Curs 3

Ecuațiile carteziene ale planului

3.1. Ecuația planului prin punct și 2 vectori directori.

Fie ecuația vectorială a planului prin punct și doi vectori directori:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \lambda_1 \vec{d}_1 + \lambda_2 \vec{d}_2 .$$

Față de reperul cartezian general $R = \{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.
vectorii se descompun astfel:

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = x_A\vec{u} + y_A\vec{v} + z_A\vec{w} + \lambda_1(p_1\vec{u} + q_1\vec{v} + r_1\vec{w}) + \lambda_2(p_2\vec{u} + q_2\vec{v} + r_2\vec{w}).$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_A + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \\ y = y_A + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \\ z = z_A + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 \end{cases}} \quad (3.1)$$

ecuațiile parametrice ale planului prin punct și doi vectori directori.

Privim acest sistem ca pe un sistem liniar cu 3 ecuații și 2 necunoscute: λ_1 și λ_2.
Sistemul este compatibil determinat, dacă rangul matricii sistemului este egal cu rangul matricii extinse (teorema Kronecker-Capelli).

Matricea sistemului: $S = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}$,

matricea extinsă: $\overline{S} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & x-x_A \\ q_1 & q_2 & y-y_A \\ r_1 & r_2 & z-z_A \end{pmatrix}$.

rang $S = 2$ (adică $\exists$ un determinant de ordin 2 diferit de zero; în caz contrar am avea $\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$, adică $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ a.î. $\vec{d_1} = \lambda \vec{d_2}$ contradicție cu ipoteza că vectorii $\vec{d_1}$ și $\vec{d_2}$ sunt necoliniari).

În consecință trebuie să avem și rang $\overline{S} = 2 \iff \det \overline{S} = 0 \iff$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & x-x_A \\ q_1 & q_2 & y-y_A \\ r_1 & r_2 & z-z_A \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0} \quad (3.2)$$

3.2 Ecuația planului prin 3 puncte distincte necoliniare.

Fie ecuația vectorială a planului prin 3 puncte necoliniare:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \lambda(\vec{r}_B - \vec{r}_A) + \mu(\vec{r}_C - \vec{r}_A).$$

Față de reperul cartezian ~~oarecare~~ general avem:

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = x_A\vec{u} + y_A\vec{v} + z_A\vec{w} +$$
$$+\lambda[(x_B-x_A)\vec{u} + (y_B-y_A)\vec{v} + (z_B-z_A)\vec{w}] +$$
$$+\mu[(x_C-x_A)\vec{u} + (y_C-y_A)\vec{v} + (z_C-z_A)\vec{w}],$$

unde $M(x,y,z)$, $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$, $C(x_C,y_C,z_C)$. Obținem:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_A + \lambda(x_B - x_A) + \mu(x_C - x_A) \\ y = y_A + \lambda(y_B - y_A) + \mu(y_C - y_A) \\ z = z_A + \lambda(z_B - z_A) + \mu(z_C - z_A) \end{cases}} \quad (3.3)$$

ecuațiile parametrice ale planului prin 3 puncte.

Urmând același raționament ca în cazul precedent obținem:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0 \quad (3.4)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \end{vmatrix} = 0.} \quad (3.5)$$

Ecuația carteziană a planului prin trei puncte.

Ecuațiile (3.2) sau (3.5) devin după dezvoltarea determinanților:

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0} \qquad (3.6)$$

Atenție: Aici A, B, C și D sunt numere reale; a nu se confunda cu punctele A, B, C.

Prop. 3.2. Fie patru puncte: $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$, $D(x_D, y_D, z_D)$. Condiția necesară și suficientă pentru ca cele 4 puncte să fie coplanare este:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.7)}$$

Soluție. În ecuația planului determinat de punctele necoliniare B, C, D se introduc coordonatele punctului A și se obține identitatea (3.7)

Observația 3.3. O condiție analoagă se obține și pentru coliniaritatea a 3 puncte în plan. Într-adevăr, în ecuația (2.9)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

a dreptei determinată de punctele A și B se introduc coordonatele punctului C ($\Leftrightarrow M \in AB$). Obținem

$$\begin{vmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0} \quad (3.8.)$$

3.3 Ecuațiile dreptelor date ca intersecție de două plane:

Fie planele:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \\ \Pi_2 &: \end{aligned}$$

Fie $M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ și $\overline{M} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$.

1. Dacă rang $M = 2 \Rightarrow$ rang $\overline{M} = 2$ deci sistemul este compatibil. Aceasta înseamnă că planele sunt secante, adică intersecția lor este o dreaptă: $\pi_1 \cap \pi_2 = d$.

