MODELE

1. Dezintegrarea radioactivă

$$\begin{cases} x'(t) = -k \cdot x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

, unde $x(t)$ - cantitatea de subst. la mom. $t > 0$
k - constanta de dezintegrare
x_0 - cant. de subst. la mom. $t_0 = 0$

Soluție: $\boxed{x(t) = x_0 \cdot e^{-k \cdot t}}$; $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \Rightarrow$ subst. dispare în timp

$T_{1/2}$ - timpul de înjumătățire

$$x(T_{1/2}) = \frac{x_0}{2} \Leftrightarrow x_0 \cdot e^{-k \cdot T_{1/2}} = \frac{x_0}{2} \Leftrightarrow -k \cdot T_{1/2} = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow k T_{1/2} = \ln 2$$

$$\Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}, \quad k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \Rightarrow x(t) = x_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t} = x_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$$

2. Răcirea / încălzirea corpurilor

$$\begin{cases} T' = -k(T - T_m) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

, unde $T(t)$ - temp. corpului la momentul $t > 0$
T_0 - temp. corpului la mom. $t_0 = 0$
T_m - temp. mediului = const.
k - const. de răcire, $k > 0$

Soluție: $\boxed{T(t) = c \cdot e^{-kt} + T_m}$

$\Rightarrow \boxed{T(t) = (T_0 - T_m) \cdot e^{-k \cdot t} + T_m}$

$T_0 < T_m \Rightarrow$ corp încălzește $\to T(t)$ crește
$\Rightarrow T'(t) > 0 \Rightarrow \underbrace{T'(t)}_{>0} = -k \underbrace{(T - T_m)}_{<0}$
la fel pt. $T_0 > T_m$

- $T_0 = T_m \Rightarrow T(t) = T_m$
- $T_0 \neq T_m \Rightarrow \lim_{t \to \infty} T(t) = T_m$

$\Rightarrow$ în timp, temp. corpului tinde la valoarea temp. mediului, $T(t) \to T_m$

3. Mișcarea pe verticală în câmp gravitațional

$$\begin{cases} v'(x) \cdot v(x) = -\dfrac{gR^2}{(x+R)^2} \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

, unde x - dist. față de suprafață
$v(x)$ - viteza corpului la înălțimea x
R - raza pământului
v_0 - viteza inițială la suprafață
g - accelerația gravitațională

Soluție: $v^2 = \dfrac{2gR^2}{x+R} + c \xrightarrow{v(0) = v_0} v^2 = \dfrac{2gR^2}{x+R} + v_0^2 - 2gR$

$$v = \pm \sqrt{\frac{2gR^2}{x+R} + v_0^2 - 2gR}$$

"+" - corpul urcă
"−" - corpul coboară

4. Mişcarea unui corp sub acţiunea unei forţe

$$\begin{cases} m\cdot x'' = F \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$
, unde m – masa corpului, $x(t)$ – poziţia la mom. $t>0$
x_0 – poz. iniţială la $t_0=0$
$x'(0) = v_0$ – viteza iniţială
F – forţa care acţionează = const.

Soluţia (prin integrare de 2 ori): $x(t) = \frac{F}{2m}\cdot t^2 + c_1 t + c_2$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{F}{2m}\cdot t^2 + v_0\cdot t + x_0}$$

5. Pendul matematic (fără frecare)

$$\begin{cases} \varphi''(t) + \frac{g}{\ell}\cdot\sin\varphi(t) = 0 \\ \varphi(0) = \varphi_0 \\ \varphi'(0) = \frac{v_0}{\ell} \end{cases}$$
, unde $\varphi(t)$ – unghiul format de fir cu verticala
φ_0 – " – la mom. $t_0=0$
ℓ – lungimea firului
g – acceleraţia gravitaţională
v_0 – viteza corpului la mom. $t_0=0$

