CAPITOLUL 7

SFERA

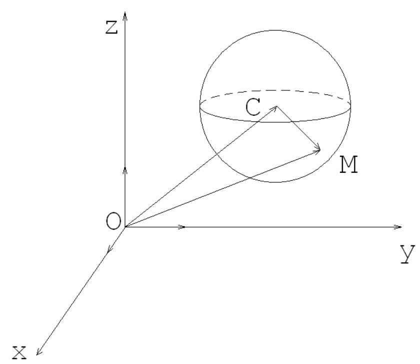
După plan, sfera este cel de-al doilea tip de suprafaţă pe care îl vom studia în acest curs. Vom vedea că în multe privinţe acest studiu este asemănător, din punctul de vedere al metodelor folosite, celui efectuat în cazul cercului în plan.

În acest capitol vom folosi reperul cartezian ortonormat orientat pozitiv $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\})$ în spaţiu şi sistemul corespunzător de axe de coordonate, (Ox), (Oy) şi (Oz).

1. Reprezentări analitice ale sferei

1.1. Sfera determinată de centrul şi de raza sa.

DEFINIŢIA 7.1. Locul geometric al punctelor din spaţiu aflate la o distanţă $R > 0$ de un punct dat C se numeşte *sferă* de centru C şi rază R şi se notează $\mathcal{S}(C, R)$.



Fie sfera $\mathcal{S}(C, R)$, unde $C(a, b, c)$ şi $R > 0$, şi punctul $M(x, y, z) \in \mathcal{S}(C, R)$. Notăm cu $\bar{r}_0 = \overrightarrow{OC} = a \cdot \bar{i} + b \cdot \bar{j} + c \cdot \bar{k}$ vectorul de poziţie al centrului şi cu $\bar{r} = \overrightarrow{OM} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$ vectorul de poziţie al punctului M. Atunci avem

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = \bar{r} - \bar{r}_0 = (x - a) \cdot \bar{i} + (y - b) \cdot \bar{j} + (z - c) \cdot \bar{k}.$$

Astfel, din definiţia sferei avem $\|\overrightarrow{CM}\| = \|\bar{r} - \bar{r}_0\| = R$ şi apoi *ecuaţia vectorială* a sferei:

$$(\mathcal{S}) : (\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0) = R^2.$$

De aici rezultă, după explicitarea produsului scalar, *ecuaţia canonică* a sferei:

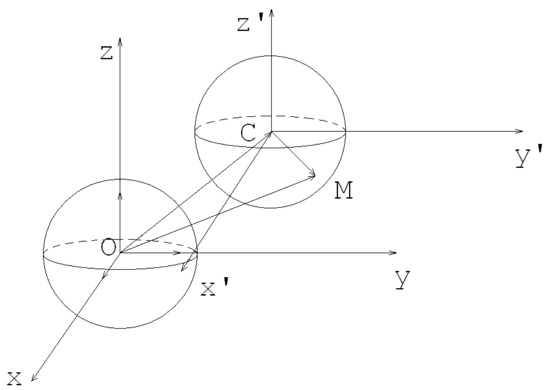
$$(\mathcal{C}) : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Aşa cum am văzut anterior (în capitolul *Repere*), un punct din spaţiu poate fi determinat atât cu ajutorul coordonatelor carteziene cât şi prin precizarea coordonatelor polare. Reamintim că, pentru un punct M, aceste coordonate sunt $\rho = \|\overrightarrow{OM}\| \in (0, \infty)$, $\theta = (\widehat{\bar{i}, \overrightarrow{OM'}}) \in [0, 2\pi)$ şi $\varphi = (\widehat{\bar{k}, \overrightarrow{OM}}) \in (0, \pi)$, unde M' este proiecţia punctului M pe planul de coordonate (xOy); iar între coordonatele carteziene şi cele polare ale unui punct din spaţiu au loc relaţiile

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = \rho \cdot \cos\varphi \end{cases}.$$

