Seminar 13

Lista 11

(1.) Fie $p \in \mathbb{N}$ nr. prim. Să se arate că operațiile uzuale de adunare și înmulțire pe

$$V = \{a + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\} \rightarrow \text{submulț. a lui } \mathbb{R}$$

form. o structură de $\mathbb{Q}$ - sp. vectorial și să se determine o bază și dimensiunea lui ${}_{\mathbb{Q}}V$.

V $\mathbb{Q}$ - sp. vectorial. ?

· Varianta 1 : pe baza def.

· Varianta 2 : Orice corp com. poate fi privit ca un sp. vectorial peste orice subcorp al său.

K corp, S subcorp în K.

$+ : K \times K \rightarrow K$, $(K,+)$ grup abelian.

$\cdot : S \times K \rightarrow K$, $(\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x \in K$ → produs din K. verifică 1) - 4) din def. sp. vect.

↳ restricționăm op. de înmulțire ($\alpha \in S$, $x \in K$)

$\Rightarrow K$ S - sp. vect.

În cazul nostru, $\mathbb{Q}$ subcorp în $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{Q}$ - sp. vect.

$V \overset{?}{\leq}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ Temă

· Varianta 3 : V subcorp. în $(\mathbb{R},+,\cdot)$? $\Rightarrow$ V corp / $\Rightarrow V$ $\mathbb{Q}$ - sp vect.
$\mathbb{Q}$ subcorp în V ?

baza și dimensiunea lui ${}_{\mathbb{Q}}V$. ?

$$V = \{a \cdot 1 + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\} = \langle 1, \sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{p^2} \rangle$$

$1, \sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{p^2}$ l. indep. ? $\Rightarrow (1, \sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{p^2})$ bază în ${}_{\mathbb{Q}}V \Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}} V = 3$

$(a \cdot 1 + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} = 0 \Rightarrow a = b = c = 0)$

$\sqrt[3]{p},\ \sqrt[3]{p^2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$\begin{array}{l|l} a + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} = 0 \ /\sqrt[3]{p} & \cdot(-b) \\ cp + a\sqrt[3]{p} + b\sqrt[3]{p^2} = 0 & \cdot c \end{array} \ + \ \Rightarrow \ c^2p - ab + (ac - b^2)\sqrt[3]{p} = 0$$

Presupunând că $ac - b^2 \neq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{p} = \dfrac{ab - c^2p}{ac - b^2} \in \mathbb{Q}$ imposibil.

Prin urmare $ac - b^2 = 0 / \cdot b$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} c^2p - ab = 0 / \cdot c \quad + \\ \hline c^3p - b^3 = 0 \end{array}$$

Pp. că $c^3 \neq 0 \Rightarrow p = \dfrac{b^3}{c^3} \Rightarrow \sqrt[3]{p} = \dfrac{b}{c} \in \mathbb{Q}$ fals.

Așadar $c = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = 0$.

• $\dim_{\mathbb{Q}} V = 3$ (V $\mathbb{Q}$-sp. vect. ; $X = \{1, \sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{p^2}\}$ bază în $V \Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}} V = |X| = 3$)

Reamintim

1) V, V' K-sp. vect., $f : V \to V'$ transf. liniară, $\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.

2) V K-sp. vect., $A, B \leq_K V$. Atunci
$\dim A + \dim B = \dim (A + B) + \dim (A \cap B)$.

3) Fie V K-sp. vect., $\dim V < \infty$.
$A \leq_K V$, $\dim A = \dim V \Rightarrow A = V$.

② Fie V un K-sp. vect, $\dim V = n\ (\in \mathbb{N}^*)$, $V_1, V_2 \leq_K V$.
S.s.a.c dc. $\dim V_1 = n-1$ și $V_2 \not\subseteq V_1$ at. $V_1 + V_2 = V$.

Vrem $V_1 + V_2 = V$

Știm că $V_1 + V_2 \leq_K V \Rightarrow$ ajunge să dem că $\dim(V_1+V_2) = \dim V$ (i.e. $\dim(V_1+V_2) = n$)

$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1+V_2) + \dim V_1 \cap V_2$

dar cum într-un sp. vect de dim finită toate subspațiile au dim finită $\Rightarrow$

$$\dim V_1 + V_2 = \underbrace{\dim V_1}_{n-1} + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2 \quad (*)$$

$V_1 \cap V_2 \leq_K V_2 \Rightarrow \dim V_1 \cap V_2 \leq \dim V_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2 \geq 0 \xRightarrow{(*)}$

$\left.\begin{array}{l} \dim V_1 + V_2 \geq n-1 \\ V_1 + V_2 \leq_K V \Rightarrow \dim V_1 + V_2 \leq \dim V = n \end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim V_1 + V_2 \in \{n-1, n\}$.

