CAPITOLUL 3

DREAPTA ÎN PLAN

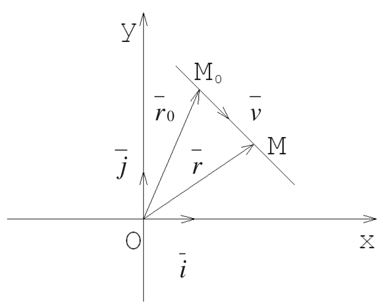
Dreapta în plan este studiată cu ajutorul geometriei analitice încă din clasele liceale. În acest capitol vom reaminti (şi uneori demonstra) unele rezultate deja cunoscute cititorilor şi le vom adăuga unele noi, care vor veni să completeze studiul acestui subiect.

1. Reprezentări analitice ale dreptelor în plan

O dreaptă poate fi determinată în mai multe moduri: cunoscând un punct de pe dreaptă şi vectorul ei director, cunoscând două puncte distincte de pe dreptă sau cunoscând distanţa de la originea reperului cartezian considerat la dreaptă şi versorul normal la aceasta. Vom studia în continuare fiecare din aceste cazuri şi vom găsi ecuaţiile dreptelor obţinute.

Vom folosi în întregul capitol reperul ortonormat orientat pozitiv $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}\})$ şi axele de coordonate corespunzătoare (Ox) şi (Oy).

1.1. Dreapta determinată de un punct şi vectorul director. Considerăm dreapta (d) pentru care cunoaştem punctul $M_0(x_0, y_0) \in (d)$ şi vectorul $\bar{v} \parallel (d)$, $\bar{v} = a \cdot \bar{i} + b \cdot \bar{j}$, cu $a^2 + b^2 > 0$, care se numeşte *vectorul director* al lui (d). Considerăm $M(x, y)$ un punct oarecare pe dreapta (d). Notăm vectorii de poziţie ai punctelor M_0 şi M cu $\bar{r}_0$ şi respectiv $\bar{r}$.



Din faptul că $\bar{v}$ este vectorul director al dreptei (d) urmează că $\overrightarrow{MM_0} \parallel \bar{v}$, adică $\overrightarrow{MM_0} = \lambda \cdot \bar{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Avem

$$\overrightarrow{MM_0} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = r - r_0 = (x - x_0) \cdot \bar{i} + (y - y_0) \cdot \bar{j}$$

şi atunci obţinem condiţia necesară şi suficientă (în forma sa vectorială) ca punctul $M(x, y)$ să aparţină dreptei (d), adică *ecuaţia vectorială* a dreptei (d):

$$(d) : \bar{r} - \bar{r}_0 = \lambda \cdot \bar{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Înlocuind vectorii $\bar{r} - \bar{r}_0$ şi $\bar{v}$ în ecuaţia vectorială rezultă

$$(x - x_0) \cdot \bar{i} + (y - y_0) \cdot \bar{j} = \lambda \cdot a \cdot \bar{i} + \lambda \cdot b \cdot \bar{j}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

şi, mai departe, *ecuaţiile parametrice* ale dreptei (d):

$$(d) : \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot a \\ y = y_0 + \lambda \cdot b \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Eliminând λ între cele două ecuaţii de mai sus obţinem *ecuaţia canonică* a dreptei (d):

$$(d) : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

De aici rezultă *ecuaţia redusă* a dreptei (d):

$$(d) : y = m \cdot x + n,$$

unde $m = \frac{b}{a}$ se numeşte *panta* dreptei (d) şi $n = y_0 - \frac{b}{a} \cdot x_0$.

Deoarece, aşa cum am văzut, ecuaţia unei drepte este o ecuaţie de gradul 1 putem scrie *ecuaţia generală* a unei drepte în plan

$$(d) : A \cdot x + B \cdot y + C = 0,$$

unde A, B şi C sunt constante reale astfel încât A şi B nu se anulează simultan (această ultimă condiţie poate fi scrisă $A^2 + B^2 > 0$). Se observă că, în cazul în care drepta (d) este dată prin ecuaţia generală, atunci panta sa este $m = -\frac{A}{B}$.

