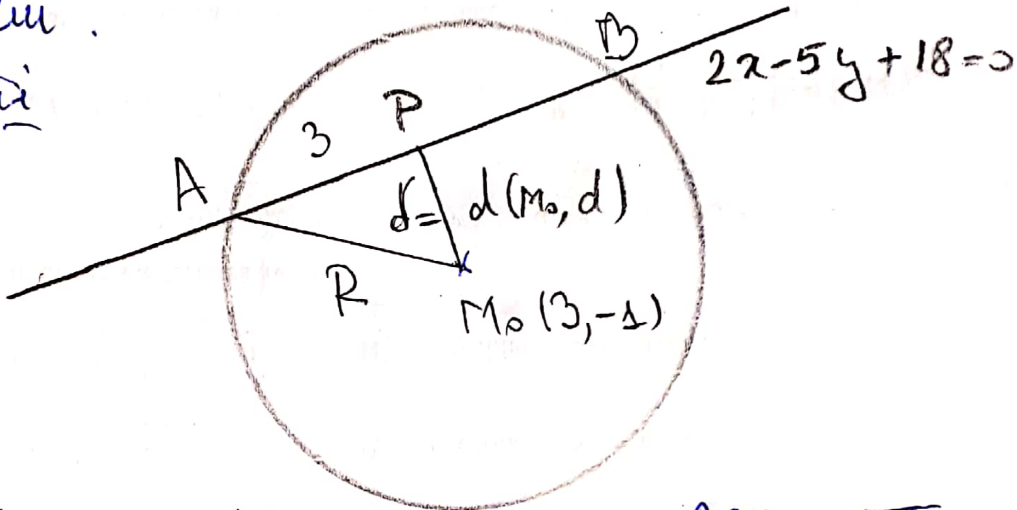
9.12.2020

Seminar 10 gr. 312

(1) Punctul $M_0(3,-1)$ este centrul unui cerc ce determină pe dreapta $2x-5y+18=0$ o coardă de lungime 6. Să se scrie ecuația cercului.

Soluție



$$\delta = d(M_0,d) = \frac{|2\cdot 3 - 5(-1) + 18|}{\sqrt{4+25}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}.$$

$$R^2 = 9 + 29 = 38$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}: (x-3)^2 + (y+1)^2 = 38$$

(2) Determinați ecuația cercului care trece prin punctele $A(3,1)$ și $B(-1,3)$ și are centrul pe dreapta $d: 3x-y-2=0$.

Soluție. $C(\alpha,\beta) \Rightarrow \boxed{3\alpha-\beta-2=0}$ (1)

$$CA = CB = R \Leftrightarrow \sqrt{(3-\alpha)^2+(1-\beta)^2} = \sqrt{(-1-\alpha)^2+(3-\beta)^2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{9}-6\alpha+\cancel{\alpha^2}+1-2\beta+\cancel{\beta^2} = 1+2\alpha+\cancel{\alpha^2}+\cancel{9}-6\beta+\cancel{\beta^2}$$

$$8\alpha - 4\beta = 0 \Leftrightarrow \boxed{2\alpha-\beta=0} \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă

$\alpha - 2 = 0$ $\quad \boxed{\alpha = 2}$ și $\boxed{\beta = 4}$

$R = \sqrt{(3-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$\mathcal{C}(c, R): \boxed{(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10}$

3. Determinați punctele de pe elipsa $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ pentru care distanța la focarul care se găsește pe semiaxa pozitivă a x-ilor pozitivi este 14.

<u>Soluție</u> $\quad a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$, $\quad b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$.

$b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 100 - 36 \Rightarrow c^2 = 64$

$\Rightarrow c = \pm 8. \quad \Rightarrow F_1(8, 0).$

$M(\alpha, \beta) \in \mathcal{E} \Rightarrow {}^{9)}\frac{\alpha^2}{100} + {}^{25)}\frac{\beta^2}{36} = 1 \qquad (1)$

și $d(M, F_1) = 14 \Leftrightarrow (\alpha - 8)^2 + \beta^2 = 196 \qquad (2)$

$\Rightarrow \begin{cases} 9\alpha^2 + 25\beta^2 = 900 \\ \alpha^2 - 16\alpha + \beta^2 + 64 = 196 \end{cases}$

$\begin{cases} 9\alpha^2 + 25\beta^2 = 900 \\ \alpha^2 - 16\alpha + \beta^2 = 132 \quad | \cdot (-25) \end{cases}$

