Seminar 11

Fie K corp comutativ, V K-sp. vectorial

• $x_1, \dots, x_n \in V$, $x_1, \dots, x_n$ <u>liniar independenți</u> dacă

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0 \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K).$$

• $X \subseteq V$, X bază în V

$\Leftrightarrow \begin{cases} X \text{ - liberă } \rightarrow \text{dacă elem. sale sunt liniar independente.} \\ V = \langle X \rangle \end{cases}$

$\Leftrightarrow \forall v \in V$, v se scrie în mod unic ca o combinație liniară de vectori din X

Lista 10

① Să se arate că vectorii $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (3, 2, 4)$, $v_3 = (-1, 2, -6)$ din $\mathbb{R}^3$ sunt liniar dependenți și să se găsească o relație de dependență între ei.

v_1, v_2, v_3 l.d $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ nu toți nuli a.î.

$$\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2 + \gamma \cdot v_3 = (0,0,0). \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \alpha(1,2,-1) + \beta(3,2,4) + \gamma(-1,2,-6) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \\ -\alpha + 4\beta - 6\gamma = 0 \end{cases} \quad (S)$$

Așadar v_1, v_2, v_3 l.d $\Leftrightarrow$ sistemul (S) este comp. det
$\Leftrightarrow$ det. matricii sistemului este 0.

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & -6 \end{vmatrix} \xrightarrow[L_3 + L_1]{L_2 - 2L_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 7 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 7 & -7 \end{vmatrix} = 0.$$

Cum $d=0$ și $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ este un minor princip.

$\Rightarrow \alpha, \beta$ nec. principale. și γ este nec. secundară

$(S) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = \gamma \\ 2\alpha + 2\beta = -2\gamma \end{cases}$ Luăm $\gamma = 1 \Rightarrow$

$(S) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 1 \\ 2\alpha + 2\beta = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 1. \end{cases}$

Deci $\alpha = -2, \beta = 1, \gamma = 1$ verifică $(S) \Leftrightarrow (*)$, adică

$-2v_1 + v_2 + v_3 = (0,0,0) \Rightarrow v_1, v_2, v_3$ l.d.

$\Rightarrow v_1 = \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} v_3$.

(2.) Să se dea o condiție necesară și suficientă pentru ca vectorii $v_1 = (a_1, b_1)$, $v_2 = (a_2, b_2)$ să formeze o bază în $\mathbb{R}^2$. Să se interpreteze geometric ac. condiție. Folosind condiția stabilității, găsiți o infinitate de baze a lui $\mathbb{R}^2$. Există o bază în $\mathbb{R}^2$ în care coordonatele unui vector $v = (x,y)$ să coincidă cu x, și y? Să se arate că $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (1,1)$ formează o bază în $\mathbb{R}^2$ și să se găsească coord. lui $v = (x,y)$ în această bază.

v_1, v_2 formează o bază în $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall\, v = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists!\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \quad (1)$$

$(1) \Leftrightarrow (x,y) = \alpha_1 (a_1, b_1) + \alpha_2 (a_2, b_2)$

$\Leftrightarrow (x,y) = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2)$

$\Leftrightarrow (2) \begin{cases} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = x \\ \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = y \end{cases}$ $\to$ sistem de 2 ec. cu 2 nec. (α_1, α_2).

v_1, v_2 formează o bază în $\mathbb{R}^2$ $\Leftrightarrow$ sist. (2) este compatibil det.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow (a_2, b_2) \notin \{(a_1 t, b_1 t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

↳ ec. parametrică a dreptei
· dreapta care trece prin origine și prin punctul (a_1, b_1).

- $\Leftrightarrow \underbrace{(0,0), (a_1, b_1), (a_2, b_2) \text{ nu sunt coliniare.}}_{\text{interpretarea geometrică}}$

- Conform condiției de mai sus orice 2 perechi care corespund la 2 puncte care împreună cu $(0,0)$ formează un Δ vor forma o bază în $\mathbb{R}^2$. De exemplu, $\forall$ 2 perechi corespunzătoare unui punct de pe Ox diferit de 0 și unui punct de pe Oy diferit de 0: $\{(\beta, 0), (0, \delta)\}$, $\beta \neq 0 \neq \delta$, arbitrari din $\mathbb{R}$, vor forma bază în $\mathbb{R}^2$

(2) $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ care se numesc coordonatele lui v în baza (v_1, v_2)

- - obscisa să fie x, ordonata să fie y.
  - coord. să coincidă cu componentele.