Observaţia 3.1. Este evident, din modul în care au fost determinate, că toate formele ecuaţiei unei drepte în plan deduse aici sunt echivalente.

Exemplul 3.1. Să se scrie ecuaţia dreptei (d) din plan al cărei vector director este $\bar{v} = 4 \cdot \bar{i} - 2\bar{j}$ ştiind că $M_0(1, 1) \in (d)$.

Ecuaţiile parametrice ale dreptei (d) sunt

$$(d) : \begin{cases} x = 1 + 4 \cdot \lambda \\ y = 1 - 2 \cdot \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ecuaţia canonică este

$$(d) : \frac{x - 1}{4} = \frac{y - 1}{-2},$$

iar cea redusă

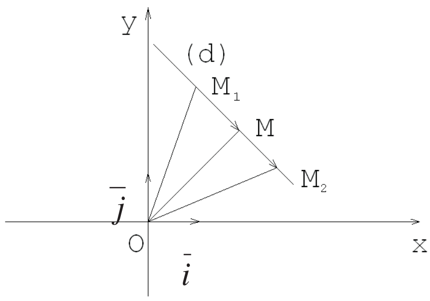
$$(d) : y = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}.$$

Din această ultimă ecuaţie vedem că panta dreptei este $m = -\frac{1}{2}$.

În final, ecuaţia generală a dreptei (d) poate fi scrisă

$$(d) : x + 2 \cdot y - 3 = 0.$$

1.2. Dreapta determinată de două puncte distincte. În continuare fie dreapta (d) şi punctele distincte $M_1(x_1, y_1) \in (d)$ şi $M_2(x_2, y_2) \in (d)$. Notăm cu $\bar{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$ şi cu $\bar{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$ vectorii de poziţie ai celor două puncte. Considerăm un punct oarecare $M(x, y)$ pe dreaptă şi $\bar{r} = \overrightarrow{OM}$ vectorul său de poziţie.



Din faptul că punctele M_1, M_2 şi M sunt coliniare rezultă că segmentele orientate $\overrightarrow{M_1M_2}$ şi $\overrightarrow{M_1M}$ sunt coliniare, adică $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ţinând cont că

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = \bar{r} - \bar{r}_1 = (x - x_1) \cdot \bar{i} + (y - y_1) \cdot \bar{j}$$

şi

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = (x_2 - x_1) \cdot \bar{i} + (y_2 - y_1) \cdot \bar{j},$$

obţinem *ecuaţia vectorială* a dreptei (d):

$$(d) : \bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda \cdot (\bar{r}_2 - \bar{r}_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Folosind în această ecuaţie expresiile vectorilor de poziţie în baza $\mathcal{B}$ avem *ecuaţiile parametrice* ale dreptei (d):

$$(d) : \begin{cases} x = x_1 + \lambda \cdot (x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda \cdot (y_2 - y_1) \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ecuaţia canonică a dreptei (d) se obţine eliminând parametrul λ între cele două ecuaţii:

$$(d) : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Ecuaţia canonică poate fi pusă şi sub forma

$$(d) : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0,$$

sau, procedând la fel ca în cazul calculului ariei unui triunghi efectuat în capitolul precedent,

$$(d) : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

În sfârşit, *ecuaţia redusă* a dreptei (d) este, în acest caz,

$$(d): y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + y_1.$$

OBSERVAŢIA 3.2. În acest caz de determinare a unei drepte, panta dreptei va fi $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Dacă $x_2 = x_1 = \alpha = \text{constant} \in \mathbb{R}$ atunci ecuaţia dreptei va fi

$$(d): x = \alpha = \text{constant} \in \mathbb{R},$$

şi, astfel, $(d) \parallel (Oy)$.