$-16\alpha^2 + 400\alpha + 2400 = 0 \quad | : (-16)$

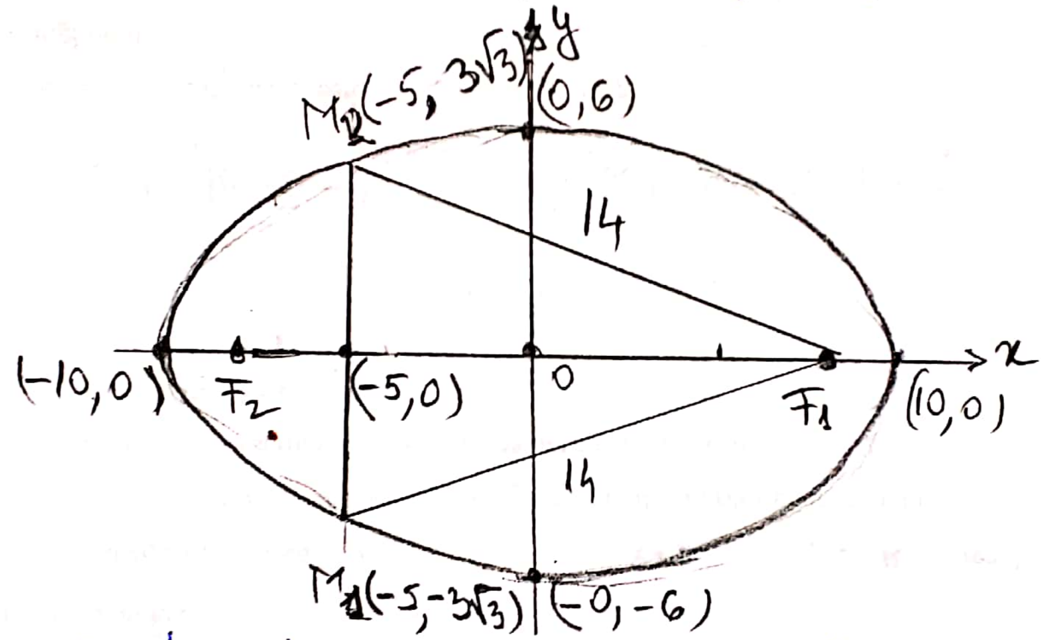
$\alpha^2 - 25\alpha - 150 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 30 \\ \alpha_2 = -5 \end{cases}$

$\alpha_1 = 30$ nu convine din punct de vedere geometric, pentru că $\alpha \in [-10, 10]$

Deci $\alpha = -5 \Rightarrow \beta^2 = \dfrac{900 - 9\cdot 25}{25} \Leftrightarrow \beta^2 = \dfrac{9\cdot 75}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta^2 = 9\cdot 3 \Leftrightarrow \beta = \mp 3\sqrt{3}$.

Deci $M_1(-5, -3\sqrt{3})$, $M_2(-5, +3\sqrt{3})$.



④. Determinați pe elipsa $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ un punct M_0 cât mai apropiat posibil de dreapta $d: 2x - 3y + 25 = 0$ și calculați distanța de la acest punct la dreapta dată.

<u>Soluție</u>.

Determinăm punctele de pe elipsă pentru care tangentele la elipsă sunt paralele cu dreapta d.

$t: \frac{x x_0}{18} + \frac{y y_0}{8} = 1$ – ecuatia tangentei la elipsă în punctul $M_0(x_0, y_0)$.

$m_t = -\frac{8x_0}{18y_0} \Leftrightarrow m_t = -\frac{4}{9} \cdot \frac{x_0}{y_0}$

$t \parallel d$; $m_d = \frac{2}{3} \Rightarrow m_t = m_d \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{4}{9} \frac{x_0}{y_0} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow -4x_0 = 6y_0 \quad |:2$

$M_0 \in \mathcal{E} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \boxed{2x_0 + 3y_0 = 0} & (1) \\ \boxed{\frac{x_0^2}{18} + \frac{y_0^2}{8} = 1} & (2) \end{cases}$$

$y_0 = -\frac{2}{3} x_0$ din (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x_0^2}{18} + \frac{\frac{4}{9} x_0^2}{\cancel{8}\,2} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x_0^2}{18} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 = 9 \Leftrightarrow$

