11. 11. 2020

Seminar 6 gr. 312

1. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctele $O(0,0,0)$, $A(2,1,1)$ și $B(3,-2,3)$.

2. Să se scrie ecuația planului determinat de perpendicularele duse din punctul $M_1(-3,2,5)$ pe planele

$$4x+y-3z+13=0 \quad \text{și}$$
$$x-2y+z-11=0.$$

3. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctele $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,2,2)$ și este perpendicular pe planul $x+y-z=0$.

4. Să se scrie ecuația planului care trece prin dreapta de intersecție a planelor

$$\pi_1 : 2x+y-z-2=0$$
$$\pi_2 : x-3y+z+1=0$$

și este perpendicular pe planul

$$\pi_3 : 2x+y+2z=0.$$

(5). Să se verifice că dreptele

$$d_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y-8}{3} = \frac{z-3}{4} \quad \text{și}$$

$$d_2: \frac{4-x}{1} = \frac{9-y}{2} = \frac{9-z}{5} \quad \text{sunt coplanare}$$

și să se scrie ecuația planului determinat de ele.

(6.) Să se scrie ecuația planului determinat de dreptele:

$$d_1: \frac{x}{7} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{5}$$

$$d_2: \frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{5}.$$

(7). Să se găsească ecuațiile perpendicularei duse din punctul $P(4,3,10)$ pe dreapta

$$d): \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$$

precum și simetricul P' al punctului P față de dreapta (d).

(8.) Să se găsească proiecția ortogonală a punctului $P(2,1,1)$ pe planul

$$x+y+3z+5=0.$$

Soluții

1.
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ ecuația planului prin 3 puncte.

În cazul nostru:
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \cdot x - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{5x - 3y - 7z = 0}.$$

2. Vectorii directori ai planului căutat sunt vectorii normali ai planelor date adică $\vec{n}_1(4,1,-3)$ și $\vec{n}_2(1,-2,1)$.

Ecuația planului prin punct și vectori directori este:
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

În cazul nostru: $\begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z-5 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff$

$\iff \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \cdot (x+3) - \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (y-2) + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \cdot (z-5) = 0$

$-5(x+3) - 7(y-2) - 9(z-5) = 0 \quad | \cdot (-1)$

$5(x+3) + 7(y-2) + 9(z-5) = 0 \iff$

$\iff 5x + 7y + 9z - 44 = 0.$

<u>Altă soluție</u>: Ecuația planului prin punctul (x_0, y_0, z_0) și vector normal $\vec{n}(A, B, C)$ este: $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$

adică, în cazul nostru:

$\Pi: A(x+3) + B(y-2) + C(z-5) = 0$

Pe de altă parte, planul Π este perpendicular pe planele date, adică vectorul normal al planului Π este perpendicular pe vectorii normali ai planelor date:

$\vec{n} \perp \vec{n}_1 \iff \vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0 \iff 4 \cdot A + 1 \cdot B - 3 \cdot C = 0$

$\vec{n} \perp \vec{n}_2 \iff \vec{n} \cdot \vec{n}_2 = 0 \iff 1 \cdot A + (-2)B + 1 \cdot C = 0$

Rezultă sistemul: $\begin{cases} 4A + B = 3C & | \cdot 2 \\ A - 2B = -C \end{cases}$

$9A = 5C \iff \boxed{A = \frac{5}{9}C} \Rightarrow \boxed{B = 3C - \frac{20}{9}C = \frac{7}{9}C}$

$\Rightarrow \Pi: \frac{5}{9}C(x+3) + \frac{7}{9}C(y-2) + C(z-5) = 0 \iff$

$$5(x+3)+7(y-2)+9(z-5)=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{5x+7y+9z-44=0.}$$

3. Ecuația planului prin punct și vector normal este:

$$\pi: A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$$

$$P_2 \in \pi \Rightarrow A(2-1)+B(2-1)+C(2-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A+B+C=0$$

Planul π este perpendicular pe planul π_1:

$x+y-z=0$ deci $\vec{n}_{\pi} \perp \vec{n}_{\pi_1} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi} \cdot \vec{n}_{\pi_1}=0$

$$\Leftrightarrow A+B-C=0.$$

Rezultă sistemul $\begin{cases} A+B+C=0 \\ A+B-C=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow A+B=0 \Rightarrow B=-A \text{ și } C=0.$$

