VII. SFERA

§ 1. Definiţie. Ecuaţie

Definiţia 1.1. Sfera. *Sfera* este locul geometric al punctelor din spaţiu care sint aşezate la aceeaşi depărtare de un punct fix, numit centru.

Teorema 1.1. (Ecuaţia generală a sferei.) *Ecuaţia generală a sferei faţă de un sistem de trei axe ortogonale este*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0. \tag{1}$$

Demonstraţie: Punind condiţia ca un punct oarecare $M(x, y, z)$ de pe suprafaţa sferei să rămină mereu la aceeaşi depărtare R (fig. VII. 1) de centrul $I(a, b, c)$, avem

$$MI = R.$$

Însă

$$MI = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

deci

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R,$$

de unde

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, \tag{2}$$

care este ecuaţia sferei cu centrul $I(a, b, c)$ şi raza R.

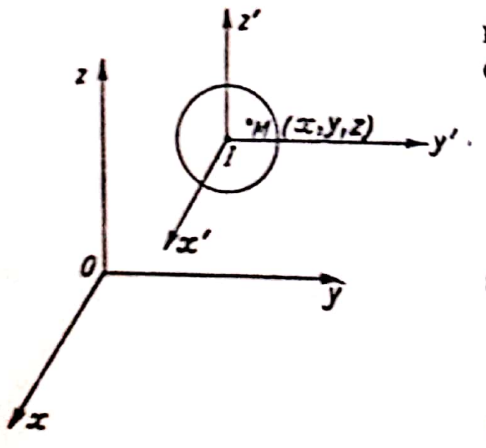

Fig. VII. 1

După dezvoltarea pătratelor şi trecerea tuturor termenilor în membrul stîng din ecuaţia (2), obţinem

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + $$
$$+ (a^2 + b^2 + c^2 - R^2) = 0$$

sau, dacă notăm

$$a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = d,$$

ecuaţia precedentă devine

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0. \tag{3}$$

Reciproc, să demonstrăm că într-un sistem de axe ortogonale ecuaţia generală de gradul al doilea în x, y, z, care are coeficienţii lui x^2, y^2, z^2 egali, iar termenii în xy, xz, yz lipsesc, reprezintă o sferă.

Fie

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Bx + Cy + Dz + E = 0, \tag{4}$$

unde A, B, C, D, E sînt numere reale, cu $A \neq 0$.

Să demonstrăm că această ecuaţie reprezintă o sferă.

Ţinînd seama că $A \neq 0$, se pot împărţi ambii membri ai ecuaţiei (4) prin A.

După împărţire, ecuaţia devine

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}y + \frac{D}{A}z + \frac{E}{A} = 0. \tag{5}$$

Însemnînd

$$\frac{B}{A} = -2a; \quad \frac{C}{A} = -2b; \quad \frac{D}{A} = -2c \quad \text{şi} \quad \frac{E}{A} = a^2 + b^2 + c^2 - R^2, \tag{6}$$

ecuaţia (5) devine

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0,$$

sau

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2,$$

ceea ce demonstrează că ecuaţia (4) reprezintă o sferă cu centrul $I(a, b, c)$ şi cu raza R. Din egalităţile (6) se obţin a, b, c, R în funcţie de coeficienţii ecuaţiei (4)

$$a = -\frac{B}{2A}; \quad b = -\frac{C}{2A}; \quad c = -\frac{D}{2A} \quad \text{şi} \quad R = \frac{\sqrt{B^2 + C^2 + D^2 - 4AE}}{2A}.$$

Din ultima egalitate rezultă că o sferă poate fi reală cu $R \neq 0$, reală cu $R = 0$ sau imaginară după cum avem

$$B^2 + C^2 + D^2 - 4AE \gtreqless 0.$$

Exemplu: Ecuaţia

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5x + 2y + 3z + 2 = 0$$

este o sferă cu centrul de coordonate

$$a = -\frac{B}{2A} = \frac{5}{4}; \quad b = -\frac{C}{2A} = -\frac{1}{2}; \quad c = -\frac{D}{2A} = -\frac{3}{4}$$

şi raza

$$R = \frac{\sqrt{B^2 + C^2 + D^2 - 4AE}}{2A} = \frac{\sqrt{22}}{4}.$$

Observaţii. 1° Sfera cu centrul în origine şi cu raza R are ecuaţia

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \tag{7}$$

2° Sfera cu raza a, cu centrul pe una din axe şi tangentă unui plan de coordonate are ecuaţia

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0, \tag{8}$$

cînd centrul este aşezat pe Ox,
sau

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ay = 0, \tag{9}$$

dacă centrul este aşezat pe axa Oy,
şi

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0, \tag{10}$$

în cazul cînd centrul se află pe Oz.

