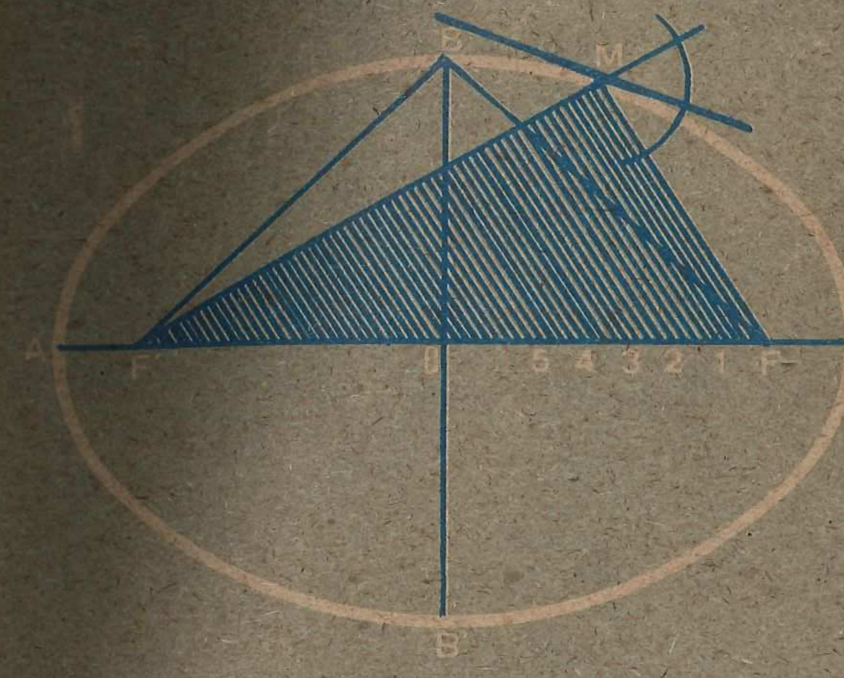
Lei 25

ISBN 973—30—1223—8

MINISTERUL INVĂȚĂMINTULUI ȘI ȘTIINȚEI

STANTIN UDRIȘTE
VALERIA TOMULEANU
GHEORGHE VERNIC

# MATEMATICĂ




## GEOMETRIE ANALITICĂ

Manual pentru clasa a XI-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI, 1991

MINISTERUL ÎNVĂŢĂMÎNTULUI ŞI ŞTIINŢEI

Prof. univ. dr. Constantin Udrişte
Prof. Valeria Tomuleanu
Prof. Gheorghe Vernic

# MATEMATICĂ

## GEOMETRIE ANALITICA

MANUAL PENTRU CLASA A XI-A

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ — Bucureşti

Manualul a fost elaborat în anul 1981. Actuala ediție este în concordanță cu programa școlară, numărul 39732/1987.

*Referenți:* prof. dr. docent *Radu Miron*, prof. univ. dr. *Dan I. Papuc*, prof. univ. dr. *Octavian Stănășilă*, conf. dr. *Vasile Oproiu*, lector dr. *Oltin Dogaru*, lector dr. *Ianuș Stere*, lector dr. *Liviu Nicolescu*, lector *Dumitru Smaranda*, prof. gr. I *Ion Maftei*

La definitivarea prezentei ediții a manualului s-a ținut seama și de observațiile unor profesori din București, Caracal, Iași, Timișoara și din județele Dîmbovița și Teleorman.

ISBN 973—30—1223—8

REDACTOR: prof. VIORICA FĂTU
TEHNOREDACTOR: ION MIREA
COPERTA: ELISABETA VERONICA-DUMITRACHE

## Capitolul I

# DREAPTA

## § 1. Coordonate carteziene în plan

Fie un plan $\mathfrak{P}$ și $d$ o dreaptă oarecare din planul $\mathfrak{P}$. Fie $O$, $A \in d$ două puncte distincte și $\mathbf{R}$ mulțimea numerelor reale. Prin *axioma riglei* admitem că există o funcție bijectivă $f : d \to \mathbf{R}$, $f(M) = x$, care îndeplinește următoarele condiții:

1) $f(O) = 0$, $f(A) > 0$;

2) $PQ = |f(Q) - f(P)|$, $\forall P, \ Q \in d$,

unde $PQ$ este distanța dintre punctele $P$ și $Q$. O asemenea funcție se numește *sistem de coordonate* pe dreapta $d$, iar dreapta $d$ pe care s-a fixat un sistem de coordonate se numește *axă de coordonate.* Punctul $O$ se numește *originea* sistemului de coordonate, iar sensul de la $O$ la $A$ pe axă se numește *sens pozitiv*. Numărul real $x$ se numește *abscisa* sau *coordonata* punctului $M$ în sistemul de coordonate considerat.

Prin tradiție, în loc de $f(M) = x$ se scrie $M(x)$ și se citește „punctul $M$ de abscisă (coordonată) $x$" sau „$M$ de $x$", iar sensul pozitiv pe axă se marchează printr-o săgeată. Axa de coordonate se desenează ca în figura I.1 și se notează cu $Ox$. Punctul $I$ de abscisă 1 se numește *punct unitate.*

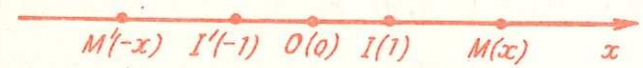



**Fig. I.1**

Fie $(Ox, Oy)$ o pereche ordonată de axe ortogonale în planul $\mathfrak{P}$, cu originea $O$ comună și cu sensurile pozitive ale axelor indicate prin săgeți ca în figura I.2. Acest ansamblu poartă numele de *reper cartezian* în planul $\mathfrak{P}$ și se notează cu $xOy$. Punctul $O$ se numește *originea* reperului.

*Observație.* Punctele unitate $I$ pe $Ox$ și $J$ pe $Oy$ $(OI = OJ)$ impun scara desenelor. Evident aceste puncte nu trebuie să fie neapărat nominalizate în desene (fig. I.3)

Fie $M$ un punct din planul $\mathfrak{P}$ în care s-a fixat un reper cartezian $xOy$. Paralela prin $M$ la axa $Oy$ întîlnește axa $Ox$ în punctul $P$, iar paralela prin $M$ la axa $Ox$ întîlnește axa $Oy$ în punctul $Q$. Fie $x$ coordonata lui $P$ pe axa $Ox$ și $y$ coordo-

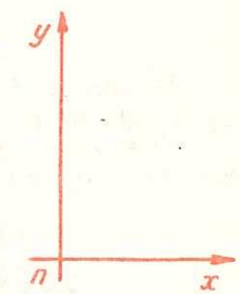



**Fig. I.2**

Denumirea „carteziene" provine de la numele latin al matematicianului și filosofului francez René Descartes (latinizat—Renatus Cartesius) (1596—1650) care a fundamentat geometria analitică în plan ca o metodă ce a înlocuit studiul figurilor geometrice plane prin studiul perechilor ordonate de numere reale, convertind raționamentele sintetice în raționamente algebrice sau invers. Conceptul de coordonate definit de Descartes a fost prima contribuție fundamentală la dezvoltarea geometriei de după Euclid (aprox. 365—300 î.e.n.)

nata lui $Q$ pe axa $Oy$. În acest fel punctului $M$ (fig. I.3) i se atașează o pereche ordonată unică de numere reale $(x, y)$. Funcția $f: \mathfrak{P} \rightarrow \mathbf{R}^2$, $f(M) = (x, y)$ este bijectivă și se numește *sistem de coordonate cartezian* definit de reperul $xOy$ pe planul $\mathfrak{P}$. Prin tradiție, în loc de $f(M) = (x, y)$ se scrie $M(x, y)$ și se citește „punctul $M$ de abscisă $x$ și ordonată $y$" sau „punctul $M$ de coordonate carteziene $x$ și $y$" sau „$M$ de $x$ și $y$".

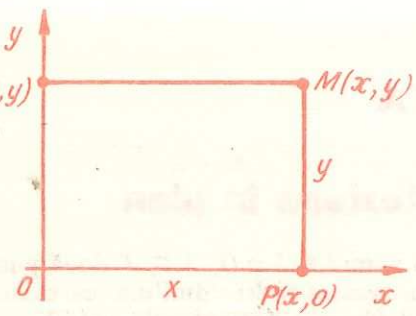



Fig. I.3

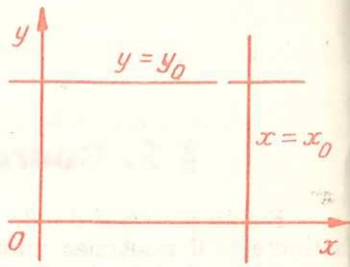



Fig. I.4

Axa $Ox$ (prima axă) se numește *axa absciselor*, iar axa $Oy$ (a doua axă) se numește *axa ordonatelor*.

*Cazuri particulare:* originea $O$ este caracterizată prin perechea $(0, 0)$. Punctul unitate $I$ de pe axa $Ox$ are coordonatele $(1, 0)$, punctul unitate $J$ de pe axa $Oy$ are coordonatele $(0,1)$. Toate punctele de pe axa $Ox$ sînt caracterizate prin faptul că au *ordonata nulă*, toate punctele de pe axa $Oy$ sînt caracterizate prin faptul că au *abscisa nulă*.

Punctele de pe o dreaptă paralelă cu axa $Ox$ au aceeași ordonată, iar punctele de pe o dreaptă paralelă cu axa $Oy$ au aceeași abscisă (fig. I.4)

Axele $Ox$ și $Oy$ împart planul $\mathfrak{P}$ în patru regiuni

$$\mathrm{I} = \{M(x, y) \mid x > 0,\ y > 0\}, \qquad \mathrm{II} = \{M(x, y) \mid x < 0,\ y > 0\},$$
$$\mathrm{III} = \{M(x, y) \mid x < 0,\ y < 0\}, \qquad \mathrm{IV} = \{M(x, y) \mid x > 0,\ y < 0\},$$

numite *cadrane deschise*. Mulțimea $\{M(x, y) \mid x \in \mathbf{R},\ y > 0\}$ se numește *semiplanul superior deschis*, iar mulțimea $\{M(x, y) \mid x \in \mathbf{R},\ y < 0\}$ se numește *semiplanul inferior deschis*.

## § 2. Formula distanței

În planul $\mathfrak{P}$ considerăm reperul cartezian $xOy$ și punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ care pot fi confundate sau distincte.

Presupunem că $M_1 \neq M_2$, iar segmentul $[M_1M_2]$ nu este paralel nici cu axa $Ox$ nici cu axa $Oy$ (fig. I.5). Notăm cu $P_1$, $Q_1$, respectiv $P_2$, $Q_2$ picioarele perpendi-

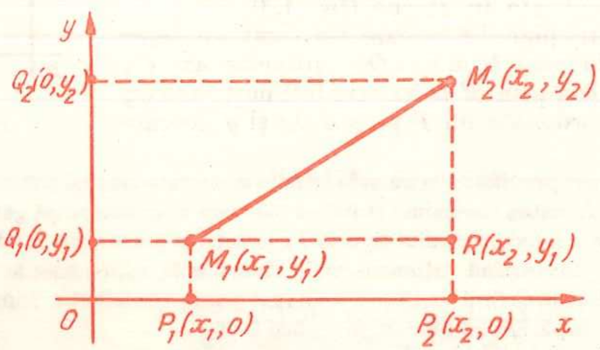



Fig. I.5



cularelor coborîte din $M_1$ respectiv $M_2$ pe axe și cu $R$ punctul de intersecție a dreptelor $Q_1M_1$ și $P_2M_2$. Distanța $M_1M_2$ se poate exprima în funcție de coordonatele celor două puncte utilizînd teorema lui Pitagora pentru triunghiul dreptunghic $M_1RM_2$ împreună cu axioma riglei (pe axe). Rezultă

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Această egalitate are loc și în cazurile: $M_1 = M_2$, $M_1 \neq M_2$ și $M_1M_2 \parallel Ox$ (fig. I.6), $M_1 \neq M_2$ și $M_1M_2 \parallel Oy$ (fig. I.7). De aceea este numită *formula distanței* dintre punctele oarecare $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$.

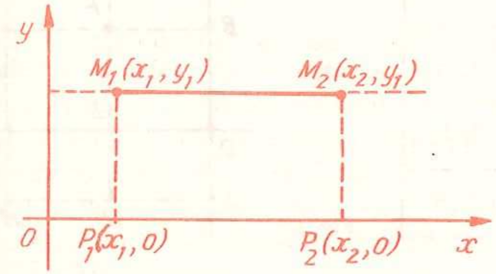



Fig. I.6

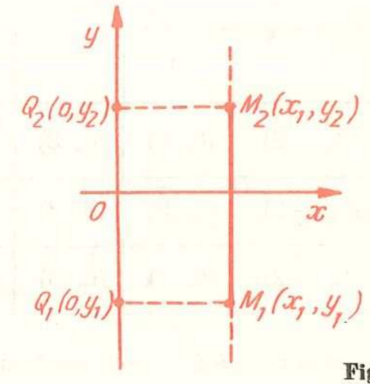



Fig. I.7

Reamintim de asemenea coordonatele mijlocului segmentului $[M_1M_2]$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

PROBLEME

Este util ca rezolvarea oricărei probleme de geometrie să înceapă cu desenarea figurilor corespunzătoare.

