CURS 2

Clase de ecuații dif. de ord. 1 rezolvabile

1) Ecuații cu variabile separabile

forma generală: $\boxed{y' = f(x) \cdot g(y)}$ (1) f, g cont, $g \neq 0$.

$y = y(x) \Rightarrow dy = y'(x) \cdot dx \Rightarrow y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int \frac{dy}{g(y)}}_{} = \underbrace{\int f(x) \cdot dx}_{F(x)} + c.$$

$$\boxed{G(y) = F(x) + c, \ c \in \mathbb{R}}$$ soluția generală în formă implicită

$$\boxed{y(x) = G^{-1}(F(x) + c), \ c \in \mathbb{R}}$$ soluția generală în formă explicită

Obs. Dacă $\exists\, y_0 \in \mathbb{R}$ ai $g(y_0)=0$ atunci funcția const. $y(x)\equiv y_0$ esti soluție a ec. (1), numită soluție singulară.

2) Ecuații omogene în sens Euler

$$y' = f(x,y)$$

unde f esti omogenă de grad 0 în raport cu ambele variab.

(f esti omogenă de grad $k \Leftrightarrow f(tx,ty) = t^k \cdot f(x,y)$

f omogenă de grad 0 $\Leftrightarrow f(tx,ty) = f(x,y)$)

$$y' = f(x,y) \Rightarrow \boxed{y' = F\left(\frac{y}{x}\right)} \quad (2)$$

subst $z = \frac{y}{x}$ $\quad z(x) = \frac{y(x)}{x} \Rightarrow \boxed{y(x) = x \cdot z(x)}$

$$\Rightarrow \boxed{y'(x) = z(x) + x \cdot z'(x)}$$

$(2) \Rightarrow z + x \cdot z' = f(z)$

$$(3) \quad \boxed{z' = \frac{1}{x} \cdot \left(f(z) - z \right)}$$ ec. cu variab. sep.

- dacă $\exists z_0 \in \mathbb{R}$ a.î. $f(z_0) - z_0 = 0 \Rightarrow z(x) \equiv z_0$ sol. sing. pt (3).

  $\Rightarrow y(x) = z_0 \cdot x$ sol. sing pt (2).

- dacă $z(x) = \varphi(x, c)$ sol. în formă expl. pt (3).

  $y = x \cdot z \quad \Rightarrow y(x) = x \cdot \varphi(x, c)$ sol. în formă expl. pt (2)

- dacă $\Phi(x, z, c) = 0$ sol în formă implicită pt (3)

  $\Rightarrow \Phi(x, \frac{y}{x}, c) = 0$ sol. în formă implicită pt (2).

3) Ecuații liniare de ord. 1

forma generală: $\boxed{y' + P(x)\cdot y = Q(x)}$ P, Q fct. cont.

I Metoda factorului integrant

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x) \quad \Big| \cdot \rho(x)$$

ρ - factor integrant

$$(\qquad)' = \rho(x)\cdot Q(x)$$

$$\boxed{\rho(x) = e^{\int P(x)dx}}$$

$$y'\cdot e^{\int P(x)dx} + P(x)\cdot e^{\int P(x)dx}\cdot y = Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}$$

$$\left(e^{\int P(x)dx}\right)' = e^{\int P(x)dx}\cdot P(x)$$

$$\left(y\cdot e^{\int P(x)dx}\right)' = Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}$$

$$y\cdot e^{\int P(x)dx} = \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}\cdot dx + c$$

$$\boxed{y(x) = e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\right) + c\cdot e^{-\int P(x)dx}}$$

II Tehnica operatorilor liniari

$y' + P(x)y = Q(x)$ ec. liniară neomogenă

$y' + P(x)\cdot y = 0$ ec. liniară omogenă

$L : C^1(I) \to C(I)$

$y \mapsto Ly = y' + P(x)\cdot y$ op. liniar.

$\left(L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \cdot Ly_1 + \beta \cdot Ly_2 \right)$

ec. omogenă : $Ly = 0 \Rightarrow S_0 = \ker L = \{ y \in C^1(I) \mid Ly = 0 \}$.

ec. neomogenă : $Ly = Q \Rightarrow S = S_0 + \{y_p\}$

y_p este o sol. partic. a ec. $Ly = Q$.

ec. liniară omogenă:

$y' + P(x)\cdot y = 0 \Rightarrow y' = -P(x)\cdot y$ ec. cu var. sep.

