Seminar 14 - Transformări liniare și matrici.

(Lista 12)

① În $\mathbb{R}$-spațiul vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideră subspațiile:

c) $S = \langle u_1, u_2 \rangle$, $u_1 = (1,2,1,0)$, $u_2 = (-1,1,1,1)$.

$T = \langle v_1, v_2 \rangle$, $v_1 = (2,-1,0,1)$, $v_2 = (1,-1,3,7)$.

Găsiți câte o bază și dimensiunea pentru fiecare dintre subspațiile $S, T, S+T$ și $S \cap T$.

$\dim S = \operatorname{rang}(u_1, u_2) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow (u_1, u_2)$ bază în $S$.

$\dim T = \ldots = 2 \Rightarrow (v_1, v_2)$ bază în $T$.

$S+T = \langle S \cup T \rangle = \langle u_1, u_2, v_1, v_2 \rangle$

$$\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \underset{C_3 - C_1}{\overset{C_2 - 2C_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix} \underset{L_4 - L_2}{\overset{L_3 + L_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \overset{L_4 - 3L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\dim(S+T) = 3 \Rightarrow (u_1, u_2, v_1)$ bază în $S+T$.

$\dim(S \cap T) = \dim S + \dim T - \dim(S+T) = 2+2-3 = 1.$

$S \cap T = \{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ a.î.

$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \}$.

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \iff$

$\alpha_1(1,2,1,0) + \alpha_2(-1,1,1,1) - \beta_1(2,-1,0,1) - \beta_2(1,-1,3,7) = 0_{\mathbb{R}^4}$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - 2\beta_1 - \beta_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \qquad\quad - 3\beta_2 = 0 \\ \qquad \alpha_2 - \beta_1 - 7\beta_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Matricea sistemului (1) este
$$\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & -v_1 & -v_2 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$
are rangul 3.

Sistemul (1) este compatibil nedeterminat, un minor principal poate fi „decupat" din primele 3 coloane $\Rightarrow \beta_2$ poate fi necunoscuta secundară

$$\left.\begin{array}{r} \beta_2 = 1 \\ (1) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - 2\beta_1 = 1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 = -1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \qquad = 3 \end{cases} \qquad \beta_1 = ?$$

$\beta_1 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4$. și

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 \Rightarrow \beta_1 = -3$

$x_0 = -3v_1 + v_2 = (-5, \ , \ , \ ) \in S \cap T \Rightarrow x_0$ formează singură o bază în $S \cap T$.

nenul

d) $S = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $u_1 = (1,2,1,-2)$, $u_2 = (2,3,1,0)$
$u_3 = (1,2,2,-3)$

$T = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,0,1,-1)$
$v_3 = (1,3,0,-3)$

---

$\dim S = \ldots = 3 \Rightarrow (u_1, u_2, u_3)$ bază în $S$

$\dim T = \ldots = 3 \Rightarrow (v_1, v_2, v_3)$ bază în $T$

$S + T = \langle u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \rangle$.

$$\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_3 - C_1 \\ C_4 + 2C_1}}{\overset{C_2 - 2C_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{C_4 + 4C_2}{\overset{C_3 - C_2}{\sim}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \overset{C_4 + C_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$\dim(S+T) = 4$ și $(u_1, u_2, u_3, v_2)$ bază în $S+T$.

$\dim S\cap T = \dim S + \dim T - \dim(S+T) = 3+3-4 = 2.$

$S\cap T = \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ a.î.

$\underline{x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3} \}.$

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 - \beta_1 v_1 - \beta_2 v_2 - \beta_3 v_3 = (0,0,0,0) \Leftrightarrow$

un sistem omogen de ec. liniare cu matricea sistemului:

$\left( \begin{array}{cccccc} \\ \\ u_1 & u_2 & u_3 & -v_1 & -v_2 & -v_3 \end{array} \right)$ care are rangul 4 și putem

considera ca necunoscute secundare pe $\beta_1$ și $\beta_3$.

