CURS 12+13

Fie K un corp comutativ, V şi V' K-spaţii vectoriale, $n = \dim V$, $m = \dim V'$ şi $u = (u_1, \ldots, u_n)$ respectiv $v = (v_1, \ldots, v_m)$ o bază a lui V respectiv V' ($m, n \in \mathbb{N}^*$). Reamintim din cursul anterior:

• Pentru o transformare liniară $f : V \to V'$, matricea $[f]_{u,v}$ este matricea de tipul (m, n) (peste K) care are coloanele formate din coordonatele vectorilor $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ în baza v. Formal, scriem:

$$(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = (v_1, \ldots, v_m)[f]_{u,v}.$$

$V = V'$, $u = v$
$[f]_{u,u} = [f]_u$

• Dacă $f : V \to V'$ este transformare liniară, $x \in V$ are coordonatele $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ în baza u şi $f(x)$ are coordonatele $\beta_1, \ldots, \beta_m$ în baza v, atunci

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = [f]_{u,v} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

• Pentru o transformare liniară $f : V \to V'$,

$$\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rang} [f]_{u,v}.$$

• Dacă $u'_1, \ldots, u'_n \in V$, atunci $u' = (u'_1, \ldots, u'_n)$ este o bază a lui V dacă şi numai dacă există o matrice inversabilă $S = (s_{ij}) \in M_n(K)$ unic determinată (numită **matricea de trecere de la baza** u **la baza** u') astfel încât

$$u'_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} u_i, \ \forall j = 1, \ldots, n,$$

ceea ce poate fi scris, formal, $(u'_1, \ldots, u'_n) = (u_1, \ldots, u_n) \cdot S$.

• Dacă S este matricea de trecere de la baza u la baza u', atunci matricea de trecere de la baza u' la baza u este S^{-1}.

• Pentru orice K-spaţiu vectorial V de dimensiune n şi orice bază u a lui V avem

$$[1_V]_u = I_n.$$

• Dacă $f, f' : V \to V'$ sunt transformări liniare şi $\alpha \in K$, atunci

$$[f + f']_{u,v} = [f]_{u,v} + [f']_{u,v} \text{ şi } [\alpha f]_{u,v} = \alpha [f]_{u,v}.$$

• Dacă şi V'' e K-spaţiu vectorial (de tip finit), w e bază a lui V'', $f : V \to V'$ şi $g : V' \to V''$ sunt transformări liniare, atunci

$$[g \circ f]_{u,w} = [g]_{v,w} \cdot [f]_{u,v}.$$

• Fie u, u' baze ale lui V şi v, v' baze ale lui V' cu S matricea de trecere de la u la u' şi T matricea de trecere de la v la v'. Dacă $f : V \to V'$ este transformare liniară, atunci

$$[f]_{u',v'} = T^{-1} \cdot [f]_{u,v} \cdot S.$$

• Dacă u, u' sunt baze ale lui V, S este matricea de trecere de la u la u' şi $f \in End_K(V)$, atunci

$$[f]_{u'} = S^{-1} \cdot [f]_u \cdot S.$$

Vectori proprii şi valori proprii

Fie K un corp comutativ şi V un K-spaţiu vectorial.

Definiţia 1. Fie $f : V \to V$ o transformare liniară, adică $f \in End_K(V)$. Un vector nenul $x \in V$ se numeşte **vector propriu al lui** f dacă există $\lambda \in K$ astfel încât $f(x) = \lambda x$. Scalarul λ se numeşte **valoare proprie** a lui f corespunzătoare lui x. Mulţimea tuturor valorilor proprii ale lui f se numeşte **spectrul** lui f.

Observaţiile 2. a) Unui vector propriu îi corespunde o singură valoare proprie.

Într-adevăr, dacă $x \in V$, $x \neq 0$ este un vector propriu al lui f şi λ, λ' sunt valori proprii ale lui f corespunzătoare lui x, atunci

$$f(x) = \lambda x \text{ şi } f(x) = \lambda' x \Rightarrow \lambda x = \lambda' x \Rightarrow (\lambda - \lambda')x = 0 \overset{x \neq 0}{\Longrightarrow} \lambda - \lambda' = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda'.$$

b) Dacă $\lambda \in K$ este o valoare proprie a lui f şi $V(\lambda)$ este submulţimea lui V formată din vectorul nul şi din vectorii proprii corespunzători valorii proprii λ, adică

$$V(\lambda) = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\},$$

atunci $V(\lambda)$ este un subspaţiu al lui V numit **subspaţiul propriu** al lui f corespunzător lui λ.

Într-adevăr

$0 = f(x) - \lambda x = f(x) - \lambda \cdot 1_V(x)$

$$x \in V(\lambda) \Leftrightarrow f(x) = \lambda x \Leftrightarrow (f - \lambda 1_V)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\,(f - \lambda 1_V)$$

ceea ce demonstrează că $V(\lambda) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda 1_V)$. Întrucât nucleul unei transformări liniare este un subspaţiu rezultă că $V(\lambda)$ este un subspaţiu al lui V.

c) Dacă $\lambda \in K$ este o valoare proprie a lui $f \in End_K(V)$, atunci $\dim V(\lambda) \geq 1$. ✓

Într-adevăr, cum $V(\lambda) \leq_K V$ este nenul, $\dim V(\lambda) > 0$, prin urmare, $\dim V(\lambda) \geq 1$.

d) Dacă $\lambda \in K$ este o valoare proprie a lui $f \in End_K(V)$, atunci $f(V(\lambda)) \subseteq V(\lambda)$.

