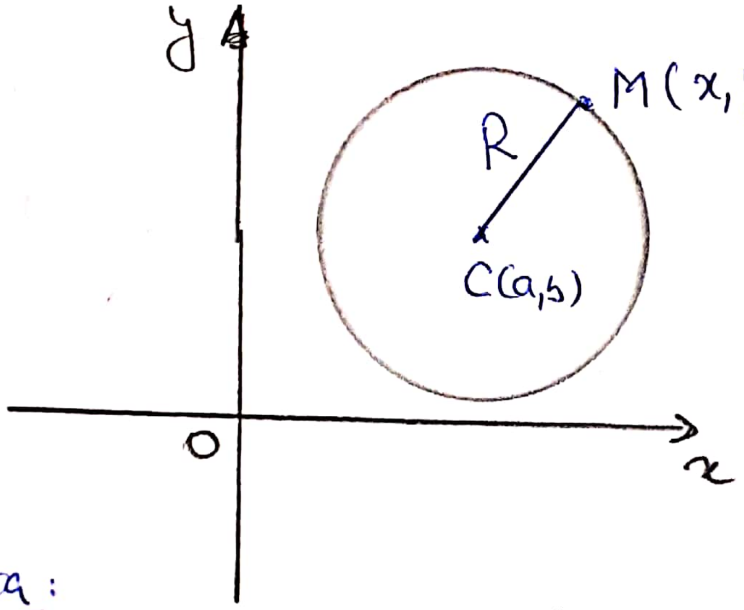
Curs 8 Cercul

19.11.2020

Definiție. Cercul este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix numit centrul cercului.



Ecuația:

$CM = R \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0$$

Notăm $m=-2a$

$n=-2b$

$p=a^2+b^2-R^2$

$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2+mx+ny+p=0} \quad (2)$$

Ecuația cercului prin trei puncte (necoliniare).

Propoziție. Trei puncte necoliniare $M_i(x_i; y_i)$, $i=\overline{1,3}$, determină un cerc (cercul circumscris triunghiului $M_1M_2M_3$).

Ecuația:

Fie $x^2+y^2+mx+ny+p=0$ ecuația unui cerc. Dacă $M_i(x_i, y_i)$, $i=\overline{1,3}$ aparțin cercului atunci $x_i^2+y_i^2+mx_i+ny_i+p=0$, $i=\overline{1,3}$.

Aceste 3 relații împreună cu ecuația cercului formează un sistem de 4 ecuații cu necunoscutele m, n, p.

Matricea sistemului $S=\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$ are

rangul 3 pentru că $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

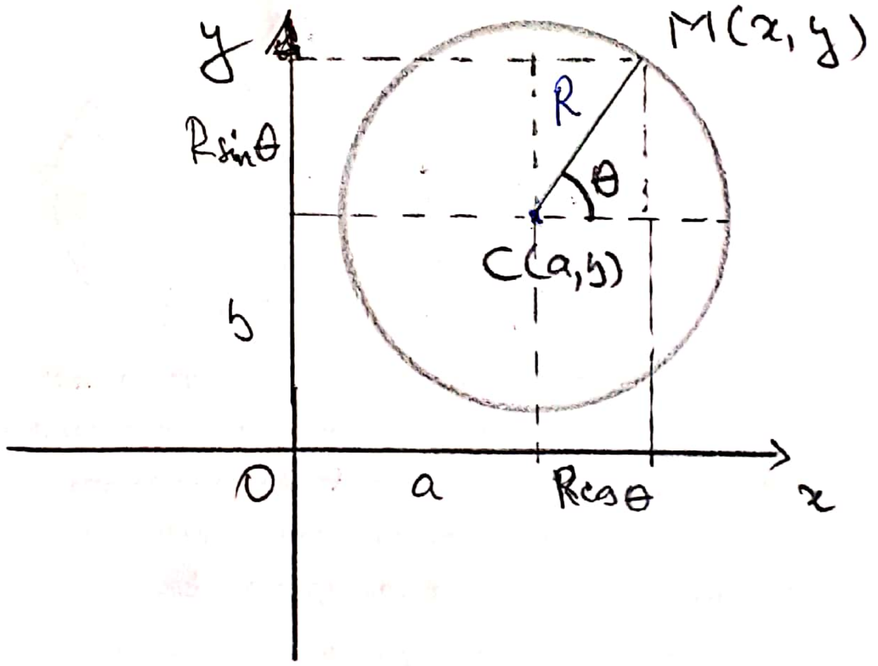
Matricea extinsă este

$$\overline{S}=\begin{pmatrix} x & y & 1 & x^2+y^2 \\ x_1 & y_1 & 1 & x_1^2+y_1^2 \\ x_2 & y_2 & 1 & x_2^2+y_2^2 \\ x_3 & y_3 & 1 & x_3^2+y_3^2 \end{pmatrix}$$

rangul lui $\overline{S}$ <u>trebuie</u> să fie tot 3, deci

$$\det \overline{S} = 0 \iff \boxed{\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0} \quad (3)$$

