17.11.2020

Seminar 7 gr. 111.

① Să se calculeze cosinusul unghiului format de dreptele:

$$d_1: \begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0 \\ 2x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases}, \quad d_2: \begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0 \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0 \end{cases}$$

Soluție

p_1	q_1	r_1
1	-1	-4
2	1	-2

$$p_1 = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

$$q_1 = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

$$r_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\Rightarrow \vec{d_1}(6, -6, 3) \quad \text{sau} \quad \vec{d_1'}(2, -2, 1)$$

p_2	q_2	r_2
1	-6	-6
2	2	9

$$p_2 = \begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = -42$$

$$q_2 = -\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = -21$$

$$r_2 = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 14$$

$$\Rightarrow \vec{d_2}(-42, -21, 14) \quad \text{sau} \quad \vec{d_2'}(6, 3, -2)$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{d_1'} \cdot \vec{d_2'}}{\|\vec{d_1'}\| \cdot \|\vec{d_2'}\|} = \frac{2\cdot 6 - 2\cdot 3 + 1 - 2}{\sqrt{4+4+1} \cdot \sqrt{36+9+4}} = \frac{4}{21}.$$

sau

$$\cos\varphi = \frac{\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}}{\|\vec{d_1}\| \cdot \|\vec{d_2}\|} = \frac{6\cdot(-42)+(-6)\cdot(-21)+3\cdot 14}{\sqrt{36+36+9} \cdot \sqrt{42^2+21^2+14^2}} =$$

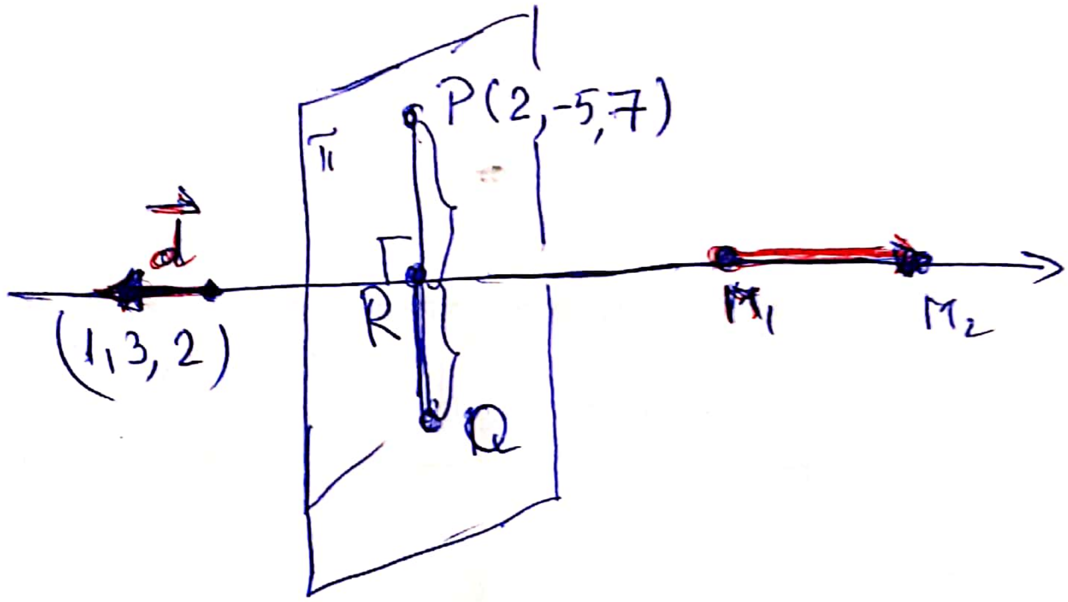
$$= \frac{21(-12+6+2)}{\sqrt{9(4+4+1)}\,\sqrt{7^2(36+9+4)}} = \frac{\cancel{21}\cdot(-4)}{\cancel{21}\cdot 21}$$

$$= -\frac{4}{21}.$$

(2) Găsiți coordonatele simetricului Q al punctului $P(2,-5,7)$ în raport cu dreapta determinată de punctele $M_1(5,4,6)$ și $M_2(-2,-17,-8)$.

Soluție Vectorul director al dreptei M_1M_2 este: $\overrightarrow{M_1M_2}(-2-5, -17-4, -8-6) =$

$= \overrightarrow{M_1M_2}(-7, -21, -14)$ sau alt vector director este $\vec{d}(1,3,2)$.



Ecuația planului Π care trece prin P și este perpendiculară pe dreapta $d = M_1M_2$ este:

$$\Pi: 1(x-2)+3(y+5)+2(z-7)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+3y+2z-2+15-14=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x+3y+2z-1=0}$$

intersecția R dintre d și Π este dată de sistemul:

$$\begin{cases} d: \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-6}{2} = t \\ \Pi: x+3y+2z-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t+5 \\ y = 3t+4 \\ z = 2t+6 \\ x+3y+2z-1=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$t+5+3(3t+4)+2(2t+6)-1=0$

$t+9t+4t+5+12+12-1=0$

$14t+28=0 \Leftrightarrow t=-2$

$\Rightarrow \begin{cases} x_R = 3 \\ y_R = -2 \\ z_R = 2 \end{cases}$

<u>Observație</u> R este proiecția lui P pe dreapta d.