**1.** Să se arate că punctele $A(0, -2)$, $B(1, 1)$, $C(2, 4)$ sînt coliniare.

*Soluție.* Avînd în vedere poziția relativă a punctelor $A$, $B$, $C$, observăm că $AB + BC = AC$ este o condiție necesară și suficientă pentru coliniaritate. Această egalitate este satisfăcută deoarece $AB = \sqrt{(1-0)^2 + [1-(-2)]^2} = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{(2-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}$, $AC = \sqrt{(2-0)^2 + [4-(-2)]^2} = 2\sqrt{10}$.

**2.** Fie $a$, $b$, $c$ trei numere reale fixate. Să se arate că punctele $A(a, 2a-1)$, $B(b, 2b-1)$, $C(c, 2c-1)$ sînt coliniare.

**3.** Un triunghi are vîrfurile $A(-2, -1)$, $B\ (1, 2)$, $C(0, 5)$.
1) Să se calculeze perimetrul triunghiului.
2) Să se determine aria triunghiului și lungimea înălțimii corespunzătoare celei mai scurte laturi.

**4.** Aceleași date ca și în problema precedentă.
1) Să se ordoneze măsurile unghiurilor triunghiului $ABC$.
2) Să se determine coordonatele mijloacelor laturilor triunghiului $ABC$.
3) Să se găsească coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului $ABC$ și raza acestui cerc.

**5.** În plan fixăm reperul cartezian $xOy$.

Să se figureze punctele corespunzătoare elementelor produsului cartezian $\{0, 3, 6\} \times \{-2, 0, 3, 5\}$.

Să se găsească cea mai mică și cea mai mare distanță dintre aceste puncte.

Există în această mulțime trei puncte care să determine un triunghi isoscel? Dar echilateral?

*Soluție.* Elementele produsului cartezian sînt date în tabelul 1. Dacă notăm $A(0, -2)$, $O(0, 0)$, $B(0, 3)$, $C(0, 5)$, $D(3, -2)$, $E(3, 0)$, $F(3, 3)$, $G(3, 5)$, $H(6, -2)$, $K(6, 0)$, $L(6, 3)$, $M(6, 5)$ obținem figura I.8.

**TABELUL 1**

| x | −2 | 0 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | (0, −2) | (0, 0) | (0, 3) | (0, 5) |
| 3 | (3, −2) | (3, 0) | (3, 3) | (3, 5) |
| 6 | (6, −2) | (6, 0) | (6, 3) | (6, 5) |

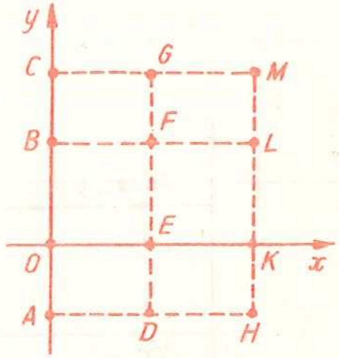



Fig. I.8

Se observă că $OA = 2$, iar figura I.8 pune în evidență că acest număr reprezintă cea mai mică distanță. Analog, $AM = HC = \sqrt{85}$ este cea mai mare distanță.

Deoarece $OB = BF$, $OB \perp BF$ triunghiul $OBF$ este dreptunghic isoscel. Nu există nici un triunghi echilateral întrucît triunghiurile isoscele ce se pot forma sînt fie dreptunghice, fie au lungimea jumătății bazei și lungimea înălțimii numere întregi.

6. Două șosele perpendiculare sînt reprezentate ca axele $Ox$ și $Oy$ ale reperului cartezian $xOy$. Punctele $A$ și $B$ din cadranul întîi reprezintă două localități. Să se determine punctul $M \in Ox$ și punctul $N \in Oy$ astfel încît lungimea drumului (linie frîntă) $AMNB$ să fie minimă.

7. Fie punctele $A(1,3)$, $B(5,1)$. Să se determine abscisa punctului $C$ de pe axa $Ox$ astfel încît $AC = CB$ și abscisele punctelor $D_1$, $D_2$ de pe axa $Ox$ pentru care $\mu(\widehat{AD_1B}) = \frac{\pi}{2}$, $\mu(\widehat{AD_2B}) = \frac{\pi}{2}$.

*Indicație.* Fie $C(x, 0)$. Deci $AC = \sqrt{(x-1)^2 + 9}$, $CB = \sqrt{(x-5)^2 + 1}$ și se obține $x = 2$. Dacă $D(x, 0)$, atunci $DA^2 + DB^2 = AB^2$ etc.

8. Fie $C(1, 3)$. Să se determine un punct $A$ pe $Ox$ al cărui simetric față de $C$ este situat pe $Oy$.

## § 3. Panta unei drepte oblice

În planul $\mathcal{P}$ fixăm reperul cartezian $xOy$. Axa $Ox$ și toate dreptele paralele cu ea se numesc *drepte orizontale*. Axa $Oy$ și toate dreptele paralele cu ea se numesc *drepte verticale*. Dreptele care nu sînt verticale se numesc *drepte oblice*.

Intuitiv este clar că dreptele oblice $d_1$, $d_2$, $d_3$ din figura I.9 au diferite înclinări față de axa $Ox$. Aceste înclinări față de orizontală pot fi caracterizate cu ajutorul tangentelor unghiurilor pe care dreptele respective le fac cu axa $Ox$.



Ne concentrăm atenția asupra unei singure drepte $d$ (fig. I.10). Notăm cu $s$ semicercul de rază 1, cu centrul în origine, situat în semiplanul superior ($y \geq 0$). Paralela prin originea $O$ a axelor la dreapta $d$ intersectează semicercul $s$ în punctul $P$. Prin definiție, unghiul dreptei $d$ cu axa $Ox$ este $\widehat{AOP}$. Notăm acest unghi cu $(\widehat{d, Ox})$ și măsura lui în radiani cu $\theta \in [0, \pi]$.

**Definiție. Fie $d$ o dreaptă oblică și $\theta = \mu(\widehat{d, Ox}) \neq \frac{\pi}{2}$. Numărul real $\operatorname{tg} \theta$ se numește panta dreptei $d$ sau coeficientul unghiular al dreptei $d$ și se notează cu $m$.**

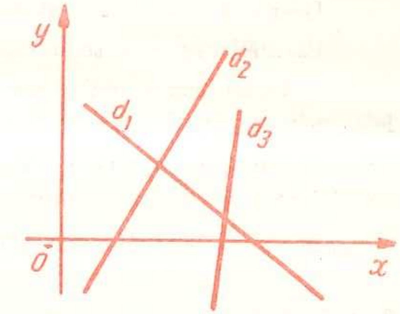



Fig. I.9

Cu excepția dreptelor verticale (care nu au pantă!), orice altă dreaptă are pantă (unică!). *Unghiul* dintre dreapta $d$ și axa $Ox$ este *obtuz* dacă și numai dacă *panta* lui $d$ este *negativă*; *unghiul* dintre dreapta $d$ și axa $Ox$ este *ascuțit* dacă și numai dacă *panta* lui $d$ este *pozitivă*; *unghiul* dintre dreapta $d$ și axa $Ox$ este *nul* sau *alungit* dacă și numai dacă *panta* lui $d$ este *zero*. *Unghiul* dintre dreapta $d$ și axa $Ox$ este *drept* dacă și numai dacă $d$ este *paralelă* cu $Oy$ (verticală!).

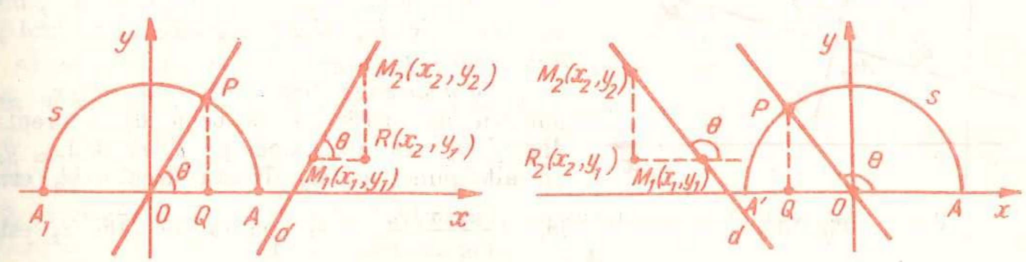



Fig. I.10

**Teoremă.** *Fie $d$ o dreaptă oblică pe care fixăm două puncte distincte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Panta $m$ a dreptei $d$ este dată de formula:*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_2 \neq x_1.$$

*Demonstrație.* Urmărim figura I.10. Deoarece $\triangle OQP \sim \triangle M_1RM_2$ găsim

$$m = \operatorname{tg} \theta = \frac{QP}{OQ} = \frac{RM_2}{M_1R} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Analog se tratează cazul unghiului obtuz. De asemenea se observă că formula dată în teoremă nu depinde de alegerea punctelor distincte $M_1$, $M_2$ și nici de ordinea lor. Altfel spus numărul $m$ este același atît timp cît $M_1$ și $M_2$ sînt două puncte distincte ale aceleiași drepte oblice.

Dreptele verticale sînt paralele între ele.

Paralelismul dreptelor oblice poate fi descris cu ajutorul pantei.

1) Două drepte oblice paralele au aceeași pantă, întrucît admit aceeași paralelă prin origine.

2) Dacă două drepte oblice au aceeași pantă, atunci ele sînt paralele întrucît determină cu $Ox$ unghiuri congruente.

În concluzie este adevărată următoarea teoremă.

**Teoremă.** *Dreptele oblice $d_1$ și $d_2$, de pante $m_1$ respective $m_2$, sînt paralele dacă și numai dacă $m_1 = m_2$.*

Mulțimea formată din dreapta $d$ și din toate dreptele paralele cu $d$ se numește *direcția dreptei d*. Fiecare dreaptă este un *reprezentant* al direcției din care face parte. O direcție poate fi verticală sau oblică (în particular orizontală) după cum este reprezentantul ei. Caracterizarea paralelismului dreptelor oblice prin „aceeași pantă" permite să definim *panta unei direcții oblice* ca fiind panta uneia dintre dreptele ce aparțin direcției respective.

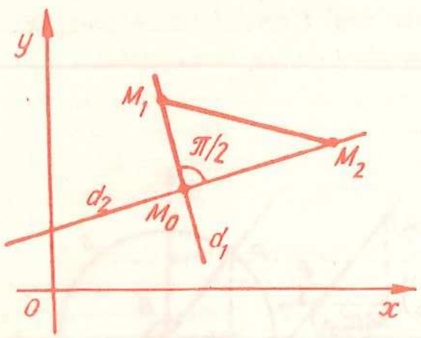



**Fig. I.11**

O dreaptă orizontală este perpendiculară pe o dreaptă verticală. Rămîne să găsim o condiție de perpendicularitate pentru două drepte care nu sînt respectiv paralele cu axele de coordonate.

**Teoremă.** *Dreptele $d_1$ și $d_2$, de pante $m_1$, respectiv $m_2$, sînt perpendiculare dacă și numai dacă $m_1 m_2 = -1$.*

*Demonstrație* (fig. I.11). Fie $M_0(x_0, y_0)$ punctul de intersecție a celor două drepte, $M_1(x_1, y_1)$ un alt punct pe $d_1$ și $M_2(x_2, y_2)$ un alt punct pe $d_2$. Panta dreptei $d_1$ este $m_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, iar panta dreptei $d_2$ este $m_2 = \dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$. Perpendicularitatea dintre dreptele $d_1$ și $d_2$ este echivalentă cu teorema lui Pitagora în triunghiul $M_0M_1M_2$. Dar $M_0M_1^2 + M_0M_2^2 = M_1M_2^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - x_0x_1 - y_0y_1 - x_0x_2 - y_0y_2 + x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Leftrightarrow (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) +$
$+ (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) = 0 \Leftrightarrow m_1m_2 = -1.$

## PROBLEME

**1.** Să se calculeze pantele dreptelor care determină respectiv cu axa $Ox$ unghiuri de măsură $\dfrac{\pi}{12}$, $\dfrac{\pi}{5}$, $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ și $\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) +$ $+ \operatorname{arctg} 1$.

**2.** Fie punctele $A(2, 3)$, $B(3, 5)$. Să se determine panta dreptei $AB$ și coordonatele punctului $C$ de pe $Ox$ astfel încît $\mu(\widehat{ABC}) = \dfrac{\pi}{2}$.

*Soluție.* $m_{AB} = \dfrac{5-3}{3-2} = 2$. Fie $C(x, 0)$. Deci $m_{BC} = \dfrac{0-5}{x-3}$. Condiția $AB \perp BC$ este echivalentă cu $10 = x - 3$ și deci $x = 13$.

