2.12.2020

Seminar 9 _ gr. 312

①. Se dă triunghiul cu vârfurile $A(2,-2)$, $B(3,-5)$ și $C(5,7)$. Determinați ecuațiile perpendicularei duse din vârful C pe bisectoarea interioară a unghiului A.

Soluție

$$AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{3x + y - 4 = 0}$$

$$AC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

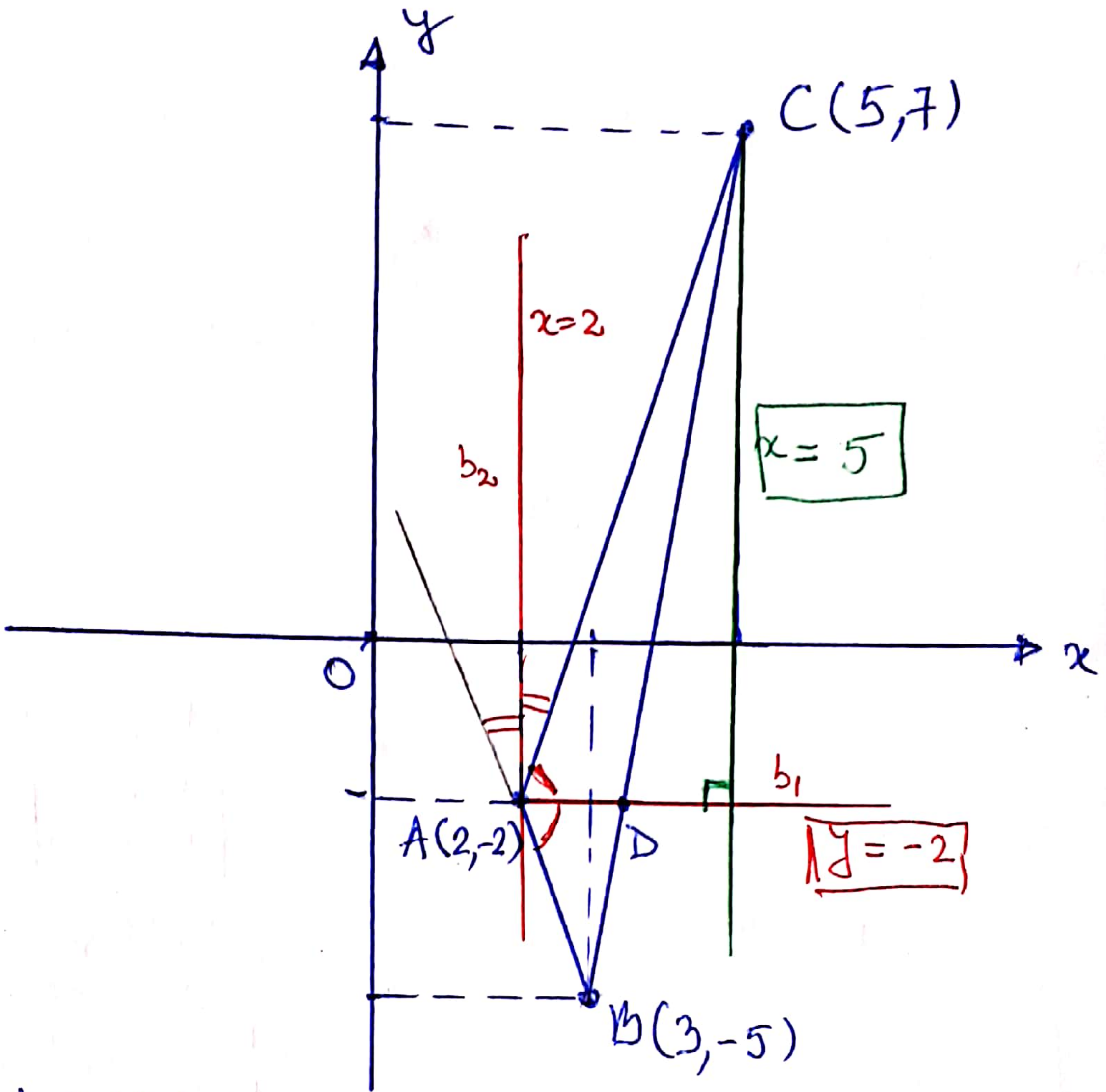
$$\Leftrightarrow -9x + 3y + 24 = 0 \ \Big| : (-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{3x - y - 8 = 0}$$