Cazul oscilaţiilor mici $\Rightarrow \sin\varphi \simeq \varphi$

$\Rightarrow \varphi'' + \omega^2\varphi = 0$, unde $\omega^2 = \frac{g}{\ell}$; ec. carac: $r^2+\omega^2=0$

$\Rightarrow \varphi(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)$

Soluţie: $\boxed{\varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\ell\omega}\sin(\omega t)} = R\cdot\cos(\omega t - \sigma)$

amplitudinea maximă $= R = \sqrt{\varphi_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega\ell}\right)^2}$

perioada $= T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

faza mişcării
$\sigma = \mathrm{arctg}\left(\frac{v_0}{\varphi_0\omega\ell}\right)$

6. Pendulul armonic fără frecare

$$\begin{cases} x'' + \frac{g}{L}\cdot x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$
, unde L – alungirea resortului în poz. de ech.
$x(t)$ – poz. corp faţă de poz. de ech. la mom. $t>0$
v_0 – viteza la mom. $t_0=0$
x_0 – poz. la mom. $t_0=0$

$\omega_0^2 = \frac{g}{L}$

Soluţie: $\boxed{x(t) = x_0\cdot\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t} = R\cos(\omega_0 t - \sigma)$

$R = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$; $\sigma = \mathrm{arctg}\frac{v_0}{x_0\omega_0}$

amplitudinea   faza mişcării

7. Pendulul armonic cu frecare

$$\begin{cases} x'' + Rx' + \omega_0^2 x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$, unde $R = \frac{\mu}{m}$, μ - coef. de frecare
$R > 0$

ec. carac: $r^2 + Rr + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \Delta = R^2 - 4\omega_0^2$

- $\Delta > 0 \Rightarrow$ cazul supra-amortizării
- $\Delta = 0 \Rightarrow$ amortizare critică
- $\Delta < 0 \Rightarrow$ amortizare slabă

$x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

8. Modelul creșterii exponențiale (Malthus)

$$\begin{cases} x' = rx \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$, unde $x(t)$ - populația la mom. $t > 0$
x_0 - pop. la mom $t_0 = 0$
r - rata creșterii = rata nașteri - rata decese

Soluție: $\boxed{x(t) = x_0 \cdot e^{rt}}$

- $r < 0 \Rightarrow \lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0 \Rightarrow$ pop. dispare în timp
- $r = 0 \Rightarrow x(t) = x_0$
- $r > 0 \Rightarrow \lim\limits_{t \to \infty} x(t) = +\infty$

9. Modelul logistic (Verhulst)

$$\begin{cases} x' = r_0 x \cdot \left(1 - \frac{x}{k}\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$, unde $x(t)$ - pop. la mom. $t > 0$
x_0 - pop. la mom. $t_0 = 0$
r_0 - rata de creștere nerestrictivă
mediul asigură resurse mai multe decât
sunt necesare = nașteri - decese
k - constanta de suport a mediului (pop. maximă pe care mediul o poate întreține)

Soluție: $x(t) = \frac{ck \cdot e^{r_0 t}}{1 + ce^{r_0 t}} \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{x_0 k \cdot e^{r_0 t}}{k - x_0 + x_0 e^{r_0 t}}}$, $c = \frac{x_0}{k - x_0}$

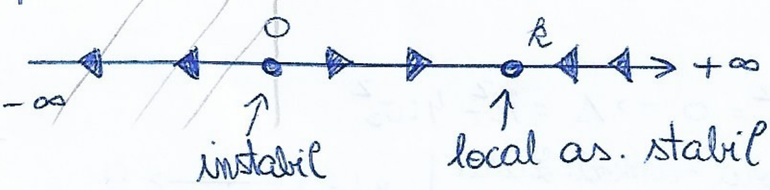
Puncte de echilibru:
$f(x) = 0 \Rightarrow r_0 x \cdot \left(1 - \frac{x}{k}\right) = 0 \Rightarrow x_1^* = 0, x_2^* = k$

