CURS 7

Subspaţii, subspaţiu generat. Transformări liniare

În cele ce urmează, $(K, +, \cdot)$ este un corp comutativ (dacă nu menţionăm altceva).

Reamintim din cursul anterior:

• O pereche formată dintr-un grup abelian $(V, +)$ şi o operaţie externă $\cdot : K \times V \to V$ este K-**spaţiu vectorial (liniar)** dacă verifică următoarele axiome: pentru orice $\alpha, \beta \in K$ şi $x, y \in V$,

1) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
3) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;
4) $1x = x$.

• Fie V un K-spaţiu vectorial. O submulţime $A \subseteq V$ se numeşte **subspaţiu** al lui V ($A \leq_K V$) dacă

i) $a_1, a_2 \in A \Rightarrow a_1 + a_2 \in A$,
ii) $\alpha \in K$, $a \in A \Rightarrow \alpha a \in A$

şi A este K-spaţiu vectorial în raport cu operaţiile induse.

vectorul nul (el. nul din V)

• Dacă A este un subspaţiu al K-spaţiului vectorial V, atunci $0 \in A$.

Practic, când arătăm că o submulţime a unui spaţiu vectorial este subspaţiu aplicăm următoarea:

Teorema 1. (Teorema de caracterizare a subspaţiului)
Fie V un K-spaţiu vectorial şi $A \subseteq V$. Sunt echivalente următoarele afirmaţii:
1) A este subspaţiu al lui V.
2) A verifică condiţiile:
   α) $0 \in A$;
   β) $a_1, a_2 \in A \Rightarrow a_1 - a_2 \in A$;
   γ) $\alpha \in K$, $a \in A \Rightarrow \alpha a \in A$. ← stab. rel. la op. externă
3) A verifică condiţiile:
   α) $0 \in A$;
   β') $a_1, a_2 \in A \Rightarrow a_1 + a_2 \in A$; ← stab. rel. la op. internă
   γ) $\alpha \in K$, $a \in A \Rightarrow \alpha a \in A$.
4) A verifică condiţiile:
   α) $0 \in A$;
   β'') $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, $a_1, a_2 \in A \Rightarrow \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \in A$.

comb. liniară de 2 elem. din A

$1) \overset{\Leftarrow}{\Rightarrow} 2) \Leftrightarrow 3)$

$3) \Leftrightarrow 4)$

op. indusă

Demonstraţie. $1) \Rightarrow 2)$ $A \leq_K V \Longrightarrow A$ p.s. în $(V,+)$ și $(A,+)$ grup (abelian)

$\Longleftrightarrow A$ subgrup în $(V,+)$ $\Longrightarrow \begin{cases} 0 \in A \ (\text{este } \alpha)) \\ \forall a_1, a_2 \in A,\ a_1 + a_2 \in A \ \ \beta') \\ \forall a \in A,\ -a \in A \end{cases} \Longrightarrow \forall a_1, a_2 \in A,\ a_1, -a_2 \in A$

deci $\forall a_1, a_2 \in A$, $a_1 - a_2 = a_1 + (-a_2) \in A$ (este β))
Cond γ) rezultă din def. $A \leq_K V$.

$2) \Rightarrow 3)$ $0, a_2 \in A \Longrightarrow -a_2 = 0 - a_2 \in A$
$\forall a_1, a_2 \in A$, $a_1, -a_2 \in A \overset{\beta)}{\Longrightarrow} a_1 + a_2 = a_1 - (-a_2) \in A \Longrightarrow \beta')$

3) $\Rightarrow$ 2) β') are loc

Din γ) $\Longrightarrow$ $-a_2 = \underbrace{(-1)}_{\in K} a_2 \in A, \forall a_2 \in A$

$\forall a_1, \underset{\substack{\| \\ -a_2}}{a_3} \in A \xrightarrow{\beta')} a_1 + a_3 \in A$ | $\Longrightarrow \forall a_1, a_2 \in A, \; a_1 - a_2 = a_1 + (-a_2) \in A$

op. indusă

2) $\Rightarrow$ 1) $\alpha) + \beta) \overset{?}{\Longrightarrow}$ A subgrup al lui $(V,+)$ $\Longrightarrow$ $(A,+)$ grup abelian