**3.** Se dau punctele $A(5, 6)$, $B(13, 6)$, $C(11, 2)$, $D(1, 2)$. Să se arate că patrulaterul $ABCD$ este un trapez și să se determine măsurile unghiurilor pe care le fac laturile lui cu axa $Ox$.

**4.** (Continuare) Să se determine pantele suporturilor diagonalelor trapezului $ABCD$ și măsurile unghiurilor pe care acestea le fac cu axa $Ox$. Să se calculeze aria trapezului $ABCD$.

**5.** Se dau punctele $A(0, -2)$, $B(1, 1)$, $C(2, 4)$. Sînt $A$, $B$, $C$ coliniare? De ce?

*Soluție.* Panta dreptei $AB$ este $m_{AB} = \dfrac{1-(-2)}{1-0} = 3$, iar panta dreptei $BC$ este $m_{BC} = \dfrac{4-1}{2-1} = 3$. Rezultă că dreapta $AB$ coincide cu dreapta $BC$ și deci $A$, $B$, $C$ sînt coliniare.

**6.** O dreaptă care are panta $-2$ conține punctul $A(-1, 3)$. Care este abscisa punctului $M$, de pe dreaptă, care are ordonata $-4$?

**7.** Dreapta $d$ are panta 2 și conține punctul $A(1, 1)$. Să se determine punctele lui $d$ care se află la distanța 1 față de $A$.

**8.** Utilizînd formula distanței sau pantele suporturilor laturilor și diagonalelor, să se caracterizeze patrulaterele ale căror vîrfuri sînt

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) | $A(-2, 2)$, | $B(2, -2)$, | $C(4, 2)$, | $D(2, 4)$; |
| 2) | $A(-1, 5)$, | $B(5, 1)$, | $C(6, -2)$, | $D(0, 2)$; |
| 3) | $A(-5, 4)$, | $B(3, 5)$, | $C(7, -2)$, | $D(-1, -3)$. |

**9.** Să se găsească $v \in \mathbf{R}$ astfel încît dreapta determinată de punctele $A(-2, v)$, $B(1, 1)$ să fie paralelă cu dreapta determinată de punctele $C(-1, -1)$, $D(4, v^2 + v)$.

**10.** Fie paralelogramul $ABCD$. Se duc $CE \perp BC$, $AE \perp AB$. Să se arate că $ED \perp AC$.

*Soluție.* Conținutul acestei probleme este independent de fixarea unui reper cartezian în plan. De aceea se preferă reperul cartezian care simplifică calculele.

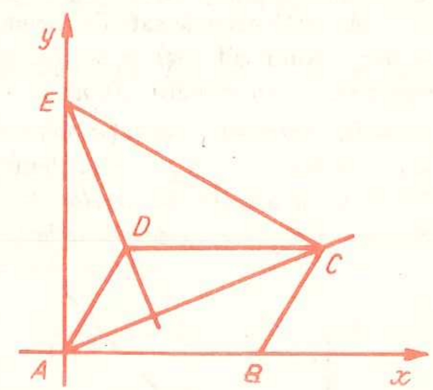



**Fig. I.12**

Fixăm reperul cartezian $xOy$ ca în figura I.12. Rezultă $A(0, 0)$, $B(b, 0)$, $C(c, r)$, $D(d, r)$, $c - d = b > 0$, $r > 0$, ca elemente fixate inițial în problemă. Fie $E(0, y)$. Panta dreptei $BC$ este $\dfrac{r}{c-b}$, iar panta dreptei $CE$ este $\dfrac{y-r}{-c}$. Relația $\dfrac{r}{c-b} \cdot \dfrac{y-r}{-c} = -1$ implică $y = \dfrac{r^2 - bc + c^2}{r}$.

Dreapta $ED$ are panta $\frac{r-y}{d}$, iar dreapta $AC$ are panta $\frac{r}{c}$. Deoarece $c-d=b>0$, găsim $\frac{r-y}{d}\cdot\frac{r}{c}=\frac{r}{d}\cdot\frac{r-y}{c}=\frac{r}{c-b}\cdot\frac{r-y}{c}=-1$, adică $ED\perp AC$.

**11.** Fie pătratul $ABCD$ și $M\in BD-\{B,D\}$. Punctul $M$ se proiectează pe $AB$, $AD$ în $M'$, respectiv $M''$. Să se arate că perpendiculara din $M$ pe $M'$, $M''$ trece prin punctul $C$.

## § 4. Ecuația dreptei oblice determinată de un punct și de o pantă

O dreaptă oblică $d$ este bine determinată printr-un punct $M_0(x_0, y_0)\in d$ și prin panta $m$ (care dă direcția dreptei). Ce condiție trebuie să verifice $x$ și $y$ pentru ca punctul $M(x, y)$ să fie situat pe dreapta $d$?

**Teoremă.** *Fie dreapta $d$ definită prin punctul $M_0(x_0, y_0)\in d$ și prin panta $m$. Punctul $M(x, y)$ aparține dreptei $d$ dacă și numai dacă $y-y_0=m(x-x_0)$.*

*Demonstrație.* Evident, $M_0(x_0, y_0)\in d$ satisface relația din teoremă. De asemenea punctul $M(x, y)\neq M_0(x_0, y_0)$ aparține dreptei $d$ dacă și numai dacă panta dată este egală cu panta calculată (fig. I.13), adică

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0},\quad x\neq x_0.$$

Afirmația „dreapta $d$ este mulțimea punctelor $M(x, y)$ cu proprietatea $(x, y)\in\mathbf{R}^2$ și $y-y_0=m(x-x_0)$" este prescurtată prin $d: y-y_0=m(x-x_0)$.

Această ecuație este de forma $y=mx+n$, unde $m$ este panta, iar $n=y_0-mx_0$. Numărul real $n$ se numește *ordonata la origine* deoarece dreapta $d$ intersectează $Oy$ în punctul $(0, n)$.

În particular, ecuația dreptei oblice care trece prin origine, $x_0=0$, $y_0=0$, și are panta $m$ este $y=mx$. Pentru $m=1$ obținem $y=x$ care este *ecuația primei bisectoare a unghiurilor axelor de coordonate*, iar pentru $m=-1$ găsim $y=-x$ care este *ecuația celei de a doua bisectoare a unghiurilor axelor de coordonate* (fg. I.14).

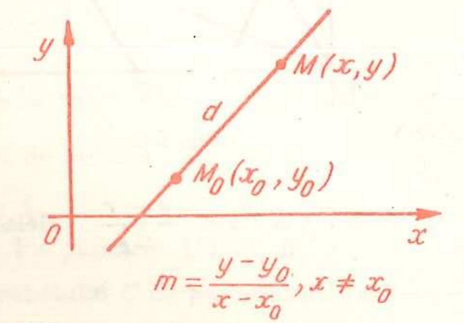



Fig. I.13

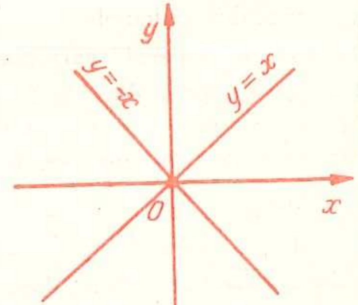



Fig. I.14

*Comentarii.* 1) Fie $m$ și $n$ două numere reale date, $m\neq 0$. Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=mx+n$ se numește *funcție de gradul întîi (afină)*. Graficul ei este dreapta de ecuație $y=mx+n$. Funcția $f$ este strict crescătoare (descrescătoare) dacă și numai dacă panta $m$ a graficului său este strict pozitivă (negativă).

2) Dacă $m$ este fixat, iar $n$ este un parametru real, atunci $y=mx+n$ reprezintă orice dreaptă paralelă cu dreapta $y=mx$.

Dacă $m$ și $n$ sînt parametri reali atunci $y=mx+n$ reprezintă orice dreaptă oblică din plan.

Dreptele oblice care trec prin origine se reprezintă prin ecuația $y=mx$, unde $m$ este un parametru real.

### PROBLEME

**1.** Se dă triunghiul de vîrfuri $A(-1, 3)$, $B(2, -1)$, $C(3, 6)$.
Să se găsească:
1) ecuația dreptei $AC$;
2) ecuația paralelei prin $B$ la $AC$;
3) ecuația mediatoarei segmentului $[BC]$;
4) ecuația medianei din $C$;
5) ecuația înălțimii din C.

*Soluție parțială.* 1) Panta dreptei $AC$ este $m=\frac{6-3}{3-(-1)}=\frac{3}{4}$. Această pantă și punctul $A(-1,3)$ fixează ecuația $y-3=\frac{3}{4}(x+1)$ sau, în forma carteziană explicită, $y=\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$.

2) Orice paralelă la $AC$ are panta $m=\frac{3}{4}$. De aceea paralela prin $B$ la $AC$ are ecuația $y+1=\frac{3}{4}(x-2)$ sau explicit $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$.

3) Mijlocul $M$ al segmentului $BC$ are coordonatele $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$. Panta dreptei $BC$ este $m_{BC}=\frac{6-(-1)}{3-2}=7$. Mediatoarea segmentului $BC$ este dreapta perpendiculară pe $BC$ ce trece prin mijlocul $M$. Astfel mediatoarea are panta $m=-\frac{1}{m_{BC}}=-\frac{1}{7}$ și ecuația $y-\frac{5}{2}=-\frac{1}{7}\left(x-\frac{5}{2}\right)$.

**2.** Cantitatea $x$ de cloroform necesară pentru a ține adormită o persoană timp de $h$ ore poate fi găsită din $4x-3=5x-6+h$. Această ecuație reprezintă o dreaptă?

**3.** Pentru a produce $x$ unități de marfă un atelier cheltuiește $y$ lei, dependența fiind dată de tabelul următor

| $x$ | 0 | 30 | 60 | 90 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 212 | 222 | 232 | 242 | 252 |

Să se determine funcția de gradul întîi asociată acestui tabel. Cîți lei se cheltuiesc pentru a se produce 42 de unități de marfă?

**4.** Să se arate că orice dreaptă oblică din planul $xOy$ este paralelă sau coincide cu una dintre dreptele $d_\lambda$ de ecuație $y=(\lambda^3-1)x$.

*Indicație.* Problema revine la a arăta că funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(\lambda) = \lambda^3 - 1$ este surjectivă.

**5.** Să se verifice că triunghiul de vîrfuri $A(3, 3)$, $B(6, 3)$ și $C(3, 6)$ este dreptunghic isoscel. Să se scrie ecuațiile medianelor și mediatoarelor triunghiului $ABC$.

*Soluție parțială.* $AB^2 = (6-3)^2 + (3-3)^2 = 9$, $AC^2 = (3-3)^2 + (6-3)^2 = 9$, $BC^2 = (6-3)^2 + (3-6)^2 = 18$, $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

**6.** 1) Știind că $A(1, 2)$ este piciorul perpendicularei duse din origine pe dreapta $d$, să se scrie ecuația dreptei $d$.

2) Să se găsească proiecția punctului $B(-2, 1)$ pe dreapta $d$: $2x + y + 1 = 0$.

3) Să se scrie ecuația dreptei ce trece prin punctul $C(1, 3)$ și este echidistantă de punctele $M_1(-1,0)$, $M_2(1, -1)$.

4) Să se determine coordonatele simetricelor punctului $D(-1, 2)$ față de dreapta $d: x + y + 1 = 0$ și față de punctul $E(-1, -4)$.

## § 5. Ecuația dreptei determinată de două puncte distincte

Două puncte distincte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ determină o dreaptă unică $d$. Dacă $x_1 = x_2$, atunci dreapta $d$ este verticală și are ecuația $x = x_1$. Dacă $y_1 = y_2$, atunci dreapta $d$ este orizontală și are ecuația $y = y_1$. Dacă $x_1 \neq x_2$, atunci dreapta $d$ este oblică (fig. I.15). Ecuația carteziană a dreptei oblice

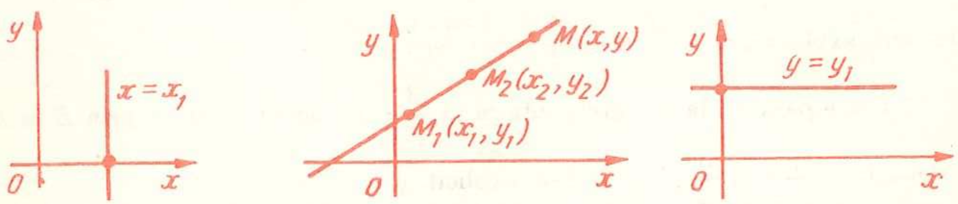



**Fig. I.15**

$d$ este determinată de punctul $M_1(x_1, y_1)$ și de panta $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Astfel,

$$d: y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Dacă $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \neq 0$ (adică dreapta nu este orizontală și nici verticală), atunci ecuația dreptei $d$ se scrie echivalent sub forma:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

Uneori se utilizează această reprezentare chiar dacă $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = 0$. În acest caz se face convenția că dacă un numitor este nul, atunci numărătorul respectiv trebuie egalat cu zero. Evident, datorită ipotezei $M_1 \neq M_2$, numitorii nu se pot anula simultan.

