Desigur, cititorul a observat că în problemele studiate pînă aici nu au intervenit noţiunile de unghi şi de perpendicularitate, iar lungimea unui segment a intervenit doar în legătură cu compararea a două segmente aşezate pe aceeaşi dreaptă (la definirea legii de compunere a unui scalar cu un vector respectiv la raportul a trei puncte coliniare), dar nu am comparat pînă acum două segmente neparalele. Toate problemele legate de noţiunile de incidenţă, paralelism şi raport simplu, se numesc „probleme afine". Trecem acum la „probleme metrice" în care şi noţiunile de distanţă şi unghiu intervin în mod esenţial.

Prin *lungimea* sau *norma* vectorului $\overrightarrow{AB}$, notată cu $\|\overrightarrow{AB}\|$, înţelegem lungimea segmentului $[A, B]$; $\|\vec{0}\| = 0$. Dacă $\|\overrightarrow{AB}\| = 1$, vectorul $\overrightarrow{AB}$ se mai numeşte *versor*.

Fie $\vec{a}$ un vector nenul. Prin *versorul lui* $\vec{a}$ înţelegem unicul versor, avînd sensul lui $\vec{a}$. El este egal cu $\dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$.

Fiind daţi vectorii nenuli $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, unghiul lor se defineşte astfel:

$$\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \widehat{AOB}, \text{ unde } \vec{a} = \overrightarrow{OA},\ \vec{b} = \overrightarrow{OB}.$$

Se observă că această definiţie este corectă, căci unghiul $\widehat{AOB}$ nu depinde de alegerea punctului O.

Proiecţia ortogonală a vectorului $\overrightarrow{AB}$ pe dreapta Δ este un vector, notat cu $\mathrm{Pr}_\Delta\, \overrightarrow{AB}$, care se obţine în felul următor: ducem prin A şi B plane perpendiculare pe Δ, care intersectează Δ în punctele A' şi B' (fig. 11); prin definiţie, $\mathrm{Pr}_\Delta \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Se observă că $\overrightarrow{A'B'}$ nu depinde de alegerea reprezentantului în clasa $\overrightarrow{AB}$. Rezultă o construcţie mai simplă: Fie $P \in \Delta$ şi $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$ şi R proiecţia lui Q pe Δ; avem $\mathrm{Pr}_\Delta \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PR}$. Evident există λ unic astfel ca $\mathrm{Pr}_\Delta \overrightarrow{AB} = \lambda\vec{e}$, unde $\vec{e}$ este un versor pe Δ. Însemnăm scalarul λ cu $\mathrm{pr}_{\vec{e}}\, \overrightarrow{AB}$ şi avem

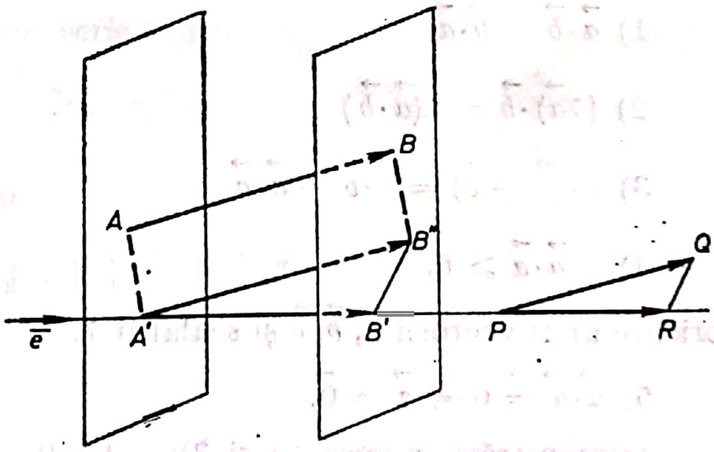

Fig. 11

(1) $$\mathrm{Pr}_\Delta\, \overrightarrow{AB} = (\mathrm{pr}_{\vec{e}}\, \overrightarrow{AB}) \cdot \vec{e}.$$

Am definit astfel o aplicație $\mathrm{pr}_{\vec{e}} : \mathscr{V} \to \mathbb{R}$. Ea este o funcțională liniară, ceea ce rezultă din faptul că $\mathrm{Pr}_\Delta : \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ este o aplicație liniară. Avem

$$\mathrm{pr}_{\vec{e}}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha\, \mathrm{pr}_{\vec{e}}\vec{a} + \beta\, \mathrm{pr}_{\vec{e}}\vec{b} \tag{2}$$

pentru orice $\vec{a}, \vec{b} \in \mathscr{V}$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pe de altă parte

$$\mathrm{pr}_{\vec{e}}\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \cos\,(\widehat{\vec{e}, \overrightarrow{AB}}), \tag{3}$$

ceea ce rezultă direct din definiția cosinusului unui unghi.

