CAPITOLUL II

SPAŢIUL INTUITIV

Elementele spaţiului intuitiv, *punctele*, *dreptele* şi *planele*, se obţin printr-un proces de abstracţiune aplicat unor obiecte ale spaţiului fizic. Vîrful unui ac, un fir întins sau suprafaţa unei ape liniştite sugerează aceste noţiuni, dar nu se confundă cu ele. Tot aşa relaţiile fundamentale ale spaţiului intuitiv, *incidenţa*, *ordonarea* şi *congruenţa* nu sînt decît sugerate pe figura 1; avem o realizare aproximativă a acestor relaţii cu „elemente aproximante". Figura 1 doar sugerează următoarele relaţii: punctul A este *incident* cu dreapta d (altfel spus: *A se află pe d* sau *d trece* prin A); la fel B şi C sînt incidente cu d; punctul D nu este incident cu dreapta d; punctul D este incident cu planul α; punctele A, B, C *au ordonarea* (A, B, C) (altfel spus B *se află între* A şi C); C nu se află între A şi B; D nu se află între A şi E; perechile de puncte (A, C) şi (D, E) sînt *congruente* (există o mişcare care duce simultan pe B, C respectiv în D, E) etc.

Este cu totul remarcabil că, deşi figurile nu pot reproduce exact noţiunile spaţiului intuitiv, totuşi plecînd de la figuri, se pot stabili o serie de rezultate exacte, general valabile. Ştim, din şcoala medie că acest lucru se face cu ajutorul intuiţiei, care „corectează" figurile şi cu ajutorul raţionamentului logic, care permite folosirea unor rezultate stabilite anterior, fără recurgere la intuiţie. În acest proces se caută să se folosească cît mai puţin intuiţia şi cît mai mult deducţia logică (din mai multe motive: intuiţia poate greşi, deducţia logică simplifică lucrurile şi sistematizează etc.). Mai mult, se pot da la început toate „proprietăţile primare", la a căror stabilire este necesară intuiţia şi apoi se poate dezvolta geometria, fără a se mai recurge la intuiţie. Dificultăţile tehnice, legate de multe chestiuni de detaliu, îngreuiază aplicarea consecventă a acestei metode la şcoală.

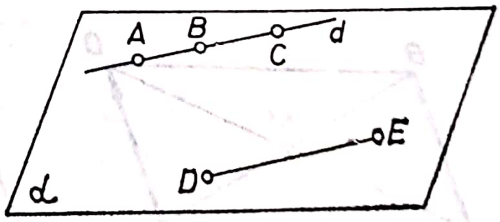

Fig. 1

Deja Euclid a căutat să stabilească o listă a „proprietăţilor primare", lista lui nu a fost însă completă. O primă listă completă a fost dată abia cu 2000 de ani mai tîrziu, de către D. Hilbert în 1899, cunoscută sub numele de *axiomele lui Hilbert* (sau axiomele Euclid — Hilbert), grupată în axiomele de incidenţă, ordonare, congruenţă, continuitate şi paralelism.

Am remarcat dificultatea legată de descrierea noţiunilor primare. Unii autori au recunoscut că nici nu este nevoie de o asemenea descriere. Întrucît toate rezultatele decurg din proprietăţile primare pe cale logică, indiferent de natura fizică sau intuitivă a acestora, noi putem concepe noţiunile primare ca elementele unei anumite mulţimi, care verifică o listă de cerinţe, numite axiome. Enunţul axiomelor este acelaşi cu cel al proprietăţilor primare, numai că semnificaţia cuvintelor din enunţ s-a schimbat : de exemplu, punctul numai este cel intuit, ci un element al unei mulţimi, care satisface axiomele enunţate. Se obţine astfel o prezentare axiomatică a geometriei elementare.

Metoda axiomatică deschide calea spre generalizări. Putem, de pildă, să admitem numai o parte din axiomele lui Hilbert; atunci se ajunge la o teorie cu valabilitate mai generală. Se pot modifica axiomele şi apar geometriile neeuclidiene. Putem să ne inspirăm din geometria analitică pentru a formula axiome, ceea ce s-a dovedit deosebit de eficace şi ceea ce vom face şi noi, începînd din capitolul III. Capitolul de faţă are un caracter pregătitor, tocmai în vederea acestui scop.

