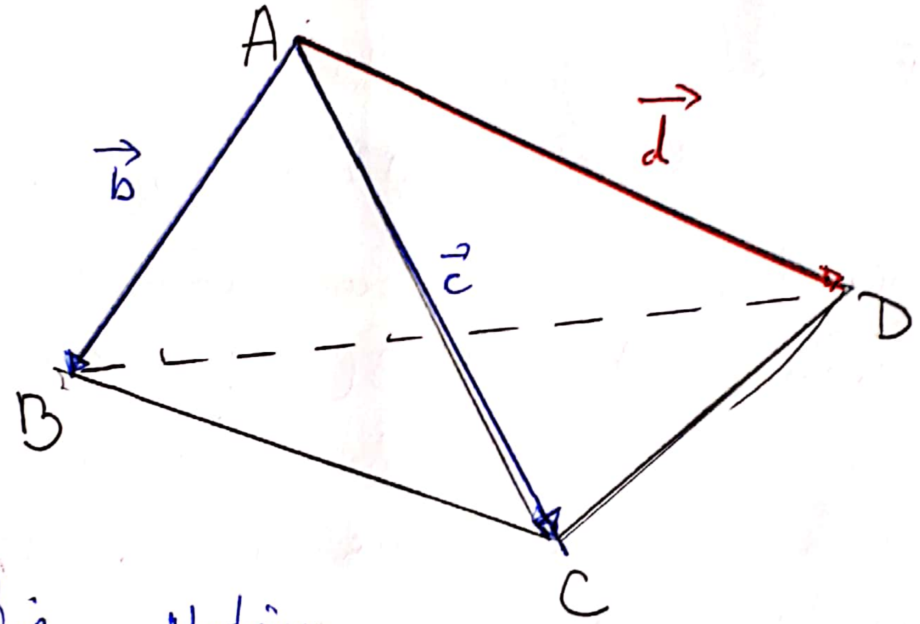
Seminar 5

Aplicații ale produsului scalar

1. Fie $ABCD$ un tetraedru. Dacă $AB \perp CD$ și $AC \perp BD$ atunci $AD \perp BC$.



Soluție Notăm

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$.

$AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{b} \cdot (\vec{d} - \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ (1)

$AC \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{c} \cdot (\vec{d} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{c} \cdot \vec{b}$ (2)

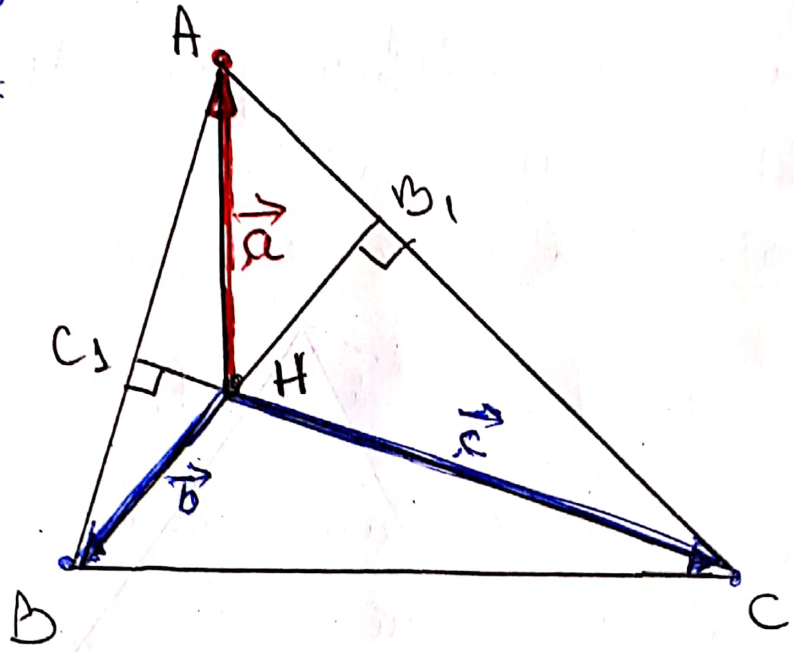
Din (1) și (2) $\Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{c} \cdot \vec{d} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{b} \cdot \vec{d} - \vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \Leftrightarrow (\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{d} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow CB \perp AD \Leftrightarrow AD \perp BC$ #

2. Să se demonstreze că înălțimile unui triunghi oarecare sunt concurente.

Soluție



Fie H punctul de intersecție al înălțimilor din B și C. Vom demonstra că $AH \perp BC$, ceea ce este echivalent cu afirmația: „înălțimea din A trece și ea prin H".