3° O sferă de rază a, tangentă celor trei plane de coordonate are ecuaţia

$$x^2 + y^2 + z^2 \pm 2ax \pm 2ay \pm 2az + 2a^2 = 0. \tag{11}$$

4° Sfera care are ca diametru segmentul AB, ale cărui extremităţi au coordonatele $A(x_1, y_1, z_1)$ şi $B(x_2, y_2, z_2)$, are ecuaţia

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) = 0. \tag{12}$$

5° Din relaţia (3) rezultă că ecuaţia oricărei sfere raportată faţă de un sistem de axe ortogonale este un polinom de gradul al doilea în x, y şi z avînd coeficienţii lui x^2, y^2, z^2 egali, iar coeficienţii termenilor în xy, xz, yz nuli.

Tot din aceeaşi ecuaţie se constată că dacă x^2, y^2 şi z^2 au fiecare coeficientul 1, atunci jumătăţile cu semn schimbat ale coeficienţilor lui x, y şi z sînt, respectiv, abscisa, ordonata şi cota centrului sferei. Raza sferei se obţine din egalitatea

$$a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = d,$$

de unde rezultă

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}. \tag{13}$$

Dacă $a^2 + b^2 + c^2 > d$, raza R a sferei este un număr real şi diferit de zero, sfera este reală. Dacă $a^2 + b^2 + c^2 = d$, avem $R = 0$, astfel că sfera se reduce la un punct: centrul $I(a, b, c)$, al sferei. Dacă $a^2 + b^2 + c^2 < d$, atunci R este un număr imaginar; se zice în acest caz că sfera este imaginară.

Teorema 1.2. (Ecuaţia sferei în coordonate omogene). *Ecuaţia sferei în coordonate omogene este*

$$AX^2 + AY^2 + AZ^2 + BXT + CYT + DZT + ET^2 = 0.$$

Demonstraţie: Pentru a obţine ecuaţia sferei în coordonate omogene, substituim în ecuaţia generală a sferei (4) pe x, y, z prin $\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T}$, de unde rezultă ecuaţia de coordonate omogene X, Y, Z, T

$$A \cdot \frac{X^2}{T^2} + A \cdot \frac{Y^2}{T^2} + A \cdot \frac{Z^2}{T^2} + B \cdot \frac{X}{T} + C \cdot \frac{Y}{T} + D \cdot \frac{Z}{T} + E = 0$$

sau

$$AX^2 + AY^2 + AZ^2 + BXT + CYT + DZT + ET^2 = 0. \tag{14}$$

Teorema 1.3. (Ecuaţia sferei determinate de patru puncte). *Fie $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$; $M_3(x_3, y_3, z_3)$; $M_4(x_4, y_4, z_4)$ patru puncte nesituate în acelaşi plan şi astfel ca oricare combinaţie de trei puncte din cele* *patru date să nu fie coliniare; în acest caz, ecuaţia sferei circumscrise tetraedrului* $M_1M_2M_3M_4$ este

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (15)$$

Demonstraţie: Această teoremă se demonstrează analog ca şi teorema 1.3. cap. VI.

Exemplu: Să se determine ecuaţia sferei circumscrise tetraedrului $M_1M_2M_3M_4$, unde $M_1(0, 0, 2)$, $M_2(2, -1, 0)$, $M_3(3, 0, 0)$, $M_4(1, 1, 1)$.