Ecuațiile bisectoarelor unghiului A:

$$\frac{3x+y-4}{\sqrt{9+1}} = \pm \frac{3x-y-8}{\sqrt{9+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{3x}+y-4 = \cancel{3x}-y-8 \Leftrightarrow 2y = -4 \Leftrightarrow \boxed{y=-2} \ (b_1) \\ 3x+y-4 = -3x+y+8 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow \boxed{x=2} \ (b_2) \end{cases}$$



$BC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -12x + 2y + 46 = 0 \quad | :(-2) \quad \boxed{6x - y - 23 = 0}$

$BC \cap b_1 : \begin{cases} y = -2 \\ 6x - y - 23 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{D\left(\frac{7}{2}, -2\right)}$

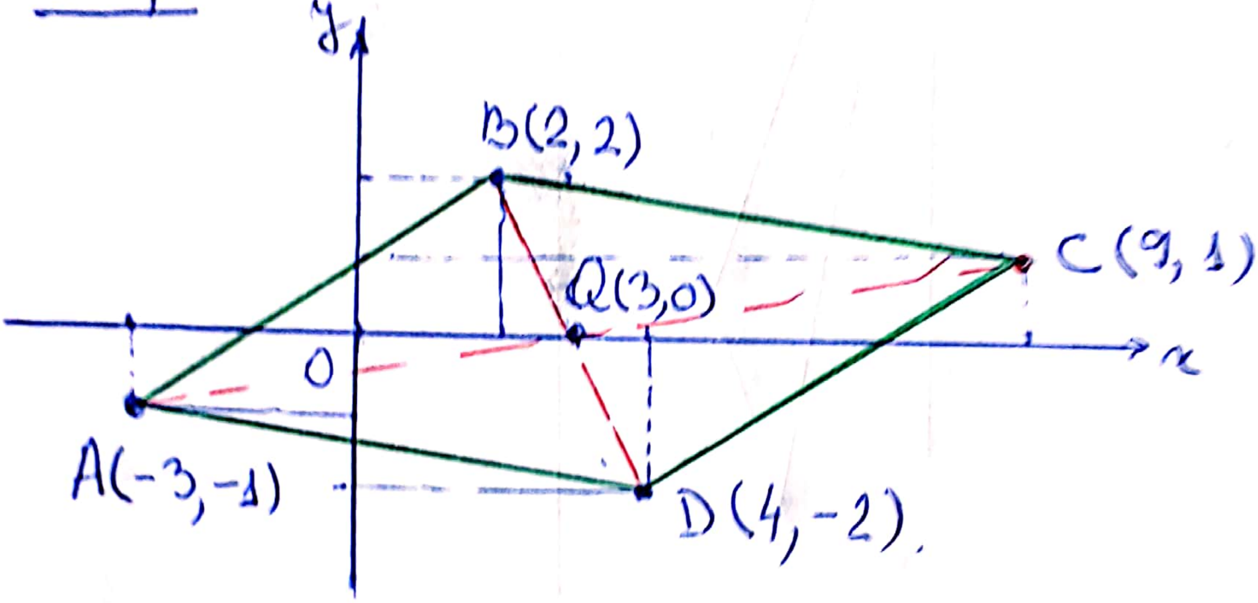
Deoarece $x_B < x_D < x_C \quad \left(3 < \frac{7}{2} < 5\right)$

și $y_B < y_D < y_C \quad (-5 < -2 < 7)$

Rezultă că bisectoarea interioară a unghiului A este $b_1: y = -2$. Rezultă că perpendiculara din C pe b_1 are ecuația $\boxed{x = 5}$.

