Seminar 14 Inelul ordonat al numerelor întregi.

- pornim de la semiinelul ordonat $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$.
- pe mulțimea $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definim relația „$\sim$"

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \{(m,n) \mid m,n\in\mathbb{N}\}.$$

$$(m,n)\sim(p,q) \overset{def}{\iff} m+q = n+p$$

Ideea: Vrem să scădem nr. nat. ex: $4-7=5-8 \iff 4+8=5+7$

$$\iff (4,7)\sim(5,8)$$

(119) a) Arăt că relația „$\sim$" este o relație de echivalență:

(R) $(m,n)\sim(m,n) \iff m+n = n+m$ adev. (ad. este comutativă)

(T) Dacă $(m,n)\sim(p,q)$ și $(p,q)\sim(r,s) \overset{?}{\implies} (m,n)\sim(r,s)$.

$$(m,n)\sim(p,q) \Downarrow m+q = n+p \qquad (p,q)\sim(r,s) \Downarrow p+s = q+r \quad \overset{(+)}{\implies}$$

$$\implies m+\underline{q+p}+s = n+\underline{p+q}+r \implies m+s = n+r \implies (m,n)\sim(r,s)$$

(S) $(m,n)\sim(p,q) \overset{?}{\implies} (p,q)\sim(m,n)$

$$m+q = n+p. \xrightarrow{\text{comut ad.}} p+n = q+m \Uparrow$$

□.

• „$\sim$" fiind rel. de echivalență, considerăm mulț. factor

$$\mathbb{Z} \overset{def}{=} \mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\sim} = \{ \widetilde{(m,n)} \mid (m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \}, \text{ unde}$$

$$\widetilde{(m,n)} = \{ (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid (m,n) \sim (p,q) \}.$$

$$\overset{not}{=} m-n$$

Exemplu: $\widetilde{(4,7)} = \{(4,7), (5,8), \ldots\} \overset{not}{=} -3.$

• Operații cu numere întregi.

„$+$": $\widetilde{(m,n)} + \widetilde{(p,q)} \overset{def}{=} \widetilde{(m+p,\ n+q)}$

„$\cdot$": $\widetilde{(m,n)} \cdot \widetilde{(p,q)} \overset{def}{=} \widetilde{(mp+nq,\ np+mq)}$

(119) b) Arăt că definițiile ad. și înmulțirii NU depind de alegerea reprezentanților.

De ce? Există definiții de „operații" care depind de alegerea unui reprezentant, motiv pt. care acestea NU sunt operații corecte.

Ex. Fie „$\oplus$": $\widetilde{(m,n)} \oplus \widetilde{(p,q)} = \widetilde{(m,q)}$

$$\widetilde{(2,0)} \oplus \widetilde{(3,0)} = \widetilde{(2,0)}$$

$$\|\qquad\qquad\qquad\qquad \#$$

$$\widetilde{(3,1)} \oplus \widetilde{(3,0)} = \widetilde{(3,0)}$$

Soluție: $\boxed{\text{pentru adunare}}$

Fie (m',n') un alt element din $\widetilde{(m,n)}$ (1)

și (p',q') un alt element din $\widetilde{(p,q)}$ (2)

Trebuie să arătăm că $\widetilde{(m,n)}+\widetilde{(p,q)} = \widetilde{(m',n')}+\widetilde{(p',q')}$

$\iff \widetilde{(m+p,n+q)} = \widetilde{(m'+p',n'+q')} \iff$

$\iff (m+p,n+q)\sim(m'+p',n'+q') \iff$

$\iff m+p+n'+q' = n+q+m'+p'$. (?)

(+)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Din (1)} \Rightarrow (m',n')\sim(m,n) \Rightarrow \underline{\underline{m'+n}} = \underline{\underline{n'+m}} \\ \text{Din (2)} \Rightarrow (p',q')\sim(p,q) \Rightarrow \underline{\underline{p'+q}} = \underline{\underline{q'+p}}. \end{array}\right\}$$

Să se arate că înmulțirea numerelor întregi <u>NU depinde de alegerea reprezentanților.</u>

Fie $\widetilde{(a,b)} = \widetilde{(x,y)}$ (1) $\quad a,b,c,d,x,y,z,t \in \mathbb{N}$.