<u>Ecuațiile parametrice ale unui cerc</u>



$$\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

<u>Observație</u> Dacă se elimină parametrul θ avem:

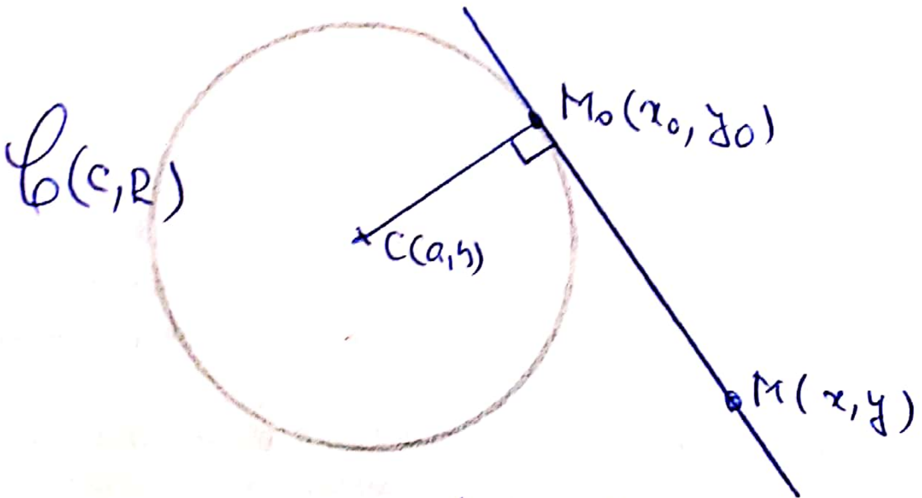
$$\begin{cases} x-a = R\cos\theta \quad |^2 \\ y-b = R\sin\theta \quad |^2 \end{cases} \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Tangente la cerc

1) Tangenta la cerc într-un punct de pe cerc.

Fie cercul de ecuație $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
Fie $M_0(x_0,y_0)$ un punct de pe cerc.
Rezultă $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=R^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2-2ax_0-2by_0+a^2+b^2-R^2=0 \quad (1)$$



Fie $M(x,y)$ un punct al tangentei în M_0 la cerc. Avem $CM_0 \perp M_0M \Leftrightarrow \overrightarrow{CM_0} \perp \overrightarrow{M_0M}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CM_0}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((x_0-a),(y_0-b)\right)\cdot(x-x_0,\ y-y_0)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0x-x_0^2-ax+ax_0+y_0y-y_0^2-by+by_0=0$$

$$\Leftrightarrow x_0x+y_0y-ax-by-x_0^2-y_0^2+ax_0+by_0=0 \quad (2)$$

Din (1) rezultă

$$-x_0^2-y_0^2=-2ax_0-2by_0+a^2+b^2-R^2$$

Înlocuind în (2) rezultă:

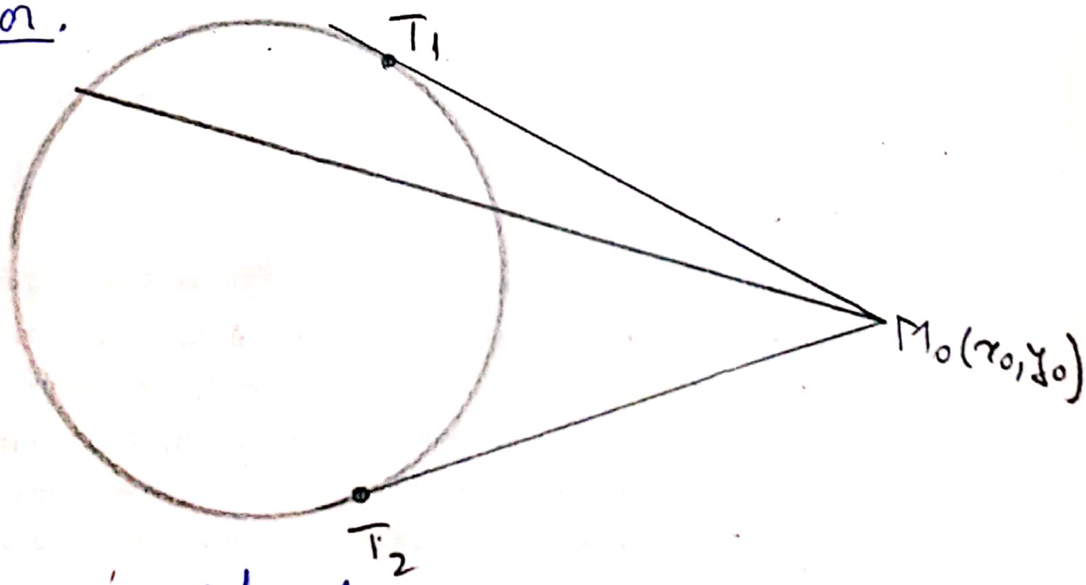
$$x_0x+y_0y-ax-by-2ax_0-2by_0+a^2+b^2-R^2+ax_0+by_0=0.$$

$$\Leftrightarrow x_0x+y_0y-a(x+x_0)-b(y+y_0)+a^2+b^2-R^2=0$$

$$\Leftrightarrow x_0x+y_0y+\frac{m}{2}(x+x_0)+\frac{n}{2}(y+y_0)+p=0$$

(Ecuația dedublată a ecuației $x^2+y^2+mx+ny+p=0$. Dedublarea presupune $x^2\longmapsto xx_0$, $y^2\longmapsto yy_0$, $x\longmapsto\frac{x+x_0}{2}$, $y\longmapsto\frac{y+y_0}{2}$).

2). <u>Tangente la cerc duse dintr-un punct exterior.</u>



Se formează sistemul:

$$\begin{cases}x^2+y^2+mx+ny+p=0\\ y-y_0=k(x-x_0)\end{cases}$$

Scanned with CamScanner

Se înlocuiește (de exemplu) y din a doua ecuație în prima ecuație și se obține o ecuație de gradul 2 în x. Se pune condiția $\Delta = 0$ și se obțin două valori k_1 și k_2 pentru pantele tangentelor din punctul exterior $M_0(x_0, y_0)$ la cerc.

<u>Exemplu</u> Să se determine ecuațiile tangentelor duse din $M_0(1,6)$ la cercul $x^2+y^2+2x-19=0$

<u>Soluție.</u> $y-6=k(x-1)$ ecuațiile dreptelor care trec prin M_0.

$$\begin{cases} y = kx - k + 6 \\ x^2+y^2+2x-19=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + (kx-k+6)^2 + 2x - 19 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + k^2x^2 + k^2 + 36 - 2k^2x - 12k + 12kx + 2x - 19 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+k^2)x^2 - 2(k^2-6k-1)x + k^2 - 12k + 17 = 0$$

$$\Delta = 4(k^2-6k-1)^2 - 4(1+k^2)(k^2-12k+17) = 0$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 2k^2+3k-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_{1,2} = \begin{cases} -2 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-8=0 \\ x-2y+11=0. \end{cases}$$

③ Tangente la cerc paralele cu o direcție dată.

Ex. Formați ecuațiile tangentelor la cercul

$$x^2+y^2+10x-2y+6=0$$

paralele cu dreapta $d: 2x+y \cancel{+} 7=0$

Rezolvare.

$$\begin{cases} y=-2x+k & \text{ecuațiile dreptelor paralele cu } d \\ x^2+y^2+10x-2y+6=0 \end{cases}$$

$$x^2+(-2x+k)^2+10x-2(-2x+k)+6=0$$

$$x^2+4x^2-4kx+k^2+10x+4x-2k+6=0$$

$$5x^2-2(2k-7)+k^2-2k+6=0$$

$$\Delta=0 \Leftrightarrow 4(2k-7)^2-20(k^2-2k+6)=0$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow k^2+18k-19=0 < \begin{matrix} k_1=-19 \\ k_2=1 \end{matrix}$$

$$y=-2x-19 \Leftrightarrow \boxed{2x+y+19=0}$$

$$y=-2x+1 \Leftrightarrow \boxed{2x+y-1=0}.$$