Este clar că toate punctele care aparţin unei sfere de rază R vor avea prima coordonată polară $\rho = R$, iar dacă sfera $S_0(O, R)$ are centrul în originea O a reperului cartezian $\mathcal{R}$ rezultă imediat *ecuaţiile* sale *parametrice*:

$$(\mathcal{S}_0) : \begin{cases} x = R \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = R \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = R \cdot \cos\varphi \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in [0, \pi].$$



Dacă avem o sferă de centru $C(a, b, c)$ şi rază R, pentru a-i determina ecuaţiile parametrice, considerăm translaţia reperului iniţial $\mathcal{R}$ cu noua origine în C. Atunci, aşa cum am văzut mai sus, ecuaţiile parametrice ale sferei în reperul obţinut după translaţie sunt:

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x' = R \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y' = R \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z' = R \cdot \cos\varphi \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in [0, \pi].$$

Folosind formulele schimbării coordonatelor unui punct la o translaţie în spaţiu obţinem *ecuaţiile parametrice* ale sferei $\mathcal{S}(C, R)$ în reperul $\mathcal{R}$:

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x = a + x' = a + R \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = b + y' = b + R \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = c + z' = c + R \cdot \cos\varphi \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in [0, \pi].$$

EXEMPLUL 7.1. Ecuaţia canonică a sferei cu centrul în punctul $C(1, 2, 3)$ şi de rază $R = 3$ este

$$(\mathcal{S}) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9,$$

iar ecuaţiile sale parametrice sunt

$$(\mathcal{S}):\begin{cases} x = 1 + 3\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi \\ y = 2 + 3\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ z = 3 + 3\cdot\cos\varphi \end{cases},\quad \theta\in[0,2\pi),\varphi\in[0,\pi].$$

1.2. Ecuaţia generală a unei sfere. La fel ca în cazul cercului în plan, se demonstrează imediat următorul rezultat.

Propoziţia 7.1. *Ecuaţia oricărui sfere poate fi scrisă astfel:*

$$\alpha\cdot x^2+\alpha\cdot y^2+\alpha\cdot z^2+\beta\cdot x+\gamma\cdot y+\delta\cdot z+\lambda=0, \tag{7.1}$$

unde $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\lambda\in\mathbb{R}$, *cu* $\alpha\neq 0$ *şi* $\beta^2+\gamma^2+\delta^2-4\cdot\alpha\cdot\delta>0$. *Reciproc,* (7.1) *este ecuaţia unei sfere de centru* $C(-\frac{\beta}{2\cdot\alpha},-\frac{\gamma}{2\cdot\alpha},-\frac{\delta}{2\cdot\alpha})$ *şi rază* $R=\frac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2-4\cdot\alpha\cdot\lambda}}{2\cdot|\alpha|}$.

Ecuaţia (7.1) poartă numele de *ecuaţia generală* a sferei.

Observaţia 7.1. Notând $p=\frac{\beta}{\alpha}$, $q=\frac{\gamma}{\alpha}$, $r=\frac{\delta}{\alpha}$ şi $s=\frac{\lambda}{\alpha}$, ecuaţia generală a unei sfere devine

$$(\mathcal{S}):x^2+y^2+z^2+p\cdot x+q\cdot y+r\cdot z+s=0,$$

iar aceasta este *ecuaţia normală* a sferei $(\mathcal{S})$.