Notăm $\overrightarrow{HA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{HB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{HC} = \vec{c}$.

$BB_1 \perp CA \Leftrightarrow HB \perp CA \Leftrightarrow \overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \Leftrightarrow \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ (1)

$CC_1 \perp AB \Leftrightarrow HC \perp AB \Leftrightarrow \overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{c} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{a}$ (2)

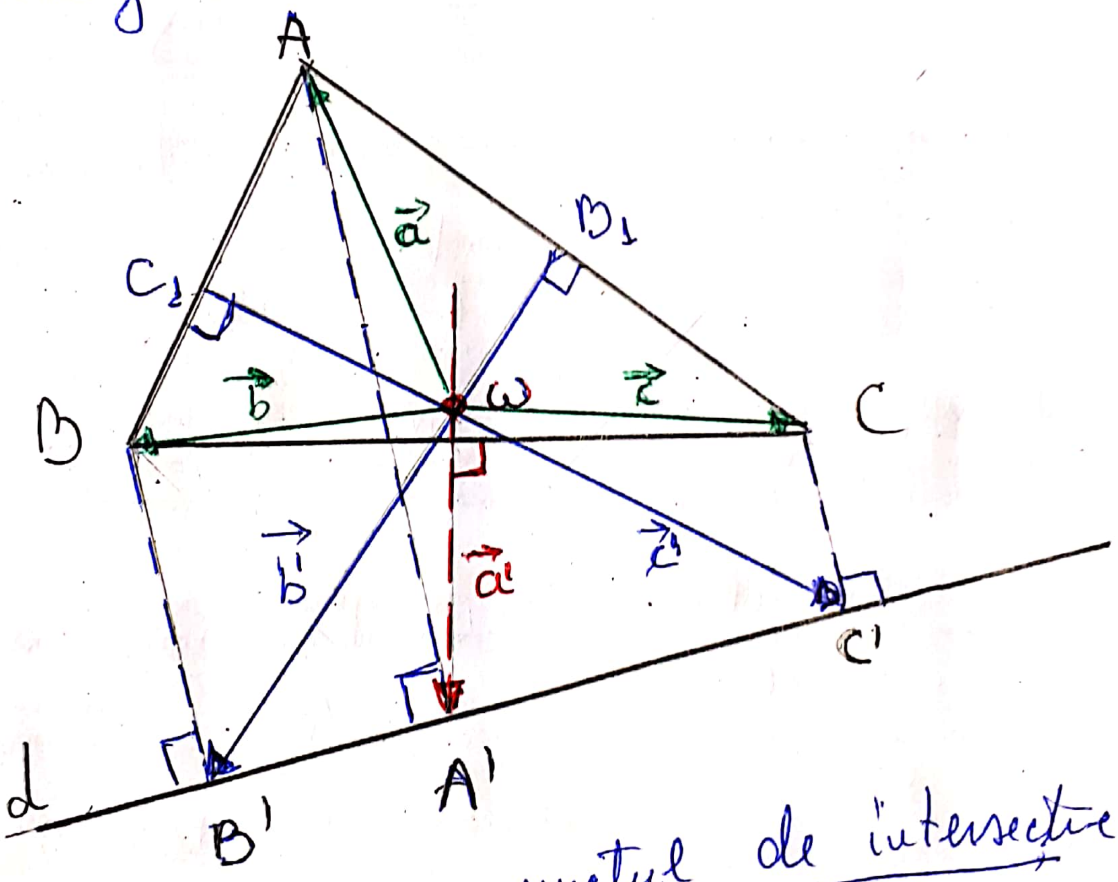
Din (1) și (2) $\Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \Leftrightarrow (\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{a} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{HA} = 0 \Leftrightarrow CB \perp HA \Rightarrow AH \perp BC$

#

3. Teorema ortopolului

Fie ABC un triunghi oarecare și d o dreaptă. Se proiectează vârfurile A, B, C pe dreapta d în punctele A', B', C'. Să se demonstreze că perpendicularele din A', B', C' pe laturile BC, CA, AB sunt concurente într-un punct ω numit ortopolul dreptei d față de triunghiul ABC.