Definiție. *Produsul scalar a doi vectori* $\vec{a}$ *și* $\vec{b}$ este numărul real

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\| \cdot \cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}). \tag{4}$$

Ținînd seamă de formula (3), avem

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \|\vec{a}\|\, \mathrm{pr}_{\vec{a}_0}\vec{b}, \tag{5}$$

unde $\vec{a}_0$ este versorul lui $\vec{a}$.

Definiție. Vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ se zic *perpendiculari* sau *ortogonali* și se notează $\vec{a} \perp \vec{b}$, dacă unul din ei este vectorul nul sau dacă formează un unghi drept.

Rezultă imediat:

Propoziția 1. *Vectorii* $\vec{a}$ *și* $\vec{b}$ *sînt perpendiculari dacă și numai dacă* $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Propoziția 2. *Pentru produsul scalar au loc următoarele proprietăți:*

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

3) $\vec{a}\cdot(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

4) $\vec{a}\cdot\vec{a} \geqslant 0,$

oricare ar fi vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ și scalarul λ.

5) $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}.$

Demonstrăm numai 2) și 3), celelalte proprietăți fiind consecințe imediate ale definiției. Folosind (5) și (2) avem

$$\vec{a}\cdot(\beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) = \|\vec{a}\|\cdot \mathrm{pr}\,(\beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) = \|\vec{a}\|\,(\beta\, \mathrm{pr}\,\vec{b} + \gamma\, \mathrm{pr}\,\vec{c}) =$$

$$= \beta\,\|\vec{a}\|\, \mathrm{pr}\,\vec{b} + \gamma\,\|\vec{a}\|\, \mathrm{pr}\,\vec{c} = \beta(\vec{a}\cdot\vec{b}) + \gamma(\vec{a}\cdot\vec{c})$$

(în notații s-a omis indicele $\vec{a}_0$). Particularizînd scalarii β și γ obținem 2) și 3).

O bază $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ a spațiului vectorial $\mathscr{V}$ se zice *ortonormală*, dacă $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$, $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$ și $\vec{k} \perp \vec{i}$.

Avem

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1 \tag{6}$$
$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0.$$

Propoziția 3. *Componentele vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$, față de baza ortonormală $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, fiind (a_1, a_2, a_3) respectiv (b_1, b_2, b_3), produsul lor scalar se calculează după formula*

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{7}$$

Într-adevăr, avem

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \quad b = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

și folosind regulile de calcul 1), 2), 3) din proporția 2 și formulele (6) obținem formula (7).

Comparînd definiția produsului scalar cu expresia lui analitică (7), putem obține formule pentru calculul normei unui vector și a unghiulu- a doi vectori. Baza, la care ne raportăm, în continuare, este tot $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Avem

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{a}\|\cdot\cos 0 = \|\vec{a}\|^2.$$

Dacă definim $\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$, putem scrie

$$\vec{a}^2 = \|\vec{a}\|^2. \tag{8}$$

Punînd în (7) $\vec{b} = \vec{a}$, obținem

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \tag{9}$$

Din (4) și (7) deducem:

$$\cos\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \tag{10}$$

și în particular

$$(\vec{a} \perp \vec{b}) \Leftrightarrow a_1'b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0. \tag{11}$$

Formulele (9) şi (10) pot fi folosite la calculul diferitelor distanţe determinate de puncte, drepte şi planele şi a unor unghiuri determinate de drepte şi plane.

