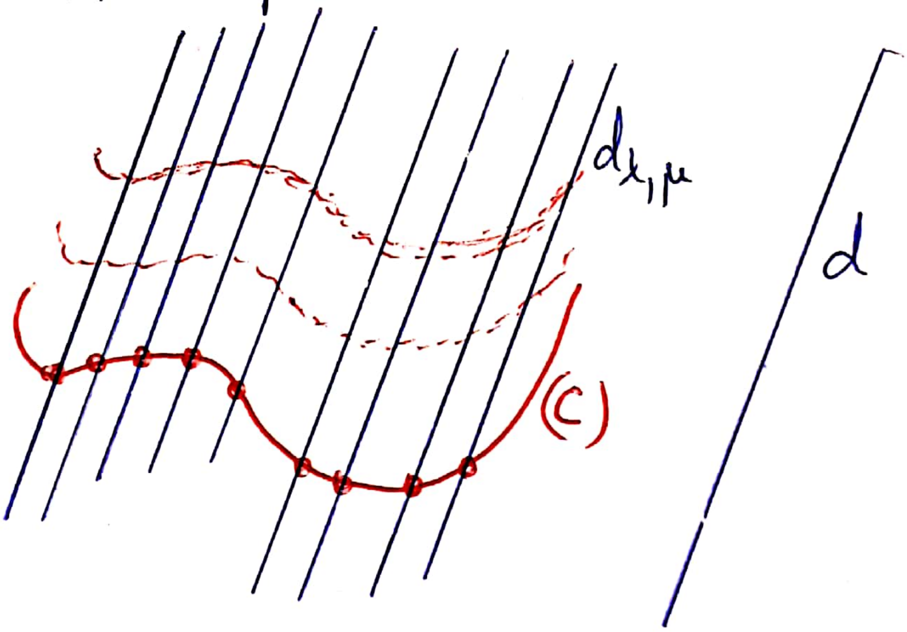
Suprafețe generate

1). Suprafețe cilindrice

Definiție. Se numește suprafață cilindrică suprafața generată de o familie de drepte (numite generatoare) care se sprijină pe o curbă dată (numită curbă directoare) și care sunt paralele cu o dreaptă dată (altfel spus au aceeași direcție).



Deducerea ecuației generale a unei suprafețe cilindrice

Fie dreapta $d: \begin{cases} \pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

și curba $(C): \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$

Familia de drepte paralele cu d au ecuațiile:

$$d_{\lambda,\mu}: \begin{cases} \Pi_1 = \lambda & \text{(plan paralel cu } \Pi_1) \\ \Pi_2 = \mu & \text{(plan paralel cu } \Pi_2), \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Condiția ca dreptele $d_{\lambda,\mu}$ să se „sprijine” pe curba (C), adică să se intersecteze cu (C) este ca sistemul

$$\begin{cases} \Pi_1 = \lambda \\ \Pi_2 = \mu \\ F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$ să fie compatibil.

Acest sistem este un sistem cu 4 ecuații și 3 necunoscute (x, y, z).

Alegem 3 ecuații din cele patru, rezolvăm acest subsistem iar soluția obținută se înlocuiește în ecuația rămasă obținându-se o relație între parametrii λ și μ: $\boxed{\varphi(\lambda, \mu) = 0}$, numită $\boxed{\text{condiție de compatibilitate}}$.

Ecuația suprafeței cilindrice se obține eliminând parametrii λ și μ între ecuațiile familiei $d_{\lambda,\mu}$ și condiția de compatibilitate, adică:

$$\begin{cases} \Pi_1 = \lambda \\ \Pi_2 = \mu \\ \varphi(\lambda, \mu) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\varphi(\Pi_1, \Pi_2) = 0}.$$

Exemple

1.1). Să se găsească ecuația suprafeței cilindrice care are generatoarele paralele cu dreapta $d: \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$ și are curba directoare $(C): \begin{cases} x^2-2y^2-z=0 \\ x-1=0 \end{cases}$.