Un calcul imediat arată că ecuația anterioară se poate scrie folosind determinanții. De exemplu,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$



*Condiția de coliniaritate a trei puncte* $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ se scrie:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Ecuația dreptei prin tăieturi.* Fie $d$ o dreaptă care nu trece prin origine și nu este nici orizontală nici verticală. Intersecțiile sale cu axele $Ox$ și $Oy$ se numesc *tăieturi*. Dacă $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $ab \neq 0$, sînt tăieturile, atunci ecuația dreptei $d$ se poate scrie sub forma $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

### PROBLEME

**1.** Se dau punctele $A\left(-\dfrac{4}{5}, 2\right)$, $B\left(\dfrac{2}{5}, 4\right)$, $C(1,5)$. Să se găsească ecuația dreptei $AB$ și să se verifice că punctele $A$, $B$, $C$ sînt coliniare.

*Soluție.* Dreapta $AB$ are ecuația $\dfrac{x + \frac{4}{5}}{\frac{2}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right)} = \dfrac{y-2}{4-2}$, adică $\dfrac{x + \frac{4}{5}}{\frac{6}{5}} = \dfrac{y-2}{2}$. Deoarece $\dfrac{1 + \frac{4}{5}}{\frac{6}{5}} = \dfrac{5-2}{2}$, punctul $C$ se află pe dreapta $AB$, adică punctele $A, B, C$ sînt coliniare.

**2.** Să se scrie ecuațiile dreptelor fixate prin următoarele perechi de puncte: (1) $A(-2, 1)$, $B(1, 2)$; (2) $A(5, 7)$, $B(-1, -2)$; (3) $A(2, 0)$, $B(0, 2)$.

**3.** Se dă dreapta $d$: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{3}$. Să se scrie ecuația dreptei $d$ prin tăieturi. Să se găsească ecuațiile simetricelor dreptei $d$ față de axele $Ox$, $Oy$ și față de origine.

*Soluție.* Ecuația dreptei $d$ poate fi scrisă în formele $\dfrac{x}{-1} + 1 = \dfrac{y}{3} - \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{5}{3}$, $\dfrac{x}{\frac{5}{3}} + \dfrac{y}{5} = 1$. Ultima este ecuația prin tăieturile $A\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$, $B(0, 5)$.

Pentru a găsi ecuația simetricei unei drepte $d_1$ față de un punct $M$ sau față de o dreaptă $d_2$ este suficient să găsim coordonatele simetricelor a două puncte ale lui $d_1$ față de $M$ respectiv $d_2$.

Simetrica dreptei $d$ față de axa $Ox$ este determinată de tăieturile $A\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$, $B'(0, -5)$. Deci ea are ecuația $\dfrac{x}{\frac{5}{3}} + \dfrac{y}{-5} = 1$.

Analog simetrica dreptei $d$ față de axa $Oy$ are ecuația $\frac{x}{-\frac{5}{3}} + \frac{y}{5} = 1$, iar simetrica față de $O$ are ecuația $\frac{x}{-\frac{5}{3}} + \frac{y}{-5} = 1$. Se observă că aceste ecuații se pot obține din $\frac{x}{\frac{5}{3}} + \frac{y}{5} = 1$ prin schimbările $y \to -y$ (simetrie față de axa $Ox$), $x \to -x$ (simetrie față de axa $Oy$) respectiv $\begin{cases} x \to -x \\ y \to -y \end{cases}$ (simetrie față de origine).

**4.** Să se determine ecuațiile simetricelor dreptei $d_1 : -x + 2y - 1 = 0$, față de dreapta $d_2 : x - y = 0$ și respectiv față de punctul $A(-2, 5)$.

**5.** Se dau punctele $A(8, 0)$, $B(3, 6)$, $C(0, 3)$. Dreapta $BC$ taie axa $Ox$ în $D$ și dreapta $AB$ taie axa $Oy$ în $E$. Să se arate că mijloacele segmentelor $[OB]$, $[AC]$, $[DE]$ sînt coliniare.

**6.** Care patrulater are două laturi paralele, iar punctul comun diagonalelor aparține dreptei determinată de mijloacele celorlalte două laturi? Justificați răspunsul.

## § 6. Punctul care împarte un segment într-un raport dat

Fie $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ două puncte diferite care determină segmentul $[M_1M_2]$ și dreapta $M_1M_2$. Fie $M \in M_1M_2 - \{M_2\}$, $M(x, y)$. Numărul

$$k = \begin{cases} -\dfrac{MM_1}{MM_2}, \text{ dacă } M \in [M_1M_2), \\ \dfrac{MM_1}{MM_2}, \text{ dacă } M \in M_1M_2 - [M_1M_2] \end{cases}$$

se numește *raportul în care punctul M împarte segmentul nenul* $[M_1M_2]$. Evident $k \neq 1$.

**Teoremă.** *Fie segmentul nenul* $[M_1M_2]$, $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ *și numărul real* $k \neq 1$. *Coordonatele* $(x, y)$ *ale punctului M care împarte segmentul* $[M_1M_2]$ *în raportul k sînt*

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \; y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}.$$

*Demonstrație.* Fie $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ (fig. I.16) și $M \in [M_1M_2)$. Ținem seama de *teorema paralelelor neechidistante*,

$$k = -\frac{MM_1}{MM_2} = -\frac{PP_1}{PP_2} = -\frac{QQ_1}{QQ_2}.$$

Rezultă $x - x_1 = k(x - x_2)$, $y - y_1 = k(y - y_2)$ și deci $x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}$, $y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}$. Analog se demonstrează celelalte cazuri.



*Observații.* 1) Pentru $k = 0$ obținem punctul $M_1(x_1, y_1)$, iar pentru $k = -1$ obținem mijlocul segmentului $[M_1M_2]$. Pentru $k < 0$, punctul $M$ este interior segmentului $[M_1M_2]$, iar pentru $k \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, punctul $M$ este exterior segmentului $[M_1M_2]$, pe dreapta $M_1M_2$.

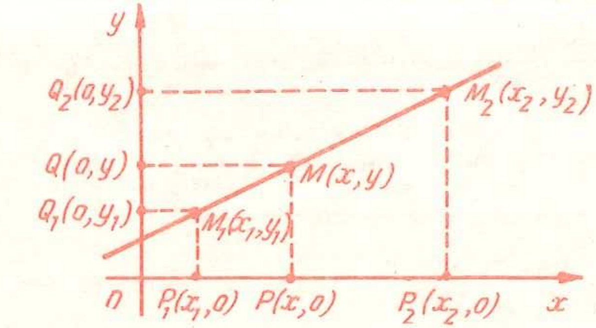



**Fig. I.16**

2) Privim pe $k \in \mathbf{R} - \{1\}$ drept *parametru*. Relațiile $x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}$, $y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}$ se numesc *ecuații parametrice*. Ele reprezintă reuniunea semidreptelor deschise determinate de punctul $M_2$ pe dreapta $M_1M_2$. Eliminînd pe $k$ din cele două ecuații parametrice găsim ecuația carteziană a celor două semidrepte, $\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2}$.

Ecuația sub formă de rapoarte a dreptei $M_1M_2$ este $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Valoarea comună a rapoartelor precedente este un parametru real $t$. În ipoteza că $M(x, y) = M_2(x_2, y_2)$, valoarea lui $t$ este 1; în ipoteza că $M(x, y)$ fixat este diferit de $M_2(x_2, y_2)$, valoarea lui $t$ este chiar raportul în care punctul $M_1$ împarte segmentul $[MM_2]$. Deci

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t, \; t \in \mathbf{R}$$

sau echivalent

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \; t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Aceste ultime egalități se numesc *ecuații parametrice ale dreptei* $M_1M_2$.

*Segment.* Fie punctele $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$. Se observă imediat că segmentul $[M_1M_2]$ este caracterizat prin

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \; t \in [0, 1] \end{cases}$$

sau altfel scris

$$\begin{cases} x = (1 - t)x_1 + tx_2, \\ y = (1 - t)y_1 + ty_2, \; t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Pentru $t = 0$ obținem punctul $M_1(x_1, y_1)$, pentru $t = 1$ găsim punctul $M_2(x_2, y_2)$, iar pentru $t = \frac{1}{2}$ se găsește *mijlocul* segmentului $[M_1M_2]$, adică punctul de coordonate $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Evident, punctele corespunzătoare lui $t \in (0, 1)$ sînt puncte interioare pentru segmentul $[M_1M_2]$ şi ordinea din $[0, 1]$ induce o ordine pe $[M_1M_2]$.

*Centru de greutate.* Fie punctele distincte $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, ..., n$ şi numerele reale $m_i$, $i = 1, ..., n$ cu proprietatea $m_1 + m_2 + ... + m_n \neq 0$. Punctul $G(x, y)$ definit prin

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + ... + m_ny_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

se numeşte *centrul de greutate al sistemului de puncte* $(M_1, M_2, ..., M_n)$ *relativ la sistemul de ponderi* $(m_1, m_2, ..., m_n)$.

Dacă $m_1 = m_2 = ... = m_n$, atunci se spune că sistemul de puncte este *omogen*. În acest caz centrul de greutate are coordonatele

$$x = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n}.$$

În particular, pentru $n = 2$ obţinem mijlocul segmentului $[M_1M_2]$, iar pentru $n = 3$ obţinem coordonatele centrului de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$.

## PROBLEME

**1.** Să se scrie diverse ecuaţii ale dreptei $d$ determinată de punctele $M_0(-1, 2)$, $N(1, 3)$.

*Soluţie.* Ecuaţia carteziană sub formă de rapoarte: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1}$;

ecuaţie carteziană sub formă de determinant:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

ecuaţia explicită: $y - 2 = \frac{1}{2}(x+1)$; ecuaţia prin tăieturi: $\frac{x}{-5} + \frac{y}{2{,}5} = 1$;

ecuaţiile parametrice $x = -1 + 2t$, $y = 2 + t$, $t \in \mathbf{R}$.

**2.** Aceeaşi problemă pentru $M_0(-1, -3)$, $N(0, -1)$.

**3.** Ecuaţiile mişcării uniforme a unui punct material $M(x, y)$ sînt $x = 5 - 2t$, $y = -3 + 2t$, unde $t \in [0, \infty)$ reprezintă timpul.

1) Care este viteza lui $M$?

2) Să se găsească distanţa parcursă de la momentul $t_1 = 0$ la momentul $t_2 = 10$.

*Soluţie.* Se observă că ecuaţiile parametrice date reprezintă o semidreaptă determinată de punctele $M_1(5, -3)$ şi $N(3, -1)$ care corespund la $t = 0$, respectiv $t = 1$. Perechea $(-2, 2)$ reprezintă componentele vectorului viteză, $\vec{v} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$.

1) Mărimea vitezei $\vec{v}$ este $v = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

2) Pentru $t_1 = 0$ obţinem punctul $M_1(5, -3)$, iar pentru $t_2 = 10$ obţinem punctul $M_2(-15, 17)$. Distanţa cerută este $M_1M_2 = \sqrt{800} = 20\sqrt{2} = v(t_2 - t_1)$.

**4.** Aceeaşi problemă pentru $x = 1 - t$, $y = -1 + 3t$, $t \in [0, \infty)$.

**5.** Ce reprezintă ecuaţiile:

$$(1) \begin{cases} x = |x_0 + ut|, \\ y = y_0 + vt, \end{cases} t \in \mathbf{R}; \quad (2) \begin{cases} x = \cos t, \\ y = y_0 + vt, \end{cases} t \in \mathbf{R}?$$

**6.** Se dau punctele $A(-1, 0)$, $B(1, -2)$. Să se determine:

1) coordonatele simetricului lui $A$ faţă de $B$,

2) coordonatele punctului $M$ care împarte segmentul $[AB]$ în raportul $k \in \left\{-\frac{2}{3}, -1, \pi\right\}$.

**7.** Fie punctele $A(4, 3)$ şi $B(1, 1)$. Simetricul lui $B$ în raport cu dreapta $OA$ este punctul $C$. Să se afle coordonatele lui $C$ şi coordonatele punctului $M$ care împarte segmentul $[BC]$ în raportul $\cos\alpha$ (Discuţie după $\alpha$).

**8.** Să se verifice că mijlocul segmentului care uneşte mijloacele diagonalelor unui patrulater de vîrfuri $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ este centrul de greutate al sistemului omogen de puncte $(M_1, M_2, M_3, M_4)$.

*Soluţie* (fig. I.17). Coordonatele mijlocului $A$ al segmentului $[M_4M_2]$ sînt

$$x_A = \frac{x_4 + x_2}{2}, \quad y_A = \frac{y_4 + y_2}{2},$$

iar coordonatele mijlocului $B$ al segmentului $[M_1M_3]$ sînt $x_B = \frac{x_1 + x_3}{2}$, $y_B = \frac{y_1 + y_3}{2}$.

