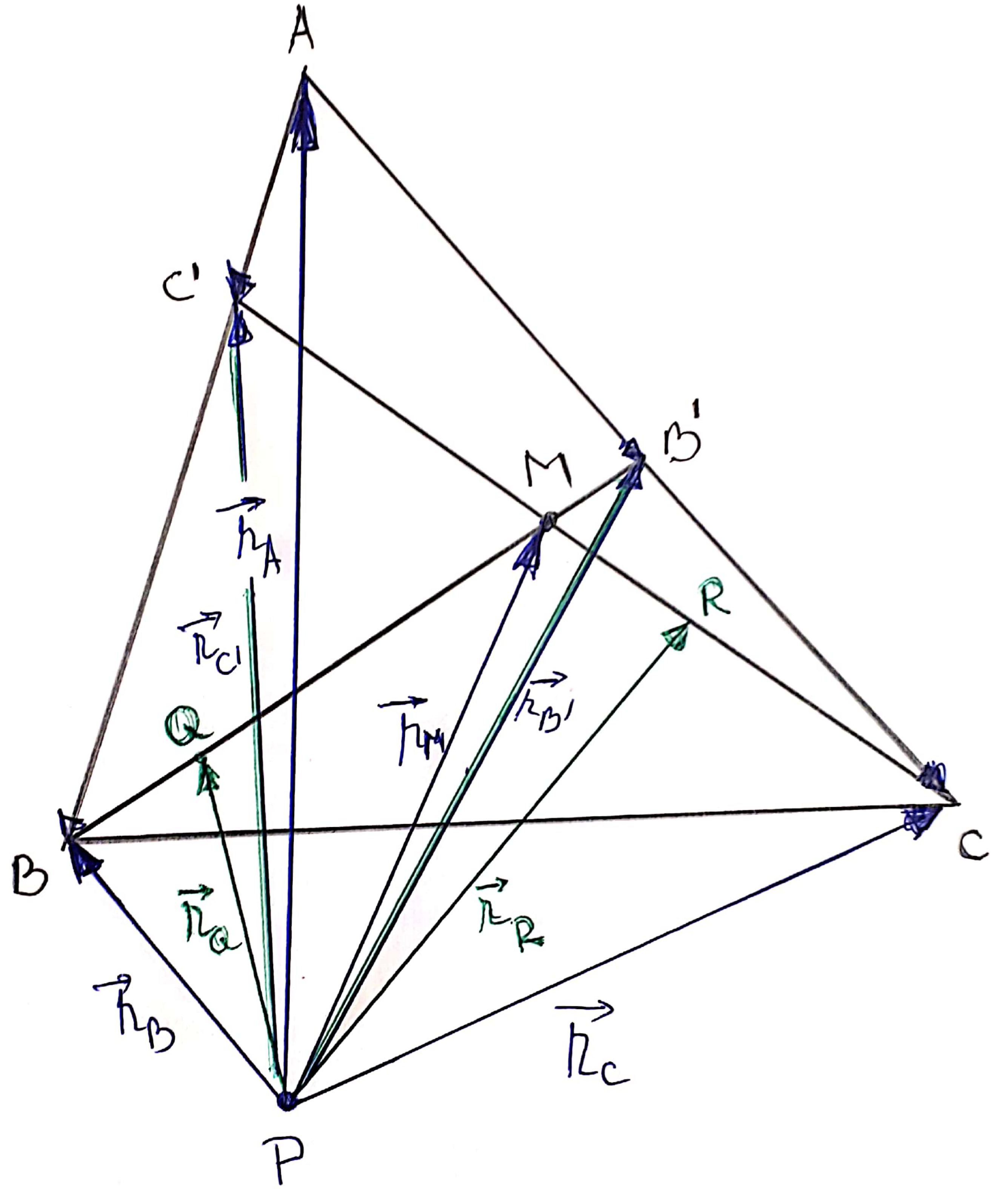
Seminar 1

1. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se iau punctele C' și B' astfel încât $\vec{AC'} = \lambda \cdot \vec{C'B}$ și $\vec{AB'} = \mu \vec{B'C}$. Dreptele BB' și CC' se intersectează în punctul M. Dacă P este un punct oarecare din spațiu și $\vec{r}_A \overset{not}{=} \vec{PA}$, $\vec{r}_B \overset{not}{=} \vec{PB}$, $\vec{r}_C \overset{not}{=} \vec{PC}$ vectorii de poziție ai vârfurilor, să se arate că

$$\vec{PM} \overset{not}{=} \boxed{\vec{r}_M = \frac{1}{1+\lambda+\mu}\left(\vec{r}_A + \lambda \vec{r}_B + \mu \vec{r}_C\right)}$$