2. Dacă rang $M = 1$ și rang $\overline{M} = 2$, adică
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2},$$
atunci sistemul este incompatibil, adică $\pi_1 \parallel \pi_2$.

3. Dacă rang $M = 1$ și rang $\overline{M} = 1$, adică
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$
atunci sistemul este compatibil și avem $\pi_1 = \pi_2$.

<u>Prop. 3.4</u> Dreapta de intersecție a planelor π_1 și π_2 dată de sistemul:
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$
cu rang $M = 2$, are ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \\ z = z_0 + \lambda r \end{cases} \qquad (3,9)$$

unde $p = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$, $q = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$, $r = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$,

iar (x_0, y_0, z_0) este o soluție particulară a sistemului.

Demonstrație

Într-adevăr, punctul $M(x,y,z)$, oarecare, al dreptei, dat prin ecuațiile parametrice (3,9), ~~verifică~~ aparține fiecărui plan, adică, (x,y,z) verifică ecuația fiecărui plan:

$$A_1(x_0+\lambda p) + B_1(y_0+\lambda q) + C_1(z_0+\lambda r) + D_1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1}_{0} + \lambda\left(A_1 \cdot \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_1 \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda\left(\cancel{A_1B_1C_2} - \cancel{A_1B_2C_1} + A_2B_1C_1 - \cancel{A_1B_1C_2} + \right.$$

$$\left. + \cancel{A_1B_2C_1} - A_2B_1C_1\right) = 0 \quad \text{„A"}.$$

Analog (x,y,z) verifică și ecuația

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Fascicul de plane

Definiția 3.5. Se numește fascicul de plane, mulțimea planelor care trec printr-o dreaptă d, numită axa fasciculului.

Fie $d: \begin{cases} \pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

Atunci ecuația

$$\pi_{\lambda_{1,2}}: \boxed{\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0} \quad (3.10)$$

cu $\lambda_1^2+\lambda_2^2 \neq 0$, sau pe scurt.

$$\boxed{\lambda_1\pi_1+\lambda_2\pi_2=0} \quad (3.11)$$

este ecuația fasciculului.

Într-adevăr, ecuația (3.10) este ecuația unei familii de plane:

$$(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2)x+(\lambda_1B_1+\lambda_2B_2)y+(\lambda_1C_1+\lambda_2C_2)z+\lambda_1D_1+\lambda_2D_2=0$$

și, dacă (x_0,y_0,z_0) sunt coordonatele unui punct M_0 pe dreapta d, atunci

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1=0$$

și

$A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2=0$, deci și ecuația fasciculului ~~...~~ $\pi_{\lambda_{1,2}}$ este verificată.

Dacă $\lambda_1 \neq 0$ avem:

Π_λ : $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$,

$\lambda \in \mathbb{R}$, (am notat $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$);

aceasta este ecuația fasciculului redus

(lipsește planul Π_2).

Aceeași noțiune de fascicul se poate defini și pentru două drepte ~~pe~~ în plan:

<u>Definiția 3.6.</u> Se numește fascicul de drepte în plan, mulțimea tuturor dreptelor din plan care trec printr-un punct $\{M_0\} = d_1 \cap d_2$ (determinat de intersecția a două drepte).

Dacă $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$
$d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $d_1 \cap d_2 = M_0$,

atunci ecuația fasciculului de drepte este:

d_{λ_1,λ_2}: $\boxed{\lambda_1(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2) = 0}$ $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$

sau pe scurt $\boxed{\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 = 0}$.

Dacă de ex. $\lambda_1 \neq 0$ atunci:

d_λ : $a_1x + b_1y + c_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0$, $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{R}$,

este ecuația fasciculului redus (lipsește d_2).

Desigur, cititorul a observat că în problemele studiate pînă aici nu au intervenit noțiunile de unghi și de perpendicularitate, iar lungimea unui segment a intervenit doar în legătură cu compararea a două segmente așezate pe aceeași dreaptă (la definirea legii de compunere a unui scalar cu un vector respectiv la raportul a trei puncte coliniare), dar nu am comparat pînă acum două segmente neparalele. Toate problemele legate de noțiunile de incidență, paralelism și raport simplu, se numesc „probleme afine". Trecem acum la „probleme metrice" în care și noțiunile de distanță și unghiu intervin în mod esențial.

