Seminar 12

Sfera

1) Să se găsească ecuația sferei care trece prin punctele $M_1(1,0,0), M_2(0,1,-2), M_3(1,-2,1), M_4(-1,0,-2)$.

Soluție: Ecuația sferei prin patru puncte:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_{M_1}^2+y_{M_1}^2+z_{M_1}^2 & x_{M_1} & y_{M_1} & z_{M_1} & 1 \\ x_{M_2}^2+y_{M_2}^2+z_{M_2}^2 & x_{M_2} & y_{M_2} & z_{M_2} & 1 \\ x_{M_3}^2+y_{M_3}^2+z_{M_3}^2 & x_{M_3} & y_{M_3} & z_{M_3} & 1 \\ x_{M_4}^2+y_{M_4}^2+z_{M_4}^2 & x_{M_4} & y_{M_4} & z_{M_4} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (-1)^{1+1}(x^2+y^2+z^2)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}_{C_1=C_1-C_4} + (-1)^{1+2}x\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}_{C_1=C_1-C_4} + (-1)^{1+3}y\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}_{C_1=C_1-C_4 \text{ și } C_2=C_2-C_4} + (-1)^{1+4}z\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{C_1=C_1-C_4 \text{ și } C_2=C_2-C_4} + (-1)^{1+5}1\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & -2 \\ 6 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}_{C_1=C_1-C_2} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (x^2+y^2+z^2)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} - z\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (x^2+y^2+z^2)(-1)^{1+4}\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}}_{C_1=C_1-C_3} - x(-1)^{1+4}\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}}_{C_1=C_1+2C_3} + y(-1)^{1+4}\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix}}_{C_1=C_1-5C_3} - z(-1)^{1+4}\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}}_{C_1=C_1+2C_2} + (-1)^{1+2}\underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix}}_{C_1=C_1+3C_3} = 0 \Longleftrightarrow$$

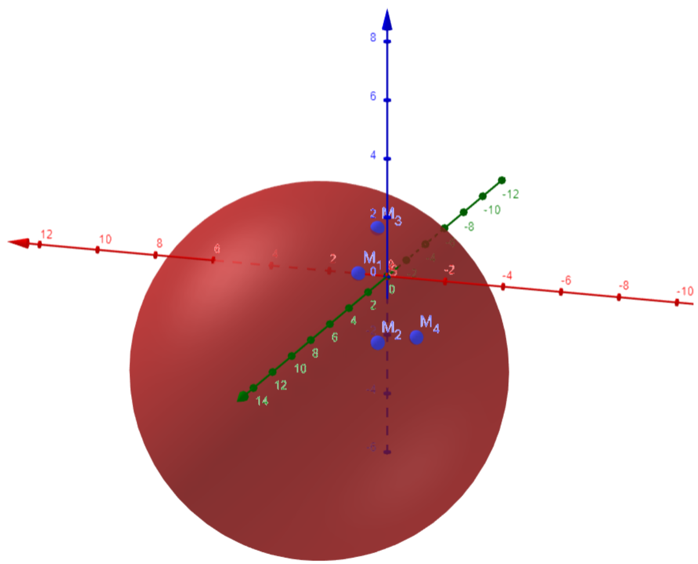
$$\Longleftrightarrow (x^2+y^2+z^2)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} - x(-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 7 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} + y(-1)\begin{vmatrix} 14 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 14 & -2 & -2 \end{vmatrix} - z(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 8 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (x^2+y^2+z^2)(-1)(-1)^{3+3}(-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - x(-1)(-1)^{3+3}(-2)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} + y(-1)(-1)^{2+3}1\begin{vmatrix} 14 & -1 \\ 14 & -2 \end{vmatrix} - z(-1)(-1)^{3+2}(-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+3}(-2)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (x^2+y^2+z^2)2(-1) - 2x(-7) + y(-14) + 2z(-9) + 2(-6) = 0$$

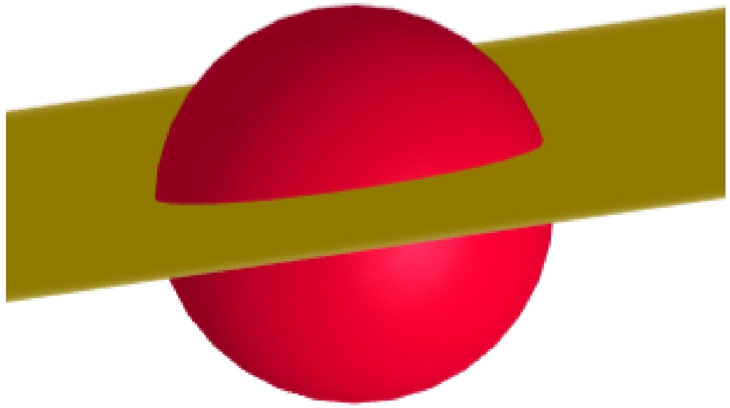
$$\Longleftrightarrow (-2)(x^2+y^2+z^2) + 14x - 14y - 18z - 12 = 0 | : (-2)$$

