CURS 5

28.10.2020

Teoremă (Caracterizarea funcțiilor injective)

Fie $f : A \to B$ o funcție. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) f este injectivă

(ii) cu f se poate simplifica la stânga: (proprietatea de simplificabilitate la stânga)

$$A' \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B \qquad \forall \alpha, \beta : A' \to A$$

$$f \circ \alpha = f \circ \beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

(iii) dacă $A \neq \emptyset$ f are inversa la stânga (retractă)

$$A \underset{r}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B \qquad \exists\, r : B \to A \text{ a.î. } r \circ f = 1_A$$

(i) din ordine

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$$

$$(ii) \Rightarrow (i) \Leftrightarrow (iii)$$

Dem

$(i) \Rightarrow (ii)$,

Presupunem că f este inj

Fie $\alpha, \beta : A' \to A$ a.î. $f \circ \alpha = f \circ \beta$

Arătăm că $\alpha = \beta$.

Fie $a' \in A'$. Știm că:

$$(f \circ \alpha)(a') = (f \circ \beta)(a') \Longrightarrow f(\alpha(a')) = f(\beta(a')) \xRightarrow{f \text{ inj}}$$

$$\Rightarrow \alpha(a') = \beta(a')$$

legea reuniunii / separării

ipotezelor

$$(p \to (q \to r)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p \wedge q \to r$$

$$\boxed{\neg(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$, (contrapozitia, red. la abs.)

$$\Updownarrow$$

$\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$

Presupunem că f nu e inj., deci $\exists\, x_1, x_2 \in A$ a.î.

$x_1 \neq x_2$ și $f(x_1) = f(x_2)$

Arătăm că $\exists\, \alpha, \beta : A' \to A$ a.î. $f \circ \alpha = f \circ \beta$ și $\alpha \neq \beta$

Fie $A' = \{x_1, x_2\}$ și fie $\alpha, \beta : A' \to A$, def prin

x	x_1	x_2
$\alpha(x)$	x_1	x_2
$\beta(x)$	x_1	x_1

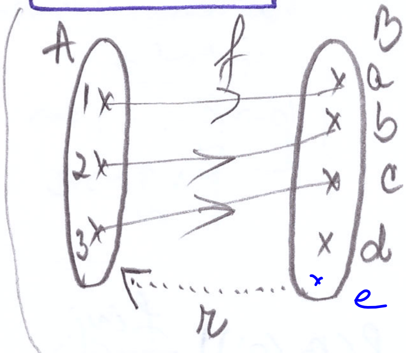
Deci $\alpha \neq \beta$

(există mai multe variante)

$$(f\circ\alpha)(x_1) = f(\alpha(x_1)) = f(x_1)$$
$$(f\circ\alpha)(x_2) = f(\alpha(x_2)) = f(x_2)$$
$$(f\circ\beta)(x_1) = f(\beta(x_1)) = f(x_1)$$
$$(f\circ\beta)(x_2) = f(\beta(x_2)) = f(x_1)$$

Deci $f\circ\alpha = f\circ\beta$

$\underline{(i) \Rightarrow (iii)}$



Exemplu

$r(a) = 1$
$r(b) = 2$
$r(c) = 3$
$r(d) = $ arbitrar (3 posibilități)

Vrem: $r(f(x)) = x \quad \forall x \in A$

am 3 retracte r_1, r_2, r_3

y	a	b	c	d
$r_1(y)$	1	2	3	1
$r_2(y)$	1	2	3	2
$r_3(y)$	1	2	3	3

(sau: am 3^2 posib!)

$\boxed{\text{Dem}}$

Presupunem f injectivă. Definim $r : B \to A$

$$r(b) = \begin{cases} a, & \text{unde } f(a) = b, \text{ dacă } b \in \operatorname{Im} f \\ a_0 \in A & \text{arbitrar, dacă } b \notin \operatorname{Im} f \end{cases}$$

(a este unic det)

Avem
$(r\circ f)(a) = r(f(a)) = r(b) = a$, $\forall a \in A$, unde $b = f(a)$

deci $r \circ f = 1_A$

Tem:
$$\begin{tikzcd} & (i) \arrow[dr, Rightarrow] & \\ (ii) \arrow[ur, Rightarrow] & & (iii) \arrow[ll, Rightarrow, "?"] \end{tikzcd}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Fie $r: B \to A$ a. î. $r \circ f = 1_A$

Arătăm că f inj.

