$V \equiv k$- spațiu vectorial

$X \subseteq V$ s.n. bază dacă:

i) X este liniar independentă:

$(\forall) x_1, \dots, x_n \in X$, $(\forall) \alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

ii) X este sistem de generatori:

$\forall v \in V, \exists x_1, \dots, x_n \in X, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$ a.î.

$$v = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

$V \neq 0 \Rightarrow V$ are o bază

X, X' - baze pt $V \Rightarrow |X| = |X'| \left(\overset{def}{=} \dim_k V \right)$

<u>obs</u> 1) Orice sist $Z \subseteq V$ l.i. poate fi completat la o bază: $\exists Y \subseteq V$ a.î. $Z \cup Y$ - bază și $Z \cap Y = \emptyset$

(Z - bază $\Leftrightarrow Y = \emptyset$)

2) Din orice sistem de generatori putem extrage o bază

$V = \langle Z \rangle \Rightarrow \exists X \subseteq Z$ a.î. X este bază pt V.

3) $\dim_k V = \dim_k V' \Rightarrow V \simeq V'$

$f: V \to V'$ ca în Teorema 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \ker(f) = \{ v \in V \mid f(v) = 0_{v'} \} \leq_k V$

$f(V) = \{ f(v) \mid v \in V \} \leq_k V'$

Fie X o bază în $\ker(f)$

Caz I $\ker f = 0 \Rightarrow X = \emptyset \Rightarrow \forall X'$ o bază a lui V

$X \cup X'$ - bază în V și $X \cap X' = \emptyset$.

<u>Caz II</u> $\ker f \neq 0 \Rightarrow \exists X \subseteq \ker f$ o bază a lui $\ker(f)$

$\left.\begin{array}{l} \ker(f) \subseteq V \Rightarrow X \subseteq V \\ X \text{ l.i. în } \ker f \end{array}\right\} \Rightarrow X$ este l.i. în V

http://paperkit.net

Fie $\boxed{v \in \langle X \rangle \cap \langle X' \rangle}$ diferită de 0

$v \in \langle X \rangle \Rightarrow \exists\, x_1, \dots, x_n \in X, \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ a.î.

$$v = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \qquad (1)$$

$v \in \langle X' \rangle \Rightarrow \exists\, x_1', \dots, x_m' \in X', \exists\, \beta_1, \dots, \beta_m \in K$ a.î.

$$v = \beta_1 x_1' + \dots + \beta_m x_m' . \qquad (2)$$

$(1)-(2) \Rightarrow \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + (-\beta_1) x_1' + \dots + (-\beta_m) x_m' = 0$

$\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{X}, \underbrace{x_1', \dots, x_m'}_{X'}$ vectori distincți din $X \cup X'$, pt că $X \cap X' = \emptyset$

$X \cup X'$ - l.i. $\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_m = 0$

$\Rightarrow \boxed{v = 0}$

$\Rightarrow \langle X \rangle \cap \langle X' \rangle = 0.$

$$\left.\begin{array}{l} \dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) \\ \dim(A+B) + \dim(A \cap B) = \dim(A) + \dim(B) \\ \dim(A+B), \dim(A), \dots \text{ finite} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{\underline{\dim(A \cap B) = 0}} \Rightarrow A \cap B = 0.$

<u>Ex</u> $\mathbb{R}$ - s.v. $\mathbb{R}^3$

baza canonică: $e_1 = (1, 0, 0)$
$e_2 = (0, 1, 0)$
$e_3 = (0, 0, 1)$

$\forall\, v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $v = a \cdot e_1 + b \cdot e_2 + c \cdot e_3 \Rightarrow (a, b, c)$ coord. lui v în baza canonică.

$B = (e_2, e_1, e_3) \Rightarrow v = b \cdot e_2 + a \cdot e_1 + c \cdot e_3 \Rightarrow$
$\Rightarrow (b, a, c)$ - coord. lui v în baza B.

C: $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0)$

$v = (3, 2, 1) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow v = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 \Rightarrow$
$\Rightarrow (1, 1, 1)$ - coord. lui v în baza C

Scriem înmulțirea cu scalari în dreapta

$$x = u_1 \alpha_1 + \dots + u_n \alpha_n$$

$$f(x) = f(u_1)\alpha_1 + \dots + f(u_n)\alpha_n = (f(u_1), \dots, f(u_n)) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} =$$

$$= (v_1, \dots, v_m) \cdot [f]_{u,v} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$f(x) = v_1 \beta_1 + \dots + v_m \beta_m = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

$(v_1, \dots, v_m)$ - bază $\Rightarrow [f]_{u,v} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$

$u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2)$

$$[f]_{u,v} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix}$$

$$[g]_{v,w} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \end{pmatrix}$$

$$g \circ f (u_1) = g(f(u_1)) = g(\alpha_{11} v_1 + \alpha_{21} v_2 + \alpha_{31} v_3) =$$

$$= \alpha_{11}\, g(v_1) + \alpha_{21}\, g(v_2) + \alpha_{31}\, g(v_3) =$$

$$= \underbrace{\alpha_{11}(\beta_{11} w_1 + \beta_{21} w_2) + \alpha_{21}(\beta_{12} w_1 + \beta_{22} w_2) + \alpha_{31}(\beta_{13} w_1 + \beta_{23} w_2)}$$

$$= (\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{31}\beta_{13})\, w_1 +$$

$$+ (\alpha_{11}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{22} + \alpha_{31}\beta_{23})\, w_2 =$$

$$= (w_1, w_2) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{31}\beta_{13} \\ \alpha_{11}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{22} + \alpha_{31}\beta_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix}$$