21.10.2020

Reamintim din cursul 3:

relație $\rho = (A, B, R)$, $R \subseteq A \times B$

dom ρ codom graf ρ

Not: $a \rho b \Leftrightarrow (a,b) \in R$

compunerea: $\sigma = (C, D, S)$ atunci:

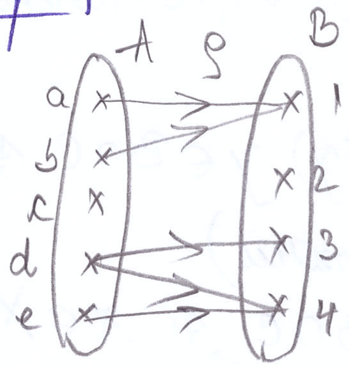
$$\boxed{\sigma \circ \rho = (\underset{\text{dom } \rho}{A}, \underset{\text{codom } \sigma}{D}, S \circ R)}$$ unde pt $(a,d) \in A \times D$ avem:

primul care se aplică

$$\boxed{a \, \sigma \circ \rho \, d \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists x \in \underset{\text{codom } \rho}{B} \cap \underset{\text{dom } \sigma}{C} \text{ a.î. } a \rho x \text{ și } x \sigma d}$$

Secțiunea unei relații relativ la o submulțime (imaginea unei submulțimi printr-o relație)

* Exemplu



$\rho(\{a, b\}) = \{1\}$

$\rho(\{c\}) = \phi$

$\rho(\{d\}) = \{3, 4\}$

$\rho(A) = \{1, 3, 4\}$

$\rho^{-1}(\{1,2\}) = \{a, b\}$

$\rho^{-1}(\{2\}) = \phi$

$\rho^{-1}(B) = \{a, b, d, e\}$

$\rho^{-1}(\{2,3,4\}) = \{d, e\}$

$\rho\langle d \rangle = \{3, 4\}$

$\rho\langle c \rangle = \phi$

Def: Fie $\rho = (A, B, R)$ o relaţie şi fie $X \subseteq A$. Atunci secţiunea lui ρ după submulţimea X (sau imaginea lui X prin relaţia ρ) este submulţimea

$$\rho(X) \overset{def}{=} \{ b \in B \mid \exists x \in X \text{ a.î. } x \rho b \} \subseteq B.$$

adică: dacă $b \in B$, atunci $b \in \rho(X) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists x \in X$ a.î. $x \rho b$

Notaţie în cazul particular $X = \{x\}$: $\rho(\{x\}) \overset{not}{=:} \rho\langle x \rangle \subseteq B$

Propoziţie (secţiunea unei relaţii compuse)

Fie $\rho = (A, B, R)$, $\sigma = (C, D, S)$ relaţii şi fie $X \subseteq A$.

Atunci:

$$\boxed{(\sigma \circ \rho)(X) = \sigma(\rho(X) \cap C)}$$

Dacă avem $\rho(X) \subseteq C$, atunci $(\sigma \circ \rho)(X) = \sigma(\rho(X))$

Dem

Fie $d \in D$. Avem:

$d \in (\sigma \circ \rho)(X) \Longleftrightarrow (\exists x)\ x \in X$ şi $x \sigma \circ \rho d$ (conform definiţiei secţiunii)

$\Longleftrightarrow (\exists x),\ x \in X$ şi $(\exists y)\ y \in B \cap C$ şi $x \rho y$ şi $y \sigma d$ (conform def. compunerii)

$\Longleftrightarrow (\exists y)(\exists x)\ y \in B \cap C$ şi $x \in X$ şi $x \rho y$ şi $y \sigma d$

$\Longleftrightarrow (\exists y)\ y \in B \cap C$ şi $(\exists x)\ x \in X$ şi $x \rho y$, şi $y \sigma d$

(def lui $\rho(X)$)

$\Longleftrightarrow (\exists y)\ y \in B \cap C$ şi $y \in \rho(X)$, şi $y \sigma d$

(def „$\cap$") $\Longleftrightarrow (\exists y)\ y \in \underbrace{B \cap C \cap \rho(X)}_{\rho(X) \cap C}$, şi $y \sigma d$

$\iff d \in \sigma(\rho(\bar{x}) \cap c)$ (cf def. secțiune)

