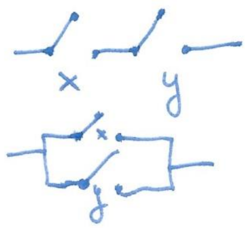
Latici și inele Boole

- **Def** Laticea $(A, \underset{\sup}{\vee}, \underset{\inf}{\wedge})$ este o latice Boole dc:
  - A este distributivă
  - $\exists$ cel mai mic elem. $0 := \min A$
  - $\exists$ cel mai mare elem. $1 := \max A$.
  - $\forall a \in A$, $\exists a'$ a.î. $a \wedge a' = 0$ și $a \vee a' = 1$.

Notație $(A, \vee, \wedge, 0, 1, ')$

- **Aplicații**
  - Electronică $\quad x \wedge y \quad x \vee y$



  - Simplificarea problemelor

- **Def** Inelul asociativ cu unitate $(A, +, \cdot, 0, 1)$ s.n. inel Boole dc $\forall x \in A$: $x^2 = x$.

  În particular A este comutativ și $1 + 1 = 0$.

- Cele 2 noțiuni sunt echivalente, iar legătura este dată de Th. Stone.

• Th. Stone a) $(A, \vee, \wedge, 0, 1, ') \rightsquigarrow (A, +, \cdot, 0, 1)$

$$\begin{cases} a+b = (a\wedge b')\vee(a'\wedge b) \\ a\cdot b = a\wedge b \end{cases}$$

b) $(A, +, \cdot, 0, 1) \rightsquigarrow (A, \vee, \wedge, 0, 1, ')$

$$\begin{cases} a\vee b = a+b+ab \\ a\wedge b = ab \\ a' = 1+a. \end{cases}$$

Dem: a) Știm că $(A, \vee, \wedge, 0, 1, ')$ este o latice Boole.
Avem op. „+" și „·" definite ca și în teoremă.
Vrem să arătăm că $(A, +, \cdot, 0, 1)$ este un inel Boole.
Asociativitatea, comutativitatea op de „+" și „·" și distributivitatea „·" față de „+" sunt dem. în suportul de curs. Rămâne să verificăm că 0 este elem. n. pt „+", 1 este elem neutru pt „·" și că $x^2 = x, \forall x\in A$:

$$a+0 \overset{\text{def „+"}}{=} (a\wedge 0')\vee\underbrace{(a'\wedge 0)}_{0} = (a\wedge 1)\vee 0 = a\vee 0 = a.$$

$$a\cdot 1 \overset{\text{def „·"}}{=} a\wedge 1 = a.$$

$\forall a\in A$.

$$a^2 = a\cdot a \overset{\text{def „·"}}{=} a\wedge a = a.$$

$\square$

b) Știm că $(A, +, \cdot, 0, 1)$ inel Boole.

Avem „$\vee$", „$\wedge$", „$'$" definite ca și în teoremă.

Vrem $(A, \vee, \wedge, 0, 1, ')$ latice Boole.

$(A, \vee, \wedge)$ latice $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \wedge \text{ și } \vee \text{ sunt asociative, comutative} \\ \text{are loc absorbția} \end{cases}$

Dem. că $\vee$ asociativ:

Fie $a, b, c \in A$.

$$(a \vee b) \vee c = (a+b+ab) \vee c$$
$$= (a+b+ab)+c+(a+b+ab)c$$
$$= a+b+ab+c+ac+bc+abc.$$
$$= a+b+c+ab+bc+ac+abc. \quad (1)$$

$$a \vee (b \vee c) = a \vee (b+c+bc) = a+(b+c+bc)+a(b+c+bc)$$
$$= a+b+c+bc+ab+ac+abc. \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ „$\vee$" asociativ.

Cum $a \wedge b = a \cdot b$, asociativitatea lui „$\wedge$" este o consecință directă a asociativității „$\cdot$".

Comutativitea lui $\vee$ și $\wedge$ Temă.

Absorbția: Vrem $\forall a, b \in A$: $a \wedge (a \vee b) = a$ și
$a \vee (a \wedge b) = a$.

Dem. $a \wedge (a \vee b) = a$.

$a \wedge (a \vee b) \overset{def \vee}{=\!=} a \wedge (a + b + ab) \overset{def \wedge}{=\!=} a(a+b+ab)$
$= a^2 + ab + a^2 b \overset{\forall x \in A, x^2 = x}{=\!=\!=} a + ab + ab = a + ab(1+1)$
$\overset{1+1=0}{=\!=} a + ab \cdot 0 = a + 0 = a.$

A doua relație. Temă.

Dem că $(A, \vee, \wedge)$ este distributivă.

Fie $a, b, c \in A$. Vrem $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

$a \vee (b \wedge c) \overset{def \wedge}{=\!=} a \vee (bc) \overset{def \vee}{=\!=} a + bc + abc. \ (1)$

$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \overset{def \vee}{=\!=} (a + b + ab) \wedge (a + c + ac) \overset{def \wedge}{=\!=}$
$= (a+b+ab)(a+c+ac) \overset{distrib}{=\!=} a^2 + ac + a^2 c + ba +$
$+ bc + bac + a^2 b + abc + a^2 bc \overset{\forall x \in A, x^2 = x}{=\!=\!=}$
$= a + \underline{ac} + \underline{ac} + \underline{\underline{ab}} + bc + \underline{\underline{\underline{abc}}} + \underline{\underline{ab}} + \underline{\underline{\underline{abc}}} + abc.$
$\overset{1+1=0}{=\!=} a + bc + abc. \ (2).$

Din (1) și (2) $(A, \vee, \wedge)$ este distributivă.

Faptul că $0 = \min A$, $1 = \max A$ și $\begin{cases} a' \wedge a = 0 \\ a' \vee a = 1 \end{cases}$

în suportul de curs.

Exemplu: Fie M o mulțime

$(\mathcal{P}(M), \cup, \cap, \emptyset, M, C)$ latice Boole.

$(\mathcal{P}(M), \Delta, \cap, \emptyset, M)$ inel Boole.

(108) Folosind structura de inel Boole a lui $\mathcal{P}(U)$ să se rezolve urm. sisteme de ecuații, unde $A, B, C \in \mathcal{P}(U)$ sunt date, iar $X \in \mathcal{P}(U)$ este necunoscuta:

a) $A \cap X = B$, $A \cup X = C$.

$$\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases} \xleftrightarrow{\text{Th. Stone}} \begin{cases} A \cdot X = B \\ A + X + AX = C. \end{cases} \overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

Lucrăm în latica Boole   Lucrăm într-un inel Boole

$$A + X + AX + AX = C + B \xRightarrow[A+|]{1+1=0} A + X = C + B \xRightarrow{1+1=0} X = A + C + B$$

Adică $X = A \Delta C \Delta B$.

b) $A \setminus X = B\ ,\ X \setminus A = C$

$$\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cap C_X = B \\ X \cap C_A = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(1+X) = B \\ X(1+A) = C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + AX = B \\ X + XA = C \end{cases} \quad (+)\ ,1+1=0$$

$$A + X = B + C. \Rightarrow X = A + B + C.$$

$A+|$

Așadar $A \Delta B \Delta C = X$.