Substituind în ecuaţia precedentă valorile date pentru coordonate, obţinem ecuaţia sferei

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$x^2+y^2+z^2-5x+y-5z+6=0.$$

Teorema 1.4. (Ecuaţiile parametrice ale unei sfere.) *Fie sfera de centru $I(a, b, c)$ şi raza R. În acest caz, expresiile*

$$\begin{cases} x = a + R\cos u \sin v \\ y = b + R \sin u \sin v \\ z = c + R \cos v \end{cases} \qquad (16)$$

sînt ecuaţii parametrice ale sferei date.

Demonstraţie: Expresiile coordonatelor unui punct oarecare de pe o sferă în funcţie de doi parametri variabili independenţi constituie ecuaţii parametrice ale sferei. Dat fiind că putem alege cei doi parametri într-o infinitate de moduri, rezultă că putem avea tot atîtea feluri de ecuaţii parametrice. Pentru rezolvarea mai comodă a unor probleme, ne interesează ecuaţii parametrice simple.

Să considerăm o sferă cu centrul $I(a, b, c)$ şi raza R (fig. VII. 1). Prin I ducem Ix', Iy', Iz' paralele cu axele Ox, Oy, Oz şi planul meridian ce trece prin (IM, Iz'). Notăm cu u unghiul format de planul meridian al punctului $M(x, y, z)$ cu planul $x'Iz'$ şi cu v unghiul razei IM cu axa Iz'. În caest caz avem

$$x-a=R\sin v\cos u; \quad y-b=R\sin v\sin u; \quad z-c=R\cos v.$$

Rezultă ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x = a + R \cos u \sin v \\ y = b + R \sin u \sin v \\ z = c + R \cos v. \end{cases} \tag{17}$$

Observaţii. 1° Pentru a obţine toate punctele sferei, parametrul u trebuie să varieze între 0 şi 2π, iar parametrul v între 0 şi π.

2° Substituind în ecuaţiile precedente (17) pe $\operatorname{tg}\frac{u}{2}$ prin λ şi $\operatorname{tg}\frac{v}{2}$ prin μ, obţinem noi ecuaţii parametrice ale sferei

$$x = a + \frac{2R\mu(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)}; \quad y = b + \frac{4R\lambda\mu}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)} \text{ şi}$$

$$z = c + \frac{R(1-\mu^2)}{1+\mu^2}.$$

Teorema 1.5. (Ecuaţia vectorială a sferei.) *Sfera cu centrul C (al cărui vector de poziţie este $\bar{r}_c$) şi raza R are ecuaţia vectorială*

$$f_c(M) \equiv (\bar{r} - \bar{r}_c)^2 - R^2 = 0, \tag{18}$$

unde s-a notat prin $\bar{r}$ vectorul de poziţie al unui punct M oarecare, de pe sferă.

Demonstraţie: Scriind că un punct oarecare M de pe sferă se află la distanţa R de punctul fix C, avem $CM = R$ sau $CM^2 = R^2$ şi prin urmare $(\bar{r} - \bar{r}_c)^2 - R^2 = 0$.

Reciproc, dacă C este un punct fix, iar M variabil astfel ca $(\bar{r} - \bar{r}_c)^2 - R^2 = 0$, atunci M este situat pe sfera cu centrul C şi raza R, pentru că $(\bar{r} - \bar{r}_c)^2 = R^2$ exprimă că distanţa CM este egală cu R.

§ 2. Proprietăţi. Intersecţii

Teorema 2.1. O dreaptă intersectează o sferă în două puncte.

Demonstraţie: Considerăm sfera cu centrul $C(\bar{r}_c)$ şi raza R. Ecuaţia ei este $(\bar{r} - \bar{r}_c)^2 - R^2 = 0$. Dreapta D, oarecare, este definită de un punct $M_0(\bar{r}_0)$ şi de versorul $\bar{u}$. Ecuaţia vectorială a dreptei este $\bar{r} = \bar{r}_0 + \rho\bar{u}$, unde ρ este distanţa de la M_0 la M. Scriind că M este pe sferă (coordonatele sale verifică ecuaţia sferei), obţinem o ecuaţie care dă ρ şi prin urmare posibilitatea de a determina punctul comun dintre dreaptă şi sferă. Ecuaţia în ρ este

$$(\bar{r}_0 + \rho\bar{u} - \bar{r}_c)^2 - R^2 = 0 \quad \text{sau} \quad \rho^2 + 2(\bar{r}_0 - \bar{r}_c)\cdot\bar{u}\rho + (\bar{r}_0 - \bar{r}_c)^2 - R^2 = 0.$$

