Cap. 7. Mulțimi de numere

1. Mulțimea numerelor naturale

$$\mathbb{N} = \{ \underset{\emptyset}{\overset{0}{\shortparallel}}, \underset{\{\emptyset\}}{\overset{1}{\shortparallel}}, \underset{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}{\overset{2}{\shortparallel}}, \underset{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}}{\overset{3}{\shortparallel}}, \ldots \}.$$

Operații cu numere naturale.

Adunarea.

- **Def** „+"

$$m + 0 \overset{def}{=} m$$

$$m + s(n) \overset{def}{=} s(m+n)$$

funcția succesor.

- **Exemplu:** Despre $\mathbb{N}$ știm că $s(0)=1$, $s(1)=2$, $s(2)=3$, ...

$0+0 \overset{def1}{=} 0$

$1+0 \overset{def1}{=} 1$

$2+0 \overset{def1}{=} 2$

$\vdots$

calculat anterior

$0+1 = 0+s(0) \overset{def2}{=} s(0+0) = s(0) = 1.$

$1+1 = 1+s(0) \overset{def2}{=} s(1+0) = s(1) = 2.$

$\vdots$

$m+1 = m+s(0) \overset{def2}{=} s(m+0) = s(m).$

$\vdots$

calculat anterior

$m+2 = m+s(1) \overset{def2}{=} s(m+1) = s(s(m))$

...

• **Proprietăți:** Dacă $m, n, p \in \mathbb{N}$ atunci:

1) $(m+n)+p = m+(n+p)$ (adunarea nr. nat este asociativă)

Dem. prin inducție matematică după $p \in \mathbb{N}$:

$P(p): (m+n)+p = m+(n+p)$

→ $P(0): (m+n)+0 = m+(n+0)$. ?

$$\left.\begin{array}{l} (m+n)+0 \overset{def1}{=} m+n \\ m+(\underline{n+0}) \overset{def1}{=} m+n \end{array}\right| \Rightarrow P(0) \text{ adev.}$$

→ Demonstrăm $P(p) \longrightarrow P(s(p))$, adică

dacă $\underline{\underline{(m+n)+p = m+(n+p)}}$ atunci $(m+n)+s(p) \overset{?}{=} m+(n+s(p))$

$(m+n)+s(p) \overset{def2}{=} s(\underline{\underline{(m+n)+p}})$

$m+(\underline{n+s(p)}) \overset{def2}{=} m+s(n+p) \overset{def2}{=} s(\underline{\underline{m+(n+p)}})$

Așadar cnf principiului inducției matematice $P(p)$ este adevărat $\forall p \in \mathbb{N}$.

2) $m + 0 = 0 + m = m$ (0 este elem. neutru pt adunare)

Cnf. definiției ad. nr. nat. știm că $m + 0 = m$.

Rămâne să dem că $0 + m = m$., prin inducție matematică după $m \in \mathbb{N}$.

$P(m)$: $0 + m = m$.

→ $P(0)$: $0 + 0 = 0$ adevărat cnf def 1.

→ Demonstrăm $P(m) \longrightarrow P(s(m))$, adică dacă $0 + m = m$, atunci $0 + s(m) \overset{?}{=} s(m)$.

$$0 + s(m) \overset{\text{def 2}}{=} s(0 + m) \overset{\text{ip. de ind}}{=} s(m).$$

Așadar conform princip. ind matem. $P(m)$ este adev, $\forall m \in \mathbb{N}$.

3) $m + 1 = 1 + m$ Temă (Hint: inducție matem. după m)

4) $m + n = n + m$.

Demonstrăm prin inducție matem. după $m \in \mathbb{N}$:

$P(m)$: $m + n = n + m$, $\forall n \in \mathbb{N}$

→ $P(0)$: $0+n=n+0, \forall n\in\mathbb{N}$.

adev, deoarece 0 este elem. neutru pt „+".