$\beta_1 = 1 \quad \beta_3 = 0 \Rightarrow \beta_2' = \ldots \Rightarrow x' = v_1 + \beta_2' v_2 = (\ldots) \in S\cap T$

$\beta_1 = 0 \quad \beta_3 = 1 \Rightarrow \beta_2'' = \ldots \Rightarrow x'' = \beta_2'' v_2 + v_3 = (\ldots) \in S\cap T$

$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & \beta_2' & 0 \\ 0 & \beta_2'' & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow x' \\ \leftarrow x'' \end{array} = 2 \Rightarrow x', x''$ l. indep. $\Rightarrow (x', x'')$ bază în $S\cap T$.

Temă calcule.

② a) temă

b) Să se arate că funcțiile $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x,-y)$ (simetria în raport cu axa $Ox$) și $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (-x,y)$ (simetria în raport cu axa $Oy$) sunt automorfisme ale lui $\mathbb{R}^2$. Să se scrie matricile lui $f, g, f-g, f+2g$ și $g \circ f$ în baza canonică.

Se arată că $f$ și $g$ sunt transf. liniare pe baza definiției. (temă).

Cum $f: \underline{\mathbb{R}^2} \to \underline{\mathbb{R}^2}$ și $g: \underline{\mathbb{R}^2} \to \underline{\mathbb{R}^2} \Rightarrow f$ și $g$ endomorfisme ale lui $\mathbb{R}^2$.

Calculăm matricile lui $f$ și $g$ în baza canonică.

$$\left.\begin{array}{l} f(e_1) = f(1,0) = (1,0) = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2. \\ f(e_2) = f(0,1) = (0,-1) = 0\cdot e_1 + (-1)\cdot e_2 \end{array}\right| \Rightarrow [f]_e = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(e_1) & f(e_2) \end{array} \end{array}$$

$f$ automorfism în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow [f]_e$ inversabilă $\Leftrightarrow \det[f]_e \neq 0$.

$\det[f]_e = -1 \neq 0 \Rightarrow f$ automorfism în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$.

$$\left.\begin{array}{l} g(e_1) = g(1,0) = (-1,0) = (-1)\cdot e_1 + 0\cdot e_2 \\ g(e_2) = g(0,1) = (0,1) = 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 \end{array}\right| \Rightarrow [g]_e = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ g(e_1) & g(e_2) \end{array} \end{array}$$

$\det [g]_e = -1 \neq 0 \Rightarrow [g]_e$ inversabilă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow$
$\Rightarrow g$ automorfism în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$.

$$[f-g]_e = [f]_e - [g]_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$[f+2g]_e = [f]_e + 2[g]_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[g\circ f]_e = [g]_e \cdot [f]_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

③ Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+y, 2x-y, 3x+2y)$. Să se arate că $f$ este o transformare liniară, că $v = ((1,2),(-2,1))$, respectiv $v' = ((1,-1,0),(-1,0,1),(1,1,1))$ este o bază în $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$ și să se scrie matricea lui $f$ în perechea de baze $(v, v')$.

$f$ transformare liniară pe baza def (temă).

$v = (v_1, v_2)$, $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (-2,1)$.

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ v_1 \quad v_2 \end{array} = 1 + 4 = 5 \neq 0 \Rightarrow v \text{ bază în } {}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2.$$

$v' = (v'_1, v'_2, v'_3)$, $v'_1 = (1,-1,0)$, $v'_2 = (-1,0,1)$, $v'_3 = (1,1,1)$.

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \end{array} = \underset{\text{temă}}{\dots} \neq 0 \Rightarrow v' \text{ bază în } {}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3.$$

Calculăm matricea lui $f$ în perechea de baze $(v, v')$.