Să considerăm un *sistem de coordonate ortonormat* în $\mathcal{P}(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ şi punctele $A(x_1, y_1, z_1)$ şi $B(x_2, y_2, z_2)$, raportate la acest sistem de coordonate. *Distanţa lor este*

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{12}$$

Fie $A_1(x_1, y_1, z_1)$ un punct, iar π un plan, care trece prin A_1 (fig. 12). Deoarece coordonatele x_1, y_1, z_1 verifică ecuaţia planului,

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{13}$$

această ecuaţie poate fi scrisă astfel:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \tag{13'}$$

Cu ajutorul formulei (7), interpretăm ecuaţia (13′) în felul următor: există un vector $\vec{n}(A, B, C)$ perpendicular pe fiecare vector de forma $\overrightarrow{A_1M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, adică pe fiecare dreaptă din planul π. Am demonstrat astfel o proprietate cunoscută în geometria elementară. Mai mult, am obţinut semnificaţia geometrică a coeficienţilor ecuaţiei (13): *A, B, C sînt parametri directori ai unei drepte perpendiculare pe plan* şi se numesc şi *parametri directori ai planului* π. Subliniem că acest rezultat este valabil numai faţă de sistemele de coordonate ortonormate.

Distanţa orientată de la un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul π, echipat cu un vector normal $\vec{n}$, se defineşte astfel: fie M' proiecţie ortogonală a punctului M_0 pe π şi $\overrightarrow{M'M''} = \vec{n}_0 = \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$ versorul lui $\vec{n}$; numărul real δ, determinat prin

$$\overrightarrow{M'M_0} = \delta\vec{n}_0, \tag{14}$$

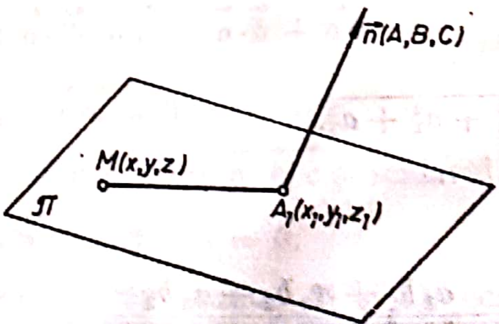

Fig. 12

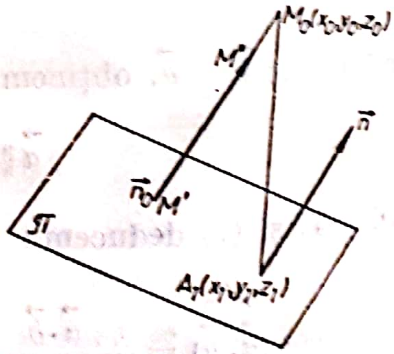

Fig. 13

se numeşte distanţa orientată de la punctul M_0 la planul π (fig. 13). Dacă M_0 se află în acel semispaţiu, mărginit de π, care conţine pe M'', atunci $\delta \geqslant 0$; dacă M_0 este în celălalt semispaţiu, atunci $\delta \leqslant 0$.

Pentru a calcula pe δ, înmulţim scalar cei doi membri ai egalităţii (14) cu $\vec{n}_0$:

$$\delta = \vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{M'M_0};$$

aşadar

$$\delta = \frac{1}{\|\vec{n}\|}\, \vec{n} \cdot (\overrightarrow{A_1M_0} - \overrightarrow{A_1M'}) = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1M_0}}{\|\vec{n}\|} = \frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

sau

(15)
$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Corolar. *Valorile numerice $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$ au acelaşi semn pentru toate punctele $M_0(x_0, y_0, z_0)$ dintr-un semispaţiu şi semn opus pentru punctele din celălalt semispaţiu.*

2.6. PRODUSUL VECTORIAL ŞI PRODUSUL MIXT

Se observă că primul dintre cele două repere ortonormate, de pe fig. 14, nu poate fi suprapus, printr-o mişcare în spaţiu, pe al doilea, în aşa fel încît O, A, B, C să acopere respectiv pe O', A', B', C'. Pe de altă parte, orice alt reper ortonormat poate fi suprapus pe unul dintre aceste repere. Astfel, mulţimea reperelor ortonormate se împarte în două submulţimi disjuncte, sau, cum se mai spune, în două clase. Zicem că *spaţiul este orientat*, dacă distingem una dintre aceste clase. Evidenţierea clasei distinse se poate face prin alegerea unui reper ortonormat fixat din clasa respectivă. În principiu, este indiferent care dintre cele două clase devine distinsă.