→ Demonstrăm $P(m)\longrightarrow P(s(m))$, adică

dacă $m+n=n+m, \forall n\in\mathbb{N}$, atunci

$s(m)+n\overset{?}{=}n+s(m), \forall n\in\mathbb{N}$.

$$s(m)+n=(m+1)+n\overset{asoc}{=\!=}m+(1+n)\overset{3)}{=}m+(n+1)\ \Big\|\ \text{asoc.}$$

$$n+s(m)=n+(m+1)\overset{asoc}{=\!=}(n+m)+1\overset{\text{ip de ind}}{=\!=\!=}(m+n)+1$$

Așadar, cnf. princip. ind matem:

$m+n=n+m, \forall n\in\mathbb{N}, \forall m\in\mathbb{N}$.

5) Dacă $m+p=n+p$, atunci $m=n$.

Demonstrăm prin ind. matem. după $p\in\mathbb{N}$:

$P(p)$: $m+p=n+p\longrightarrow m=n$.

→ $P(0)$: $m+0=n+0\longrightarrow m=n$?✓

$$\Big\Downarrow \text{def 1)}$$

$m=n$.

→ Demonstrăm $P(p)\longrightarrow P(s(p))$, adică dacă

$m+p=n+p\longrightarrow m=n$ atunci $m+s(p)=n+s(p)\longrightarrow m=n$?

$$\swarrow \text{def 2)}$$

$s(m+p)=s(n+p)$

$\xRightarrow{\text{injectivitatea lui } s} m+p=n+p \xRightarrow{\text{ip. de ind}} m=n$ ✓.

Așadar, cnf. principiului ind. matem:

$\forall m,n,p \in \mathbb{N} \quad m+p=n+p \longrightarrow m=n$.

6) Dacă $m+n=0$, atunci $m=n=0$.

Pp. R.A că $m \neq 0 \Rightarrow \exists\, p \in \mathbb{N}$ aî $m=s(p)$

$m+n=0 \Rightarrow s(p)+n=0 \xRightarrow{\text{comut.}} n+s(p)=0$

$\xRightarrow{\text{def 2)}} s(n+p)=0$ contradicție, 0 NU este succesorul nici unui nr. nat.

Așadar $m=0 \Rightarrow 0+n=0 \xRightarrow{\text{0 elem. n.}} n=0$.

7) Trihotomie: Din urm. 3 afirm. exact una este adevărată:

(i) $m=n$

(ii) $\exists\, p \in \mathbb{N}^*$ aî $m+p=n$

(iii) $\exists\, p \in \mathbb{N}^*$ aî $n+p=m$.

Partea 1: Arătăm că 2 afirm. NU pot avea loc simultan:

Presupunem că are loc (i) și (ii) (Restul cazurilor temă) $\Rightarrow$ $\underline{m=n}$ și $\exists p\in\mathbb{N}^*$ aî $\underline{m+p=n}$ $\Rightarrow$

$m+p=m \Rightarrow m+p=m+0 \xRightarrow{5)} p=0$

contradicție cu $p\in\mathbb{N}^*$.

<u>Partea 2:</u> Demonstrăm prin inducție matematică:

$P(m)$: $m=n$ sau $(\exists p\in\mathbb{N}^* \text{ aî } m+p=n)$ sau
$(\exists p\in\mathbb{N}^* \text{ aî } n+p=m)$

$\rightarrow P(0)$: $\overbrace{0=n}^{1^\circ)}$ sau $\overbrace{(\exists p\in\mathbb{N}^* \text{ aî } 0+p=n)}^{2^\circ)}$ sau
$\underbrace{(\exists p\in\mathbb{N}^* \text{ aî } n+p=0)}_{3^\circ)}$

Dacă $n=0 \Rightarrow 1^\circ)$ adev $\Rightarrow P(0)$ adev.

Dacă $n\neq 0 \Rightarrow 2^\circ)$ adev, luând $p=n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow P(0)$ adev.

