

Limite de funcții

Reamintim următoarele:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q^x = \begin{cases} +\infty & : q > 1 \\ 1 & : q = 1 \\ 0 & : |q| < 1 \\ \varnothing & : q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q^x = q^{x_0}, \forall q \in (0, \infty) \quad \text{si} \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0, \forall a \in (0, \infty) \setminus \{1\}, x_0 > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & : a > 1 \\ -\infty & : 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{q^x - 1}{x} = \ln q, \forall q > 0 \quad \text{si} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Exercițiul 1: Stabiliți limitele următoarelor funcții reale în punctele specificate:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} x \cos^2 \frac{x+2}{x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2+1} \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+5}{x^3} \quad d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)(2x+1)}{x^2+3x+5}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} \quad f) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{2x}{4-x^2} \right)$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2+\dots+x^n-(n+1)}{x-1}, n \in \mathbb{N} \quad h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x+x^2+\dots+x^m-m}, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 27} \frac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3} \quad j) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{ax^3+x^2+bx+c} - (bx+c) \right) \forall a, b, c > 0.$$

Exercițiul 2: Stabiliți limitele următoarelor funcții reale în punctele specificate:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{5x+1}{2x+4}} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \sin x - \tan x}{x} \right)^{\frac{\sin x + 2x}{x}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)^{\frac{1}{x^2}} \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x + 1)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad f) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+7}{x} \right)^x$$

Exercițiul 3:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx)^{\frac{1}{n^3 x^2}} \right]$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \ln(1+x) + \ln(1+2x) + \dots + \ln(1+nx))^{\frac{1}{n^2 x}} \right]$$

Exercițiul 4: Să se calculeze următoarele limite:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{3x}.$$