Drd. Minuță Aurelian

Algebră liniară

Seminar 1.

– Monoizi, grupuri, inele și corpuri –

Structuri algebrice cu o singură operație

- **Def.** Fie M o mulțime. O funcție $\varphi: M \times M \to M$ s.n. lege de compoziție (op. internă) pe M.
  (M, φ) s.n. grupoid.

- **Notații** $\varphi = *$ $\quad \varphi(x,y) = x * y$
  $\varphi = +$ $\quad \varphi(x,y) = x + y$
  $\varphi = \cdot$ $\quad \varphi(x,y) = x \cdot y$

- Fie $(M, *)$ un grupoid.
  Legea: $*$ este asociativă dc. $\forall x,y,z \in M$, $(x*y)*z = x*(y*z)$.
  $*$ este comutativă dc. $\forall x,y \in M$, $x*y = y*x$
  $*$ admite elem. neutru dc. $\exists e \in M$ a.î. $\forall x \in M$, $x*e = e*x = x$.

Dacă $*$ admite elem. neutru atunci putem discuta și despre elemente simetrizabile:
$x \in M$ elem. simetrizabil dc. $\exists x' \in M$ a.î. $x * x' = x' * x = e$.

Fie $S \subseteq M$. S este parte stabilă în $(M,*)$ dc.
$\forall x,y \in S$, $x*y \in S$.

Atunci $*|_{S\times S} : S\times S \to S$ este legea de compoziție indusă de $*$ pe S.

Obs. 1) $*$ este asoc $\Rightarrow *|_{S\times S}$ este asoc.
2) $*$ este com. $\Rightarrow *|_{S\times S}$ este com.
} se moștenesc

3) $*$ adm. elem. neutru $\not\Rightarrow$ în general $*|_{S\times S}$ adm. elem. neutru

Exemplu: $(\mathbb{N},+)$ admite elem neutru pe 0
$\mathbb{N}^*$ parte stabilă în $(\mathbb{N},+)$, dar
$+$ pe $\mathbb{N}^*$ NU admite elem. neutru.

Notații	operație	elem. neutru	simetricul lui x
arbitrară	$*$	e	x'
aditivă	$+$	0 (elem. nul)	$-x$ (elem. opus)
multiplicativă	$\cdot$	1 (elem. unitate)	x^{-1} (invers)

• $\underbrace{\underbrace{(M,*) \text{ grupoid și } * \text{ este asoc.}}_{(M,*) \text{ semigrup}} \text{ și } * \text{ adm. elem. neutru}}_{(M,*) \text{ monoid.}}$

• Dacă în plus toate elem sunt simetrizabile atunci $(M, *)$ grup.

$$\left(\begin{array}{ll} \forall x, y, z \in M & (x * y) * z = x * (y * z) \\ \exists e \in M \text{ a.î. } \forall x \in M & x * e = e * x = x. \\ \forall x \in M, \exists x' \in M \text{ a.î. } & x * x' = x' * x = e \end{array}\right)$$

• Dacă în plus $*$ este comutativă at. $(M, *)$ grup comutativ / abelian.

<u>Exemple numerice de bază:</u>

1) $\mathbb{N}$ mulțimea numerelor naturale.

- $(\mathbb{N}, +)$ monoid comutativ care NU e grup.
  elementele care au opus: 0.
- $\mathbb{N}^*$ parte stabilă în $(\mathbb{N}, +)$
- $(\mathbb{N}^*, +)$ semigrup comutativ.
- $(\mathbb{N}, \cdot)$ monoid comutativ. elem. inv: 1.
- $\mathbb{N}^*$ parte stabilă în $(\mathbb{N}, \cdot)$
- $(\mathbb{N}^*, \cdot)$ monoid. comutativ.

2) $\mathbb{Z}$ mulțimea nr. întregi.