Scanned with CamScanner



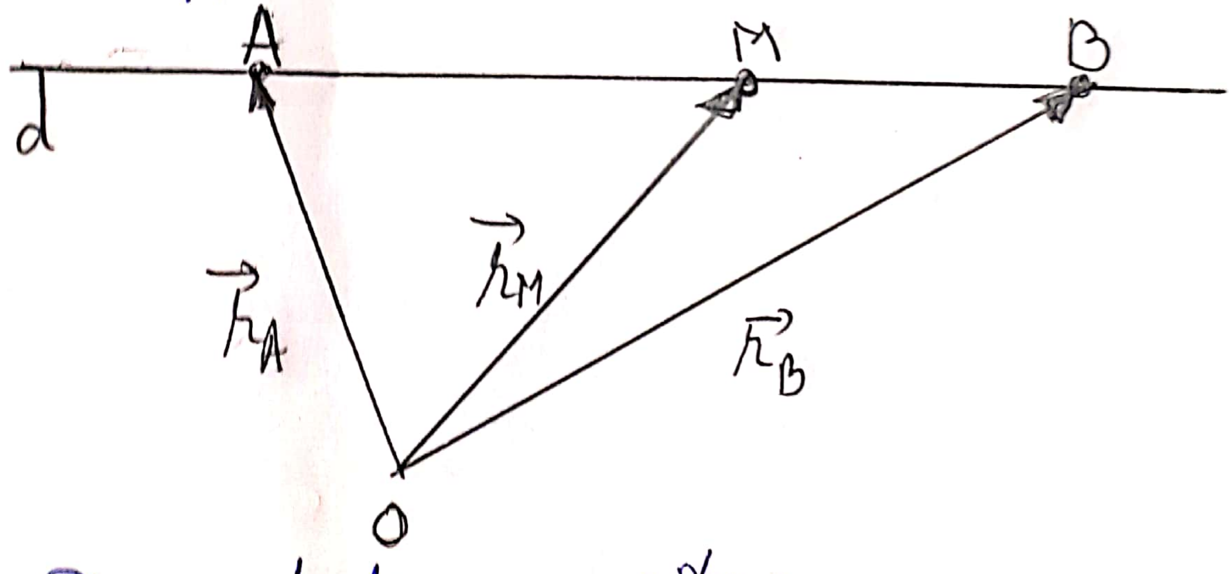
Scanned with CamScanner

Soluție

Se utilizează ecuația vectorială a dreptei dată prin două puncte:

Prop. Se dau punctele distincte (fixate) A și B pe dreapta d (= AB) și M un punct variabil pe dreapta d. Atunci există un unic număr $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât are loc relația

$$\vec{r}_M = (1-\alpha)\vec{r}_A + \alpha \vec{r}_B .$$



Demonstrația propoziției:

$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{AM}$, $\vec{AM} = \alpha \cdot \vec{AB}$

$\Rightarrow \vec{r}_M = \vec{r}_A + \alpha \cdot \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{r}_M = \vec{r}_A + \alpha(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$

$\Rightarrow \vec{r}_M = (1-\alpha)\vec{r}_A + \alpha \vec{r}_B$. #

Scanned with CamScanner

În cazul nostru:

BB' : $\vec{r}_Q = (1-\alpha)\vec{r}_B + \alpha \vec{r}_{B'}$

În ipoteză se dă:

$\vec{AB'} = \mu \vec{B'C} \Leftrightarrow \vec{r}_{B'} - \vec{r}_A = \mu(\vec{r}_C - \vec{r}_{B'})$

$\Leftrightarrow \vec{r}_{B'} = \frac{1}{1+\mu}(\vec{r}_A + \mu \vec{r}_C)$.

Deci $\vec{r}_Q = (1-\alpha)\vec{r}_B + \frac{\alpha}{1+\mu}(\vec{r}_A + \mu \vec{r}_C)$. (1)

Analog

CC' = $\vec{r}_R = (1-\beta)\vec{r}_C + \beta \vec{r}_{C'}$, dar din ipoteză,

$\vec{AC'} = \lambda(\vec{C'B}) \Leftrightarrow \vec{r}_{C'} - \vec{r}_A = \lambda(\vec{r}_B - \vec{r}_{C'})$

$\Leftrightarrow \vec{r}_{C'} = \frac{1}{1+\lambda}(\vec{r}_A + \lambda \vec{r}_B)$.

