Power Series

Let $(a_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$ be a sequence of real numbers. **A power series** is series of functions of the from:

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n,$$

with the convention that the first function in this series, is the constant function a_0. Thus, for a given $x_0 \in \mathbb{R}$, we get the following series of real numbers

$$\sum_{n\geq 0} a_n {x_0}^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots.$$

A point $x_0 \in \mathbb{R}$ is called a **convergence point** of the series of real numbers $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x_0^n$, is convergent, thus

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \in \mathbb{R}\,.$$

The set of all convergence points is said to be **the convergence set of the power series** and is denoted by

$$\mathcal{C} = \left\{ x_0 \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Recall that for each power sereies

$$0 \in \mathcal{C},$$

due to the fact that

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n 0 = a_0 \in \mathbb{R}\,.$$

The convergence radius of the power series is

$$R = \frac{1}{\lambda} \quad unde \quad \lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

According to Cauchy-Hadamard' s theorem

$$(-R, R) \subseteq \mathcal{C} \subseteq [-R, R].$$

The particular cases

$$x = -R \quad and \quad x = R$$

must be analyzed separately in order to determine exactly $\mathcal{C}$.

Determine the convergence radius and the convergence set for the following power series **Exemplul 1:**

$$\sum_{n\geq 0} x^n.$$

Rezolvare:
$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1 \Longrightarrow R = 1.$$
For $x = 1$, the series of real numbers $\sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$, is divergent, thus $1 \notin \mathcal{C}$.

For $x = -1$,the series of real numbers $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ does not have a sum, due to the fact that the sequence of patial sums is constantly osscilating between 1 and 0, therefore $\nexists \lim_{n\to\infty}(-1)^n$. Astfel $-1 \notin \mathcal{C}$. În concluzie
$$\mathcal{C} = (-1, 1).$$

Remark: The power serires may be written as developed around another point in $\mathbb{R}$, case in which they are sated as
$$\sum_{n\geq 0} a_n(x - x_0)^n.$$
In such a case the convergence radus is computeted accordingly tot he algorithm above.Pentru aceste cazuri raza de convergenţă se calculează exact dupa modelul de mai sus. Singura diferenţă apare la formularea mulţimii de oconvergenţă, astfel;
$$(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq \mathcal{C} \subseteq [x_0 - R, x_0 + R].$$
Cazurile în care $x = x_0 - R$ şi $x = x_0 + R$ trebuie analizate separat pentru a preciza cu exactitate multţimea de convergenţă.

Exemplul 2 :
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}(x+2)^n.$$
Rezolvare: Seria de puteri este dezolvtată în jurul punctului $x_0 = -2$, iar şirul care o generează este $(a_n)_{n\geq 1}$, având termenul general
$$a_n = \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Calculăm
$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)(2n+3)}{n(2n+1)}\right| = 1 \Longrightarrow R = \frac{1}{1} = 1.$$
Deci
$$(-2-1, -2+1) = (-3, -1) \subseteq \mathcal{C}.$$
Verificăm pe rând capetele intervalului de convergenţă.

Pentru $x = -3$, seria de numere reale
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)} \cdot (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} \quad \sim \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2},$$
care este convergentă, deci $-3 \in \mathcal{C}$.

Pentru $x = -1$, seria de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)} \cdot (1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$ este o serie alternată. Deoarece şirul de numere reale $\left(\frac{1}{n(2n+1)}\right)_{n\geq 1}$ este descrescă tor, cu limita 0, din criteriul lui Leibniz, rezultă că avem convergenţă, astfel, $-1 \in \mathcal{C}$.

În concluzie

$$\mathcal{C} = [-3, -1].$$

Exerciţiul 1: Determinaţi mulţimea de convergenţă pentru următoarele serii de puteri:

$$a) \sum_{n\geq 0}(n+1)^n x^n \quad b) \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n} x^n \quad c) \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n} x^n \quad d) \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n(n+1)} x^n \quad e) \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n \quad f) \sum_{n\geq 0} n! x^n.$$

Integrale

Exerciţiile următaore sunte menite să vă ofere o recapitulare substanţială a thenicilor de integrare deprinse in liceu:(integrare prin părţi, schimbare de variabilă). Pentru unele dintre ele, va trebui să folosiţi aşa-numitele substituţii ale lui Euler". Acestea se aplică atunci când în funţia de integrate se întâlneşte un radical de forma

$$\sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Se va trece la integrale în funţie de noua variabliă t, făcân una din următoarele substituţii

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} \sqrt{a}x + t & \text{dacă } a > 0 \\ xt + \sqrt{c} & \text{dacă } c > 0 \\ t(x - x_0) & \text{dacă } x_0 \text{ este o soluţie a ecuaţiei } ax^2 + bx + c = 0. \end{cases}$$

Exerciţiul 1

Să se calculeze:

$a)$ $\int \frac{2x-1}{x^2 - 3x + 2} \mathrm{d}x, \;\; x \in]2, +\infty[;$

$b)$ $\int \frac{4}{(x-1)(x+1)^2} \mathrm{d}x, \;\; x > 1;$

$c)$ $\int \frac{1}{x^3 - x^4} \mathrm{d}x, \;\; x > 1;$

$d)$ $\int \frac{2x+5}{x^2 + 5x + 10}, \; x \in \mathbb{R};$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 2:

Să se calculeze:

a) $\displaystyle I = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\mathrm{d}x, \ \ x \in]0, +\infty[;$

b) $\displaystyle I = \int \frac{1}{x+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x, \ \ x \in]1, +\infty[.$

Exerciţiul 3:

Să se calculeze:

a) $\displaystyle I = \int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x-2}}\mathrm{d}x, \quad x \in]\sqrt{3}-1, +\infty[;$

b) $\displaystyle I = \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{-4x^2-x+1}}\mathrm{d}x, \quad x \in]\frac{-1-\sqrt{17}}{8}, \frac{\sqrt{17}-1}{8}[.$

Exerciţiul 4

Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3+x^2+x+1}\mathrm{d}x;$ *b*) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x;$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x;$ *d*) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x.$

Exerciţiul 5:

Să se calculeze:

$a)$ $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{x}{(x+1)(x^2+3)}\mathrm{d}x;$ $\quad b)$ $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}\mathrm{d}x;$

$c)$ $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x^3+x}\mathrm{d}x;$ $\quad d)$ $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^3+2x^2+x+4}{(x+1)^2}\mathrm{d}x.$ $e)$ $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(x+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x;$

$f)$ $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1}\mathrm{d}x;$ $\quad g)$ $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^3+2}{(x+1)^3}\mathrm{d}x.$

Exercițiul 6:

Să se calculeze:

$a)$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x;$ $\quad b)$ $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x;$

$c)$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{4x^2+x+1}}\mathrm{d}x;$ $\quad d)$ $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{x^2}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x.$

Exercițiul 7:

Să se calculeze:

$a)$ $\displaystyle\int_{2}^{3} \sqrt{x^2+2x-7}\mathrm{d}x;$ $\quad b)$ $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{6+4x-2x^2}\mathrm{d}x;$

$c)$ $\displaystyle\int_{0}^{3/4} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x;$ $\quad d)$ $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x.$

Exercițiul 8:

Să se arate că:

$a)$ $\displaystyle 2\sqrt{2} < \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+4x+5}\mathrm{d}x < 2\sqrt{10};$

$b)$ $\mathrm{e}^2(\mathrm{e}-1) < \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{x}{\ln x}\mathrm{d}x < \frac{\mathrm{e}^3}{2}(\mathrm{e}-1).$