- $(\mathbb{Z}, +)$ grup abelian
- $\mathbb{Z}^*$ NU este p. stabilă în $(\mathbb{Z}, +)$ $(2+(-2)=0, 0 \notin \mathbb{Z}^*)$
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ monoid comutativ. Elem. inv: 1 și -1.
- $\mathbb{Z}^*$ este p. stab. în $(\mathbb{Z}, \cdot)$
- $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ monoid comutativ.

3) $\mathbb{Q}$ mulț. nr. raționale.

- $(\mathbb{Q}, +)$ grup abelian
- $(\mathbb{Q}, \cdot)$ monoid com. Elem. inv. $\mathbb{Q}^*$.
- $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ grup abelian

4) $\mathbb{R}$ mulț. nr. reale.

- $(\mathbb{R}, +)$ grup abelian
- $(\mathbb{R}, \cdot)$ monoid com. Elem. inv $\mathbb{R}^*$.
- $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ grup abelian

5) $\mathbb{C}$ mulț. nr. complexe.

- $(\mathbb{C}, +)$ grup ab.
- $(\mathbb{C}, \cdot)$ monoid com. Elem. inv $\mathbb{C}^*$
- $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ grup. ab.

6) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mulț. nr. iraționale

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ NU este p. stab în $(\mathbb{R}, +)$

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$$

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ NU este p. stab. în $(\mathbb{R}, \cdot)$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}.$$

• Exercițiul 1. Fie $(M, \cdot)$ un monoid și $U(M) = \{ x \in M \mid \exists\, x^{-1} \in M \text{ a.î. } x x^{-1} = x^{-1} x = 1 \}$.
mulț. elem. inversabile ale monoidului $(M, \cdot)$.
S.s.a.c $U(M)$ este p. stab. în $(M, \cdot)$ și împreună cu op. indusă de $\cdot$, este grup numit grupul elem. inv. ale monoidului M.

Sol: $x, y \in U(M) \xrightarrow{?} x\cdot y \in U(M)$, și $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

$$(x\cdot y)\cdot(y^{-1}\cdot x^{-1}) = x\cdot\underbrace{(y\cdot y^{-1})}_{=1}\cdot x^{-1} = x\cdot x^{-1} = 1.$$

$(y^{-1}\cdot x^{-1})\cdot(x\cdot y) = \dots$ (temă).

Așadar $U(M)$ p. stab. în $(M,\cdot)$.

$(U(M), \cdot)$ grup?

$\uparrow$ op. indusă

asoc. se moștenește.

evident $1 \in U(M)$ $(1^{-1}=1)$

$\forall x \in U(M)$ $(x^{-1})^{-1} = x \Rightarrow x^{-1}$ este inversabil $\Rightarrow x^{-1} \in U(M)$

Așadar $(U(M), \cdot)$ grup.

- Aplicații:

1) Pentru monoidul $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\} = U_2$ este grupul rădăcinilor de ordinul 2 ale unității.

2) Fie M o mulțime, $M^M = \{f \mid f: M \to M\}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

$a \longmapsto f(a) \longmapsto g(f(a)) = (g\circ f)(a)$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & M \arrow[r, "g"] & M \end{tikzcd} \qquad (g\circ f)(x) = g(f(x)),\ \forall x\in M.$$

$(M^M, \circ)$: - asociativă

- în general NU e comutativă (doar dc. $|M|=1$)
- elem. neutru: $1_M : M \to M$, $1_M(x) = x$, $\forall x \in M$

↳ funcția identică

$\Rightarrow (M^M, \circ)$ monoid (necomutativ în general).

$U(M^M) = \{ f : M \to M \mid \exists f^{-1} : M \to M$ a.î. $f\circ f^{-1} = f^{-1}\circ f = 1_M \}$.

$= \{ f : M \to M \mid f$ bijectivă$\}$.

$= S_M$ mulț. permutărilor lui M.

Dacă $M = \{1, 2, \dots, n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, $S_M = S_n$ mulț. permutărilor de n elemente.

$(S_n, \circ)$ s.n. grupul simetric de gradul n.