Deci $\vec{r}_R = (1-\beta)\vec{r}_C + \frac{\beta}{1+\lambda}(\vec{r}_A + \lambda \vec{r}_B)$. (2)

$BB' \cap CC' = \{M\}$, adică

$\exists!\, \alpha \in \mathbb{R}$ și $\exists!\, \beta \in \mathbb{R}$ a.î.

$\vec{r}_Q = \vec{r}_R = \vec{r}_M \xLeftrightarrow{\text{din (1) și (2)}}$

$$(1-\alpha)\vec{r}_B + \frac{\alpha}{1+\mu}(\vec{r}_A + \mu\vec{r}_C) = (1-\beta)\vec{r}_C + \frac{\beta}{1+\lambda}(\vec{r}_A + \lambda\vec{r}_B)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha}{1+\mu} = \dfrac{\beta}{1+\lambda} \\ 1-\alpha = \dfrac{\beta\lambda}{1+\lambda} \\ \dfrac{\alpha\mu}{1+\mu} = 1-\beta \end{cases}$$

$$\beta = \frac{1+\lambda}{1+\mu}\alpha \Rightarrow 1-\alpha = \frac{\alpha\lambda}{1+\mu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1+\mu}{1+\lambda+\mu}, \quad \beta = \frac{1+\lambda}{1+\lambda+\mu}$$

Înlocuind α în relația (1) sau β în (2) rezultă

$$\vec{r}_M = \frac{1}{1+\lambda+\mu}(\vec{r}_A + \lambda\vec{r}_B + \mu\vec{r}_C)$$

#

Cazuri particulare

1.1. Dacă BB' și CC' sunt mediane, atunci $M \equiv G$, $\lambda = \mu = 1$ $\Rightarrow$

$$\vec{r}_G = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$$

1.2. Dacă BB' și CC' sunt bisectoare, atunci $M \equiv I$ (centrul cercului înscris) și $\lambda = \frac{AC'}{C'B} = \frac{b}{a}$ și $\mu = \frac{AB'}{B'C} = \frac{c}{a}$ (teorema bisectoarei), deci

$$\vec{r}_I = \frac{1}{1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}}\left(\vec{r}_A + \frac{b}{a}\vec{r}_B + \frac{c}{a}\vec{r}_C\right) \Leftrightarrow$$

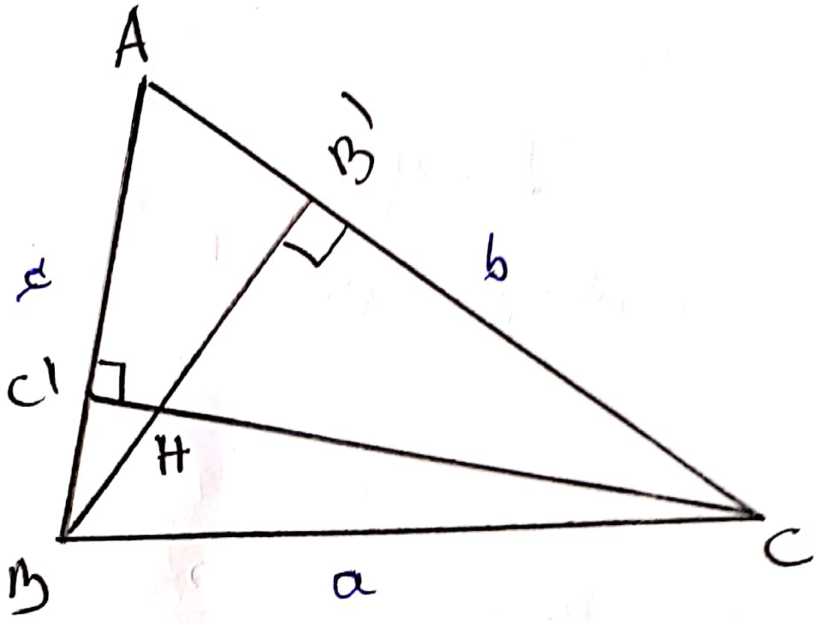
$$\Leftrightarrow \vec{r}_I = \frac{1}{a+b+c}(a\vec{r}_A + b\vec{r}_B + c\vec{r}_C).$$

1.3. Dacă BB' și CC' sunt înălțimi, atunci $M \equiv H$ (ortocentrul triunghiului) și

$$\vec{r}_H = \frac{1}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}(\operatorname{tg} A \cdot \vec{r}_A + \operatorname{tg} B \cdot \vec{r}_B + \operatorname{tg} C \cdot \vec{r}_C).$$

(triunghiul ABC este oarecare, __nedreptunghic__).

