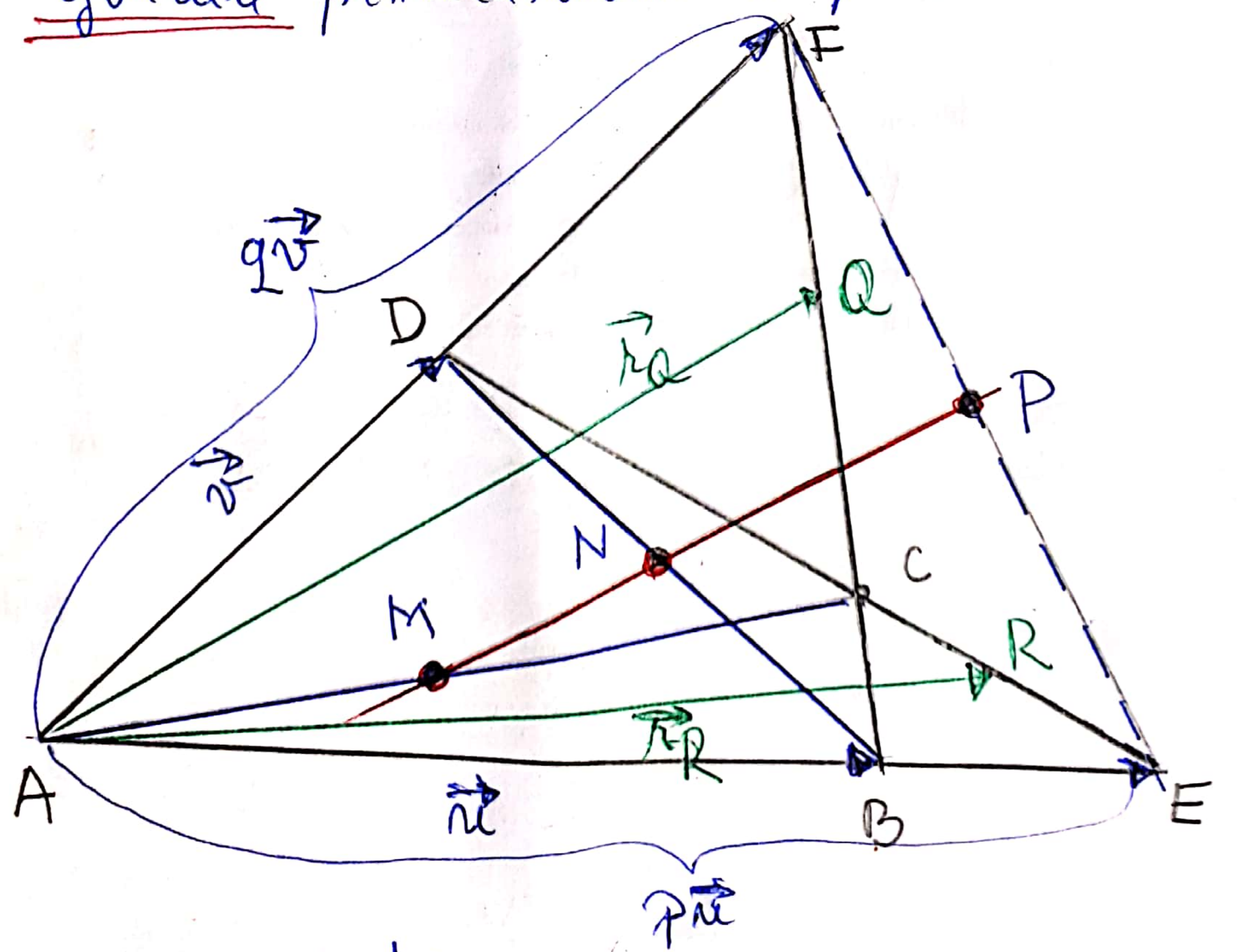
Seminar 3

1. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu laturi neparalele. Notăm $\{E\} = AB \cap DC$, $\{F\} = AD \cap BC$. Să se demonstreze că mijloacele M, N, P ale segmentelor AC, BD, EF sunt coliniare. (Dreapta Newton – Gauss).

Obs. configurația $ABCDEF$ se numește patrulater complet, punctele A, B, C, D, E, F sunt vârfurile patrulaterului complet iar segmentele AC, BD și EF se numesc diagonalele patrulaterului complet.



Soluție Notăm cu $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $p\vec{u} = \overrightarrow{AE}$, $q\vec{v} = \overrightarrow{AF}$.