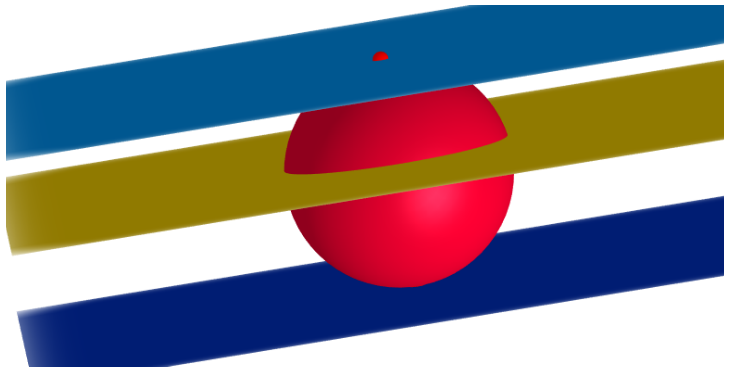
$$x^2+y^2+x^2-7x+7y+9z+6=0$$



2) Să se scrie ecuația planului tangent la sfera $x^2+y^2+z^2-8x-4z-205=0$ paralel cu planul $10x-11y-2z+3=0$.

Soluție:





$$x^2+y^2+z^2-8x-4z-205=0 \iff$$

$$\iff x^2-8x+16-16+y^2+z^2-4z+4-4-205=0$$

$$\iff (x-4)^2+y^2+(z-2)^2=225$$

$$C(4,0,2); R=15$$

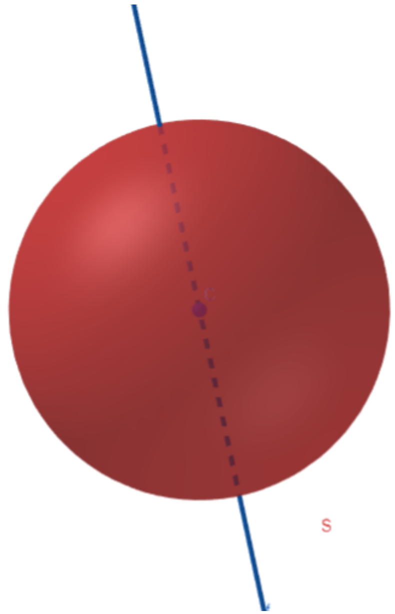
$$\Pi: 10x-11y-2z+D=0$$

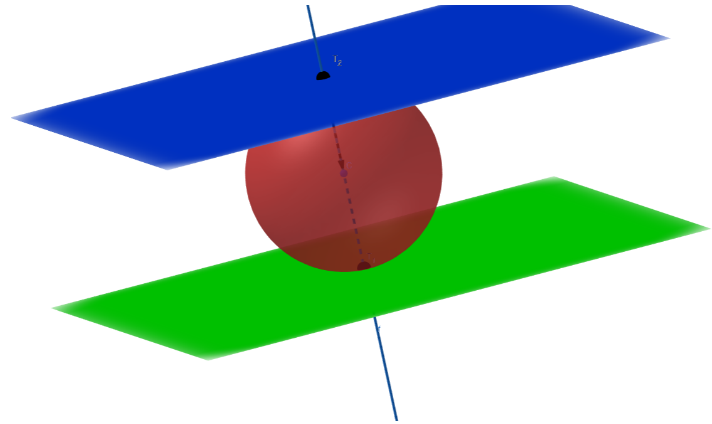
$$d(C,\Pi)=R \implies \frac{|10\cdot 4+(-11)\cdot 0+(-2)\cdot 2+D|}{\sqrt{10^2+(-11)^2+(-2)^2}}=\frac{|40-0-4+D|}{\sqrt{100+121+4}}=15 \iff \frac{|36+D|}{\sqrt{225}}=15 \iff |36+D|=225 \iff 36+D=\pm 225$$

$$\implies \begin{cases} D_1=225-36 \iff D_1=189 \implies \Pi_1: 10x-11y-2z+189=0 \\ D_2=-225-36 \iff D_2=-261 \implies \Pi_2: 10x-11y-2z-261=0 \end{cases}$$

3) Să se găsească ecuațiile planelor tangente la sfera $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=6$ în punctele de intersecție cu dreapta $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$.