Fie $x_1, x_2 \in A$. Presupunem $f(x_1) = f(x_2)$.

Rezultă că $r(f(x_1)) = r(f(x_2)) \Rightarrow (r \circ f)(x_1) = (r \circ f)(x_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow 1_A(x_1) = 1_A(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

Teorema 2 (caracterizarea funcțiilor surjective)

Fie $f: A \to B$ o funcție. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) f este surjectivă

(ii) Cu f se poate simplifica la dreapta.

$$\begin{tikzcd} B' & B \arrow[l, shift left, "\alpha"'] \arrow[l, shift right, "\beta"] & A \arrow[l, "f"'] \end{tikzcd}$$
! am inversat săgețile

$$A \xrightarrow{f} B \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} B' \qquad \forall \alpha, \beta : B \to B'$$
$$\alpha \circ f = \beta \circ f \Longrightarrow \alpha = \beta$$

(iii) f are inversă la dreapta (secțiune)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, dashed, "s"] \end{tikzcd} \qquad \exists\, s: B \to A \text{ a.î. } f \circ s = 1_B$$

Dem

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Presupunem că f surjectivă și presupunem că $\alpha \circ f = \beta \circ f$.
Arătăm că $\alpha = \beta$. Fie $b \in B$

f surj $\Longrightarrow \exists\, a \in A$ a.î. $f(a) = b$)

Avem $\alpha(b) = \alpha(f(a)) = (\alpha \circ f)(a) \overset{ip}{=} (\beta \circ f)(a) = \beta(f(a)) = \beta(b)$

$\underline{(ii) \Rightarrow (i)}$,

$\Downarrow$

$\underline{\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)}$,

(adică $b_0 \notin \mathrm{Im} f$)

Presupunem că f nu e surj. Deci $\exists\, b_0 \in B$ a.î. $f(a) \neq b_0$, $\forall a \in A$

Arătăm că $\exists\, \alpha, \beta : B \to B'$ a.î. $\alpha \circ f = \beta \circ f$ şi $\alpha \neq \beta$

Fie $B' = B$. Fie $\alpha : B \to B$, $\alpha = 1_B$, deci $\alpha(b) = b$, $\forall b \in B$

Fie $\beta : B \to B$, $\beta(b) = \begin{cases} b, & \text{dacă } b \neq b_0 \\ b_1, & \text{dacă } b = b_0 \end{cases}$ unde $b_1 \neq b_0$

Deci $\alpha \neq \beta$

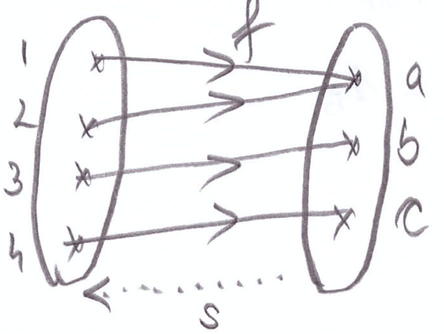
$(\alpha \circ f)(a) = \alpha(f(a)) = f(a)$

$(\beta \circ f)(a) = \beta(\underbrace{f(a)}_{\neq b_0}) = f(a)$, $\forall a \in A$

Deci $\alpha \circ f = \beta \circ f$

Obs Cazul $A = \emptyset$ trebuie tratat separat!

$\underline{(i) \Rightarrow (iii)}$,



Exemplu

$s(b) = 3$

$s(c) = 4$

$s(a) \in \{1, 3\}$

(sunt 2 posibilităţi în acest ex)

$f \circ s = 1_B$.

$\boxed{\text{Dem}}$ Presupunem f surj. Definim $s : B \to A$, $s(b) = a$, unde $a \in f^{-1}(b)$ (adică $f(a) = b$) alegem pe a folosind axioma alegerii

Avem $(f \circ s)(b) = f(s(b)) = f(a) = b$

deci $f \circ s = 1_B$

$\underline{(iii) \Rightarrow (i)}$

Fie s secțiune a lui f. Arătăm că f surj.
Fie $b \in B$.
Fie $a = s(b) \in A$
atunci $f(a) = f(s(a)) = (f \circ s)(b) = 1_B(b) = b$
Deci $b \in \mathrm{Im} f$.