$x_0^{1,2} = \pm 3. \Rightarrow y_0^{1,2} = \mp 2$

$\boxed{M_{0,1}(3, -2)}$; $\boxed{M_{0,2}(-3, 2)}$

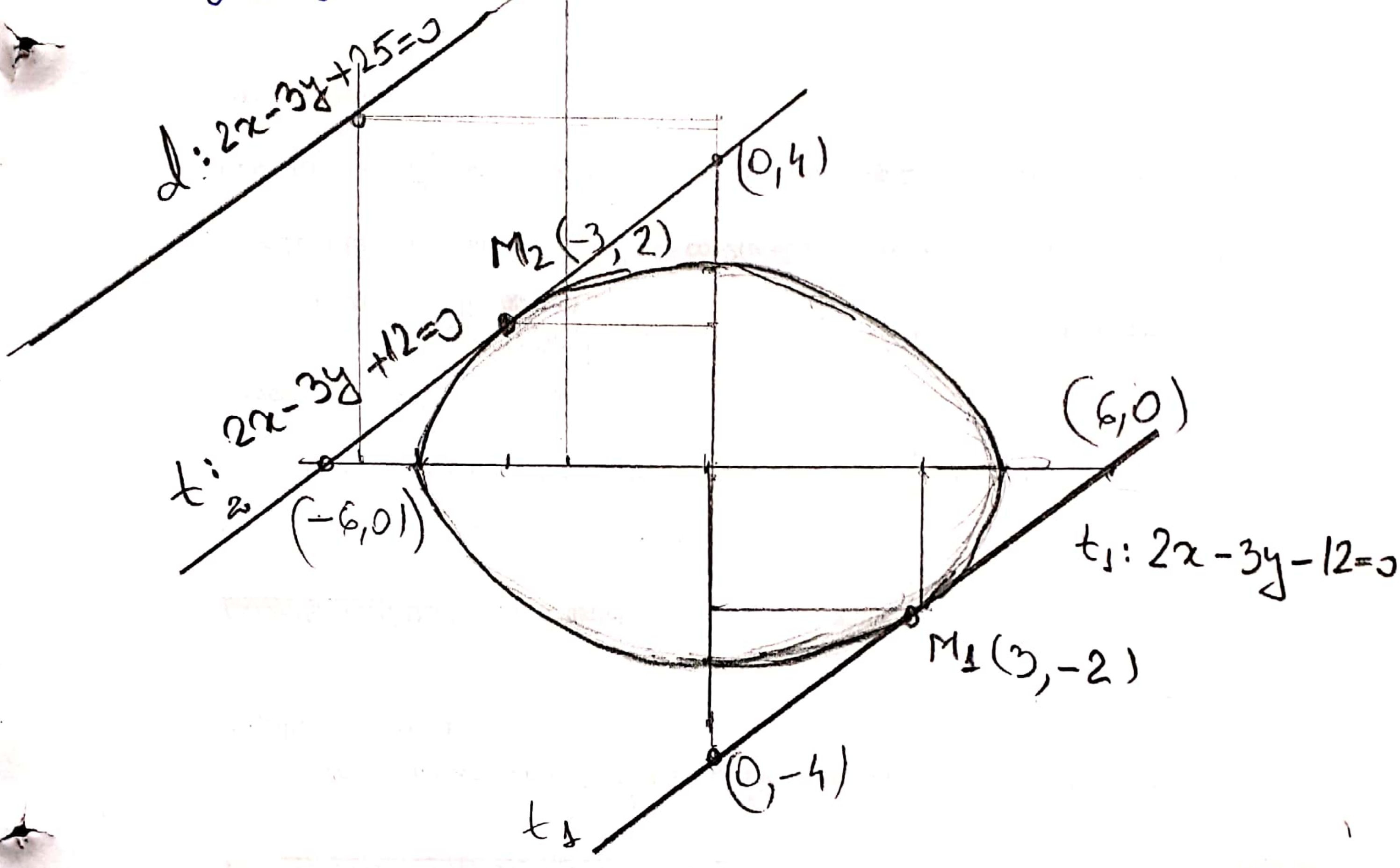
$\Rightarrow t_1: \frac{\cancel{3}x}{\cancel{18}_6} - \frac{\cancel{2}y}{\cancel{8}_4} = 1 \Leftrightarrow \boxed{2x - 3y - 12 = 0}$

$t_2: \frac{-\cancel{3}x}{\cancel{18}6} + \frac{\cancel{2}y}{\cancel{8}4} = 1 \Leftrightarrow -2x + 3y - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$t_2: \boxed{2x - 3y + 12 = 0}$

$a^2 = 18 \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$

$b^2 = 8 \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$.