OBSERVAŢIA 3.3. Este evident că, în cazul dreptei determinate de punctele M_1 şi M_2, vectorul director va fi $\bar{v} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = (x_2 - x_1) \cdot \bar{i} + (y_2 - y_1) \cdot \bar{j}$.

EXEMPLUL 3.2. Să se scrie ecuaţia dreptei din plan determinată de punctele $M_1(1, 2)$ şi $M_2(-1, 3)$. Să se determine vectorul director al acestei drepte şi panta ei.

Ecuaţiile parametrice ale dreptei (d) sunt

$$(d): \begin{cases} x = 1 + (-1 - 1) \cdot \lambda = 1 - 2 \cdot \lambda \\ y = 2 + (3 - 2) \cdot \lambda = 2 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

iar ecuaţia sa canonică este

$$(d): \frac{x - 1}{-1 - 1} = \frac{y - 2}{3 - 2} \Leftrightarrow (d): \frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 2}{1}.$$

De aici se observă că vectorul director al dreptei (d) este $\bar{v} = -2 \cdot \bar{i} + \bar{j}$.

Ecuaţia redusă a dreptei va fi

$$(d): y = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{5}{2},$$

deci panta lui (d) este $m = -\frac{1}{2}$. Avem şi ecuaţia generală

$$(d): x + 2 \cdot y - 5 = 0.$$

1.3. Ecuaţia normală a unei drepte. Fie dreapta (d) pentru care cunoaştem versorul normal la dreaptă, adică vectorul liber $\bar{n} \perp (d)$ cu $\|\bar{n}\| = 1$ şi $(\widehat{\bar{n}, \bar{i}}) = \alpha \in [0, 2\pi)$. Astfel, versorul $\bar{n}$ va fi dat de

$$\bar{n} = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \sin\alpha \cdot \bar{j}.$$

Presupunem ca fiind cunoscută şi distanţa $d(O, (d)) = p \geq 0$ de la originea O la dreapta (d).

Considerăm punctul $P \in (d)$, proiecţia lui O pe dreapta (d), şi avem $\|\overrightarrow{OP}\| = p$, adică

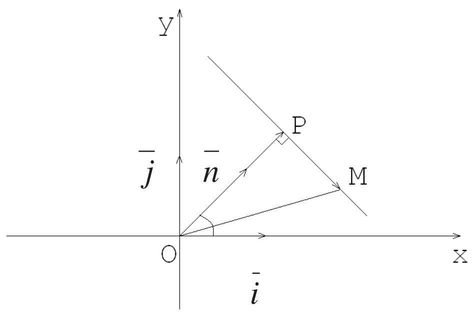
$$\overrightarrow{OP} = p \cdot \bar{n} = p \cdot \cos\alpha \cdot \bar{i} + p \cdot \sin\alpha \cdot \bar{j}.$$

Acum, un punct $M(x, y)$ aparţine dreptei (d) dacă şi numai dacă $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{PM}$, adică $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PM} = 0$. Dar

$$\overrightarrow{PM} = (x - p \cdot \cos\alpha) \cdot \bar{i} + (y - p \cdot \sin\alpha) \cdot \bar{j}$$

şi atunci avem

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PM} = 0$$



$$\Leftrightarrow p \cdot \cos\alpha \cdot (x - p \cdot \cos\alpha) + p \cdot \sin\alpha \cdot (y - p \cdot \sin\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot p \cdot \cos\alpha + y \cdot p \cdot \sin\alpha - p^2 \cdot (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 0$$

de unde rezultă *ecuaţia normală* a dreptei:

$$(d) : x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0.$$

2. Unghiul a două drepte

Fie dreptele (d_1) şi (d_2) în plan date prin ecuaţiile canonice

$$(3.1) \qquad (d_1) : \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1}, \quad (d_2) : \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2}.$$

Vectorii directori ai acestor drepte vor fi $\bar{v}_1 = a_1 \cdot \bar{i} + b_1 \cdot \bar{j}$ şi respectiv $\bar{v}_2 = a_2 \cdot \bar{i} + b_2 \cdot \bar{j}$. Cum unghiul φ făcut de cele două drepte coincide, în mod evident, cu unghiul dintre vectorii lor directori, avem

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\bar{v}_1, \bar{v}_2}) = \frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2}{\|\bar{v}_1\| \cdot \|\bar{v}_2\|} = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Avem următorul rezultat imediat.

