**Logică EXAMEN – 20.01.2021**

**Rândul 4**

**Subiectul 1.** a) Să se determine $f^{-1}(f(X))$ şi $f(f^{-1}(Y))$, unde $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \to \{a, b, c, d\}$, $X = \{2, 5\}$, $Y = \{b, d\}$ şi

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $a$ | $d$ | $a$ | $d$ | $b$ | $a$ | $a$ | $d$ |

b) Fie $f : X \to Y$ o funcţie, $A_i \subseteq X$ şi $B_i \subseteq Y$, $i \in I$. Să se arate că avem $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$. Să se precizeze toate tautologiile care au fost folosite în demonstraţie.

**Subiectul 2.** a) Partiţii şi relaţii de echivalenţă (definiţii).
Fie $\rho$ şi $\sigma$ două relaţii de echivalenţă pe mulţimea $A$. Să se demonstreze că:
b) $\rho \cap \sigma$ este relaţie de echivalenţă.
c) $\rho \cup \sigma$ în general nu este relaţie de echivalenţă.

**Subiectul 3.** Latice şi latice completă:
a) definiţii.
b) Să se dea un exemplu de latice completă şi un exemplu de latice care nu este completă (cu justificări).
c) Presupunem ca orice submulţime a mulţimii ordonate $(A, \leq)$ are supremum. Să se arate că este latice completă.

**Subiectul 4.** Mulţimea numerelor naturale:
a) Definiţie şi axiomele lui Peano (enunţ).
b) Definiţiile operaţiilor şi a relaţiei de ordine în $\mathbb{N}$.
c) Teorema împărţirii cu rest în $\mathbb{N}$ (enunţ şi demonstraţie).

**Logic EXAM – 20.01.2021**

**Row 4**

**Question 1.** a) Find $f^{-1}(f(X))$ and $f(f^{-1}(Y))$, where $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \to \{a, b, c, d\}$, $X = \{2, 5\}$, $Y = \{b, d\}$ and

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $a$ | $d$ | $a$ | $d$ | $b$ | $a$ | $a$ | $d$ |

b) Let $f : X \to Y$ be a function, and let $A_i \subseteq X$ and $B_i \subseteq Y$ for all $i \in I$. Prove that $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$. State separately all the tautologies which have been used in the proof.

**Question 2.** a) Partitions and equivalence relations (definitions).
Let $\rho$ and $\sigma$ be equivalence relations on the set $A$. Prove that:
b) $\rho \cap \sigma$ is an equivalence relation.
c) $\rho \cup \sigma$ is not an equivalence relation in general.

**Question 3.** Lattice and complete lattice:
a) definitions.
b) Give an example of a complete lattice and an example of a lattice which is not complete (justify your answer).
c) Assume that any subset of the ordered set $(A, \leq)$ has supremum. Prove that $(A, \leq)$ is a complete lattice.

**Question 4.** The set of natural numbers:
a) Definition and the Peano axioms (statement).
b) Definitions of the operations and of the order relation on $\mathbb{N}$.
c) The division theorem in $\mathbb{N}$ (statement and proof).