Obiecte ale spaţiului fizic sugerează o anumită distingere. Plasînd, de exemplu, un şurub (cu filatare obişnuită „dreaptă") pe $\vec{k}$ şi imprimîndu-i o mişcare de rotaţie de la $\vec{i}$ spre $\vec{j}$ (indicată de săgeată) el va înainta în sensul indicat de $\vec{k}$. Dimpotrivă, rotind $\vec{i}'$ spre $\vec{j}'$, şurubul va înainta în sens opus cu $\vec{k}'$. Reperul (O, A, B, C) satisface „regula şurubului"; pe el îl alegem ca reper distins. Reperele din clasa sa le numim *repere drepte sau directe*, iar cele din clasa cealaltă *repere stîngi* sau *inverse*. Împreună cu un reper, şi baza corespunzătoare se zice *directă* respectiv *inversă*.

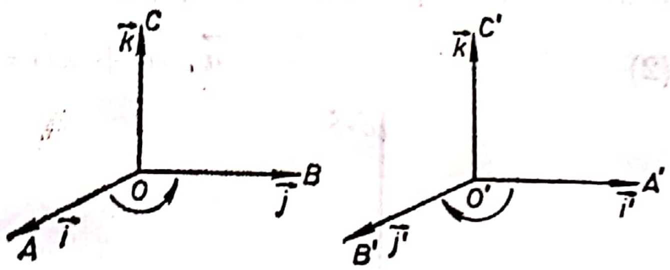

Fig. 14

Observaţie. De fapt, *putem împărţi toate reperele în două clase.* Vom face aici acest lucru apelînd la intuiţie. Putem „îndrepta" un reper oarecare (O_1, A_1, B_1, C_1), adică a-l transforma într-unul ortonormat, mişcînd „în mod continuu" punctele A_1, B_1, C_1, astfel încît în nici o poziţie intermediară cele patru puncte ale reperului să nu fie coplanare. Este intuitiv clar că, prin acest procedeu, se ajunge într-o clasă determinată de repere ortonormate, indiferent de modul de „îndreptare".

Definiție. *Produsul vectorial* al vectorilor neparaleli $\vec{a}, \vec{b}$, notat cu $\vec{a} \times \vec{b}$, este un vector definit în felul următor (fig. 15) a) direcția lui este perpendiculară pe planul determinat de $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, b) sensul este dat de regula şurubului, c) norma este definită cu formula

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}). \tag{1}$$

Dacă $\vec{a} \parallel \vec{b}$, prin definiție, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. (Vectorul $\vec{0}$ se consideră paralel cu orice vector).

Observații. 1) Formula (1) este valabilă şi în cazul $\vec{a} \parallel \vec{b}$. 2) Unghiul $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ este totdeauna mai mic sau egal cu două unghiuri drepte, deci $\sin (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \geqslant 0$. 3) Norma $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ este egală cu aria paralelogramului construit pe $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. 4) În cazul $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ formează un reper drept.

Propoziția 1. *Avem* $\vec{a} \parallel \vec{b}$. *Dacă și numai dacă* $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Propoziția 2. *Au loc următoarele proprietăți :*

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

2) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$,

oricare ar fi $\vec{a}, \vec{b} \in \mathscr{V}$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstrație. Primele două proprietăți rezultă direct din definiție. Stabilim întîi proprietatea 3) pentru cazuri particulare. Avem

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \lambda\vec{a}) = \vec{a} \times \vec{b}. \tag{2}$$

