Drd. Minuță Aurelian

Logică matem. și teoria mulțimilor

Seminar 1

Evaluare: 2 x lucrări a câte 2 sb. Sâmbăta

LI: mijlocul semestrului S7 – S8

LII: finalul semestrului.

Fără examen în sesiune.

$$N_f = \frac{1}{4}\left(N_{sb1} + N_{sb2} + N_{sb3} + N_{sb4}\right) + B_s, \quad 0 \le B_s \le 1.$$

Prezență minimă obligatorie la seminar 75% !

Cap. 1. Logica propozițiilor

Propoziție: o afirmație care poate să fie, fie adev., fie falsă.

Formulele logicii propozițiilor

Def • Simbolurile logicii propozițiilor sunt:

a) formule atomice: $p, q, r, \dots, x_1, x_2, \dots$

b) conectori (simbolurile op. logice): $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

negația (non), conjuncția (și), disjuncția (sau), implicația (dacă... atunci), echivalența (dacă și numai dacă)

c) parantezele: (,).

• O formulă propozițională este un șir finit de simboluri ce satisface următoarele reguli:

a) Formulele atomice sunt formule.

b) Dacă A și B sunt formule, atunci

$\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$

sunt tot formule.

c) Alte formule decât cele descrise nu mai există.

Exemple: $(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow (\neg q))$ OK

$p \wedge \rightarrow q$, $p \rightarrow$, $pq \wedge t$ NU.

Interpretarea formulelor propoziționale

• O formulă A care depinde de formulele atomice $A = A(x_1, \dots, x_n)$ dă naștere la o funcție de adevăr $A: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$, astfel fiecărui atom îi asociem valorile 0, 1.

Această funcție poate fi dată printr-un tabel de adevăr cu $n+1$ coloane și 2^n+1 linii, unde primele n coloane sunt toate combinațiile posibile ale variabilelor, iar ultima coloană reprezintă valorile funcției.

• Operațiile logice fundamentale:

Negația (non) $\neg p$

p	$\neg p$
0	1
1	0

Conjuncția (și) $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjuncția (sau) $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Implicația (dacă ... atunci) $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Echivalența (dacă și numai dacă) $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

• Exercițiul 1 Să se verifice folosind tabele de adevăr egalitățile a) $\neg((\neg p)\wedge(\neg q)) = p \vee q$

b) $\neg((\neg p)\vee(\neg q)) = p \wedge q$

a)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p)\wedge(\neg q)$	$\neg((\neg p)\wedge(\neg q))$	$p \vee q$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1

b) temă.

• Def O formulă s.n. realizabilă dc. are o interpretare pt care val. de adevăr este 1.

→ contradicție (identic falsă) dc. nu avem o astfel de interpretare

→ tautologie (identic adevărată) dc. pt $\forall$ interpretare val. de adevăr este 1.

• Exemplu de tautologii: Legile lui De Morgan:

$$\neg((\neg p)\wedge(\neg q)) \longleftrightarrow p \vee q$$

$$\neg((\neg p)\vee(\neg q)) \longleftrightarrow p \wedge q$$

• <u>Def.</u> Dacă $A \to B$ este o tautologie scriem $A \Rightarrow B$.
Dacă $A \leftrightarrow B$ este o tautologie scriem $A \Leftrightarrow B$.

• <u>Exercițiul 2 (tautologii importante)</u>.

1) <u>Asociativitatea:</u>

$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

2) <u>Comutativitatea</u>

$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

3) <u>Absorbția</u>

$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$

$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

4) <u>Distributivitatea</u>

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

5) <u>Idempotența</u>

$A \vee A \Leftrightarrow A$

$A \wedge A \Leftrightarrow A$

6) $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$ $\quad A \vee 1 \Leftrightarrow 1$

$A \vee 0 \Leftrightarrow A$ $\quad A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$.

7) <u>Legea dublei negații</u> $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$.

8) Legea terțului exclus $A \vee (\neg A) \Leftrightarrow 1$

Legea necontradicției $A \wedge (\neg A) \Leftrightarrow 0.$

9) Legile lui De Morgan $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B).$

10) Legea echivalenței $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

11) Legea implicației $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

temă.

Forme normale

• Def Fie $A = A(x_1, \dots, x_n)$ o formulă propozițională.

a) A este o conjuncție elementară dc. este o conjuncție cu factori atomi sau negații de atomi.

ex: $A = x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$ sau $\neg x_1 \wedge \neg x_2$ ....

b) A este o disjuncție elementară dc. este o disjuncție cu factori atomi sau negații de atomi.

ex: $A = x_1 \vee \neg x_2$ ....

Întrebare: $A = x_1$ este disj. elem sau conj. elem?