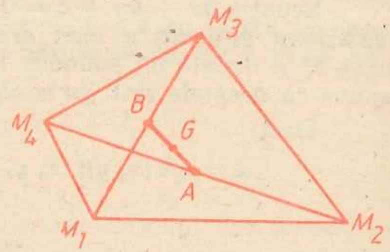



Fig. I.17

Mijlocul $G$ al segmentului $[AB]$ are coordonatele

$$x_G = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \quad y_G = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4},$$

adică $G$ este centrul de greutate specificat în problemă.

**9.** Pe înălţimea din $A$ a triunghiului $ABC$ fixează punctele $D$ şi $E$. Perpendicularele din aceste puncte pe laturile $AB$ şi $AC$ determină un paralelogram cu $[DE]$ ca diagonală. Să se arate că a doua diagonală a acestui paralelogram este perpendiculară pe mediana din $A$ a triunghiului.

# § 7. Ecuaţia carteziană generală a unei drepte

Ecuaţia $y - y_0 = m(x - x_0)$ şi ecuaţia explicită $y = mx + n$ sînt ecuaţii de gradul întîi în $x$, $y$ (sau în $\mathbf{R}^2$), echivalente între ele. Apoi ecuaţia dreptei sub forma $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ (unde numitorii nu se anulează simultan!) este tot o ecuaţie de gradul întîi în $x$, $y$.

Forma generală a ecuaţiei de gradul întîi în $x$, $y$ este

$$ax + by + c = 0,$$

unde coeficienţii $a$, $b$ nu sînt simultan nuli $(a^2 + b^2 > 0)$.

Dacă $b \neq 0$, atunci această ecuaţie se transcrie $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ şi, în raport cu reperul $xOy$, reprezintă dreapta de pantă $m = -\frac{a}{b}$ şi ordonată la origine $n = -\frac{c}{b}$. Dacă $b = 0$, $a \neq 0$, atunci ecuaţia este echivalentă cu $x = -\frac{c}{a}$ şi, în raport cu reperul $xOy$, reprezintă paralela la $Oy$ prin punctul $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$.

Consideraţiile precedente constituie demonstraţia teoremei următoare.

**Teoremă.** *În raport cu reperul cartezian $xOy$, orice dreaptă este caracterizată printr-o ecuaţie de forma*

$$ax + by + c = 0,$$

*unde $a$ şi $b$ nu se anulează simultan.*

Ecuaţia $ax + by + c = 0$ în $\mathbb{R}^2$, pentru care $a^2 + b^2 \neq 0$, se numeşte *ecuaţia carteziană generală a unei drepte*. Deoarece $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by + c$, $a^2 + b^2 \neq 0$, este un polinom de gradul întîi în $x$ şi $y$ *(funcţie afină!)*, deseori se spune că dreptele sînt *curbe algebrice de ordinul întîi*.

Deci

$$d = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ ax + by + c = 0,\ a^2 + b^2 \neq 0\}$$

sau mai scurt

$$d: ax + by + c = 0,$$

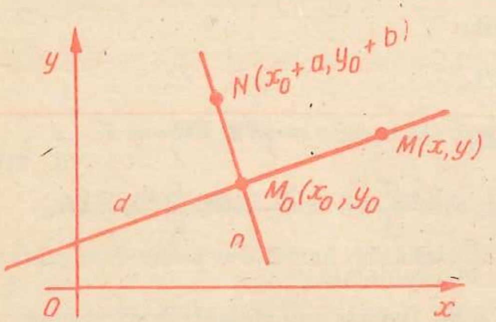



**Fig. I.18**

Fie dreapta $d$ dată prin ecuaţia carteziană generală $ax + by + c = 0$ şi $M_0(x_0, y_0) \in d$, adică $ax_0 + by_0 + c = 0$. Rezultă $c = -ax_0 - by_0$ şi reînlocuind obţinem $d$: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Dreapta ce trece prin $M_0(x_0, y_0) \in d$ şi este perpendiculară pe $d$ are ecuaţia $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$ şi se numeşte *normala dreptei $d$* în punctul $M_0$ (fig. I.18). În cazul $b \neq 0$ rezultă panta $m = -\frac{a}{b}$ şi ecuaţia dreptei corespunzătoare se poate scrie în *forma carteziană explicită*

$$y = mx + n.$$

*Ecuaţia generală* a unei *drepte ce trece prin origine*, este

$$ax + by = 0.$$

Dacă $b \neq 0$, atunci putem scrie $y = mx$, $m = -\frac{a}{b}$.

*Comentarii.* 1) Fie dreapta $d$: $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Punctul $M_0(x_0, y_0)$ se află pe dreapta $d$ dacă şi numai dacă $ax_0 + by_0 + c = 0$.

2) Considerăm dreapta $d$: $2x + 3y + 1 = 0$. Punînd $x = 1$ găsim $y = -1$, adică $d$ trece prin punctul de coordonate $(1, -1)$. Analog constatăm că $d$ conţine punctul $(-5, 3)$. Rezultă că ecuaţia dreptei $d$ este echivalentă cu $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{2}$. De aici se obţin ecuaţiile parametrice $x = 1 - 3t$, $y = -1 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

3) Pentru fiecare $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ dreptele de ecuaţii $ax + by + c = 0$ şi $t(ax + by + c) = 0$ coincid. Deci ecuaţiile $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ reprezintă aceeaşi dreaptă dacă şi numai dacă au coeficienţi corespondenţi proporţionali.

Pentru $t = 0$ ecuaţia $t(ax + by + c) = 0$ reprezintă planul $\mathcal{P}$.

4) Considerăm dreapta $d$: $ax + by + c = 0$. Pentru trasarea dreptei $d$ în raport cu reperul cartezian este necesar să determinăm fie un punct şi panta, fie două puncte distincte.

5) Fie punctele distincte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Pentru a găsi ecuaţia carteziană a dreptei $M_1M_2$ ne putem servi de ecuaţia generală a unei drepte, $ax + by + c = 0$, $a, b, c$ = parametri reali, $a^2 + b^2 \neq 0$, după cum urmează.

Punem condiţia ca $(x_1, y_1)$ şi $(x_2, y_2)$ să verifice ecuaţia generală. Rezultă sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0, \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$

de două ecuaţii cu trei necunoscute $(a, b, c)$, dintre care $a$ şi $b$ nu se pot anula simultan. Se rezolvă sistemul precedent şi valorile găsite pentru $(a, b, c)$ se înlocuiesc în $ax + by + c = 0$.

## PROBLEME

**1.** Ştiind că $M_0(3, 4)$ este piciorul perpendicularei coborîtă din origine pe dreapta $d$, să se scrie ecuaţia dreptei $d$.

*Soluţie.* Dreapta $d$ este determinată de punctul $M_0(3, 4)$ şi de panta $-\frac{3}{4}$. De aceea ecuaţia carteziană implicită a dreptei $d$ este $3(x - 3) + 4(y - 4) = 0$, adică $3x + 4y - 25 = 0$.

**2.** Se dau punctele $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ şi dreapta $d : x - 4y + 7 = 0$. Să se determine coordonatele punctului $C \in d$ astfel încît triunghiul $ABC$ să fie isoscel cu baza $[AB]$.

**3.** Să se scrie ecuaţiile parametrice ale dreptei $d'$ ce trece prin punctul $M_0(1, 2)$ şi este perpendiculară pe dreapta $d$: $3x - 2y + 2 = 0$. Să se găsească proiecţia lui $M_0$ pe $d$ şi simetricul lui $M_0$ faţă de $d$.

**4.** În patrulaterul convex $ABCD$, $E$ este mijlocul laturii $[AB]$ şi $F$ mijlocul laturii $[CD]$. Să se demonstreze că dacă $AB$ nu este paralelă cu $CD$, atunci mijloacele segmentelor $[AF]$, $[CE]$, $[BF]$, $[DE]$ sînt vîrfurile unui paralelogram. Să se arate că acest paralelogram nu poate fi romb sau pătrat.

*Soluţie.* Fixăm reperul cartezian $xOy$ ca în figura I.19 şi notăm cu $L$, $M$, $N$, $P$ mijloacele segmentelor specificate. Ţinînd seama de ipotezele problemei putem scrie

$$F\left(\frac{d+b}{2}, \frac{e+c}{2}\right),\ L\left(\frac{d+b-2a}{4}, \frac{e+c}{4}\right),\ M\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right),$$

$$N\left(\frac{d+b+2a}{4}, \frac{e+c}{4}\right),\ P\left(\frac{d}{2}, \frac{e}{2}\right),$$

unde $c > 0$, $e > 0$, $c \neq e$. Utilizînd pantele găsim $LM \parallel PN$, $LP \parallel MN$ şi deci $LMNP$ este un paralelogram.

Dreapta $LN$ este orizontală, iar dreapta $PM$ este oblică. De aceea diagonalele $[LN]$ şi $[PM]$ nu pot fi perpendiculare, adică $LMNP$ nu poate fi romb sau pătrat.

**5.** Se consideră funcţia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = a\,|x + 1| + |x - 1| + (2 - a)x - a - 1$, unde $a$ este un parametru real. Să se determine valorile lui $a$ pentru care $f_a$ este bijectivă şi apoi să se găsească inversa $f_a^{-1}$. Să se deseneze graficele funcţiilor $f_a$ şi $f_a^{-1}$.

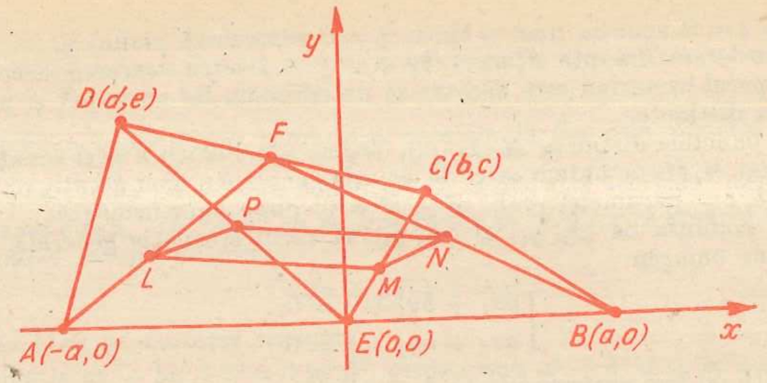



Fig. I.19

## § 8. Intersecția și reuniunea a două drepte

Două drepte sînt (1) paralele, (2) coincidente, (3) secante dacă și numai dacă intersecția lor este (1) mulțimea vidă, (2) o dreaptă (3) un punct (fig. I.20).

Fie două drepte de coeficienți unghiulari $m_1$ și $m_2$. Condiția de paralelism a lor este $m_1 = m_2$, iar condiția de perpendicularitate este $m_1 m_2 = -1$.

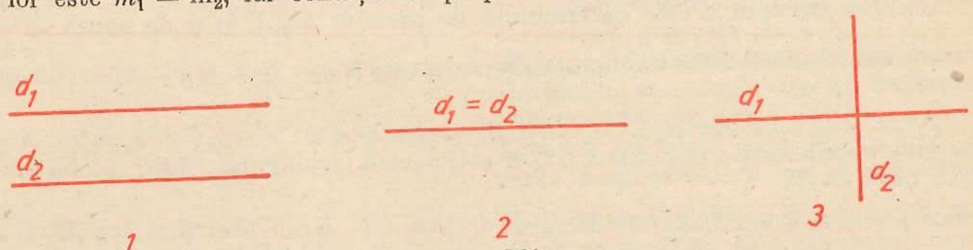



Fig. I.20

Fie $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Ținînd cont de pante rezultă imediat că dreptele $d_1$ și $d_2$ sînt (1) *paralele* dacă și numai dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (fig. I.21.1). (2) *coincidente* dacă și numai dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (fig. I.21.2), (3) *secante* dacă și numai dacă $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$; dreptele secante sînt *perpendiculare* dacă și numai dacă $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ (fig. I.21.3).

Punctul de intersecție a dreptelor secante $d_1$, $d_2$ are proprietatea de a fi unicul punct ale cărui coordonate verifică simultan ambele ecuații ale dreptelor $d_1$ și $d_2$.

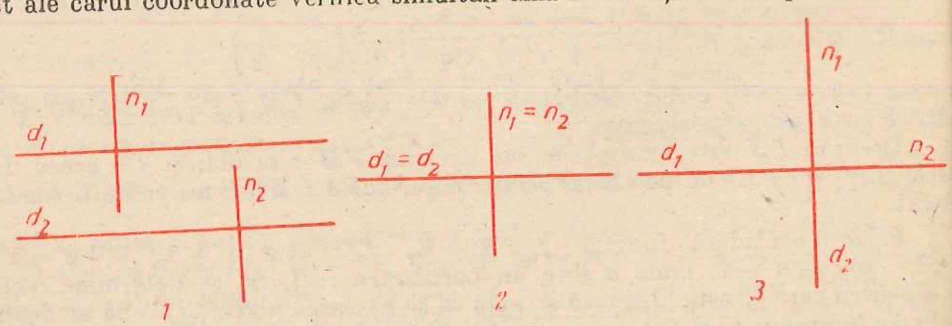



Fig. I.21

Așadar, coordonatele punctului de intersecție $\{M_0\} = d_1 \cap d_2$ reprezintă soluția sistemului

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

*Condiția ca trei drepte să fie concurente.* Fie dreptele distincte $d_i : a_ix + b_iy + c_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Pentru ca aceste drepte să fie concurente trebuie să existe un punct $M_0(x_0, y_0)$ și numai unul ale cărui coordonate să fie soluție a sistemului liniar

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0, \end{cases}$$

de trei ecuații cu două necunoscute $(x, y)$. Se știe însă, de la algebră, că un asemenea sistem este compatibil determinat (soluție unică!) dacă și numai dacă

$$\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = 2.$$

Această egalitate se reține sub numele de „*condiția ca trei drepte să fie concurente*".