M, N, P coliniare dacă (de exemplu) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PN}$. (1)

Considerăm originea vectorilor în A, adică

$\vec{r}_B = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\vec{r}_D = \overrightarrow{AD} = \vec{v}$, $\vec{r}_E = \overrightarrow{AE} = p\vec{u}$,

$\vec{r}_F = \overrightarrow{AF} = q\vec{v}$, $\vec{r}_M = \overrightarrow{AM}$, $\vec{r}_N = \overrightarrow{AN}$, $\vec{r}_P = \overrightarrow{AP}$.

(1) este echivalentă cu $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP} = \lambda(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP})$

$\Leftrightarrow \vec{r}_M - \vec{r}_P = \lambda(\vec{r}_N - \vec{r}_P)$

$\vec{r}_N = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$, (2)

$\vec{r}_P = \frac{1}{2}(p\vec{u} + q\vec{v})$, (3)

$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{PN} = \vec{r}_N - \vec{r}_P = \frac{1}{2}[(1-p)\vec{u} + (1-q)\vec{v}]}$ (4).

$\vec{r}_M = \frac{1}{2}\vec{r}_C \quad \left(\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

Determinăm $\vec{r}_C$ prin metoda identificării vectorilor de poziție a două puncte variabile din ecuațiile vectoriale ale dreptelor BF și DE ($BF \cap DE = \{C\}$).

$BF: \vec{r}_Q = (1-\alpha)\vec{r}_B + \alpha \vec{r}_F \iff$

$\iff \vec{r}_Q = (1-\alpha)\vec{u} + \alpha q \vec{v} \quad (5)$

$DE: \vec{r}_R = (1-\beta)\vec{r}_D + \beta \vec{r}_E \iff$

$\iff \vec{r}_R = (1-\beta)\vec{v} + \beta \cdot p\vec{u} \quad (6)$

Deoarece $BF \cap DE = \{C\} \Rightarrow \exists!\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a.î.

$\vec{r}_Q = \vec{r}_R = \vec{r}_C$

$\vec{r}_Q = \vec{r}_R \overset{(5),(6)}{\iff} (1-\alpha)\vec{u} + \alpha q \vec{v} =$

$= (1-\beta)\vec{v} + \beta p \vec{u} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-\alpha = \beta p \\ \alpha q = 1-\beta \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{1-\alpha}{p}$$

$\alpha q = 1 - \frac{1-\alpha}{p} \iff \alpha p q = p - 1 + \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{p-1}{pq-1}} \Rightarrow \beta = \frac{1 - \frac{p-1}{pq-1}}{p} \iff$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{pq-1-p+1}{p(pq-1)} \iff \boxed{\beta = \frac{q-1}{pq-1}}$$

Înlocuind pe α în (5) sau β în (6) va rezulta

$$\vec{r}_C = \left(1 - \frac{p-1}{pq-1}\right)\vec{u} + \frac{p-1}{pq-1}\cdot q\vec{v} \iff$$

$$\iff \vec{r}_C = \frac{pq-p}{pq-1}\vec{u} + \frac{pq-q}{pq-1}\vec{v} \implies$$

$$\implies \boxed{\vec{r}_M = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{pq-p}{pq-1}\vec{u} + \frac{pq-q}{pq-1}\vec{v}\right)} \quad (5).$$

$$\implies \overrightarrow{PM} = \vec{r}_M - \vec{r}_P = \frac{1}{2}\left(\frac{pq-p}{pq-1}\vec{u} + \frac{pq-q}{pq-1}\vec{v} - \right.$$

$$\left. - p\vec{u} - q\vec{v}\right) \iff$$

$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\left(\frac{pq\cancel{-p}-p^2q\cancel{+p}}{pq-1}\vec{u} + \frac{pq\cancel{-q}-pq^2\cancel{+q}}{pq-1}\vec{v}\right)$$