Notînd $(\bar{r}_0 - \bar{r}_c)^2 - R^2 = P_0$, obţinem ecuaţia mai simplă

$$\rho^2 + 2(\bar{r}_0 - \bar{r}_c)\cdot\bar{u}\rho + P_0 = 0. \tag{19}$$

Rezultă că dreapta intersectează sfera în punctele

$$A\left(2-\frac{1}{\sqrt{3}},\ 1-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ şi } B\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}},\ 1+\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

2° Să se afle punctele de intersecţie a dreptei

$$\begin{cases} 2x-3y-z+2=0 \\ x+2y+3z-6=0 \end{cases}$$

cu sfera de ecuaţie

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z+1=0 \quad (a=2,\ \ b=1,\ \ c=-1).$$

Căutăm două puncte ale dreptei D. Punînd $z=0$, obţinem $x=2$ şi $y=2$; dacă luăm $y=0$, avem $x=0$ şi $z=2$. Aşadar, dreapta poate fi definită de $M_0(x_0=0, y_0=0, z_0=2)$ şi $M_1(x_1=2, y_1=2, z_1=0)$. Parametrii directori ai dreptei sînt: $l=1$, $m=1$, $n=-1$.

Putem lua $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ şi $\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ecuaţia care ne dă ρ_1 şi ρ_2 este, prin urmare,

$$\rho^2+2\left[(0-2)\frac{1}{\sqrt{3}}+(0-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+(2+1)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]\rho+0^2+0^2+2^2-$$
$$-4\cdot 0-2\cdot 0+2\cdot 2+1=0$$

sau

$$\rho^2-4\sqrt{3}\cdot\rho+9=0,$$

cu rădăcinile $\rho_1=\sqrt{3}$ şi $\rho_2=3\sqrt{3}$.

Rezultă că D taie sfera în punctele

$$A\left[0+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}};\ 0+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}};\ 2+\sqrt{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

şi

$$B\left[0+3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}};\ \ 0+3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}};\ \ 2+3\sqrt{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

sau

$$A(1,\ 1,\ 1) \text{ şi } B(3,\ 3,\ -1).$$

Teorema 2.2. *Intersecţia unei sfere cu un plan este un cerc ale cărui ecuaţii sînt*

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0 \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases} \tag{20}$$

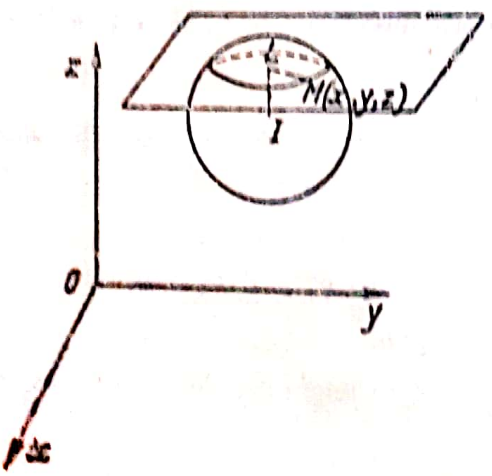

Fig. VII. 3

Demonstraţie: Orice punct comun $M(x, y, z)$ (fig. VII. 3) dintre sfera de centru $I\ (a, b, c)$ şi plan trebuie să verifice simultan atît ecuaţia sferei cît şi a planului, deoarece sistemul (20) dă intersecția dintre sferă și plan. Avînd în vedere că distanța ML de la un punct M de pe intersecție pînă la L piciorul perpendicularei dusă din centrul sferei pe plan este dată de

$$ML^2 = MI^2 - IL^2$$

sau

$$ML^2 = R^2 - \frac{(Aa + Bb + Cc + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

rezultă că intersecția este un cerc, avînd ecuațiile din enunțul teoremei, a cărui rază r este dată de expresia

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{(Aa + Bb + Cc + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad (21)$$

unde R este raza sferei date.