Soluție Fie ω punctul de intersecție al perpendicularelor din B' și C' pe CA respectiv AB.

Vom demonstra că $\omega A' \perp BC$ ceea ce este echivalent cu faptul că și perpendiculara din A' pe BC trece prin ω.

Notăm $\overrightarrow{\omega A} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\omega B} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\omega C} = \vec{c}$, $\overrightarrow{\omega A'} = \vec{a'}$, $\overrightarrow{\omega B'} = \vec{b'}$, $\overrightarrow{\omega C'} = \vec{c'}$.

Avem:

$$AA' \perp d \iff AA' \perp B'C' \iff \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{B'C'} \iff$$
$$\iff \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{B'C'} = 0 \iff (\vec{a'} - \vec{a}) \cdot (\vec{c'} - \vec{b'}) = 0 \iff$$
$$\iff \boxed{\vec{a'} \cdot \vec{c'} - \vec{a'} \cdot \vec{b'} - \vec{a} \cdot \vec{c'} + \vec{a} \cdot \vec{b'} = 0} \quad (1)$$

$$BB' \perp d \iff BB' \perp C'A' \iff \overrightarrow{BB'} \perp \overrightarrow{C'A'} \iff$$
$$\iff \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{C'A'} = 0 \iff (\vec{b'} - \vec{b}) \cdot (\vec{a'} - \vec{c'}) = 0 \iff$$
$$\iff \boxed{\vec{b'} \cdot \vec{a'} - \vec{b'} \cdot \vec{c'} - \vec{b} \cdot \vec{a'} + \vec{b} \cdot \vec{c'} = 0} \quad (2)$$

$$CC' \perp d \iff CC' \perp A'B' \iff \overrightarrow{CC'} \perp \overrightarrow{A'B'} \iff$$
$$\iff \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{A'B'} = 0 \iff (\vec{c'} - \vec{c}) \cdot (\vec{b'} - \vec{a'}) = 0 \iff$$
$$\iff \boxed{\vec{c'} \cdot \vec{b'} - \vec{c'} \cdot \vec{a'} - \vec{c} \cdot \vec{b'} + \vec{c} \cdot \vec{a'} = 0} \quad (3)$$

Adunând membru cu membru relațiile (1), (2) și (3) obținem

$$-\vec{a} \cdot \vec{c'} + \vec{a} \cdot \vec{b'} - \vec{b} \cdot \vec{a'} + \vec{b} \cdot \vec{c'} - \vec{c} \cdot \vec{b'} + \vec{c} \cdot \vec{a'} = 0 \iff$$
$$\iff \boxed{\vec{a'} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) + \vec{b'} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) + \vec{c'} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0} \quad (4)$$

Pe de altă parte avem:

$\omega B' \perp CA \Leftrightarrow \overrightarrow{\omega B'} \perp \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{\omega B'} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\vec{b'} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0}$ (5)

$\omega C' \perp AB \Leftrightarrow \overrightarrow{\omega C'} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{\omega C'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\vec{c'} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0}$ (6)