$0, a_2 \in A$ arbitrar $\Longrightarrow -a_2 = \underbrace{0 - a_2}_{\text{în } (V,+)} \in A$

$\forall a_1, \underset{\substack{\| \\ -a_2}}{a_3} \in A, \; a_1 - a_3 \in A \Longrightarrow \underbrace{\forall a_1, a_2 \in A, \; a_1 + a_2 = a_1 - (-a_2) \in A}$

A este p.s. în $(V,+)$

op. indusă pe A

$\Longrightarrow$ + este asociativă (com.)

0 el. neutru în $(A,+)$

$\forall a_2 \in A, \; -a_2 \in A$ deci orice elem. din A are opus. | $\Longrightarrow (A, +)$ grup

op. ind.

3) $\Rightarrow$ 4) Fie $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, $a_1, a_2 \in A \xrightarrow{\gamma)} \alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2 \in A \xrightarrow{\beta')} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \in A$ (este β''))

4) $\Rightarrow$ 3) Luând în β'') $\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \Longrightarrow \beta')$

β'') $\alpha_2 = 0, \; \alpha_1 = \alpha, \; a_1 = a$ arbitrare $\Longrightarrow \gamma)$

Observaţiile 2. a) Dacă V este un K-spaţiu vectorial şi $A \subseteq V$, atunci A este un subspaţiu dacă şi numai dacă A este subgrup al grupului $(V, +)$ şi A verifică condiţia ii) ($\Longleftrightarrow \gamma)$) .

Vezi dem. T. de caracterizare.

b) Cum A este subgrup al grupului $(V, +)$ dacă şi numai dacă

$$A \neq \emptyset \text{ şi } a_1 - a_2 \in A, \forall a_1, a_2 \in A,$$

caracterizarea de mai sus rămâne adevărată dacă înlocuim condiţia α) cu

α') $A \neq \emptyset$.

Temă: Rescrieţi T. de caract. a subspaţiului înloc. α) cu α').

Exemplele 3. a) Pentru orice spaţiu vectorial V submulţimile $\{0\}$ şi V sunt subspaţii ale lui V. Un subspaţiu al lui V diferit de $\{0\}$ şi V se numeşte **subspaţiu propriu**.

b) Fie K-spaţiul vectorial al polinoamelor $K[X]$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Se constată uşor că

$$P_n(K) = \{f \in K[X] \mid \text{grad}\, f \leq n\}$$

verifică pe α), β'), γ). Deci $P_n(K)$ este un subspaţiu al lui $K[X]$. (la seminar)

c) Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval. Mulţimea $\mathbb{R}^I = \{f \mid f : I \to \mathbb{R}\}$ este $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial în raport cu operaţiile definite prin: la seminar.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

unde $f, g \in \mathbb{R}^I$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Submulţimile

$$C(I,\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}^I \mid f \text{ continuă pe } I\},\ D(I,\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}^I \mid f \text{ derivabilă pe } I\}$$

sunt subspaţii ale lui $\mathbb{R}^I$ pentru că sunt nevide şi

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f, g \in C(I,\mathbb{R}) \Rightarrow \alpha f + \beta g \in C(I,\mathbb{R});$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f, g \in D(I,\mathbb{R}) \Rightarrow \alpha f + \beta g \in D(I,\mathbb{R}).$$

Teorema 4. Dacă $(A_i)_{i\in I}$ este o familie nevidă de subspaţii ale K-spaţiului vectorial V, atunci

$$\bigcap_{i\in I} A_i \leq_K V.$$

Demonstraţie. $I \neq \emptyset$, $0 \in A_i$, $\forall i \in I \Longrightarrow 0 \in \bigcap_{i\in I} A_i$ ⇒ α) e verif. de $\bigcap_{i\in I} A_i$

Arătăm că $\bigcap_{i\in I} A_i$ verifică β'').

