Seminar 8

Spații vectoriale. Subspații

Fie K corp comutativ. $(V,+)$ grup abelian împreună cu operația externă $\cdot : K\times V \to V$ se num. K-sp. vectorial dacă:

1) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
2) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$, $\forall\, x,y\in V$, $\forall\, \alpha,\beta\in K$
3) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
4) $1\cdot x = x$

Fie ${}_K V$, $A \subseteq V$. $A \leq {}_K V \iff \begin{cases} A \neq \emptyset \\ \forall\, x,y\in A,\ x+y\in A \\ \forall\, x\in A,\ \forall\, \alpha\in K,\ \alpha x\in A \end{cases}$

$\iff \begin{cases} A\neq\emptyset \\ \forall\, \alpha,\beta\in K,\ \forall\, x,y\in A,\ \alpha x+\beta y\in A. \end{cases}$

Lista 7

(3.) Poate fi organizată o mulțime finită ca un spațiu vectorial peste un corp infinit K?

I) $|V| = 1$, $V = \{0\}$

$\exists!\ + : V\times V \to V$, $0+0=0$

$\exists!\ \cdot : K\times V\to V$, $\alpha\cdot 0 = 0$, $\forall\, \alpha\in K$

V K-sp. vect. nul. Răsp.: DA!

II) $|V| \geq 2$

Pp. că există o structură de K-sp. vect. pe V.

Fie $x\in V$, $x\neq 0$ arbitrar fixat.

$t'_x : K\to V$, $t'_x(\alpha) = \alpha x$

Fie $\alpha, \beta \in K$, $t'_x(\alpha) = t'_x(\beta) \Leftrightarrow \alpha x = \beta x \Leftrightarrow \alpha x - \beta x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)x = 0 \Rightarrow \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta.$

$\Rightarrow t'_x : \underset{\text{infinită}}{K} \to \underset{\text{finită}}{V}$ injectivă contradicție

$\Downarrow$ $|K| \leq |V|$ contrad. cu V finită

t'_x - omomorfism de la $(K,+)$ la $(V,+)$

Răsp. : NU!

(4.) Fie $p \in \mathbb{N}$ număr prim. Poate fi organizat grupul abelian $(\mathbb{Z},+)$ ca un $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ - sp. vectorial ? (- grupul abelian îl avem)

Pp. că $\exists * : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ care verifică 1) - 4) din def. sp. vect.

Atunci $\forall x \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$

p nr. prim $\Rightarrow p \geq 2$.

$$\underset{\neq 0}{p} \cdot \underset{\neq 0}{x} = \underbrace{x + \ldots + x}_{p} = \underbrace{(\hat{1} * x) + \ldots + (\hat{1} * x)}_{p} \overset{2)}{=} \underbrace{(\hat{1} + \hat{1} + \ldots + \hat{1})}_{p} * x = \hat{p} * x = \hat{0} * x = \underset{\text{din } \mathbb{Z}}{0}$$

($\hat{1}$ din $\mathbb{Z}_p$)

contradicție. $\Rightarrow$ Răsp. : NU!

(5.) Care dintre următoarele mulțimi sunt subspații în spațiul vectorial indicat alăturat :

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \cdot x + by = 0\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ în $_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$

b) $D_1 = [-1, 1]$ în $_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$

b') $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ în $_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$

b'') $D_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\}$ în $_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n$

c) $P_n(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad } f \leq n\}$ în $_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[X]$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

d) $\{f \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad } f = n\}$ în $_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[X]$?

Rezolvare :

a) $A \neq \emptyset$ $((0,0) \in A \Leftarrow a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0)$

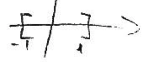
Fie $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) \overset{?}{\in} A$

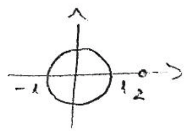
$\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) = (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_2, \beta y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2) \overset{?}{\in} A$

$$a(\alpha x_1+\beta x_2)+b(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha\underbrace{(a x_1+b y_1)}_{=0}+\beta\underbrace{(a x_2+b y_2)}_{=0}=0$$

Răsp. : <u>DA</u>! $\quad A \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$

b) $D_1 \not\leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ deoarece $1 \in D_1$ și $1+1=2 \notin D_1$  - dreaptă.

b') $D_2 \Rightarrow$ discul unitate



$D_2 \not\leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ deoarece $(1,0)\in D_2$ și $(1,0)+(1,0)=(2,0)\notin D_2$.

b'') $D_n \not\leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n$ deoarece $(1,\underbrace{0,\dots,0}_{n-1})\in D_n$ și $(1,0,\dots,0)+(1,0,\dots,0)=$

$=(2,0,\dots,0)\notin D_n$.

c) $P_n(\mathbb{R}) \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]$

$P_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ (grad $0=-\infty<n \Rightarrow 0\in P_n(\mathbb{R})$).