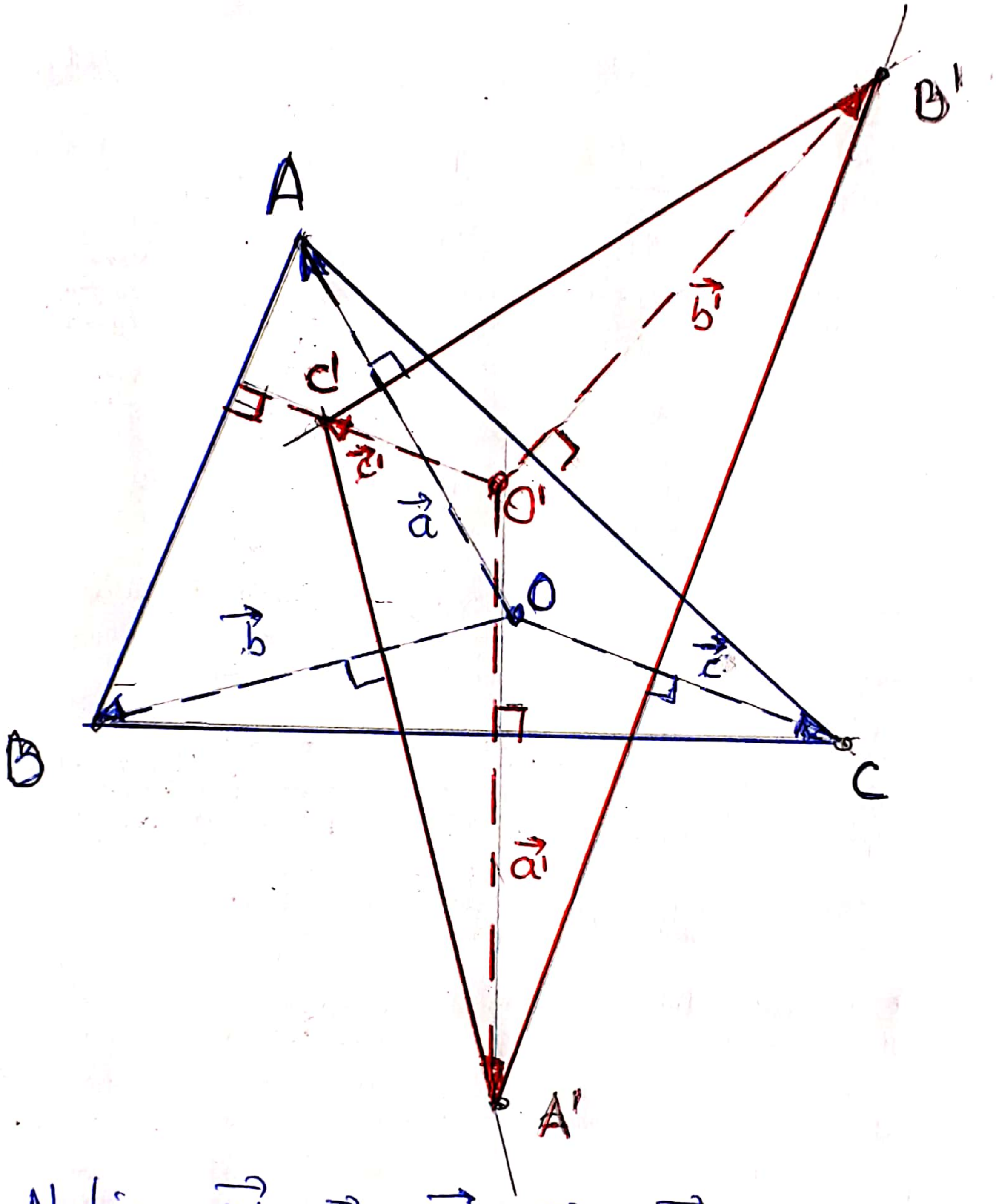
Din (4), (5) și (6) rezultă

$\vec{a'} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\omega A'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \omega A' \perp BC.$ #

4. Teorema triunghiurilor ortologice

Fie ABC și A'B'C' două triunghiuri situate în același plan. Să se demonstreze că dacă perpendicularele din A, B și C pe laturile B'C', C'A' și A'B' sunt concurente atunci și perpendicularele din A', B' și C' pe laturile BC, CA și AB sunt concurente.

Soluție Notăm cu O punctul de intersecție al perpendicularelor din A, B și C pe B'C', C'A' și A'B' și cu O' punctul de intersecție al perpendicularelor din B' și C' pe laturile CA și AB. Vom arăta că O'A' ⊥ BC ceea ce este echivalent cu faptul că și perpendiculara din A' pe BC trece prin O'.