Fie $\alpha, \beta \in K$, $x, y \in \bigcap_{i\in I} A_i$, $\alpha x + \beta y \in \bigcap_{i\in I} A_i$

$\Longrightarrow x, y \in A_i, \forall i \in I \overset{A_i \leq_K V}{\underset{\beta'')}{\Longrightarrow}} \alpha x + \beta y \in A_i, \forall i \in I \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \alpha x + \beta y \in \bigcap_{i\in I} A_i.$

Din Teorema 4 rezultă că dacă $X \subseteq V$ atunci

o fam. nevidă (conţine pe V)

$$\bigcap\{A \leq_K V \mid X \subseteq A\} \leq_K V \tag{1}$$

este un subspaţiu al lui V notat cu $\langle X \rangle$ numit **subspaţiul generat** de X. Din (1) rezultă că

$$\langle X \rangle \textit{ este cel mai mic subspaţiu al lui } V \textit{ care include pe } X.$$

Dacă $V = \langle X \rangle$ atunci vom spune că X este un **sistem de generatori** al lui V sau că X generează pe V. Dacă există o submulţime finită $X \subseteq V$ astfel încât $V = \langle X \rangle$, atunci spunem că spaţiul V este de **tip finit** sau **finit generat**. Dacă $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, vom nota $\langle X \rangle$ cu $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

Observaţia 5. Din definiţia subspaţiului generat rezultă:

a) $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$; $(= \langle\{0\}\rangle)$

b) $X, Y \subseteq V$, $X \subseteq Y \Rightarrow \langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$; (din def. $\cap$)

c) $A \leq_K V \Rightarrow \langle A \rangle = A$;

d) $X \subseteq V \Rightarrow \langle\langle X \rangle\rangle = \langle X \rangle$.

Definiţia 6. Fie V un K-spaţiu vectorial şi $X \subseteq V$, $X \neq \emptyset$. O sumă de forma

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K,\ x_1, \ldots, x_n \in X)$$

se numeşte **combinaţie liniară** de elemente din X.

Teorema 7. Dacă V este un K-spaţiu vectorial şi $\emptyset \neq X \subseteq V$, atunci $= M$

$$\langle X \rangle = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \mid \alpha_k \in K,\ x_k \in X,\ k = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}^*\} \tag{2}$$

adică $\langle X \rangle$ este format din toate combinaţiile liniare de elemente din X.

Demonstraţie. Notăm M mulțimea din dreapta din (2). Verificăm:

$\underline{I}$ $M \leq_K V$ (*)

$\underline{II}$ $X \subseteq M$ (*)

$\underline{III}$ $A \leq_K V,\ X \subseteq A \Longrightarrow M \subseteq A$ (*)

$\underline{I})$ $\alpha)$ $0 \in M$ ($\exists\, x_0 \in X$ deoarece $X \neq \emptyset \Longrightarrow \underset{\text{vectorul}}{0} = \underset{\text{scalar}}{0} \cdot x_0 \in M$)

(O comb. liniară de comb. liniare de elem. din X este o comb. liniară de elem. din X — temă)

$\beta')$ Fie $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n,\ \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n \in M$ arbitrare ($x_1, x_n \in X$) (după caz putem adăuga termeni nuli în cele 2 scrieri încât să apară aceiași vectori din X)

$$(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) + (\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n) = \underbrace{(\alpha_1+\beta_1)x_1 + \ldots + (\alpha_n+\beta_n)x_n}_{\text{comb. liniară de el. din } X} \in M.$$

$\gamma)$ Fie $\alpha_1 \underset{X}{x_1} + \ldots + \alpha_n \underset{X}{x_n} \in M$, $\alpha \in K$

$$\alpha(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) = \underbrace{(\alpha\alpha_1)x_1 + \ldots + (\alpha\alpha_n)x_n}_{\text{comb. liniară de el. din } X} \in M$$