Stabilitatea punctelor de echilibru

x			0			k		
$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$

1. $r_0 > 0$

$\lim_{t \to \infty} x(t) = k$



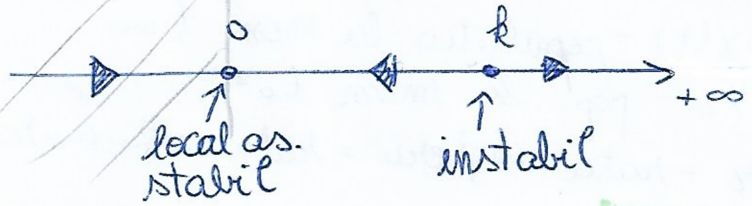
x			0			k		
$f(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$

2. $r_0 < 0$

$x_0 \in (0, k) \Rightarrow x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

$x_0 \in (k, \infty) \Rightarrow x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty$

(nerealist)



10. Modelul pradă-prădător

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

, unde x_0, y_0 - pop. pradă/prădător la mom. $t_0 = 0$

în absența prădătorului, x se dez. cu o rată de creștere poz. (a)

în absența prăzii, y se dez. cu o rată de creștere neg. $(-c)$

$a, b, c, d > 0$

~~b, d rate de recoltare din pop pradă/prăd.~~

Creșterea lui x este diminuată de recoltarea lui $y \Rightarrow$

$\Rightarrow b$ este rata de recoltare a prăzii

descreșterea lui y este diminuată de recoltare $\Rightarrow$

$\Rightarrow d$ rata de recoltare a prăzii

xy - nr. de interacțiuni dintre cele două specii

Puncte de echilibru:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(a - by) = 0 \\ y(-c + dx) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $x = 0$ $\Downarrow$ $y \cdot (-c) = 0$ $\Downarrow$ $y = 0$ $\Downarrow$ $X_1^*(0,0)$

sau $a - by = 0$ $\Downarrow$ $y = \frac{a}{b}$ $\Downarrow$ $\frac{a}{b}(-c + dx) = 0$ $\Downarrow$ $x = \frac{c}{d}$ $\Rightarrow X_2^*\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$

Stabilitatea:

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-by & -bx \\ dy & -c+dx \end{pmatrix}$$

$X_1^*(0,0)$

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}; \det(\lambda I_2 - J_f(0,0)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-a & 0 \\ 0 & \lambda+c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda-a)(\lambda+c) = 0$$

$\lambda_1 = a > 0 \Rightarrow Re\,\lambda_1 = \lambda_1 > 0 \Rightarrow X_1^*(0,0)$ instabil

$\lambda_2 = -c < 0$

$X_2^*\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$

$$J_f\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}; \det\left(\lambda I_2 - J_f\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & \frac{bc}{d} \\ -\frac{ad}{b} & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + ac = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \underbrace{-ac}_{<0} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{ac}$$

$\left.\begin{array}{l} Re\,\lambda_{1,2} = 0 \\ \text{sist neliniar} \end{array}\right\} \Rightarrow$ nu se poate aplica T primei aprox. $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow X_2^*\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ local as. stabil

11. Modelul cu recoltare const.

↳ ca modelul Verhulst, doar că apare $-h$ - rata const. de recoltare, $h > 0$

pt. puncte de ech. apare discuție $\Delta \gtrless 0$, $\Rightarrow r_0 \gtrless \frac{4h}{k}$ (când faci $f(x) = 0$)

12. Modelul cu recoltare prop.

↳ ca Verhulst cu $-E \cdot x$

↳ puncte de ech: $x_1^* = 0$, $x_2^* = \frac{k}{r_0}(r_0 - E)$

discuție $r_0 \le E$ și $r_0 > E$

$$(11)\begin{cases} x' = r_0 x\left(1 - \frac{x}{k}\right) - h \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$(12)\begin{cases} x' = r_0 x\left(1 - \frac{x}{k}\right) - Ex \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Flux. Portret fazic - o ec. autonomă