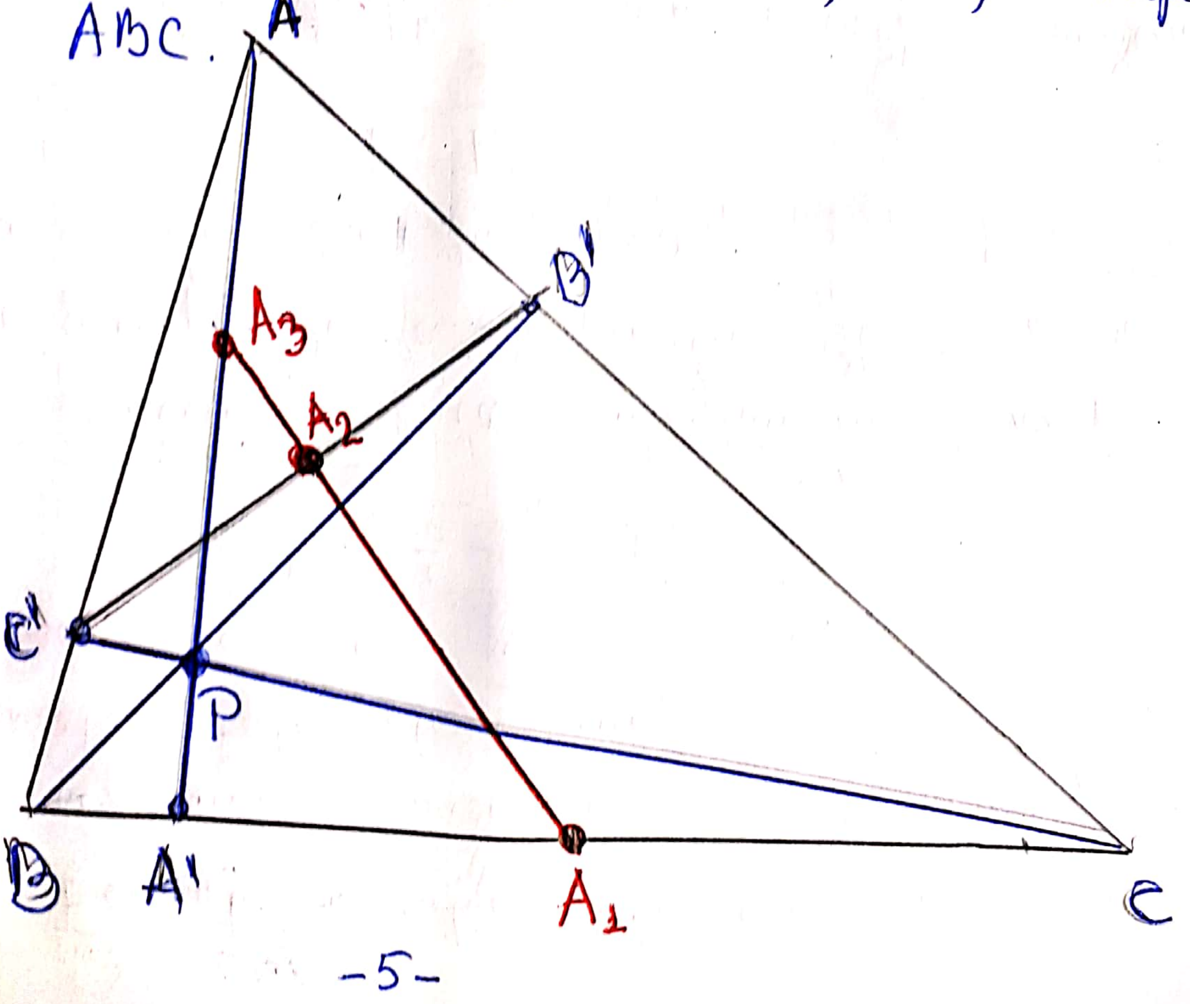
$$\boxed{\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{pq}{pq-1}\left[(1-p)\vec{u} + (1-q)\vec{v}\right]} \quad (6).$$

Din ( ) și (6) rezultă că $\exists\, \lambda = \frac{pq}{pq-1}$ astfel încât $\overrightarrow{PM} = \lambda\overrightarrow{PN}$, deci M, N, P sunt coliniare.

2. Fie ABC un triunghi oarecare, AA', BB' și CC' ceviene concurente în punctul P, ($A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$). Să se demonstreze că dreptele determinate de mijloacele segmentelor (BC) și $(B'C')$, (CA) și $(C'A')$ resp. (AB) și $(A'B')$ sunt concurente într-un punct I și

$$\vec{r}_I = \frac{1}{4S}\left[(2S_A+S_B+S_C)\vec{r}_A + (S_A+2S_B+S_C)\vec{r}_B + (S_A+S_B+2S_C)\vec{r}_C\right],$$

unde S_A, S_B, S_C și S sunt ariile triunghiurilor PBC, PCA, PAB respectiv ABC.