$\Rightarrow x_R = \frac{x_P + x_Q}{2} \Leftrightarrow 3 = \frac{2+x_Q}{2} \Rightarrow \boxed{x_Q = 4}$

$y_R = \frac{y_P + y_Q}{2} \Leftrightarrow -2 = \frac{-5+y_Q}{2} \Rightarrow \boxed{y_Q = 1}$

$z_R = \frac{z_P + z_Q}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{7+z_Q}{2} \Rightarrow \boxed{z_Q = -3.}$

3. Verificați că dreptele

$d_1: \begin{cases} 2x+2y-z-10=0 \\ x-y-z-22=0 \end{cases}, \quad d_2: \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$

sunt paralele și calculați distanța dintre ele.

Soluție

p_1	q_1	r_1
2	2	-1
1	-1	-1

$$p_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$q_1 = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$r_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

deci $\vec{d_1}(-3, 1, -4) = -\vec{d_2}(3, -1, 4)$.

Distanța dintre două drepte paralele este distanța de la orice punct al unei drepte la cealaltă dreaptă.

Punctul $P(-7, 5, 9)$ aparține dreptei d_2.

Rezolvăm sistemul care determină dreapta d_1 pentru a găsi două puncte distincte oarecare pe ea.

$$\begin{cases} 2x + 2y = \alpha + 10 \\ x - y = \alpha + 22 \end{cases}$$

unde $z = \alpha$ este necunoscută secundară.

$4x = 3\alpha + 54 \Rightarrow x = \dfrac{3\alpha+54}{4}$

$4y = -\alpha - 32 \Rightarrow y = -\dfrac{\alpha+34}{4}$

deci $S = \left\{ \left(\dfrac{3\alpha+54}{4}, -\dfrac{\alpha+34}{4}, \alpha \right) \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

pentru $\alpha = 2$ rezultă

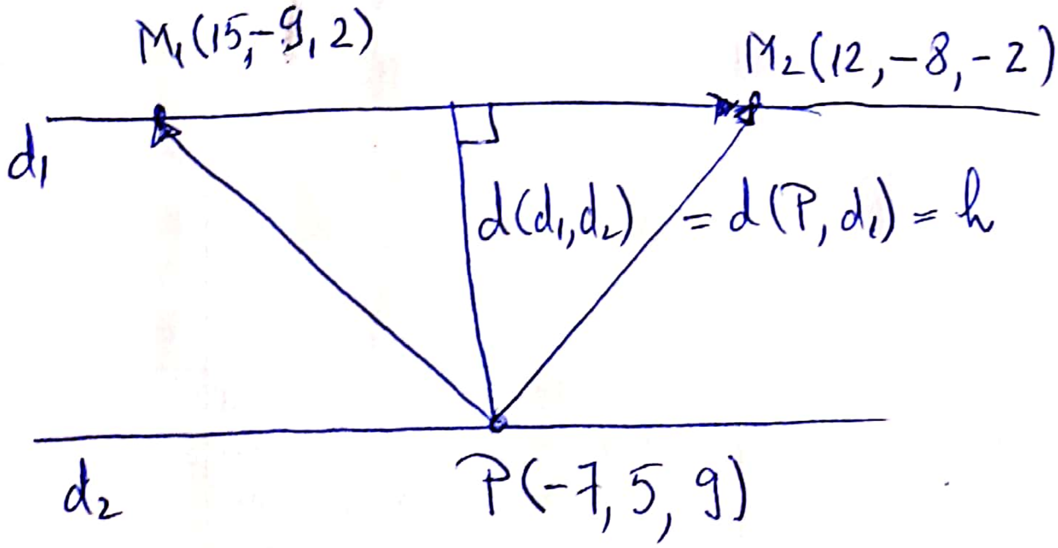
$M_1(15, -9, 2) \in d_1$

pentru $\alpha = -2$ rezultă

$M_2(12, -8, -2) \in d_1$.