$$d(t_2, d) = d(M_2, d) = \frac{|2(-3) - 3\cdot 2 + 25|}{\sqrt{4+9}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$d(t_1, d) = d(M_1, d) = \frac{|2\cdot 3 - 3(-2) + 25|}{\sqrt{4+9}} = \frac{37}{\sqrt{13}} = \frac{37\cdot\sqrt{13}}{13}$$

<u>Altă metodă de deducere a ecuației tangentelor paralele la d.</u>

$m_d = \frac{2}{3}$

$t \parallel d \Rightarrow t: y = \frac{2}{3}x + n$

intersectăm cu elipsa $\mathcal{E}: \frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$

$$\Rightarrow {}^{4/}\frac{x^2}{18} + {}^{9/}\frac{\left(\frac{2}{3}x+m\right)^2}{8} {}^{72/}= 1$$

$$4x^2+9\left(\frac{4}{9}x^2+\frac{4}{3}mx+m^2\right)-72=0$$

$$4x^2+4x^2+12mx+9m^2-72=0$$

$$\boxed{8x^2+12mx+9m^2-72=0} \quad (*)$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \quad 144m^2-4\cdot 8\cdot(9m^2-72)=0 \quad |:16$$

$$9m^2-18m^2+144=0 \Leftrightarrow 9m^2=144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^2=16 \Leftrightarrow m_{1,2}=\pm 4$$

$$\Rightarrow t_2: \; y=\frac{2}{3}x+4 \Leftrightarrow \boxed{2x-3y+12=0}$$

$$t_1: \; y=\frac{2}{3}x-4 \Leftrightarrow \boxed{2x-3y-12=0}$$

Punctul M_2 de tangență a dreptei t_2 cu elipsa se obține pentru $m=4$ în ecuația $(*)$.

$$8x^2+48x+144-72=0 \Leftrightarrow 8x^2+48x+72=0 \quad |:8$$

$$x^2+6x+9=0 \Leftrightarrow (x+3)^2=0 \Rightarrow x=-3.$$

$$\Rightarrow y=\frac{2}{3}(-3)+4 \Leftrightarrow y=2. \quad M_2(-3,2).$$

Analog $t_1 \cap \mathcal{E} = M_1(3,-2)$.

5) Demonstrați că produsul distanțelor de la un punct oarecare al hiperbolei $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ la cele două asimptote este $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

<u>Soluție</u>. Ecuațiile asimptotelor:

$a_{1,2}\ \ y=\pm\frac{b}{a}x$. Fie $M_0(x_0,y_0)\in\mathcal{H}:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow \boxed{\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1}\ (*)$

$a_1: bx+ay=0$

$a_2: bx-ay=0$

$$\delta_1=d_1(M_0,a_1)=\frac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