Notăm $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$,
$\overrightarrow{O'A'} = \vec{a'}$, $\overrightarrow{O'B'} = \vec{b'}$, $\overrightarrow{O'C'} = \vec{c'}$.

Scanned with CamScanner

Avem:

$OA \perp B'C' \iff \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{B'C'} \iff \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{B'C'} = 0 \iff$

$\iff \vec{a} \cdot (\vec{c'} - \vec{b'}) = 0 \iff \boxed{\vec{a} \cdot \vec{c'} = \vec{a} \cdot \vec{b'}}$ (1)

$OB \perp C'A' \iff \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{C'A'} \iff \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{C'A'} = 0 \iff$

$\iff \vec{b} \cdot (\vec{a'} - \vec{c'}) = 0 \iff \boxed{\vec{b} \cdot \vec{a'} = \vec{b} \cdot \vec{c'}}$ (2)

$OC \perp A'B' \iff \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{A'B'} \iff \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{A'B'} = 0 \iff$

$\iff \vec{c} \cdot (\vec{b'} - \vec{a'}) = 0 \iff \boxed{\vec{c} \cdot \vec{b'} = \vec{c} \cdot \vec{a'}}$ (3)

$O'B' \perp CA \iff \overrightarrow{O'B'} \perp \overrightarrow{CA} \iff \overrightarrow{O'B'} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \iff$

$\iff \vec{b'} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0 \iff \boxed{\vec{b'} \cdot \vec{a} = \vec{b'} \cdot \vec{c}}$ (4)

$O'C' \perp AB \iff \overrightarrow{O'C'} \perp \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{O'C'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \iff$

$\iff \vec{c'} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \iff \boxed{\vec{c'} \cdot \vec{b} = \vec{c'} \cdot \vec{a}}$ (5)

Adunând (1), (2), (3), (4) și (5) membru cu membru, obținem

$\vec{b} \cdot \vec{a'} = \vec{c} \cdot \vec{a'} \iff \vec{b} \cdot \vec{a'} - \vec{c} \cdot \vec{a'} = 0 \iff$

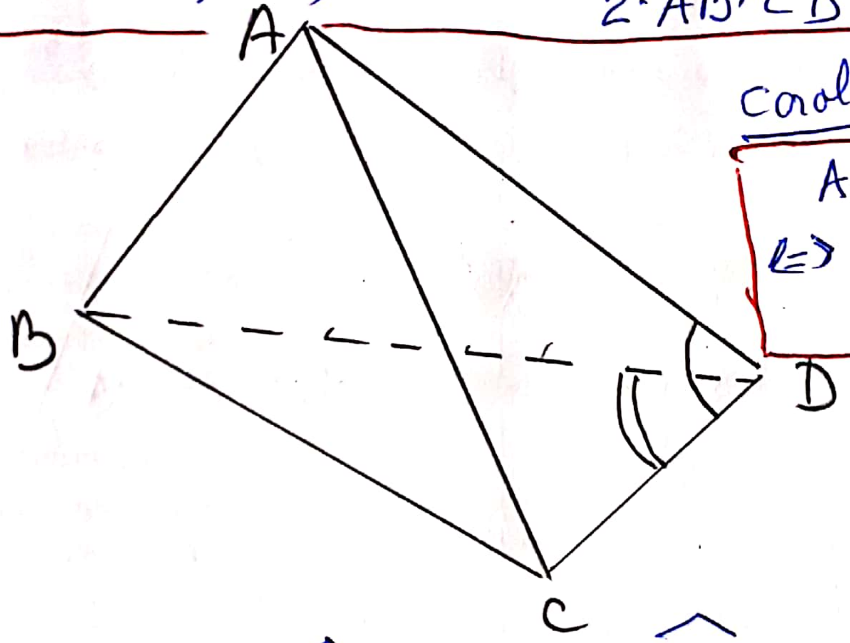
$\iff (\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{a'} = 0 \iff \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{O'A'} = 0 \iff$

$\iff \overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{O'A'} \iff O'A' \perp BC.$ #

5. Teorema cosinusului în tetraedru.

Fie $ABCD$ un tetraedru. Atunci are loc relația

$$\boxed{\cos(\widehat{AB, CD}) = \frac{AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2}{2 \cdot AB \cdot CD}}.$$



