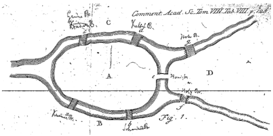
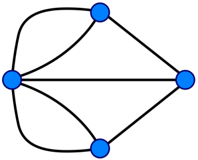




Algoritmica grafurilor

XIII. Drum critic, clică, măsuri în grafuri

Continut

Drum critic - graful activităților

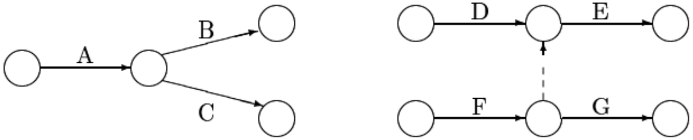
Graful activităților

un graf $G = (V, E, W)$ conex aciclic orientat cu următoarele proprietăți:

- arcele grafului reprezintă activități, ponderea arcelor reprezintă timpul necesar execuției unei activități;
- există un vârf de start, v_1, pentru care $N^{in}(v_1) = \emptyset$;
- există un vârf ce reprezintă finalul activităților, v_n, pentru care $N^{out}(v_n) = \emptyset$.

Drum critic - Introducere

Conexiuni între activități:



- activitatea A trebuie încheiată înainte ca activitățile B și C să înceapă;
- posibil să existe activități cu timp de execuție 0, folosite doar la forțarea ordinii execuției activităților.
- activitatea E poate începe doar după execuția activităților D și F, G poate începe după execuția activității F.

Drum critic

- Ne interesează timpul maxim necesar pentru a termina proiectul;
- acest timp maxim este drumul de lungime maximă în graful activităților, drumul între vârfurile de start și finalizare;
- pentru a rezolva această problemă putem folosi algoritmi de drum minim înlocuind problema de minim cu una de maxim;
- mai există o opțiune.

Drum critic - descompunere în nivele

- Un graf orientat ponderat aciclic în care arcele reprezinta activitățile (numit graf de activități);
- vârfurile grafului de activități pot fi distribuite pe nivele;
- vârful ce reprezintă activitatea de start este pe nivelul 1;
- dacă $(v_i, v_j) \in E$ atunci nivelul vârfului v_i este inferior nivelului lui v_j

Algoritmul pentru descompunere în nivele este (l este un atribut ce indică nivelul vârfului):
DESCOMPUNERE_NIVELE(G)

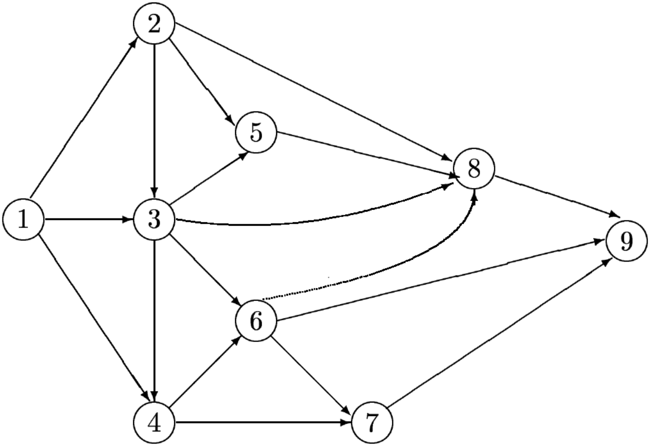
for $v \in V$ **do**
  $v.l = 1$
for $1 \leq i \leq n$ **do**
  NEXT(i)

Drum critic - descompunere în nivele (II)