$\Longrightarrow M \leq_K V.$

$\underline{II})$. Fie $x \in X$, $x = \underset{K}{1} \cdot \underset{X}{x} \in M$

$\underline{III})$. Fie $v = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \in M$ oarecare $\Longrightarrow$ v este o comb. liniară de vectori din A ($x_1, x_n \in X \subseteq A$)

$\Downarrow A \leq_K V$

$v \in A$

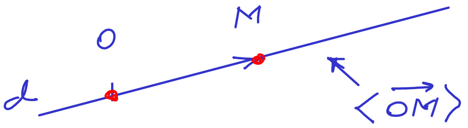
$\underline{\text{Temă}}$: $A \leq_K V$, $x_1, \ldots, x_n \in A$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ $\xrightarrow{\text{ind. după } n}$ $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \in A$

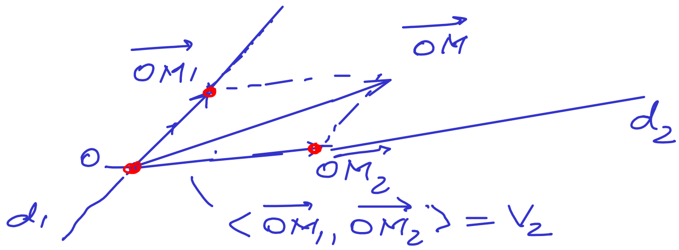
Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A_1, \ldots, A_n \subseteq V$, notăm

$$A_1 + \cdots + A_n = \{a_1 + \cdots + a_n \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Corolarul 8. a) Dacă $x \in V$ atunci $\langle x \rangle = \{\underline{\alpha x} \mid \alpha \in K\} = Kx$.
b) Dacă $x_1, \ldots, x_n \in V$ atunci $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = Kx_1 + \cdots + Kx_n$. $\Longleftarrow \langle x_1,\ldots,x_n\rangle = \{\alpha_1 \underline{x_1} + \cdots + \alpha_n \underline{x_n} \mid \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in K\}$

Observaţiile 9. (şi exemple...)
a) Fie V_2 $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial al vectorilor din plan cu originea într-un punct O. Subspaţiile lui V_2 sunt: $\{0\}$, V_2 şi dreptele care trec prin O (mai exact mulţimile de vectori de poziţie ai punctelor situate pe aceste drepte).





b) Pentru $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial V_3 peste al vectorilor din spaţiu cu originea într-un punct O, subspaţiile lui sunt: $\{0\}$, V_3, dreptele care trec prin O (mai exact mulţimile de vectori de poziţie ai punctelor situate pe aceste drepte) şi planele care trec prin O (mulţimile de vectori de poziţie conţinuţi în aceste plane).
c) În general reuniunea a două subspaţii ale unui spaţiu vectorial nu este un subspaţiu. De exemplu, mulţimile $A = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ şi $B = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ sunt subspaţii ale $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^2$, dar $A \cup B$ nu este subspaţiu, nefiind stabilă în raport cu $+$:

$$(1, 0) \in A \subseteq A \cup B,\ (0, 1) \in B \subseteq A \cup B,\ \text{dar } (1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin A \cup B.$$

d) Dacă $A, B \leq_K V$ atunci cel mai mic subspaţiu al lui V ce conţine A şi B este $A + B$, adică

$$A + B \overset{?}{=} \underline{\langle A \cup B \rangle}.$$

I) $A+B \overset{?}{\leq_K} V$

II) $A \cup B \overset{?}{\subseteq} A+B$

III) $S \leq_K V,\ A \cup B \subseteq S \Longrightarrow A+B \overset{?}{\subseteq} S$

I) $0 = \underset{\in A}{0} + \underset{\in B}{0} \in A+B$

$\forall\, x_1, x_2 \in A+B,\ \exists\, a_1, a_2 \in A, \exists\, b_1, b_2 \in B:\ x_1 = a_1 + b_1,\ x_2 = a_2 + b_2$

$\Longrightarrow x_1 + x_2 = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \underset{\text{în } (V,+)}{=} \overset{\in A}{(a_1 + a_2)} + \underset{\in B}{(b_1 + b_2)} \in A+B$