Soluție. $d_{\lambda,\mu}: \begin{cases} x+y=\lambda \\ z=\mu \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y=\lambda \\ z=\mu \\ x^2-2y^2-z=0 \\ x-1=0 \end{cases}$$ Alegem ecuațiile 1, 2 și 4

$$\begin{cases} x+y=\lambda \\ z=\mu \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \text{Soluția: } (1, \lambda-1, \mu).$$

$$\boxed{1^2-2(\lambda-1)^2-\mu=0} \quad \varphi(\lambda,\mu)=0$$

Eliminăm λ, μ $\Rightarrow$

$$1-2(x+y-1)^2-z=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2(x+y-1)^2+z-1=0}.$$

1.2). Să se găsească ecuația suprafeței cilindrice a cărei curbe directoare este $(c): \begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$ iar generatoarele sunt paralele cu dreapta de parametri directori $(1,2,-1)$.

<u>Soluție</u>. O dreaptă cu parametri directori $(1,2,-1)$ adică de vector director $\vec{d}(1,2,-1)$ are ecuațiile $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

Dreptele din familie au ecuațiile:

$$d_{\lambda,\mu}: \begin{cases} 2x-y=\lambda \\ x+z=\mu \end{cases}.$$

Sistemul:

$$\begin{cases} 2x-y=\lambda \\ x+z=\mu \\ x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

Alegem sistemul de 3 ecuații:

$$\left.\begin{cases} 2x-y=\lambda \\ x+z=\mu \\ x+y+z=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow y=-\mu$$

$$\Rightarrow x = \frac{\lambda-\mu}{2} \Rightarrow z = \mu - \frac{\lambda-\mu}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3\mu-\lambda}{2}.$$ Deci soluția este

$$\left(\frac{\lambda-\mu}{2}, -\mu, \frac{3\mu-\lambda}{2}\right).$$

Înlocuim în ecuația rămasă.

$$\boxed{\left(\frac{\lambda-\mu}{2}\right)^2+\mu^2+\left(\frac{3\mu-\lambda}{2}\right)^2=4} \qquad \varphi(\lambda,\mu)=0$$

Eliminăm λ și μ între $d_{\lambda,\mu}$ și $\varphi(\lambda,\mu)=0$

$$\Rightarrow \left(\frac{2x-y-x-z}{2}\right)^2+(x+z)^2+\left(\frac{3x+3z-2x+y}{2}\right)^2=4$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(\frac{x-y-z}{2}\right)^2+(x+z)^2+\left(\frac{x+y+3z}{2}\right)^2=4}.$$

1.3). Să se determine ecuația suprafeței cilindrice generată de o dreaptă paralelă la dreapta $d: \begin{cases} x-3\cancel{z}=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$ și care rămâne tot timpul tangentă suprafeței

$\mathcal{E}: 4x^2+3y^2+2z^2-1=0$

<u>Soluție</u>. $d_{\lambda,\mu}: \begin{cases} x-3z=\lambda \\ y+2z=\mu \end{cases}$.

sistemul: $\begin{cases} x-3z=\lambda \\ y+2z=\mu \\ 4x^2+3y^2+2z^2-1=0 \end{cases}$

trebuie să aibă soluție dublă (două puncte confundate).