Fie $f,g\in P_n(\mathbb{R})$, $f=a_0+a_1X+\dots+a_nX^n$, $a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$.

$g=b_0+b_1X+\dots+b_nX^n$, $b_0,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R}$

$f+g=(a_0+b_0)X+\dots+(a_n+b_n)X^n\in P_n(\mathbb{R})$.

Fie $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha f=(\alpha a_0)+(\alpha a_1)X+\dots+(\alpha a_n)X^n\in P_n(\mathbb{R})$.

d) grad $0=-\infty<n$, $\forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow 0\notin\{f\in\mathbb{R}[X] \mid \text{grad } f=n\}$

$\Rightarrow \{f\in\mathbb{R}[X]\mid \text{grad } f=n\}\not\leq_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[X]$.

⑥ Fie V K-sp. vect., $A\leq_K V$, $(A\neq\{0\},\ A\neq V)$

a) Este $C_V A = V\setminus A$ subsp. în V? $\quad$ - complementara în V al lui A

$0\in A \Rightarrow C_V A \not\ni 0 \Rightarrow C_V A \not\leq_K V$. $\quad A\leq_K V \Rightarrow 0\in A \Rightarrow 0\notin C_V A$

b) Dar $C_V A \cup \{0\}$?

- uneori da, alteori nu.
- este da: $A=\{0\}$, $A=V$. (atunci îl luăm pe A diferit, în ip.)

<u>Răsp</u>: în general, nu! $\quad$ OBS: Răsp.: DA pt. $A=\{0\}$ sau $A=V$.

<u>Ex</u>: $V = \mathbb{R}[X]$, $K = \mathbb{R}$

$C_V A = \{ f \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad } f \geq n+1 \}$

$C_V A \cup \{0\} \not\leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]$

$1 + X^{n+1} \in C_V A \cup \{0\}$

$-X^{n+1} \in C_V A \cup \{0\}$

$(1 + X^{n+1}) + (-X^{n+1}) = 1 \notin C_V A \cup \{0\}$.

<u>Subspațiu generat.</u>

Fie K corp comutativ, V K-sp. vectorial, $A \subseteq V$, $\overset{\neq \phi}{X} \subseteq V$.

- $A \leq_K V \iff \begin{cases} A \neq \phi \\ \forall x, y \in A,\ x+y \in A \\ \forall \alpha \in K,\ \forall x \in A,\ \alpha x \in A \end{cases} \iff \begin{cases} A \neq \phi \\ \forall x, y \in A,\ \forall \alpha, \beta \in K, \\ \alpha x + \beta y \in A. \end{cases}$

- subspațiul generat de X:

$v \in \langle X \rangle \iff \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, \overset{\in K}{\alpha_1, \ldots, \alpha_n},\ \exists\, x_1, \ldots, x_n \in X$:

$v = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$. $\Rightarrow$ combinație liniară

<u>obs</u>: 1) Subspațiile lui $_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$ sunt: $\{(0,0)\}$, $\mathbb{R}^2$, dreptele care trec prin origine.

2) Subspațiile lui $_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ sunt: $\{(0,0)\}$, $\mathbb{R}^3$, dreptele care trec prin origine, planele care trec prin origine.

(dacă luăm un punct care nu e în planul care trece prin origine $\Rightarrow \mathbb{R}^3$).

Lista 8

1. Fie V K-sp. vectorial, $S \leq_K V$, $x \in V \setminus S$, $y \in V$.

Notăm $< S \cup \{y\} > = < S, y >$. Să se arate că:

$$x \in < S, y > \Rightarrow y \in < S, x >$$

$x \in < S, y > \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K, \exists\, s_1, \dots, s_n \in S$ a.î.

$$x = \alpha y + \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n \qquad (1)$$

Presupunem că $\alpha = 0$, $(1) \Rightarrow x = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n \in S$ contradicție $(x \in V \setminus S)$.

$\Rightarrow \alpha \neq 0 \overset{K \text{ corp}}{\Rightarrow} \exists\, \alpha^{-1} \in K$.

Din $(1) \Rightarrow \alpha y = x - \alpha_1 s_1 - \alpha_2 s_2 - \dots - \alpha_n s_n \quad | \cdot \alpha^{-1}$

$$y = \alpha^{-1} x - (\alpha^{-1}\alpha_1) s_1 - \dots - (\alpha^{-1}\alpha_n) s_n \in < S, x >$$