**Teoremă.** *Dacă* $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$, *atunci*

$$d_1 \cup d_2 : (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0.$$

*Demonstrație*: Fie $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0\}$. Trebuie să arătăm că $d_1 \cup d_2 = \Gamma$ (fig. I.22), adică $d_1 \cup d_2 \subseteq \Gamma$ și $\Gamma \subseteq d_1 \cup d_2$.

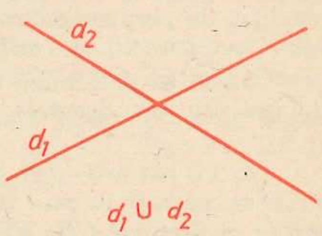



Fig. I.22

Incluziunea $d_1 \cup d_2 \subseteq \Gamma$ decurge din următorul șir de implicații: $(x_0, y_0) \in d_1 \cup d_2 \Rightarrow$ sau $(x_0, y_0) \in d_1$ sau $(x_0, y_0) \in d_2 \Rightarrow$ sau $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0$ sau $a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \Rightarrow (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2) = 0 \Rightarrow (x_0, y_0) \in \Gamma$.

Reciproc: dacă $(x_0, y_0) \in \Gamma$, atunci $(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2) = 0$ și deci cel puțin un factor este zero, să zicem $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0$; rezultă $(x_0, y_0) \in d_1 \subseteq d_1 \cup d_2$ și deci $\Gamma \subseteq d_1 \cup d_2$.

*Comentarii.* 1) O ecuație de forma $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ cu $b^2 - 4ac > 0$ reprezintă două drepte distincte în plan, care trec prin origine. De exemplu, ecuația $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ reprezintă reuniunea dreptelor $x = y$ și $x = -3y$. Similar, ecuația $xy = 0$ reprezintă reuniunea axelor $Ox$ și $Oy$ etc.

2) O ecuație de forma $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ cu $b^2 - 4ac < 0$, reprezintă un punct în plan și anume originea $O(0, 0)$.

### PROBLEME

1. Se consideră dreptele $d_1 : x - 2y + 3 = 0$, $d_2 : 4x - y - 9 = 0$, $d_3 : 2x + 3y - 1 = 0$ care sînt suporturile laturilor $[AB]$, $[BC]$ respectiv $[AC]$ ale triunghiului $ABC$.

1) Să se determine coordonatele vîrfurilor triunghiului $ABC$.

2) Să se scrie ecuațiile înălțimilor și ecuațiile medianelor triunghiului $ABC$.

*Soluție parțială.* 2) $AB : x - 2y + 3 = 0 \Rightarrow m_{AB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow m_1 = -2$, unde $m_1$ este panta înălțimii corespunzătoare laturii $[AB]$ și ecuația înălțimii corespunzătoare este $y + 1 = -2(x - 2)$, care se mai scrie $2x + y - 3 = 0$. Pentru celelalte înălțimi se procedează în mod analog.

Dacă $A(-1, 1)$ și $B(3, 3)$ atunci mijlocul $C'$ al laturii $[AB]$ va avea coordonatele $(1, 2)$. Deci $C'(1, 2)$ și

$$CC' : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ CC' : 3x + y - 5 = 0.$$

Analog se determină ecuațiile celorlalte mediane.

2. Se consideră punctele $O(0, 0)$; $A(6, 0)$; $B(1, 5)$; $C(0, 4)$. Să se arate că:
1) patrulaterul $OABC$ este inscriptibil;
2) picioarele perpendicularelor duse din origine pe laturile triunghiului $ABC$ sînt coliniare.

*Soluție parțială.* 1) $OA = 6$, $OC = 4$, $AC = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$, $BC = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, $AB = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}$, $OB = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$.

Evident $OC \perp OA$ dar $AC^2 = BC^2 + BA^2 \Rightarrow m(\hat{B}) = 90 \Rightarrow m(\hat{O} + \hat{B}) = 180$, deci patrulaterul este inscriptibil.

*Variantă.* Se verifică relația Ptolemeu $BC \cdot OA + OC \cdot AB = OB \cdot AC$. Într-adevăr, $\sqrt{2} \cdot 6 + 4 \cdot \sqrt{50} = \sqrt{52} \cdot \sqrt{26} \Leftrightarrow 26\sqrt{2} = 26\sqrt{2}$.

2) Se scriu ecuațiile perpendicularelor din $O$ pe laturi ținîndu-se seama de condiția de perpendicularitate a două drepte. După determinarea coordonatelor celor trei puncte, se verifică condiția de coliniaritate.

3. Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului determinat de dreptele $d_1 : 4x - y + 2 = 0$, $d_2 : x - 4y - 8 = 0$, $d_3 : x + 4y - 8 = 0$.

4. Pe catetele $AB$ și $AC$ ale unui triunghi dreptunghic se construiesc în exterior, pătrate în care vîrfurile opuse lui $A$ sînt respectiv $D$ și $E$. Să se demonstreze că dreptele $CD$, $BE$ și înălțimea $AH$ a triunghiului sînt concurente.

*Indicație.* Axele de coordonate se pot fixa prin dreptele $AB$ și $AC$.

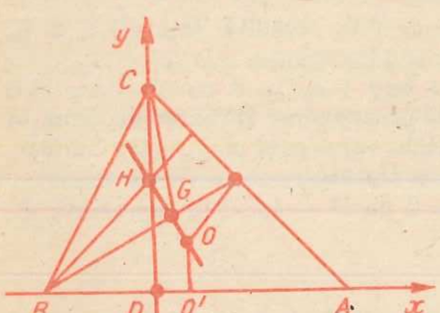



**Fig. I.23**

5. Fie $ABC$ un triunghi oarecare. Să se arate că ortocentrul $H$, centrul de greutate $G$ și centrul $O$ al cercului circumscris triunghiului $ABC$ sînt coliniare.

*Soluție.* Se iau drept axe de coordonate latura $BA$ și înălțimea $DC$. Se notează $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ și $C(0, c)$ (fig. I.23).

Înălțimea $CD$ are ecuația $x = 0$. Deoarece coeficientul unghiular al dreptei $AC$ este $-\dfrac{c}{a}$, se găsește ecuația înălțimii din $B$: $ax - by - ab = 0$. Rezultă $H\left(0, -\dfrac{ab}{c}\right)$.

Mediana din $B$ are ecuația $cx - (a - 2b)y - bc = 0$, iar cea din $C$ are ecuația $2cx + (a + b)y - c(a - b) = 0$. Rezultă $G\left(\dfrac{a+b}{3}, \dfrac{c}{3}\right)$. De altfel acest lucru se putea obține direct cu formulele pentru coordonatele centrului de greutate.



Mediatoarea segmentului $[AB]$ are ecuația $x = \dfrac{a+b}{2}$, iar mediatoarea segmentului $[CA]$ are ecuația $y - \dfrac{c}{2} = \dfrac{a}{c}\left(x - \dfrac{a}{2}\right)$. De aceea $O\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{c^2 + ab}{2c}\right)$. Deoarece

$$\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{ab}{c} & 1 \\ \dfrac{a+b}{3} & \dfrac{c}{3} & 1 \\ \dfrac{a+b}{2} & \dfrac{c^2+ab}{2c} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

punctele $H$, $G$ și $O$ sînt coliniare.

*Notă.* Conținutul problemei este independent de fixarea unui reper cartezian în plan. De aceea se preferă sistemul de coordonate care ușurează calculele.

6. Se consideră mulțimea de puncte $M(x, y)$ ale căror coordonate verifică ecuația $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$. Să se arate că această mulțime este reuniunea a două drepte perpendiculare, care trec prin origine.

*Soluție.* Fie $\Gamma : 12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ecuația $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$ în $\mathbb{R}^2$ este echivalentă cu ecuația $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$ în $\mathbb{R}$, cu parametrul $y \in \mathbb{R}$.
Rezultă $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0 \Leftrightarrow (3x - 4y)(4x + 3y) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y = 0$ sau $4x + 3y = 0$. Deci $\Gamma = d_1 \cup d_2$ unde $d_1 : 3x - 4y = 0$ și $d_2 : 4x + 3y = 0$. Deoarece $m_1 = \dfrac{3}{4}$, $m_2 = -\dfrac{4}{3}$, condiția de perpendicularitate $m_1 m_2 = -1$ se verifică imediat.

7. Să se arate că fiecare dintre ecuațiile sistemului

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y - 45 = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

reprezintă reuniunea a două drepte și să se rezolve sistemul.

## § 9. Fascicul de drepte

Presupunem că sînt date două drepte $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ care nu sînt paralele sau egale. Intersecția $d_1 \cap d_2 = \{M_0\}$ este caracterizată prin sistemul liniar

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \qquad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0. \end{cases}$$

Reciproc, dacă se dă un punct $M_0(x_0, y_0)$, atunci el poate fi gîndit ca punctul de intersecție a dreptelor de ecuații $x = x_0$ și $y = y_0$. Este evident că prin $M_0$ trec o infinitate de drepte.

**Definiție. Mulțimea tuturor dreptelor din plan care trec printr-un punct dat $M_0$ se numește fascicul de drepte. Punctul $M_0$ se numește vîrful fasciculului** (fig. I.24).

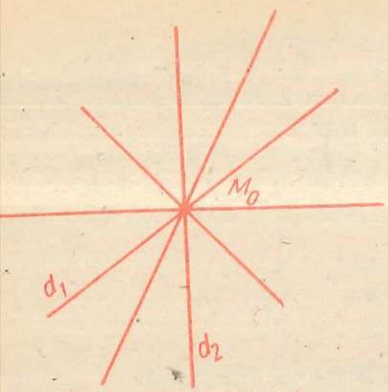



**Fig. I.24**

T e o r e m ă. *Dacă punctul $M_0$ este determinat ca intersecție a dreptelor $d_1$ și $d_2$, atunci ecuația unei drepte oarecare din fasciculul de vîrf $M_0$ este*

$$r(a_1x + b_1y + c_1) + s(a_2x + b_2y + c_2) = 0,$$

$$r^2 + s^2 \neq 0,\ (r, s) \in \mathbf{R}^2.$$

*Demonstrație.* Întrucît $(ra_1 + sa_2)^2 + (rb_1 + sb_2)^2 > 0$, pentru fiecare pereche $(r, s) \neq (0, 0)$, ecuația scrisă în teoremă, fiind de gradul întîi în necunoscutele $x$, $y$, reprezintă o dreaptă $d_{r,s}$. Într-adevăr, $ra_1 + sa_2 = 0$ și $rb_1 + sb_2 = 0$ unde $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ implică $r = s = 0$.

Deoarece $M_0(x_0, y_0)$ verifică ecuațiile $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, verifică și ecuația din teoremă, deci toate dreptele $d_{r,s}$ trec prin $M_0(x_0, y_0)$. Pe de altă parte, pentru fiecare $M_1(x_1, y_1)$ al planului, diferit de $M_0(x_0, y_0)$, există o singură dreaptă $d_{r,s}$ care trece prin $M_1$ și anume aceea pentru care $(r, s)$ satisface

$$r(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1) + s(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2) = 0,\ (r, s) \neq (0, 0).$$

Ecuația din teorema precedentă se numește *ecuația fasciculului de vîrf* $M_0$. Numerele reale $r$ și $s$ sînt *parametri*, cel puțin unul fiind nenul. De aceea în aplicații se lucrează cu $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $t(a_1x + b_1y + c_1) + a_2x + b_2y + c_2 = 0$, fie cu $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ și $a_1x + b_1y + c_1 + t(a_2x + b_2y + c_2) = 0$.

Fie $d : ax + by = 0$ o dreaptă care trece prin origine. Direcția dreptei $d$ (adică mulțimea tuturor dreptelor paralele sau egale cu $d$) se numește *fasciculul de drepte paralele*. Dreapta $d$ se numește *linia de reper a fasciculului* (fig. I.25). Evident o dreaptă oarecare din fasciculul de drepte paralele cu linia de reper, are ecuația

$$ax + by + r = 0,$$

unde $r$ este un parametru real. Această ecuație se mai numește și *ecuația fasciculului de drepte paralele*.

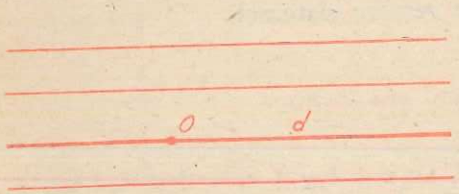



**Fig. I.25**

*Observații.* 1) Reuniunea dreptelor dintr-un fascicul este planul $\mathfrak{P}$.