2. Se dau două vârfuri învecinate $A(-3,-1)$ și $B(2,2)$ ale paralelogramului $ABCD$ și punctul Q de intersecție al diagonalelor $Q(3,0)$. Formați ecuațiile laturilor paralelogramului.

Soluție



Q este mijlocul diagonalelor AC și BD.

Deci $x_Q = \frac{x_B + x_D}{2} \Leftrightarrow 3 = \frac{2 + x_D}{2} \Leftrightarrow \boxed{x_D = 4}$

$y_Q = \frac{y_B + y_D}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{2 + y_D}{2} \Leftrightarrow \boxed{y_D = -2}$

Deci $\boxed{D(4,-2)}$

$x_Q = \frac{x_A + x_C}{2} \Leftrightarrow 3 = \frac{-3 + x_C}{2} \Leftrightarrow \boxed{x_C = 9}$

$y_Q = \frac{y_A + y_C}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{-1 + y_C}{2} \Rightarrow \boxed{y_C = 1}$

$\Rightarrow \boxed{C(9,1)}$

$AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$-3x + 5y - 4 = 0 \Leftrightarrow \boxed{AB: 3x - 5y + 4 = 0}$

$BC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\boxed{BC: x + 7y - 16 = 0}$

$AD \parallel BC \Rightarrow AD: x + 7y + \alpha = 0$

și $D \in AD \Rightarrow 4 + 7(-2) + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 10$

$\Rightarrow \boxed{AD: x + 7y + 10}$

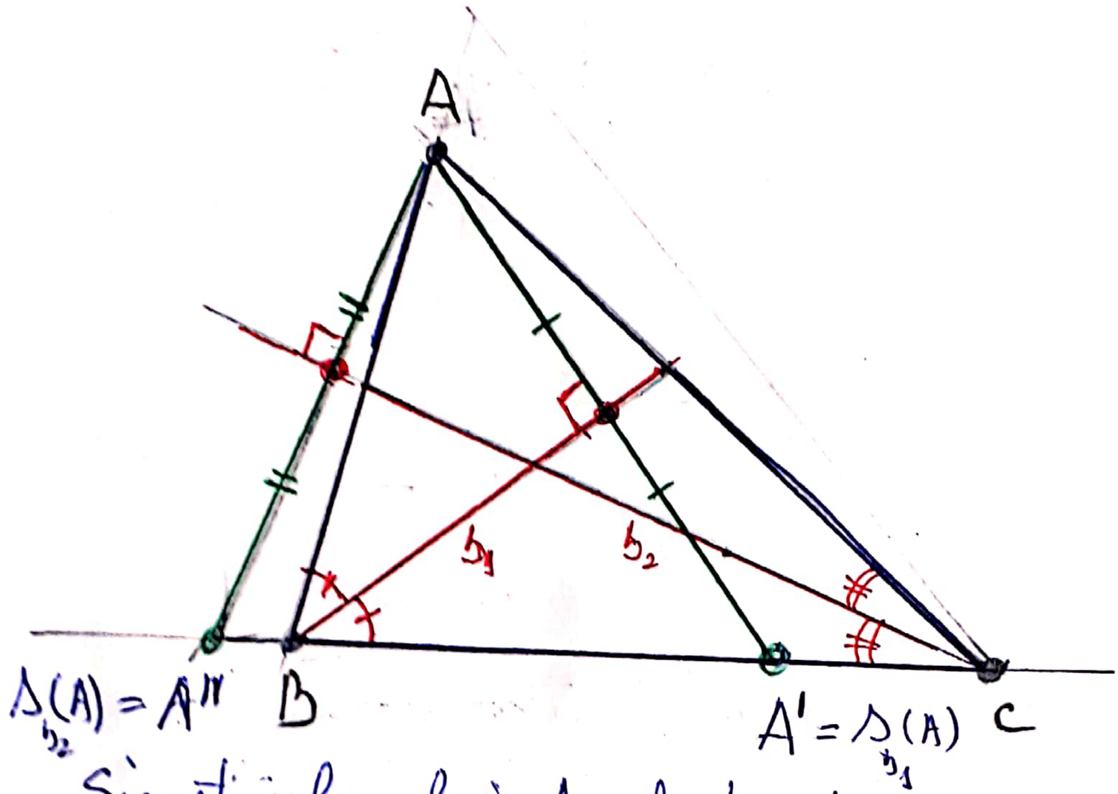
$CD \parallel AB \Rightarrow CD: 3x - 5y + \beta = 0$