1.3. Sfera determinată de patru puncte necoplanare.

Propoziţia 7.2. *Fie* $M_i(x_i,y_i,z_i)$, $i=\overline{1,4}$, *patru puncte necoplanare în spaţiu. Există şi este unică o sferă care conţine cele patru puncte. Ecuaţia acestei sfere este*

$$(\mathcal{S}):\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{7.2}$$

Demonstraţie. Deoarece punctele M_1, M_2, M_3 şi M_4 sunt necoplanare, rezultă

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}\neq 0. \tag{7.3}$$

Căutăm o sferă, dată prin ecuaţia normală, care să conţină cele patru puncte:

$$(\mathcal{S}):x^2+y^2+z^2+p\cdot x+q\cdot y+r\cdot z+s=0$$

Un punct $M(x, y, z)$ aparţine acestei sfere dacă şi numai dacă sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + p \cdot x + q \cdot y + r \cdot z + s & = & 0 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + p \cdot x_1 + q \cdot y_1 + r \cdot z_1 + s & = & 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + p \cdot x_2 + q \cdot y_2 + r \cdot z_2 + s & = & 0 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 + p \cdot x_3 + q \cdot y_3 + r \cdot z_3 + s & = & 0 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 + p \cdot x_4 + q \cdot y_4 + r \cdot z_4 + s & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p \cdot x + q \cdot y + r \cdot z + s & = & -x^2 - y^2 - z^2 \\ p \cdot x_1 + q \cdot y_1 + r \cdot z_1 + s & = & -x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 \\ p \cdot x_2 + q \cdot y_2 + r \cdot z_2 + s & = & -x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 \\ p \cdot x_3 + q \cdot y_3 + r \cdot z_3 + s & = & -x_3^2 - y_3^2 - z_3^2 \\ p \cdot x_4 + q \cdot y_4 + r \cdot z_4 + s & = & -x_3^2 - y_3^2 - z_4^2 \end{cases},$$

cu necunoscutele p, q, r şi s, este compatibil. Matricea sistemului şi matricea sa extinsă sunt

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 & -x^2 - y^2 - z^2 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 & -x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 & -x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 & -x_3^2 - y_3^2 - z_3^2 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 & -x_4^2 - y_4^2 - z_4^2 \end{pmatrix}.$$

Din (7.3) rezultă rang $A = 4$. Prin urmare, sistemul este compatibil dacă şi numai dacă rang $\bar{A} = 4$, adică, dacă şi numai dacă det $\bar{A} = 0$. Această ecuaţie este echivalentă cu ecuaţia (7.2).

Dacă sistemul este compatibil atunci este compatibil determinat, adică soluţia sa este unică şi astfel coeficienţii p, q, r şi s din ecuaţia normală a sferei sunt unic determinaţi. □

Exemplul 7.2. Să se determine centrul şi raza sferei care conţine punctele $M_1(1, 0, 1)$, $M_2(1, 1, 0)$, $M_3(1, 0, 0)$ şi $M_4(-1, -1, 0)$.

Din $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, rezultă că punctele M_1, M_2, M_3 şi M_4 sunt necoliniare, deci determină în mod unic o sferă, iar ecuaţia acestei sfere va fi:

$$(\mathcal{S}) : \begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

adică

$$(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 + x - y - z - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{S}) : \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + \left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + \left(z^2 - z + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} - 2 = 0.$$

Ecuaţia canonică a sferei este:

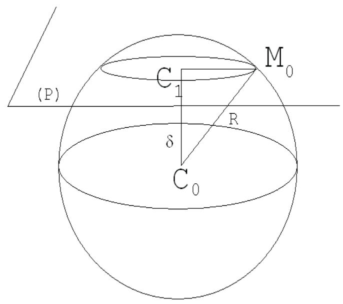
$$(\mathcal{C}) : \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{11}{4},$$

de unde rezultă că sfera are centrul în punctul $C(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ şi raza $R = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

2. Poziţia relativă a unui plan faţă de o sferă. Cercul în spaţiu

Fie planul $(P) : A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, şi sfera $\mathcal{S}(C_0, R)$ de centru $C_0(a, b, c)$ şi rază R. Este clar că minimul distanţelor de la centrul sferei la punctele planului este realizat de distanţa de la centru la plan şi, în consecinţă, dacă notăm $\delta = d(C_0, (P))$ avem:

- dacă $\delta > R$ atunci planul nu intersectează sfera, adică este exterior acesteia;
- dacă $\delta = R$ atunci planul are un singur punct de intersecţie cu sfera (piciorul perpendicularei din C_0 pe (P)), adică este tangent sferei;
- dacă $\delta < R$ atunci (P) şi $(\mathcal{S})$ au mai mult de un singur punct comun şi spunem că planul secţionează sfera.