$\boxed{\text{Teorema 3}}$ (caracterizarea funcțiilor bijective)
Funcția $f: A \to B$ este bijectivă $\Leftrightarrow$ f este inversabilă
(adică $\exists\, g: B \to A$ a.î. $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$)

$\boxed{\text{Dem}}$

„$\Longrightarrow$"

Presupunem că f bij. Fie $b \in B$.
$\exists!\, a \in A$ a.î. $f(a) = b$
definim $g: B \to A$, $g(b) = a$
Avem $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a$
$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b$

„$\Longleftarrow$"

g inversa la stânga $\Rightarrow$ f inj
g inversa la dreapta $\Rightarrow$ f surj

$\boxed{\text{Obs}}$ 1) Dacă f bij, atunci inversa este unică!
$g_1 \circ f = 1_A = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$ Not. $g = f^{-1}$

2) f bij $\Leftrightarrow$ relația f^{-1} este funcție

$\boxed{f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a}$

$\boxed{\begin{array}{c}\text{Tema de casă (funcții ...)} \\ \text{ex. } 49-53\end{array}}$

RELAȚII DE ECHIVALENȚĂ

Def1 Fie $\rho = (A, A, R)$ o relație omogenă. Spunem că ρ este o relație de echivalență dacă:

(R) (1) ρ este reflexivă: $\forall x \in A$, $x \rho x$

(adică $1_A \subseteq \rho$)

(T) (2) ρ este tranzitivă: $\forall x, y, z \in A$,

$x \rho y$ și $y \rho z \Rightarrow x \rho z$

(adică $\rho \circ \rho \subseteq \rho$)

(S) (3) ρ este simetrică: $\forall x, y \in A$, $x \rho y \Rightarrow y \rho x$

(adică $\rho = \rho^{-1}$)

Obs: (1)+(2) = relație de preordine

Exemple

1) relația de egalitate

$1_A = (A, A, \Delta_A)$ este relație de echivalență

2) relația de divizibilitate în $\mathbb{Z}$:

$a \mid b \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists x \in \mathbb{Z}$ a.î. $b = ax$

(R) (verificăm reflexivitatea)

$a \mid a$ adevărat pt că $a = 1 \cdot a$

(T) pres. $a \mid b$ și $b \mid c$. Atunci $\exists x, y \in \mathbb{Z}$ a.î.

$b = ax$ și $c = by$

$\Rightarrow c = axy \Rightarrow a \mid c$

(S) pres. $a|b$. În general nu rezultă $b|a$!

$3|6$ și $6\nmid 3$. Deci relația "|" este doar preordine.

$\boxed{\text{obs}}$: $0|a \iff \exists x: a = 0\cdot x \Rightarrow a = 0$

$\boxed{\text{0:0 nu are sens} \\ \text{a | 0 adevărat, } \forall a}$

3) relația de congruență modulo n pe $\mathbb{Z}$

pt $a, b \in \mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{N}$ avem $a \equiv b \pmod n \overset{def}{\iff} n | b-a$

(R) $a \equiv a \pmod n \iff n | a-a$

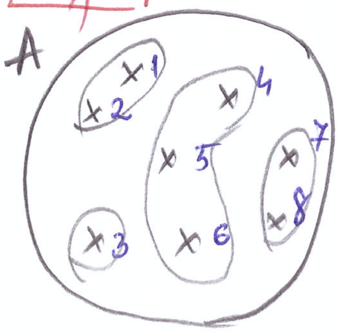
(T) $a \equiv b \pmod n$, $b \equiv c \pmod n \Rightarrow n | b-a$, $n | c-b \Rightarrow$

$\Rightarrow n | c-a \Longrightarrow a \equiv c \pmod n$.