și $D \in CD \Rightarrow 3 \cdot 4 - 5(-2) + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -22$

$\Rightarrow \boxed{CD: 3x - 5y - 22 = 0}$.

3. Determinați ecuațiile laturilor unui triunghi dacă se cunosc un vârf $A(4, -1)$ și ecuațiile a două bisectoare $b_1: x - 1 = 0$ și $b_2: x - y - 1 = 0$.

<u>Soluție</u> $A \notin b_1$ și $A \notin b_2$.



Simetricele lui A față de cele două bisectoare sunt situate pe latura BC.

$A' = s_{b_1}(A) \in BC$ și $A'' = s_{b_2}(A) \in BC$

Deci $BC \equiv A'A''$

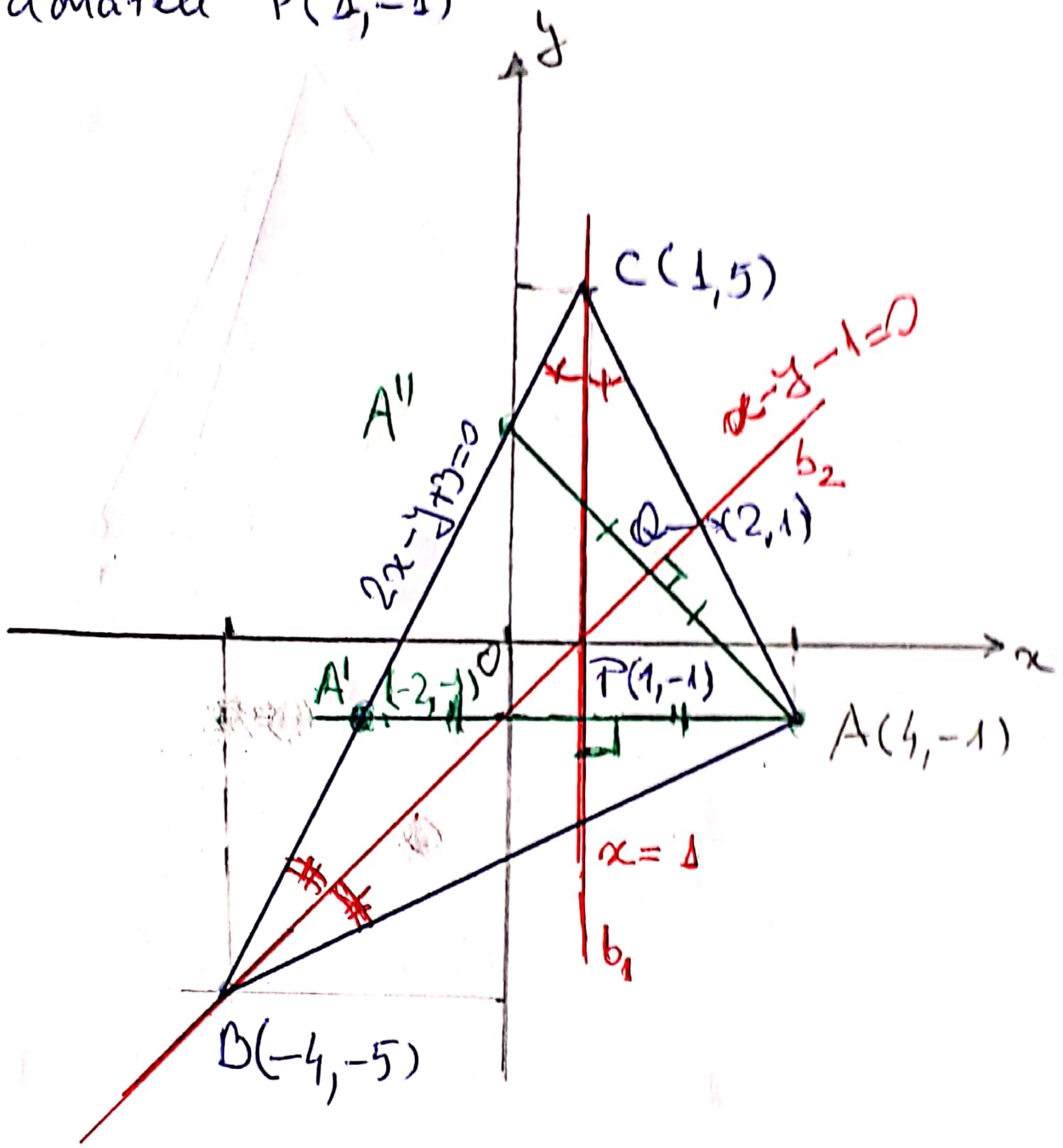
Intersecțiile lui $A'A''$ cu b_1 și b_2 vor fi B și C.

