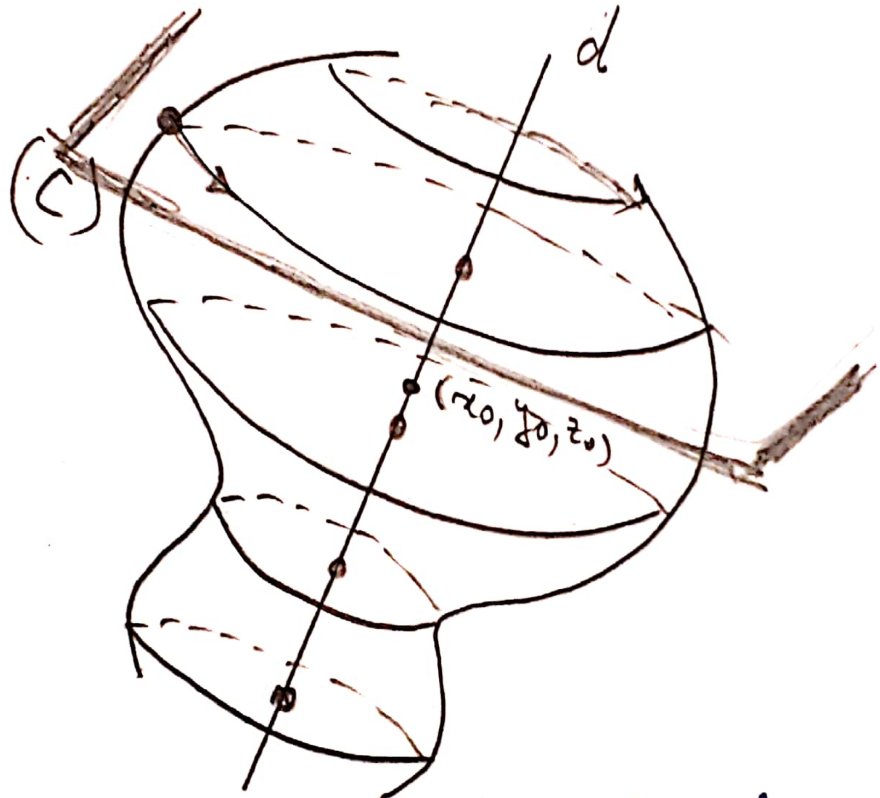
14.01.2021.

3) Suprafețe de rotație

Definiție. Se numește suprafață de rotație suprafața generată de o curbă (C) care se rotește în jurul unei axe fixe.



Fiecare punct al curbei (C) descrie un cerc cu centrul pe axa de rotație d, situat într-un plan perpendicular pe d.

Deci putem spune că suprafața de rotație este generată de o familie de cercuri variabile cu centrele pe axa d, situate în plane perpendiculare pe d și care se „sprijină" pe curba (C).

Deducerea ecuației generale a unei suprafețe de rotație.

Fie $d: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$

Familia de cercuri variabile se poate descrie prin sistemul:

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu}: \begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = \lambda^2 \\ px+qy+rz = \mu \end{cases}$$

Prima ecuatia reprezintă o familie de sfere cu centrul în punctul de coordonate (x_0, y_0, z_0) de pe dreapta d și raze variabile λ.

A doua ecuație reprezintă ecuațiile unor plane perpendiculare pe dreapta d.

$(\vec{n}(p,q,r) = \vec{d}(p,q,r))$.

Curba (C) este dată de intersecția a două suprafețe: $(C): \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

Condiția ca cercurile din familia $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ și curba (C) să aibă punct comun (cercurile să se „sprijine" pe curbă) este ca sistemul următor să fie compatibil:

$$\begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\lambda^2 \\ px+qy+rz=\mu \\ F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

Alegem trei ecuații din cele patru, rezolvăm subsistemul și soluția obținută se înlocuiește în ecuația rămasă. Se obține o relație $\varphi(\lambda,\mu)=0$ numită <u>condiția de compatibilitate</u>.
Ecuația suprafeței de rotație se obține eliminând λ și μ între ecuațiile familiei de cercuri $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ și condiția de compatibilitate, adică

$$\boxed{\varphi\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},\ px+qy+rz\right)=0.}$$

<u>Observație</u>. Dacă axa de rotație d este axa Oz atunci:

$$(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0) \text{ și } (p,q,r)=(0,0,1)=\vec{k}.$$

Ecuația suprafeței de rotație în jurul lui Oz are forma $\varphi(\sqrt{x^2+y^2+z^2},z)=0$ sau echivalent $\varphi(\sqrt{x^2+y^2},z)=0$ sau $\varphi(x^2+y^2,z)=0$.