Vom studia în continuare acest ultim caz. Fie C_1 proiecţia punctului C_0 pe planul (P) şi fie M_0 un punct oarecare de pe sferă care apaţine şi planului (P). Atunci, în triunghiul $\triangle C_0C_1M_0$, avem, din teorema lui Pitagora,

$$\|\overrightarrow{C_1M_0}\|^2 = \|\overrightarrow{C_0M_0}\|^2 - \|\overrightarrow{C_1C_0}\|^2 = R^2 - \delta^2 = \text{constant}\,.$$

Prin urmare locul geometric al punctelor care aparţin şi sferei şi planului este un cerc situat în plan, numit cercul de secţiune al sferei $(\mathcal{S})$ cu planul (P). Cercurile care se obţin prin secţionarea unei sfere cu plane ce conţin centrul acesteia se numesc *cercurile mari* ale sferei.

Astfel, în spaţiu, un cerc se defineşte ca fiind intersecţia unei sfere cu un plan (în general) şi va fi determinat de ecuaţiile

$$(\mathcal{C}) : \begin{cases} A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \end{cases}.$$

Trebuie spus că acest mod de a determina un cerc în spaţiu nu este unic (aşa cum vom vedea în capitolul *Cuadrice*).

Exemplul 7.3. Să se determine centrul şi raza cercului de secţiune al sferei

$$(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$$

cu planul $(P) : x + y + z = 0$.

Mai întâi vom determina ecuaţia canonică a sferei pentru a-i găsi centrul şi raza. Obţinem imediat

$$(\mathcal{S}) : (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9,$$

de unde rezultă coordonatele centrului sferei $C_0(1,-1,2)$ şi raza $R = 3$.
Cum distanţa de la C_0 la planul (P) este

$$\delta = d(C_0,(P)) = \frac{|1-1+2|}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} < 3 = R,$$

urmează că planul secţionează sfera. Aşa cum am văzut, centrul C_1 al cercului de secţiune este piciorul perpendicularei din centrul sferei pe plan. Vectorul director al acestei drepte va fi vectorul normal $N(1,1,1)$ la (P) şi, cum C_0 îi aparţine, ecuaţiile sale parametrice sunt:

$$(C_0C_1) : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pentru a determina intersecţia dintre (C_0C_1) şi (P) trebuie să rezolvăm sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 2+\lambda \\ x+y+z = 0 \end{cases}.$$

Obţinem $\lambda = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{5}{3}$ şi $z = \frac{4}{3}$, adică avem centrul cercului de secţiune $C_1(\frac{1}{3},-\frac{5}{3},\frac{4}{3})$.
Considerăm punctul M de pe cercul de secţiune. Deoarece M apaţine sferei şi cum $\overrightarrow{C_0C_1} \perp \overrightarrow{C_0M}$, rezultă, aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle C_0C_1M$,

$$\|\overrightarrow{C_1M}\|^2 = \|\overrightarrow{C_0M}\|^2 - \|\overrightarrow{C_0C_1}\|^2 = 9 - \frac{4}{3} = \frac{23}{3}.$$

Astfel raza cercului de secţiune este $r = \|\overrightarrow{C_1M}\| = \frac{\sqrt{69}}{3}$.