Prin *lungimea* sau *norma* vectorului $\overrightarrow{AB}$, notată cu $\|\overrightarrow{AB}\|$, înțelegem lungimea segmentului $[A, B]$; $\|\vec{0}\| = 0$. Dacă $\|\overrightarrow{AB}\| = 1$, vectorul $\overrightarrow{AB}$ se mai numește *versor*.

Fie $\vec{a}$ un vector nenul. Prin *versorul lui* $\vec{a}$ înțelegem unicul versor, avînd sensul lui $\vec{a}$. El este egal cu $\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$.

Fiind dați vectorii nenuli $\vec{a}$ și $\vec{b}$, unghiul lor se definește astfel:

$$\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \widehat{AOB}, \text{ unde } \vec{a} = \overrightarrow{OA},\ \vec{b} = \overrightarrow{OB}.$$

Se observă că această definiție este corectă, căci unghiul $\widehat{AOB}$ nu depinde de alegerea punctului O.

Proiecția ortogonală a vectorului $\overrightarrow{AB}$ pe dreapta Δ este un vector, notat cu $\mathrm{Pr}_\Delta \overrightarrow{AB}$, care se obține în felul următor: ducem prin A și B plane perpendiculare pe Δ, care intersectează Δ în punctele A' și B' (fig. 11); prin definiție, $\mathrm{Pr}_\Delta \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Se observă că $\overrightarrow{A'B'}$ nu depinde de alegerea reprezentantului în clasa $\overrightarrow{AB}$. Rezultă o construcție mai simplă: Fie $P \in \Delta$ și $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$ și R proiecția lui Q pe Δ; avem $\mathrm{Pr}_\Delta \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PR}$. Evident există λ unic astfel ca $\mathrm{Pr}_\Delta \overrightarrow{AB} = \lambda\vec{e}$, unde $\vec{e}$ este un versor pe Δ. Însemnăm scalarul λ cu $\mathrm{pr}_{\vec{e}}\, \overrightarrow{AB}$ și avem

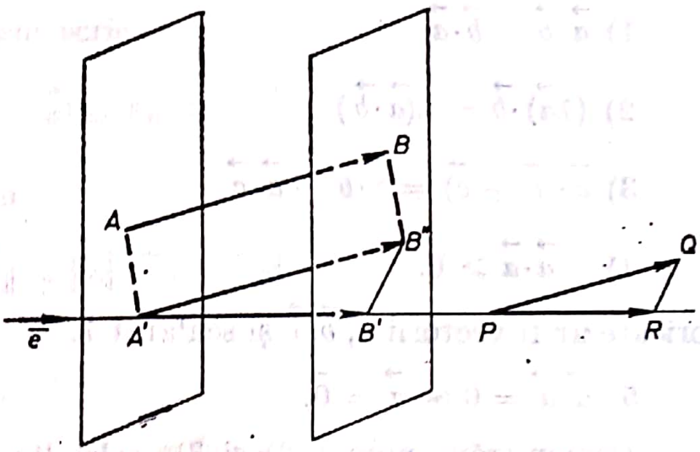

Fig. 11

(1) $$\mathrm{Pr}_\Delta \overrightarrow{AB} = (\mathrm{pr}_{\vec{e}}\, \overrightarrow{AB})\cdot\vec{e}.$$

Am definit astfel o aplicație $pr_{\vec{e}} : \mathscr{V} \to \mathbb{R}$. Ea este o funcțională liniară, ceea ce rezultă din faptul că $Pr_\Delta : \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ este o aplicație liniară. Avem

(2) $$pr_{\vec{e}}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha\, pr_{\vec{e}}\vec{a} + \beta\, pr_{\vec{e}}\vec{b}$$

pentru orice $\vec{a}, \vec{b} \in \mathscr{V}$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pe de altă parte

(3) $$pr_{\vec{e}}\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \cos\,(\widehat{\vec{e}, \overrightarrow{AB}}),$$

ceea ce rezultă direct din definiția cosinusului unui unghi.

Definiție. *Produsul scalar a doi vectori* $\vec{a}$ *și* $\vec{b}$ este numărul real

(4) $$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Ținînd seamă de formula (3), avem

(5) $$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \|\vec{a}\|\, pr_{\vec{a}_0}\vec{b},$$

unde $\vec{a}_0$ este versorul lui $\vec{a}$.

Definiție. Vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ se zic *perpendiculari* sau *ortogonali* și se notează $\vec{a} \perp \vec{b}$, dacă unul din ei este vectorul nul sau dacă formează un unghi drept.