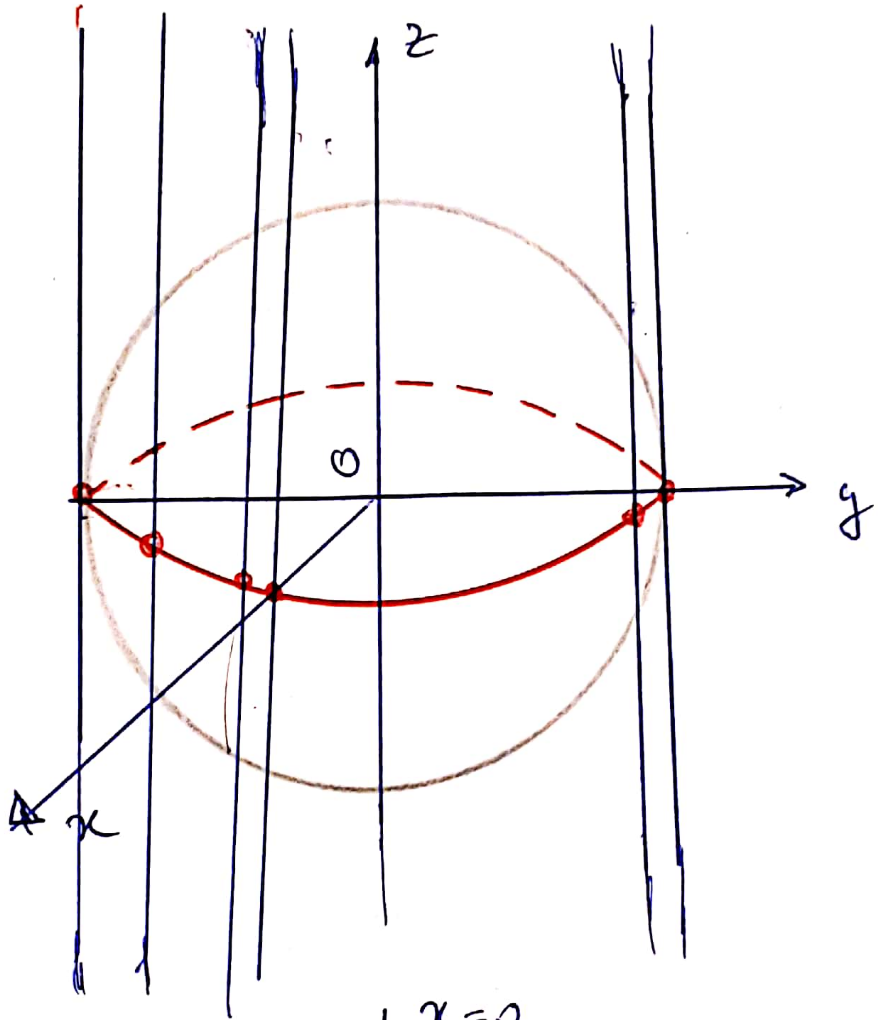
$$x = 3z + \lambda$$
$$y = -2z + \mu$$
$$4(3z+\lambda)^2 + 3(-2z+\mu)^2 + 2z^2 - 1 = 0$$
$$4(9z^2 + 6\lambda z + \lambda^2) + 3(4z^2 - 4\mu z + \mu^2) + 2z^2 - 1 = 0$$
$$50z^2 + (24\lambda - 12\mu)z + 4\lambda^2 + 3\mu^2 - 1 = 0$$
$$\Delta = (24\lambda - 12\mu)^2 - 4 \cdot 50(4\lambda^2 + 3\mu^2 - 1) = 0$$
$$16(6\lambda - 3\mu)^2 - 200(4\lambda^2 + 3\mu^2 - 1) = 0$$
$$2(36\lambda^2 - 36\lambda\mu + 9\mu^2) - 25(4\lambda^2 + 3\mu^2 - 1) = 0$$
$$72\lambda^2 - 72\lambda\mu + 18\mu^2 - 100\lambda^2 - 75\mu^2 + 25 = 0$$
$$-28\lambda^2 - 72\lambda\mu - 57\mu^2 + 25 = 0$$
$$\boxed{28\lambda^2 + 72\lambda\mu + 57\mu^2 - 25 = 0} \quad \varphi(\lambda, \mu) = 0$$

Eliminăm λ și μ între $d_{\lambda,\mu}$ și $\varphi(\lambda,\mu) = 0$

$$\boxed{28(x-3z)^2 + 72(x-3z)(y+2z) + 57(y+2z)^2 - 25 = 0}$$

1.4). Să se determine ecuația suprafeței cilindrice generate de drepte paralele cu axa Oz și are curba directoare cercul:

$$(C): \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases}$$



<u>Soluție</u> axa $Oz: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$d_{\lambda,\mu}: \begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \end{cases}$ Sistemul:

$\begin{cases} 1) & x=\lambda \\ 2) & y=\mu \\ 3) & x^2+y^2+z^2=a^2 \\ 4) & z=0 \end{cases}$