3. Poziţia relativă a unei drepte faţă de o sferă

Vom studia această problemă folosind ecuaţiile vectoriale ale sferei şi dreptei. Considerăm sfera $\mathcal{S}(C,R)$ dată de ecuaţia

$$(\mathcal{S}) : (\bar{r}-\bar{r}_0)\cdot(\bar{r}-\bar{r}_0) = R^2,$$

unde $\bar{r}_0$ este vectorul de poziţie al centrului sferei, şi dreapta, dată de asemeni vectorial,

$$(d) : \bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda\cdot\bar{v},$$

unde $\bar{r}_1$ este vectorul de poziţie al unui punct de pe dreaptă, iar $\bar{v}$ este vectorul director al dreptei. Posibilele puncte de intersecţie dintre (d) şi $(\mathcal{S})$ corespund valorilor parametrului λ care sunt soluţii ale sistemului format din cele două ecuaţii. Înlocuind vectorul $\bar{r}$ dat de ecuaţia dreptei în ecuaţia sferei, obţinem următoarea ecuaţie de grad 2 cu necunoscuta λ:

$$(\bar{r}_1-\bar{r}_0+\lambda\cdot\bar{v})\cdot(\bar{r}_1-\bar{r}_0+\lambda\cdot\bar{v}) = R^2$$

$$\Leftrightarrow \|\bar{v}\|^2 \cdot \lambda^2 - 2 \cdot (\bar{v} \cdot (\bar{r}_1 - \bar{r}_0)) \cdot \lambda + \|\bar{r}_1 - \bar{r}_0\|^2 - R^2 = 0,$$

cu discriminantul

$$\Delta = 4 \cdot (\bar{v} \cdot (\bar{r}_1 - \bar{r}_0))^2 - 4 \cdot \|\bar{v}\|^2 \cdot (\|\bar{r}_1 - \bar{r}_0\|^2 - R^2).$$

Din identitatea lui Lagrange rezultă

$$\Delta = 4 \cdot \|\bar{v}\|^2 \cdot (R^2 - \delta^2),$$

unde $\delta = d(C, (d))$. În concluzie, avem

- dacă $\delta > R$ atunci ecuaţia nu are soluţii reale, deci dreapta nu intersectează sfera, adică (d) este exterioară sferei;
- dacă $\delta = R$ atunci ecuaţia are o singură soluţie reală, adică (d) este tangentă sferei;
- dacă $\delta < R$ ecuaţia are două soluţii reale şi dreapta intersectează sfera în două puncte distincte, adică este secantă sferei.

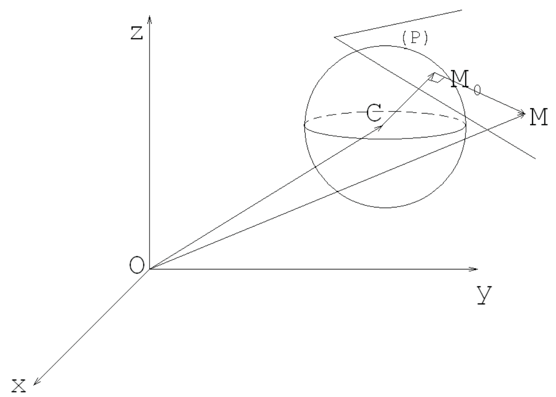
4. Probleme de tangenţă

4.1. Planul tangent la o sferă printr-un punct de pe sferă. Fie sfera $\mathcal{S}(C, R)$ dată prin ecuaţia sa vectorială

$$(\mathcal{S}) : (\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0) = R^2,$$

unde $\bar{r}_0(a, b, c)$ este vectorul de poziţie al centrului $C(a, b, c)$. Considerăm punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (\mathcal{S})$ cu vectorul de poziţie $\bar{r}_{M_0}(x_0, y_0, z_0)$ şi planul (P) care trece prin M_0 şi este tangent la sferă. Aşa cum am văzut în subcapitolul precedent, avem următorul rezultat.