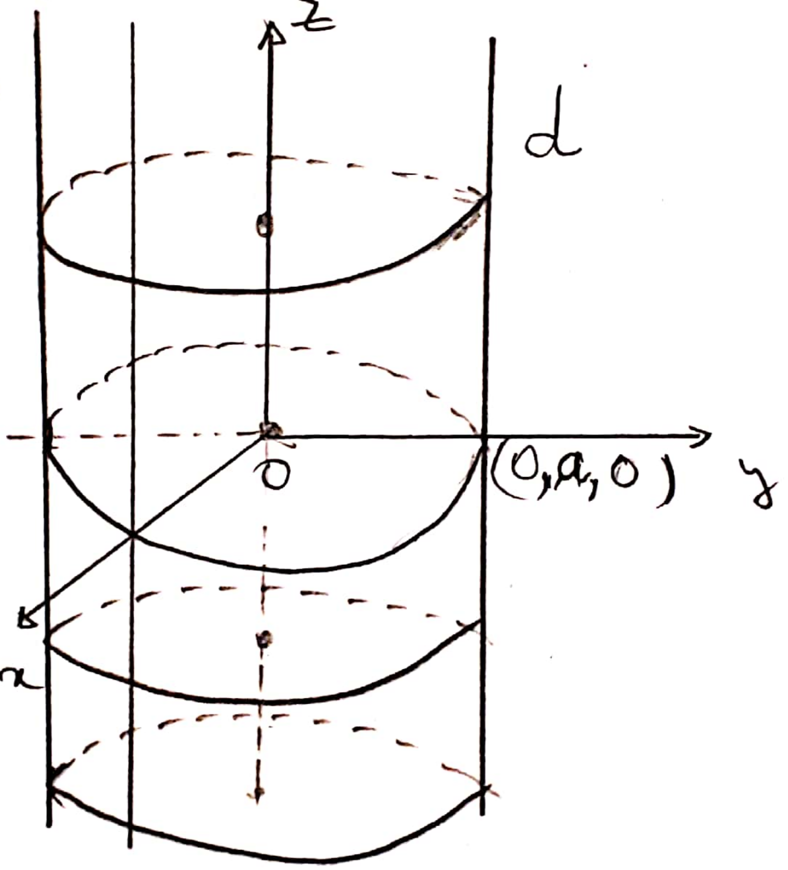
Exemple

1) Să se determine ecuația suprafeței de rotație obținută prin rotirea unei drepte în jurul altei drepte.

Soluție. Axa de rotație se alege axa Oz.

Cazul I.

$d \parallel Oz$



$Oz: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$d: \begin{cases} x=0 \\ y=a \end{cases}$ $\qquad \mathcal{C}_{\lambda,\mu}: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=\lambda^2 \\ z=\mu \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\lambda^2 \\ z=\mu \\ x=0 \\ y=a \end{cases} \Rightarrow \boxed{a^2+\mu^2=\lambda^2} \Leftrightarrow$

