$

$$Y^1(x) = \operatorname{Re} Z(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}\cos(3x) - \frac{3}{10}\sin(3x) \\ \frac{1}{5}\cos(3x) \end{pmatrix},$$

$$Y^2(x) = \operatorname{Im} Z(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}\sin(3x) + \frac{3}{10}\cos(3x) \\ \frac{1}{5}\sin(3x) \end{pmatrix}.$$

Matricea fundamentală de soluţii este

$$U = \left(Y^1\ Y^2\right)$$

$$U(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}\cos(3x) - \frac{3}{10}\sin(3x) & \frac{1}{10}\sin(3x) + \frac{3}{10}\cos(3x) \\ \frac{1}{5}\cos(3x) & \frac{1}{5}\sin(3x) \end{pmatrix}$$

de unde obţinem soluţia generală a sistemului

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = U(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}\cos(3x) - \frac{3}{10}\sin(3x) & \frac{1}{10}\sin(3x) + \frac{3}{10}\cos(3x) \\ \frac{1}{5}\cos(3x) & \frac{1}{5}\sin(3x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

adică

$$\begin{cases} y_1(x) &= c_1\left(\dfrac{1}{10}\cos(3x) - \dfrac{3}{10}\sin(3x)\right) + c_2\left(\dfrac{1}{10}\sin(3x) + \dfrac{3}{10}\cos(3x)\right) \\ y_2(x) &= \dfrac{c_1}{5}\cos(3x) + \dfrac{c_2}{5}\sin(3x) \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Soluţie: $\begin{cases} y_1(x) = & c_1e^{2x} + c_2e^{3x} \\ y_2(x) = & c_1e^{2x} + 2c_2e^{3x} \end{cases}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

(d) Soluţie: $\begin{cases} y_1(x) = & c_1e^{x}\sin(x) + c_2e^{x}\cos(x) \\ y_2(x) = & -c_1e^{x}\cos(x) + c_2e^{x}\sin(x) \end{cases}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

(e) Soluţie: $\begin{cases} y_1(x) = & c_1e^{7x} + c_2xe^{7x} \\ y_2(x) = & c_2e^{7x} \end{cases}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

(f) Soluţie: $\begin{cases} y_1(x) = & c_1e^{x} + c_2e^{-x} \\ y_2(x) = & c_1e^{x} + 3c_2e^{-x} \end{cases}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$