Vom admite aici ca valabile cîteva proprietăţi simple cunoscute de elevi sub o formă mai mult sau mai puţin sistematizată, şi, pe alocuri, vom face şi apel direct la intuiţie.

2.1. VECTORII LIBERI

Notăm cu $\mathscr{P}$ mulţimea punctelor din spaţiul intuitiv. Concepem dreptele şi planele ca mulţimi de puncte.

Un element (A, B) al produsului cartezian $\mathscr{P} \times \mathscr{P}$ se va numi o *pereche de puncte* sau un *bipunct*. A este originea bipunctului, iar B *extremitatea* sa.

Bipunctele (A, B) şi (C, D) se zic *echipolente*, în notaţie $(A, B) \sim (C, D)$, dacă $[A, D]$ şi $[B, C]$ au acelaşi mijloc (fig. 2). Aici $[A, D]$ şi $[B, C]$ notează fie un segment, fie un punct (dacă $A = D$; atunci mijlocul e tot A). Dacă punctele A, B, C, D nu sînt pe o dreaptă atunci $(A, B) \sim (C, D)$ dacă şi numai dacă $ABCD$ este un paralelogram.

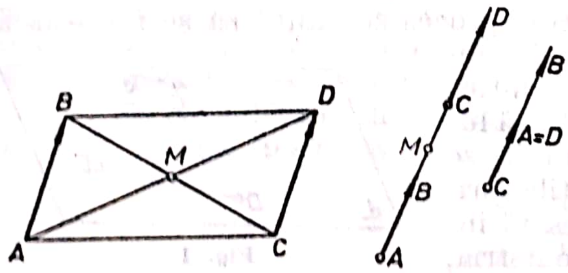

Fig. 2

Propoziţia 1. *Fie* (A, B) *un bipunct şi* O *un punct. Atunci există un singur punct* X *astfel încît* $(A, B) \sim (O, X)$.

Fie M mijlocul lui OB. Propoziţia rezultă din faptul că putem construi un singur punct X cu proprietatea că M să fie mijlocul lui $[A, X]$.

Propoziţia 2. *Relaţia de echipolenţă este o relaţie de echivalenţă în mulţimea* $\mathscr{P} \times \mathscr{P}$.

Demonstraţie. Se vede imediat că relaţia de echipolenţă este reflexivă şi simetrică. Pentru a stabili tranzitivitatea, să presupunem că $(A, B) \sim (C, D)$ şi $(C, D) \sim (E, F)$. Dacă punctele uneia dintre aceste perechi coincid, atunci acelaşi lucru se întîmplă cu toate trei şi rezultă $(A, B) \sim (E, F)$. Putem admite în continuare că $A \neq B$, $C \neq D$, $E \neq F$. Deosebim trei cazuri:

a) Dreptele AB şi EF sînt distincte (fig. 3, a). Atunci $AB \| EF$, căci aceste drepte sînt paralele cu CD (folosim paralelismul în sens larg: două drepte suprapuse sînt considerate paralele). Fie M mijlocul lui $[A, D]$ şi $[B, C]$ şi N mijlocul lui $[C, F]$ şi $[D, E]$. Dacă C coincide cu B sau F, dreapta MN se suprapune peste BF, iar în caz contrar, CBF este un triunghi cu linia mijlocie MN. Rezultă $BF \| MN$ şi analog $AE \| MN$. Aşadar, $BF \| AE$ şi patrulaterul $ABFE$ rezultă paralelogram, de unde $(A, B) \sim (E, F)$.

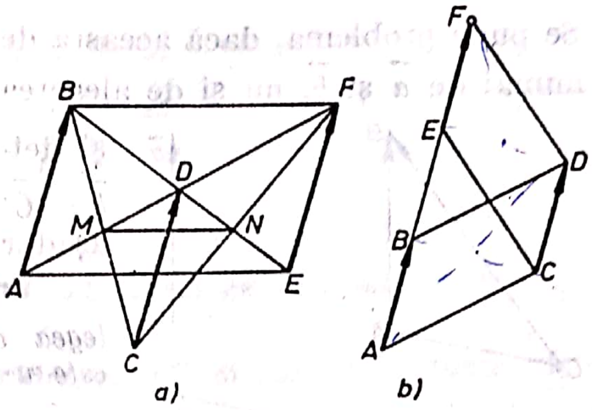

Fig. 3

b) Dreptele AB şi EF coincid, dar CD este o altă dreaptă. Există X astfel ca $(A, B) \sim (E, X)$. Aplicînd rezultatul de la cazul a) bipunctelor (C, D), (A, B), (E, X), obţinem că $(C, D) \sim (E, X)$; ţinînd seama că în acelaşi timp avem $(C, D) \sim (E, F)$, propoziţia 1 arată că F coincide cu X. Aşadar $(A, B) \sim (E, F)$.