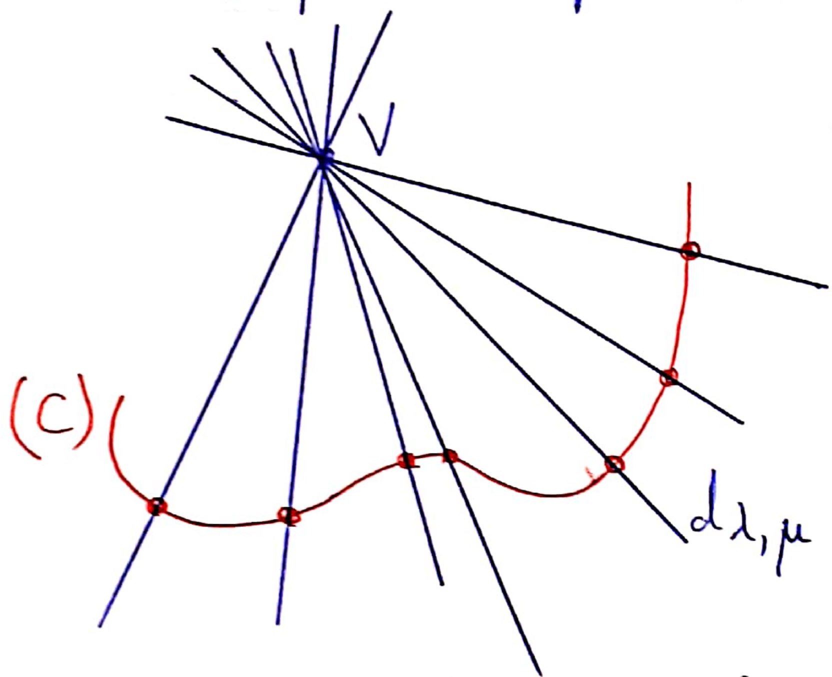
Din 1), 2) și 4) rezultă $(\lambda, \mu, 0)$. Introducem în ecuația rămasă:

$\boxed{\lambda^2+\mu^2=a^2}$ $\varphi(\lambda,\mu)=0$. Eliminăm λ și μ.

Rezultă $\boxed{x^2+y^2=a^2}$ ecuația suprafeței cilindrice.

2). Suprafețe conice

Se numește suprafață conică suprafața generată de o familie de drepte (numite generatoare) care se sprijină pe o curbă dată (numită curbă directoare) și care trec printr-un punct fix (numit vârf).



Deducerea ecuației generale a unei suprafețe conice.

Fie $(C): \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ (curba directoare)

$V(x_0,y_0,z_0)$ (vârful suprafeței conice)

Ecuațiile tuturor dreptelor care trec prin V sunt: $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$.

Nu toate numerele reale p, q, r pot lua valoarea zero în același timp. Presupunem $r \neq 0$. Atunci ecuațiile dreptelor se scriu

$$d_{\lambda,\mu} : \begin{cases} x - x_0 = \lambda(z - z_0) \\ y - y_0 = \mu(z - z_0) \end{cases}$$

unde $\lambda = \frac{p}{r}$, $\mu = \frac{q}{r}$

Condiția ca dreptele $d_{\lambda,\mu}$ să se „sprijine" pe curba (C) este ca sistemul

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda(z - z_0) \\ y - y_0 = \mu(z - z_0) \\ F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

să fie compatibil.

Acest sistem este un sistem de 4 ecuații cu trei necunoscute (x, y, z) și doi parametri λ, μ.

Alegem 3 ecuații din cele 4, rezolvăm acest subsistem și înlocuim soluția obținută în ecuația rămasă.

Obținem o relație între parametrii λ, μ : $\boxed{\varphi(\lambda, \mu) = 0}$ numită **condiție de compatibilitate**

Ecuația suprafeței cilindrice se obține eliminând parametrii λ și μ între ecuațiile familiei de drepte $d_{\lambda,\mu}$ și condiția de compatibilitate $\varphi(\lambda, \mu)=0$. Se obține o ecuație de forma

$$\boxed{\varphi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0.}$$

<u>Observație</u> Dacă vârful suprafeței conice este originea $O(0,0,0)$ atunci ecuația generală a suprafeței conice este de forma $\boxed{\varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0.}$

<u>Exemple</u> - 2.1) Să se găsească ecuația suprafeței conice cu vârful $V(0,0,8)$ și curba directoare $(C)\begin{cases} y^2-4x=0 \\ z=0 \end{cases}$

<u>Soluție</u>. $d_{p,q,r}: \frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z-8}{r} \Rightarrow$

$$\begin{cases} d_{\lambda,\mu}: \begin{cases} x=\lambda(z-8) \\ y=\mu(z-8) \end{cases} \\ (C) \quad \begin{cases} y^2-4x=0 \\ z=0 \end{cases} \end{cases}$$

Alegem subsistemul:

$$\begin{cases} x = \lambda(z-8) \\ y = \mu(z-8) \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -8\lambda \\ y = -8\mu \\ z = 0 \end{cases}$$