Aria A a cercului de intersecție este dată de expresia

$$A = \pi\left[R^2 - \frac{(Aa + Bb + Cc + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}\right].$$

Observații. 1° Dacă $|Aa + Bb + Cc + D| < R(A^2 + B^2 + C^2)$, atunci r este real; intersecția dintre sferă și plan este în acest caz un cerc real.

2° Dacă $|Aa + Bb + Cc + D| = R(A^2 + B^2 + C^2)$, atunci $r = 0$, astfel că intersecția se reduce la un punct; se spune că planul dat este tangent sferei.

3° Dacă $|Aa + Bb + Cc + D| > R(A^2 + B^2 + C^2)$, numărul r este complex, iar curba de intersecție dintre sferă și plan este imaginară.

4° Intersecția sferei

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

cu planul de la infinit se obține din ecuația sferei scrisă în coordonate omogene

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2aXT - 2bYT - cZT + dT^2 = 0,$$

în care se face $T = 0$, astfel că această intersecție este dată de sistemul

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0 \text{ și } T = 0.$$

Rezultă că orice sferă trece printr-un același cerc imaginar, ale cărui ecuații sînt

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0 \text{ și } T = 0.$$

Acest „cerc“ se numește cercul absolut al spațiului.

Reciproc. Se demonstrează cu ușurință că orice suprafață de gradul al doilea în x, y, z, raportată față de un sistem ortogonal de axe care conține cercul absolut, este o sferă.

Teorema 2.3. *Intersecția a două sfere ale căror ecuații sînt*

$$\begin{cases} S = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \\ S' = x^2 + y^2 + z^2 - 2a'x - 2b'y - 2c'z + d' = 0 \end{cases}$$

este formată din cercul care are ecuaţiile

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \\ &2(a - a')\,x + 2(b - b')\,y + 2(c - c') + d' - d = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

şi din cercul absolut al spaţiului.

D e m o n s t r a ţ i e: Sistemul dat este echivalent cu $S = 0$ şi $S - S' = 0$, care reprezintă, respectiv, o sferă şi un plan. Aşadar, intersecţia dintre cele două sfere este un cerc care are ecuaţiile din enunţ. Dacă ţinem seama că orice sferă trece prin cercul absolut al spaţiului, rezultă că cele două sfere se intersectează după două cercuri, dintre care unul este întotdeauna cercul absolut, iar celălalt poate fi un cerc real, un punct sau un cerc imaginar.

E x e m p l u: Fiind date sferele ale căror ecuaţii sînt

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 2z + 1 = 0, \end{cases}$$

să se determine ecuaţiile intersecţiei, raza şi aria cercului de secţiune.

Ecuaţiile intersecţiei sînt

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z + 1 = 0 \\ y = x. \end{cases}$$

Raza secţiunii este dată de formula

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{(Aa + Bb + Cc + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}} = \sqrt{13 - \frac{(2-3)^2}{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

şi, prin urmare, aria secţiunii este

$$A = \frac{25\pi}{2}.$$

§ 3. Probleme de tangenţă

D e f i n i ţ i a 3.1. Dreapta tangentă la o sferă. Se numeşte o *dreaptă tangentă* la o sferă, acea dreaptă care intersectează sfera în două puncte confundate.

T e o r e m a 3.1. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca dreapta determinată de punctele $M_1(\bar{r}_1)$, $M_2(\bar{r}_2)$ să fie tangentă la sfera avînd ecuaţia vectorială* $f(M) = (\bar{r} - \bar{r}_c)^2 - R^2 = 0$ este

$$[(\bar{r}_1 - \bar{r}_c) \cdot (\bar{r}_2 - \bar{r}_c) - R^2]^2 = f(M_1)\, f(M_2). \tag{23}$$

D e m o n s t r a ţ i e: Această teoremă se demonstrează la fel ca şi teorema 3.1. cap. VI.

D e f i n i ţ i a 3.2. Plan tangent la sferă într-un punct dat. Se numeşte *plan tangent* la sferă într-un punct dat, locul geometric al dreptelor tangente la sferă în punctul dat.

