Seminar 5

Sisteme dinamice generate de ecuaţii diferenţiale autonome

O ecuaţie diferenţială se numeşte *ecuaţie autonomă* dacă variabila funcţiei necunoscute nu apare în mod explicit în expresia ecuaţiei diferenţiale (funcţia f nu depinde explicit de variabila t), adică aceasta este de forma:

$$x'(t) = f(x(t)). \tag{5.1}$$

5.1 Fluxul generat de o ecuaţie diferenţială autonomă. Portret fazic

Se consideră ecuaţia autonomă (5.1). Avem următorul rezultat:

Teorema 5.1.1 *Dacă $f \in C^1(\mathbb{R})$ atunci problema Cauchy:*

$$\begin{cases} x' = & f(x) \\ x(0) = & \eta \end{cases} \tag{5.2}$$

are o unică soluţie saturată pentru orice $\eta \in \mathbb{R}$.

Printr-o *soluţie saturată* a unei ecuaţii diferenţiale înţelegem o soluţie definită pe cel mai mare interval posibil. Notăm prin $x(t,\eta)$ unica soluţie a problemei Cauchy (5.2), astfel soluţia

$$x(\cdot,\eta) : I_\eta \to \mathbb{R},$$

unde intervalul I_η este maximal (în general, intervalul maximal depinde de alegerea valorii η). Din Teorema de comportare la frontieră a soluţiilor saturate avem că interval maximal I_η este un interval deschis de forma:

$$I_\eta = \left(\alpha_\eta, \beta_\eta\right),$$

(valorile α_η, β_η putând fi valori finite sau infinite) şi pentru ca problema Cauchy (5.2) să fie bine definită trebuie ca $0 \in I_\eta$ ceea ce implică relaţia

$$\alpha_\eta < 0 < \beta_\eta.$$

Fluxul φ generat de ecuaţia (5.1) este soluţia saturată a problemei Cauchy (5.2) şi se defineşte în următorul mod:

$$\varphi : W \to \mathbb{R}$$

$$\varphi(t,\eta) = x(t,\eta)$$

unde mulţimea W este definită de

$$W = \{I_\eta \times \{\eta\} : \ \eta \in \mathbb{R}\}.$$

Dacă $I_\eta = \mathbb{R}$ atunci $W = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Pentru orice t fixat putem defini operatorul

$$\eta \longmapsto \varphi(t,\eta),$$

acest operator se numeşte *sistemul dinamic* generat de ecuaţia (5.1).

Proprietăţi:

1. $\varphi(0,\eta) = \eta$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$;
2. $\varphi(t+s,\eta) = \varphi(t+s,\varphi(s,\eta))$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$, $\forall t, \eta \in I_\eta$;
3. φ este continuu în raport cu η.

Definiţia 5.1.1 *Pentru $\eta \in \mathbb{R}$ fixat avem mulţimile:*

$$\gamma^+(\eta) = \bigcup_{t\in[0,\beta_\eta)} \varphi(t,\eta) - \textit{se numeşte orbita pozitivă a lui } \eta,$$

$$\gamma^-(\eta) = \bigcup_{t\in(\alpha_\eta,0]} \varphi(t,\eta) - \textit{se numeşte orbita negativă a lui } \eta,$$

$$\gamma(\eta) = \gamma^+(\eta) \cup \gamma^-(\eta) - \textit{se numeşte orbita a lui } \eta.$$

Definiţia 5.1.2 *Reuniunea tuturor orbitelor împreună cu sensul de parcurgere al acestora formează portretul fazic generat de ecuaţia (5.1).*

Exerciţiul 5.1.1 *Să se determine fluxul şi portretul fazic (pe baza definiţiei) pentru următoarele ecuaţii:*

(a) $x' = x + 1$

(b) $x' = 2x + 1$

(c) $x' = x^2$

(Indicaţie: Pentru rezolvare a se vedea Exemplele 7.1.1 şi 7.1.2 din Cursul 7)

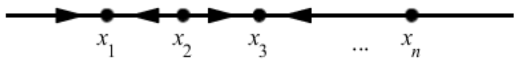
Portretul fazic poate fi obţinut direct din analiza semnului funcţiei $f(x)$. Mai întâi rezolvăm ecuaţia

$$f(x) = 0.$$

Fie $x_1, \ldots, x_n$ soluţiile reale ale acestei ecuaţii în ordine crescătoare. Construim tabelul cu semnul funcţiei f

x	$-\infty$	$\ldots$	x_1		x_2		x_3		$\ldots$	x_n
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\ldots$	0
		$\longrightarrow$		$\longleftarrow$		$\longrightarrow$		$\longleftarrow$		

Astfel orbitele sunt determinate de punctele $x_1, \ldots, x_n$, adică vor fi intervalele $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, x_n), $(x_n, +\infty)$ cu sensul de parcurgere crescător dacă semnul funcţiei f este pozitiv, respectiv cu sens de parcurgere descrescător dacă semnul funcţiei f este negativ, la care se vor adauga punctele $\{x_1\}$, ..., $\{x_n\}$.



Portretul fazic generat de ecuaţia $x' = f(x)$.

5.2 Puncte de echilibru. Stabilitate

Fie ecuaţia autonomă (5.1)

$$x' = f(x).$$

Definiţia 5.2.1 *Soluţiile constante*

$$x(t) \equiv x^*$$

ale ecuaţiei (5.1) se numesc soluţii de echilibru sau soluţii staţionare.