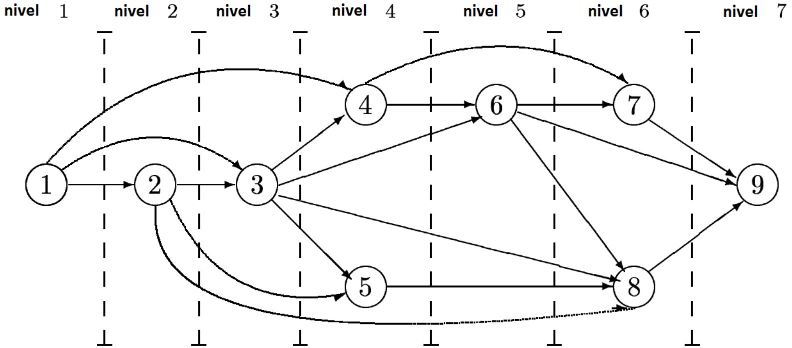
$NEXT(i)$

for $1 \leq j \leq n$ **do**
  if $(a_{ij}) \neq 0 \wedge v_j.l \leq v_i.l$ **then**
    $v_j.l = v_i.l + 1$
    if $j < i$ **then**
      $\text{NEXT}(j)$

Drum critic, descompunere în nivele - exemplu



Drum critic, descompunere în nivele - exemplu (II)

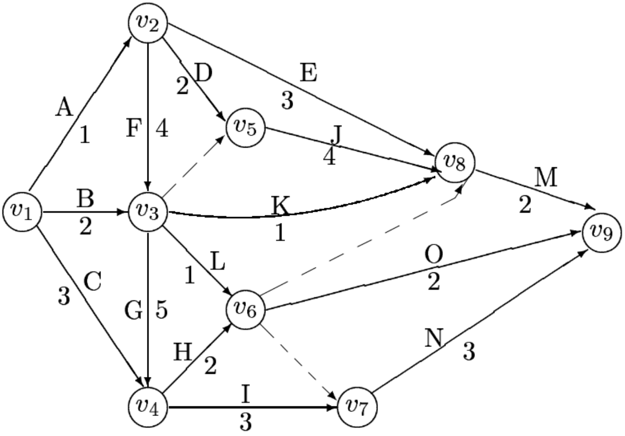


Drum critic - graful activităților

activitate	activitate precedenta	timp executie
A	–	1
B	–	2
C	–	3
D	A	2
E	A	3
F	A	4
G	B, F	5
H	C, G	2
I	C, G	3
J	B, F, D	4
K	B, F	1
L	B, F	1
M	E, H, J, K, L	2
N	H, I, L	3
O	H, L	2

Drum critic - graful activităților (II)

Graful corespunzător activităților:



Drum critic - graful activităților (III)

- Fie vârfurile grafului de activități $v_1, ..., v_n$ distribuite pe nivele în această ordine;
- algoritmul CPM (Critical Path Method) da timpii t_i și t_i^* atașați fiecărui vârf v_i din graful de activități;
- vârfurile pot fi considerate ca evenimente în proiect;
- dacă 0 este momentul începerii proiectului atunci t_i reprezintă timpul cel mai devreme și t_i^* reprezintă timpul cel mai târziu când activitățile de la evenimentul v_i pot începe.

Drum critic - graful activităților(IV)

CPM(i)

$t_1 = 0$

for $2 \leq j \leq n$ **do**

$t_j = \max_{v_i \in N^{in}(v_j)}(t_i + d_{ij})$

$t_n^* = t_n$

for $n-1 \geq i \geq 1$ **do**

$t_i^* = \min_{v_j \in N^{out}(v_i)}(t_j^* - d_{ij})$

Drum critic - graful activităților (V)

De exemplu putem avea timpii:

varf	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
t_i	0	1	5	10	5	12	13	12	16
t_i^*	0	1	5	10	10	13	13	14	16

Drum critic - graful activităților (VI)

Putem defini următoarele resurse de timp pe perioada proiectului:

- $R_t(v_i, v_j) = t_j^* - t_i - d_{ij} =$ timp disponibil, activitatea (v_i, v_j) poate să înceapă cel târziu după $R_t(v_i, v_j)$ timp fără a influența **durata totală** a proiectului;
- $R_f(v_i, v_j) = t_j - t_i - d_{ij} =$ timpul liber, activitatea (v_i, v_j) poate să înceapă cel târziu după $R_f(v_i, v_j)$ timp fără a influența **următoarea activitate**;
- $R_s(v_i, v_j) = \max\{t_j - t_i^* - d_{ij}, 0\} =$ timp sigur, activitatea (v_i, v_j) poate fi terminată cel târziu după R_s timp fără a influența durata totală a proiectului;
- vârfurile pentru care acești timpi sunt egali cu 0 sunt pe drumul critic, activitățile de pe acest drum trebuie terminate fără întârzieri.