Introducem soluția în ecuația rămasă:

$$(-8\mu)^2 - 4(-8\lambda) = 0 \iff$$

$$\iff 64\mu^2 + 32\lambda = 0 \quad |:32$$

$$\boxed{2\mu^2 + \lambda = 0} \qquad \varphi(\lambda, \mu) = 0$$

Eliminăm λ și μ între ecuațiile familiei de generatoare și condiția de compatibilitate.

$$\Rightarrow 2\left(\frac{y}{z-8}\right)^2 + \frac{x}{z-8} = 0 \iff$$

$$\iff \boxed{2y^2 + x(z-8) = 0}.$$

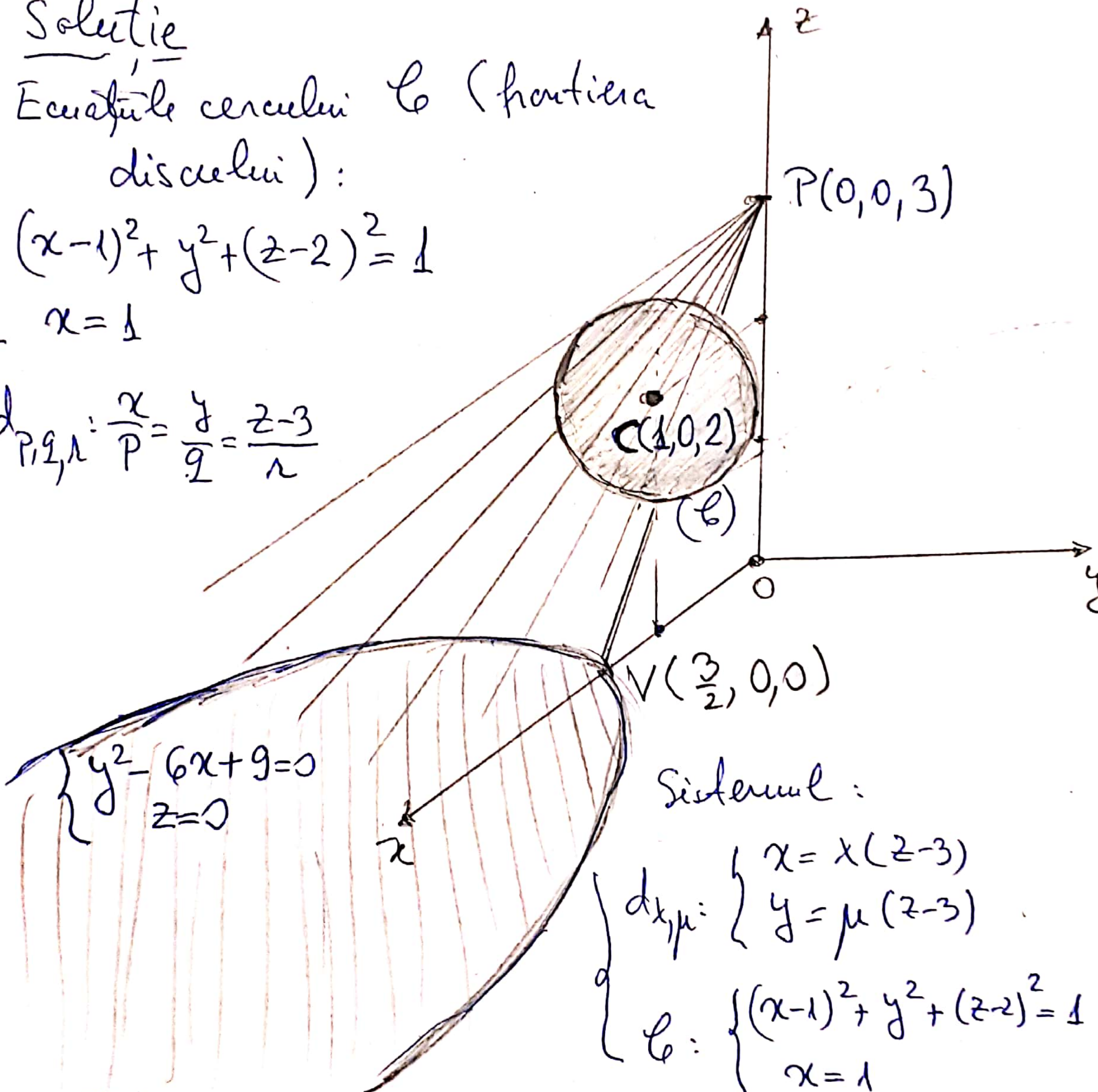
2.2) Un disc circular de rază 1 are centrul în punctul $(1,0,2)$ și este paralel cu planul yOz. În punctul $P(0,0,3)$ se află o sursă de lumină. Să se determine conturul umbrei discului din planul xOy.