$e = (e_1, e_2)$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ baza canonică

$v = (x, y) = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$

$v = (x, y) = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2$

$\left.\begin{array}{l} x = \alpha_1 \\ y = \alpha_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow v_1 = e_1, v_2 = e_2$

- $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (1, 1)$.

v_1, v_2 formează bază în $\mathbb{R}^2$ $\Leftrightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} \neq 0$

Coord. lui $v = (x, y)$ în baza (v_1, v_2) se obțin ~~din~~ rezultatele sist.:

$$(2') \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x \\ \alpha_2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x - y \\ \alpha_2 = y \end{cases}$$

<u>Temă</u>: Formulați o problemă similară pt. $\mathbb{R}^3$.

- 3 vectori vor forma o bază
- împreună cu originea vor forma un tetraedru.

③ Să se determine $a \in \mathbb{R}$ a.î. vectorii $v_1 = (a, 1, 1)$, $v_2 = (1, a, 1)$, $v_3 = (1, 1, a)$ să formeze o bază a lui $\mathbb{R}^3$.

$$v_1, v_2, v_3 \text{ formează o bază în}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \underset{\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3}{\iff} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \underset{C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a+2 & a & 1 \\ a+2 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_2-L_1}{=} (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot (a-1)$$

$$= (a+2)(a-1)^2$$

$(a+2)(a-1)^2 \neq 0 \iff a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

④ Care din următoarele submulțimi ale lui $\mathbb{R}^3$:

a) $\{(1,0,-1), (2,5,1), (0,-4,3)\}$

b) $\{(2,-4,1), (0,3,-1), (6,0,1)\}$

c) $\{(1,2,-1), (1,0,3), (2,1,1)\}$

d) $\{(-1,3,1), (2,-4,-3), (-3,8,2)\}$

e) $\{(1,-3,-2), (-3,1,3), (-2,-10,-2)\}$

sunt baze ale $\mathbb{R}$-sp. vectorial $\mathbb{R}^3$?

a) Fie $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (2, 5, 1)$, $v_3 = (0, -4, 3) \in \mathbb{R}^3$

$$v_1, v_2, v_3 \text{ formează o bază în } \mathbb{R}^3 \iff \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \underset{L_3+L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 12 = 27 \neq 0.$$

Temă: b) c) d) e)

5) Fie V un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial şi $v_1, v_2, v_3 \in V$. Să se arate că vectorii v_1, v_2, v_3 sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă vectorii $v_2+v_3, v_3+v_1, v_1+v_2$ sunt liniar independenţi.
Suplimentar: i) Să se arate că $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle v_2+v_3, v_3+v_1, v_1+v_2\rangle$.
ii) Este proprietatea din enunţ adevărată într-un spaţiu vectorial peste un corp oarecare K?

v_1, v_2, v_3 l. indep. (ştim)

$\boxed{\Rightarrow}$ u_1, u_2, u_3 l. indep. (?)

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$ (1)

$(1) \Leftrightarrow \alpha_1(v_2+v_3) + \alpha_2(v_1+v_3) + \alpha_3(v_1+v_2) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha_1 v_2 + \alpha_1 v_3 + \alpha_2 v_1 + \alpha_2 v_3 + \alpha_3 v_1 + \alpha_3 v_2 = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha_2+\alpha_3) v_1 + (\alpha_1+\alpha_3) v_2 + (\alpha_1+\alpha_2) v_3 = 0$

$$\overset{v_1, v_2, v_3 \text{ l. indep.}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \alpha_2+\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Fie

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \phantom{v_1 +{}} v_2 + v_3 \\ u_2 &= v_1 \phantom{{}+v_2} + v_3 \\ u_3 &= v_1 + v_2 \end{aligned}\right\} + \Rightarrow \frac{1}{2}(u_1+u_2+u_3) = v_1+v_2+v_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = -\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3 \\ v_2 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3 \\ v_3 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3. \end{cases}$$

v_1, v_2, v_3 l. indep. (?)

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ (2)

$(2) \Leftrightarrow \alpha_1\left(-\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3\right) + \alpha_2\left(\frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3\right) +$

$+ \alpha_3\left(\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{3}u_3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)u_1 + \frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)u_2 + \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)u_3 = 0$

$$\overset{u_1, u_2, u_3 \text{ l. indep.}}{\Longrightarrow} \begin{cases} -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

⑥ Fie matricile

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

se arate că acestea formează o bază în $\mathbb{R}$ - sp. vect. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și să se scrie coord. lui $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ în această bază.

E_1, E_2, E_3, E_4 formează o bază în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\exists!$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ a.î.

$$X = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4. \qquad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = a \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = b \\ \alpha_3 + \alpha_4 = c \\ \alpha_4 = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = a - b \\ \alpha_2 = b - c \\ \alpha_3 = c - d \\ \alpha_4 = d \end{cases}$$

$\exists$ și sunt unici $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

$$\bullet\ X = A \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -5 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 6 \\ \alpha_4 = -2 \end{cases} \Rightarrow A = -5E_1 - E_2 + 6E_3 - 2E_4.$$