Fie $x_1 \in A+B$, $\forall\, \alpha \in K$ $\Longrightarrow \alpha x_1 = \alpha(a_1 + b_1) \underset{\text{în } V_K}{=} \underset{\in A}{(\alpha a_1)} + \underset{\in B}{(\alpha b_1)} \in A+B$
arbitrar (ca mai sus)

$\overline{II}$) Fie $a \in A \Longrightarrow a = a + \overset{\overset{B}{\cup}}{0} \in A+B$

$b \in B \Longrightarrow b = \underset{\underset{A}{\cap}}{0} + b \in A+B$

$\Longrightarrow A \cup B \subseteq A+B$

$\overline{III}$) Fie $\underline{x \in A+B} \Longrightarrow \exists a \in A, \exists b \in B : \underline{x} = \underset{\underset{\underset{S}{\cap|}}{A}}{\overset{}{a}} + \underset{\underset{\underset{S}{\cap|}}{B}}{b} \ \underline{\in S}$

$n \in \mathbb{N}^*$

e) Dacă $A_1, \ldots, A_n$ sunt subspaţii ale K-spaţiului vectorial V, atunci

$$A_1 + \cdots + A_n = \langle A_1 \cup \cdots \cup A_n \rangle. \longleftarrow \underline{\text{temă}}$$

f) Dacă $X_i \subseteq V$ $(i = 1, \ldots, n)$, atunci $\langle X_1 \cup \cdots \cup X_n \rangle = \langle X_1 \rangle + \cdots + \langle X_n \rangle$.

CURS 8

Am văzut că suma a două subspaţii este un subspaţiu.

Definiţia 10. Dacă A şi B sunt subspaţii ale lui V şi $A \cap B = \{0\}$, subspaţiul $A + B$ se notează cu $A \oplus B$ şi se numeşte **suma directă** a lui A şi B.

În particular, $V = A \oplus B$ dacă şi numai dacă au loc următoarele:
i) $A + B = V$;
ii) $A \cap B = \{0\}$.
În acest caz, spunem că A (sau B) este **sumand** (sau **sumant**) **direct** al lui V (prin urmare, A şi B sunt sumanzi (sumanţi) direcţi ai lui V). De asemenea, spunem că A este un **complement direct** al lui B (în V); la fel B pentru A.

Observaţiile 11. a) Pentru un sumand direct pot exista mai mulţi complemenţi direcţi.

b) Proprietatea de a fi sumand direct este tranzitivă (la seminar).

Definiţia 12. Fie V, V' două K-spaţii vectoriale. O funcţie $f : V \to V'$ se numeşte **transformare liniară** (sau **funcţie liniară** sau **aplicaţie liniară** sau **morfism de K-spaţii vectoriale**) dacă

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \text{ şi } f(\alpha x) = \alpha f(x),\ \forall x, x_1, x_2 \in V,\ \forall \alpha \in K. \tag{3}$$

O transformare liniară bijectivă se numeşte **izomorfism** de spaţii liniare. O transformare liniară a unui spaţiu vectorial V în V se numeşte **endomorfism** al lui V. Un izomorfism al lui V pe V se numeşte **automorfism** al lui V.

Observaţiile 13. a) O funcţie $f : V \to V'$ este liniară dacă şi numai dacă

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in V,\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K. \tag{4}$$

b) Dacă $f : V \to V'$ este o transformare liniară, atunci

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n), \forall x_1, \ldots, x_n \in V, \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K.$$

c) Dacă $f : V \to V'$ este o transformare liniară, atunci f este un morfism între grupurile $(V, +)$ şi $(V', +)$ de unde rezultă

$$f(0) = 0 \text{ şi } f(-x) = -f(x),\ \forall x \in V.$$

d) Dacă V, V' şi V'' sunt K-spaţii vectoriale şi $f : V \to V'$, $g : V' \to V''$ sunt transformări liniare, atunci $g \circ f$ este transformare liniară.