Teorema 3.2. **(Planul tangent la sferă într-un punct dat de pe sferă.)** *Planul tangent la sfera $f(M) = (\bar{r} - \bar{r}_c)^2 - R^2 = 0$ în punctul M_0 de pe sferă are ecuaţia vectorială*

$$\bar{r}_0 \cdot \bar{r} - \bar{r}_c \cdot (\bar{r}_0 + \bar{r}) + \bar{r}_c^2 - R^2 = 0. \tag{24}$$

Demonstraţie: Determinăm planul tangent în punctul $M_0(\bar{r}_0)$ căutînd locul geometric al dreptelor tangente la sfera $f(M) \equiv (\bar{r} - \bar{r}_c)^2 - R^2 = 0$ în punctul $M_0(\bar{r}_0)$ de pe sferă.

Dacă $L(\bar{\lambda})$ este un punct al locului geometric, trebuie ca dreapta care uneşte punctele M_0 şi L să fie tangentă sferei. De aceea, pe baza celor stabilite la teorema 3.1, este necesar să existe relaţia:

$$[(\bar{r}_0 - \bar{r}_c) \cdot (\bar{\lambda} - \bar{r}_c) - R^2]^2 = f(M_0)\, f(L).$$

Ţinînd seama că M_0 este un punct de pe sferă, avem $f(M_0) = 0$ şi prin urmare relaţia precedentă devine

$$(\bar{r}_0 - \bar{r}_c) \cdot (\bar{\lambda} - \bar{r}_c) - R^2 = 0$$

sau

$$\bar{r}_0 \cdot \bar{\lambda} - \bar{r}_c(\bar{r}_0 + \bar{\lambda}) + \bar{r}_c^2 - R^2 = 0,$$

de unde se constată că punctul L verifică ecuaţia

$$\bar{r}_0 \cdot \bar{r} - \bar{r}_c \cdot (\bar{r}_0 + \bar{r}) + \bar{r}_c^2 - R^2 = 0, \tag{25}$$

care este un plan.

Observaţii. 1° Planul tangent la sferă în punctul $M_0(\bar{r}_0)$ este perpendicular pe raza CM_0 a punctului de contact. Într-adevăr, dacă $L(\bar{\lambda})$ este un alt punct al planului tangent, avem simultan:

$$\bar{r}_0 \cdot \bar{r} - \bar{r}_c \cdot (\bar{r}_0 + \bar{r}) + \bar{r}_c^2 - R^2 = 0,$$

$$\bar{r}_0 \cdot \bar{\lambda} - \bar{r}_c \cdot (\bar{r}_0 + \bar{\lambda}) + \bar{r}_c^2 - R^2 = 0,$$

de unde rezultă, prin scăderea celor două relaţii, că avem:

$$(\bar{r}_0 - \bar{r}_c) \cdot (\bar{r} - \bar{\lambda}) = 0,$$

ceea ce demonstrează că raza CM_0 este perpendiculară pe orice dreaptă ML din planul tangent.

2° Raza CM_0 perpendiculară pe planul tangent este normala la sferă în punctul M_0. Ecuaţia vectorială a normalei în M_0 este deci

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \alpha(\bar{r}_0 - \bar{r}_c), \tag{26}$$

unde α este un parametru oarecare.

3° Ecuaţia planului tangent la sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0,$$

raportată la axe rectangulare, în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$, este

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) - c(z + z_0) + d = 0. \tag{27}$$

Aceasta este o consecinţă a teoremei 3.2. Într-adevăr, din date rezultă: $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $\bar{r}_0 = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k}$, $\bar{r}_c = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ şi $\bar{r}_c^2 - R^2 = d$, astfel că

$$\bar{r}_0 \cdot \bar{r} - \bar{r}_c \cdot (\bar{r}_0 + \bar{r}) + \bar{r}_c^2 - R^2 \equiv xx_0 + yy_0 + zz_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) - c(z + z_0) + d,$$

ceea ce era de demonstrat.

Exemplu: Să se scrie ecuaţia planului tangent la sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x + y + z - 4 = 0$$

în punctul $M(1, 2, -1)$.