Soluție:





$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}=t \iff \begin{cases} x-1=t \\ y=-t \\ z-1=2t \\ (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=6 \end{cases} \iff \begin{cases} x=t+1 \\ y=-t \\ z=2t+1 \\ (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=6 \end{cases}$$

$$(t+1-2)^2+(-t+1)^2+(2t+1-3)^2=6 \iff (t-1)^2+(t-1)^2+4(t-1)^2=6 \iff 6(t-1)^2=6 \iff (t-1)^2=1 \iff t-1=\pm1 \iff \begin{cases} t_1=0 \\ t_2=2 \end{cases} \implies \begin{cases} T_1(1,0,1) \\ T_2(3,-2,5) \end{cases}$$

Centrul sferei: $C(2,-1,3)$

$CT_1 \perp \Pi_1 \implies \overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{T_1C} \implies \overrightarrow{n_1}(2-1,-1-0,3-1) \iff \overrightarrow{n_1}(1,-1,2)$

Ecuația planului Π_1 care trece prin T_1 și are vectorul normal $\overrightarrow{n_1}$ este: $A_1(x-x_1)+B_1(y-y_1)+C_1(z-z_1)=0$, adică în cazul nostru:

$\Pi_1 : 1(x-1)+(-1)(y-0)+2(z-1)=0 \iff \Pi_1 : x-y+2z-3=0$

Analog: $\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{T_2C} \implies \overrightarrow{n_2}(2-3,-1-(-2),3-5) \iff \overrightarrow{n_2}(-1,1,-2)$

$\Pi_2 : -1(x-3)+1(y+2)-2(z-5)=0 \iff \Pi_2 : -x+y-2z+15=0 \iff \Pi_2 : x-y+2z-15=0$

Observație: $\Pi_1 || \Pi_2$ pentru că punctele T_1 și T_2 sunt diametral opuse (echivalent: dreapta d trece prin centrul sferei C).
Într-adevăr

$$2 = x_c = \frac{x_{T_1} + x_{T_2}}{2} \qquad \left(\frac{1+3}{2} = 2\right)$$

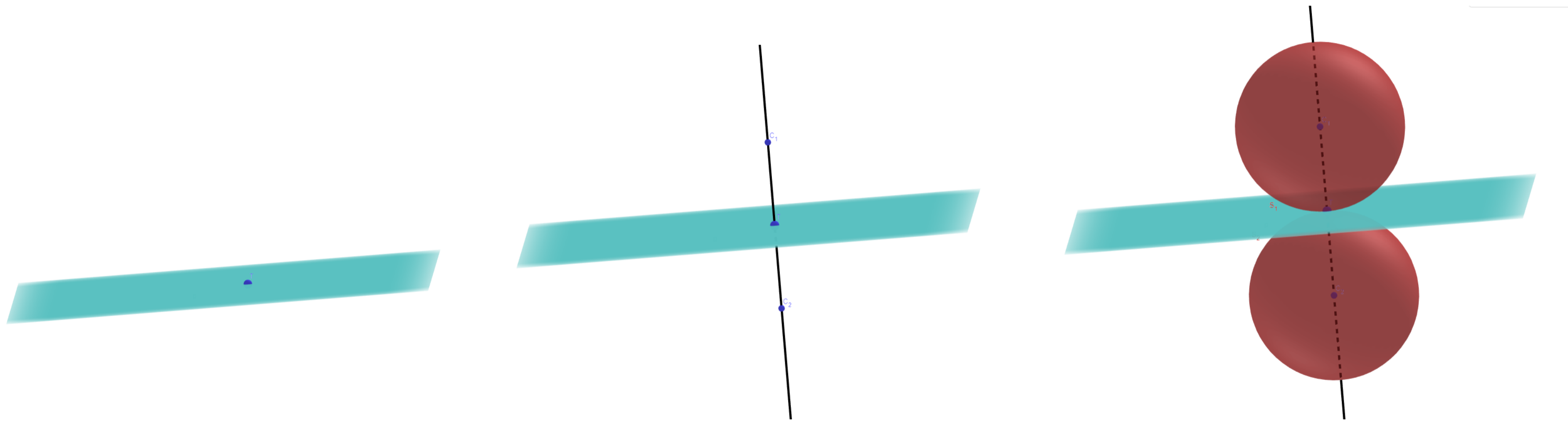
$$-1 = y_c = \frac{y_{T_1} + y_{T_2}}{2} \qquad \left(\frac{0-2}{2} = -1\right)$$