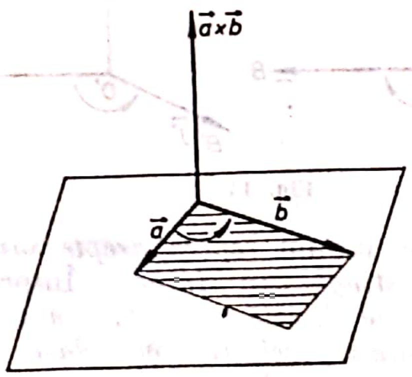

Fig. 15

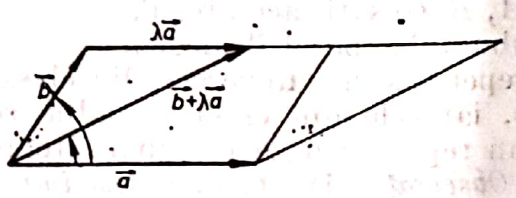

Fig. 16

Într-adevăr, dacă $\vec{a} \parallel \vec{b}$, ambii membrii sînt egali cu $\vec{0}$. În celălalt caz, perechea de vectori $\vec{a}, \vec{b} + \lambda\vec{a}$ determină acelaşi plan şi acelaşi sens de rotație în el, ca şi perechea $\vec{a}, \vec{b}$ (fig. 16), deci produsele vectoriale din cei doi membri ai egalității (2) au aceeași direcție și același sens. Rămîne să arătăm că au aceeași normă. Dar paralelogramele construite pe cele două perechi de vectori au bază comună și înălțimi egale, deci arii egale.

Fie $\vec{e}$ un versor perpendicular pe planul α, definit de $\vec{b}$ și $\vec{c}$. Numim direct acel sens de rotație în planul α care, prin regula șurubului, dă sensul lui $\vec{e}$. Produsul vectorial $\vec{e} \times \vec{b}$ poate fi obținut prin rotirea lui $\vec{b}$ în planul α, cu un unghi drept în sens direct. Același procedeu este aplicabil pentru a obține pe $\vec{e} \times \vec{c}$ și $\vec{e} \times (\vec{b} + \vec{c})$. Așadar acest vector din urmă este diagonală în paralelogramul construit pe $\vec{e} \times \vec{b}$ și $\vec{e} \times \vec{c}$ (căci prin rotire un paralelogram se transformă într-un paralelogram). Rezultă:

(3) $$\vec{e} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{e} \times \vec{b} + \vec{e} \times \vec{c}$$

și ținînd seamă de proprietatea 2) avem

(4) $$(\lambda\vec{e}) \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\lambda\vec{e}) \times \vec{b} + (\lambda\vec{e}) \times \vec{c},$$

și cu aceasta am stabilit proprietatea de distributivitate 3) pentru cazul cînd $\vec{a} \perp \vec{b}, \vec{c}$.

Fie, în sfîrșit, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vectori oarecari și α un plan perpendicular pe $\vec{a}$. Există descompunerile

$$\vec{b} = \vec{b'} + \beta\vec{a}, \quad \vec{c} = \vec{c'} + \gamma\vec{a}, \quad \text{cu } \vec{b'}, \vec{c'}, \perp \vec{a}$$

(fig. 18). Avem în virtutea formulelor (2) și (4)

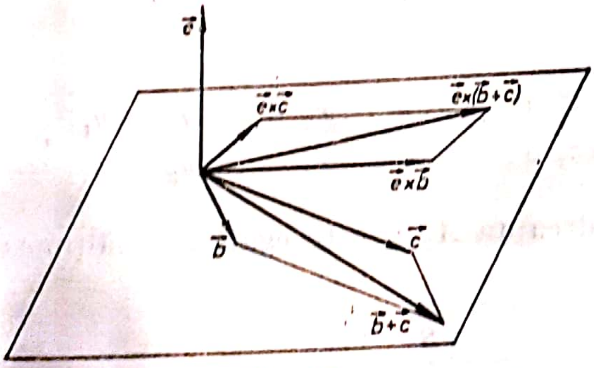

Fig. 17

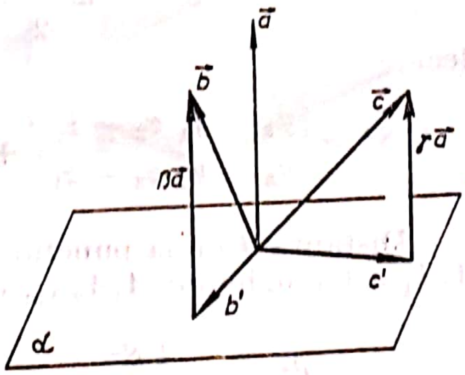

Fig. 18

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{b'} + \vec{c'} + (\beta + \gamma)\,\vec{a}) = \vec{a} \times (\vec{b'} + \vec{c'}) = \vec{a} \times \vec{b'} + \vec{a} \times \vec{c'} =$$
$$= \vec{a} \times (\vec{b'} + \beta\vec{a}) + \vec{a} \times (\vec{c'} + \gamma\vec{a}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Fie $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ o bază ortonormată directă. Atunci

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \tag{5}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k},\ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i},\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

Ţinînd seamă de regulile de calcul din propoziţia 2) şi de tabelul (5), cititorul poate arăta uşor

Propoziţia 3. *Dacă* $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ *şi* $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, *atunci*

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{k}. \tag{6}$$

Expresia analitică (6) a produsului vectorial se mai poate scrie sub forma

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Ca aplicaţii, vom calcula aria unui triunghi şi distanţa de la un punct la o dreaptă.

Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi, în care vîrful A_i are vectorul de poziţie $\vec{r}_i$ şi coordonatele (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, 3$. Aria triunghiului $A_1A_2A_3$ este egală cu

$$S = \frac{1}{2}\, \|\overrightarrow{A_1A_2}\| \cdot \|\overrightarrow{A_1A_3}\| \sin (\widehat{A_2A_1A_3}) = \frac{1}{2}\, \|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\| =$$

$$= \frac{1}{2}\, (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1),$$

deci

$$4\,S^2 = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2.$$

Distanţa d de la punctul A_1 la dreapta A_2A_3 este egală cu înălţimea A_1A_1' a triunghiului $A_1A_2A_3$, deci

$$d^2 = \frac{4\,S^2}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^2} = \frac{4\,S^2}{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2}$$

Produsul mixt al vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ se defineşte astfel:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Propoziția 4. *Dacă notăm respectiv cu a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2, 3$, componentele lui $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, avem*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Această expresie a produsului mixt rezultă din (7) și din formula produsului scalar.

Corolarul 1. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) =$

$$= -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}).$$

Corolarul 2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Definiție. *Volumul orientat al paralelipipedului, construit pe vectorii necoplanari* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, este $\varepsilon\ V$, unde V este volumul acestui paralelipiped, iar $\varepsilon = +1$ sau -1 după cum $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ este orientat direct sau invers. Dacă $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sînt coplanari, acest volum se definește ca 0.

Interpretarea produsului mixt este dată de

Propoziția 5. *Produsul mixt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ este egal cu volumul orientat al paralelipipedului, construit pe $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.*

Într-adevăr, fie $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ și $\overrightarrow{OP} = \vec{a} \times \vec{b}$ (fig. 19)

Notăm cu C' proiecție ortogonală a punctului C pe OP.

Atunci

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \|\overrightarrow{OP}\| \cdot \text{pr}_{\vec{e}}\vec{c},$$

unde $\vec{e}$ este versorul lui $\vec{a} \times \vec{b}$. Dar $\|\overrightarrow{OP}\|$ este egală cu aria S a paralelogramului $OADB$, iar $pr_{\vec{e}}\vec{c} = \|\overrightarrow{OC'}\|$ este înălțimea h a paralelipipedului. Dacă $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ are orientare directă, atunci $\vec{e}$ și $\vec{c}$ sînt dirijați înspre același semispațiu, mărginit de planul $OADB$, ceea ce implică $\text{pr}_{\vec{e}}\vec{c} > 0$ și deci $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = S.h$. Dacă $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ are cealaltă orientare, atunci $\text{pr}_{\vec{e}}\,\vec{c} < 0$ și de aceea $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -\ S.h$.

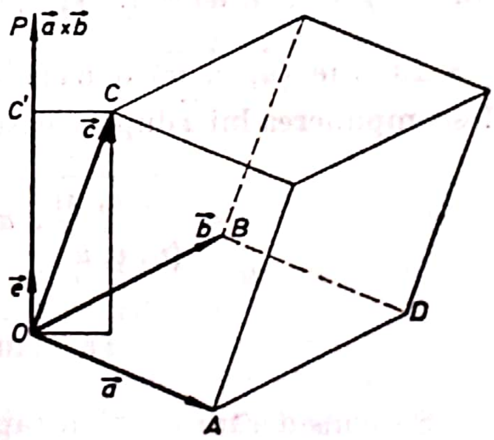

Fig. 19

2.7. EXERCIȚII

Toate sistemele de coordonate, care intervin în aceste exerciții, sînt ortonormate.

1. Fie $ABCD$ un tetraedru. Dacă perechile de muchii opuse AB, CD și AC, BD sînt perpendiculare, atunci $AD \perp BC$.