$\rightarrow$ Demonstrăm $P(m) \longrightarrow P(s(m))$.

$P(s(m))$: (i) $s(m)=n$ sau
(ii) $\exists p\in\mathbb{N}^*$ aî $s(m)+p=n$ sau
(iii) $\exists p\in\mathbb{N}^*$ aî $n+p=s(m)$.

Știm $P(m)$.

<u>Cazul I</u> Dacă $m=n \Rightarrow$ (iii) adev, luând $p=1\in\mathbb{N}^*$

Cazul II Dacă $\exists p \in \mathbb{N}^*$ a.î. $m+p=n$.

Subcazul 1 Dacă $p=1 \Rightarrow m+1=n \Rightarrow (i) \Rightarrow P(s(m))$.

Subcazul 2 Dacă $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

$p \neq 0 \Rightarrow \exists q \in \mathbb{N}$ a.î. $p = s(q)$.

$p \neq 1 \Rightarrow \underline{q \in \mathbb{N}^*}$

$m+p=n \Rightarrow m+s(q)=n \Rightarrow m+q+1=n$

$\xRightarrow{\text{comut}} m+1+q=n \Rightarrow \underline{s(m)+q=n} \Rightarrow$

are loc (ii) luând $p=q \Rightarrow P(s(m))$.

Cazul III Dacă $\exists p \in \mathbb{N}^*$ a.î. $n+p=m \;|+1 \Rightarrow$

$n+(p+1)=s(m) \Rightarrow$ are loc (iii) pt $p \to p+1 \in \mathbb{N}^*$.

$\Rightarrow P(s(m))$

□.

Cap. 7. Mulțimi de numere

7.1. Mulțimea numerelor naturale

→ Ordonarea numerelor naturale ←

- **Def** $m < n \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists p \in \mathbb{N}^*$ aî $m + p = n$

  $m \leq n \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists p \in \mathbb{N}$ aî $m + p = n$

- **Th** (proprietățile de bază ale relației de ordine)

  Fie $m, n, p \in \mathbb{N}$. Atunci:

  1) „$\leq$" este relație de ordine totală.

dem: reflexivitate: $m + 0 = m \Rightarrow m \leq m, \forall m \in \mathbb{N}$

tranzitivitate: dacă $m \leq n$ și $n \leq p$, vrem $m \leq p$.

$$\left.\begin{array}{l} m \leq n \Rightarrow \exists r \in \mathbb{N} \text{ aî } m + r = n \\ n \leq p \Rightarrow \exists s \in \mathbb{N} \text{ aî } n + s = p \end{array}\right| \Rightarrow (m + r) + s = p$$

$$\Big\Downarrow \text{ asociativitatea „+"}$$

$$m + \underbrace{(r + s)}_{\in \mathbb{N}} = p \Rightarrow m \leq p.$$

antisimetrie: dacă $m \leq n$ și $n \leq m$, vrem $n = m$

$$\left.\begin{array}{l} m \leq n \Rightarrow \exists r \in \mathbb{N} \text{ aî } m + r = n \\ n \leq m \Rightarrow \exists s \in \mathbb{N} \text{ aî } n + s = m \end{array}\right| \Rightarrow (m + r) + s = m$$

$$\Big\Downarrow \text{ asociativitatea „+"}$$

$$m + (r + s) = m$$

$$\Downarrow$$

$$r + s = 0 \Rightarrow r = s = 0$$

$$\Downarrow$$

$$m = n.$$

Așadar „$\leq$" este rel. de ordine.

Vrem „≤" rel de ordine <u>totală</u>. (orice 2 elem. sunt comparabile)

Fie $m,n \in \mathbb{N} \xRightarrow{\text{trihotomie}}$ exact una din următoarele afirmații este adevărată:

i) $m = n$

ii) $\exists\, p \in \mathbb{N}^*$ ai $m = n + p$

iii) $\exists\, p \in \mathbb{N}^*$ ai $n = m + p$.

