CURS 5

Transformări elementare asupra unei matrici. Aplicaţii

Fie K un corp comutativ şi $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$.

Definiţia 1. Vom numi **transformări elementare asupra liniilor (coloanelor)** matricii A următoarele:

I) permutarea a două linii (coloane) ale lui A;

II) înmulţirea unei linii (coloane) ale lui A cu un element nenul din K;

III) înmulţirea unei linii (coloane) ale lui A cu un element din K (scalar) şi adunarea la alta.

Aplicaţia 1. Calculul determinanţilor.
Aplicaţia 2. Calculul rangului unei matrice.
Aplicaţia 3. Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare prin **Metoda (eliminării a) lui Gauss.** Fie K un corp comutativ şi sistemul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

cu coeficienţi în K şi $\overline{A}$ matricea extinsă a sistemului. Această metodă se bazează pe faptul că

(i) permutarea a două ecuaţii ale sistemului (1),

(ii) înmulţirea unei ecuaţii din (1) cu un (scalar) $\alpha \in K$ nenul,

(iii) înmulţirea unei ecuaţii din (1) cu un (scalar) $\alpha \in K$ şi adunarea la altă ecuaţie,

sunt transformări ale sistemului care conduc la sisteme echivalente cu (1). Cum toate aceste transformări acţionează, de fapt, asupra coeficienţilor şi termenilor liberi ai ecuaţiilor sistemului, se constată imediat că acestor transformări le corespund transformări elementare asupra liniilor matricei extinse a sistemului.

Aşadar, putem trage concluzia ca efectuând transformări elementare asupra liniilor matricii extinse a sistemului (1) se obţine matricea extinsă a unui sistem echivalent cu (1). **Metoda lui Gauss** (numită şi **metoda eliminării parţiale**) constă în efectuarea de tranformări elementare succesive asupra liniilor unor matrici rezultate din matricea extinsă $\overline{A}$ a sistemului (1), cu scopul de a obţine o matrice în care ,,coborând" găsim din ce în ce mai multe zerouri la început de linie, matrice numită **matrice sau formă eşalon**. (Situaţia este similară cu cea din **metoda reducerii** pe care o foloseam în gimnaziu pentru a rezolva sisteme de 2 ecuaţii cu 2 necunoscute, doarece creşterea numărului de zerouri la început de linie înseamna lipsa (reducerea) numărului de necunoscute în ecuaţia corespunzătoare din sistemul aferent.)

Definiţia 2. O matrice de tipul (m, n) este într-o **formă eşalon** cu $k \leq m$ linii nenule dacă este o matrice pentru care:
a) dacă $n_0(i)$ este numărul elementelor nule de la începutul liniei i, atunci

$$0 \leq n_0(1) < n_0(2) < \cdots < n_0(k);$$

b) dacă $k < m$, atunci liniile $k+1, \dots, m$ sunt nule.

O formă eşalon cu k linii nenule pentru care

$$n_0(1) = 0,\ n_0(2) = 1,\ n_0(3) = 2, \ldots,\ n_0(k) = k - 1$$

se numeşte **formă trapezoidală**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

formă eşalon ~~trapezoidală~~ formă trapezoidală (cu 3 linii nenule) eşalon

Observaţiile 3. a) Orice matrice poate fi adusă la o formă eşalon exclusiv prin transformări elementare de linii.

Fie $A \in M_{m,n}(K)$. Ne uităm la A şi, prin permutări de linii, aducem pe linia 1 o linie care are nr. minim de zerouri la începutul său. Obţinem

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Putem pp. că $a_{11} \neq 0$ fără a influenţa decisiv raţionamentul.

$a_{11} \neq 0 \implies \exists\, a_{11}^{-1} \in K : a_{11}^{-1} \cdot a_{11} = 1$

$\implies$ putem „produce" zerouri sub a_{11} astfel:

$$\ell_2 - \underline{a_{21} \cdot a_{11}^{-1}}\, \ell_1,\ \ell_3 - a_{31} \cdot a_{11}^{-1} \ell_1, \ldots, \ell_m - a_{m1} \cdot a_{11}^{-1} \ell_1$$

$\implies$ o matrice de forma $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \ldots & a'_{2n} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \ldots & a'_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a'_{m2} & a'_{m3} & \ldots & a'_{mn} \end{pmatrix}$

Pentru liniile $2 - m$ căutăm linia cu nr. minim de zerouri la început şi, prin permutări de linii, o aducem pe poziţia 2, apoi continuăm ca mai sus pentru a face 0 sub elem. din prima poziţie de pe (noua) linie 2 care este nenul, ş.a.m.d.

b) O matrice pătratică de ordinul n este inversabilă dacă şi numai dacă poate fi adusă (exclusiv) prin transformări elementare de linii la o formă trapezoidală cu n linii nenule (pe care o numim **formă (matrice) triunghiulară**).