$y \equiv 0$ sol. sing.

$$\frac{dy}{dx} = -P(x) \cdot y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x) \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int P(x)\,dx + \ln c$$

$$\ln y = -\int P(x)\,dx + \ln c$$

$$\boxed{y_0(x) = c \cdot e^{-\int P(x)dx}, c \in \mathbb{R}}$$

$y_p(x) = ?$ y_p se det. prin metoda variației const.

căutăm $y_p(x) = \underline{c(x)} \cdot e^{-\int P(x)dx}$

$$y_p' + P(x) \cdot y_p = Q(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} + \cancel{c(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}} \cdot (-P(x)) + \cancel{P(x) \cdot c(x) e^{-\int P(x)dx}} =$$

$$= Q(x)$$

$$\Rightarrow c'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$c'(x) = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \Rightarrow c(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dy} dy$$

$$\Rightarrow y_p = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx \right)$$

sol. gen: $\boxed{y = y_0 + y_p}$

$$\boxed{y(x) = c \cdot e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx \right)}$$

4) Ecuații de tip Bernoulli

forma generală: (5) $\boxed{y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^{\alpha}}$ unde $\alpha \neq \{0, 1\}$

- dacă $\alpha = 0 \Rightarrow y' + P(x) y = Q(x)$ ec. lin. neomog.
- dacă $\alpha = 1 \Rightarrow y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y$

$y' + (P(x) - Q(x)) \cdot y = 0$ ec. liniară omogenă subst.: $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow \boxed{y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}}$

$$y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow y' = \frac{1}{1-\alpha} \cdot z^{\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1-\alpha}{1-\alpha}} \cdot z' = \frac{1}{1-\alpha} \cdot z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot z'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha} \cdot z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot z' + P(x) \cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}} = Q(x) \cdot z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \Big| \cdot (1-\alpha) \cdot z^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow z' + (1-\alpha) \cdot P(x) \cdot z^{\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha}} = (1-\alpha) \cdot Q(x)$$

$$\frac{1-\alpha}{1-\alpha} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{z' + (1-\alpha) \cdot P(x) \cdot z = (1-\alpha) \cdot Q(x)}$$ ec. liniară neomogenă.

$$\Rightarrow z = z_0 + z_p$$

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow \boxed{y(x) = \left(z_0(x) + z_p(x)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

5) Ecuații cu diferențială totală exactă

forma generală:

$$(6) \quad \boxed{g(x,y) + h(x,y)\cdot y' = 0}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow g(x,y) + h(x,y)\cdot\frac{dy}{dx} = 0 \;\Big|\cdot dx$$

$$(6') \quad \boxed{g(x,y)\cdot dx + h(x,y)\cdot dy = 0}$$

$$u = u(x,y) \Rightarrow du = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)}_{g(x,y)}\cdot dx + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)}_{h(x,y)}\cdot dy$$

Spunem că ec. (6') este o ec. cu diferențială totală exactă dacă $\exists u = u(x,y)$ a.î.

$$du = g(x,y)dx + h(x,y)dy$$

$(6') \Leftrightarrow \quad du = 0 \Leftrightarrow \boxed{u(x,y) = c,\ c \in \mathbb{R}}$ sol. gen. în formă implicită

condiția de diferențială totală exactă:

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)} \quad \forall (x,y)$$

$u(x,y)$ se det. din

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = g(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = h(x,y) \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g(x,y) \Rightarrow \boxed{u(x,y) = \int_{x_0}^{x} g(s,y)\,ds + \underline{\underline{c(y)}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = h(x,y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{\partial g}{\partial y}(s,y)\,ds + c'(y) = h(x,y)$$

$x = x_0 \Rightarrow c'(y) = h(x_0, y) \Rightarrow c(y) = \int_{y_0}^{y} h(x_0, t)\,dt$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = \int_{x_0}^{x} g(s,y)\,ds + \int_{y_0}^{y} h(x_0,t)\,dt .}$$

sau:

$$\boxed{u(x,y) = \int_{y_0}^{y} h(x,t)\,dt + \int_{x_0}^{x} g(s,y_0)\,ds .}$$

<u>Obs</u>. Nu întotdeauna expresia $g(x,y).dx + h(x,y).dy$ provine din diferențiala unei funcții $u = u(x,y)$

Metoda factorului integrant

Spunem că $\rho=\rho(x,y)$ este factor integrant pt ecuația (6')
$g\cdot dx+h\cdot dy=0 \iff \rho\cdot g\cdot dx+\rho\cdot h\cdot dy=0$ este o ec. cu diferențială totală exactă $\iff$

$$\iff \boxed{\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho(x,y)\cdot g(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho(x,y)\cdot h(x,y)\right)}$$

ecuația factorului integrant.