Fie $A' = s_{b_1}(A)$ $\quad b_1 : x - 1 = 0$

$A(4, -1)$

Deoarece b_1 este paralelă cu Ox rezultă că perpendiculara din A pe b_1 va fi paralelă cu Oy, mai precis $\boxed{y = -1}$ pentru că $y_A = -1$.

Rezultă că proiecția P a lui A pe b_1 are coordonatele $P(1,-1)$



$\Rightarrow x_P = \dfrac{x_A + x_{A'}}{2} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{4 + x_{A'}}{2} \Rightarrow \boxed{x_{A'} = -2}$

$y_P = \dfrac{y_A + y_{A'}}{2} \Leftrightarrow -1 = \dfrac{-1 + y_{A'}}{2} \Rightarrow \boxed{y_{A'} = -1}$

$\Rightarrow \boxed{A'(-2,-1)}$

$m_{b_2} = 1 \Rightarrow m_{AQ} = -1$ (Q este proiecția lui A pe b_2)

$\Rightarrow AQ: y+1 = -1\cdot(x-4) \Leftrightarrow y = -x+4-1 \Leftrightarrow$

$AQ: \boxed{y = -x+3}$

$AQ \cap b_2 = \{Q\}$

$\begin{cases} y = -x+3 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow x + x - 3 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_Q = 2}$

$\Rightarrow \boxed{y_Q = 1} \Rightarrow Q(2,1)$

Q este mijlocul lui AA'' dci

$x_Q = \frac{x_A + x_{A''}}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{4 + x_{A''}}{2} \Rightarrow \boxed{x_{A''} = 0}$

$y_Q = \frac{y_A + y_{A''}}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{-1 + y_{A''}}{2} \Rightarrow \boxed{y_{A''} = 3}$

$\Rightarrow A''(0,3)$.

$\Rightarrow A'A'': \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -4x+2y-6=0 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \boxed{A'A'': 2x-y+3=0}$

$A'A'' \cap b_1 = \{B\}$ $\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow x+4=0$
$x=-4$

$\Rightarrow y = -5. \Rightarrow \boxed{B(-4,-5)}$

$A'A'' \cap b_2 = \{C\}$ $\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow y=5$

$\Rightarrow \boxed{C(1,5)}$

$AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4x - 8y - 24 = 0 \quad |:4$

$\boxed{AB: x - 2y - 6 = 0}$

$AC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -6x - 3y + 21 = 0 \quad |:(-3)$

$\boxed{AC: 2x + y - 7 = 0}$

$\boxed{BC \equiv A'A'': 2x - y + 3 = 0}$.