Drum critic - graful activităților (VII)

activitate	timp executie	R_t	R_f	R_s
A	1	0	0	0
B	2	3	3	3
C	3	7	7	7
D	2	7	2	2
E	3	10	8	8
F	4	0	0	0
G	5	0	0	0
H	2	1	0	0
I	3	0	0	0
J	4	5	3	0
K	1	8	6	6
L	1	7	6	6
M	2	2	2	0
N	3	0	0	0
O	2	2	2	1

Drum critic - graful activităților (VIII)

Putem modifica algoritmul lui Floyd-Warshall pentru a determina drumul de lungime maximă între două vârfuri, pentru exemplul de mai sus aceste drumuri sunt:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
v_1	0	1	5	10	5	12	13	12	16
v_2	$-\infty$	0	4	9	4	11	12	11	15
v_3	$-\infty$	$-\infty$	0	5	0	7	8	7	11
v_4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	2	3	2	6
v_5	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$	4	6
v_6	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	0	0	3
v_7	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	3
v_8	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	2
v_9	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0

Drum critic - graful activităților (IX)

Momentele de timp t_i și t_i^*:

varf	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
t_i	0	1	**5**	10	5	12	13	12	16
t_i^*	0	1	5	10	10	13	13	14	16

Drum critic - vârfuri ca și activități

Acest model a fost discutat la seminar.

Problema clicii

Definiție

O clică este un subgraf complet al unui graf dat.

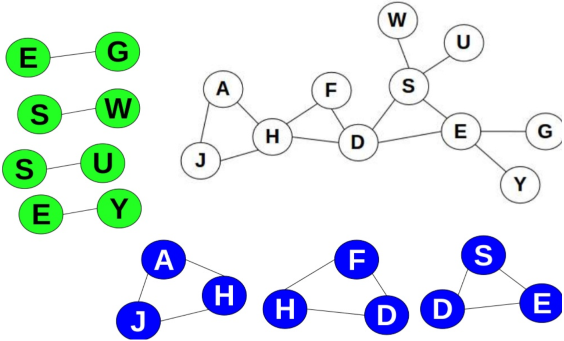
Problema presupune găsirea de mulțimi de vârfuri în graf care formează subgrafuri complete.
Problema este $NP-$completă.

Definiție

Clică maximă: un subgraf care nu poate fi extins.

Aplicații în grafuri ce reprezintă rețele sociale (găsirea de comunități), chimie, bioinformatică, etc.

Problema clicii - exemplu

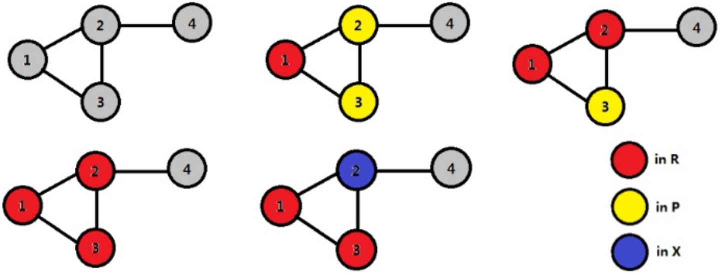


Algoritmul lui Bron-Kerbosch

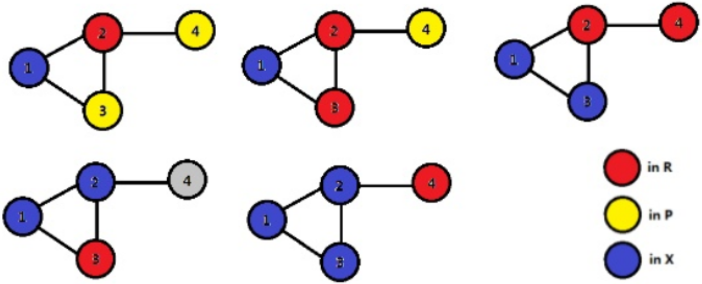
Algoritmul Bron-Kerbosch este utilizat pentru a găsi o clică maximă:

$R = \{\}$
$P = \{V\}$
$X = \{\}$
BronKerbosch(P,R,X)
if $P = X = \emptyset$
    R este o clică maximă
for $v \in P$
    BronKerbosch($P \cap N(v), R \cup \{v\}, X \cap N(v)$)
    $P = P \setminus \{v\}$
    $X = X \cup \{v\}$

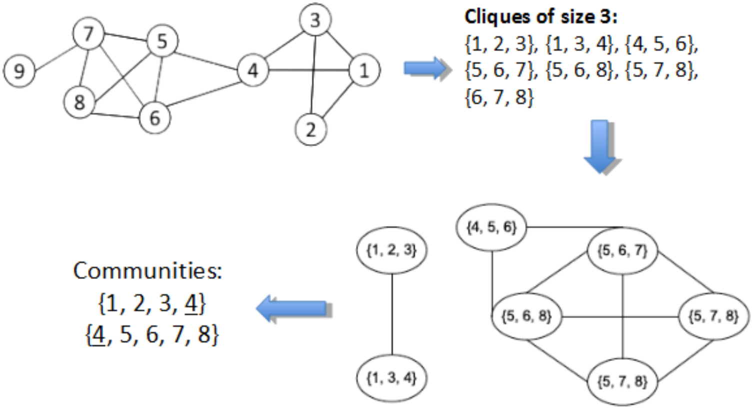
Exemplu Bron-Kerbosch



Exemplu Bron-Kerbosch (II)



Exemplu - rețele sociale



Măsuri în grafuri

- O statistică a unui graf este o valoare numerică care caracterizează acel graf.
- Exemple de astfel de valori: ordinul, dimensiunea unui graf dar și măsuri mai complexe cum ar fi diametrul și coeficientul de grupare (*clustering coefficient*).
- Aceste statistici permit caracterizarea și analiza unui graf. Ele pot fi utilizate pentru a compara, clasifica grafuri, pentru a detecta anomalii în graf, etc.
- Statisticile pot fi utilizate pentru a mapa un graf într-un spațiu numeric simplu, în care pot fi aplicate mai multe metode statistice standard.

Măsuri în grafuri

Ca și măsuri în grafuri putem defini:

1. ordinul, dimensiunea
2. gradul minim, mediu, maxim
3. reciprocitatea (*reciprocity*)
4. încărcarea (*fill*)
5. negativitatea (*negativity*)
6. LLC
7. numărul de lanțuri de lungime 2 (*wedge count*), grafelor ghiară, K_3, grafelor pătrat, *4-tour*,
8. coeficientul *power law*, *gini*
9. distribuția relativă a gradului unui vârf
10. coeficientul de grupare (*clustering coefficient*)
11. diametrul
12. *Preferential attachment*

Diametrul unui graf

Putem defini excentricitatea unui vârf într-un graf ca și lungimea maximă a drumului minim

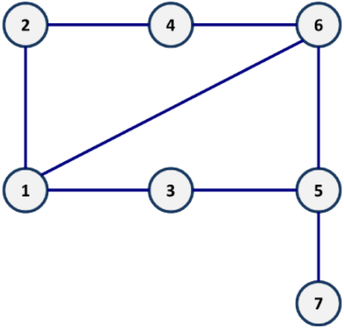
$$\epsilon(u) = \max_{v \in V} \delta(u, v)$$

unde δ este drumul minim între u și v.
Diametrul unui graf se poate defini:

$$d = \max_{u \in V} \epsilon(u) = \max_{u, v \in V} \delta(u, v)$$

Diametrul unui graf - exemplu

Care este diametrul acestui graf?