(S) $a \equiv b \pmod n \Rightarrow n | b-a \Rightarrow n | a-b \Rightarrow b \equiv a \pmod n$

deci relația de congruență modulo n, $\equiv \pmod n$ este relație de echivalență pe $\mathbb{Z}$

$\boxed{\text{Def 2}}$ O mulțime $\pi \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ (adică o mulțime de submulțimi nevide ale lui A) se numește partiție a lui A dacă $\forall x \in A$ $\exists! B \in \pi$ a.î. $x \in B$.



Altfel spus:

$$\begin{cases} (1) & \bigcup_{B \in \pi} B = A \\ (2) & \forall B, B' \in \pi, B \neq B' \Rightarrow B \cap B' = \emptyset \end{cases}$$

Mulțimile $B \in \pi$ se numesc clasele partiției π.

Teorema 1

Fie π o partiție a mulțimii A. Definim pe A relația ρ_π astfel: $\forall x, y \in A$

$x \rho_\pi y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists B \in \pi$ a.î. $x, y \in B$.

(x și y aparțin aceleiași clase) → Atunci ρ_π este relație de echivalență pe A.

Exemplu:

$\rho_\pi = (A, A, R_\pi)$ unde $R_\pi = \{(1,1), (2,2), (2,1), (1,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (4,5), (4,6), (5,4), (6,4), (5,6), (6,5), (7,7), (8,8), (7,8), (8,7)\}$

Teorema 2

Fie $\rho = (A, A, R)$ o relație de echivalență pe A. Fie $x, y \in A$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) $x \rho y$

(ii) $y \in \rho\langle x \rangle \overset{def}{=} \{x' \in A \mid x \rho x'\}$

(iii) $\rho\langle x \rangle = \rho\langle y \rangle$

(iv) $\rho\langle x \rangle \cap \rho\langle y \rangle \neq \emptyset$

Obs: $\forall x \in A$ $x \in \rho\langle x \rangle$ (refl)

– două clase diferite sunt disjuncte!

Obs Not.:

$A/\rho = \{\rho\langle x \rangle \mid x \in A\}$

Teorema 2 spune că A/ρ este o partiție a lui A.

Def Partiția $A/\rho = \{\rho\langle x \rangle \mid x \in A\}$ se numește mulțimea cât (factor) a lui A în raport cu relația de echivalență ρ (modulo ρ)   not $\rho\langle x \rangle = [x]_\rho$

$\boxed{\text{Dem teorema 2}}$

(clasa lui x modulo ρ)

(i)$\Leftrightarrow$(ii),

din def. secțiunii $\rho\langle x\rangle$

(i) $\Rightarrow$ (iii),

este suficient să arătăm că $\rho\langle x\rangle \subseteq \rho\langle y\rangle$ pt că rel ρ este simetrică

Fie $z \in \rho\langle x\rangle$. Deci $x\rho z$

Avem (din ip.) $x\rho y \underset{\text{(simetrie)}}{\Rightarrow} y\rho x$

Din tranzitivitate $\Rightarrow y\rho z \Rightarrow z \in \rho\langle y\rangle$

(iii) $\Rightarrow$ (i),

Presupunem $\rho\langle x\rangle = \rho\langle y\rangle$

Avem $y\rho y$ din (R)

Deci $y \in \rho\langle y\rangle$. Deci $y \in \rho\langle x\rangle$, deci $x\rho y$

(i) $\Rightarrow$ (iv),

Din $x\rho y$ avem $y \in \rho\langle x\rangle$

Din (R) avem $y \in \rho\langle y\rangle$ deci $y \in \rho\langle x\rangle \cap \rho\langle y\rangle$

Deci $\rho\langle x\rangle \cap \rho\langle y\rangle \neq \emptyset$

(iv) $\Rightarrow$ (i),

Fie $z \in \rho\langle x\rangle \cap \rho\langle y\rangle$

Deci $x\rho z$ și $y\rho z$

Din (S) avem $z\rho y$

Din (T) avem $x\rho y$

Obs

- Fie Π o partiție.
Atunci $A/\rho_{\Pi} = \Pi$

- Fie ρ rel. de echivalență pe A.
Atunci A/ρ este partiție
Avem $\rho_{A/\rho} = \rho$

Temă de casă (rel. de echiv.)
ex. 67 — 74