Seminar 7

Reamintim legat de transformări elementare

Aplicația 1: calculul determinanților
→ se pot efectua atât transf. de linii cât și de col.

Aplicația 2: calculul rangului
→ se pot efectua atât transf. de linii cât și de col.

Aplicația 3: rezolvarea sist. de ec. liniare cu Met. Gauss
→ se pot efectua doar transf. de linii și permutări de coloane, exceptând ultima coloană

Aplicația 4: calculul inversei unei matrici
→ se vor efectua doar transf. de linii.

Lista 5+6

(4.) Stabiliți dacă matricea de mai jos este inversabilă și apoi calculați inversa sa:

a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$l_2 - 2l_1;\ l_3 - 4l_1$ $\qquad$ $-\frac{1}{3} l_2$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$l_1 - l_2 \,;\ l_3 + 3l_2$ $\qquad$ $l_1 + l_3 \,;\ l_2 + l_3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$(-1)\, l_3$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b)
$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 5 \\ 9 & 12 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 12 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$l_2 - 2l_1 \,;\ l_3 - 3l_1$

- prop.
- nu se poate face nici o permutare de linii.

$\Rightarrow B$ nu este inversabilă

Temă punctul c)

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Spații vectoriale. Subspații

Fie K corp comutativ. $(V,+)$ grup abelian împreună cu operația externă $\cdot : K\times V \to V$ se num. K-sp. vectorial dacă:

1) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

2) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$, $\forall\, x,y\in V,\ \forall \alpha,\beta\in K$

3) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$

4) $1\cdot x=x$

Fie ${}_K V$, $A\subseteq V$. $A\leq {}_K V \iff \begin{cases} A\neq\emptyset \\ \forall x,y\in A,\ x+y\in A \\ \forall x\in A,\ \forall \alpha\in K,\ \alpha x\in A\end{cases}$

$\iff \begin{cases} A\neq\emptyset \\ \forall \alpha,\beta\in K,\ \forall x,y\in A,\ \alpha x+\beta y\in A. \end{cases}$

Lista 7

(1.) Arătați că, grupul abelian $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ este un $\mathbb{R}$-sp. vectorial în raport cu operația externă $*: \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$,

$$\alpha * x = x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}_+^* \qquad (1) \qquad (\mathbb{R},+,\cdot) \text{ corp com.}$$

Fie $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $x,y\in\mathbb{R}_+^*$

1) $\alpha*(x\cdot y)=(\alpha*x)\cdot(\alpha*y)$

$\alpha*(x\cdot y)\overset{(1)}{=}(x\cdot y)^\alpha = x^\alpha\cdot y^\alpha \overset{(1)}{=}(\alpha*x)\cdot(\alpha*y)$.

2) $\underbrace{(\alpha+\beta)*x}_{x^{\alpha+\beta}}=\underbrace{(\alpha*x)}_{x^\alpha}\cdot\underbrace{(\beta*x)}_{x^\beta}$

3) $\overbrace{(\alpha\cdot\beta)}^{\text{din } \mathbb{R}}*x=\alpha*(\beta*x)$

$x^{\alpha\cdot\beta}=(x^\beta)^\alpha$

4) $1*x=x^1=x$.

(2) Fie V un K-sp. vectorial, M mulțime. Să se arate că:

$V^M = \{ f \mid f : M \to V \}$ este K-sp. vectorial în raport cu operațiile definite punctual pe V^M, adică:

$f, g : M \to V$, $f+g : M \to V$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in M$

$\alpha \in K$, $\alpha f : M \to V$, $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$, $\forall x \in M$.

I Demonstrăm că $(V^M, +)$ grup abelian:

- „+" asoc.:

Fie $f, g, h : M \to V$, $f + (g+h) = (f+g) + h$.

Fie $x \in M$, $(f + (g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = \underbrace{f(x) + (g(x) + h(x))}_{\text{sumă de 3 elem. din } V}$

$= (f(x) + g(x)) + h(x) = (f+g)(x) + h(x) = ((f+g)+h)(x).$

- „+" com. (temă)

- $\exists\, \theta : M \to V$, $\theta(x) = 0$, $\forall x \in M$, a.î. $f + \theta \overset{?}{=} f$, $\forall f : M \to V$.

$\forall x \in M$, $(f+\theta)(x) = f(x) + \theta(x) = f(x) + 0 = f(x)$

- orice funcție are o opusă:

$\forall f : M \to V$, $\exists -f : M \to V$, $(-f)(x) = -f(x)$, $\forall x \in M$ a.î. $f + (-f) \overset{?}{=} \theta$

$\forall x \in M$, $(f + (-f))(x) = \underbrace{f(x) + (-f)(x)}_{\text{suntem în } V} = 0 = \underbrace{\theta(x)}_{\text{este o funcție}}.$

II

Fie $\alpha, \beta \in K$, $f, g : M \to V$

1) $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$

Fie $x \in M$, $(\alpha(f+g))(x) = \alpha \cdot (f+g)(x) = \underbrace{\alpha \cdot (f(x) + g(x))}_{\text{suntem în } K\text{-sp. vect. } V} =$

$= \alpha \cdot f(x) + \alpha \cdot g(x)$

$= (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x)$

$= (\alpha f + \alpha g)(x)$

2) $(\alpha + \beta) f = \alpha \cdot f + \beta \cdot f$ (temă)

3) $(\alpha\beta) f = \alpha(\beta f)$

Fie $x \in M$, $((\alpha\beta) f)(x) = (\alpha\beta) \cdot f(x) = \alpha(\beta \cdot f(x)) = \alpha \cdot (\beta f)(x) =$

$= (\alpha(\beta f))(x)$

4) $1 \cdot f = f$ $\left(\forall x \in M,\ \underbrace{(1 \cdot f)(x)} = 1 \cdot f(x) = \underline{f(x)}\right)$

Aplicații: 1) $K = \mathbb{R}$, $M = I$ interval, $V = \mathbb{R}$ (I poate fi chiar și $\mathbb{R}$)

$\mathbb{R}^I$ $\mathbb{R}$ - sp. vectorial.

2) V, V' K - sp. vectoriale, $\underbrace{(V')^V}_{\text{funcțiile de la } V \text{ la } V'}$ K - sp. vectorial.

(3.) Poate fi organizată o mulțime finită ca un spațiu vectorial peste un corp infinit K?

I) $|V| = 1$, $V = \{0\}$

$\exists!\ + : V \times V \to V$, $0 + 0 = 0$

$\exists!\ \cdot : K \times V \to V$, $\alpha \cdot 0 = 0$, $\forall \alpha \in K$

V K - sp. vect. nul. Răsp.: **DA!**

II) $|V| \geq 2$

Pp. că există o structură de K - sp. vect. pe V.

Fie $x \in V$, $x \neq 0$ arbitrar fixat.

$t_x' : K \to V$, $t_x'(\alpha) = \alpha x$

Fie $\alpha, \beta \in K$, $t_x'(\alpha) = t_x'(\beta) \Leftrightarrow \alpha x = \beta x \Leftrightarrow \alpha x - \beta x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)x = 0 \Rightarrow \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$.

t_x' - omomorfism de la $(K,+)$ la $(V,+)$

$\Rightarrow t_x' : \underset{\text{infinită}}{K} \to \underset{\text{finită}}{V}$ injectivă contradicție

$\Downarrow$

$|K| \leq |V|$ contrad. cu V finită

Răsp.: **NU!**