Diametrul unui graf - exemplu (II)

v	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	2	2	1	3
2	1	0	2	1	3	2	4
3	1	2	0	3	1	2	2
4	2	1	3	0	2	1	3
5	2	3	1	2	0	1	1
6	1	2	2	1	1	0	2
7	3	4	2	3	1	2	0

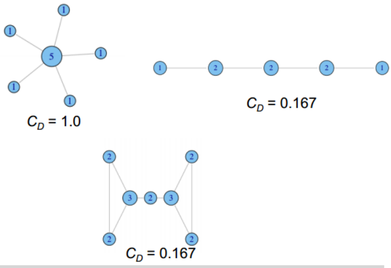
Coeficientul de centralitate - Freeman

Măsură a importanței pe baza gradurilor vârfurilor din graf.

Freeman

$$C_D = \frac{\sum_{i=1,N}[C_D(n^*) - C_D(i)]}{(N-1)(N-2)},$$

unde $C_D(n^*)$ este gradul cel mai mare din graf.



Betweenness centrality

Cât de central este un vârf.

Betweenness centrality

$$C_B(i) = \sum_{j<k} g_{jk}(i)/g_{jk},$$

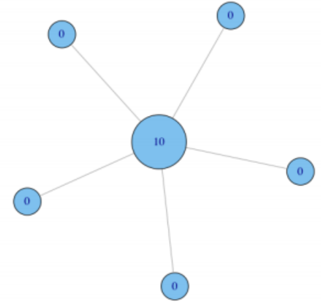
unde g_{jk} este numărul drumurilor cele mai scurte care leagă vârfurile j și k, $g_{jk}(i)$ este numărul drumurilor cele mai scurte care leagă vârfurile j și k și conțin vârful i.

Normalizare

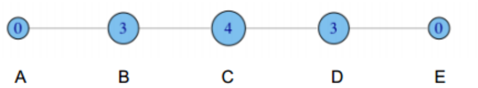
$$C'_B(i) = C_B(i)/[(N-1)(N-2)/2].$$

- normalizarea se face împărțind la numărul tuturor drumurilor posibile dacă se scoate vârful i

Betweenness centrality - exemplu

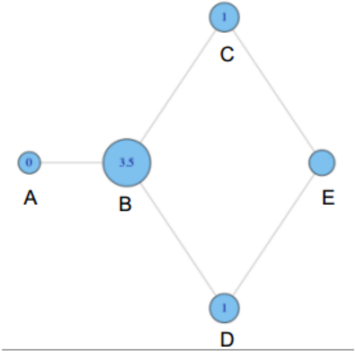


Betweenness centrality - exemplu (II)

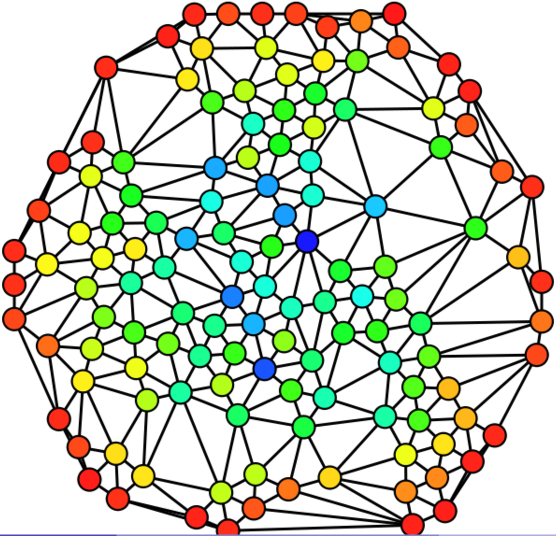


$B : (A, C), (A, D), (A, E)$
$C : (A, D), (A, E), (B, D), (B, E)$

Betweenness centrality - exemplu (III)



Betweenness centrality - exemplu (IV)



Closeness centrality

"Distanța" unui vârf față de celelalte vârfuri.

Closeness centrality

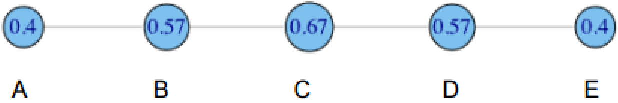
$$C_c(i) = [\sum_{j=1,N} d(i,j)]^{-1}$$

unde $d(i,j)$ este distanța între vârfurile i si j.