Distanța $d(d_1, d_2) = d(P, d_1) = h =$

$$= \frac{2 \cdot A[PM_1M_2]}{M_1M_2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{PM_1} \times \overrightarrow{PM_2}\|}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|}$$



$\overrightarrow{PM_1}(15+7, -9-5, 2-9) \Leftrightarrow \overrightarrow{PM_1}(22, -14, -7)$

$\overrightarrow{PM_2}(12+7, -8-5, -2-9) \Leftrightarrow \overrightarrow{PM_2}(19, -13, -11)$

$$\overrightarrow{PM_1} \times \overrightarrow{PM_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 22 & -14 & -7 \\ 19 & -13 & -11 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -14 & -7 \\ -13 & -11 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 22 & -7 \\ 19 & -11 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 22 & -14 \\ 19 & -13 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 13 & 11 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + (22 \cdot 11 - 7 \cdot 19)\vec{j} - (22 \cdot 13 - 19 \cdot 14)\vec{k}$$

$$= 63 \cdot \vec{i} + 109 \vec{j} - 20 \vec{k}$$

$$\|\overrightarrow{PM_1} \times \overrightarrow{PM_2}\| = \sqrt{63^2 + 109^2 + 20^2} =$$

$$= \sqrt{3969 + 11.881 + 400} = \sqrt{16250}$$

$$\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \sqrt{(12-15)^2 + (-8+9)^2 + (-2-2)^2} =$$

$$= \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26}$$

$$\Rightarrow d(d_1, d_2) = \sqrt{\frac{16250}{26}} = \sqrt{625} = 25.$$

4) . Găsiți ~~...~~ coordonatele proiecției punctului $P(3,-4,-2)$ pe planul determinat de dreptele paralele

$$d_1: \frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4} \text{ și } d_2: \frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}.$$

Soluție

punctul $M_1(5,6,-3) \in d_1$

$M_2(2,3,-3) \in d_2$

Planul este determinat de vectorii

$\vec{d_1} = \vec{d_2}$ de coordonate $(13, 1, -4)$

și $\overrightarrow{M_1M_2}(2-5, 3-6, -3+3) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2}(-3,-3,0)$

$\Leftrightarrow (1, 1, 0)$

Ecuația planului:

$$\Pi: \begin{vmatrix} x-5 & y-6 & z+3 \\ 13 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot (x-5) - \begin{vmatrix} 13 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}(y-6) + \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}(z+3) = 0$$

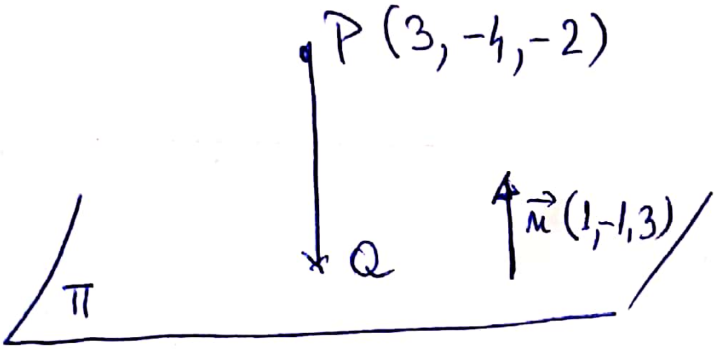
$$4(x-5) - 4(y-6) + 12(z+3) = 0 \quad |:4$$

$$x-5-y+6+3z+9=0$$

$$\Pi: x-y+3z+10=0$$

Vectorul normal al planului este

$\vec{n}(1,-1,3)$



Perpendiculara din P pe planul π are ecuațiile:

$$d: \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+2}{3} = t$$

$$d: \begin{cases} x = t+3 \\ y = -t-4 \\ z = 3t-2 \end{cases}$$

Intersecția lui d cu π este Q – proiecția lui P pe π.

$$x - y + 3z + 10 = 0$$

$$\Rightarrow t+3+t+4+9t-6+10=0$$

$$\Leftrightarrow 11t+11=0 \Rightarrow t=-1$$

$$\Rightarrow Q(2,-3,-5).$$

5. Calculați distanța dintre dreptele:

$$d_1: \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2} \text{ și } d_2: \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$$

Soluție. $d(d_1,d_2) = \dfrac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{d_1}, \vec{d_2})|}{\|\vec{d_1} \times \vec{d_2}\|}$,

$\left(\dfrac{\text{Volum}}{A_{\text{bazei}}}\right)$, unde:

$M_1(-7, -4, -3)$

$M_2(21, -5, 2)$ $\Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2}(28, -1, 5)$

$\vec{d}_1(3, 4, -2)$

$\vec{d}_2(6, -4, -1)$

$$|(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{d}_1, \vec{d}_2)| = \left| \begin{vmatrix} 28 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \left| \begin{vmatrix} 58 & -21 & 0 \\ -9 & 12 & 0 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} \right| = |(-1)| \cdot \left| \begin{vmatrix} 58 & -21 \\ -9 & 12 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= |58 \cdot 12 - 9 \cdot 21| = 3 \cdot |232 - 63| = 3 \cdot 169$$

$$\vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} -$$

$$- \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} \vec{k} = -12\vec{i} - 9\vec{j} - 36\vec{k}$$

$$\|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2\| = \sqrt{144 + 81 + 36 \cdot 36} = 3\sqrt{16 + 9 + 144} =$$

$$= 3\sqrt{169} = 3 \cdot 13$$

$$\Rightarrow d(d_1, d_2) = \frac{3 \cdot 169}{3 \cdot 13} = 13.$$