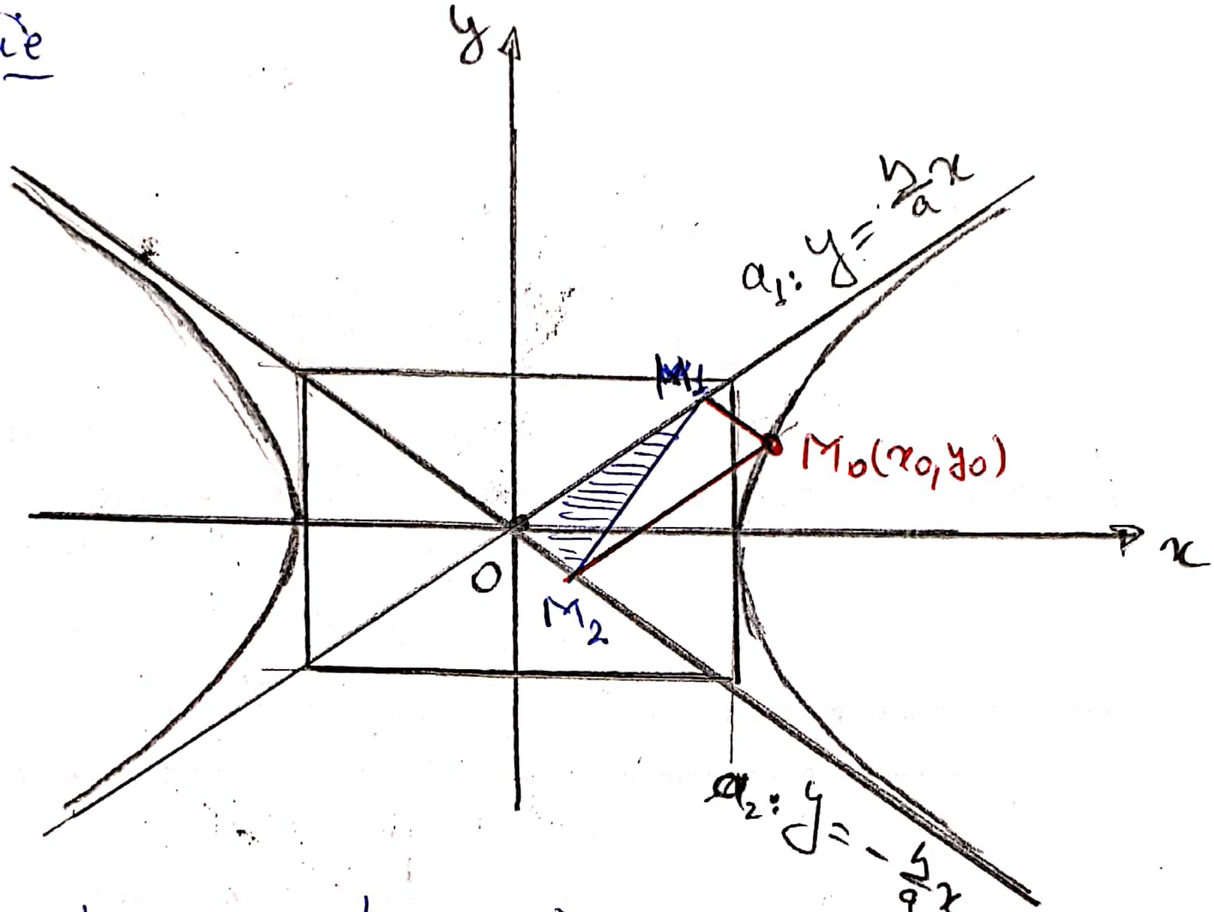
$$\delta_2=d_2(M_0,a_2)=\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\boxed{\delta_1\cdot\delta_2}=\frac{|bx_0+ay_0|\cdot|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|b^2x_0^2-a^2y_0^2|}{a^2+b^2}\overset{(*)}{=}$$

$$=\frac{|a^2b^2|}{a^2+b^2}=\boxed{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}.$$

6). Demonstrați că aria paralelogramului format de asimptotele hiperbolei $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ și dreptele duse printr-un punct oarecare al hiperbolei paralele cu asimptotele este $\frac{ab}{2}$.

Soluție



M_1: $\begin{cases} d_1 : y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0) \\ a_1 : y = \frac{b}{a}x \end{cases}$ $(d_1 \parallel a_2$ - asimptota 2$)$.

$$\frac{b}{a}x - y_0 = -\frac{b}{a}x + \frac{bx_0}{a} \iff$$

$$\iff 2 \cdot \frac{b}{a}x = y_0 + \frac{bx_0}{a} \iff \boxed{x_1 = \frac{ay_0 + bx_0}{2b}}$$

$$y_1 = \frac{b}{a} \cdot \frac{ay_0 + bx_0}{2b} \iff \boxed{y_1 = \frac{ay_0 + bx_0}{2a}}$$

M_2: $\begin{cases} d_2 : y - y_0 = \frac{b}{a} \cdot (x - x_0) \\ a_2 : y = -\frac{b}{a}x \end{cases}$

$$-\frac{b}{a}x - y_0 = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}x_0 \iff \frac{2b}{a}x = \frac{b}{a}x_0 - y_0$$

$$\iff \boxed{x_2 = \frac{bx_0 - ay_0}{2b}} \implies \boxed{y_2 = \frac{-bx_0 + ay_0}{2a}}$$

$$\mathcal{A}[OM_1M_0M_2] = 2 \cdot \mathcal{A}_{\Delta OM_1M_2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{ay_0+bx_0}{2b} & \frac{ay_0+bx_0}{2a} & 1 \\ \frac{bx_0-ay_0}{2b} & \frac{-bx_0+ay_0}{2a} & 1 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \left| \begin{vmatrix} \frac{ay_0+bx_0}{2b} & \frac{ay_0+bx_0}{2a} \\ \frac{bx_0-ay_0}{2b} & \frac{-bx_0+ay_0}{2a} \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{|ay_0+bx_0| \cdot |ay_0-bx_0|}{4ab} \cdot \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{|a^2y_0^2 - b^2x_0^2|}{\cancel{2}\,4ab} \cdot \cancel{2} = \frac{a^2b^2}{2ab} = \frac{ab}{2}.$$

(pentru că $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} \Leftrightarrow b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |a^2y_0^2 - b^2x_0^2| = a^2b^2$..