Dacă are loc i) $m = n \Rightarrow m = n + 0 \Rightarrow \underline{n \leq m}$.

Dacă are loc ii), cum $\mathbb{N}^* \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \underline{n \leq m}$

Dacă are loc iii), cum $\mathbb{N}^* \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \underline{m \leq n}$.

2) $0 \leq n$.

dem: $0 + \underbrace{n}_{\in \mathbb{N}} = n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq n$

3) Dacă $n \neq 0$, atunci $1 \leq n$.

dem: $n \neq 0 \Rightarrow \exists\, p \in \mathbb{N}$ ai $s(p) = n. \Rightarrow \underbrace{p}_{\in \mathbb{N}} + 1 = n \Rightarrow 1 \leq n$.

4) $m < n \Longleftrightarrow m^+ \leq n$.

dem: „$\Rightarrow$": $m < n \Rightarrow \exists\, p \in \mathbb{N}^*$ ai $m + p = n$

$\Downarrow$

$\exists\, q \in \mathbb{N}$ ai $s(q) = p$ $\Rightarrow m + s(q) = n \Rightarrow$

$\Rightarrow m + (q+1) = n \xRightarrow{\text{comut}} m + (1+q) = n \xRightarrow{\text{asoc}} (m+1) + q = n \Rightarrow$

$\Rightarrow m^+ + \underbrace{q}_{\in \mathbb{N}} = n \Rightarrow m^+ \leq n$

dem: „$\Leftarrow$": similar. (temă)

5) $m \le n \iff m < n^+$

dem: analog 4)

6) NU există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $m < n < m^+$

(i.e. între 2 nr. nat consecutive NU există alte nr. nat.)

dem: P.p.R.A că există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $m < n < m^+$.

$$\left.\begin{array}{l} m < n \overset{4)}{\Longrightarrow} m^+ \le n. \\ n < m^+ \Rightarrow \exists\, p \in \underset{\in \mathbb{N}}{\mathbb{N}^*} \text{ a.î. } n+p = m^+ \Big| \Rightarrow n \le m^+ \end{array}\right| \xrightarrow{\text{antisimetrie}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow n = m^+ \\ \text{dar } n+p = m^+ \end{array}\right| \Rightarrow n+p = n \Rightarrow p = 0 \text{ contradicție } (p \in \mathbb{N}^*).$$

7) $(\mathbb{N}, \le)$ este bine ordonată

dem: vezi suportul de curs.

8) (principiul inducției matematice, varianta 2: inducția completă sau inducția tare).

Dc $P(n)$ este un predicat pe $\mathbb{N}$ astfel ca $P(0)$ este adev și „$P(k)$ este adev. pt. orice $k < n$ implică că $P(n)$ este adev" atunci $P(n)$ este adev. pt. orice $n \in \mathbb{N}$.

dem: consecință imediată a inducției matem., varianta 1.

9) Dacă $m<n$ atunci $m+p<n+p$.

dem: inducție după p.

I $p=0$: $m+0<n+0 \Leftrightarrow m<n$ adev.

II Pp. că are loc $m+p<n+p$ pt un $p\in\mathbb{N}$.

Dem că $m+s(p)<n+s(p)$.

$m+p<n+p \Rightarrow \exists q\in\mathbb{N}^*$ aî $m+p+q=n+p \Rightarrow$

$s(m+p+q)=s(n+p) \Rightarrow m+p+q+1=n+p+1$

$\xrightarrow[\text{comut}]{\text{asoc.}} m+p+1+q=n+p+1 \Rightarrow$

$m+s(p)+\underbrace{q}_{\in\mathbb{N}^*}=n+s(p) \Rightarrow m+s(p)<n+s(p)$.

10) Dacă $m<n$ și $p\neq 0$ atunci $mp<np$.

dem: se arată prin inducție după $p\in\mathbb{N}$ că $mp\leq np$, $\forall p\in\mathbb{N}$.