4. Se dau ecuațiile a două laturi ale unui pătrat:

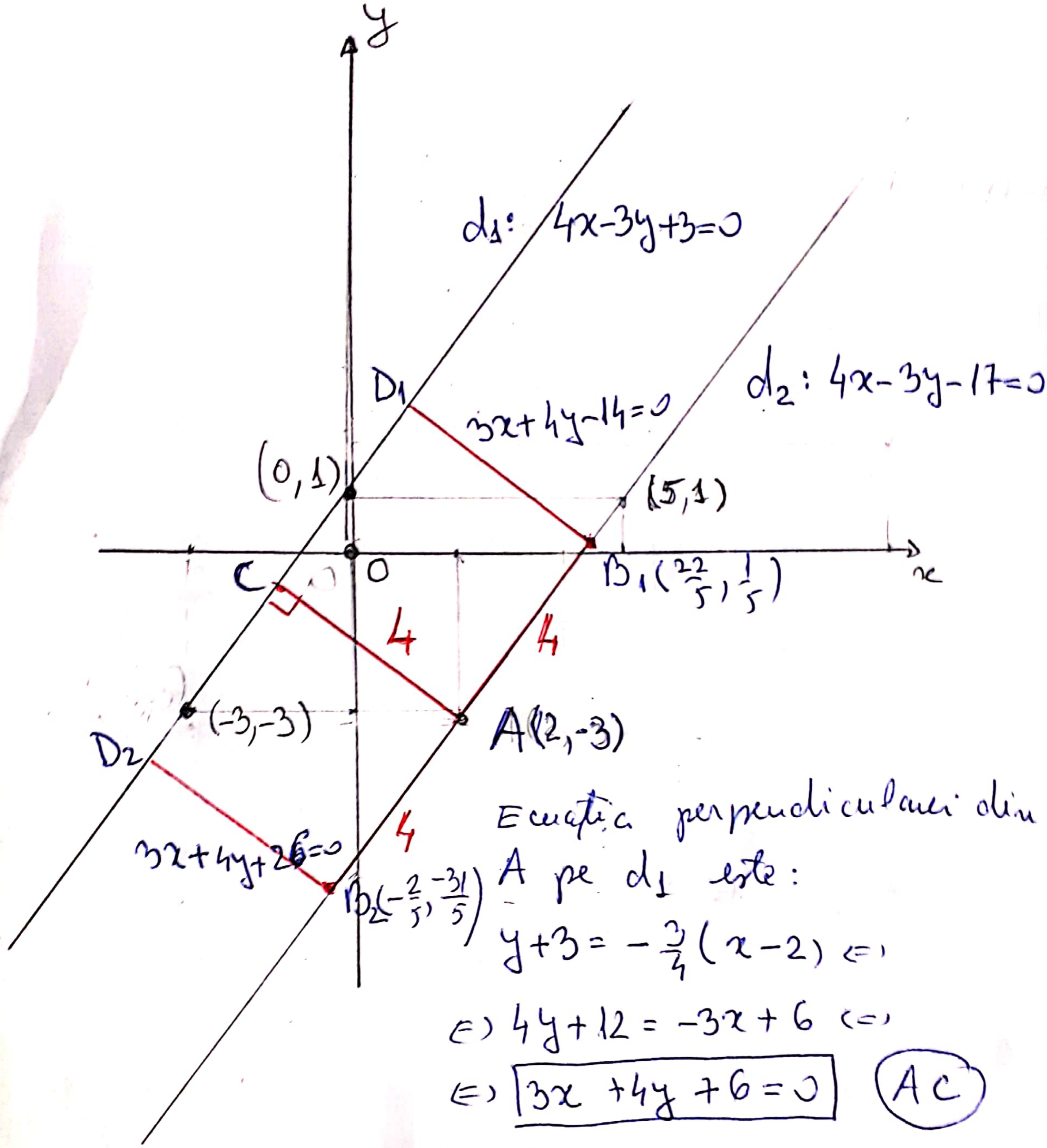
$d_1: 4x - 3y + 3 = 0$

$d_2: 4x - 3y - 17 = 0$

și unul dintre vârfuri $A(2,-3)$. Formați ecuațiile celorlalte două laturi.

