Seminar 03

Inelul matricilor cu elem. într-un corp. com.

- $(R, +, \cdot)$ inel com. cu unitate

$m, n \in \mathbb{N}^*$, $A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to R$

$A(i, j) = a_{ij} \in R$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

A s.n. matrice de tipul (m, n) cu elem. din R.

Reprezentăm A astfel:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{sau} \quad A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$$

$\mathcal{M}_{mn}(R)$ = mulț. matricilor de tipul (m, n) (cu m linii și n coloane), cu elem. din R.

- Operații:

1) Adunarea

Fie $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$

$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(R)$.

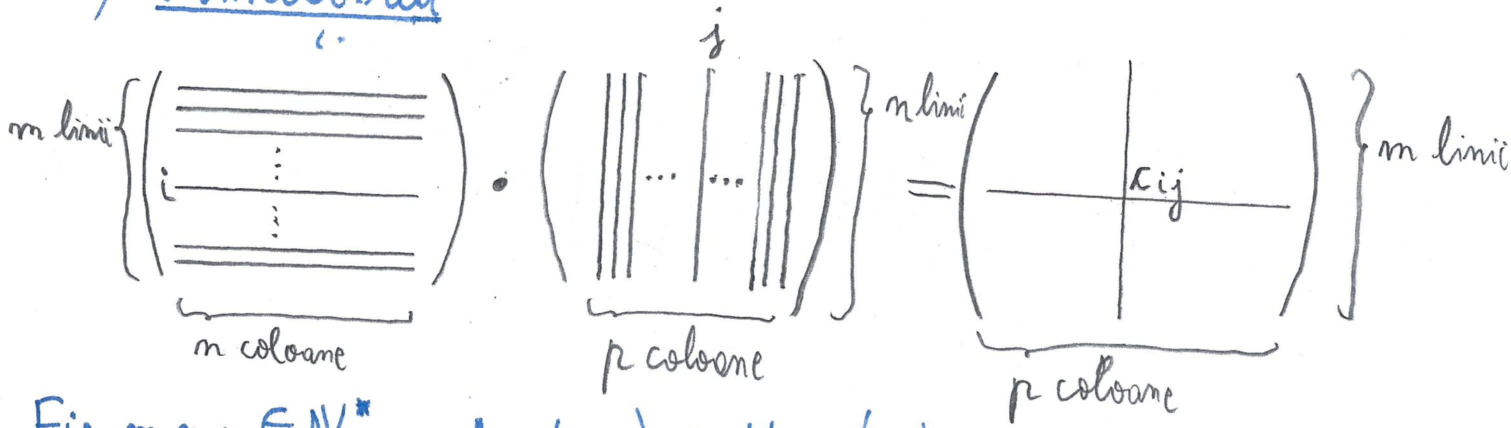
Proprietăți: – asoc., – com.

– el. nul: $O_{mn} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{n \text{ col.}} \Big\} m \text{ linii}$

$-\ \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ A = (a_{ij}),\ \exists\ -A = (-a_{ij})$ opusa matricii A.

Așadar $(\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}), +)$ grup abelien.

2) <u>Înmulțirea</u>



Fie $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$

$A \cdot B = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{R})$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

$\cdot : \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{R})$.

$m = n = p \Rightarrow \ \cdot : \underbrace{\mathcal{M}_n}_{\overset{not}{=}\ \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ lege de comp.

(matrici patratice).

Proprietăți: - asoc.

$$\left.\begin{array}{l} \text{- asoc.} \\ \text{- el. unitate } I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{temă}$$

$\Rightarrow (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ monoid.

- $\cdot$ este distrib. față de $+$. (temă)

$\Rightarrow (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ inel cu unitate.

Obs. Dacă $R = k$ corp com. $\Rightarrow (\mathcal{M}_n(k), +, \cdot)$ inel cu unitate

Exercițiu: Să se arate că inelul $(\mathcal{M}_2(k), +, \cdot)$ este necomutativ și cu divizori ai lui zero.

Soluție: Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(k)$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2 . \Rightarrow (\mathcal{M}_2(k), +, \cdot) \text{ are div. ai lui zero.}$$

$(\mathcal{M}_2(k), \cdot)$ necomutativ

$\square$

- **Obs.** Fie $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$.

$\Rightarrow A$ parte stabilă în $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \cdot)$

$\Rightarrow (A, \underset{\text{op. indusă}}{\cdot})$ monoid comutativ! și cu el. unitate din A $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- exemplul în care o p.s. cu op. indusă are alt elem. neutru!

- **Elem. inversabile:** Fie $A \in \mathcal{M}_n(k)$ (k corp. com $\{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$).

A inv $\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(k)$ a.î. $AB = BA = I_n$

$\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Determinanți

- Fie K un corp com., $n \in \mathbb{N}^*$

Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$. Cum calculăm $\det A$?

Reamintim:

1) Pt. $n=1 \Rightarrow A = (a_{11}) \Rightarrow \det A = a_{11}$.

2) Pt. $n=2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

3) Pt. $n=3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

....

→ facem 0 pe $n-1$ poziții ale unei linii (col.) folosind proprietățile determinanților

→ dezvoltăm determinantul după această linie (col.)

Proprietăți:

1) Dacă B se obține din A prin înmulțirea unei linii (col.) cu un $\alpha \in K$ și adunarea la alta, at. $\det B = \det A$.

2) Dc. B se obține din A prin permutarea a 2 linii (col.) at. $\det B = -\det A$.

3) Dc. B se obține din A prin înmulțirea unei linii (col.) cu un $\alpha \in K$ at. $\det B = \alpha \cdot \det A$.