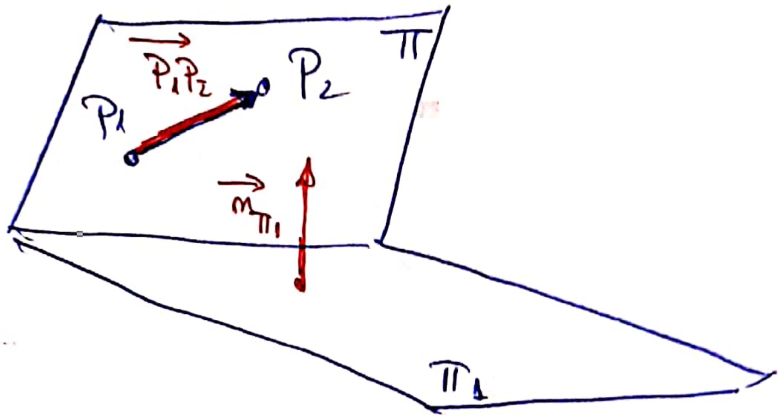
Deci $\pi: A(x-1)-A(y-1)+0\cdot(z-1)=0 \quad |:A$

$$\Rightarrow x-1-y+1=0 \Leftrightarrow \boxed{x-y=0}$$

Sau, altă soluție: Un vector director al planului căutat π este $\overrightarrow{P_1P_2}$ cu componentele $(x_{P_2}-x_{P_1}, y_{P_2}-y_{P_1}, z_{P_2}-z_{P_1}) =$

$$=(2-1, 2-1, 2-1) = (1, 1, 1).$$

Alt vector director al lui π este vectorul normal al planului π_1: $\vec{n}_{\pi_1}(1,1,-1)$.



Deci ecuația planului π este:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}(x-1) - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}(y-1) + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(x-1)+2(y-1)=0 \quad \Big| :(-2)$$

$$x-1-y+1=0 \Leftrightarrow \boxed{x-y=0}.$$

4. Ecuația planelor care conțin dreapta de intersecție a planelor π_1 și π_2 este:

$\pi_\lambda: \pi_1 + \lambda \pi_2 = 0$ <u>fascicul de plane</u>

$$\pi_\lambda: 2x+y-z-2+\lambda(x-3y+z+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2+\lambda)x+(1-3\lambda)y-(1-\lambda)z-2+\lambda=0$$

$$\pi_\lambda \perp \pi_3 \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_\lambda} \perp \vec{n}_{\pi_3} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_\lambda} \cdot \vec{n}_{\pi_3} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \big((2+\lambda), (1-3\lambda), -(1-\lambda)\big)\cdot(2,1,2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cdot(2+\lambda) + 1(1-3\lambda) - 2(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4+1-2 + 2\lambda - 3\lambda + 2\lambda = 0$

$\Leftrightarrow \lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3$

$\Rightarrow \Pi_{-3} : -x + 10y - 4z - 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Pi_{-3} : \boxed{x - 10y + 4z + 5 = 0}$

5. Dreapta d_1 trece prin punctul $M_1(3,8,3)$ și are vector director $\vec{d_1}(1,3,4)$.

Dreapta d_2 trece prin punctul $M_2(4,9,9)$ și are vector director $\vec{d_2}(1,2,5)$.

Condiția de coplanaritate dintre ~~aces~~ două drepte este:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

(adică $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{d_1}, \vec{d_2}) = 0$).

În cazul nostru:

$$\begin{vmatrix} 4-3 & 9-8 & 9-3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2+2=0 \ \#.$$

Ecuația planului determinat de cele două drepte este:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-8 & z-3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \cdot (x-3) - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \cdot (y-8) + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 7(x-3) - (y-8) - (z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{7x - y - z - 10 = 0}$$

6. Dreptele d_1 și d_2 sunt paralele ($\vec{d_1} = \vec{d_2}$)

Formăm un vector director al planului cu punctele $M_1(0,-2,1) \in d_1$ și

$M_2(1,3,-2) \in d_2$:

$\overrightarrow{M_1M_2}(1-0,\ 3-(-2),\ -2-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2}(1,5,-3)$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y+2 & z-1 \\ 1 & 5 & -3 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \cdot x - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} (y+2) + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \cdot (z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 34x - 26\cdot(y+2) - 32(z-1) = 0 \quad |:2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{17x - 13y - 16z - 10 = 0}.$$

(7) Ecuația planului care trece prin P și este perpendicular pe d este

$$2(x-4) + 4(y-3) + 5(z-10) = 0$$

$\Leftrightarrow \boxed{2x + 4y + 5z - 70 = 0}$. Intersectăm acest plan cu dreapta d:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5} = t$$

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} x &= 2t+1 \\ y &= 4t+2 \\ z &= 5t+3 \end{aligned}\right\} \text{ ecuațiile parametrice ale dreptei} \\ 2x + 4y + 5z - 70 = 0 \end{cases}$$

$$4t + 16t + 25t + 2 + 8 + 15 - 70 = 0$$

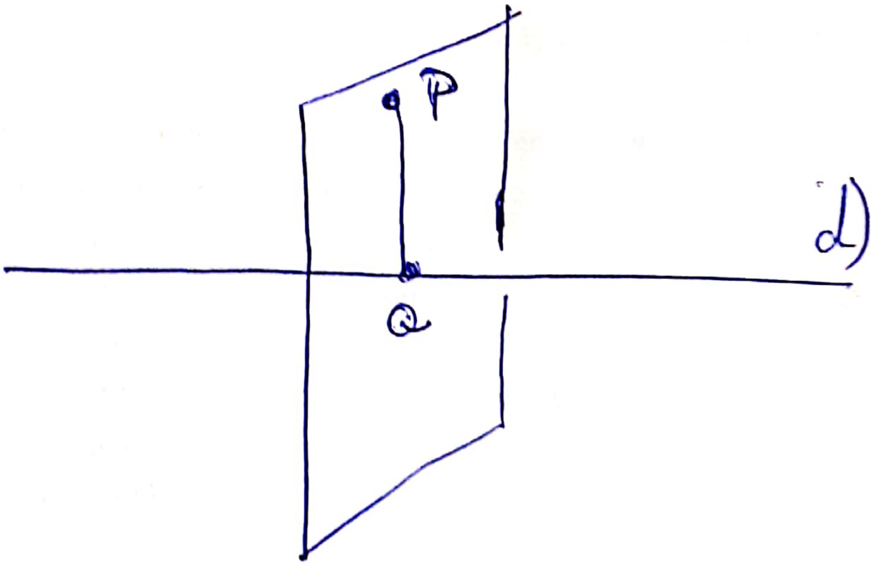
$$45t - 45 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$Q(3,6,8)$ este punctul în care perpendiculara din P ~~la~~ pe dreapta d) intersectează dreapta.

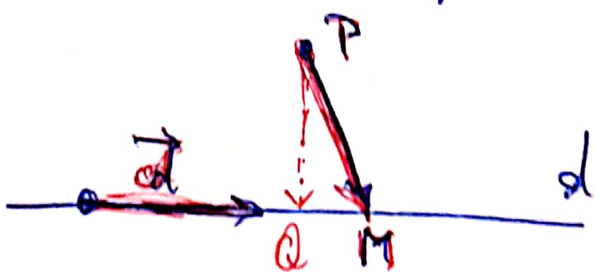
Dreapta căutată este PQ:

$$\frac{x-4}{3-4}=\frac{y-3}{6-3}=\frac{z-10}{8-10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{x-4}{-1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-10}{-2}}$$



Altfel: Luăm un punct oarecare M de pe dreapta d) și punem condiția ca $\vec{PM}\perp\vec{d}$.



$M(2t+1, 4t+2, 5t+3)$ din ecuațiile parametrice ale dreptei:

$\vec{PM}(2t+1-4,\ 4t+2-3,\ 5t+3-10)$

$\vec{PM}(2t-3,\ 4t-1,\ 5t-7)$.

$\vec{PM}\perp\vec{d} \Leftrightarrow \vec{PM}\cdot\vec{d}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 2(2t-3)+4(4t-1)+5(5t-7)=0$

$\Leftrightarrow \quad 4t+16t+25t-6-4-35=0$

$\Leftrightarrow \quad 45t-45=0 \quad \Rightarrow t=1$

$\Rightarrow Q(3,6,8)$ și continuarea este la fel.

8