Propoziţia 7.3. *Segmentul orientat $\overrightarrow{CM_0}$ este normal la planul (P).*



Fie $M(x, y, z)$ un punct oarecare din planul (P) cu vectorul de poziţie $\bar{r}(x, y, z)$. Din propoziţia precedentă rezultă $\overrightarrow{CM_0} \perp \overrightarrow{M_0M}$, adică

$$\overrightarrow{CM_0} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$$

Cum

$$\overrightarrow{CM_0} = \overrightarrow{OM_0} - \overrightarrow{OC} = \bar{r}_{M_0} - \bar{r}_0 = (x_0 - a) \cdot \bar{i} + (y_0 - b) \cdot \bar{j} + (z_0 - c) \cdot \bar{k},$$

şi

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \bar{r} - \bar{r}_{M_0} = (x - x_0) \cdot \bar{i} + (y - y_0) \cdot \bar{j} + (z - z_0) \cdot \bar{k},$$

avem ecuaţia vectorială a planului tangent $(P) : (\bar{r} - \bar{r}_{M_0}) \cdot (\bar{r}_{M_0} - \bar{r}_0) = 0$ şi apoi ecuaţia sa canonică:

$$(P) : (x_0 - a) \cdot x + (y_0 - b) \cdot y - x_0^2 - y_0^2 + a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = 0. \tag{7.4}$$

Dacă sfera $(\mathcal{S})$ este dată prin ecuaţia generală

$$(\mathcal{S}) : \alpha \cdot x^2 + \alpha \cdot y^2 + \alpha \cdot z^2 + \beta \cdot x + \gamma \cdot y + \delta \cdot z + \lambda = 0,$$

atunci centrul sferei este $C(a = -\frac{\beta}{2\cdot\alpha}, b = -\frac{\gamma}{2\cdot\alpha}, c = -\frac{\delta}{2\cdot\alpha})$. Înlocuind a, b şi c în (7.4), rezultă ecuaţia planului tangent în M_0 la sferă:

$$\begin{aligned}(P) \quad : \quad & \alpha \cdot x_0 \cdot x + \alpha \cdot y_0 \cdot y + \alpha \cdot z_0 \cdot z + \tfrac{\beta}{2} \cdot (x + x_0) + \tfrac{\gamma}{2} \cdot (y + y_0) \\ & + \tfrac{\delta}{2} \cdot (z + z_0) + \lambda = 0.\end{aligned}$$

De aici se vede că ecuaţia planului tangent într-un punct de pe sferă se obţine prin dedublarea ecuaţiei sferei în punct.

Exemplul 7.4. Să se determine ecuaţia planului tangent la sfera

$$(\mathcal{S}) : f(x, y, z) = x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 - 4 = 0,$$

care trece prin punctul $M_0(0, 1, 2)$.

Este clar că $f(0, 1, 2) = 0$, adică $M_0 \in (\mathcal{S})$ şi, deoarece ecuaţia sferei este

$$(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot y - 4 \cdot z + 1 = 0,$$

ecuaţia planului tangent în punctul M_0 se obţine prin dedublarea acesteia în punct:

$$(P) : 3 \cdot y + 2 \cdot z - 2 = 0.$$

4.2. Planul tangent la o sferă paralel cu un plan dat. Fie planul $(P) : A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D = 0$, $A^2+B^2+C^2 > 0$, şi sfera $\mathcal{S}(C_0, R)$ cu centrul $C_0(a, b, c)$ şi raza R. Căutăm planul (P') tangent la sferă cu proprietatea $(P') \parallel (P)$. Ecuaţia unui astfel de plan are forma

$$(P') : A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + \alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

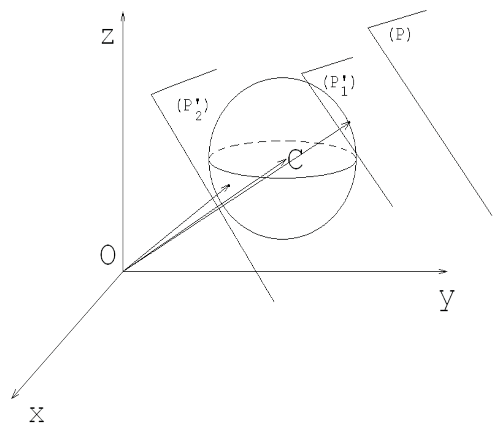
Planul (P') este tangent la sferă dacă şi numai dacă $d(C_0, (P')) = R$. Obţinem