2) Ecuația fasciculului cînd se cunoaște vîrful $M_0(x_0, y_0)$ este $r(x - x_0) + s(y - y_0) = 0$, $(r, s) \in \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

3) Trei drepte distincte sînt concurente dacă și numai dacă una dintre ele face parte din fasciculul determinat de celelalte două.

## PROBLEME

1. Într-un reper cartezian se dau punctele $A(r, 0)$, $B(0, s)$ și $M(r, s)$. Să se scrie ecuația carteziană a perpendicularei din $M$ pe $AB$. Să se arate că dacă $A$ și $B$ sînt variabile, astfel încît $r + s = 1$, atunci această perpendiculară trece printr-un punct fix.

*Soluție.* Fie $h$ dreapta ce trece prin $M$ și este perpendiculară pe $AB$ (fig. I.26). Panta dreptei $AB$ este $-\dfrac{s}{r}$. De aceea ecuația carteziană implicită a lui $h$ este $-r(x-r) + s(y - s) = 0$, adică $rx - sy + s^2 - r^2 = 0$.

Pentru $r$, $s$ variabile, condiția $r + s = 1$ implică $r(x + y - 2) + 1 - y = 0$, $\forall r \in \mathbf{R}$, adică $h$ face parte din fasciculul de drepte al cărui vîrf este soluția sistemului $x + y - 2 = 0$, $1 - y = 0$, adică $(1, 1)$.

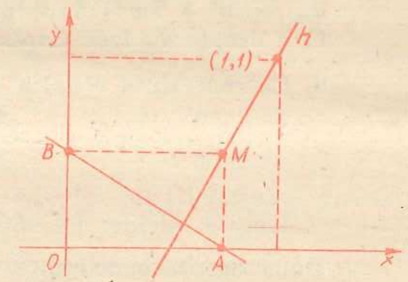



**Fig. I.26**

2. Se dau dreptele $AB : x - 2y + 3 = 0$, $AC : 2x - y - 3 = 0$, $BC : 3x + 2y + 1 = 0$.

Să se scrie ecuația carteziană a înălțimii din $A$ și a medianei respective în triunghiul $ABC$.

*Soluție.* Dreptele $AB$ și $AC$ determină fasciculul de ecuație $r(x - 2y + 3) + s(2x - y - 3) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Aceasta se transcrie sub forma $x(r + 2s) + y(-2r - s) + 3(r - s) = 0$. Alegem dreapta din fascicul perpendiculară pe $BC$, adică punem condiția $3(r + 2s) + 2(-2r - s) = 0$. Rezultă $r = 4s$. Aceasta împreună cu ipoteza $s \neq 0$ conduce la ecuația $2x - 3y + 3 = 0$.

*Variantă.* Presupunînd $s \neq 0$ și notînd $\dfrac{r}{s} = t$, ecuația cu parametrii $r$, $s$ se transcrie $t(x - 2y + 3) + 2x - y - 3 = 0$, sau după ordonare, $(2 + t)x - (1 + 2t)y - 3 + 3t = 0$.

Panta unei drepte oblice din această familie este $m = \dfrac{2 + t}{1 + 2t}$, $t \neq -\dfrac{1}{2}$.

Pe de altă parte panta dreptei $BC$ este $m' = -\dfrac{3}{2}$.

Punem condiția de perpendicularitate $mm' = -1$ și obținem $t = 4$. După înlocuire, se obține ecuația înălțimii.

Pentru mediană se poate proceda analog.

3. Se dau patru drepte $d_1 : 2x + y - 1 = 0$, $d'_1 : x - 2y + 3 = 0$, $d_2 : x + 3y - 2 = 0$, $d'_2 : -x + 2y + 3 = 0$.

1) Să se scrie ecuația carteziană a dreptei care trece prin punctele determinate de $d_1 \cap d'_1$ și $d_2 \cap d'_2$.

2) Să se găsească ecuația carteziană a dreptei care este paralelă cu $d_1$ și trece prin punctul determinat de $d_2 \cap d'_2$.

4. Fiind dat fasciculul de drepte $(1 - t)x + (2 - t)y + t - 3 = 0$, $t \in \mathbf{R}$ și $x + y - 1 = 0$, se cere:

1) să se determine vîrful fasciculului;

2) să se determine dreapta din fascicul care taie axele $Ox$ și $Oy$ respectiv în $M$, $N$ astfel încît $OM^2 \cdot ON^2 = 4(OM^2 + ON^2)$.

5. Se consideră fasciculul de vîrf $M_0(5, 0)$. O dreaptă arbitrară din fascicul taie dreptele $d_1 : y - 2 = 0$ și $d_2 : y - 3 = 0$, respectiv în $M_1$ și $M_2$. Să se arate că paralela dusă prin $M_1$ la dreapta $OM_2$ trece printr-un punct fix.

6. Fie triunghiul $ABC$ și punctul $D$ fixat în planul triunghiului. Pe dreapta $AB$ se consideră un punct variabil $M$ a cărui proiecție pe dreapta $AC$ se notează cu $N$. Fie $E$ proiecția punctului $A$ pe dreapta $MD$. Să se arate că dreapta $NE$ trece printr-un punct fix.

7. Fie $m$ un parametru real și dreapta variabilă $d_m : x(m^3 + 2m + 1) + y(-2m^3 - m + 1) - 3m(m^2 + 1) = 0$. Cîte drepte $d_m$ trec printr-un punct $(x, y)$ al planului? Discuție.

8. Ce reprezintă ecuația $\dfrac{1}{x + y + 1} = \dfrac{2}{x - y + 1}$?

## § 10. Calculul măsurii unui unghi

Două drepte concurente determină patru unghiuri astfel încît cele opuse sînt congruente, iar cele adiacente sînt suplementare. Ne propunem să găsim măsura în radiani a unuia dintre aceste patru unghiuri ținînd seama de ecuațiile dreptelor din care fac parte laturile unghiului respectiv.

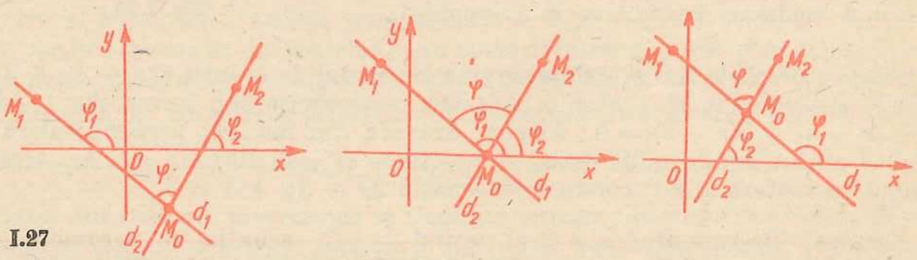



**Fig. I.27**

Fixăm reperul cartezian $xOy$ și dreptele oblice $d_1 : y = m_1x + n_1$, $d_2 : y = m_2x + n_2$ concurente în punctul $M_0(x_0, y_0)$. Se știe că $m_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$, unde $\varphi_1$ este măsura unghiului dintre $d_1$ și axa $Ox$, iar $m_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$, unde $\varphi_2$ este măsura unghiului dintre $d_2$ și axa $Ox$. Fie $\widehat{M_1M_0M_2}$, $M_1 \in d_1$, $M_2 \in d_2$ unghiul ale cărei laturi intersectează simultan semiplanul superior (fig. I.27). Cunoscînd pantele $m_1$ și $m_2$, măsura $\varphi$ a unghiului $\widehat{M_1M_0M_2}$ se poate determina în două moduri: 1) din $\operatorname{tg} \varphi_1 = m_1$, $\operatorname{tg} \varphi_2 = m_2$ se găsesc $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, \pi] - \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ și apoi $\varphi = |\varphi_1 - \varphi_2|$; 2) relațiile $\varphi_1 \geqslant \varphi_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ și ipoteza $\varphi \neq \dfrac{\pi}{2}$ implică $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2}$ și deci măsura $\varphi$ este soluția ecuației trigonometrice

$$(*)\quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2},\ \varphi \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Evident, formula (*) se poate aplica fără precauții privind ordinea dintre $\varphi_1$ și $\varphi_2$, dar atunci prin ea se găsește fie măsura unghiului $\widehat{M_1M_0M_2}$, fie măsura suplementului său.

### PROBLEME

1. Se dau dreptele $d_1 : x = 1 + 2t$, $y = 1 - t$, $t \in \mathbf{R}$ și $d_2 : x - y + 1 = 0$.

1) Să se determine măsurile unghiurilor dintre $d_1$, respectiv $d_2$ și axa $Ox$.

2) Să se găsească măsura unghiului ale cărui laturi sînt incluse în $d_1$, respectiv $d_2$ și intersectează simultan semiplanul superior.



*Soluție.* 1) Eliminăm parametrul $t$ și găsim ecuația carteziană explicită a lui $d_1$, adică $y = \dfrac{3}{2} - \dfrac{x}{2}$. Rezultă $\operatorname{tg} \varphi_1 = -\dfrac{1}{2}$ și deci $\varphi_1 = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$. Analog $d_2 : y = x + 1$ și $\operatorname{tg} \varphi_2 = 1$, adică $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

2) Deoarece $\varphi_1 > \varphi_2$, găsim $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{3\pi}{4} + \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Dreptele $d_1 : x - 3y + 4 = 0$ și $d_2 : 2x - y - 5 = 0$ determină patru unghiuri. Să se găsească măsura unghiului al cărui interior conține originea.

3. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului fixat prin dreptele $d_1 : x + y = 0$, $d_2 : x - 2y = -1$, $d_3 : 2x - y - 1 = 0$.

4. Se consideră dreptele $d_m : x = \dfrac{2}{m} - \dfrac{y}{m^2}$, unde $m$ este un parametru real nenul.

1) Cîte drepte $d_m$ trec printr-un punct dat al planului?

2) În familia $d_m$ există drepte paralele? Dar perpendiculare?

3) Să se arate că pentru fiecare $m_2^2 \in (1, \infty)$ există un singur $m_1^2 \in (0, 1)$ astfel încît $\mu(d_{m_1}, d_{m_2}) = \dfrac{\pi}{4}$.

*Soluție.* 1) Răspunsul se obține din numărul soluțiilor ecuației $m^2x + 2m + y = 0$, cu necunoscuta $m \neq 0$ și parametrii reali $(x, y)$. Se constată că prin fiecare punct al mulțimii $(Ox \cup Oy) - \{0\}$ trece o singură dreaptă $d_m$. Pentru $x \neq 0$ și $y \neq 0$ ecuația de gradul al doilea în $m$ are soluții reale numai dacă $1 - xy \geqslant 0$. Rezultă: prin fiecare punct $(x, y)$ caracterizat prin $xy = 1$ trece o singură dreaptă $d_m$, prin fiecare punct $(x, y)$ care satisface relațiile $xy < 1$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ trec două drepte distincte, prin punctele $(x, y)$ care satisfac relația $xy > 1$ nu trece nici o dreaptă.

2) $d_m \parallel d_{-m}$. Nu există drepte perpendiculare.

3) Fie $d_{m_1} : y = -m_1^2x + 2m_1$, $d_{m_2} : y = -m_2^2x + 2m_2$ și $m_1^2 < m_2^2$. Din $1 = \dfrac{-m_1^2 + m_2^2}{1 + m_1^2m_2^2}$, rezultă $m_1^2 = \dfrac{m_2^2 - 1}{m_2^2 + 1}$. Această relație dovedește afirmația făcută în problemă.

5. Fie $A(p, 0)$, $B(q, 0)$, $C(p + q, p - q)$, unde $p$ și $q$ sînt numere întregi mai mari decît unu. Să se cerceteze dacă triunghiul $ABC$ are un unghi obtuz.

## § 11. Distanța de la un punct la o dreaptă. Aria unui triunghi

1. Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct din plan și $h$ o dreaptă de ecuație carteziană implicită $ax + by + c = 0$. Fie $M_1(x_1, y_1)$ proiecția lui $M_0$ pe dreapta $h$ (fig. I.28). Lungimea segmentului $[M_1M_0]$ se numește *distanța de la punctul $M_0$ la dreapta $h$* și se notează $d(M_0; h)$.

Să găsim expresia analitică a distanței $d(M_0; h)$. Pentru aceasta fie

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb, \quad t \in \mathbf{R} \end{cases}$$

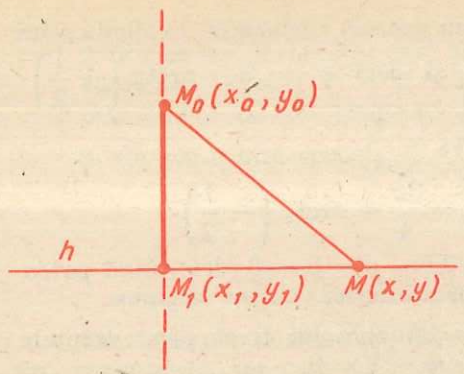



Fig. I.28

ecuațiile parametrice ale normalei dreptei $h$ fixată de punctul $M_0$. Valoarea $t_1$ a lui $t$ corespunzătoare punctului $M_1(x_1, y_1)$ satisface relația $a(x_0 + t_1a) + b(y_0 + t_1b) + c = 0$ și deci ea este

$$t_1 = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}.$$

Numărul $t_1$, împreună cu formula distanței dintre două puncte, conduc la

$$d(M_0;\, h) = M_0M_1 =$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = |\, t_1 \,| \sqrt{a^2 + b^2}$$

și deci

$$d(M_0;\, h) = \frac{|\, ax_0 + by_0 + c \,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Reținem această egalitate ca *formula distanței de la punctul $M_0(x_0, y_0)$ la dreapta* $h : ax + by + c = 0$.