„$\Longleftarrow$" Determinantul matrice e nenul (fiind prod. elem. de pe diagonală) $\Longrightarrow$ matricea e inversabilă.

„$\Longrightarrow$" Dacă matricea noastră poate fi adusă prin transf. elem. de linii doar la o matrice eşalon care nu e trapezoidală $\Longrightarrow$ pe diagonala sa avem 0 $\Longrightarrow$ determinantul matricii noastre este 0 $\Longrightarrow$ matricea nu e inversabilă.

Să considerăm $A \in M_n(K)$ şi că am reuşit să o aducem la forma

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

c) O matrice pătratică de ordinul n este inversabilă dacă şi numai dacă poate fi adusă (exclusiv) prin transformări elementare de linii la matricea unitate I_n.

Folosim b) şi $A \in M_n(K)$ inversabilă $\Longleftrightarrow$ poate fi adusă la forma de mai sus doar prin transformări de linii ($a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ nenule).

Putem face 0 deasupra lui a_{22} prin transf. $l_1 - a_{12} a_{22}^{-1} l_2$; în matricea obţinută putem face la fel 0 deasupra lui a_{33} ş.a.m.d.

$\Longrightarrow$ o matrice de forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \text{ nenule})$$

$\wr\ a_{11}^{-1} l_1, a_{22}^{-1} l_2, \dots, a_{nn}^{-1} l_n$

I_n

În unele forme ale sale, inclusiv cea folosită de noi, **Metoda lui Gauss** constă în a aduce matricea $\overline{A}$ chiar la o formă trapezoidală B.

Observaţiile 4. a) Pentru a obţine forma trapezoidală B poate fi necesar uneori să permutăm câte 2 coloane ale matricii obţinute din matricea sistemului, ceea ce corespunde permutării a câte doi termeni în fiecare din ecuaţiile sistemului corespunzător, fapt care nu alterează sistemul deoarece adunarea în corpul K este comutativă.

! nu
• permutăm
cu ultima
coloană!

b) Dacă pe parcursul acestui procedeu, apare într-o linie a unei matrici 0 în toate poziţiile corespunzătoare matricii sistemului şi un element nenul în ultima poziţie, adică în coloana corespunzătoare termenilor liberi atunci sistemul dat este incompatibil, ecuaţia corespunzătoare din sistemul echivalent corespunzător fiind $0 = a$, cu a nenul.

incompatibilitate →

Elementele nenule $a'_{11}, \dots, a'_{kk}$ de pe diagonala formei trapezoidale (cu k linii nenule)

nec. principale → nec. secundare

$$B = \left(\begin{array}{ccccc|cccc}
a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1k} & a'_{1,k+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\
0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2k} & a'_{2,k+1} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & a'_{kk} & a'_{k,k+1} & \dots & a'_{kn} & b'_k \\
\hline
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}\right).$$

furnizează necunoscutele principale. Sistemul echivalent cu (1) de matrice extinsă B se rezolvă (după ce considerăm necunoscutele secundare ca parametri) începând cu ultima ecuaţie.

Observaţia 5. a) O ,,rafinare" a metodei lui Gauss este aşa numita **metodă Gauss-Jordan** sau **metoda eliminării totale**. Prin această metodă, $\overline{A}$ se aduce prin transformări elementare de linii şi, eventual, permutări de coloane diferite de coloana termenilor liberi la o formă trapezoidală

$$B' = \begin{pmatrix}
a''_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & a''_{1,k+1} & \dots & a''_{1n} & b''_1 \\
0 & a''_{22} & 0 & \dots & 0 & a''_{2,k+1} & \dots & a''_{2n} & b''_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & a''_{kk} & a''_{k,k+1} & \dots & a''_{kn} & b''_k \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}$$

cu $a''_{11}, a''_{22}, \dots, a''_{kk}$ nenule. (Evident, dacă sistemul este compatibil, altfel, în ultima coloană, sub linia k, vor apărea elemente nenule.)

facem 0 deasupra diagonalei (unui minor princ.)

$$B \xrightarrow{l_1 - a'_{12}(a'_{22})^{-1}\cdot l_2} \dots \sim B'$$

ca în obs 3. c)

b) Mai mult, putem aduce matricea extinsă a sistemului la forma

$$B'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a'''_{1,k+1} & \dots & a'''_{1n} & b'''_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a'''_{2,k+1} & \dots & a'''_{2n} & b'''_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a'''_{k,k+1} & \dots & a'''_{kn} & b'''_k \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

ceea ce permite exprimarea imediată a necunoscutelor principale cu ajutorul necunoscutelor secundare.

