

## EXAMEN ALGEBRĂ 1

- (1) (a) Dați definiția inelului, un exemplu de inel cu unitate și un exemplu de inel care nu este unital. Justificare. **(3 puncte)**
- (b) Dați definiția spațiului vectorial, apoi dați un exemplu de spațiu vectorial peste  $\mathbb{Q}$ . Pentru exemplul dat, precizați un vector și dați un exemplu de scalar. **(3 puncte)**
- (c) Este  $A = \{(0, a) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$  sumand direct în  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$ ? În caz afirmativ, dați un exemplu de complement direct al lui  $A$  în  $\mathbb{R}^2$ . Justificare. **(3 puncte)**
- (2) (a) Să se arate că  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$  este un subspațiu al  $\mathbb{R}$ -spațiului vectorial  $\mathbb{R}^3$ . **(3 puncte)**
- (b) Fie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (x, 2x - y)$ .
- i) Arătați că  $f$  este un endomorfism al lui  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$ .
  - ii) Este  $f$  bijectiv? De ce?
  - iii) Determinați  $\text{Ker } f$  și  $\text{Im } f$ .
  - iv) Scrieți matricea lui  $f$  în baza canonică  $e = (e_1, e_2)$ .
  - v) Fie  $u_1 = e_1$  și  $u_2 = (1, 1)$ . Arătați că  $u = (u_1, u_2)$  este o bază a lui  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$ , apoi determinați  $[f]_{u,e}$ . **(6 puncte)**
- (3) Fie  $S$  și  $T$  subspațiile  $\mathbb{R}$ -spațiului vectorial  $\mathbb{R}^4$  generate astfel:
- $S = \langle u_1, u_2 \rangle$ , cu  $u_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $u_2 = (0, -1, 1, 1)$ ,
- $T = \langle v_1, v_2 \rangle$ , cu  $v_1 = (0, 0, 2, 2)$ ,  $v_2 = (0, 1, 1, 0)$ .
- Să se determine câte o bază și dimensiunea pentru fiecare dintre subspațiile  $S$ ,  $T$ ,  $S + T$  și  $S \cap T$ . **(9 puncte)**
- (4) Să se discute după parametrul real  $\alpha$  compatibilitatea sistemului de mai jos, apoi să se rezolve în  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 6 \\ -x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 2 \end{cases}.$$

**(4 puncte (discuție) + 5 puncte (rezolvare) )**

**NOTĂ:** Pentru fiecare subiect se acordă (pe lângă suma punctajelor indicate în paranteze) **1 punct** din oficiu. Punctajul final este media aritmetică a punctajelor obținute pentru fiecare subiect. Nota finală va fi disponibilă în **Academic Info** după stabilirea punctajelor ultimei grupe examinate și se va calcula așa cum a fost menționat în fișierul Examene2020.pdf.