<u>Soluție</u> $A \in d_2$. Latura pătratului are lungimea $d(A, d_1) = \dfrac{|4 \cdot 2 - 3(-3) + 3|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} =$

$= \dfrac{20}{5} = 4$. Vom căuta pe d_2 două puncte B_1 și B_2 a.î. $AB_1 = AB_2 = 4$.



Ecuația perpendicularei din A pe d_1 este:

$y+3=-\frac{3}{4}(x-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4y+12=-3x+6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{3x+4y+6=0}$ (AC)

Fie $B\left(\alpha, \frac{4\alpha-17}{3}\right) \in d_2: y=\frac{4x-17}{3}$

$AB=4 \Leftrightarrow \sqrt{(\alpha-2)^2+\left(\frac{4\alpha-17}{3}+3\right)^2}=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2-4\alpha+4+\left(\frac{4\alpha-8}{3}\right)^2}=4$

$$\alpha^2-4\alpha+4+\frac{16\alpha^2-64\alpha+64}{9}=16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\alpha^2-36\alpha+36+16\alpha^2-64\alpha+64-144=0$$

$$\Leftrightarrow 25\alpha^2-100\alpha-44=0$$

$$\alpha_{1,2}=\frac{100\pm\sqrt{10.000+4400}}{50}$$

$$\alpha_{1,2}=\frac{100\pm 120}{50} \Leftrightarrow \alpha_{1,2}= \begin{cases} \frac{220}{50}=\frac{22}{5} \\ -\frac{20}{50}=-\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B_1\left(\frac{22}{5}, \frac{4\cdot\frac{22}{5}-17}{3}\right) \Leftrightarrow \boxed{B_1\left(\frac{22}{5}, \frac{1}{5}\right)}$$

$$B_2\left(-\frac{2}{5}, \frac{4\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)-17}{3}\right) \Leftrightarrow \boxed{B_2\left(-\frac{2}{5}, -\frac{31}{5}\right)}$$

$$B_1D_1 \perp d_1 \Rightarrow B_1D_1 : y-\frac{1}{5}=-\frac{3}{4}\left(x-\frac{22}{5}\right) \quad |\cdot 20$$

$$20y-4=-15x+66 \Leftrightarrow 15x+20y-70=0 \quad |:5$$

$$\boxed{3x+4y-14=0} \quad B_1D_1.$$

$$B_2D_2 : 3x+4y+c=0$$

$$-\frac{6}{5}-\frac{124}{5}+c=0 \Leftrightarrow c=\frac{130}{5} \Leftrightarrow c=26$$

$$\boxed{B_2D_2 : 3x+4y+26=0}$$

(5) Să se determine ecuația cercului care trece prin punctele: $M_1(-1,5)$, $M_2(-2,-2)$, $M_3(5,5)$.

Soluție

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 26 & -1 & 5 & 1 \\ 8 & -2 & -2 & 1 \\ 50 & 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}(x^2+y^2) - \begin{vmatrix} 26 & 5 & 1 \\ 8 & -2 & 1 \\ 50 & 5 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 26 & -1 & 1 \\ 8 & -2 & 1 \\ 50 & 5 & 1 \end{vmatrix} y -$$

$$- \begin{vmatrix} 26 & -1 & 5 \\ 8 & -2 & -2 \\ 50 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -7 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}(x^2+y^2) - 2\cdot\begin{vmatrix} 13 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{vmatrix} x +$$

$$+ 2\cdot\begin{vmatrix} 13 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{vmatrix} y - 10\cdot\begin{vmatrix} 13 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff 42(x^2+y^2) - 2\begin{vmatrix} 13 & 5 & 1 \\ -9 & -7 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{vmatrix} x + 2\begin{vmatrix} -12 & -6 & 0 \\ -21 & -7 & 0 \\ 25 & 5 & 1 \end{vmatrix} y -$$

$$-10\begin{vmatrix} -12 & -6 & 5 \\ 14 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff 42(x^2+y^2) - 168x - 84y - 840 = 0 \quad |:42$$

$$\iff x^2+y^2 - 4x - 2y - 20 = 0 \iff \boxed{(x-2)^2+(y-1)^2=25}$$

⑥ Formați ecuațiile cercurilor tangente la dreptele: $d_1: 4x-3y-10=0$, $d_2: 3x-4y-5=0$, $d_3: 3x-4y-15=0$.