$\varphi(\lambda,\mu)=0$

Scanned with CamScanner

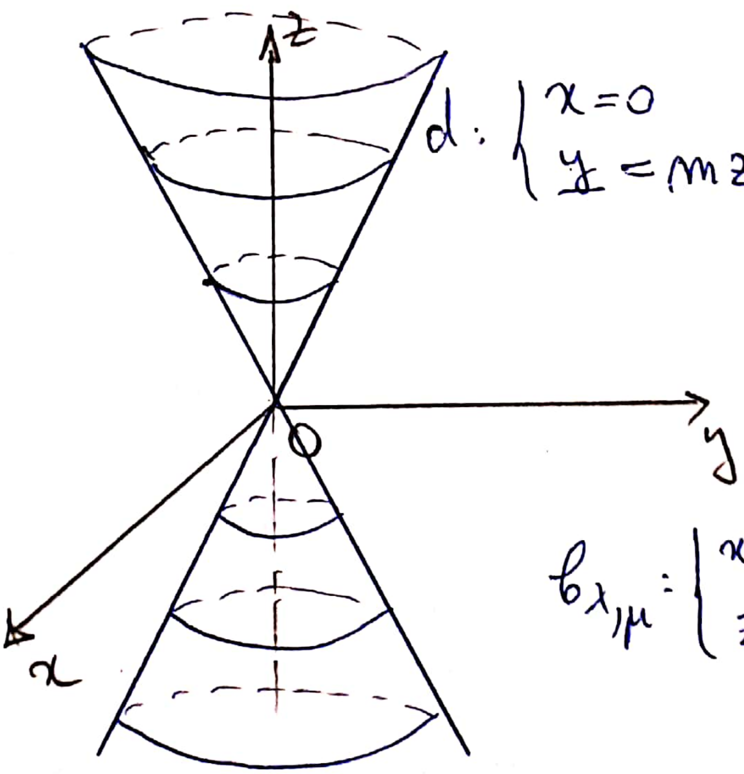
Eliminăm λ și μ între ecuațiile cercurilor și condiția de compatibilitate.

$$\Rightarrow \quad a^2 + z^2 = x^2+y^2+z^2 \Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2=a^2}$$

ecuația unei suprafețe cilindrice

Cazul II. Dreptele sunt concurente.

Alegem axa de rotație drept axă Oz și punctul de intersecție originea. Alegem planul determinat de cele două drepte drept plan yOz.



$$d: \begin{cases} x = 0 \\ y = mz \end{cases}$$

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu}: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = \lambda^2 \\ z = \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\lambda^2 \\ z=\mu \\ x=0 \\ y = mz \Rightarrow y = m\mu \end{cases} \Rightarrow \boxed{m^2\mu^2+\mu^2=\lambda^2}$$

$\varphi(\lambda,\mu)=0$ condiția de compatibilitate.

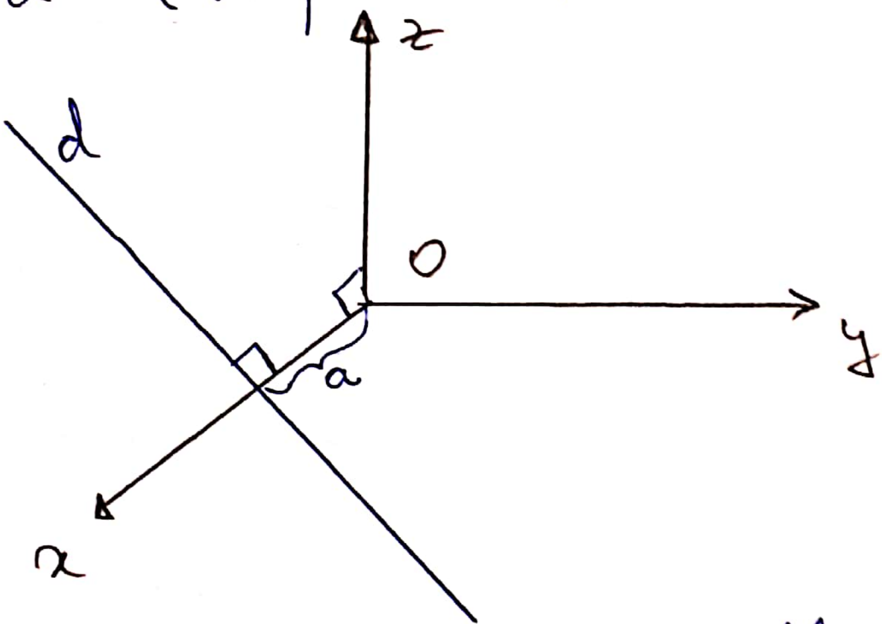
Eliminăm λ și μ între ecuațiile cercului variabil și condiția de compatibilitate:

$$m^2 z^2 + z^2 = x^2+y^2+z^2 \Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2-m^2z^2=0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2 - m^2=0$$ – ecuația unei suprafețe conice cu vârful în origine.

__Cazul III__ d și O_z sunt necoplanare.

Alegem Ox perpendiculara comună a lui Oz și d (în punctul O).



$d : \begin{cases} x = a & (\text{un plan paralel cu } yOz : x=0) \\ y+bz=0 & (\text{un plan care conține axa } Ox \end{cases}$

adică aparține fasciolului de plane determinat de axa Ox : $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$).