Soluție

Ecuațiile cercului $\mathcal{C}$ (frontiera discului):

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2+(z-2)^2=1 \\ x=1 \end{cases}$$

$$d_{p,q,\lambda}: \frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z-3}{\lambda}$$



Sistemul:

$$\begin{cases} d_{\lambda,\mu}: \begin{cases} x=\lambda(z-3) \\ y=\mu(z-3) \end{cases} \\ \mathcal{C}: \begin{cases} (x-1)^2+y^2+(z-2)^2=1 \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$$

~~Sol~~ Alegem 3 ecuații:

$$\begin{cases} x=\lambda(z-3) \\ y=\mu(z-3) \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \quad z=\frac{1}{\lambda}+3, \quad \frac{x}{y}=\frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow y=\frac{\mu}{\lambda}$$

Soluția $\left(1, \frac{\mu}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}+3\right)$ se introduce în ecuația rămasă:

$$(1-1)^2+\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{1}{\lambda}+3-2\right)^2=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu^2}{\lambda^2}+\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)^2=1 \Leftrightarrow \frac{\mu^2}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda}+\cancel{1}=\cancel{1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mu^2}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda}=0} \qquad \boxed{\varphi(\lambda,\mu)=0}$$

Suprafața conică cu vârful în $P(0,0,3)$ care se sprijină pe frontiera discului are ecuația obținută prin înlocuirea lui λ și μ din $d_{\lambda,\mu}$ în $\varphi(\lambda,\mu)=0$.

$$\lambda=\frac{x}{z-3}, \quad \mu=\frac{y}{z-3} \qquad \frac{\mu^2}{\lambda^2}=\frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{y^2}{x^2}+\frac{(z-3)^2}{x^2}+\frac{2(z-3)}{x}=0$$

$$y^2+z^2-6z+9+2xz-6x=0$$

$$\boxed{y^2+z^2+2xz-6x-6z+9=0}$$

Conturul umbrei se obține intersectând suprafața conică cu planul xOy

$$\begin{cases} y^2+z^2+2xz-6x-6z+9=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2-6x+9=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{parabolă.}$$

2.3) Să se găsească locul geometric al punctelor tangentelor duse din origine la sfera:

$$(x-5)^2+(y+1)^2+z^2=16.$$

<u>Soluție</u> Toate dreptele care trec prin origine au ecuațiile: $d_{p,q,r}: \frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}$ sau

$$d_{\lambda,\mu}: \begin{cases} x=\lambda z \\ y=\mu z \end{cases} \qquad \left(\lambda=\frac{p}{r},\ \mu=\frac{q}{r}\right)$$

Condiția ca aceste drepte să fie tangente la sferă este ca ele să intersecteze sfera în două puncte confundate.

$$\begin{cases} x=\lambda z \\ y=\mu z \\ (x-5)^2+(y+1)^2+z^2=16 \end{cases} \Rightarrow (\lambda z-5)^2+(\mu z+1)^2+z^2=16$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2z^2-10\lambda z+25+\mu^2z^2+2\mu z+1+z^2-16=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2+\mu^2+1)z^2+2(\mu-5\lambda)z+10=0$$

$$\Delta=\cancel{4}(\mu-5\lambda)^2-\cancel{4}\cdot 10(\lambda^2+\mu^2+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \mu^2-10\lambda\mu+25\lambda^2-10\lambda^2-10\mu^2-10=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{15\lambda^2-9\mu^2-10\lambda\mu-10=0} \qquad \varphi(\lambda,\mu)=0$$

Ecuația locului geometric (<u>suprafață conică</u>) se obține eliminând λ și μ

între ecuațiile familiei de generatoare drepte și condiția de compatibilitate (de tangență) $\varphi(\lambda, \mu) = 0$.

$$\Rightarrow 15 \cdot \frac{x^2}{z^2} - 9 \cdot \frac{y^2}{z^2} - 10 \frac{xy}{z^2} - 10 = 0 \qquad \left(\varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{15x^2 - 9y^2 - 10xy - 10z^2 = 0}$$

3). <u>Suprafețe de rotație</u>.