

Serii de numere reale

Noțiuni introductive

Serii geometrice

Reamintim următoarea limită:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} +\infty & : a > 1 \\ 1 & : a = 1 \\ 0 & : a \in (-1, 1) \\ \varnothing & : a \leq -1 \end{cases}$$

Se numește **serie geometrică** orice serie de tipul

$$\sum_{n \geq m} q^{n-1},$$

atunci când $q \in \mathbb{R}$. Pentru această serie avem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \begin{cases} 0 & : q = 0 \\ \frac{1}{1-q} & : q \in (-1, 1) \setminus \{0\} \\ +\infty & : q \geq 1 \end{cases}$$

Pentru cazul în care $q \leq -1$, seria geometrică nu are sumă.

Demonstrație:

Studiem șirul sumelor parțiale pentru un $n \geq 1$.

$$s_n = q^0 + q^1 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Cazul 1: $q = 0$. În acest caz, șirul sumelor parțiale este $s_n = 0, \forall n \geq 1$, deci are limita tot 0, aceasta fiind și suma seriei.

Cazul 2: $q \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. Atunci: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$.

Cazul 3: $q > 1$. Atunci: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1 - \infty}{1 - q} = \frac{-\infty}{1 - q} = \infty$ deoarece $1 - q < 0$.

Cazul 4: $q \leq -1$. În acest caz remarcăm că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$$

nu există, și de aceea nu există nici $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Astfel, în acest caz seria geometrică nu are sumă.

Serii telescopice

Daca seria de numere reale $\sum_{n \geq m} x_n$ are termenul de grad n definit ca diferență a doi termeni succesivi ai unui șir de numere reale $(a_n)_{n \geq m}$, deci

$$x_n = a_n - a_{n+1}, \forall n \geq m,$$

ea se numește **serie telescopică**. În cazul în care șirul $(a_n)_{n \geq m}$ are limita

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

seria $\sum_{n \geq m} x_n$ are sumă iar aceasta este:

$$\sum_{n=m}^{\infty} x_n = a_m - l.$$

Demonstrație: Scriem formula generală a termenului de grad n , al șirului sumelor parțiale atașat seriei:

$$\begin{aligned} s_n &= x_m + x_{m+1} + \dots + x_n = a_m - a_{m+1} + a_{m+1} - a_{m+2} + \dots + a_{n-1} - a_n + a_n - a_{n+1} = \\ &= a_m - a_{n+1}. \end{aligned}$$

În concluzie

$$s_n = a_m - a_{n+1}, \forall n \geq m.$$

În această expresie a_m este un termen constant, iar deoarece șirul $(a_n)_{n \geq m}$ are limită, și șirul $(s_n)_{n \geq m}$ va avea limita, iar aceasta este

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_m - a_{n+1}) = a_m - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a_m - l.$$

Cum limita șirului sumelor parțiale este chiar suma seriei, concluzionăm că:

$$\sum_{n=m}^{\infty} x_n = a_m - l.$$

Operații cu serii convergente

1. Fie $\sum_{n \geq 1} x_n$ și $\sum_{n \geq 1} y_n$ doua serii care au sumele:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y.$$

și $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă $ax + by$ nu este un caz de nedeterminare, atunci și seria

$$\sum_{n \geq 1} ax_n + by_n$$

are sumă, iar suma ei este:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ax_n + by_n) = ax + by.$$

2. Primul termen de la care începem însumarea este important în cazul seriilor. De aceea, dacă seria $\sum x_n$ are sumă, iar $p \in \mathbb{N}$, atunci

$$\sum_{n=p}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n - (x_1 + x_2 + \dots + x_{p-1}).$$

Exerciții

Exercițiul 1: Calculați suma umătoarelor serii geometrice:

$$a) \sum_{n \geq 3} \frac{3}{5^n}, \quad b) \sum_{n \geq 4} \frac{2^{n-3} + (-3)^{n+3}}{5^n}, \quad c) \sum_{n \geq 5} e^n, \quad d) \sum_{n \geq 2} \left(-\frac{1}{\pi}\right)^n \quad e) \sum_{n \geq 3} (-3)^n.$$

Exercițiul 2: Calculați suma umătoarelor serii telescopice:

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}, \quad b) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}, \quad c) \sum_{n \geq 5} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
$$d) \sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad e) \sum_{n \geq 2} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n^{\ln(n+1)})}.$$