$\widetilde{(c,d)} = \widetilde{(z,t)}$ (2)

Vrem. $\widetilde{(a,b)} \cdot \widetilde{(c,d)} = \widetilde{(x,y)} \cdot \widetilde{(z,t)} \iff$

$\iff \widetilde{(ac+bd, ad+bc)} = \widetilde{(xz+yt, xt+yz)} \iff$

$\iff (ac+bd, ad+bc) \sim (xz+yt, xt+yz) \iff$

$\iff ac+bd+xt+yz = ad+bc+xz+yt.$

Din (1) avem: $(a,b) \sim (x,y) \iff a+y = b+x$.

Din (2) avem: $(c,d) \sim (z,t) \iff c+t = d+z$

Pentru simplitate (mai exact pentru a face scăderi) vom pp. $a \geq b$ și $c \geq d$ atunci putem scrie:

$$\begin{cases} a-b = x-y \\ c-d = z-t \end{cases}$$

(în celelalte cazuri facem scăderile "invers" cât să discutăm doar în termeni de cantități pozitive — nr. naturale)

$\Big\Downarrow$ înmulțiri

$(a-b)(c-d) = (x-y)(z-t) \Rightarrow \underline{ac+bd} \; \underline{-bc-ad} =$

$= \underline{xz+yt} \; \underline{-yz-xt} \Rightarrow ac+bd+xt+yz = ad+bc+xz+yt$

$\square$

(119) c) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ este domeniu de integritate.

(inel asociativ cu unitate, $1\neq 0$ și fără divizori ai lui 0)

Soluție: Verificăm „+" este comutativă, asociativă

∃ elem. neutru față de adunare $0=\widetilde{(0,0)}=\widetilde{(m,m)}$ } temă

orice nr. întreg are opus $-\widetilde{(m,n)}=\widetilde{(n,m)}$.

Într-adevăr $\widetilde{(m,n)}+\widetilde{(n,m)}=\widetilde{(m+n,n+m)}=\widetilde{(0,0)}=0$.

Verificăm „·" este comutativă, asociativă } temă

∃ elem. unitate $1=\widetilde{(1,0)}=\widetilde{(m+1,m)}$

Într-adevăr $\widetilde{(m,n)}\cdot\widetilde{(1,0)}=\widetilde{(m\cdot 1+n\cdot 0,\ m\cdot 0+n\cdot 1)}$

$=\widetilde{(m,n)}$ ✓.

Verificăm distributivitatea:

Fie $\widetilde{(m,n)},\ \widetilde{(p,q)},\ \widetilde{(r,s)}\in\mathbb{Z}$

$\widetilde{(m,n)}\cdot\left[\widetilde{(p,q)}+\widetilde{(r,s)}\right]=\widetilde{(m,n)}\cdot\widetilde{(p+r,\ q+s)}$

$=\widetilde{(m(p+r)+n(q+s),\ m(q+s)+n(p+r))}$

$=\widetilde{(mp+mr+nq+ns,\ mq+ms+np+nr)}$

$\widetilde{(m,n)}\cdot\widetilde{(p,q)}+\widetilde{(m,n)}\cdot\widetilde{(r,s)}=$

$= (\widetilde{mp+nq,\ mq+np}) + (\widetilde{mr+ns,\ ms+nr})$

$= (\widetilde{mp+nq+mr+ns,\ mq+np+ms+nr})$

Aşadar $(\widetilde{m,n})\left[(\widetilde{p,q})+(\widetilde{r,s})\right] = (\widetilde{m,n})(\widetilde{p,q})+(\widetilde{m,n})(\widetilde{r,s})$.

<u>Divizori ai lui 0:</u>

Pp $0=(\widetilde{m,n})\cdot(\widetilde{p,q})$.

Pp. $(\widetilde{p,q})\neq 0$ şi dem. că $(\widetilde{m,n})=0$, adică $m=n$.

$\Downarrow$

$p\neq q$.

Pp. că $q=p+x$ cu $x\in\mathbb{N}^*$.

$0=(\widetilde{m,n})\cdot(\widetilde{p,q}) \Rightarrow 0=(\widetilde{mp+nq,\ mq+np}) \Rightarrow$

$\Rightarrow mp+nq = mq+np \Rightarrow mp+n(p+x) = m(p+x)+np$

$\Rightarrow \underline{mp}+\underline{\underline{np}}+nx = \underline{mp}+mx+\underline{\underline{np}} \Rightarrow nx = mx \xRightarrow{x\neq0}$

$\Rightarrow n=m$.