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = \eta \end{cases}$$

$\mathring{I}_\eta$ - interval maximal deschis $= (\alpha_\eta, \beta_\eta)$

$W = \{ \mathring{I}_\eta \times \{\eta\} \mid \eta \in \mathbb{R} \}$

$\varphi : W \to \mathbb{R}$, $\varphi(t, \eta) = x(t, \eta)$ - fluxul generat

$\gamma^+(\eta) = \bigcup_{t \in [0, \beta_\eta)} \varphi(t, \eta)$ orbita poz. a lui η

$\gamma^-(\eta) = \bigcup_{t \in (\alpha_\eta, 0]} \varphi(t, \eta)$ orbita neg. a lui η

$\gamma(\eta) = \gamma^+(\eta) \cup \gamma^-(\eta)$ orbita lui η

Portret fazic = reuniunea tuturor orbitelor împreună cu sensul lor de parcurgere

- poate fi det. cu ajutorul funcției f

ex: $x' = x - x^3$

$f(x) = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \ x_{2,3} = \pm 1$

x		-1		0		1	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Puncte de echilibru. Stabilitate

Punctele de echilibru sunt soluțiile reale ale ec. $f(x) = 0$.

Fie $x^* \in \mathbb{R}$ un punct de echilibru; spunem că x^* este:

a) local stabil dacă $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. dacă $|\eta - x^*| < \delta$ at. $|\varphi(t, \eta) - x^*| < \varepsilon, \ \forall t \neq 0$

b) local as. stabil dacă este local stabil și $|\varphi(t, \eta) - x^*| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

c) instabil dacă nu este local stabil

Teorema stab. în primă aprox.

Fie $x^* \in \mathbb{R}$ un punct de ech. (soluție a ec. $f(x)=0$)

a) dacă $f'(x^*) < 0 \Rightarrow x^*$ local as. stabil

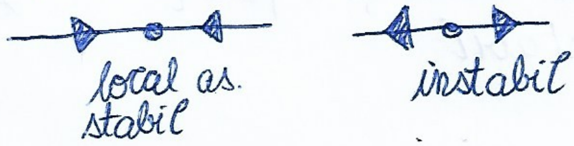
b) dacă $f'(x^*) > 0 \Rightarrow x^*$ instabil

Sau cu tabel de semn cu liniile x, $f(x)$

$f(x)$ cu „+" $\Rightarrow$ în portretul fazic ▶

cu „−" $\Rightarrow$ ◀

ex:



sau $f'(x^*) < 0 \Rightarrow$ local as. stab

$f'(x^*) > 0 \Rightarrow$ instabil

Fluxul generat de sistem

$$\begin{cases} x' = f_1(x,y) \\ y' = f_2(x,y) \\ x(0) = \eta_1 \\ y(0) = \eta_2 \end{cases}, \quad \begin{aligned} x(t,\eta) &= x(t,\eta_1,\eta_2) \\ y(t,\eta) &= y(t,\eta_1,\eta_2) \\ \forall \eta &= (\eta_1,\eta_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

I_η - interval maximal $= (\alpha_\eta, \beta_\eta)$

$$W = \{ I_\eta \times \{\eta\} \mid \eta \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$\varphi : W \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t,\eta) = \varphi(t,\eta_1,\eta_2) = (x(t,\eta), y(t,\eta))$$

↳ fluxul generat de sistem

$\gamma^+(\eta) = \bigcup_{t\in[0,\beta_\eta)} \varphi(t,\eta)$ orbita poz. lui η

$\gamma^-(\eta) = \bigcup_{t\in(\alpha_\eta,0]} \varphi(t,\eta)$ orbita neg. lui η

$\gamma(\eta) = \gamma^+(\eta) \cup \gamma^-(\eta)$ orbita lui η

↳ cu sensul de parcurgere formează portretul fazic

Ecuația diferențială a orbitelor

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$ - dacă e rezolvabilă și dă frumos (ex: ec. unui cerc $x^2+y^2=c^2$ de rază c, familie de parabole $y = cx^2$) nu se rezolvă sistemul