Rezultă imediat:

Propoziția 1. *Vectorii* $\vec{a}$ *și* $\vec{b}$ *sînt perpendiculari dacă și numai dacă* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Propoziția 2. *Pentru produsul scalar au loc următoarele proprietăți:*

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2) $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

4) $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0,$

oricare ar fi vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ și scalarul λ.

5) $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Demonstrăm numai 2) și 3), celelalte proprietăți fiind consecințe imediate ale definiției. Folosind (5) și (2) avem

$$\vec{a} \cdot (\beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) = \|\vec{a}\| \cdot pr\,(\beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) = \|\vec{a}\|\,(\beta\, pr\,\vec{b} + \gamma\, pr\,\vec{c}) =$$

$$= \beta\|\vec{a}\|\, pr\,\vec{b} + \gamma\|\vec{a}\|\, pr\,\vec{c} = \beta(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \gamma(\vec{a} \cdot \vec{c})$$

(în notații s-a omis indicele $\vec{a}_0$). Particularizînd scalarii β și γ obținem 2) și 3).

O bază $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ a spațiului vectorial $\mathscr{V}$ se zice *ortonormală*, dacă $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$, $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$ și $\vec{k} \perp \vec{i}$.
Avem

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1 \tag{6}$$
$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0.$$

Propoziția 3. *Componentele vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$, față de baza ortonormală $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, fiind (a_1, a_2, a_3) respectiv (b_1, b_2, b_3), produsul lor scalar se calculează după formula*

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{7}$$

Într-adevăr, avem

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \quad b = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

și folosind regulile de calcul 1), 2), 3) din proporția 2 și formulele (6) obținem formula (7).

Comparînd definiția produsului scalar cu expresia lui analitică (7), putem obține formule pentru calculul normei unui vector și a unghiulu- a doi vectori. Baza, la care ne raportăm, în continuare, este tot $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Avem

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{a}\|\cdot\cos 0 = \|\vec{a}\|^2.$$

Dacă definim $\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$, putem scrie

$$\vec{a}^2 = \|\vec{a}\|^2. \tag{8}$$

Punînd în (7) $\vec{b} = \vec{a}$, obținem

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \tag{9}$$

Din (4) și (7) deducem:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \tag{10}$$

și în particular

$$(\vec{a} \perp \vec{b}) \Leftrightarrow a_1'b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0. \tag{11}$$

Formulele (9) şi (10) pot fi folosite la calculul diferitelor distanţe determinate de puncte, drepte şi planele şi a unor unghiuri determinate de drepte şi plane.

Să considerăm un *sistem de coordonate ortonormat* în $\mathscr{P}(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ şi punctele $A(x_1, y_1, z_1)$ şi $B(x_2, y_2, z_2)$, raportate la acest sistem de coordonate. *Distanţa lor este*

$$\text{(12)} \qquad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Fie $A_1(x_1, y_1, z_1)$ un punct, iar π un plan, care trece prin A_1 (fig. 12). Deoarece coordonatele x_1, y_1, z_1 verifică ecuaţia planului,

$$\text{(13)} \qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$

această ecuaţie poate fi scrisă astfel:

$$\text{(13')} \qquad A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

Cu ajutorul formulei (7), interpretăm ecuaţia (13′) în felul următor: există un vector $\vec{n}(A, B, C)$ perpendicular pe fiecare vector de forma $\overrightarrow{A_1M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, adică pe fiecare dreaptă din planul π. Am demonstrat astfel o proprietate cunoscută în geometria elementară. Mai mult, am obţinut semnificaţia geometrică a coeficienţilor ecuaţiei (13): *A, B, C sînt parametri directori ai unei drepte perpendiculare pe plan* şi se numesc şi *parametri directori ai planului* π. Subliniem că acest rezultat este valabil numai faţă de sistemele de coordonate ortonormate.

Distanţa orientată de la un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul π, echipat cu un vector normal $\vec{n}$, se defineşte astfel: fie M' proiecţie ortogonală a punctului M_0 pe π şi $\overrightarrow{M'M''} = \vec{n}_0 = \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$ versorul lui $\vec{n}$; numărul real δ, determinat prin