Analog cazul $p=q+x$ cu $x\in\mathbb{N}^*$.

Ordonarea numerelor întregi:

• Pe $\mathbb{Z}$ definim relațiile $<, \leq$:

$$\widetilde{(m,n)} \underset{(\leq)}{<} \widetilde{(p,q)} \overset{def}{\iff} m+q \underset{(\leq)}{<} p+n.$$

(120) a) Să se arate că def rel „$\leq$" NU depinde de alegerea reprezentanților. (temă)

b) Să se arate că $(\mathbb{Z}, \leq)$ total ordonată.

(R): $\widetilde{(m,n)} \leq \widetilde{(m,n)} \iff m+n \leq n+m$ adev.

(T): dacă $\widetilde{(m,n)} \leq \widetilde{(p,q)}$ și $\widetilde{(p,q)} \leq \widetilde{(r,s)} \overset{?}{\Rightarrow} \widetilde{(m,n)} \leq \widetilde{(r,s)}$

$$m+q \leq n+p \qquad p+s \leq q+r \overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$m+\underline{q}+\underline{p}+s \leq n+\underline{p}+\underline{q}+r \Rightarrow m+s \leq n+r$$

(AS) dacă $\widetilde{(m,n)} \leq \widetilde{(p,q)}$ și $\widetilde{(p,q)} \leq \widetilde{(m,n)} \Rightarrow \widetilde{(m,n)} = \widetilde{(p,q)}$

$$m+q \leq n+p \qquad p+n \leq q+m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m+q = p+n \Rightarrow \widetilde{(m,n)} = \widetilde{(p,q)}.$$

(Total): Folosim faptul că $\mathbb{N}$ este total ord. (temă).

c) Funcția $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $\alpha(m) = (\widetilde{m,0})$ este bine definită, strict crescătoare, injectivă și morfism $\begin{cases} \alpha(m+n) = \alpha(m) + \alpha(n) \\ \alpha(m \cdot n) = \alpha(m) \cdot \alpha(n) \end{cases}$

Soluție: Dc. $m < n \Rightarrow m + 0 < n + 0 \Rightarrow (\widetilde{m,0}) < (\widetilde{n,0})$

$\Rightarrow \alpha(m) < \alpha(n) \Rightarrow \alpha$ strict crescătoare.

Restul temă.

d) relația „<" este compatibilă cu operațiile:

• $(\widetilde{m,n}) < (\widetilde{m',n'})$ și $(\widetilde{p,q}) < (\widetilde{p',q'}) \overset{?}{\Rightarrow}$

$(\widetilde{m,n}) + (\widetilde{p,q}) < (\widetilde{m',n'}) + (\widetilde{p',q'})$

(folosim comp. rel cu operațiile în $\mathbb{N}$)

• $(\widetilde{m,n}) < (\widetilde{m',n'})$ și $(\widetilde{p,q}) \gtrless 0 \overset{?}{\Rightarrow}$

$(\widetilde{m,n})(\widetilde{p,q}) \lesseqgtr (\widetilde{m',n'})(\widetilde{p,q})$. (temă).

e) (Axioma lui Arhimede)

$\forall a \in \mathbb{Z}, a > 0, \forall b \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}$ ai $na > b$.

Soluție: Fie $a \in \mathbb{Z}, a > 0, b \in \mathbb{Z}$

$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = (\widetilde{p,q})$ $\qquad b \in \mathbb{Z} \Rightarrow b = (\widetilde{r,s})$

$a > 0 \Rightarrow (\widetilde{p,q}) > (\widetilde{0,0}) \Rightarrow p + 0 > q + 0 \Rightarrow p > q \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{N}^*$ a.î. $p = q + x$.

Dacă $b \leq 0 \Rightarrow$ luăm $n = 1$. $na = a > 0 \geq b$.

Dacă $b > 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow r > s \Rightarrow \exists\, y \in \mathbb{N}^*$ a.î. $r = s + y$.

Avem $a = (\widetilde{x, 0})$ și $b = (\widetilde{y, 0})$.