Dacă $\sigma \in S_n$, putem identifica pe σ prin tabloul:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{elem. mulțimii} \\ \leftarrow \text{imaginile lor care sunt tot} \end{array}$$

elementele mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$ eventual scrise în altă ordine.

$\sigma \circ \tau \overset{not}{=} \sigma\tau$ "produsul lui σ cu τ". $|S_n| = n!$

• Dacă $n=1 \Rightarrow S_1=\{e\}$
↳ permutarea identică, $e=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$(S_1, \circ)$ grup ab.

• Dacă $n=2 \Rightarrow S_2=\left\{e=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}, (1\ 2)=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\right\}$

$(S_2, \circ)$ grup ab.

$\circ$	e	$(1,2)$
e	e	$(1,2)$
$(1,2)$	$(1,2)$	e

• Dacă tabla este sim. față de diag. principală at. legea este comut.

• Dacă $n=3$, $(S_3, \circ)$ grup necomutativ.

$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$, $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$

$\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$

(începem de aici) $\nparallel$

$\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$

• Pentru $n\geq 3$ $(S_n, \circ)$ grup necomutativ.

$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&\dots&n\\2&1&3&4&\dots&n\end{pmatrix}$ $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&\dots&n\\3&2&1&4&\dots&n\end{pmatrix}$

Analog $\sigma\tau\neq\tau\sigma$.

Signatura unei permutări

- Fie $\sigma \in S_n$ și $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.
  Perechea (i, j) este o inversiune a lui σ dc.
  $$i < j \text{ și } \sigma(i) > \sigma(j).$$
- Permutarea σ s.n. pară (r. impară) dc. nr-ul inversiunilor lui σ este par (r. impar).
- $\mathrm{Inv}(\sigma) \overset{\text{not}}{=}$ nr-ul inversiunilor lui σ.
  $\varepsilon : S_n \to \{-1, 1\}$, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\mathrm{Inv}(\sigma)}$
  Numărul $\varepsilon(\sigma)$ s.n. signatura sau semnul perm. σ.
  $\Rightarrow$ " σ este pară (r. impară) $\Leftrightarrow \varepsilon(\sigma) = 1$ (r. $\varepsilon(\sigma) = -1$)"

Signatura unei transpoziții

- Fie $n \geq 2$ și $k, l \in \{1, \dots, n\}$, $k < l$. Permutarea

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & l-1 & l & l+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & k-1 & l & k+1 & \dots & l-1 & k & l+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

s.n. transpoziție și se notează $(k\ l)$ sau $(l\ k)$.
Avem $\mathrm{Inv}(k\ l) = (l-k) + (l-k+1) = 2(l-k) - 1$
$\Rightarrow \varepsilon(k\ l) = -1$.

Așadar orice transpoziție este o perm. impară.

Signatura ca morfism de grupuri

Perechea (i,j) este o inversiune a lui $\sigma \Leftrightarrow$

$$\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}<0.$$

Deoarece σ este o bijecție rezultă cu ușurință că $\varepsilon(\sigma)=\prod\limits_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$. $\quad(*)$

Exercițiu: Fie $n\geq 2$. S.s.a.c funcția $\varepsilon: S_n \to U_2$ este un morfism surjectiv al grupului $(S_n,\circ)$ pe grupul $(U_2,\cdot)$ al rădăcinilor de ordinul 2 ale unității.

Sol: Recap: fie $(G_1,*_1)$ și $(G_2,*_2)$ grupuri.

O fct. $f:G_1\to G_2$ s.n. morfism dc.

$f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y)$, $\forall x,y\in G_1$.

Fie $\sigma,\tau\in S_n$ arbitrare.

$$\varepsilon(\sigma\circ\tau)\overset{(*)}{=}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{j-i}=$$

$$=\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)}\cdot\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}=\varepsilon(\sigma)\cdot\varepsilon(\tau)$$

$\Rightarrow \varepsilon$ morfism de gr. Surjectivitate: $\varepsilon(e)=1$ $\varepsilon(1\ 2)=-1$.