Dreapta A_1A_2 este dreapta Newton-Gauss a patrulaterului complet $AC'PB'BC$, unde A_1 este mijlocul lui (BC) și A_2 este mijlocul lui $(B'C')$. Deci dreapta A_1A_2 trece și prin mijlocul A_3 al lui (AP).
Scriem ecuația vectorială a dreptei A_1A_3.

$$A_1A_3: \vec{r}_Q = (1-\alpha)\vec{r}_{A_1} + \alpha\vec{r}_{A_3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}_Q = \frac{1-\alpha}{2}(\vec{r}_B+\vec{r}_C) + \frac{\alpha}{2}(\vec{r}_A+\vec{r}_P),$$

unde Q este un punct variabil pe A_1A_3.
Analog dreapta B_1B_3 are ecuația

$$B_1B_3: \vec{r}_R = \frac{1-\beta}{2}(\vec{r}_C+\vec{r}_A) + \frac{\beta}{2}(\vec{r}_B+\vec{r}_P)$$

Punctul de intersecție al dreptelor A_1A_3 și B_1B_3 se obține pentru $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$,

adică $\vec{r}_I = \frac{1}{4}(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C+\vec{r}_P)$. (1)

Analog și dreapta C_1C_3 trece prin I.
Dar $\vec{r}_P = \frac{1}{\Delta}(\Delta_A\vec{r}_A + \Delta_B\vec{r}_B + \Delta_C\vec{r}_C)$ (2).
Din (1) și (2) rezultă concluzia problemei.

3. Fie triunghiul ABC și H, O, G, A' – ortocentrul, centrul cercului circumscris, centrul de greutate respectiv punctul diametral opus lui A. Atunci au loc următoarele proprietăți:

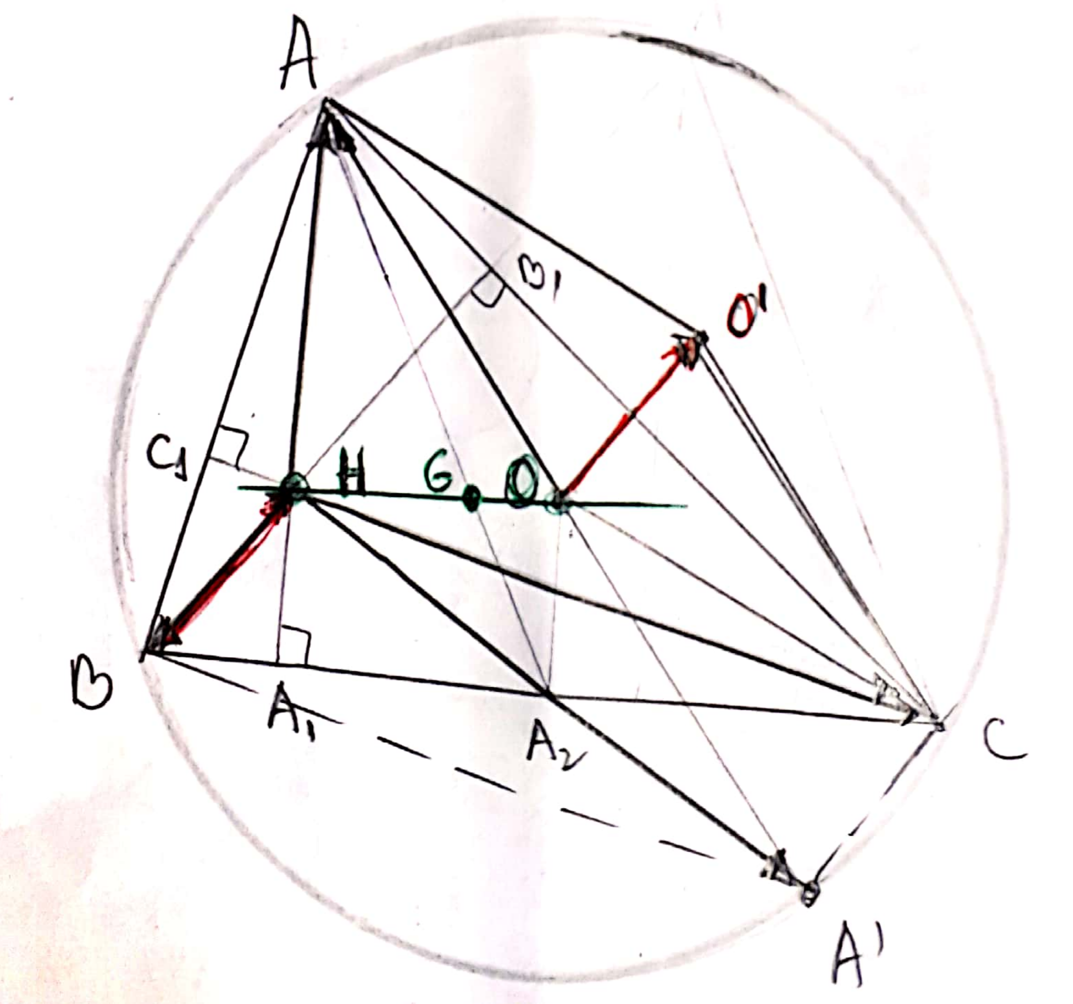
1) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ (relația lui Sylvester)