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu} : \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = \lambda^2 \\ z = \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\lambda^2 \\ z=\mu \\ x=a \\ y+bz=0 \end{cases} \Rightarrow y=-b\mu \qquad \Rightarrow \boxed{a^2+b^2\mu^2+\mu^2=\lambda^2}$$

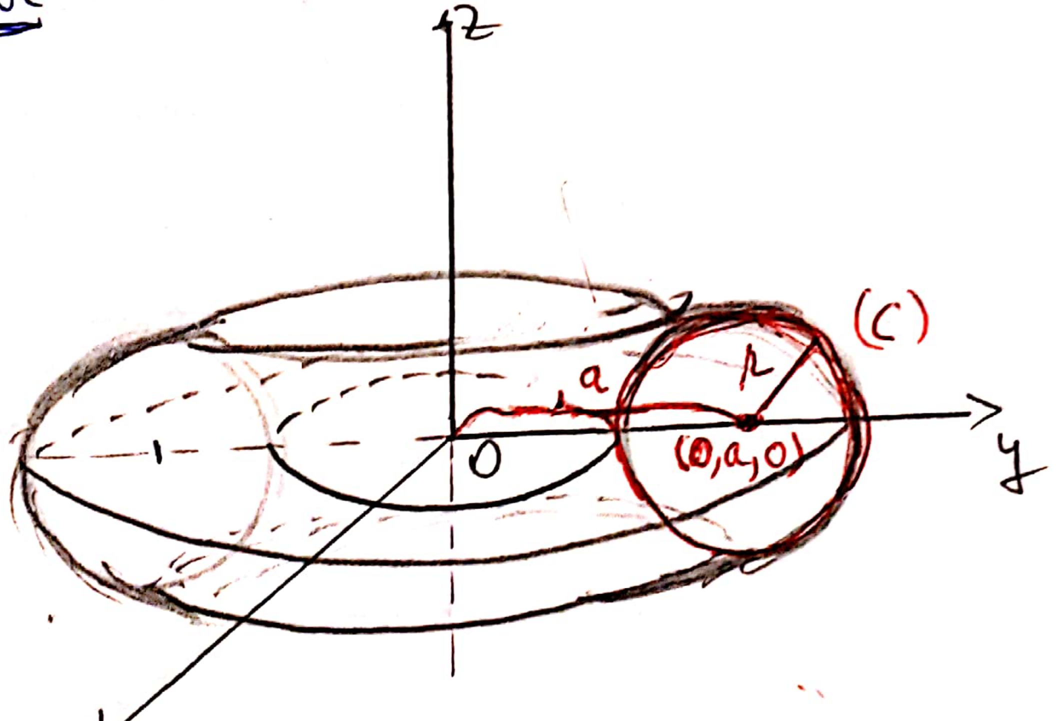
$$\varphi(\lambda,\mu)=0$$

Se elimină λ și μ între ecuațiile $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ și $\varphi(\lambda,\mu)=0 \Rightarrow$

$$a^2+b^2z^2+z^2=x^2+y^2+z^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-b^2z^2=a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{\frac{a^2}{b^2}}=1}$$ hiperboloid cu o pânză de rotație.

(2). Suprafața generată prin rotirea unui cerc în jurul unei axe din planul cercului și care nu intersectează cercul se numește tor. Să se determine ecuația torului.



Curba (C) este cercul : $\begin{cases} x^2+(y-a)^2+z^2=r^2 \\ x=0 \end{cases}$

$\mathcal{C}_{\lambda,\mu}: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=\lambda^2 \\ z=\mu \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2+(y-a)^2+z^2=r^2 \\ x=0 \\ x^2+y^2+z^2=\lambda^2 \\ z=\mu \end{cases} \Rightarrow y^2=\lambda^2-\mu^2$$

$$y=\pm\sqrt{\lambda^2-\mu^2}$$

$$\boxed{\left(\pm\sqrt{\lambda^2-\mu^2}-a\right)^2+\mu^2=r^2} \qquad \varphi(\lambda,\mu)=0$$

Eliminăm λ şi μ între $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ şi $\varphi(\lambda,\mu)=0$

$$\Rightarrow \left(\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2-z^2}-a\right)^2+z^2=r^2 \Leftrightarrow$$