$an > b \Leftrightarrow (\widetilde{x, 0}) \cdot (\widetilde{n, 0}) > (\widetilde{y, 0}) \Leftrightarrow \underset{\in \mathbb{N}^*}{x} \cdot \underset{\in \mathbb{N}}{n} > \underset{\in \mathbb{N}^*}{y}$

Avem că $\exists\, n \in \mathbb{N}$ pe baza Axiomei lui Arhimede în $\mathbb{N}$.

<u>Temă</u> Corpul ordonat $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$.

Mulțimi finite, infinite și numărabile

$\boxed{Th^1}$ Fie A o mulțime finită. UASE

(1) $\exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $A \sim n$ (definiția că A este finită)

(2) $\forall f: \mathbb{N} \to A$ NU este injectivă

(3) $\forall B \subseteq A$ și $B \neq A \Rightarrow B \not\sim A$.

$\boxed{Th^2}$ Fie A o mulțime. UASE

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $A \not\sim n$ (definiția că A este infinită)

(2) $\exists f: \mathbb{N} \to A$ injectivă (adică A conține o submulțime echipotentă cu $\mathbb{N}$)

(3) $\exists B \subseteq A$, $B \neq A$ a.î. $B \sim A$.

$\boxed{Ex\ 161/pg\ 82}$ Fie A o mulțime. S.a.c. UASE

(i) A este mulțime finită

(ii) Dacă $f: A \to A$ este injectivă $\Rightarrow f$ surjectivă

(iii) Dacă $f: A \to A$ este surjectivă $\Rightarrow f$ injectivă.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Pp că A este finită și că $f: A \to A$ este injectivă

Vrem f surjectivă.

Fie $B = \text{Im} f \subseteq A$

$f: A \to A$ inj $\Rightarrow f: A \to B$ bijectivă (am restricționat

$\sim / \sim$

codomeniul, doar la imagine și astfel restricție lui f este și surjectivă) $\Rightarrow A \sim B$.

Astfel cum $B \subseteq A$ și $A \sim B$, A finită $\xrightarrow{Th1\ (3)} A = B$

$\Downarrow$

$A = \mathrm{Im} f$

$\Downarrow$

f surjectivă.

(i) $\Rightarrow$ (iii) P.p. că A este finită și că $f: A \to A$ este surjectivă. Vrem f injectivă.

f surjectivă $\Rightarrow \underline{\exists\, s: A \to A}$ ai $f \circ s = 1_A \Rightarrow$ $\underline{s \text{ injectivă}}$, iar conform implicației (i)$\Rightarrow$(ii) deja demonstrate $\Rightarrow s$ este și surjectivă $\Rightarrow s$ bijectivă $\Rightarrow f = s^{-1} \Rightarrow f$ bijectivă $\Rightarrow f$ injectivă.

"(ii)$\Rightarrow$(i)" $\Leftrightarrow$ "$\neg$(i) $\Rightarrow \neg$(ii)"

P.p. că A este infinită și vrem să $\exists\, f: A \to A$ injectivă și nesurjectivă.

A infinită $\xrightarrow{Th2\ (3)} \exists\, B \subseteq A, B \neq A$ ai $B \sim A$

$\Downarrow$

$\Rightarrow \exists\, g: A \to B$ bijectivă

$g : A \to B$ bijectivă
$B \subseteq A$, $B \neq A$
$f : A \to A$, $f(a) = g(a)$ $\Big| \Rightarrow f$ injectivă și $\mathrm{Im}\, f = B \neq A$
$\Downarrow$
f nesurjectivă.

„$(iii) \Rightarrow (i)$" $\Leftrightarrow$ „$\neg(i) \Rightarrow \neg(iii)$"

Pp că A este infinită. Vrem să $\exists f : A \to A$ surjectivă, dar neinjectivă.

Am văzut deja, în situația în care A este infinită că $\exists f : A \to A$ injectivă și nesurjectivă
$\Downarrow$
$\underline{\exists r : A \to A}$ ~~retracta~~ retracta lui f a.î. $\underline{r \circ f = 1_A}$
$\Rightarrow$ $\underline{\underline{r \text{ surjectivă}}}$.

Dacă r ar fi injectivă $\Rightarrow r$ bijectivă $\Rightarrow \underline{\exists r^{-1}}$
$\Rightarrow f$ bij $\Rightarrow f$ surj fals.

