Seminar 6 05 noiembrie 2020

Funcții

Relația $f=(A,B,F)$, $F \subseteq A\times B$ s.n. funcție
$\Longleftrightarrow$ $\forall a\in A$, $f\langle a\rangle$ are exact un elem.
$\Longleftrightarrow$ $\forall a\in A$, $\exists!\, b\in B$ a.î. $a\,f\,b$.

Notații: $A = \mathrm{dom}\, f$ $\qquad f: A\to B$
$B = \mathrm{codom}\, f$ $\qquad A \xrightarrow{f} B$
$f(A) = \mathrm{Im}\, f$
$F = G_f$. $\qquad f\langle a\rangle = \{b\} \Leftrightarrow f(a)=b \Leftrightarrow a \mapsto b$.

(41) Fie $f=(A,B,R)$ o rel. S.s.a.c f este funcție $\Longleftrightarrow$
$1_A \subseteq f^{-1}\circ f$ și $f\circ f^{-1} \subseteq 1_B$.

Soluție: "$\Rightarrow$" Pp f funcție. Vrem $1_A \subseteq f^{-1}\circ f$ și
$f\circ f^{-1}\subseteq 1_B$.

Dem. că $\underbrace{1_A}_{\{(a,a)\,|\,a\in A\}} \subseteq f^{-1}\circ f \Longleftrightarrow a\, f^{-1}\circ f\, a$, $\forall a\in A$. (?)

$f^{-1}\circ f = (A,A,R^{-1}\circ R)$ ✓

Fie $a\in A \xRightarrow{f \text{ funcție}} \exists!\, b\in B$ aî $a\,f\,b \Rightarrow b\, f^{-1}\, a$.

$a\,f\,b$ și $b\,f^{-1}\,a \Rightarrow a\, f^{-1}\circ f\, a$.

Dem că $f \circ f^{-1} \subseteq 1_B \iff$ „$\forall b_1, b_2 \in B$ a.î. $b_1 f \circ f^{-1} b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$"

$f \circ f^{-1} = (B, B, R \circ R^{-1})$ ✓

Fie $b_1, b_2 \in B$ a.î. $b_1 f \circ f^{-1} b_2 \Rightarrow \exists x \in A \cap A$ a.î. $b_1 f^{-1} x$ și $x f b_2$

$\Rightarrow \exists x \in A$ a.î. $x f b_1$ și $x f b_2 \xRightarrow{f \text{ funcție}} b_1 = b_2$.

„$\Leftarrow$" Pp. $1_A \subseteq f^{-1} \circ f$ și $f \circ f^{-1} \subseteq 1_B$. Vrem f funcție

$\Updownarrow$

$\forall a \in A, |f\langle a \rangle| = 1$.

Fie $a \in A$ arbitrar. $\Rightarrow a \, 1_A \, a$

$\left.\begin{array}{l} a \, 1_A \, a \\ 1_A \subseteq f^{-1} \circ f \end{array}\right\} \Rightarrow a f^{-1} \circ f a \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists b \in B$ a.î. $a f b$ și $b f^{-1} a$.

Cum $a f b \Rightarrow b \in f\langle a \rangle \Rightarrow |f\langle a \rangle| \geq 1$

Fie $b, b' \in f\langle a \rangle \Rightarrow a f b$ și $a f b'$

$\Downarrow$

$b f^{-1} a$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow b \, f \circ f^{-1} b' \\ f \circ f^{-1} \subseteq 1_B \end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow b \, 1_B \, b' \Rightarrow b = b' \Rightarrow |f\langle a \rangle| \leq 1$

Așadar $|f\langle a \rangle| = 1$.

$\boxed{\text{Ex 43 (acum 42)}}$ în suportul de curs!

Familie de elemente și familie de mulțimi

Fie U o mulțime și I o mulțime.

Def. O fct. $f: I \to U$ s.n. familie de elem. din U indexată de I.

Notație: $f = (a_i)_{i \in I}$

Exemple: mulțimile ordonate sunt familii de elem:

perechea $f: \{1, 2\} \to U$

$$f(1) = a_1 \qquad f = (a_1, a_2)$$
$$f(2) = a_2$$

șir $f: \mathbb{N} \to U \qquad f = (a_0, a_1, a_2, \dots)$

Def. O fct. $f: I \to \mathcal{P}(U)$ s.n. familie de mulțimi.