$f(v_1) = f(1,2) = (3,0,7) = \underline{\alpha_1 \cdot v'_1 + \alpha_2 \cdot v'_2 + \alpha_3 \cdot v'_3}$

$\Downarrow$

$(3,0,7) = \alpha_1(1,-1,0) + \alpha_2(-1,0,1) + \alpha_3(1,1,1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ -\alpha_1 \quad + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 7 \end{cases} \quad (+)$$

$$3\alpha_3 = 10 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{10}{3} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{11}{3} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{10}{3}.$$

Deci $f(v_1) = \frac{10}{3} \cdot v_1' + \frac{11}{3} \cdot v_2' + \frac{10}{3} \cdot v_3'$ (1).

$$f(v_2) = f(-2,1) = (-1,-5,-4) = \beta_1 \cdot v_1' + \beta_2 \cdot v_2' + \beta_3 \cdot v_3'$$

$$(-1,-5,-4) = \beta_1(1,-1,0) + \beta_2(-1,0,1) + \beta_3(1,1,1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = -1 \\ -\beta_1 \quad + \beta_3 = -5 \\ \beta_2 + \beta_3 = -4 \end{cases} \quad (+)$$

$$3\beta_3 = -10 \Rightarrow \beta_3 = \frac{-10}{3} \Rightarrow \beta_2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow \beta_1 = \frac{5}{3}$$

Deci $f(v_2) = \frac{5}{3} \cdot v_1' + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot v_2' + \left(\frac{-10}{3}\right) \cdot v_3'$ (2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ $[f]_{v,v'} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{11}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{10}{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) \end{array}$$

• <u>Recapitulare:</u>

Fie $k$ corp comutativ, $V, V'$ $k$-sp. vectoriale de tip finit.

$u, u'$ baze ordonate în $V$, $u' = u \cdot S$

matricea de trecere de la $u$ la $u'$.

$v, v'$ baze ordonate în $V'$, $v' = v \cdot T$

matricea de trecere de la $v$ la $v'$.

$f : V \to V'$ transformare liniară.

Atunci $[f]_{u',v'} = T^{-1} \cdot [f]_{u,v} \cdot S$

4 Fie $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ o bază a $\mathbb{R}$-sp. vect $\mathbb{R}^4$, vectorii $u_1 = v_1$, $u_2 = v_1 + v_2$, $u_3 = v_1 + v_2 + v_3$, $u_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ și $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ cu $[f]_v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Să se arate că $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ este o bază a lui $\mathbb{R}^4$ și să se scrie matricea $[f]_u$.

---

$u = v \cdot S$, $S = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \end{array}$

$\det S = 1 \neq 0 \Rightarrow S$ inversabilă $\Rightarrow u$ bază în $_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$.

$S$ = matricea de trecere de la $v$ la $u$.

Explicație $u_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4$, etc.

Știm $[f]_v = [f]_{v,v}$. Vrem să calculăm $[f]_u = [f]_{u,u}$.

În formula $[f]_{u',v'} = \overset{v \to v'}{T^{-1}} \cdot [f]_{u,v} \cdot \overset{u \to u'}{S}$ substituim:

La noi în probl.: $[f]_{u,u} = \underset{v \to u}{?^{-1}} \cdot [f]_{v,v} \cdot \underset{v \to u}{?}$

Deci noi avem că $[f]_{u,u} = S^{-1} \cdot [f]_{v,v} \cdot S$

(la noi $S$ era matricea de trecere de la $v$ la $u$).

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} \text{temă} \end{pmatrix}.$$

Așadar $[f]_{u,u} = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ temă.

□.

<u>Obs</u>. Dacă cunoșteam $[f]_{u,u}$ și doream să calculăm $[f]_{v,v}$. În formula:

$$S \cdot \Big| \, [f]_{u,u} = S^{-1} \cdot [f]_{v,v} \cdot S \, \Big| \cdot S^{-1} \Rightarrow [f]_v = S \cdot [f]_u \cdot S^{-1}.$$

5 temă.