Așadar r este ~~nesurjectivă~~ $\underline{\underline{\text{neinjectivă}}}$

$\square$

$\boxed{\text{ex } 162/\text{pg } 82}$

Fie A o mulțime infinită. S.ă.c.

a) $|A| + n = |A|, \forall n \in \mathbb{N}$

b) $|A| + \aleph_0 = |A|$.

---

a) Cazul particular $A = \mathbb{N}$ și $n = 1$.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ $f(x) = x + 1$ bijectivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{N} \sim \mathbb{N}^* \Rightarrow |\mathbb{N}^*| = \aleph_0$.

$\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$ (reuniune disjunctă)

$\Rightarrow |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^*| + |\{0\}| \Rightarrow \aleph_0 = \aleph_0 + 1$.

Mai general $(A = \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N})$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ $f(x) = x + n$ bijectivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, n-1\} \Rightarrow |\mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, n-1\}| = \aleph_0$.

$\mathbb{N} = (\mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, n-1\}) \cup \{0, 1, \dots, n-1\}$. (reuniune disjunctă)

$\Rightarrow |\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, n-1\}| + |\{0, 1, \dots, n-1\}|$

$\Rightarrow \aleph_0 = \aleph_0 + n$.

(*) În general, cum A este infinită $\underset{=}{\overset{Th2\ (2)}{\Longrightarrow}}$ $\exists\ f: \mathbb{N} \to A$ injectivă. Fie $\operatorname{Im} f = B = \{a_0, a_1, \dots\}$ unde $a_k = f(k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Cazul particular $n=1$.

Fie $\varphi: A \to A \setminus \{a_0\}$, $\varphi(a) = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \notin \operatorname{Im} f = B \\ a_{k+1}, & \text{dacă } a = a_k \in \operatorname{Im} f \end{cases}$

Clar φ bijectivă $\Rightarrow A \sim A \setminus \{a_0\} \Rightarrow |A| = |A \setminus \{a_0\}|$.

$A = (A \setminus \{a_0\}) \cup \{a_0\}$ (reuniune disjunctă)

$\Rightarrow |A| = |A \setminus \{a_0\}| + |\{a_0\}| \Rightarrow |A| = |A| + 1$.

Mai general

Fie $\varphi: A \to A \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$. $\varphi(a) = \begin{cases} a, & a \notin \operatorname{Im} f \\ a_{k+n}, & \text{dacă } a = a_k \in \operatorname{Im} f \end{cases}$

Clar φ bijectivă $\Rightarrow A \sim A \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\} \Rightarrow$
$|A| = |A \setminus \{a_0, \dots, a_{n-1}\}|$

$A = (A \setminus \{a_0, \dots, a_{n-1}\}) \cup \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ (reun. disj.)

$\Rightarrow |A| = |A \setminus \{a_0, \dots, a_{n-1}\}| + |\{a_0, \dots, a_{n-1}\}| \Rightarrow |A| = |A| + n$.

b) Vrem $|A| + \aleph_0 = |A|$.

Pornim tot de la funcție f de la pg ~5~ (*).

Fie $\varphi : A \to A \setminus \{a_{2k+1} \mid k \in \mathbb{N}\}$.

$$\varphi(a) = \begin{cases} a, & a \notin \operatorname{Im} f = B \\ a_{2k}, & a = a_k \in B \end{cases}$$

Evident φ bijectivă $\Rightarrow A \sim A \setminus \{a_{2k+1} \mid k \in \mathbb{N}\}$.

$\Rightarrow \underline{|A| = |A \setminus \{a_{2k+1} \mid k \in \mathbb{N}\}|}$.

$A = (A \setminus \{a_{2k+1} \mid k \in \mathbb{N}\}) \cup (\{a_{2k+1} \mid k \in \mathbb{N}\})$ (reun. disj.)

$\Rightarrow \underline{|A| = |A \setminus \{a_{2k+1} \mid k \in \mathbb{N}\}| + |\{a_{2k+1} \mid k \in \mathbb{N}\}|}$.

$\Rightarrow |A| = |A| + \aleph_0$.

$|\{a_{2k+1} \mid k \in \mathbb{N}\}| = \aleph_0$ pt că $g : \mathbb{N} \to \{a_{2k+1} \mid k \in \mathbb{N}\}$

$g(k) = a_{2k+1}$ este bijectivă