c) Dreptele AB, CD şi EF coincid. Luăm un punct G, nesituat pe dreapta AB, şi H astfel ca $(C, D) \sim (G, H)$. Ţinînd seamă de cazul a) deducem $(A, B) \sim (G, H)$ şi $(G, H) \sim (E, F)$; folosind b), obţinem $(A, B) \sim (E, F)$.

Clasele de echivalenţă, determinate de relaţia de echipolenţă se numesc ***vectori*** (***liberi***).

Notăm:

$$\overrightarrow{AB} = \{(X, Y) \mid (X, Y) \sim (A, B)\},$$

$$\mathscr{V} = \mathscr{P} \times \mathscr{P}/\sim = \{\overrightarrow{AB} \mid A \in \mathscr{P},\ B \in \mathscr{P}\}.$$

Se deduce foarte uşor:

(1) $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$$

(2) $$\forall\, A, B, O \in \mathscr{P},\ \exists!\, X \in \mathscr{P},\quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OX}.$$

($\exists!$ se citeşte: „există un singur"). Avem de asemenea:

(3) $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'},\quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}.$$

Într-adevăr, ţinînd seamă de (1), putem scrie $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$, deci $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$, de unde $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

Definim o lege de compunere internă pe $\mathscr{V}$ în felul următor: fie $\vec{a}, \vec{b} \in \mathscr{V}$; alegem un punct arbitrar O şi determinăm, în virtutea lui (2), în mod unic punctele A, B astfel încît $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ (fig. 4); prin definiție, vectorul $\overrightarrow{OB}$ se numește *suma vectorilor* $\vec{a}$ și $\vec{b}$ și se scrie

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}. \tag{4}$$

Se pune problema, dacă această definiție este corectă: dacă $\overrightarrow{OB}$ depinde numai de $\vec{a}$ și $\vec{b}$, nu și de alegerea punctului O. Luînd un alt punct O' și determinînd A',B' astfel încît $\vec{a} = \overrightarrow{O'A'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{O'B'}$, deducem din (3) că $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'}$; așadar definiția este corectă.

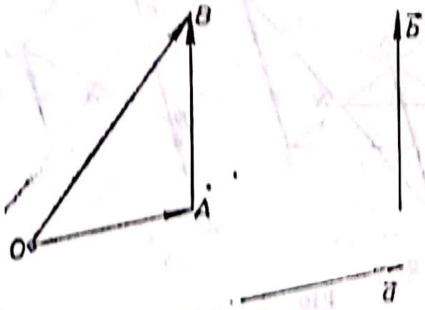

Fig. 4

Propoziția 3. *Mulțimea* $\mathcal{V}$, *înzestrată cu legea de compunere internă* $(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b}$, *este un grup comutativ; elementul neutru este vectorul* $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$, *iar simetricul lui* $\overrightarrow{AB}$ *este* $\overrightarrow{BA}$ *(care se notează* $-\overrightarrow{AB}$*).*

Într-adevăr, asociativitatea rezultă ușor din (4) și din faptul că trei vectori oarecare se pot scrie sub forma $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$:

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

Tot din (4) se vede că

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{OA}; \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}.$$

Pentru a stabili comutativitatea, fie $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}$ doi vectori dați; se determină C astfel încît $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$; atunci $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ și avem

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}.$$

Corolar. Fiind dați vectorii $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{OB}$, există un singur vector $\vec{x}$, astfel încît $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$. El este egal cu $\vec{b} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{AB}$ și se notează cu $\vec{b} - \vec{a}$ (fig. 5).

