Seminar 6 gr. 311 10.11.2020

1. Să se scrie ecuația unui plan care taie axele de coordonate în punctele $M_1(2,0,0)$, $M_2(0,-3,0)$ și $M_3(0,0,4)$.

2. Scrieți ecuația planului care trece prin punctul $M_1(3,4,-5)$ și este paralel cu vectorii $\vec{d_1}(3,1,-1)$ și $\vec{d_2}(1,-2,1)$.

3. Determinați unghiurile dintre planele:

a) $x-\sqrt{2}\cdot y+z-1=0$ și $x+\sqrt{2}\cdot y-z+3=0$

b) $6x+3y-2z=0$ și $x+2y+6z-12=0$.

4. Determinați ecuația planului care trece prin punctul $M_1(2,-1,1)$ și este perpendicular pe planele $2x-z+1=0$ și $y=0$.

5. Determinați ecuația planului care trece prin punctele $M_1(1,-1,-2)$ și $M_2(3,1,1)$ și care este perpendicular pe planul

$$x-2y+3z-5=0.$$

6. Formați ecuația planului care trece prin dreapta $\begin{cases} 5x-y-2z-3=0 \\ 3x-2y-5z+2=0 \end{cases}$ și este perpendicular pe planul $x+19y-7z-11=0$.

(7) Prin punctul $M(5, 16, 12)$ se duc două plane: unul dintre ele conține axa Ox, iar celălalt, axa Oy. Să se calculeze unghiul dintre aceste plane.

(8). Să se calculeze punctul simetric al originii față de planul $6x+2y-9z+121=0$.

Soluții

(1) $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (ecuația planului prin trei puncte)

În cazul nostru: $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff$

$\iff \begin{vmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 1 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \cdot 1 = 0$

$\iff \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} x - (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} z + 24 = 0$

$\iff \boxed{-12x + 8y - 6z + 24 = 0} \quad \Big| : (-24)$

$\iff \boxed{\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = 1} \iff \boxed{\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1}$

ecuația planului prin tăieturi.

(2). $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$ ecuația planului prin punct și 2 vectori directori.

$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}(x-3) - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\cdot(y-4) + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}(z+5) = 0 \iff$$

$$\iff -(x-3) - 4(y-4) - 7(z+5) = 0 \iff$$

$$\iff -x - 4y - 7z - 16 = 0 \iff$$

$$\iff \boxed{x + 4y + 7z + 16 = 0}$$

3. Unghiul dintre două plane este unghiul dintre vectorii lor normali.

a) $\vec{n}_1(1, -\sqrt{2}, 1)$, $\vec{n}_2(1, \sqrt{2}, -1)$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} = \frac{1\cdot 1 + (-\sqrt{2})\sqrt{2} + 1\cdot(-1)}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2}\cdot\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (-1)^2}} =$$

$$= \frac{1-2-1}{2\cdot 2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} \quad \left(\text{dar și } \frac{\pi}{3}\right)$$

b) $\vec{n}_1(6, 3, -2)$ și $\vec{n}_2(1, 2, 6)$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} = \frac{6\cdot 1 + 3\cdot 2 + (-2)\cdot 6}{\sqrt{36+9+4}\cdot\sqrt{1+4+36}} = 0$$

$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ planele sunt perpendiculare.

(4) Ecuația planului care trece printr-un punct (x_0, y_0, z_0) și are vectorul normal $\vec{n}(A, B, C)$ este:

$$\Pi: A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

În cazul nostru: $A(x-2) + B(y+1) + C(z-1) = 0$; pe de altă parte planul Π este perpendicular pe planele $\Pi_1: 2x - z + 1 = 0$ și $\Pi_2: y = 0$ deci

$$\vec{n} \perp \vec{n}_{\Pi_1} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}_{\Pi_1} = 0 \Leftrightarrow \boxed{2A + 0 \cdot B - 1 \cdot C = 0 \quad (1)}$$

$$\vec{n} \perp \vec{n}_{\Pi_2} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}_{\Pi_2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{0 \cdot A + 1 \cdot B + 0 \cdot C = 0 \ (2)}$$

$$\begin{cases} 2A - C = 0 \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow C = 2A$$

$$\Rightarrow \Pi: A(x-2) + 0(y+1) + 2A(z-1) = 0 \quad | : A$$

$$\Pi: x - 2 + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\Pi: x + 2z - 4 = 0}$$

(5). Un vector director al planului este $\overrightarrow{M_1M_2}$ de componente $(x_{M_2} - x_{M_1}, y_{M_2} - y_{M_1}, z_{M_2} - z_{M_1}) =$
$= (3-1, 1-(-1), 1-(-2)) = (2, 2, 3)$.
Alt vector director este vectorul normal al planului dat, adică $\vec{n}(1, -2, 3)$.