*Comentariu*. Ținînd seama că dintre toate segmentele $[M_0M]$, $M \in h$ (perpendiculară și oblice!) segmentul $[M_0M_1]$ are cea mai mică lungime, rezultă $d(M_0;\, h) = \min\limits_{M \in h} d(M_0, M)$. Prezența coordonatelor și faptul că minimul distanței se atinge dată cu minimul pătratului ei, fac posibilă tratarea acestei probleme de minim ca minimul unui trinom de gradul al doilea.

2. Fie punctele distincte $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ și dreapta

$$M_2M_3 : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă $M_1(x_1, y_1)$ este un alt punct din plan și dacă notăm

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

atunci

$$d(M_1;\, M_2M_3) = \frac{|\, \Delta \,|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}$$

și în consecință aria triunghiului $M_1M_2M_3$ este dată de formula

$$\sigma[M_1M_2M_3] = \frac{1}{2}\,|\, \Delta \,|.$$

## PROBLEME

1. Într-un reper cartezian $xOy$ se dau punctele $A(1, -1)$, $B(3, 2)$ și se cere:
1) Să se scrie ecuația carteziană implicită a dreptei $AB$ și să se găsească distanța de la origine la dreapta $AB$.
2) Să se determine distanța de la punctul $C(-1, 3)$ la dreapta $AB$ și să se scrie ecuația dreptei ce trece prin punctul $C$ și este echidistantă de punctele $A$ și $B$.



*Soluție parțială*. 1) Ecuația sub formă de rapoarte a dreptei $AB$ ia forma echivalentă $3x - 2y - 5 = 0$. Rezultă

$$d(O,\, AB) = \frac{|\, 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 5 \,|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{13}}.$$

Ecuația fasciculului de drepte de vîrf $C$ se scrie $r(y - 3) + s(x + 1) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$. După ordonare, în raport cu $x$ și $y$, ecuația devine $sx + ry + s - 3r = 0$. Se calculează distanțele de la $A$ respectiv $B$ la dreapta dată de ecuația precedentă și după egalare se determină $r$ și $s$.

2. Să se calculeze lungimile înălțimilor triunghiului de vîrfuri $A(2, 1)$, $B(6, -1)$, $C(4, 4)$.

3. Se consideră dreptele $d_1 : 3x + 4y - 6 = 0$ și $d_2 : 3x + 4y + 5 = 0$. Să se arate că sînt paralele și să se calculeze distanța dintre ele. Generalizarea pentru drepte paralele oarecare.

*Indicație*. $m_1 = m_2 = -\dfrac{3}{4}$, deci $d_1 \parallel d_2$, apoi se calculează distanța de la un punct al unei drepte la cealaltă dreaptă. Pentru cazul general se procedează analog.

4. Se dau punctul $M(3, 3)$ și triunghiul $ABC$ determinat de dreptele $AB : x + 2y - 4 = 0$, $BC : 3x + y - 2 = 0$, $CA : x - 3y - 4 = 0$.
1) Să se calculeze aria triunghiului $ABC$.
2) Fie $P$, $Q$, $R$ proiecțiile punctului $M$ respectiv pe $OA$, $OB$ și $AB$. Să se demonstreze că punctele $P$, $Q$, $R$ sînt coliniare.
3) Să se scrie ecuația fasciculului de drepte determinat de dreptele $AB$ și $PQ$. Să se găsească ecuația dreptei din fascicul, care trece prin punctul $N(0, 5)$.

*Soluție*. (fig. I.29). 1) $\{A\} = AB \cap CA \Rightarrow A(4, 0)$, $\{B\} = AB \cap BC \Rightarrow B(0, 2)$, $\{C\} = BC \cap CA \Rightarrow C(1, -1)$. Ținînd seama de formulă găsim $\sigma[ABC] = \dfrac{1}{2}\,|\, \Delta \,| = 5$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 10.$$

2) Dreapta $MR$ are ecuația carteziană explicită $y - 3 = 2(x - 3)$. De aceea $\{R\} = AB \cap MR \Rightarrow x + 2y - 4 = 0$, $2x - y - 3 = 0 \Rightarrow R(2, 1)$. Ținînd seama că $P(3, 0)$, $Q(0, 3)$, se verifică condiția de coliniaritate,

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

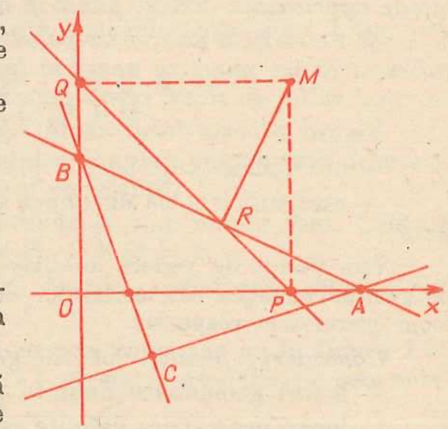



Fig. I.29

3) Ecuația fasciculului determinat de dreptele $AB$ și $PQ : x + y - 3 = 0$ este $r(x + 2y - 4) + s(x + y - 3) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Dreapta din fascicul care trece prin $N(0, 5)$ corespunde valorilor $r$ și $s$ care verifică condiția $3r + s = 0$, $s \neq 0$. Ecuația acestei drepte este $2x + y - 5 = 0$.

5. Să se găsească un punct $M$ în interiorul triunghiului $ABC$ astfel încît triunghiurile $MAB$, $MBC$, $MCA$; să aibă arii egale.

*Indicație.* Dacă notăm $M(a, b)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ se obține $a = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$; $b = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$, adică centrul de greutate al triunghiului.

**6.** Să se calculeze aria patrulaterului $ABCD$ avînd vîrfurile $A(-2, 2)$, $B(-3, -1)$, $C(-2, -3)$, $D(2, 0)$.

## § 12. Locuri geometrice

O mulțime de puncte din plan, definită prin specificarea unor proprietăți geometrice ale elementelor sale, se numește *loc geometric.*

În esență, problemele de loc geometric sînt probleme de găsire a unor proprietăți echivalente celor prin care este dată o anumită mulțime, sau altfel spus, probleme de egalitate a două mulțimi. Dar rezolvarea unei probleme de tipul (1) *„punctele unei mulțimi au proprietatea P dacă și numai dacă au proprietatea Q“* nu este totuna cu rezolvarea unei probleme de tipul (2) *„să se găsească locul geometric al punctelor care au proprietatea P“*. În general, în problema (2) proprietatea $P$ este dată astfel încît nu este evident cu ce figură geometrică avem de-a face (ipoteză!), iar proprietatea $Q$ nu este specificată. Ea poate fi aleasă de rezolvitor din mulțimea proprietăților echivalente cu $P$ de așa manieră încît să poată spune cu ce figură geometrică este echivalentă mulțimea dată inițial.

Rezolvarea efectivă a unei probleme de loc geometric constă în următoarele:

1) *Verificarea existenței unui punct care posedă proprietatea dată, adică stabilirea faptului că mulțimea dată este vidă sau nu.*

2) *Se consideră un punct (variabil) care posedă proprietatea dată și se stabilește apartenența acestui punct la o figură geometrică $\mathcal{F}$.*

3) *Se verifică dacă orice punct al lui $\mathcal{F}$ convine, adică se analizează dacă este suficient ca un punct să aparțină lui $\mathcal{F}$ pentru a avea proprietatea specificată. De cele mai multe ori reiese că nu putem accepta decît o parte $\mathcal{F}'$ a lui $\mathcal{F}$.*

Figura $\mathcal{F}'$ este locul căutat deoarece:

— orice punct care posedă proprietatea dată aparține necesar lui $\mathcal{F}'$;

— este suficient ca un punct să aparțină lui $\mathcal{F}'$ pentru a avea proprietatea dată.

Din punct de vedere analitic determinarea unui loc geometric se bazează pe găsirea ecuației sau ecuațiilor care precizează mulțimea din care face parte locul geometric respectiv.

*Comentariu.* Printre locurile geometrice se disting două tipuri importante:

— locuri geometrice definite printr-o relație metrică,

— locuri geometrice definite ca intersecție a două familii de curbe ce depind de același parametru.

Pentru primul tip de loc geometric este suficient ca într-un reper cartezian convenabil ales, să se transforme relația metrică într-una analitică. Se găsește astfel relația ce trebuie să existe între coordonatele $x$, $y$ ale unui punct curent $M$ și se recunoaște curba loc geometric.

În cel de al doilea caz, de regulă punctul curent $M(x, y)$, care descrie locul geometric, apare dintr-un sistem de tipul $f(x, y, t) = 0$, $g(x, y, t) = 0$, unde $t$ este un parametru real. Prin eliminarea parametrului $t$, se obține ecuația carteziană a locului geometric. Uneori este mai simplu să se determine ecuațiile parametrice ale locului geometric $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I$ urmînd, dacă este cazul, să se elimine $t$ și să se obțină ecuația carteziană implicită sau explicită.



### PROBLEME

**1.** Fie $A(1, 3)$, $B(3, 7)$. Se cer locurile geometrice ale punctelor $M$ ce satisfac respectiv condițiile:

1) $MA^2 - MB^2 = 1$; 2) $MA^2 - MB^2 \leqslant 1$; 3) $MA \perp MB$.

*Soluție.* Fie $M(x, y)$. Atunci $MA^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2$, $MB^2 = (x-3)^2 + (y-7)^2$, $m_{MA} = \frac{y-3}{x-1}$, $m_{MB} = \frac{y-7}{x-3}$.

1) Condiția dată este echivalentă cu $(x-1)^2 + (y-3)^2 - (x-3)^2 - (y-7)^2 = 1$, adică $4x + 8y - 49 = 0$. Locul este o dreaptă $d$ perpendiculară pe $AB$ în punctul $\left(\frac{41}{20}, \frac{51}{10}\right)$.

2) Locul este semiplanul determinat de $d: 4x + 8y - 49 = 0$ și de origine, adică $4x + 8y - 49 \leqslant 0$.

3) Utilizînd condiția $m_1 m_2 = -1$ găsim ecuația locului geometric, $(y-3)(y-7) + (x-1)(x-3) = 0$ sau $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 24 = 0$ sau $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 5$.

**2.** Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte concurente este *reuniunea bisectoarelor unghiurilor acestor drepte.* Să se determine ecuațiile celor două bisectoare.

*Soluție.* Fie dreptele $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, unde $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ (condiția de concurență) și $M(x, y)$ un punct egal depărtat de $d_1$ și $d_2$. Relația metrică $d(M, d_1) = d(M, d_2)$ este echivalentă cu ecuația

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Ținînd seama de proprietățile modulelor rezultă ecuațiile celor două bisectoare

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

**3.** Să se găsească locul geometric al punctelor din plan pentru care diferența pătratelor distanțelor la două puncte fixe este constantă.

*Soluție.* Fie $A$ și $B$ două puncte fixe distincte și $k$ un număr real. Căutăm locul geometric al punctelor $M$ pentru care $MA^2 - MB^2 = k$.

Fie $k = 0$; atunci $MA = MB$ și deci $M$ descrie mediatoarea segmentului $[AB]$.

Fie $k \neq 0$ și $O$ mijlocul lui $[AB]$. Fixînd reperul cartezian ca în figura I.30 rezultă $O(0, 0)$, $M(x, y)$, $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $a > 0$ și relația de definiție este echivalentă cu $[(x + a)^2 + y^2)] - [(x - a)^2 + y^2] = k$, adică $x = \frac{k}{4a}$. Astfel $M$ aparține dreptei $d: x = \frac{k}{4a}$, perpendiculară pe $AB$, care taie pe $AB$ în punctul $C\left(\frac{k}{4a}, 0\right)$. Reciproc orice punct $M \in d$ satisface condiția inițială și deci locul geometric căutat este dreapta $d$.

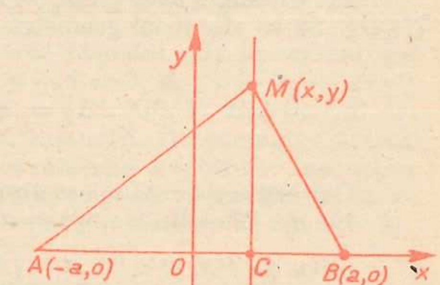



Fig. I.30

**4.** Să se găsească locul geometric al punctelor situate la aceeași distanță de o dreaptă dată.