⑦ Fie $V, V'$ $\mathbb{R}$-sp. vectoriale, $v=(v_1,v_2,v_3)$ o bază în $V$, $v'=(v_1',v_2',v_3')$ o bază în $V'$ și $f: V \to V'$ transf. lin cu $[f]_{v,v'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Să se determine:

i) dim și câte o bază pt $\operatorname{Im} f$ și $\ker f$

ii) $[f]_{v,e'}$ în cazul în care $V'=\mathbb{R}^3$, $v_1'=(1,0,0)$, $v_2'=(0,1,1)$, $v_3'=(0,0,1)$ și $e'$ este baza canonică în $\mathbb{R}^3$.

iii) $f(x)$ pentru $x = 2v_1 - v_2 + 3v_3$, în condițiile de la ii).

---

(i) $[f]_{v,v'} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} \end{array} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(v_1) = 0\cdot v_1' + 1\cdot v_2' + 0\cdot v_3' \Rightarrow f(v_1) = v_2' \\ f(v_2) = -1\cdot v_1' + 0\cdot v_2' + 1\cdot v_3' \Rightarrow f(v_2) = -v_1' + v_3' \\ f(v_3) = 5\cdot v_1' + 0\cdot v_2' + (-5)\cdot v_3' \Rightarrow f(v_3) = 5v_1' - 5v_3'. \end{array}\right\} (*)$$

$$\operatorname{Im} f = f(V) = \underbrace{f(\langle v_1, v_2, v_3\rangle)}_{\text{imaginea subsp. generat}} = \underbrace{\langle f(v_1), f(v_2), f(v_3)\rangle}_{\text{subsp. generat de imagini}}$$

Așadar $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ formează un sistem de generatori pt $\operatorname{Im} f$, dar se poate ca ei să NU fie o bază.

Pt. a obține o bază trebuie să luăm dintre ei numărul maxim de vectori liniar independenți

$= \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rang} [f]_{v,v'} = ?$

$$[f]_{v,v'} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) \end{array} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \\ \det [f]_{v,v'} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{rang} [f]_{v,v'} = 2$$

proporționale

$\Downarrow$

$\dim \operatorname{Im} f = 2$,

și $(f(v_1), f(v_2))$ bază în $\operatorname{Im} f$.

$f : V \to V'$ transf. lin $\Rightarrow \underbrace{\dim V}_{} = \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{2} + \dim \ker f$

3, deoarece V are pe $v = (v_1, v_2, v_3)$ ca bază

$\to \dim \ker f = 1. \Rightarrow$ pt a găsi o bază a lui $\ker f$ ajunge să găsim un vector nenul din $\ker f$.

Recap: $\ker f = \{ x \in V \mid f(x) = 0_{V'} \}$.

Observăm în (*) că $f(v_3) = -5 f(v_2) \Rightarrow$

$f(v_3) + 5 f(v_2) = 0_{V'} \xRightarrow{f \text{ transf lin}} f(v_3 + 5v_2) = 0$

$\Rightarrow \underline{v_3 + 5v_2 \in \ker f}$.

$v = (v_1, v_2, v_3)$ bază în $V \Rightarrow v_1, v_2, v_3$ l.i $\Rightarrow v_2, v_3$ l.i

$\Rightarrow \underline{v_3 + 5v_2 \neq 0}$

Așadar, cum $\dim \ker f = 1 \Rightarrow v_3 + 5v_2$ formează o bază pt $\ker f$.

ii). $v' = e' \cdot S$ , $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1' & v_2' & v_3' \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} v = v \cdot I_3 \text{ (matricea de trecere de la } v \text{ la } v) \\ v' = e' \cdot S \text{ (matricea de trecere de la } e' \text{ la } v') \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$S \cdot \Big| \, [f]_{v,v'} = S^{-1} \cdot [f]_{v,e'} \cdot I_3$$

$$\Rightarrow [f]_{v,e'} = S \cdot [f]_{v,v'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \text{temă}.$$

iii) $f(x) = f(2v_1 - v_2 + 3v_3) \xrightarrow{f \text{ transf. lin}} 2f(v_1) - f(v_2) + 3f(v_3)$

$\overset{(*)}{=} 2 \cdot v_2' - (-v_1' + v_3') + 3(5v_1' - 5v_3') =$

$= 2 \cdot (0,1,0) - (-1,0,1) + 3(5,0,-5) = (16, 2, -14)$ □.