SEMINAR 10

1) Să se arate că vectorii $(1,2,-1)$, $(3,2,4)$, $(-1,2,-6)$ din $\mathbb{R}^3$ sunt liniar dependenţi şi să se găsească o relaţie de dependenţă între ei.

2) Daţi o condiţie necesară şi suficientă pentru ca vectorii $v_1 = (a_1, b_1)$, $v_2 = (a_2, b_2)$ să formeze o bază a $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^2$. Să se interpreteze geometric această condiţie. Folosind condiţia stabilită, găsiţi o infinitate de baze ale lui ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$. Există o bază a lui $\mathbb{R}^2$ în care coordonatele unui vector $v = (x, y)$ să coincidă cu x şi y? Să se arate că $v_1 = (1,0)$ şi $v_2 = (1,1)$ formează o bază a lui $\mathbb{R}^2$ şi să se găsească coordonatele lui $v = (x,y)$ în această bază.
Temă: Formulaţi şi rezolvaţi o problemă similară celei de mai sus pentru $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$.

3) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $v_1 = (a,1,1)$, $v_2 = (1,a,1)$, $v_3 = (1,1,a)$ să formeze o bază a lui $\mathbb{R}^3$.

4) Care dintre următoarele submulţimi ale lui $\mathbb{R}^3$:
a) $\{(1,0,-1),(2,5,1),(0,-4,3)\}$;
b) $\{(2,-4,1),(0,3,-1),(6,0,1)\}$;
c) $\{(1,2,-1),(1,0,3),(2,1,1)\}$;
d) $\{(-1,3,1),(2,-4,-3),(-3,8,2)\}$;
e) $\{(1,-3,-2),(-3,1,3),(-2,-10,-2)\}$
sunt baze ale $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$?

5) Fie V un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial şi $v_1, v_2, v_3 \in V$. Să se arate că vectorii v_1, v_2, v_3 sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă vectorii $v_2+v_3, v_3+v_1, v_1+v_2$ sunt liniar independenţi.
Suplimentar: i) Să se arate că $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle v_2+v_3, v_3+v_1, v_1+v_2\rangle$.
ii) Este proprietatea din enunţ adevărată într-un spaţiu vectorial peste un corp oarecare K?

6) Să se arate că în $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $M_2(\mathbb{R})$ matricele

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

formează o bază şi să se scrie matricea $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ în această bază.

7) a) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi polinoamele

$$f_1 = (X-b)(X-c),\ f_2 = (X-c)(X-a),\ f_3 = (X-a)(X-b).$$

Să se arate că:
i) f_1, f_2, f_3 sunt liniar independenţi în $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}[X]$ dacă şi numai dacă

$$(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0;$$

ii) dacă $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ atunci pentru orice $f \in \mathbb{R}[X]$ cu $\operatorname{grad} f \leq 2$ există $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, unic determinate, astfel încât $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$.
b) Să se determine $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ când $f = 1 + 2X - X^2$, $a = 1$, $b = 2$ şi $c = 3$.

8) Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin^n x$. Să se arate că $L = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este o submulţime liberă a $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.