Puncte de echilibru

$X^*(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ sol. ale sist. $\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$

Def: fie $X^*(x^*, y^*)$ punct de ech; spunem că este:

a) local stabil dacă $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î.
dacă $\|\eta - X^*\| < \delta$ at. $\|\varphi(t, \eta) - X^*\| < \varepsilon, \ \forall t \geq 0$

b) local as. stabil dacă este local stabil și $\|\varphi(t,\eta) - X^*\| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

c) instabil dacă nu este local stabil

- Cazul sist. liniare

$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$X^*(0,0)$ punct. de ech.

ec. carac. $\det(\lambda I_2 - A) = 0$

$(0,0)$ este:

a) local stabil $\Leftrightarrow Re(\lambda) \leq 0, \forall \lambda$

b) local as. stabil $\Leftrightarrow Re(\lambda) < 0, \forall \lambda$

c) instabil dacă nu are loc a)

Clasificare $(0,0)$

- tip nod $\Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \ \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ (același semn) + as. stab / − instab
- tip șa $\Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \ \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ (semne contrare) instab
- tip focus $\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$
  $\alpha > 0$ focus instabil, $\alpha < 0$ focus stabil
- tip centru $\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\beta \Rightarrow$ centru local stabil

- Cazul neliniar

Se calculează $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$

pt. $X^*(x^*, y^*)$, $\det(\lambda I_2 - J_f(x^*, y^*)) = 0$

a) dacă $Re\,\lambda < 0$, $\forall \lambda$ $\Rightarrow (x^*, y^*)$ local as. stabil

b) dacă $\exists \lambda$ cu $Re\,\lambda > 0$ $\Rightarrow (x^*, y^*)$ instabil

Teorema stab. în primă aprox.

Funcții Lyapunov

cauți o funcție $V(x,y)$ pt. care $V(x^*, y^*) = 0$, iar $V(x,y) > 0$, $\forall (x,y) \in \Delta \setminus \{(x^*, y^*)\}$

calculezi $\mathring{V}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f_1 + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot f_2$

↳ dacă $\mathring{V}(x,y) \leq 0$, $\forall (x,y) \in \Delta \Rightarrow (x^*, y^*)$ local stabil

↳ dacă $\mathring{V}(x,y) < 0$, $\forall (x,y) \in \Delta \setminus \{(x^*, y^*)\} \Rightarrow (x^*, y^*)$ local as. stabil

↳ dacă $\mathring{V}(x,y) > 0$, $\forall (x,y) \in \Delta \setminus \{(x^*, y^*)\} \Rightarrow (x^*, y^*)$ instabil

Metode de aproximare

1. Euler cu pas echidistant $\boxed{y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \cdot h}$

ex: $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x,y) = y$

$h = 0,1$ pe $[0,1]$ $\Rightarrow n = 0 \dots 9$

$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot h = 1 + 1 \cdot 0,1 = 1,1$

$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot h = 1,1 + 1,1 \cdot 0,1 = 1,1(1 + 0,1) = (1,1)^2$

$\vdots$

2. Aproximații succesive

$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y^0 \end{cases}$

șirul aprox. succesive $y_{n+1} = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))\,ds$

integrala Volterra $y(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds$

Exemplu:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x_0 = 0,\ y^0 = 1$$

$$y_{n+1} = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))\,ds = 1 + \int_0^x y_n(s)\,ds$$

alegem $y_0(x) = 1$

$$y_1 = 1 + \int_0^x \overset{y_0(s)}{1}\,ds = 1 + s\Big|_0^x = 1 + x$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x y_1(s)\,ds = 1 + \int_0^x (1+s)\,ds =$$

$$= 1 + s\Big|_0^x + \frac{s^2}{2}\Big|_0^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$\vdots$