$$3 = z_c = \frac{z_{T_1} + z_{T_2}}{2} \qquad \left(\frac{1+5}{2} = 3\right)$$

Echivalent $\frac{2-1}{1} = \frac{-1}{-1} = \frac{3-1}{2} (= 1)$

4) Să se scrie ecuația sferei de rază 3 tangentă la planul $\Pi: 2x-2y+z-2=0$ în punctul $T(1,1,2)$.

Soluție:



Centrul C se găsește pe dreapta perpendiculară în T pe planul Π.

Ecuațiile dreptei: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$

($\vec{d}=\vec{n}(2,-2,1)$ vectorul director al dreptei coincide cu vectorul normal al planului Π).

Fie $C(a,b,c)$ centrul sferei S.

$\dfrac{a-1}{2}=\dfrac{b-1}{-2}=\dfrac{c-2}{1}=t$

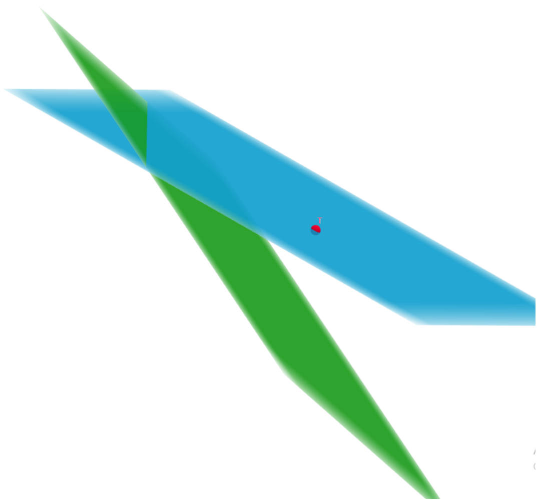
$CT=3 \iff \sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2+(c-2)^2}=3$

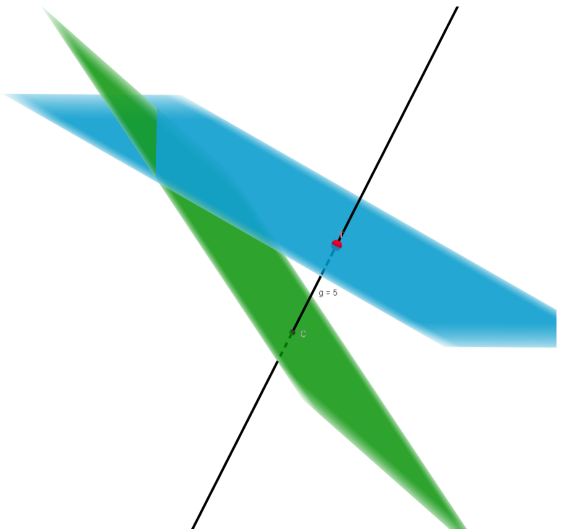
$$\begin{cases} a=2t+1 \\ b=-2t+1 \\ c=t+2 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-2)^2=9 \end{cases} \implies (2t+1-1)^2+(-2t+1-1)^2+(t+2-2)^2=9 \iff (2t)^2+(-2t)^2+t^2=9 \iff 9t^2=9 \iff t^2=1 \iff t_{1,2}=\pm 1$$

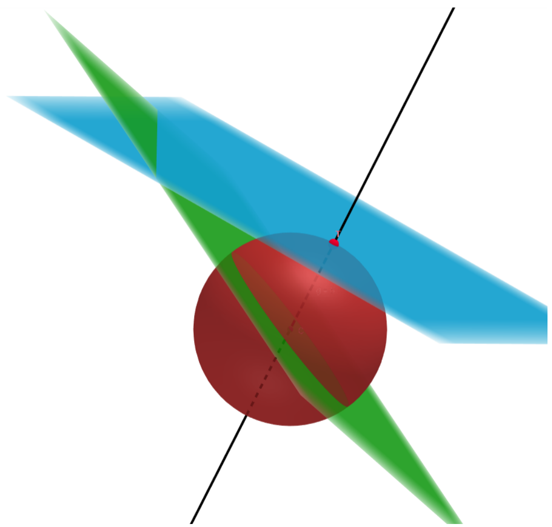
$$\implies \begin{cases} C_1(3,-1,3) \implies S_1:(x-3)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9 \\ C_2(-1,3,1) \implies S_2:(x+1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9 \end{cases}$$

5) Să se scrie ecuația sferei care are centrul în planul $\Pi: 2x-y+z-4=0$ și care este tangentă planului $\Pi_1: 4x+3z-29=0$ în punctul $T(5,-2,3)$.