Normalizare

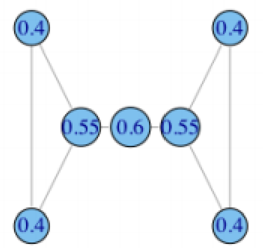
$$C'_c(i) = [\frac{\sum_{i=1,N} d(i,j)}{N-1}]^{-1}$$

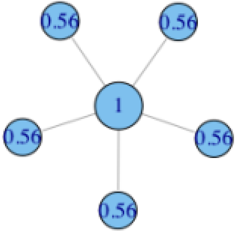
Closeness centrality - exemplu



$$C_c'(A) = \left[\frac{\sum_{j=1}^{N} d(A,j)}{N-1} \right]^{-1} = \left[\frac{1+2+3+4}{4} \right]^{-1} = \left[\frac{10}{4} \right]^{-1} = 0.4$$

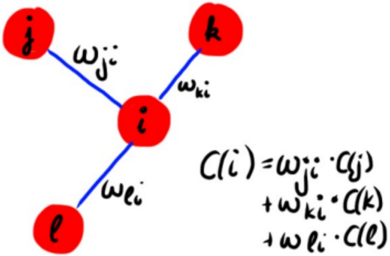
Closeness centrality - exemplu (II)





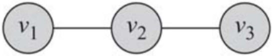
Eigencentrality (Eigenvector centrality)

O măsură a influenței unui vârf în graf.



O generalizare a măsurii de centralitate în care se ține seama și de vecini.

Eigencentrality - exemplu



Eigencentrality - exemplu (II)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \mathbf{C}_e = A\mathbf{C}_e$$

$$(A - \lambda I)\mathbf{C}_e = 0$$

$$\mathbf{C}_e = [u_1\ u_2\ u_3]^T,$$

$$\begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{C}_e \neq [0\ 0\ 0]^T,$$

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

Eigencentrality - exemplu (III)

$$(-\lambda)(\lambda^2 - 1) - 1(-\lambda) = 2\lambda - \lambda^3 = \lambda(2 - \lambda^2) = 0.$$

$$(-\sqrt{2}, 0, +\sqrt{2}).$$

$$\begin{bmatrix} 0 - \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 - \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 - \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Eigencentrality - exemplu (IV)

$$\mathbf{C}_e = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

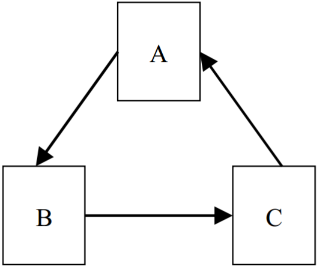
vârful C este cel mai central (important).

Page rank

$$PR(v_i) = \frac{1-d}{N} + d \sum_{v_j \in M(v_i)} \frac{PR(v_j)}{L(v_j)},$$

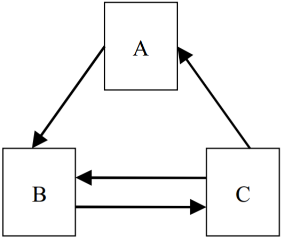
unde $M(v_i)$ este vecinătatea vârfului v_i (arcele spre interior), $L(v_j)$ este gradul spre exterior pentru vârful v_j, d este un parametru.

Page rank - exemplu



$$PR(A) = (1 - d) \times (1 / N) + d \times (PR(C) / 1)$$
$$PR(B) = (1 - d) \times (1 / N) + d \times (PR(A) / 1)$$
$$PR(C) = (1 - d) \times (1 / N) + d \times (PR(B) / 1)$$

Page rank - exemplu (II)



$$PR(A) = (1 - d) \times (1 / N) + d \times (PR(C) / 2)$$
$$PR(B) = (1 - d) \times (1 / N) + d \times (PR(A) / 1 + PR(C) / 2)$$
$$PR(C) = (1 - d) \times (1 / N) + d \times (PR(B) / 1)$$