Seminar 10: Latici

Recap:

* $(A, \leq)$ mult ord, dc $\leq$ este rel de ord. $(R+T+AS)$.
* $(A, \leq)$ mult. total ord. (lanț) dc. în plus $\forall x, y \in A: x \leq y$ sau $y \leq x$.

Def Fie $(A, \leq)$ mult. ord, $x \in A$, $B \subseteq A$.

x este un minorant (majorant) al lui B dc pt $\forall b \in B$ avem $x \leq b$ $(b \leq x)$

x este un infimum (supremum) al lui B. dc este cel mai mare minorant. (dc este cel mai mic majorant)

Notații: $x = \inf_A B$ $(x = \sup_A B)$

<u>Def</u> Mult. ord $(A, \leq)$ s.n. <u>latice</u> dc.
$\forall$ submult de 2 elem. adm. inf, sup.
$\forall x, y \in A$, $\exists \inf_A \{x, y\}$, $\exists \sup_A \{x, y\}$
$(A, \leq)$ este o <u>latice completă</u> dc
$\forall$ submult. nevidă adm inf, sup
$\forall \underset{\neq \emptyset}{B} \subseteq A$, $\exists \inf_A B$, $\exists \sup_A B$.

<u>Exemple</u>: 1) A mult. total ord $\Rightarrow$ A latice:
$\forall x, y \in A$: $\exists \sup_A \{x, y\} = \max \{x, y\}$
$\exists \inf_A \{x, y\} = \min \{x, y\}$

2) $(\mathbb{R}, \leq)$ latice, dar NU este latice completă
$B = (2, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$ $\inf_{\mathbb{R}} B = 2$
$\nexists \sup_{\mathbb{R}} B$

3) $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ latice completă

$B = (2, +\infty) \quad \sup_{\overline{\mathbb{R}}} B = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}$

4) $(\mathbb{N}, |)$ latice ✓.

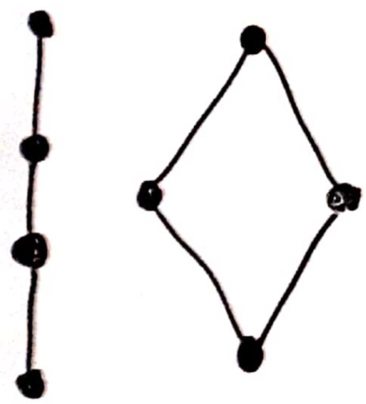
$a, b \in \mathbb{N} \quad \inf_{\mathbb{N}} \{a, b\} = \text{cmmdc}(a; b)$

$\sup_{\mathbb{N}} \{a, b\} = \text{cmmmc}(a; b)$

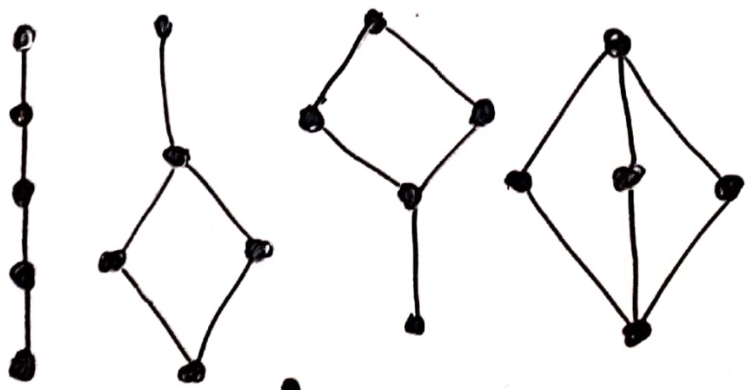
(96) Să se det., abstracție făcând de izomorfisme (asemănări) toate laticile de 1, 2, 3, 4, 5 și 6 elem. (folosind diagr. Hasse).

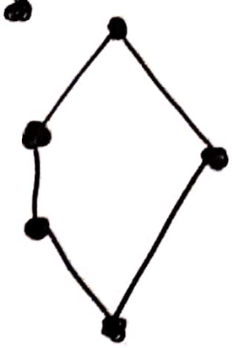
1 element 2 elemente 3 elemente

4 elemente.



5 elemente.





Temă 6 elemente.

(98) Fie $(A, \leq)$ o latice completă și fie $f : A \to A$ o fct. cresc.
S.s.a.c $\exists a \in A$ cu $f(a) = a$.
punct fix.

Fie $B = \{ a \in A \mid a \leq f(a) \}$

Dacă $B = \emptyset \Rightarrow$

(*) $\forall a \in A$ avem $f(a) \leq a$ și $f(a) \neq a$

$(A, \leq)$ latice completă $\Rightarrow \exists \inf_A A = a_0 \in A$

$\Rightarrow a_0 \leq a, \ \forall a \in A \xRightarrow{f(a_0) \in A} \underline{a_0 \leq f(a_0)}$.