<u>Soluție</u> Fie $C(\alpha,\beta)$ centrul unui cerc tangent la cele trei drepte $\Rightarrow$

$$d(C,d_1)=d(C,d_2)=d(C,d_3)=R \text{ (raza)}.$$

$$\Rightarrow \frac{|4\alpha-3\beta-10|}{\sqrt{4+(-3)^2}}=\frac{|3\alpha-4\beta-5|}{\sqrt{9+(-4)^2}}=\frac{|3\alpha-4\beta-15|}{\sqrt{9+(-4)^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha-3\beta-10=\pm(3\alpha-4\beta-5) \\ \text{și} \\ 4\alpha-3\beta-10=\pm(3\alpha-4\beta-15) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 4\alpha-3\beta-10=3\alpha-4\beta-5 & (1) \\ \text{sau} \\ 4\alpha-3\beta-10=-3\alpha+4\beta+5 & (2) \end{cases} \\ \text{și} \\ \begin{cases} 4\alpha-3\beta-10=3\alpha-4\beta-15 & (3) \\ \text{sau} \\ 4\alpha-3\beta-10=-3\alpha+4\beta+15 & (4) \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{(I)} \begin{cases} \alpha+\beta-5=0 \\ \alpha+\beta+5=0 \end{cases} \text{ nu are soluții}$$

(ecuația ① și ③).

II $\begin{cases} \alpha+\beta-5=0 & (1) \quad \vert \cdot 7 \\ 7\alpha-7\beta-25=0 & (4) \end{cases}$

$14\alpha-60=0 \Rightarrow \alpha=\frac{60}{14} \Leftrightarrow \boxed{\alpha=\frac{30}{7}}$

$\beta=5-\alpha \Rightarrow \beta=5-\frac{30}{7} \Leftrightarrow \boxed{\beta=\frac{5}{7}}$

$R=\frac{\left|4\cdot\frac{30}{7}-3\cdot\frac{5}{7}-10\right|}{\sqrt{25}}=\frac{\left|120-15-70\right|}{35}=\frac{35}{35}=1.$

$\Rightarrow \mathcal{C}(C(\alpha,\beta),R)=\mathcal{C}\left(C\left(\frac{30}{7},\frac{5}{7}\right),1\right):$

$\boxed{\left(x-\frac{30}{7}\right)^2+\left(y-\frac{5}{7}\right)^2=1}$

III $\begin{cases} 7\alpha-7\beta-15=0 & (2) \\ \alpha+\beta+5=0 & (3) \quad \vert \cdot 7 \end{cases}$

$14\alpha+20=0 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{20}{14} \Leftrightarrow \boxed{\alpha=-\frac{10}{7}}$

$\Rightarrow \beta=-\alpha-5 \Rightarrow \beta=+\frac{10}{7}-5 \Leftrightarrow \boxed{\beta=-\frac{25}{7}}$

$R=\frac{\left|4\left(-\frac{10}{7}\right)-3\left(-\frac{25}{7}\right)-10\right|}{\sqrt{25}}=\frac{\left|-40+75-70\right|}{35}=1.$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{C}\left(C\left(-\frac{10}{7},-\frac{25}{7}\right),1\right):\left(x+\frac{10}{7}\right)^2+\left(y+\frac{25}{7}\right)^2=1}$

IV $\begin{cases} 7\alpha-7\beta-15=0 & (2) \\ 7\alpha-7\beta-25=0 & (4) \end{cases}$ nu are soluție.