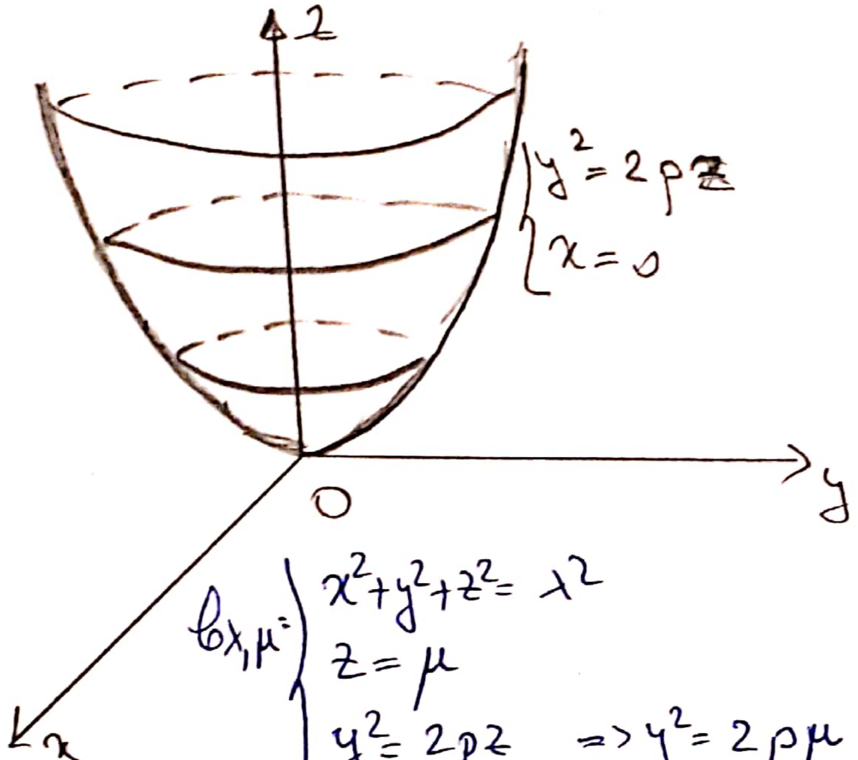
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+a^2\mp 2a\sqrt{x^2+y^2}+z^2=r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(x^2+y^2+z^2+a^2-r^2\right)^2=4a^2\left(x^2+y^2\right)}$$

ecuaţia torului.

3). Să se determine ecuaţia suprafeţei de rotaţie obţinută prin rotirea unei parabole în jurul axei sale de simetrie.

<u>Soluţie</u>. (C): $\begin{cases} y^2=2pz \\ x=0 \end{cases}$



$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu}: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = \lambda^2 \\ z = \mu \\ y^2 = 2pz \quad \Rightarrow y^2 = 2p\mu \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{2p\mu + \mu^2 = \lambda^2} \quad \varphi(\lambda, \mu) = 0$$

Eliminăm λ şi μ între $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ şi $\varphi(\lambda,\mu)=0$

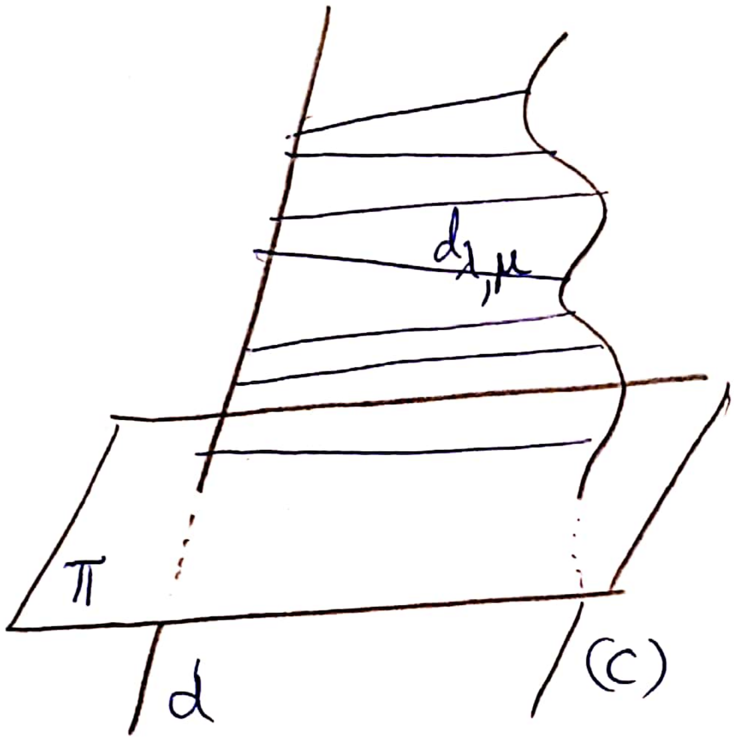
$$\Rightarrow 2p\cdot z + z^2 = x^2+y^2+z^2 \Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2 = 2pz}$$