Notație: $f = (A_i)_{i \in I}$

Operații: $\bigcup_{i \in I} A_i \overset{def}{=} \{x \in U \mid \exists i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}$

$$\bigcap_{i \in I} A_i \overset{def}{=} \{x \in U \mid \forall i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}$$

Familie de elemente și familie de mulțimi

- Exerciții -

actual ex 43

$\boxed{\text{Ex. 44/pg. 30}}$ Să se demonstreze următoarele identități, unde $A_{ij}, A_i, B_j, A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ pentru orice $i \in I$, $j \in J$:

a) $\bigcup_{i\in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij} = \bigcup_{j\in J} \bigcup_{i\in I} A_{ij}$

Soluție: Pentru orice $x \in \mathcal{U}$ avem:

$x \in \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J} A_{ij} \Leftrightarrow \exists\, i \in I$ a.î. $x \in \bigcup_{j\in J} A_{ij} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\, i \in I, \exists\, j \in J$ a.î. $x \in A_{ij} \xLeftrightarrow{\exists x \exists y A \Leftrightarrow \exists y \exists x A}$

$\Leftrightarrow \exists\, j \in J, \exists\, i \in I$ a.î. $x \in A_{ij} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\, j \in J$ a.î. $x \in \bigcup_{i\in I} A_{ij} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} A_{ij}$

$\square$

b) $\bigcap_{i\in I} \bigcap_{j\in J} A_{ij} = \bigcap_{j\in J}\bigcap_{i\in I} A_{ij}$.

Indicație: vezi punctul a)

c) $C\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} C(A_i)$

Soluție: Pentru orice $x \in \mathcal{U}$ avem:

$x \in C\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \Leftrightarrow \overline{x \in \bigcup_{i\in I} A_i} \Leftrightarrow \overline{\exists i \in I \text{ ai } x \in A_i}$

$\xLeftrightarrow{\neg(\exists x A) = \forall x \neg A} \forall i \in I$ avem $\overline{x \in A_i} \Leftrightarrow \forall i \in I$ avem $x \in C(A_i)$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} C(A_i)$. $\square$

d) $C\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} C(A_i)$

Indicație: vezi punctul c)

f) și h) sunt în suportul de curs rezolvate (la indicații și soluții)

e) și g) sunt similare acestora

i) este similar lui j): $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)$

Soluție: Pentru orice $x \in \mathcal{U}$ avem:

$x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ sau $x \in \bigcap_{j\in J} B_j$

$\Leftrightarrow \left(\forall i \in I \text{ avem } \underbrace{x \in A_i}_{\text{nu depinde de } j}\right)$ sau $\left(\forall j \in J \text{ avem } \underbrace{x \in B_j}_{\text{nu depinde de } i}\right)$

$\Leftrightarrow \forall i \in I, \forall j \in J$ avem $x \in A_i$ sau $x \in B_j$

$\Leftrightarrow \forall (i,j) \in I \times J$ avem $x \in A_i \cup B_j$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)$. $\square$

$\boxed{Ex\ 47/pg\ 30}$ Fie $f: A \to B$ o funcție și $X_i \subset A, Y_i \subseteq B, \forall i \in I$.

Sdac:

b) $f\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(X_i)$. Să se dea un exemplu în care incluziunea este strictă.

b) $f\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(X_i)$

Fie $b \in f\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \Leftrightarrow \exists x \in \bigcap_{i\in I} X_i$ ai $b = f(x)$.

$\Leftrightarrow \exists x \in A$ ai $\forall i \in I\ x \in X_i$ și $b = f(x)$

$\Rightarrow \forall i \in I, \exists x \in A$ ai $x \in X_i$ și $b = f(x)$

$\Leftrightarrow \forall i \in I, b \in f(X_i)$

$\Leftrightarrow b \in \bigcap_{i\in I} f(X_i)$

Contraexemplu pentru incluziunea inversă:

$I = \mathbb{N}^*$

$X_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*$.

$f = sgn : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $sgn(x) = \begin{cases} -1, & dc\ x < 0 \\ 0, & dc\ x = 0 \\ +1, & dc\ x > 0. \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dar } \bigcap_{i\in I} X_i = \{0\} \Rightarrow f\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) = \{0\}. \\ f(X_i) = f\left(\left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)\right) = \{-1, 0, +1\} \Rightarrow \bigcap_{i\in I} f(X_i) = \{-1, 0, +1\} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f\left(\bigcap X_i\right) \subsetneqq \bigcap f(X_i)$.

c) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(Y_i)$.

c) Fie $a \in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right) \Leftrightarrow \exists b \in \bigcup_{i\in I} Y_i$ a.î. $f(a)=b. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists i \in I$ a.î. $\exists b \in Y_i$ a.î. $f(a)=b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists i \in I$ a.î. $a \in f^{-1}(Y_i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(Y_i)$.

Așadar $f^{-1}\left(\bigcup Y_i\right) = \bigcup f^{-1}(Y_i)$. $\square$.

Ex 48 și ex 49 sunt rezolvate în suportul de curs.