Corolar

$$\boxed{\begin{gathered} AB \perp CD \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow AD^2 + BC^2 = \\ AC^2 + BD^2. \end{gathered}}$$

Dem

$$\cos(\widehat{AB, CD}) = \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) \xlongequal[\text{scalar}]{\text{def. prod.}}$$

$$= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{AB \cdot CD} = \frac{(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \cdot \overrightarrow{CD}}{AB \cdot CD} = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}}{AB \cdot CD} =$$

$$= \frac{AD \cdot CD \cdot \cos \widehat{ADC} - DB \cdot DC \cos \widehat{BDC}}{AB \cdot CD} =$$

$$= \frac{\cancel{AD \cdot CD} \cdot \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2\, \cancel{AD \cdot CD}} - \cancel{DB \cdot DC} \cdot \frac{DB^2 + DC^2 - BC^2}{2\, \cancel{DB \cdot DC}}}{AB \cdot CD} =$$

$$= \frac{AD^2 \cancel{+ CD^2} - AC^2 - DB^2 \cancel{- DC^2} + BC^2}{2 AB \cdot CD} \#$$

Scanned with CamScanner

Relații metrice

1. Să se demonstreze că $\boxed{OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)}$

<u>Demonstrație.</u>

$$OH^2 = \vec{OH}\cdot\vec{OH} = (\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})\cdot(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}) =$$

$$= \vec{OA}\cdot\vec{OA} + \vec{OB}\cdot\vec{OB} + \vec{OC}\cdot\vec{OC} +$$

$$+2(\vec{OA}\cdot\vec{OB} + \vec{OB}\cdot\vec{OC} + \vec{OC}\cdot\vec{OA}) =$$

$$= OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2(OA\cdot OB\cdot\cos 2C + OB\cdot OC\cos 2A +$$

$$+ OC\cdot OA\cos 2B) =$$

$$= 3R^2 + 2R^2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) =$$

$$= 3R^2 + 2R^2(3 - 2\sin^2 A - 2\sin^2 B - 2\sin^2 C) =$$

$$= 9R^2 - 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) =$$

$$= 9R^2 - 4R^2\left(\frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2}\right) =$$

$$= 9R^2 - (a^2+b^2+c^2) \ \#.$$

Am folosit: $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ și analoagele

și $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

<u>Observație</u> Din $HG = 2GO \Leftrightarrow HO = 3GO \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2).}$

2. Să se demonstreze că:

$$\boxed{OI^2 = R^2 - 2R\cdot r}$$

Soluție. $\vec{OI} = \frac{1}{a+b+c}(a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{OC})$

$$OI^2 = \vec{OI}\cdot\vec{OI} = \vec{OI}^2 =$$

$$= \frac{1}{(a+b+c)^2}\cdot(a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{OC})^2 =$$

$$= \frac{a^2OA^2 + b^2OB^2 + c^2OC^2 + 2ab\,\vec{OA}\cdot\vec{OB} + 2bc\,\vec{OB}\cdot\vec{OC} + 2ca\,\vec{OC}\cdot\vec{OA}}{(a+b+c)^2} =$$

$$= \frac{R^2(a^2+b^2+c^2) + 2R^2(ab\cos 2C + bc\cos 2A + ca\cos 2B)}{(a+b+c)^2}$$

$$= \frac{R^2(\underbrace{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}) - 4bc\sin^2 A - 4ca\sin^2 B - 4ab\sin^2 C}{(a+b+c)^2} =$$

$$= R^2 - 4R^2\cdot\frac{bc\sin^2 A + ca\sin^2 B + ab\sin^2 C}{(a+b+c)^2} =$$

$$= R^2 - 4R^2\cdot\frac{2S(\sin A + \sin B + \sin C)}{(a+b+c)^2} =$$

$$= R^2 - 4R\,\frac{S\cancel{(a+b+c)}}{(a+b+c)^{\cancel{2}}} = R^2 - 2R\cdot\frac{S}{p} = R^2 - 2Rr \#$$