$$d(C_0, (P')) = R \Leftrightarrow \frac{|A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c + \alpha|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = R$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \pm R \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} - A \cdot a - B \cdot b - C \cdot c,$$

adică există două plane paralele cu (P) şi tangente la sferă, date de ecuaţiile

$$(P'_{1,2}) : A \cdot x + B \cdot y + C \cdot c \pm R \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} - A \cdot a - B \cdot b - C \cdot c = 0.$$



Exemplul 7.5. Să se determine planele tangente la sfera

$$(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + 4 \cdot x - 2 \cdot y + z^2 + 1 = 0$$

paralele cu planul $(P) : 2 \cdot x + y - z - 1 = 0$.

Ecuaţia canonică a sferei este

$$(\mathcal{S}) : (x^2 + 4 \cdot x + 4) - 4 + (y^2 - 2 \cdot y + 1) - 1 + z^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{S}) : (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4.$$

Centrul sferei este punctul $C_0(-2, 1, 0)$, iar raza sa $R = 2$.

Un plan $(P') \parallel (P)$ are ecuaţia de forma

$$(P') : 2 \cdot x + y - z - \alpha = 0$$

şi, impunând ca (P') să fie tangent la sferă, avem

$$d(C_0, (P')) = R \Leftrightarrow \frac{|-4 + 1 - \alpha|}{\sqrt{6}} = 2,$$

adică $\alpha = -3 \pm 2 \cdot \sqrt{6}$. Planele căutate vor fi

$$(P'_{1,2}) : 2 \cdot x + y - z - 3 \pm 2\sqrt{6} = 0.$$

4.3. Planul tangent la o sferă care conţine o dreaptă dată exterioară sferei. Fie sfera (S) cu centrul în punctul $C(a, b, c)$ şi raza R şi fie dreapta

$$(d) : \begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2,$$

astfel încât (d) nu are nici un punct comun cu $(\mathcal{S})$, adică este exterioară sferei.

Un plan care conţine dreapta face parte din fasciculul de plane cu axa (d), iar ecuaţia sa are forma:

$$(P) : \alpha \cdot (A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1) + \beta \cdot (A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2) = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (P) \quad : \quad & (\alpha \cdot A_1 + \beta \cdot A_2) \cdot x + (\alpha \cdot B_1 + \beta \cdot B_2) \cdot y + (\alpha \cdot C_1 + \beta \cdot C_2) \cdot z \\ & + \alpha \cdot D_1 + \beta \cdot D_2 = 0. \end{aligned}$$

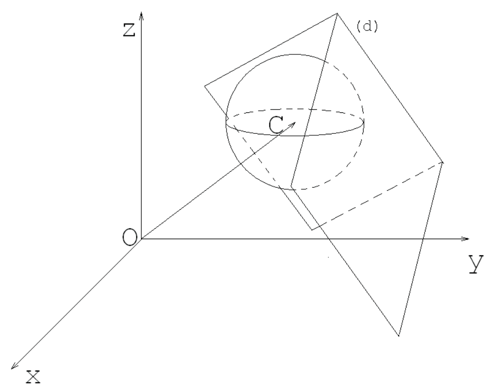
Planul (P) este tangent la sfera $(\mathcal{S})$ dacă şi numai dacă $d(C,(P)) = R$, adică

$$\frac{|\alpha \cdot (A_1 \cdot a + B_1 \cdot b + C_1 \cdot c + D_1) + \beta \cdot (A_2 \cdot a + B_2 \cdot b + C_2 \cdot c + D_2)|}{\sqrt{(\alpha \cdot A_1 + \beta \cdot A_2)^2 + (\alpha \cdot B_1 + \beta \cdot B_2)^2 + (\alpha \cdot C_1 + \beta \cdot C_2)^2}} = R.$$