Propoziţia 3.1. *Dreptele (d_1) şi (d_2) date de ecuaţiile* (3.1) *sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$.*

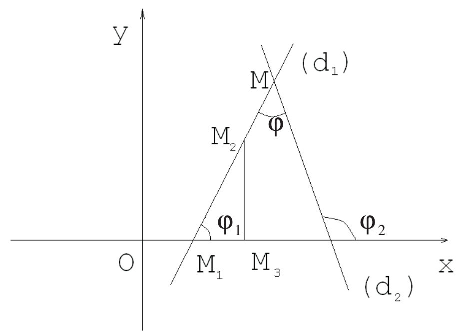
Aşa cum ştim, vectorii liberi $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ sunt coliniari dacă şi numai dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ şi atunci avem următorul rezultat.

Propoziţia 3.2. *Dreptele (d_1) şi (d_2) date de ecuaţiile* (3.1) *sunt paralele sau coincid dacă şi numai dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.*

În continuare considerăm dreptele (d_1) şi (d_2) în plan date prin ecuaţiile reduse

$$(d_1) : y = m_1 \cdot x + n_1, \quad (d_2) : y = m_2 \cdot x + n_2.$$

Notăm cu φ_1 şi cu φ_2 unghiurile făcute de dreptele (d_1) şi respectiv (d_2) cu vectorul $\bar{i}$ şi cu $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ unghiul dintre cele două drepte.



Fie $\{M_1(x_1, 0)\} = (d_1) \cap (Ox)$ şi $M_2(x_2, y_2)$ un alt punct de pe dreapta (d_1). Atunci panta dreptei va fi $m_1 = \frac{y_2}{x_2 - x_1}$. Proiectăm punctul M_2 pe axa (Ox) în punctul $M_3(x_2, 0)$ şi, în $\triangle M_1M_2M_3$, avem

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}(\widehat{M_2M_1M_3}) = \frac{\|\overrightarrow{M_2M_3}\|}{\|\overrightarrow{M_1M_3}\|} = \frac{y_2}{x_2 - x_1} = m_1, \quad \text{dacă } \varphi_1 \in [0, \frac{\pi}{2})$$

şi

$$\operatorname{tg}(\pi - \varphi_1) = -\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{y_2}{x_1 - x_2} = -m_1, \quad \text{dacă } \varphi_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi].$$

Acum, dacă $\varphi = \frac{\pi}{2}$ atunci $\operatorname{tg}\varphi_1 \to \infty$, dreapta (d_1) este perpendiculară pe axa (Ox) şi, în acest caz, are ecuaţia $(d_1) : x =$ constant adică $m_1 \to \infty$.
În concluzie $\operatorname{tg}\varphi_1 = m_1$ şi, analog pentru drepta (d_2), avem $\operatorname{tg}\varphi_2 = m_2$.

Acum este clar că avem $\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1|$ şi, mai departe, obţinem unghiul dintre cele două drepte astfel

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}|\varphi_2 - \varphi_1| = \frac{|\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1|}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{|m_2 - m_1|}{1 + m_1 \cdot m_2}.$$

Din această formulă avem

$$\varphi = 0 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

şi

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\varphi \to \infty \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1,$$

adică următoarele două propoziţii.

Propoziţia 3.3. *Două drepte în plan sunt paralele dacă şi numai dacă pantele lor sunt egale.*

Propoziţia 3.4. *Două drepte în plan sunt perpendiculare dacă şi numai dacă produsul pantelor lor este egal cu* -1.