Aplicînd formula (27), găsim

$$x \cdot 1 + y \cdot 2 + z \cdot (-1) - \frac{3}{2}(x + 1) + \frac{1}{2}(y + 2) + \frac{1}{2}(z - 1) - 4 = 0$$

sau după reduceri

$$x - 5y + z + 10 = 0.$$

Aplicaţie: Să se determine ecuaţiile normalei la sferă în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Din observaţia 2° a teoremei 3.2 rezultă că ecuaţiile carteziene ale normalei în M_0 sînt

$$\frac{x - x_0}{x_0 - a} = \frac{y - y_0}{y_0 - b} = \frac{z - z_0}{z_0 - c}. \tag{28}$$

Teorema 3.3. (Plan tangent la sferă paralel cu un plan dat.) *Ecuaţia planului tangent la sfera*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

paralel cu planul

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

este

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = \varepsilon R\sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

unde $\varepsilon = \pm 1$, *iar* R *este raza sferei.*

Demonstraţie: Dacă notăm cu (x_0, y_0, z_0) coordonatele punctului de contact al planului tangent, ecuaţia va fi dată de (27). Scriem că planul tangent este paralel cu $Ax + By + Cz + D = 0$.

Obţinem relaţiile

$$\frac{x_0 - a}{A} = \frac{y_0 - b}{B} = \frac{z_0 - c}{C} = \frac{\sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2}}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\pm R}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

sau

$$x_0 - a = \frac{\varepsilon AR}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad y_0 - b = \frac{\varepsilon BR}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

$$z_0 - c = \frac{\varepsilon CR}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Sfera S are centrul $I(1, -1,2)$ şi raza $R = 3$. Planul radical are ecuaţia $S' - S \equiv 4x - 6y + 2z + 5 = 0$. Depărtarea d de la centrul I pînă la plan este

$$d = \frac{4 \cdot 1 - 6(-1) + 2 \cdot 2 + 5}{\sqrt{4^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{19}{2\sqrt{14}} < 3,$$

de unde rezultă că sferele se întretaie. Ecuaţia planului secţiunii este $4x - 6y + 2z + 5 = 0$. Secţiunea, care este un cerc, are raza r dată de expresia

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9 - \frac{19^2}{56}} = \sqrt{\frac{143}{56}}.$$

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Să se determine ecuaţia sferei care trece prin punctele $A(1, 0, 0)$, $B(0, -1, 0)$, $C(0, 0, 2)$ şi a cărei rază este $\frac{\sqrt{11}}{2}$.

R. $x^2 + y^2 + z^2 + x - y - z - 2 = 0$

şi

$$9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 19x + 19y - 23z + 10 = 0.$$

2. Să se determine centrul şi raza cercului ale cărui ecuaţii sînt

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 36 \\ 3x + y - z - 9 = 0. \end{cases}$$

R. $C(1, 6, 0)$ şi $r = 5$.

3. Să se scrie ecuaţia unei sfere care trece prin $(0, 3, 1)$ şi intersectează planul xOy după cercul de ecuaţii

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z = 0. \end{cases}$$

R. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$.

4. Să se scrie ecuaţia sferei care are centrul în $M(1, 2, -3)$ şi este tangentă la planul

$$2x - 3y - z - 1 = 0.$$

R. $7(x-1)^2 + 7(y-2)^2 + 7(z+3)^2 = 2$.

5. Să se determine polul planului $2x - y - z - 1 = 0$ faţă de sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0.$$

R. $\left(0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

6. Să se determine λ, astfel ca planul $x + y + z = \lambda$ să fie tangent la sfera $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2 = 0$ şi să se afle coordonatele punctului T de contact.

R. $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 4$; $T_1(-2, 1, -1)$; $T_2(0, 3, 1)$.

7. Să se afle locul geometric al centrelor secţiunilor pe care le determină planele $x - 2y - z + \lambda = 0$ pe sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 1 = 0$.

R. Dreapta de ecuaţii $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z}{1}$.

8. Să se afle locul geometric al polurilor planelor $\alpha x + \beta y + 2\alpha z = 3\alpha + \beta$ faţă de sfera $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 8z - 1 = 0$, ştiind că α şi β sînt parametri variabili.