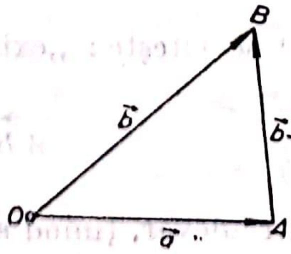

Fig. 5

Definim o lege de compunere externă, produsul dintre un număr real α și un vector $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$: dacă $\vec{a} = \vec{0}$, punem $\alpha\vec{a} = \vec{0}$; dacă $\vec{a} \neq \vec{0}$ și $\alpha \geqslant 0$, determinăm în mod unic un punct B pe semidreapta, cu originea O și conținînd A, astfel ca lungimea segmentului $[O, B]$ să fie de α ori lungimea lui $[O, A]$ și punem $\alpha\vec{a} = \overrightarrow{OB}$; dacă $\alpha < 0$, definim $\alpha\vec{a} = -(|\alpha|\vec{a})$. Se observă că vectorul $\alpha\vec{a}$ depinde numai de α și $\vec{a}$, nu și de alegerea punctului O.

Propoziția 4. *Au loc relațiile*

$$(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a}) \tag{5}$$

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \tag{6}$$

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} \tag{7}$$

$$1.\vec{a} = \vec{a}, \tag{8}$$

oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *și* $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}$.

Definiție *Vectorii nemului* $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}$ *să fie de același sens dacă există* $\lambda > 0$ *astfel încît* $\vec{a} = \lambda\vec{b}$

Într-adevăr, relația (8) este evidentă, (5) și (6) se verifică ușor pentru $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, iar pentru α, β oarecare se ține seama de $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$. Rămîne să demonstrăm (7). Fie $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Dacă punctele O, A, B sînt coliniare, relația (7) se deduce din (5) și (6); putem deci presupune că O, A, B sînt vîrfurile unui triunghi, (fig. 6). De asemenea putem să ne limităm la cazul $\alpha > 0$. Determinăm O' și B' astfel încît $\overrightarrow{O'A} = \alpha\vec{a}$; $\overrightarrow{AB'} = \alpha\vec{b}$. Atunci triunghiurile OAB și $O'AB'$ sînt asemenea avînd un unghi comun cuprins între laturi proporționale. Rezultă $OB \parallel O'B'$ și $[O', B'] = \alpha \cdot [O, B] = \alpha[O', B'']$, unde B'' este punctul în care $O'B'$ taie paralela, prin B, la $O'A$. Cum B'' se află pe semidreapta cu originea O' și conținînd B', avem $\overrightarrow{O'B'} = \alpha\overrightarrow{O'B''}$. Deoarece $\overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{AB'} = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ și $\overrightarrow{O'B''} = \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$, rezultă că $\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} = \alpha(\vec{a} + \vec{b})$, c.c.t.d.

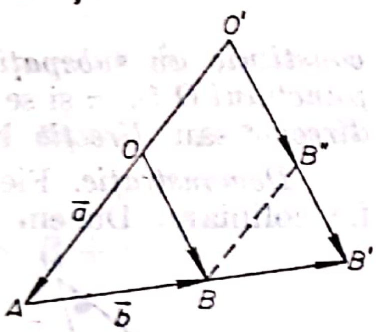

Fig. 6

Propozițiile 3 și 4 implică următorul rezultat fundamental:

Teoremă. *Mulțimea vectorilor liberi* $\mathcal{V}$ *înzestrată cu adunarea vectorială și cu înmulțirea unui vector cu un număr real, constituie un spațiu vectorial cu scalarii în* $\mathbb{R}$.

Definiție *Victorii* ~~nemului~~ nenulu $\vec{a}$. $\vec{b} \in \mathcal{V}$ *se zic de* același sens *dacă există* $\lambda > 0$ *acțfel înc.t* $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

2.2. CARACTERIZAREA VECTORIALĂ A DREPTELOR ȘI PLANELOR. DIMENSIUNEA SPAȚIULUI VECTORILOR LIBERI

Propoziția 1. *Fie* Δ *o dreaptă și* $O \in \Delta$. *Mulțimea de vectori*

$$\vec{\Delta} = \{\overrightarrow{OM} \mid M \in \Delta\}$$

este un subspațiu de dimensiune 1 în $\mathcal{V}$. *El nu depinde de poziția punctului O pe* Δ și se numește *subspațiul director* al lui Δ sau *direcția* lui Δ.

GH. GALBURĂ F. RADÓ

GEOMETRIE