Am folosit tautologiile:

- $A \wedge B \iff B \wedge A$
- $(A \wedge B) \wedge C \iff A \wedge (B \wedge C)$
- $\exists x\,(A \wedge C(x)) \iff A \wedge \exists x\, C(x)$ (2.3.9. (8)) pg 18
- $\exists x \exists y\, A(x,y) \iff \exists y \exists x\, A(x,y)$ (2.3.9.(1)) pg18

Funcții (caz particular de relație)

Def: Relația $f=(A,B,F)$ se numește funcție (relație funcțională) dacă pentru orice $a \in A$, secțiunea $f\langle a \rangle \stackrel{def}{=} \{ b \mid a f b \}$ ($\cap B$) are exact un element, adică $|f\langle a\rangle| = 1$

Not $f\langle a \rangle = \{ f(a) \}$

Obs relația din exemplul* de mai sus nu este funcție pentru că: $|\rho\langle d\rangle| = 2$
$\rho\langle c \rangle = \emptyset$

$$f: A \to B, \quad A \xrightarrow{f} B$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Obs: 1) Relația de egalitate $1_A = (A, A, \Delta_A)$ este o funcție pentru că $1_A\langle x\rangle = \{x\}$; Numim $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$ funcția identică a mulțimii A.

2) Presupunem $A = \emptyset$. Atunci relația $(\emptyset, B, \emptyset)$ este funcție.

Presupunem $A \neq \emptyset$ și $B = \emptyset$. Atunci relația $(A, \emptyset, \emptyset)$ <u>nu</u> e funcție.

3) Egalitatea a două funcții

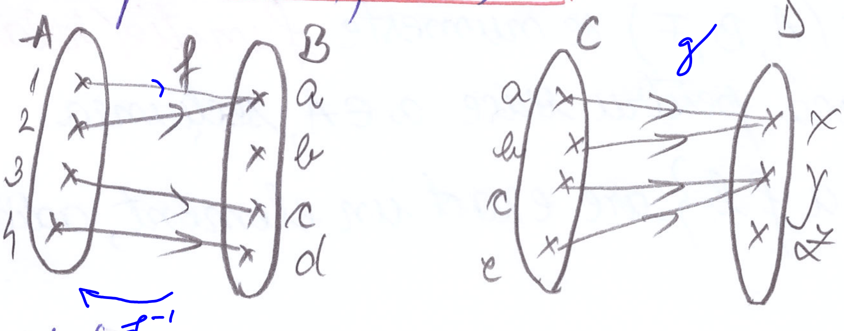
$f : A \to B$, $g : C \to D$

Atunci $f = g \iff \begin{cases} A = C & \text{(au același domeniu)} \\ B = D & \text{(au același codomeniu)} \\ F = G \iff \forall a \in A,\ f(a) = g(a) \end{cases}$

$F = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$

4) Compunerea funcțiilor

$\boxed{\text{Ex:}}$ (*)



În acest caz $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Considerăm relația compusă $g \circ f = (A, D, G \circ F)$

În acest exemplu, $g \circ f$ nu este funcție pt că $(g \circ f)\langle 4 \rangle = \emptyset$.

În general, $g \circ f$ este funcție $\iff f(A) \subseteq C$.

5) Proprietățile compunerii funcțiilor

a) funcția identică este element neutru pentru operația de „$\circ$":

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[rr, bend right, "f \circ 1_A"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "1_B \circ f"'] & B \arrow[r, "1_B"] & B \end{tikzcd}$$

Avem $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$

b) compunerea funcțiilor este asociativă

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h \circ g"'] & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

$h \circ (g \circ f)$ sau $(h \circ g) \circ f$

Avem $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$

6) Inversa unei funcții (ca relație):

$f^{-1}=(B,A,F^{-1})$

Nu este funcție în general. (vezi ex „*")

Imagine și contraimagine (imagine inversă)

(caz particular al secțiunii după o submulțime).