Pp RA că $\dim V_1 + V_2 = n-1 \xRightarrow{(*)} \dim V_2 = \dim V_1 \cap V_2$

, dar $V_1 \cap V_2 \leq_K V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 = V_2 \Rightarrow V_2 \subseteq V_1$

contradicție cu ipoteza $V_2 \not\subseteq V_1$.

Așadar $\dim V_1 + V_2 = n \Rightarrow V_1 + V_2 = V$.

$\square$

③ Fie V un K-sp. vect, $A, B \leq_K V$ a.î. $\dim V < \infty$ și $\dim(A+B) = \dim(A \cap B) + 1$. Atunci $A \subseteq B$ sau $B \subseteq A$.

$\dim A + \dim B = \dim(A+B) + \dim(A \cap B) \Longrightarrow$

$\Rightarrow \dim A + \dim B = 2\dim(A \cap B) + 1 \quad (*)$

Știm că $A \cap B \leq_K A$ și $B \Rightarrow \dim(A \cap B) \leq \dim A$ și $\dim B$

Dacă ambele ineg. ar fi stricte am obține

$\dim(A \cap B) + 1 \leq \dim A$ și $\dim B \overset{(+)}{\Longrightarrow}$

$2\dim(A \cap B) + 2 \leq \dim A + \dim B$ contradicție cu $(*)$

Așadar una dintre cele 2 ineg trebuie să fie egalitate

I Dacă $\dim(A \cap B) = \dim A$, cum $A \cap B \leq_K A \Rightarrow A \cap B = A$

$\Rightarrow A \subseteq B$.

II Analog obținem $B \subseteq A$

$\square$

④ Fie f și g endomorfisme ale unui k-spațiu vectorial V de dimensiune finită. Dacă $f+g$ este un automorfism al lui V și $f\circ g$ este endomorfismul nul atunci $\dim V = \dim f(V) + \dim g(V)$.

Știm că $\dim V = \dim \underbrace{f(V)}_{\mathrm{Im} f} + \dim \ker f \Rightarrow$

Rămâne să dem. că $\dim \ker f = \dim g(V)$.

$\ker f \overset{def}{=} \{x \in V \mid f(x) = 0\}$.

$f\circ g = \theta \Leftrightarrow (f\circ g)(x) = 0, \forall x \in V \Leftrightarrow f(g(x)) = 0, \forall x \in V \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) \in \ker f, \forall x \in V \Rightarrow g(V) \subseteq \ker f \Rightarrow$

$\dim g(V) \leq \dim \ker f$.

Rămâne să dem că $\dim \ker f \leq \dim g(V)$.

$f+g$ automorfism al lui $V \Rightarrow f+g$ bij $\Rightarrow f+g$ surj

$\Rightarrow \underline{V = (f+g)(V)}$, dar $\underline{(f+g)(V)} = \{(f+g)(x) \mid x \in V\} =$

$= \{f(x) + g(x) \mid x \in V\} \subseteq \{f(x) + g(y) \mid x, y \in V\} =$

$= \underline{f(V) + g(V) \subseteq V} \Rightarrow V = f(V) + g(V) \Rightarrow$

$\dim V = \dim(f(V) + g(V)) = \dim f(V) + \dim g(V) - \underbrace{\dim(f(V)\cap g(V))}_{\in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow \dim V \leq \dim f(V) + \dim g(V)$

$\dim V = \dim f(V) + \dim \ker f$

$\Rightarrow \dim \ker f \leq \dim g(V)$.

$\square$

5) Se cere bază și dimens. pt. $S, T, S+T$ și $S\cap T$ când:

a) $S=\langle u_1,u_2\rangle$, $u_1=(1,1,0,0)$, $u_2=(1,0,1,1)$.

$T=\langle v_1,v_2\rangle$, $v_1=(0,0,1,1)$, $v_2=(0,1,1,0)$.

$\dim S=\operatorname{rang}(u_1,u_2)=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}=2$ și (u_1,u_2) bază în S

$\dim T=\operatorname{rang}(v_1,v_2)=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}=2$ și (v_1,v_2) bază în T

$S+T=\langle S\cup T\rangle=\langle u_1,u_2,v_1,v_2\rangle$

$\dim(S+T)=\operatorname{rang}(u_1,u_2,v_1,v_2)=4$ și (u_1,u_2,v_1,v_2) bază în $S+T$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&1\\0&0&1&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\underset{l_2-l_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&1&1\\0&0&1&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\underset{l_4+l_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&2&1\end{pmatrix}\overset{c_4-c_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

Obs: $S+T\leq_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$, $\dim(S+T)=4=\dim\mathbb{R}^4\implies S+T=\mathbb{R}^4$

$\implies$ baza canonică este bază în $S+T$.