În (*) luăm $a = a_0 \Rightarrow \underline{f(a_0) \leq a_0}$

și $f(a_0) \neq a_0$

AS

$$\underbrace{f(a_0) \neq a_0 \qquad f(a_0) = a_0}_{\text{contradicție}}$$

Asadar $B \neq \emptyset$
$(A, \leq)$ latice completă $\Bigg| \Rightarrow \exists \sup_A B = b_0 \in A$

$\forall b \in B$ avem $b \leq f(b) \xRightarrow{f \text{ cresc}}$

$\forall b \in B$ avem $\underbrace{f(b)}_{\in A} \leq f(\underbrace{f(b)}_{\in A}) \Rightarrow \forall b \in B, f(b) \in B$

$\forall b \in B$: $\underset{\in B}{b} \leq \underset{\in B}{f(b)} \leq b_0 \xRightarrow{f \text{ cresc.}}$

pt. că $b_0 = \sup_A B$.

$$\underline{b} \leq f(b) \leq f(f(b)) \leq \underline{f(b_0), \forall b \in B}$$

$\Rightarrow f(b_0)$ este un majorant pt. B.

dar $b_0 = \sup_A B$ (cel mai mic majorant) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{b_0 \leq f(b_0)} \Rightarrow b_0 \in B \Rightarrow b_0 = \max B$

Stim că $\forall b \in B, f(b) \in B \Rightarrow f(b_0) \in B \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{f(b_0) \leq b_0}. \xRightarrow{AS} f(b_0) = b_0$.

punct fix.

Mulțimi bine ordonate

Def. Fie $(A, \leq)$ o mult. ord. Atunci A este <u>bine ordonată</u> dc. ∀ submult. nevidă a lui A adm. un cel mai mic elem

$\forall \emptyset \neq B \subseteq A$, $\exists \min B$.

Exemple: 1) $(\mathbb{N}, \leq)$ bine ordonată

2) A bine ord $\Rightarrow$ A total ord.

$\not\Leftarrow$ $(\mathbb{R}, \leq)$

nu $\exists \min (2, 5]$

3) A total ord + finită $\Rightarrow$ A bine ord

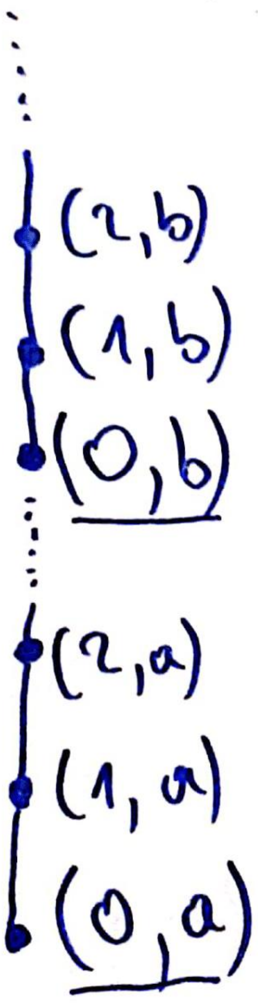
a, b

$$(\mathbb{N}\times\{a\})\cup(\mathbb{N}\times\{b\}), \leq$$

$$(n,a)\leq(m,a) \iff n\leq m.$$

$$(n,b)\leq(m,b) \iff n\leq m$$

$$(n,a)\leq(m,b), \forall n,m\in\mathbb{N}.$$



Clar este bine ordonată.

Exemplul acesta NU este izomorf cu $(\mathbb{N}, \leq)$.

pt.că $(0,b)$ NU are predecesor

Principiul inducției matematice

Dacă $(A, \leq)$ bine ordonată și P este un predicat pe A. Dacă:

1) $P(a_0)$ adev, unde $a_0 = \min A$.
2) $\forall y \in A$
"$P(x)$ este adev, $\forall x < y \to P(y)$ adev"

Atunci $P(a)$ adev, $\forall a \in A$.

Temă 98
+
pdf: Lema lui Zorn.

(98) Ssac:

a) Dc. $(A, \leq)$ bine ord și $f: A \to A$ este o fct. strict crescătoare, at. pt. $\forall\ a \in A$ avem că $a \leq f(a)$.

P.p. RA că $\exists a \in A$ aî $\underline{a > f(a)}$

$\xrightarrow{f \text{ strict cresc}} a > f(a) > f(f(a))$

$\xrightarrow{f \text{ strict cresc}} \underset{\in A}{a} > \underset{\in A}{f(a)} > \underset{\in A}{f(f(a))} > \underset{\in A}{f(f(f(a)))}$

⋮

Asadar am obținut un șir strict descrescător de elem din A, dar A este bine ordonată $\Rightarrow$ contradicție

$\Rightarrow \forall a \in A: \ a \leq f(a)$

(98) Ssac:

b) Între 2 mult. bine ord există cel mult un izomorfism.

Fie A și B mult bine ord.

P.p. $\exists\ f: A \to B,\ g: A \to B$ izomorfisme distincte $\Rightarrow \exists\ a \in A$ a.î. $f(a) \neq g(a)$.

$\Rightarrow \exists\ a \in A$ a.î. $f(a) < g(a)$ sau $g(a) < f(a)$

f, g izomorfisme $\Rightarrow f, g$ cresc., bij

f^{-1}, g^{-1} cresc.

Dacă $f(a) < g(a) \xRightarrow{g^{-1}} \underline{g^{-1}(f(a)) < a}$

f cresc. $\xRightarrow{a)} a \leq f(a) \xRightarrow{g^{-1} \text{ cresc}} \underline{g^{-1}(a) \leq g^{-1}(f(a))}$

g^{-1} cresc $\xRightarrow{a)} \underline{a \leq g^{-1}(a)}$

$\Rightarrow a < a$ contradicție. Temă cazul 2.