paraboloid eliptic de rotaţie.

(4) Suprafeţe conoide

Definiţie Se numeşte suprafaţă conoidă (cu plan director) suprafaţa generată de o familie de drepte care se sprijină pe o dreaptă dată, pe o curbă dată şi sunt paralele cu un plan dat.

Determinarea ecuației suprafeței conoide



Fie $d: \begin{cases} \Pi_1 = 0 \\ \Pi_2 = 0 \end{cases}$ $\quad \Pi: \ \Pi = 0$

$(C): \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$

Dreptele care generează suprafața conoidă se sprijină pe dreapta d deci sunt coplanare cu d (se intersectează) deci fac parte dintr-un plan aparțin fasciculului de plane determinate de d.

Fiind paralele cu planul Π, fac parte din plane paralele cu Π. Deci

$d_{\lambda,\mu}: \begin{cases} \Pi_1 - \lambda \Pi_2 = 0 & \text{(fascicul de plane)} \\ \Pi = \mu & \text{(plan paralel cu } \Pi) \end{cases}$

Deoarece dreptele generatoare $d_{\lambda,\mu}$ se sprijină pe curba (C) trebuie ca sistemul:

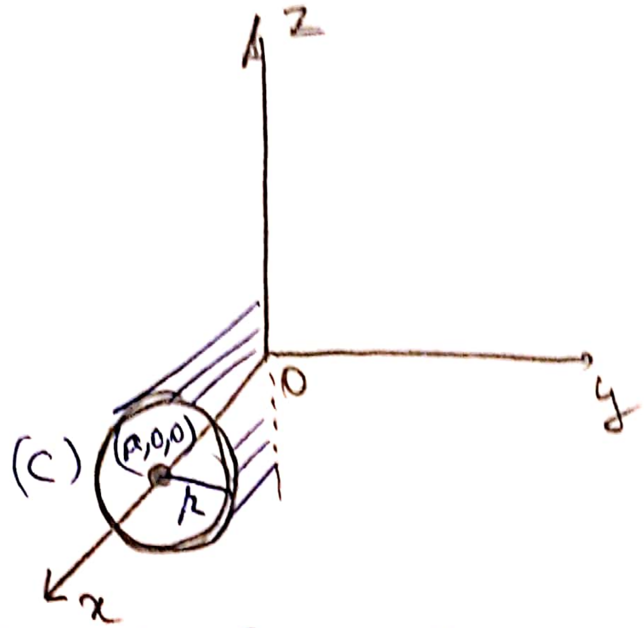
$$\begin{cases} \Pi_1 - \lambda \Pi_2 = 0 \\ \Pi = \mu \\ F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

să fie compatibil.

Alegem 3 ecuații din cele patru, rezolvăm subsistemul și înlocuim soluția obținută în ecuația rămasă. Obținem $\varphi(\lambda,\mu) = 0$ o relație între cei doi parametri numită condiție de compatibilitate. Ecuația suprafeței conoide se obține eliminând λ și μ între condiția de compatibilitate și ecuațiile generatoarelor $d_{\lambda,\mu}$, adică $\boxed{\varphi\left(\frac{\Pi_1}{\Pi_2}, \Pi\right) = 0}$ ecuația generală a suprafeței conoidă.

Exemple. 1) Să se determine ecuația suprafeței conoidă generată de o familie de drepte care se sprijină pe o dreaptă d și pe un cerc situat într-un plan paralel cu d rămânând paralele la un plan perpendicular pe d.