Dacă în plus $p\neq 0$.

$mp\leq np \Rightarrow \exists q\in\mathbb{N}$ aî $mp+q=np$. Vrem $q\neq 0$.

Pp. R.A că $\overset{q=0}{\overset{\Downarrow}{mp}}=np \xrightarrow{p\neq 0} m=n$

$m<n \Rightarrow \exists t\in\mathbb{N}^*$ aî $m+t=n$ $\Big\} \Rightarrow m+t=m \Rightarrow t=0$ contradicție.

11) (axioma lui Arhimede)

Dacă $m \in \mathbb{N}$ și $n \in \mathbb{N}^*$ atunci $\exists p \in \mathbb{N}$ aî $pn > m$.

dem: inducție după n.

I $\underline{n=1}$: trebuie arătat că $\exists p \in \mathbb{N}$ aî $p \cdot 1 > m \Leftrightarrow p > m$.

adev. pt. că putem lua $p = m+1$.

II Pp. că $\exists p \in \mathbb{N}$ aî $pn > m$.

vrem să arătăm că $\exists q \in \mathbb{N}$ aî aî $q \cdot s(n) > m$.

$\Leftrightarrow q(n+1) > m \Leftrightarrow q \cdot n + q > m$.

adev pt. că putem lua $q = p$: $p \cdot n + p \overset{p \in \mathbb{N}}{>} p \cdot n \overset{ip. de ind}{>} m$.

12) (teorema împărțirii cu rest)

Dacă $m \in \mathbb{N}$ și $n \in \mathbb{N}^*$ atunci $\exists$ unic $q, r \in \mathbb{N}$

aî $m = n \cdot q + r$ și $r < n$.

dem: <u>existență</u>: inducție după m.

I $\underline{m=0}$: $0 = n \cdot q + r$. și $r < n$.

luăm $q = 0$ și $r = 0$.

II Pp. că $\exists q, r \in \mathbb{N}$ aî $m = n \cdot q + r$ și $r < n$.

Vrem $\exists q', r' \in \mathbb{N}$ aî $s(m) = n \cdot q' + r'$ și $r' < n$.

$s(m) = n \cdot q' + r' \Leftrightarrow m+1 = n \cdot q' + r' \Leftrightarrow n \cdot q + r + 1 = n \cdot q' + r'$ (*)

$r < n \Rightarrow r+1 \leq n$.

Dacă $r+1<n$ atunci luăm $q'=q$ și $r'=r+1<n$.

Altfel avem $r+1=n$.

$(*) \Leftrightarrow n\cdot q+n=n\cdot q'+r' \Leftrightarrow n(q+1)=n\cdot q'+r'$.

astfel luăm $q'=q+1$ și $r'=0<n$.

unicitate: Pp că $\exists\, q_1, r_1 \in \mathbb{N}$ a.î. $\begin{cases} m=nq_1+r_1, & r_1<n \\ m=nq_2+r_2, & r_2<n \end{cases}$
$\exists\, q_2, r_2 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow nq_1+r_1=nq_2+r_2$.

Pp. că $q_1 \neq q_2 \Rightarrow q_1>q_2$ sau $q_2>q_1$.

Pp că $q_1>q_2$ (cazul $q_2>q_1$ este analog).

$\Rightarrow nq_1+r_1-nq_2=r_2 \Rightarrow n(q_1-q_2)+r_1=r_2<n$

$\rotatebox{-90}{$\geq$}$

$n(q_1-q_2)$.

$\xRightarrow{n\neq 0} q_1-q_2 \leq 1$, dar $q_1 \neq q_2 \Rightarrow q_1-q_2=1 \Rightarrow$

$n \leq n+r_1=r_2 \Rightarrow r_2 \geq n$ contradicție $r_2<n$.

Așadar $q_1=q_2 \Rightarrow nq_1+r_1=nq_1+r_2 \Rightarrow r_1=r_2$.

$\square$