4) Tăind linia și col. lui a_{ij} obținem o matrice cu $n-1$ linii și $n-1$ col.. Determinantul acesteia este <u>minorul elem. a_{ij}</u>. Îl notăm cu d_{ij}.

Fie $\Gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot d_{ij}$ <u>complementul algebric</u> al lui a_{ij}.

Atunci:

$$\det A = a_{i1} \cdot \Gamma_{i1} + a_{i2} \cdot \Gamma_{i2} + \ldots + a_{in} \Gamma_{in} \quad \forall\, i = \overline{1,n}$$

(dezvoltarea după linia i)

$$\det A = a_{1j} \cdot \Gamma_{1j} + a_{2j} \cdot \Gamma_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot \Gamma_{nj} \quad \forall\, j = \overline{1,n}.$$

(dezvoltarea după col. j).

<u>Exemplu:</u> $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ dezvoltăm după linia 1.

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Exerciții (lista 3)

① Calculați:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[C_3 - C_4]{C_1 - C_4 \\ C_2 - C_4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \underbrace{(-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} \dots \end{vmatrix}}_{0} + 0 + 0$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 1.$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \dots$ (temă).

c) $\begin{vmatrix} -1 & a & \dots & a \\ a & -1 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \dots & -1 \end{vmatrix}$ (determinant de ordinul n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$)

$\xlongequal{C_1 + C_2 + \dots + C_n} \begin{vmatrix} \underbrace{(n-1)a-1}_{\text{factor } (n-1)a-1} & a & \dots & a \\ (n-1)a-1 & -1 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)a-1 & a & \dots & -1 \end{vmatrix} = \big((n-1)a-1\big) \begin{vmatrix} 1 & a & \dots & a \\ 1 & -1 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \dots & -1 \end{vmatrix} =$

$$\xlongequal[\substack{C_2-aC_1\\C_3-aC_1\\ \dots\\ C_n-aC_1}]{}((n-1)a-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & -1-a & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & 0 & \dots & -1-a\end{vmatrix}=$$

$$=((n-1)a-1)\begin{vmatrix} -1-a & 0 & \dots & 0\\ 0 & -1-a & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & -1-a\end{vmatrix}=((n-1)a-1)(-1-a)^{n-1}.$$

d) $d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ x_2 & x_3 & x_1\\ x_3 & x_1 & x_2\end{vmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului $X^3-2X^2+2X+17\in\mathbb{Q}[X]$.

Relațiile lui Viète $\quad f=aX^3+bX^2+cX+d$, $a\neq 0$.

1) $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}\left(=-\frac{-2}{1}=2\right)$

2) $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{c}{a}\left(=\frac{2}{1}=2\right)$.

3) $x_1x_2x_3=\frac{-d}{a}\left(=-\frac{17}{1}=-17\right)$

$$d\xlongequal{L_1+L_2+L_3}\begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3\\ x_2 & x_3 & x_1\\ x_3 & x_1 & x_2\end{vmatrix}$$ ∃ factor $x_1+x_2+x_3$

$$=\underbrace{(x_1+x_2+x_3)}_{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ x_2 & x_3 & x_1\\ x_3 & x_1 & x_2\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{C_3-C_1\\C_2-C_1}]{}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3-x_2 & x_1-x_2 \\ x_3 & x_1-x_3 & x_2-x_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x_3-x_2 & x_1-x_2 \\ x_1-x_3 & x_2-x_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left((x_3-x_2)(x_2-x_3)-(x_1-x_2)(x_1-x_3)\right)$$

$$= 2\left(x_3x_2-x_3^2-x_2^2+\cancel{x_2x_3}-x_1^2+x_1x_3+x_2x_1-\cancel{x_2x_3}\right)$$

$$= 2\left(-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\underbrace{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}_{2}\right)$$

Reamintim: $(x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$

$\Rightarrow 2^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\cdot 2 \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$

$\Rightarrow d = 2(-0+2)=4.$

e) temă.

2 temă.

Lista 3 - Ex 3)

Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Să se arate că:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

<u>Soluție:</u> Notăm acest determinant cu V_n. Demonstrăm prin inducție matematică după n.

Pasul inițial. $n=2$. $V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$ ✓

Pasul inductiv. Pp. că afirmația are loc pentru $n=k$. Demonstrăm pentru $n=k+1$.

dezvoltăm după C_1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{k+1} \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{k+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^k & a_2^k & \dots & a_{k+1}^k \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\text{Din rândul } i+1 \\ \text{scădem (rândul } i)\cdot a_1}]{\substack{L_{k+1} \leftarrow L_{k+1} - a_1 \cdot L_k \\ L_k \leftarrow L_k - a_1 \cdot L_{k-1} \\ \vdots \\ L_2 \leftarrow L_2 - a_1 \cdot L_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \dots & a_{k+1} - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_2 a_1 & \dots & a_{k+1}^2 - a_{k+1} a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \underbrace{a_2^k - a_2^{k-1} a_1}_{\text{factor } (a_2 - a_1)} & \dots & \underbrace{a_{k+1}^k - a_{k+1}^{k-1} \cdot a_1}_{\text{factor } (a_{k+1} - a_1)} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_{k+1} - a_1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{k+1} \\ a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_{k+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{k-1} & a_3^{k-1} & \dots & a_{k+1}^{k-1} \end{vmatrix}}_{\text{ip. de inducție}}$$

$$= \prod_{j=2}^{k+1} (a_j - a_1) \cdot \prod_{2 \leq i < j \leq k+1} (a_j - a_i)$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq k+1} (a_j - a_i).$$

□