$$B' \sim B''$$

$$(a''_{11})^{-1} \ell_1$$
$$(a''_{22})^{-1} \ell_2$$
$$\vdots$$
$$(a''_{kk})^{-1} \ell_k$$

Aplicaţia 4. Calculul inversei unei matrice: Fie K un corp comutativ, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ o matrice cu $d = \det A \neq 0$. Reamintim că ecuaţia matriceală

$$A \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} \tag{2}$$

este forma matriceală a unui sistem compatibil determinat şi că soluţia sa este

$$\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}.$$

Să considerăm $j = 1$ şi $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Atunci $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$ e prima coloană a matricii A^{-1}, adică

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{-1}\alpha_{11} \\ d^{-1}\alpha_{12} \\ \vdots \\ d^{-1}\alpha_{1n} \end{pmatrix}$$

(reamintim că cu α_{ij} am notat în cursurile anterioare complementul algebric al elementului a_{ij}). Desigur,

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = I_n \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$$

Trecând această rezolvare prin metoda Gauss-Jordan, se deducem că matricea extinsă a sistemului (2) poate fi adusă prin transformări elementare asupra liniilor sale la forma

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & d^{-1}\alpha_{11} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & d^{-1}\alpha_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d^{-1}\alpha_{1n} \end{array}\right).$$

Considerăm, pe rând, $j = 2$ şi $\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, apoi $j = 3$ şi $\begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ \vdots \\ b_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,..., $j = n$ şi $\begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, formăm sistemele (2) şi folosim metoda Gauss-Jordan pentru a le rezolva. Aplicăm exact aceleaşi tranformări elementare ca în cazul $j = 1$ asupra liniilor matricei extinse a fiecărui sistem rezultat cu scopul de a aduce matricea sistemului la forma I_n, şi se obţine:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & d^{-1}\alpha_{21} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & d^{-1}\alpha_{22} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d^{-1}\alpha_{2n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & d^{-1}\alpha_{31} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & d^{-1}\alpha_{32} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d^{-1}\alpha_{3n} \end{pmatrix}, \dots, \text{ respectiv } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & d^{-1}\alpha_{n1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & d^{-1}\alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d^{-1}\alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

coloana termenilor liberi şi, implicit, soluţia fiecărui sistem fiind coloana 2, coloana 3,..., respectiv coloana n a matricei A^{-1}.

Cum efectuăm aceleaşi transformări de linii asupra tuturor celor n sisteme, putem să abordăm rezolvarea lor într-un acelaşi algoritm, Astfel, obţinem un (nou) algoritm de calcul al inversei matricei A: pornim de la matricea de tipul $(n, 2n)$ obţinută alăturând matricele A şi I_n

$$(A \mid I_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \in M_{n,2n}(K)$$

şi efectuăm succesiv transformări elementare exclusiv asupra liniilor acestei matrici şi a celor rezultate din ea pentru a transforma blocul din stânga al acestei matrici în I_n. Observaţia 3 c) ne asigură că acest lucru este posibil (dacă şi numai dacă matricea A e inversabilă). Matricea rezultată va fi

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & d^{-1}\alpha_{11} & d^{-1}\alpha_{21} & \ldots & d^{-1}\alpha_{n1} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & d^{-1}\alpha_{12} & d^{-1}\alpha_{22} & \ldots & d^{-1}\alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & d^{-1}\alpha_{1n} & d^{-1}\alpha_{2n} & \ldots & d^{-1}\alpha_{nn} \end{array}\right) = (I_n \mid A^{-1})$$

Prin umare, blocul din dreapta al matricei rezultate este chiar inversa matricei A.

Definiţia 6. Orice matrice pătratică rezultată din matricea unitate prin aplicarea unei transformări elementare se numeşte **matrice elementară**.

Observaţiile 7. (şi exemple ...)

a) Matricile elementare ce se obţin prin permutări de linii (coloane):

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} & & & i & & j & & \end{matrix} \end{array} \quad \underset{c_i \leftrightarrow c_j}{\overset{l_i \leftrightarrow l_j}{\sim}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

au determinantul -1.

b) Matricile elementare ce se obţin prin înmulţirea unei linii (coloane) cu $\alpha \in K^*$:

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} & & & i & & j & & \end{matrix} \end{array} \quad \underset{\alpha c_i}{\overset{\alpha l_i}{\sim}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \underline{\alpha} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

au determinantul α.

c) Matricile elementare ce se obţin prin înmulţirea unei linii (coloane) cu $\alpha \in K$ şi adunarea la alta:

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} & & & i & & j & & \end{matrix} \end{array} \quad \underset{\underline{c_j} + \alpha c_i}{\overset{\underline{l_i} + \alpha l_j}{\sim}} \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & \alpha & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} & & & & & j & & \end{matrix} \end{array}$$

au determinantul 1.