R. Planul $3x - 2y - 3z - 6 = 0$.

9. Să se scrie ecuaţia unei sfere care trece prin cercul

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 36 \\ 4x + y - z - 9 = 0 \end{cases}$$

şi prin punctul $M(7, -3, 1)$.

R. $x^2 + y^2 + z^2 - 14x - 10y + 2z + 7 = 0$.

10. Să se determine centrul C şi raza r a cercului de secţiune a sferelor

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad \text{şi} \quad x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z = 0.$$

R. $C\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{12}\right)$; $r = \sqrt{\frac{23}{24}}$.

$v = v_0$, obținem un cerc, intersecția planului $v = v_0$ cu cilindrul, iar dacă $u = u_0$, obținem o dreaptă (o generatoare a cilindrului).

Alte curbe, trasate pe o suprafață, apar dacă înlocuim pe v cu o funcție de u. Punînd, de exemplu, $v = k\,u$ în (7), obținem o *elice*. Dacă imaginăm o fișie dreptunghiulară, pe care s-a trasat o dreaptă de pantă k/r, și o înfășurăm pe cilindru, se obține o elice (fig. 22).

Ecuația unei sfere, cu centrul $C(a, b, c)$ și raza R, se obține din condiția $\|\overrightarrow{CM}\| = R$:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2 = 0. \tag{8}$$

Ecuația

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \tag{8'}$$

reprezintă o sferă, dacă și numai dacă $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$. Ecuațiile parametrice ale sferei cu centrul în origine sînt

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \theta \\ y = R \cos \varphi \sin \theta \\ z = R \sin \varphi. \end{cases} \tag{9}$$

Pentru $\varphi = \varphi_0$ se obține un cerc de rază $R \cos \varphi_0$, situat în planul $z = R \sin \varphi_0$, iar pentru $\theta = \theta_0$ se obține un cerc de rază R, situat în planul $y = \operatorname{tg} \theta_0 \cdot x$ (fig. 23).

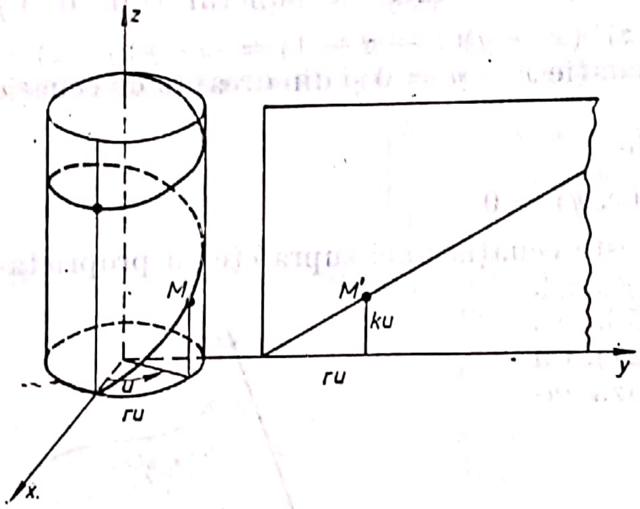

Fig. 22

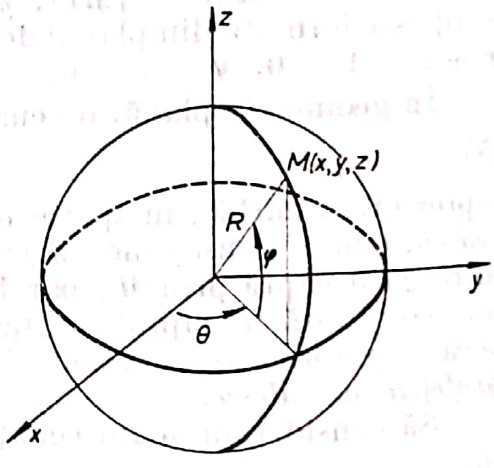

Fig. 23

În general, un cerc se caracterizează analitic printr-un sistem de ecuații

$$\begin{aligned} &(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0 \\ &Ax + By + Cz + D = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

ca intersecția unei sfere cu un plan, unde

$$\frac{(Aa + Bb + Cc + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2} < r^2.$$