2). $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA'}$

3). $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2 \cdot \overrightarrow{HO}$

4). $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3 \cdot \overrightarrow{HG}$

5). punctele H, G și O sunt coliniare (dreapta lui Euler) și $HG = 2 \cdot GO$.



Soluție

1.) Fie punctul M pentru care $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=$
$=\overrightarrow{OM}$ și fie O' simetricul lui O față de AC ($O'=s_{AC}(O)$).

Avem $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{BM}$. Dar $OO' \perp AC \Rightarrow$
$\Rightarrow BM \perp AC$ adică $M \in$ înălțimii BB_1.
Analog $M \in AA_1$ și $M \in CC_1$ deci $M \equiv H$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

2). Patrulaterul $HBA'C$ este paralelogram pentru că:
$BH \perp AC$ și $A'C \perp AC$ (AA' diametru, deci $m\,\widehat{A'CA}=90^\circ$).
$\Rightarrow BH \parallel A'C$. Analog
$CH \parallel A'B$.
Deci $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA'}$ (regula paralelogramului).

3). $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HA'}=2\overrightarrow{HO}$ pentru că O este mijlocul lui

Sau

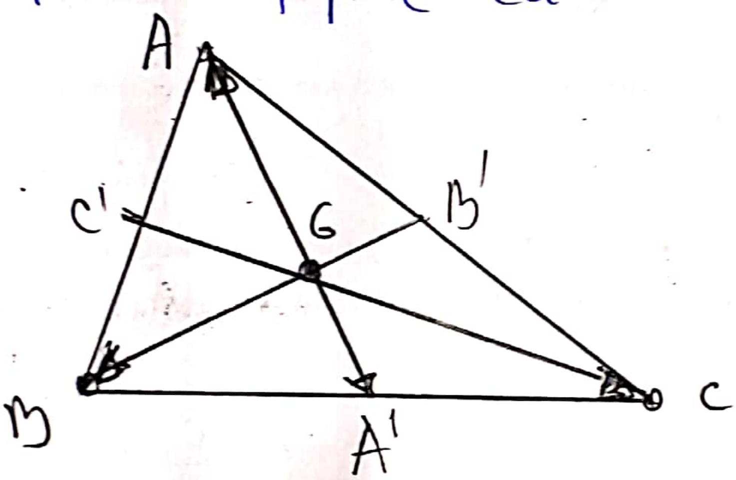
$\vec{HA}+\vec{HB}+\vec{HC} = \vec{HO}+\vec{OA}+\vec{HO}+\vec{OB}+\vec{HO}+\vec{OC} =$

$= 3\cdot\vec{HO}+\vec{OH} = 2\cdot\vec{HO}$

4). $\vec{HA}+\vec{HB}+\vec{HC} = \vec{HG}+\vec{GA}+\vec{HG}+\vec{GB}+\vec{HG}+\vec{GC}$

$= 3\vec{HG} + \underbrace{\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}} = 3\vec{HG}$

Am folosit faptul că $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=0$



$\vec{GB}+\vec{GC} = 2\vec{GA'}$ $\quad \frac{GA'}{GA} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2GA' = GA \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\vec{GA'} = \vec{GA} \quad \Rightarrow$