e) Dacă $f : V \to V'$ este izomorfism de spaţii vectoriale, atunci f^{-1} este izomorfism de spaţii vectoriale, adică

$$f^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 f^{-1}(y_1) + \alpha_2 f^{-1}(y_2),\ \forall\ y_1, y_2 \in V',\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K. \tag{5}$$

f) Fie V un K-spaţiu vectorial, $End_K(V)$ mulţimea endomorfismelor K-spaţiului vectorial V. Din Observaţia 13 d) rezultă că $End_K(V)$ este stabilă în monoidul $(V^V, \circ)$, iar $(End_K(V), \circ)$ este monoid.

g) Grupul elementelor inversabile ale monoidului $(End_K(V), \circ)$ este $(Aut_K(V), \circ)$, unde $Aut_K(V)$ este mulţimea automorfismelor spaţiului vectorial V.

h) Dacă $f : V \to V'$ este transformare liniară şi $X \subseteq V$, atunci

$$f(\langle X \rangle) = \langle f(X) \rangle.$$

Exemplele 14. a) Pentru orice K-spaţii vectoriale V şi V' funcţia $\theta : V \to V'$, $\theta(x) = 0$ este o transformare liniară numită transformarea liniară **nulă** sau **zero**.

Într-adevăr,

$$\theta(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = 0 = 0 + 0 = \alpha_1 0 + \alpha_2 0 = \alpha_1 \theta(x_1) + \alpha_2 \theta(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in V,\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K.$$

b) Pentru orice K-spaţiu vectorial V aplicaţia identică $1_V : V \to V$, $1_V(x) = x$ este automorfism al lui V. Acest automorfism este element neutru în $(End_K(V), \circ)$.
c) Fie $\varphi \in \mathbb{R}$ fixat. Rotaţia planului de unghi φ, adică funcţia

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x \cos \varphi - y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi),$$

este o transformare liniară (la seminar).
d) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, $C(I, \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă pe } I\}$. Funcţia

$$F : C(I, \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ F(f) = \int_a^b f(x) dx$$

este o transformare liniară.

Într-adevăr, pentru orice $f, g \in C(I, \mathbb{R})$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avem

$$F(\alpha f + \beta g) = \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx = \alpha F(f) + \beta F(g).$$

Teorema 15. Fie V şi V' K-spaţii vectoriale. Dacă $f, g : V \to V'$ şi $\alpha \in K$, atunci definim $f + g : V \to V'$ şi $\alpha f : V \to V'$ prin

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \tag{6}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x). \tag{7}$$

1) Dacă f şi g sunt transformări liniare, atunci $f + g$ este o transformare liniară.

2) Dacă f este transformare liniară, atunci αf este transformare liniară.

Corolarul 16. a) Mulţimea $Hom_K(V,V')$ a transformărilor liniare ale lui V în V' este stabilă în raport cu operaţia definită de (6) şi $(Hom_K(V,V'),+)$ este grup abelian.

b) Mulţimea $Hom_K(V,V')$ este stabilă în raport cu operaţiile definite în (6) şi (7) şi $Hom_K(V,V')$ este K-spaţiu vectorial în raport cu operaţiile induse de acestea.

c) Grupul abelian $(End_K(V),+)$ este un K-spaţiu vectorial în raport cu operaţia externă definită de (7). Mai mult, compunerea $\circ$ a endomorfismelor K-spatiului vectorial V este distributivă faţă de $+$, prin urmare avem şi o structură de inel cu unitate pe $End_K(V)$, şi anume $(End_K(V),+,\circ)$.
d) $End_K(V)$ este o K-algebră cu unitate.

Teorema 17. Dacă $f : V \to V'$ este o transformare liniară, atunci:
1) $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in V\}$ (adică **imaginea** lui f) este un subspaţiu al lui V'.
2) $\operatorname{Ker} f = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$ este un subspaţiu al lui V numit **nucleul** lui f.
3) Transformarea liniară f este injectivă dacă şi numai dacă $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.