Soluție:







Dreapta $d(\equiv TC)$ este perpendiculară pe planul Π_1. Deci $\overrightarrow{d}=\overrightarrow{n_1}(4,0,3)$.

$$d:\frac{x-5}{4}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-3}{3}=t$$

Centrul $C=d\cap\Pi$

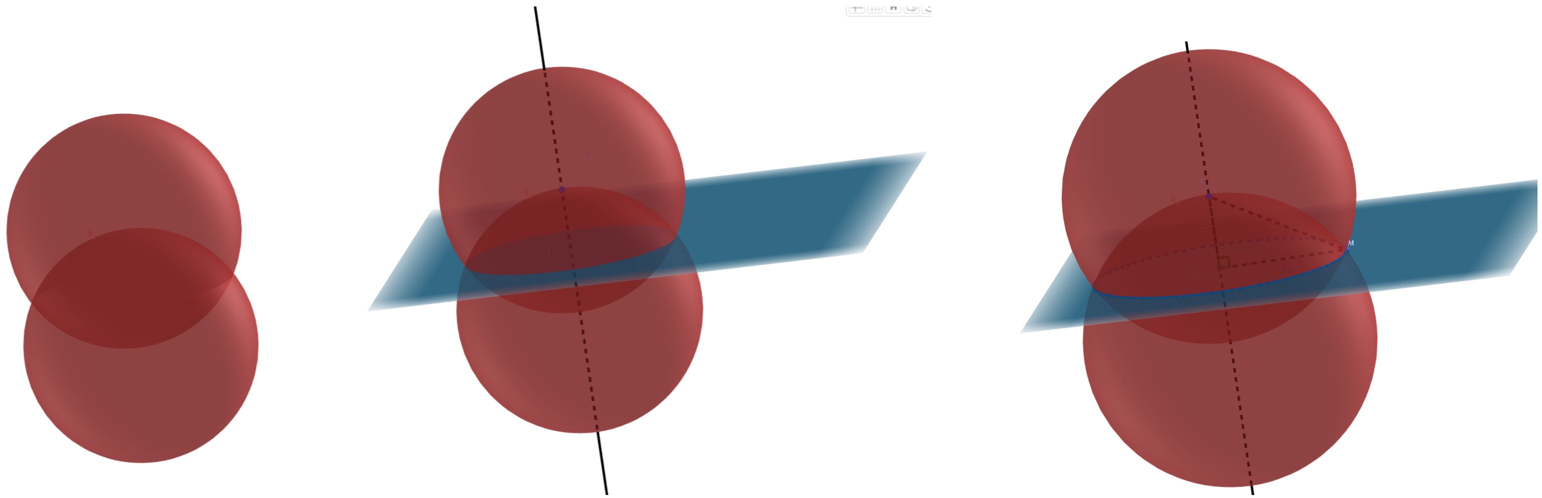
$$\begin{cases} x=4t+5 \\ y=-2 \\ z=3t+3 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases} \Longrightarrow 8t+10+2+3t+3-4=0 \iff 11t+11=0 \iff t=-1$$

$C(1,-2,0)$ $\quad R=CT=\sqrt{(5-1)^2+(-2-(-2))^1+(3-0)^2}=\sqrt{4^2+0^1+3^2}=5$

$$S:(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=25$$

6) Se dau sferele $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ și $S_2 : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4z = 0$. Să se afle centrul și raza cercului de intersecție.