În final, dacă avem dreptele

$$(d_1) : A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0, \quad (d_2) : A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0, \tag{3.2}$$

în plan, atunci pantele lor sunt $m_1 = -\frac{A_1}{B_1}$ şi respectiv $m_2 = -\frac{A_2}{B_2}$. Prin urmare $m_1 = m_2$ dacă şi numai dacă $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$. Dacă, în plus, $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ atunci este clar că dreptele coincid.

PROPOZIŢIA 3.5. *Dreptele* (d_1) *şi* (d_2) *date de ecuaţiile* (3.2) *sunt paralele dacă şi numai dacă*

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Dreptele (d_1) *şi* (d_2) *coincid dacă şi numai dacă*

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

3. Distanţa de la un punct la o dreaptă

Fie dreapta (d) în plan dată prin ecuaţia generală

$$(d) : A \cdot x + B \cdot y + C = 0.$$

Căutăm ecuaţia normală a lui (d) de forma

$$(d) : x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0.$$

Această operaţiune poartă numele de *normalizarea ecuaţiei dreptei* (d).
Cum cele două ecuaţii determină aceeaşi dreptă, avem

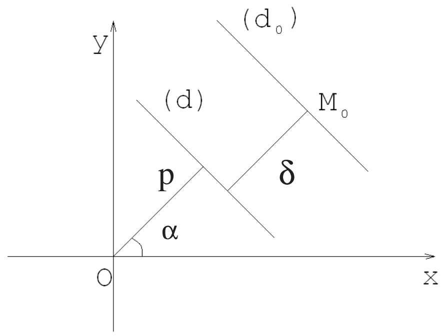
$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\sin\alpha}{B} = -\frac{p}{C} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

de unde rezultă $\cos\alpha = \lambda \cdot A$, $\sin\alpha = \lambda \cdot B$ şi $-p = \lambda \cdot C$. Din $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ urmează $\lambda^2 \cdot (A^2 + B^2) = 1$, adică $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Astfel

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\alpha = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad -p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Am obţinut ecuaţia normală a dreptei (d):

$$(d) : \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$



În continuare, fie punctul $M_0(x_0, y_0)$ în plan şi notăm cu $\delta = d(M_0, (d))$ distanţa de la M_0 la dreapta (d). Considerăm dreapta (d_0) în plan astfel încât $M_0 \in (d_0)$ şi $(d_0) \parallel (d)$. Rezultă că distanţa dintre cele două drepte este egală cu δ şi atunci distanţa de la O la (d_0) va fi egală cu $p \pm \delta$. Din $(d_0) \parallel (d)$, avem ecuaţia normală a dreptei (d_0):

$$(d_0) : x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - (p \pm \delta) = 0.$$

Acum, din $M_0(x_0, y_0) \in (d_0)$, rezultă $x_0 \cdot \cos\alpha + y_0 \cdot \sin\alpha - (p \pm \delta) = 0$ de unde obţinem $\pm\delta = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p$, adică $\delta = |x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p|$. Aşa cum am văzut mai sus,

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin\alpha = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad -p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

şi, în concluzie, avem formula distanţei de la punctul $M_0(x_0, y_0)$ la dreapta $(d) : A \cdot x + B \cdot y + C = 0$

$$\delta = d(M_0, (d)) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Exemplul 3.3. Să se determine distanţa de la punctul $M_0(1, 2)$ la dreapta (d) care trece prin punctele $M_1(1, 0)$ şi $M_2(3, -1)$.

Ecuaţia canonică a dreptei (d) este

$$(d) : \frac{x - 1}{2} = \frac{y}{-1},$$

iar ecuaţia sa generală este

$$(d) : x + 2 \cdot y - 1 = 0.$$

Prin urmare distanţa căutată va fi

$$\delta = d(M_0, (d)) = \frac{|1 + 4 - 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{5}.$$

4. Fascicule de drepte în plan

Definiţia 3.1. Fie dreptele concurente (d_1) şi (d_2) în plan şi fie M_0 punctul lor de intersecţie. Mulţimea tuturor dreptelor din plan care trec prin punctul M_0 se numeşte *fasciculul* de drepte determinat de (d_1) şi (d_2).