Fie $f:A\to B$

- Dacă $X\subseteq A$ atunci $f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}\subseteq B$

În ex $(*)$ $f(\{1,2,3\})=\{a,c\}$

$\boxed{\text{Caz particular}}$: $f(A)=:\operatorname{Im}f$ (imaginea lui f) În ex$(*)$ $\operatorname{Im}f=\{a,c,d\}$

- Dacă $Y\subseteq B$, atunci $f^{-1}(Y)=\{x\in A\mid f(x)\in Y\}$

în ex$(*)$ $f^{-1}(\{a\})=\{1,2\}$

$f^{-1}(\{b\})=\emptyset$

$f^{-1}(B)=A$ întotdeauna (nu doar în ex$(*)$)

Diagrame comutative

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\ C \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

diagrama este comutativă $\iff f=h\circ g$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, "h"'] & D \end{tikzcd}$$

diag. este com $\iff k\circ f=h\circ g$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g\downarrow & & \uparrow k \\ C & \xrightarrow[h]{} & D \end{array}$$

d. este com. $\Leftrightarrow f = k \circ h \circ g$

Familie de elemente și familie de mulțimi

ex: Considerăm șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = (-1)^n$

Șir: $1, -1, 1, -1, \dots$

mulțimea elementelor șirului: $\{-1, 1\}$

Def a) O familie de elemente din mulțimea A indexată de mulțimea I este o funcție $f: I \to A$.

Not: $f(i) = a_i$, $i \in I$

$f = (a_i)_{i\in I}$

b) O familie de mulțimi indexată de mulțimea I este o funcție $f: I \to \mathcal{P}(U)$

Not: $f(i) = A_i$, $i \in I$

$f = (A_i)_{i\in I}$

Operații

$$\bigcup_{i\in I} A_i \overset{def}{=} \{x \in U \mid \exists i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in U \mid \forall i \in I \ x \in A_i\}$$

Obs $\bigcap_{i\in\emptyset} A_i = U$ $\qquad$ $\bigcup_{i\in\emptyset} A_i = \emptyset$

Funcții injective, surjective, bijective

$\boxed{Def 1}$ Spunem că funcția $f: A \to B$ este <u>injectivă</u> dacă:

$\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

(sau echivalent cu:

$\forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$)

contrapozitive

$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$

$\boxed{Obs}$: f nu e injectivă $\Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in A$ a.î. $f(x_1) = f(x_2)$ și $x_1 \neq x_2$

$\neg(p \to q) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p \wedge \neg q$

(Obs formal:
$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \in A$ și $x_2 \in A$ și $f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2)$

$\boxed{Def 2}$ Funcția $f: A \to B$ este <u>surjectivă</u> dacă $\forall y \in B\ \exists x \in A$ a.î. $f(x) = y$,

adică:

$Im f = B$. (întotdeauna $Im f \subseteq B$)

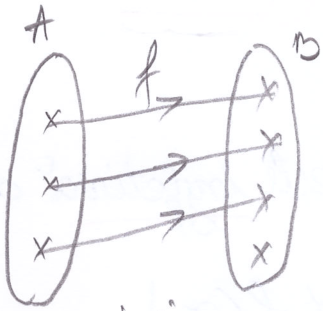
$\boxed{Obs}$: f nu e surjectivă $\Leftrightarrow \exists y \in B\ \forall x \in A\ f(x) \neq y$,

adică $Im f \subsetneq B$.

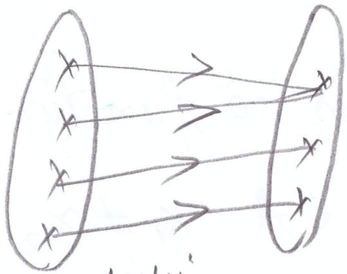
$\boxed{Def 3}$ Funcția $f: A \to B$ se numește <u>bijectivă</u> dacă f este injectivă și surjectivă.

adică: $\forall y \in B\ \exists!\, x \in A$ a.î. $f(x) = y$

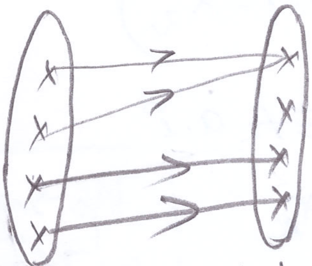
Exemple



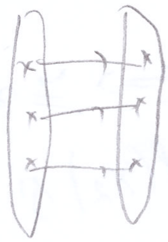
inj.
nu e surj



surj
nu e inj



nu e inj
nu e surj



bij

Tema exercitiile 32 — 48