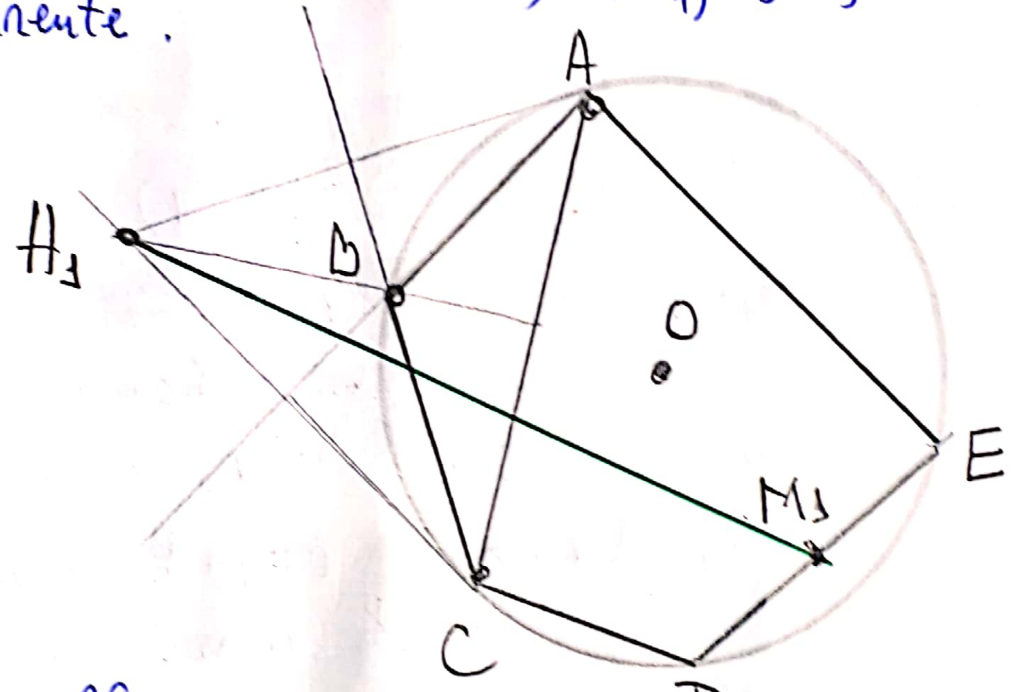
$\Rightarrow \quad \vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC} = 2\cdot\vec{GA} - 2\cdot\vec{GA'} = \vec{0}.$

5). Din 3) și 4) $\Rightarrow$ $2\vec{HO} = 3\vec{HG} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{HG}+2\vec{HG} = 2\vec{HO}$ $\quad \Leftrightarrow \vec{HG} = 2(\vec{HO}-\vec{HG})$

$\Leftrightarrow \vec{HG} = 2\vec{GO} \Rightarrow \begin{cases} H, G, O \text{ coliniare} \\ \text{și} \\ HG = 2\cdot GO. \end{cases}$

3. Se consideră pentagonul inscriptibil ABCDE. Notăm cu H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDE, DEA, EAB și cu M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 mijloacele laturilor DE, EA, AB, BC și respectiv CD. Să se arate că dreptele H_1M_1, H_2M_2, H_3M_3, H_4M_4, H_5M_5 sunt concurente.



Soluție: Alegem originea vectorilor în O, centrul cercului circumscris pentagonului. Fie P un punct variabil pe H_1M_1.

$H_1M_1: \vec{OP} = (1-\alpha)\vec{OH_1} + \alpha\vec{OM_1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{OP} = (1-\alpha)(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}) + \frac{\alpha}{2}(\vec{OD}+\vec{OE})$.

Pentru $\alpha = \frac{2}{3}$ se obține vectorul de poziţie al punctului X:

$$\vec{OX} = \frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}+\vec{OE})$$

care nu depinde de alegerea (gruparea) punctelor A, B, C, D, E.

Deci X aparţine şi dreptelor H_2M_2, H_3M_3, H_4M_4 şi H_5M_5.

<u>Obs.</u> Sunt $C_5^2 = 10$ drepte de acest tip concurente în acest punct X. Spre exemplu dreapta care uneşte ortocentrul triunghiului ADE cu mijlocul segmentului BE.

<u>Temă</u> Fie şase puncte distincte pe un cerc de centru O.

a). Se consideră dreapta care uneşte ortocentrul triunghiului format cu trei din cele şase puncte cu ortocentrul triunghiului format de celelalte trei puncte. Să se demonstreze că toate dreptele de acest tip sunt concurente într-un punct X.

b) Se consideră dreapta care uneşte ortocentrul triunghiului format cu trei puncte din cele șase cu centrul de greutate al triunghiului format cu celelalte trei puncte. Să se demonstreze că toate dreptele de acest fel sunt concurente într-un punct Y.

c) Să se demonstreze că punctele O, X și Y sunt coliniare și Y este mijlocul lui [OX].