Propoziţia 3.6. *Ecuaţia unei drepte din fasciculul determinat de dreptele concurente*

$$(d_1) : A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0 \quad \text{şi} \quad (d_2) : A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0$$

este

$$(d) : \alpha \cdot (A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1) + \beta \cdot (A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2) = 0,$$

unde α şi β sunt doi parametri reali oarecare.

Demonstraţie. Fie $M_0(x_0, y_0)$ punctul de intersecţie al dreptelor (d_1) şi (d_2) şi fie $(d) : A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ o dreaptă din fasciculul determinat de (d_1) şi (d_2). Atunci coordonatele punctului M_0 verifică sistemul format din ecuaţiile celor trei drepte

$$\begin{cases} A_1 \cdot x & + & B_1 \cdot y & = & -C_1 \\ A_2 \cdot x & + & B_2 \cdot y & = & -C_2 \\ A \cdot x & + & B \cdot y & = & -C \end{cases},$$

a cărui matrice asociată este $E = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A & B \end{pmatrix}$ cu $\operatorname{rang} E \leq 2$. Matricea extinsă a sistemului este $\bar{E} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & -C_1 \\ A_2 & B_2 & -C_2 \\ A & B & -C \end{pmatrix}$. Deoarece acest sistem este compatibil urmează că $\operatorname{rang} \bar{E} = \operatorname{rang} E \leq 2$, adică $\det \bar{E} = 0$. Din proprietăţile determinanţilor rezultă că linia a treia a acestui determinant este o combinaţie liniară a celorlalte două, adică există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$A = \alpha \cdot A_1 + \beta A_2, \quad B = \alpha \cdot B_1 + \beta \cdot B_2, \quad C = \alpha \cdot C_1 + \beta \cdot C_2,$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Exemplul 3.4. Să se găsească dreapta din fasciculul determinat de $(d_1) : x + y - 2 = 0$ şi $(d_2) : 2 \cdot x - y = 0$ care este perpendiculară pe dreapta $(d_3) : 2 \cdot x + y - 1 = 0$.

Mai întâi vom verifica dacă una din dreptele (d_1) sau (d_2) este perpendiculară pe (d_3). Panta dreptei (d_3) este $m_3 = -2$, iar pantele dreptelor (d_1) şi (d_2) sunt $m_1 = -1$ şi respectiv $m_2 = 2$. Cum două drepte sunt perpendiculare dacă şi numai dacă produsul pantelor lor este egal cu -1 rezultă că nici (d_1) şi nici (d_2) nu sunt perpendiculare pe (d_3).

În continuare fie o dreaptă oarecare (d) din fascicul:

$$(d) : \alpha \cdot (x + y - 2) + \beta \cdot (2x - y) = 0, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Deoarece nici una din dreptele (d_1) şi (d_2) nu este dreapta căutată atunci $\alpha \neq 0$ şi $\beta \neq 0$. Astfel ecuaţia dreptei (d) poate fi scrisă

$$(d) : x + y - 2 + \lambda \cdot (2x - y) = 0 \Leftrightarrow (2 \cdot \lambda + 1) \cdot x - (\lambda - 1) \cdot y - 2 = 0,$$

unde $\lambda = \frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{R}$. Prin urmare panta lui (d) este $m = \frac{2 \cdot \lambda + 1}{\lambda - 1}$ şi $(d) \perp (d_3)$ dacă şi numai dacă

$$m \cdot m_3 = -1 \Leftrightarrow -2 \cdot \frac{2 \cdot \lambda + 1}{\lambda - 1} = -1,$$

adică $\lambda = -1$. Am obţinut ecuaţia dreptei căutate:

$$(d) : -x + 2 \cdot y - 2 = 0.$$