Valoarea $x^* \in \mathbb{R}$ se numeşte punct de echilibru sau punct staţionar.

Se observă că dacă $x(t) \equiv x^*$ este o soluţie de echilibru a ecuaţiei autonome (5.1) atunci $x^* \in \mathbb{R}$ este soluţie a ecuaţiei

$$f(x) = 0 \tag{5.3}$$

sau cu alte cuvinte, rădăcinile reale ale funcţiei f sunt puncte de echilibru.

În studiul ecuaţiilor autonome este important studiul proprietăţilor de stabilitate a punctelor de echilibru. Avem următoarele noţiuni de stabilitate:

Definiţia 5.2.2 *Fie $x^* \in \mathbb{R}$ un punct de echilibru al ecuaţiei autonome (5.1). Spunem că punctul de echilibru x^* este:*

(a) *local stabil dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât dacă $|\eta - x^*| < \delta$ atunci*

$$|\varphi(t, \eta) - x^*| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0,$$

unde $\varphi(t, \eta)$ este fluxul generat de (5.1).

(b) *local asimptotic stabil dacă este local stabil şi în plus există $r > 0$ astfel încât dacă $|\eta - x^*| < r$ atunci*

$$|\varphi(t, \eta) - x^*| \to 0, \quad \textit{pentru } t \to +\infty,$$

unde $\varphi(t, \eta)$ este fluxul generat de (5.1).

(c) *instabil dacă nu este local stabil.*

Stabilitatea punctelor de echilibru poate fi studiată folosind două metode:
1. Metoda portretului fazic
2. Metoda liniarizării (metoda primei aproximaţii)

Metoda portretului fazic

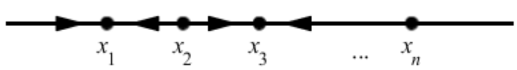
Portretul fazic poate fi obţinut direct din analiza semnului funcţiei $f(x)$. Mai întâi rezolvăm ecuaţia

$$f(x) = 0.$$

Fie $x_1, \ldots, x_n$ soluţiile reale ale acestei ecuaţii în ordine crescătoare. Construim tabelul cu semnul funcţiei f

x	$-\infty$	$\ldots$	x_1		x_2		x_3		$\ldots$	x_n
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\ldots$	0
		$\longrightarrow$		$\longleftarrow$		$\longrightarrow$		$\longleftarrow$		

Astfel orbitele sunt determinate de punctele $x_1, \ldots, x_n$, adică vor fi intervalele $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, x_n), $(x_n, +\infty)$ cu sensul de parcurgere crescător dacă semnul funcţiei f este pozitiv, respectiv cu sens de parcurgere descrescător dacă semnul funcţiei f este negativ, la care se vor adauga punctele $\{x_1\}$, ..., $\{x_n\}$.

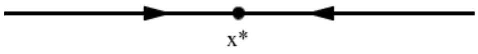


Portretul fazic generat de ecuaţia $x' = f(x)$.

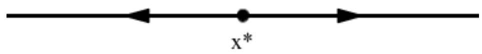
Prin analiza portretului putem determina stabilitatea soluţiilor de echilibru în felul următor:

- dacă sensul de parcurgere al orbitelor din vecinătatea punctului de echilibru este către acesta atunci punctul de echilibru este local asimptotic stabil

- dacă sensul de parcurgere al orbitelor din vecinătatea punctului de echilibru este dinspre acesta atunci punctul de echilibru este instabil



Punct de echilibru local asimptotic stabil



Punct de echilibru instabil

Metoda liniarizării (metoda primei aproximaţii)

Metoda liniarizării este dată de următorul criteriu de stabilitate cunoscut sub numele de criteriul stabilităţii în primă aproximaţie sau criteriul stabilităţii liniarizate (vezi Cursul 7 pentru explicaţii):

Teorema 5.2.1 (Criteriul de stabilitate în primă aproximaţie) *Fie ecuaţia autonomă (5.1) şi* $x^* \in \mathbb{R}$ *un punct de echilibru corespunzător pentru care există* $f'(x^*)$*. Atunci:*

(a) Dacă $f'(x^*) < 0$ *atunci punctul de echilibru* x^* *este local asimptotic stabil.*

(b) Dacă $f'(x^*) > 0$ *atunci punctul de echilibru* x^* *este instabil.*

Exerciţiul 5.2.1 *Să se determine punctele de echilibru şi să se studieze stabilitatea acestora (atât prin metoda portretului fazic determinat pe baza semnului funcţiei* f *cât şi prin metoda stabilităţii în primă aproximaţie) pentru ecuaţiile:*

(a) $x' = -2x$

(b) $x' = 2 + x$

(c) $x' = x - x^2$

(d) $x' = x(x+1)(2-x)$

(e) $x' = \sin(x)$

Indicaţie: *pentru rezolvare a se vedea (din Cursul 7) Exemplul 7.1.3 pentru determinarea portretului fazic pe baza semnului funcţiei* f*, Exemplul 7.2.4 pentru determinarea stabilităţii punctelor de echilibru pe baza portretului fazic şi Exemplul 7.2.5 pentru determinarea stabilităţii punctelor de echilibru pe baza criteriului de stabilitate în primă aproximaţie.*