Soluție



$$(C): \begin{cases} (x-a)^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ x = a \end{cases}$$

$$d = O_z : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{\lambda,\mu} : \begin{cases} x - \lambda y = 0 \\ z = \mu \end{cases} \\ (C) \begin{cases} (x-a)^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ x = a \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = a, \quad y = \frac{a}{\lambda}, \quad z = \mu$$

$$\boxed{\frac{a^2}{\lambda^2} + \mu^2 = r^2} \qquad \boxed{\varphi(\lambda, \mu) = 0}$$

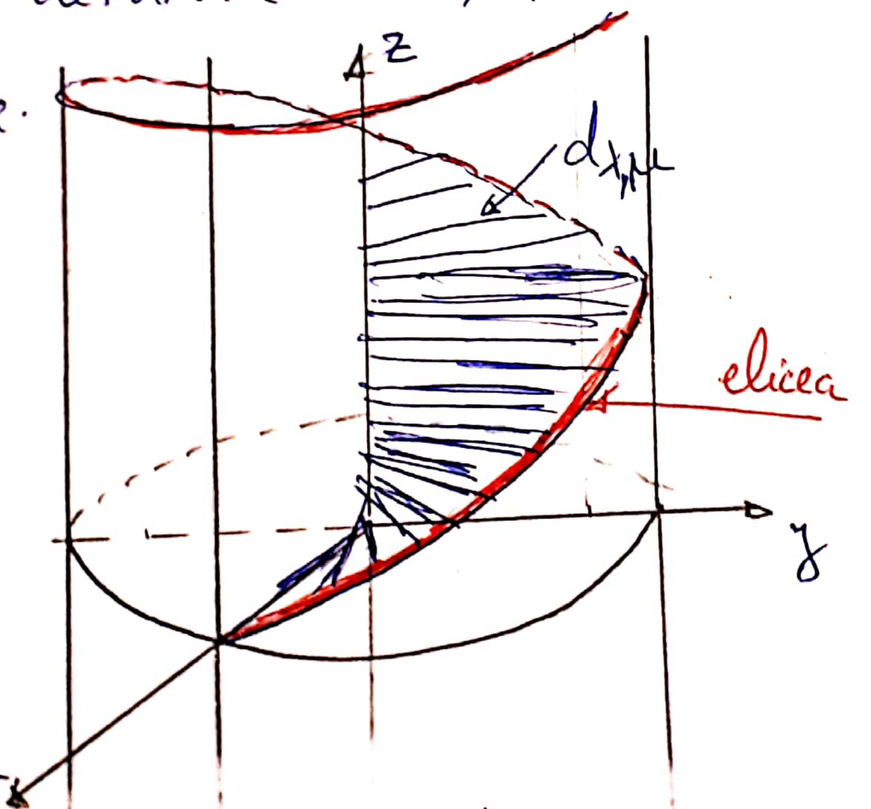
Se elimină λ și μ între $\varphi(\lambda,\mu) = 0$ și $d_{\lambda,\mu}$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{\frac{x^2}{y^2}} + z^2 = r^2 \Leftrightarrow \boxed{a^2 y^2 + x^2 z^2 - r^2 z^2 = 0}$$

2) Se numește <u>elicoid drept cu plan director</u> suprafața generată de o familie de drepte care se sprijină pe axa Oz, pe elicea cilindrică circulară dreaptă: $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = kt \end{cases}$ și sunt paralele cu planul xOy.

Să se determine ecuația elicoidului.

<u>Soluție.</u>



$Oz: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} d_{\lambda,\mu}: \begin{cases} x - \lambda y = 0 \\ z = \mu \end{cases} \\ (E) \quad \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = kt \end{cases} \Rightarrow \dfrac{y}{x} = \operatorname{tg} t, \quad t = \dfrac{z}{k} \end{cases}$$

(E) condiția de intersecție dintre drepte și elice:

$$\begin{cases} r\cos t - \lambda r\sin t = 0 \\ t = \dfrac{\mu}{k} \end{cases} \Rightarrow \boxed{r\cos\frac{\mu}{k} - \lambda r\sin\frac{\mu}{k} = 0} \quad |:r \qquad \varphi(\lambda,\mu) = 0$$

$$\Rightarrow \cos\frac{z}{k} - \frac{x}{y}\sin\frac{z}{k} = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = x\operatorname{tg}\frac{z}{k}}$$