Putem avea următoarele situaţii:

- dacă ambele plane care apar în definiţia dreptei (d) sunt tangente la sferă atunci ecuaţia de mai sus se transformă într-o identitate;
- dacă unul din cele două plane care definesc dreapta (d) este tangent la sferă atunci ecuaţia este liniară, iar soluţia sa determină un al doilea plan care conţine dreapta şi este tangent la sferă;
- dacă nici unul din planele din definiţia dreptei (d) nu este tangent la sferă atunci ecuaţia este de gradul 2 şi, prin calcul direct, se arată că are două soluţii reale, care determină apoi două plane tangente la sferă.

Propoziţia 7.4. *Există două plane tangente la o sferă care conţin o dreaptă dată exterioară acesteia.*



Exemplul 7.6. Să se determine ecuaţiile planelor tangente la sfera

$$(\mathcal{S}) : (x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

care conţin dreapta

$$(d) : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{2}.$$

Centrul sferei este $C(-1,0,1)$, cu vectorul de poziţie $r_1(-1,0,1)$, iar raza sa este $R = 1$. Din ecuaţiile dreptei rezultă $M_0(2,0,2) \in (d)$ şi că vectorul de poziţie al dreptei este $\bar{v}(2,-1,2)$. Dacă notăm cu $\bar{r}_0$ vectorul de poziţie al punctului M_0 atunci $\bar{r}_0(2,0,2)$ şi avem

$$(\bar{r}_1 - \bar{r}_0) \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \bar{i} - 8 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k},$$

iar distanţa de la punctul C la dreapta (d) va fi

$$\delta = d(C,(d)) = \frac{\|(\bar{r}_1 - \bar{r}_0) \times \bar{v}\|}{\|\bar{v}\|} = \sqrt{2} > 1 = R,$$

deci dreapta este exterioară sferei.

Ecuaţiile generale ale dreptei pot fi obţinute astfel:

$$(d):\begin{cases}\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}\\ \frac{y}{-1}=\frac{z-2}{2}\end{cases} \Leftrightarrow (d):\begin{cases}x+2y-2=0\\ 2y+z-2=0\end{cases}.$$

Un plan care face parte din fasciculul de plane cu axa (d) are ecuaţia de forma

$$(P'):\alpha\cdot(x+2y-2)+\beta\cdot(2y+z-2)=0,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Dacă notăm $(\pi_1): x+2y-2=0$ şi $(\pi_2): 2y+z-2=0$ planele a căror intersecţie este dreapta (d), se verifică imediat că

$$\delta_1=d(C,(\pi_1))=\frac{3}{\sqrt{5}}\neq 1 \quad \text{şi} \quad \delta_2=d(C,(\pi_2))=\frac{1}{\sqrt{5}}\neq 1,$$

adică nici unul dintre cele două plane nu este tangent la sferă, astfel că $\alpha\neq 0$ şi $\beta\neq 0$. Atunci ecuaţia lui (P') poate fi scrisă

$$(P'):\lambda\cdot x+(2+2\cdot\lambda)\cdot y+z-2-2\cdot\lambda=0,$$

unde $\lambda=\frac{\alpha}{\beta}$. Impunând ca planul (P') să fie tangent la sferă, adică $\delta=d(C,(P'))=R$, avem ecuaţia

$$\frac{|-\lambda+1-2-2\cdot\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+4\cdot(1+\lambda)^2+1}}=1\Leftrightarrow 2\cdot\lambda^2-\lambda-1=0,$$

cu soluţiile $\lambda_1=\frac{5}{2}$ şi $\lambda_2=-2$. Prin urmare, planele tangente la sferă care conţin dreapta (d) sunt:

$$(P_1'):\frac{5}{2}x+7y+z-7=0 \quad \text{şi} \quad (P_2'):-2x-2y+z+2=0.$$