Ecuații cu var. separabile $y' = f(x) \cdot g(y)$ cu $\frac{dy}{dx}$

Ec. omogene în sens Euler: $y' = g(x,y)$ - cu ±. cu subst. $z = \frac{y}{x}$

$y = zx \Rightarrow y' = z' \cdot x + z$

Ec. liniare: $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$

- ec. omogenă $y' + P(x) \cdot y = 0 \Rightarrow y_0 = C \cdot$ ceva
- ec. particulară: înlocuiești c cu $\varphi(x)$, afli y_p', înlocuiești în ex, afli φ, înlocuiești în y_p

sol. gen. $y = y_0 + y_p$

Ec. de forma $y'' = f(x)$ - integrezi de 2 ori și vei avea două constante

Ec. de forma $y'' = f(x, y')$ - subst. $z(x) = y'(x)$

Ec. liniare cu coef. const. $y'' + ay' + by = f(x)$

- ec. omogenă: $r^2 + ar + b = 0$
  - $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ $(\Delta > 0)$ $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$
  - $r_1 = r_2$ $(\Delta = 0)$ $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = x \cdot e^{r_2 x}$
  - $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ $(\Delta < 0)$ $y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$

  $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$
- ec. particulară
  - $f(x) = P_m(x)$ - $b \neq 0 \Rightarrow y_p = Q_m(x)$
    - $b = 0$ și $a \neq 0 \Rightarrow y_p = x \cdot Q_m(x)$
  - $f(x) = e^{rx} \cdot P_m(x)$ - r nu e răd. a ec. carac. $y_p = e^{rx} \cdot Q_m(x)$
    - r este răd cu ord de multiplicitate μ

      $y_p = x^{\mu} \cdot e^{rx} \cdot Q_m(x)$
  - $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_m(x) \cdot \cos(\beta x)$ (sau $\sin(\beta x)$)
    - $\alpha + i\beta$ nu rad $\Rightarrow y_p = e^{\alpha x} [Q_m(x) \cdot \cos(\beta x) + R_m(x) \cdot \sin(\beta x)]$
    - $\alpha + i\beta$ rad $\Rightarrow y_p = x \cdot$ ——— " ———

dacă $f(x) = f_1(x) + f_2(x) \Rightarrow y_{p1}, y_{p2}$ și $y_p = y_{p1} + y_{p2}$

Sol. gen. $y = y_0 + y_p$

sisteme $\boxed{\begin{cases} y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 & (1) \\ y_2' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 & (2) \end{cases}}$

derivăm ec. (1) și facem sist. cu (1), aflăm y_2 în funcție de y_1 și y_1', înlocuim în asta și obținem ec. cu coef. const. în y_1 (o ec. omogenă) (y_1, y_2 vor fi notate cu ϕ_1 și ϕ_2); înlocuim y_1 și y_1' în ec. lui y_2 și gata

Problema Cauchy / Problema bilocală / alte tipuri
- afli sol. gen. și din cond. inițiale afli constantele

Metoda schimbării de variabilă

Teoremă: Fie două funcții $\varphi : I \to J$ și $f : J \to \mathbb{R}$, cu $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervale. Dacă:

a) φ este derivabilă pe I;

b) f admite primitive pe J (fie F una dintre ele), atunci funcția $(f \circ \varphi) \cdot \varphi' : I \to \mathbb{R}$ admite primitive pe I, iar funcția $F \circ \varphi : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a sa care satisface relația

$$\int (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = (F \circ \varphi)(x) + C, \forall x \in I,$$

numită **formula primei schimbări de variabilă.**

PRIMITIVE UZUALE

Primitivele funcțiilor elementare

1. $\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$.

2. $\int x^a \,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \forall x \in I \subset (0, +\infty), a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

3. $\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, \forall x \in \mathbb{R}, a \neq 1$.

4. $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln |x| + C, \forall x \in I, I \subset (-\infty, 0)$ sau $I \subset (0, +\infty)$.

5. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \forall x \in I, I \subset (-\infty, a)$ sau $I \subset (-a, a)$ sau $I \subset (0, +\infty), a \in \mathbb{R}^*$.