Pentru matricile elementare rezultate prin permutări de linii (coloane), avem:

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}\\
 & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}\\
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}\\
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array}
\end{array}$$

Pentru matricile elementare ce se obţin prin înmulţirea unei linii (coloane) cu un $\alpha \in K^*$, avem:

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & \alpha & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}\\
 & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & \alpha^{-1} & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}\\
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}\\
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array}
\end{array}$$

Pentru matricile elementare ce se obţin prin înmulţirea unei linii (coloane) cu $\alpha \in K$ şi adunarea la alta, avem:

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 1 & \dots & \alpha & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}\\
 & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 1 & \dots & -\alpha & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}\\
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}\\
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array}
\end{array}$$

Rezultă imediat că:

Lema 8. Inversa unei matrici elementare este tot o matrice elementară.

Lema 9. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Orice transformare elementară asupra unei matrice $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ este rezultatul înmulţirii lui A cu o matrice elementară. Mai precis, orice transformare elementară asupra liniilor (coloanelor) matricei A se obţine prin înmulţirea lui A la stânga (dreapta) cu matricea elementară rezultată prin efectuarea aceleiaşi transformări elementare asupra matricei I_m (respectiv I_n).

Demonstraţie. Noi probăm această proprietate pentru linii. Pentru coloane — TEMĂ.

Să permutăm liniile i şi j ale matricei I_m şi să înmulţim matricea elementară obţinută cu A.

Rezultatul înmulţirii

$$\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ & & i & & j & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \\ & & i & & j & & \end{pmatrix}$$

este

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \underline{a_{j1}} & \dots & \underline{a_{ji}} & \dots & \underline{a_{jj}} & \dots & \underline{a_{jn}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \underline{a_{i1}} & \dots & \underline{a_{ii}} & \dots & \underline{a_{ij}} & \dots & \underline{a_{in}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

care este chiar matricea obţinută din A prin permutarea liniilor i şi j.

Fie $\alpha \in K^*$. Să înmulţim linia i a matricei I_m cu α şi să înmulţim matricea elementară obţinută cu A. Rezultatul înmulţirii

$$\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

este

$$\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \dots & \alpha a_{ii} & \dots & \alpha a_{ij} & \dots & \alpha a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

care este chiar matricea obţinută din A prin înmulţirea liniei i cu α.

Fie $\alpha \in K$. Să înmulţim linia j a matricei I_m cu α şi să o adunăm la linia i, apoi să înmulţim matricea elementară obţinută cu A. Rezultatul înmulţirii

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 1 & \dots & \alpha & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn}
\end{pmatrix} \\
& \begin{array}{cccccccccccccc} & & i & & j & & & & & i & & j & & \end{array}
\end{array}$$

este

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} + \alpha a_{j1} & \dots & a_{ii} + \alpha a_{ji} & \dots & a_{ij} + \alpha a_{jj} & \dots & a_{in} + \alpha a_{jn} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\end{array}$$

care este matricea obţinută din A după înmulţirea liniei j a matricei cu α şi adunarea la linia i.

Din lema 9 şi observaţia 3 c) rezultă:

Corolarul 10. Orice matrice inversabilă este un produs de matrici elementare.

Într-adevăr, fie $A \in M_n(K)$ inversabilă.

Obs 3c) $\Longrightarrow$ printr-un şir de transformări elementare de linii obţinem

$I_n \xRightarrow{\text{Lema 9}} \exists\ E_1, E_2, \dots, E_q$ matrici elementare (de ordin n)

a.î. $\underbrace{E_q E_{q-1} \dots E_2 E_1}\, A = I_n \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (E_q E_{q-1} \dots E_1) A = I_n = A^{-1} \cdot A \,\big/ \cdot A^{-1} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow A^{-1} = E_q E_{q-1} \dots E_2 E_1 \Longrightarrow A = (E_q \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1)^{-1}$

$\Longrightarrow A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \dots \cdot E_q^{-1}$ q.e.d.

matrici elementare (Lema 8)

CURS 6

Teorema 11. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice matrice $A, B \in M_n(K)$ avem $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Demonstraţie.