$$\text{(14)} \qquad \overrightarrow{M'M_0} = \delta \vec{n}_0,$$

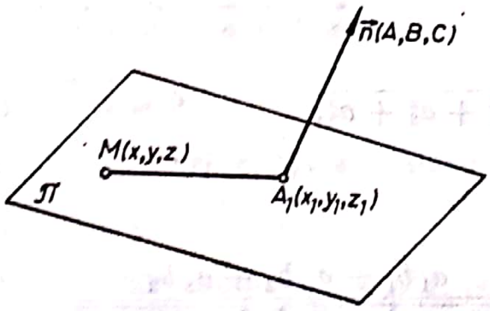

Fig. 12

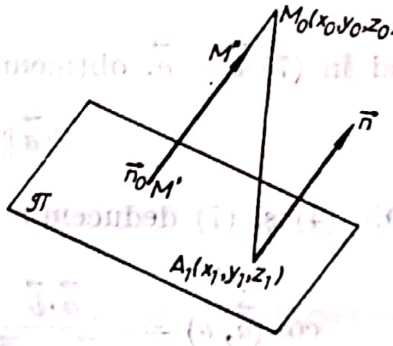

Fig. 13

se numeşte distanţa orientată de la punctul M_0 la planul π (fig. 13). Dacă M_0 se află în acel semispaţiu, mărginit de π, care conţine pe M'', atunci $\delta \geqslant 0$; dacă M_0 este în celălalt semispaţiu, atunci $\delta \leqslant 0$.

Pentru a calcula pe δ, înmulţim scalar cei doi membri ai egalităţii (14) cu $\vec{n}_0$:

$$\delta = \vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{M'M_0};$$

aşadar

$$\delta = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \vec{n} \cdot (\overrightarrow{A_1M_0} - \overrightarrow{A_1M'}) = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1M_0}}{\|\vec{n}\|} = \frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

sau

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{15}$$

Corolar. *Valorile numerice $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$ au acelaşi semn pentru toate punctele $M_0(x_0, y_0, z_0)$ dintr-un semispaţiu şi semn opus pentru punctele din celălalt semispaţiu.*

2.6. PRODUSUL VECTORIAL ŞI PRODUSUL MIXT

Se observă că primul dintre cele două repere ortonormate, de pe fig. 14, nu poate fi suprapus, printr-o mişcare în spaţiu, pe al doilea, în aşa fel încît O, A, B, C să acopere respectiv pe O', A', B', C'. Pe de altă parte, orice alt reper ortonormat poate fi suprapus pe unul dintre aceste repere. Astfel, mulţimea reperelor ortonormate se împarte în două submulţimi disjuncte, sau, cum se mai spune, în două clase. Zicem că *spaţiul este orientat*, dacă distingem una dintre aceste clase. Evidenţierea clasei distinse se poate face prin alegerea unui reper ortonormat fixat din clasa respectivă. În principiu, este indiferent care dintre cele două clase devine distinsă.

Obiecte ale spaţiului fizic sugerează o anumită distingere. Plasînd, de exemplu, un şurub (cu filatare obişnuită „dreaptă") pe $\vec{k}$ şi imprimîndu-i o mişcare de rotaţie de la $\vec{i}$ spre $\vec{j}$ (indicată de săgeată) el va înainta în sensul indicat de $\vec{k}$. Dimpotrivă, rotind $\vec{i}'$ spre $\vec{j}'$, şurubul va înainta în sens opus cu $\vec{k}'$. Reperul (O, A, B, C) satisface „regula şurubului"; pe el îl alegem ca reper distins. Reperele din clasa sa le numim *repere drepte sau directe*, iar cele din clasa cealaltă *repere stîngi* sau *inverse*. Împreună cu un reper, şi baza corespunzătoare se zice *directă* respectiv *inversă*.

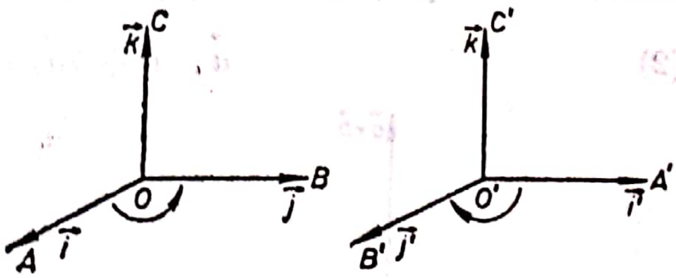

Fig. 14

Observaţie. De fapt, *putem împărţi toate reperele în două clase*. Vom face aici acest lucru apelînd la intuiţie. Putem „îndrepta" un reper oarecare (O_1, A_1, B_1, C_1), adică a-l transforma într-unul ortonormat, mişcînd „în mod continuu" punctele A_1, B_1, C_1, astfel încît în nici o poziţie intermediară cele patru puncte ale reperului să nu fie coplanare. Este intuitiv clar că, prin acest procedeu, se ajunge într-o clasă determinată de repere ortonormate, indiferent de modul de „îndreptare".