Soluție:



$\Pi : S_1 - S_2 = 0 \quad 2x + 4y - 4z - 9 = 0$

$C_1(0,0,0), R_1 = 3$

$d = d(C_1, C) = d(C_1, \Pi) = \dfrac{|-9|}{\sqrt{4+16+16}} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$

$R^2 = R_1^2 - d^2 = 9 - \dfrac{9}{4} = \dfrac{27}{4} \implies R = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$C_1C : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{-4} | \cdot 2 \iff \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{-2} = t$

(dreapta care trece prin C_1 și este perpendiculară pe Π)

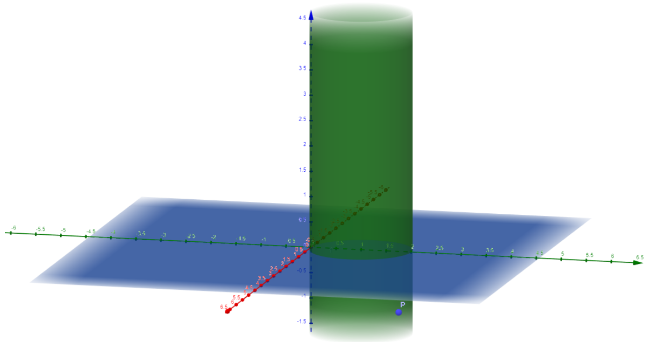
$C_1C \cap \Pi = \{C\}$

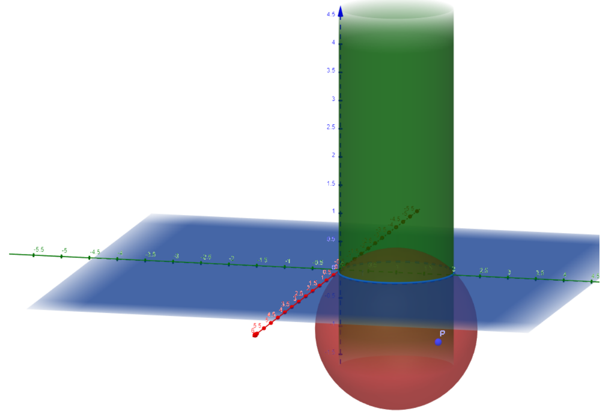
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -2t \\ 2x + 4y - 4z - 9 = 0 \end{cases} \implies 2t + 8t + 8t - 9 = 0 \iff 18t = 9 \iff t = \frac{1}{2}$$

$\implies C\left(\dfrac{1}{2}, 1, -1\right).$

7) Să se scrie ecuația sferei care trece prin cercul $\mathscr{C}:\begin{cases} x^2+y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$ și prin punctul $P(1,2,-1)$.

Soluție:





Sistemul $\begin{cases} x^2+y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$ reprezintă ecuațiile unui cerc: $\rightarrow$ prima ecuație este ecuația unei suprafețe cilindrice;

$\rightarrow$ a doua ecuație este ecuația planului xOy.

Sistemul este echivalent cu: $(*)\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+(y-1)^2+z^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ intersecția sferei S_1 cu planul xOy.

Mulțimea tuturor sferelor care trec printr-un cerc se numește fascicul de sfere.

Dacă cercul este dat prin intersecția a două sfere $S_1=0$ și $S_2=0$ atunci ecuația fasciculului este $\lambda_1 S_1+\lambda_2 S_2=0$, cu $\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq 0$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ sau $S_1+\lambda S_2=0$ (fascicul redus).

Dacă cercul este dat prin intersecția unei sfere $S=0$ cu un plan $\Pi=0$, atunci ecuația fasciculului este $\lambda_1 S+\lambda_2\Pi=0$ sau $S+\lambda\Pi=0$.

În cazul nostru, toate sferele care trec prin cercul dat de sistemul $(*)$ au ecuația

$S_\lambda: x^2+y^2+z^2-2y+\lambda z=0$

$P\in S_\lambda \implies 1^2+2^2+(-1)^2-2\cdot 2+\lambda(-1)=0 \implies \lambda=2$

Deci sfera căutată are ecuția:

$x^2+y^2+z^2-2y+2z=0 \iff x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$

Altă soluție: Găsim 3 puncte pe cercul $\mathscr{C}$. $O(0,0,0)$, $A(0,2,0)$, $B(1,1,0)$.
Scriem ecuația sferei prin patru puncte: O,A,B,P.

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff (-1)^{1+1}(x^2+y^2+z^2)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}x\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}y\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}z\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (x^2+y^2+z^2)(-1)^{1+2}2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - x(-1)^{3+3}(-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + y(-1)^{3+3}(-1)\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - z\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (x^2+y^2+z^2)(-2)(-1) - x(-1)0 + y(-1)4 - z(-1)^{1+3}2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff 2(x^2+y^2+z^2) - 4y - z2(-2) = 0$$

$$\iff 2(x^2+y^2+z^2) - 4y + 4z = 0 \,|:2$$

$$\iff x^2+y^2+z^2-2y+2z = 0$$