$\dim S+\dim T=\dim(S+T)+\dim(S\cap T)\implies$

$\implies\dim(S\cap T)=\dim S+\dim T-\dim(S+T)=2+2-4=0$

$\implies S\cap T=\{(0,0,0,0)\}\implies\emptyset$ bază în $S\cap T$.

b) $S=\langle u_1,u_2,u_3\rangle$, $u_1=(1,2,-1,-2)$, $u_2=(3,1,1,1)$, $u_3=(-1,0,1,-1)$

$T=\langle v_1,v_2\rangle$, $v_1=(-1,2,-7,-3)$, $v_2=(2,5,-6,-5)$

$\left.\begin{array}{l}\dim S=3 \text{ și } (u_1,u_2,u_3) \text{ bază în } S\\ \dim T=2 \text{ și } (v_1,v_2) \text{ — " — } T\end{array}\right\}$ temă

$S+T=\langle u_1,u_2,u_3,v_1,v_2\rangle$

$\dim(S+T)=\operatorname{rang}(u_1,u_2,u_3,v_1,v_2)=3$ și (u_1,v_2,u_3) bază în $S+T$.

$$\begin{array}{c}u_1\\u_2\\u_3\\v_1\\v_2\end{array}\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\3&1&1&1\\-1&0&1&-1\\-1&2&-7&-3\\2&5&-6&-5\end{pmatrix}\underset{c_4+2c_1}{\overset{c_2-2c_1}{\underset{c_3+c_1}{\sim}}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-5&4&7\\0&2&0&-3\\0&4&-8&-5\\0&1&-4&-1\end{pmatrix}\underset{l_2\leftrightarrow l_5}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-4&-1\\0&2&0&-3\\0&4&-8&-5\\0&-5&4&7\end{pmatrix}\underset{c_4+c_2}{\overset{c_3+4c_2}{\sim}}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&8&-1\\0&0&8&-1\\0&0&-16&2\end{pmatrix}\overset{c_4+1/8\,c_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&8&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Obs: $\left.\begin{array}{l}\dim S+T = \dim S\\ S \leq_{\mathbb{R}} S+T\end{array}\right\} \Longrightarrow S+T=S \Longrightarrow (u_1,u_2,u_3)$ bază în $S+T$.

$\dim(S\cap T) = \dim S + \dim T - \dim(S+T) = 3+2-3 = 2 = \dim T$

$\left.\begin{array}{l}\dim(S\cap T) = 2 = \dim T\\ S\cap T \leq_{\mathbb{R}} T\end{array}\right\} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow S\cap T = T \Longrightarrow (v_1,v_2)$ bază în $S\cap T$.

Întrebare: În $\mathbb{Q}$-s.v. $\mathbb{Q}^3$ considerăm

$a=(-2,1,3)$, $b=(3,-2,-1)$, $c=(1,-1,2)$, $d=(-5,3,4)$, $e=(-9,5,10)$.

Are loc $\langle a,b\rangle \overset{?}{=} \langle c,d,e\rangle$?

Soluție: $\dim\langle a,b\rangle = \text{rang}(a,b) = \text{rang}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 3 & -2 & -1\end{pmatrix} = 2$

$\dim\langle c,d,e\rangle = 2 \Longrightarrow (c,d)$ bază în $\langle c,d,e\rangle$

$$\begin{array}{c} c\\ d\\ e\end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ -5 & 3 & 4\\ \cancel{-9} & \cancel{5} & \cancel{10}\end{pmatrix} \underset{c_3-2c_1}{\overset{c_2+c_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 14\\ \cancel{0} & \cancel{-4} & \cancel{28}\end{pmatrix}$$

proporționale

$\langle a,b\rangle \overset{?}{=} \langle c,d\rangle$

$\Updownarrow$ $\dim\langle a,b\rangle = \dim\langle c,d\rangle = 2$

$\langle a,b\rangle \leq_{\mathbb{Q}} \langle c,d\rangle$

$\Updownarrow$

$a,b \overset{?}{\in} \langle c,d\rangle$

a,c,d l. dep.

$\Updownarrow$

$a \in \langle c,d\rangle \Longleftrightarrow \begin{vmatrix}-2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 2\\ -5 & 3 & 4\end{vmatrix} \overset{?}{=} 0$ (temă)

$b \in \langle c,d\rangle \Longleftrightarrow b,c,d$ l. dep. $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix}3 & -2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ -5 & 3 & 4\end{vmatrix} \overset{?}{=} 0$ (temă)

R: Da!