Scanned with CamScanner



Într-adevăr, $\frac{AC'}{CC'} = ctg A \Rightarrow AC' = CC' \cdot ctg A$

$\frac{BC'}{CC'} = ctg B \Rightarrow BC' = CC' \cdot ctg B$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{AC'}{C'B} = \frac{ctg A}{ctg B} = \frac{tg B}{tg A}$$

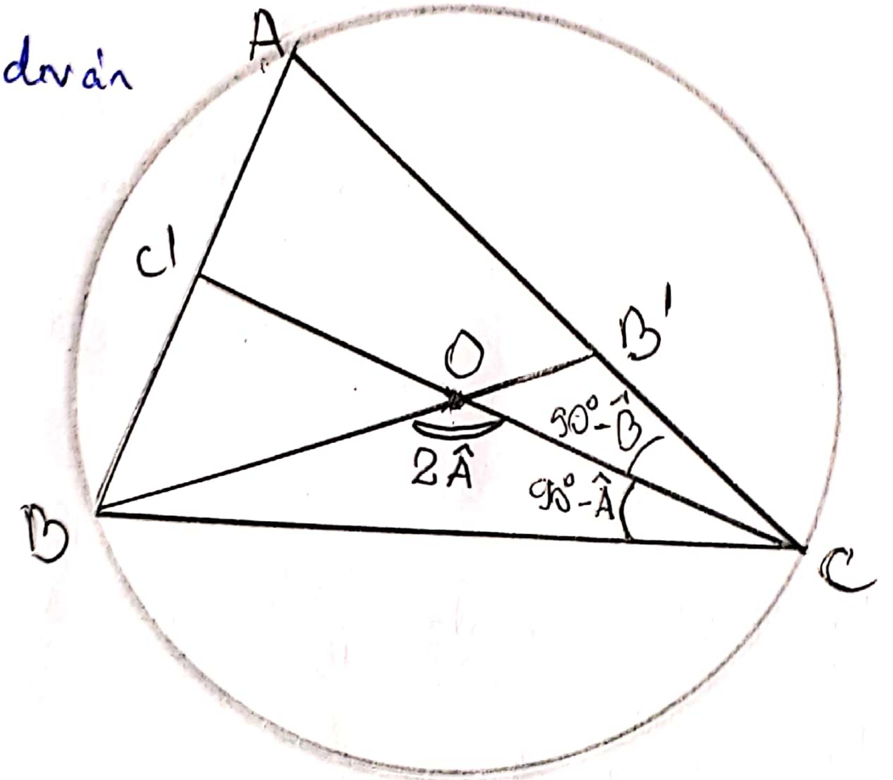
analog $\mu = \frac{tg C}{tg A} \Rightarrow$

$$\vec{r}_H = \frac{1}{tg A + tg B + tg C}\left(tg A \cdot \vec{r}_A + tg B \cdot \vec{r}_B + tg C \cdot \vec{r}_C\right).$$

Scanned with CamScanner

14. Dacă $M \equiv O$ centrul cercului circumscris atunci $\vec{r}_O = \frac{1}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}(\sin 2A \cdot \vec{r}_A + \sin 2B \cdot \vec{r}_B + \sin 2C \cdot \vec{r}_C)$.

Într-adevăr



$$\frac{AC'}{\sin(90^\circ - B)} = \frac{CC'}{\sin A}$$ (teorema sinusurilor în $\Delta ACC'$)

$\Rightarrow AC' = CC' \cdot \frac{\cos B}{\sin A}$. Analog.

$$\frac{C'B}{\sin(90^\circ - A)} = \frac{CC'}{\sin B}$$ (t. sinusurilor în $\Delta BCC'$)

$\Rightarrow C'B = CC' \cdot \frac{\cos A}{\sin B}$.

$\Rightarrow \lambda = \frac{AC'}{C'B} = \frac{\sin B \cdot \cos B}{\sin A \cdot \cos A} = \frac{\sin 2B}{\sin 2A}$. Analog

$\mu = \frac{\sin 2C}{\sin 2A}$ și rezultă relația cerută.

#