Deci:
$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z+2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \cdot (x-1) - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot (y+1) + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} (z+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 12(x-1) - 3(y+1) - 6(z+2) = 0 \quad \Big|\, :3$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1) - (y+1) - 2(z+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{4x - y - 2 \cdot z - 9 = 0}.$$

6. Orice plan care trece prin dreapta

$$\begin{cases} 5x - y - 2z - 3 = 0 \\ 3x - 2y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$$ are ecuatia

$$\Pi_\lambda : 5x - y - 2z - 3 + \lambda(3x - 2y - 5z + 2) = 0$$

(fascicul de plane).

$$\Leftrightarrow \Pi_\lambda : (5+3\lambda)x - (1+2\lambda)y - (2+5\lambda)z - 3 + 2\lambda = 0$$

$$\vec{n}_{\Pi_\lambda}(5+3\lambda, -(1+2\lambda), -(2+5\lambda))$$

$$\vec{n}_{\Pi}(1, 19, -7)$$

$$\Pi_\lambda \perp \Pi \Leftrightarrow \vec{n}_{\Pi_\lambda} \perp \vec{n}_{\Pi} \Leftrightarrow \vec{n}_{\Pi_\lambda} \cdot \vec{n}_{\Pi} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot (5+3\lambda) - 19(1+2\lambda) + 7(2+5\lambda) = 0$$

$\Leftrightarrow 0 = 0$. <u>Concluzia</u>: <u>Toate</u> planele care trec prin dreapta dată sunt perpendiculare pe planul $x + 19y - 7z - 11 = 0$.

De ce???

7. Pe axa Ox se aleg două puncte, de ex. $(0,0,0)$ și $(1,0,0)$.

Ecuația primului plan este

$$\pi_1: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 16 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff (-1)^{2+3}\cdot 1 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 16 & 12 \end{vmatrix} = 0 \iff (-1)^{2+1}\cdot 1 \begin{vmatrix} y & z \\ 16 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff 12y - 16z = 0 \iff \boxed{3y - 4z = 0} \quad (\pi_1)$$

Pe axa Oy se aleg două puncte oarecare de ex. $(0,0,0)$ și $(0,1,0)$.

Ecuația planului π_2 este:

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 16 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 16 & 12 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x & z \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \boxed{12x - 5z = 0} \quad (\pi_2)$$

$\vec{n}_{\pi_1}(0,3,-4)$ și $\vec{n}_{\pi_2}(12,0,-5)$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} = \frac{20}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{144+25}} = \frac{20}{5\cdot 13} = \frac{4}{13}.$$

(8). Ecuațiile perpendicularei din O pe planul Π dat este:

$$\frac{x-0}{6}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-0}{-9}$$

$O(0,0,0)$ și $\vec{d}(6,2,-9)$ este vectorul normal al planului Π.

Deci $\begin{cases} \frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-9}=t \\ 6x+2y-9z+121=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=6t \\ y=2t \\ z=-9t \\ 6x+2y-9z+121=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 36t+4t+81t+121=0 \Leftrightarrow 121t+121=0$

$\Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow M(-6,-2,9)$ este proiecția lui O pe planul Π.

Simetricul său este punctul N de coordonate (x_N, y_N, z_N) astfel încât

$$\begin{cases} x_M=\frac{x_0+x_N}{2} \\ y_M=\frac{y_0+y_N}{2} \\ z_M=\frac{z_0+z_N}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6=\frac{x_N}{2} \Leftrightarrow x_N=-12 \\ -2=\frac{y_N}{2} \Leftrightarrow y_N=-4 \\ 9=\frac{z_N}{2} \Leftrightarrow z_N=18 \end{cases}$$

$\Rightarrow N(-12,-4,18)$.