R: Ambele.

c) A este o formă normală conjunctivă (FNC) dc. este o conjuncție de disjuncții elementare.

ex: $(\neg x \vee y) \wedge (z \vee \neg y)$.

d) A este o formă normală disjunctivă (FND) dc. este o disjuncție de conjuncții elementare.

ex: $(x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg z) \vee (\neg y)$.

$\boxed{\text{Th}}$ Orice formulă este echivalentă cu o FNC și cu o FND (nu neapărat unice).

- Algoritmul de obținere:

  1) se înlocuiesc conectorii $\Leftrightarrow$, $\rightarrow$ folosind l. echivalenței și l. implicației

  2) trecem negația asupra atomilor folosind legile lui De Morgan.

  3) obținem FNC-ul / FND-ul folosind asociativitatea, comut., absorbția, ... din lista tautologiilor importante.

• Exemplu: $A = (\neg x) \to (x \wedge y) \overset{\text{l. implicației}}{\Longleftrightarrow}$

$(\neg(\neg x)) \vee (x \wedge y) \overset{\text{l. d. neg}}{\Longleftrightarrow} x \vee (x \wedge y)$ FND

$\overset{\text{distrib.}}{\Longleftrightarrow} (x \vee x) \wedge (x \vee y)$ FNC.

$\overset{\text{idemp.}}{\Longleftrightarrow} x \wedge (x \vee y)$ FNC

$\overset{\text{abs.}}{\Longleftrightarrow} x$ FNC și FND.

• Obs. Fie C o formulă propozițională și A o FNC și B o FND.

a) C e tautologie $\Longleftrightarrow$ în FNC $A = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ fiecare A_i conține cel puțin un atom și negația sa.

b) C e o contradicție $\Longleftrightarrow$ în FND $B = B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n$ fiecare B_i conține cel puțin un atom și negația sa.

• Exercițiul 3: (ex 9/pg 10 carte curs).

1) $((x \to y) \to (z \to \neg x)) \to (\neg y \to \neg z)$

$\overset{\text{l. implicației}}{\Longleftrightarrow} ((\neg x \vee y) \to (\neg z \vee \neg x)) \to (\neg(\neg y) \vee \neg z)$

$\overset{\text{l. implicației}}{\Longleftrightarrow} (\neg(\neg x \vee y) \vee (\neg z \vee \neg x)) \to ((\neg(\neg y) \vee \neg z)$

$\overset{\text{l. implicației}}{\Longleftrightarrow} \neg(\neg(\neg x \vee y) \vee (\neg z \vee \neg x)) \vee ((\neg(\neg y) \vee \neg z)$

$\underset{\text{l. d. neg.}}{\overset{\text{De Morgan}}{\Longleftrightarrow}} ((\neg x \vee y) \wedge \neg(\neg z \vee \neg x)) \vee (y \vee \neg z)$

$\underset{\text{l. d. neg}}{\overset{\text{De Morgan}}{\Longleftrightarrow}} ((\neg x \vee y) \wedge (z \wedge x)) \vee (y \vee \neg z)$

$\xrightarrow{\text{distrib}}$ $((\neg x \wedge z \wedge x) \vee (y \wedge z \wedge x)) \vee (y \vee \neg z)$

$\xrightarrow{\text{asoc}}$ $(\neg x \wedge z \wedge x) \vee (y \wedge z \wedge x) \vee y \vee \neg z$

conjuncții elem

Așadar am obținut un FND.

Observăm că a 2-a conj. elem $(y \wedge z \wedge x)$ nu conține cel puțin o negație a unui atom din componență $\Longrightarrow$ formula dată NU este o contradicție. Încercăm să obținem acum un FNC. via distributivitate.

$(\neg x \wedge z \wedge x) \vee (y \wedge z \wedge x) \vee y \vee \neg z.$ (ca și $(a+b+c)\cdot(d+e+f)\cdot g \cdot h$)

$\xrightarrow{\text{distrib}}$ $(\neg x \vee y \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee z \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee x \vee y \vee \neg z)$
$\wedge (z \vee y \vee y \vee \neg z) \wedge (z \vee z \vee y \vee \neg z) \wedge (z \vee x \vee y \vee \neg z)$
$\wedge (x \vee y \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee z \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee x \vee y \vee \neg z)$

9 disjuncții elem.

Am obținut un FNC. Prima disj. elem $(\neg x \vee y \vee y \vee \neg z)$ conține $\neg x$, dar NU x; conține y, dar NU $\neg y$; conține $\neg z$, dar NU z $\Longrightarrow$ formula dată NU este o tautologie. Prin urmare aceasta este o formulă realizabilă.

2) → 9) temă.