Într-adevăr,

$$x \in V(\lambda) \Rightarrow f(x) = \lambda x \Rightarrow f(f(x)) = \lambda f(x) \Rightarrow f(x) \in V(\lambda).$$

În continuare considerăm că V are dimensiunea finită şi $\dim V = n (\in \mathbb{N}^*)$.

Teorema 3. Fie $f \in End_K(V)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ o bază ordonată a lui V şi $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ matricea lui f în baza v, adică $A = [f]_v$. Atunci valorile proprii λ ale lui f coincid cu rădăcinile din K ale ecuaţiei $\det(A - \lambda I_n) = 0$, adică ale ecuaţiei

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

numită **ecuaţia caracteristică** a matricei A. Dacă $\lambda \in K$ este o rădăcină a ecuaţiei (1), atunci coordonatele $x_1, \dots, x_n$ în baza v ale vectorilor din $V(\lambda)$ sunt date de soluţiile sistemului liniar omogen

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$(2) \Longleftrightarrow (A - \lambda I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$

Demonstraţie. Un scalar $\lambda \in K$ este valoare proprie a lui f dacă şi numai dacă există un vector nenul $x \in V$ astfel încât $f(x) = \lambda x$ ceea ce se poate scrie sub forma $(f - \lambda 1_V)(x) = 0$ unde 1_V, respectiv 0 este endomorfismul identic al lui V, respectiv vectorul nul din V.

Dacă $x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ este scrierea lui x în baza v, cum coordonatele imaginii vectorului x prin $f - \lambda 1_V$ sunt combinaţii liniare de coordonatele lui x cu coeficienţii din liniile matricei $[f - \lambda 1_V]_v$,

$$(f - \lambda 1_V)(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; [f - \lambda 1_V]_v \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dar $[f - \lambda 1_V]_v = \overset{A}{\overset{\shortparallel}{[f]_v}} - \lambda [1_V]_v$ şi $[1_V]_v = I_n$. Astfel, egalitatea de mai sus se rescrie

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Ecuaţia matriceală (3) este echivalentă cu sistemul liniar şi omogen (2), sistem care are soluţii nenule dacă şi numai dacă determinantul său este zero, adică λ este rădăcină a ecuaţiei (1). $\square$

Definiţia 4. Calculând determinantul $\det(A - \lambda I_n)$ din membrul întâi al ecuaţiei (1) obţinem o expresie polinomială $p_A(\lambda)$ de gradul n în λ numită **polinomul caracteristic al transformării liniare (endomorfismului)** f **în baza** v sau **polinomul caracteristic al matricei** $A = [f]_v$. Mai exact polinomul caracteristic se obţine înlocuind în $\det(A - \lambda I_n)$ scalarul λ cu nedeterminanta X.

Teorema 5. Dacă A şi B sunt matricele lui $f \in End_K(V)$ în două baze, atunci $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$.

Demonstraţie. Fie u, v baze ale lui V, S matricea de trecere de la v la u, $A = [f]_v$ şi $B = [f]_u$. Atunci $S \in GL_n(K)$ şi $B = S^{-1}AS$. Prin urmare,

$[f]_u = S^{-1} \cdot [f]_v \cdot S$

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_n) = \det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1} I_n S) = \det(S^{-1}(A - \lambda I_n)S) = \det(S^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \det(S)$$

Folosind comutativitatea lui K şi $\det S^{-1} = (\det S)^{-1}$ avem,

$$p_B(\lambda) = \underbrace{\det(S^{-1}) \det(S)}_{\det(S^{-1} \cdot S) = \det I_n = 1} \det(A - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n) = p_A(\lambda).$$

Observaţiile 6. a) Teorema 5 ne arată că polinomul caracteristic al unui endomorfism f într-o bază nu depinde de bază, de aceea se numeşte şi **polinomul caracteristic al lui** f şi se notează uneori cu $p_f(\lambda)$. Calculând determinantul din membrul întâi al lui (1) primim

$$p_f(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

unde

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) \text{ şi } a_0 = p_f(0) = \det A.$$

Întrucât polinomul p_f nu depinde de bază rezultă că suma $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ (numită **urma** lui A) şi $\det A$ sunt invarianţi ai lui f. De aceea $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ se mai numeşte şi **urma lui** f şi $\det A$ se numeşte **determinantul lui** f.

b) Polinomul caracteristic al lui $f \in End_K(V)$ are gradul $n = \dim V$.

c) Un endomorfism $f \in End_K(V)$ are cel mult $n = \dim V$ valori proprii diferite.

d) Dacă $K = \mathbb{C}$, $f \in End_K(V)$ şi $n = \dim V$, atunci polinomul caracteristic al lui f are n rădăcini (nu neapărat diferite) în K. Această afirmaţie nu este adevărată în cazul $K = \mathbb{R}$.

Definiţia 7. O matrice din $M_n(K)$ de forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

se numeşte **matrice diagonală**.

Definiţia 8. Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune n. Un **endomorfism** f al lui V se numeşte **diagonalizabil** dacă există o bază $v = (v_1, \dots, v_n)$ a lui V în care matricea lui f este diagonală. O **matrice** $A \in M_n(K)$ se numeşte **diagonalizabilă** dacă există un endomorfism diagonalizabil $f \in End_K(V)$ şi o bază v a lui V astfel încât $[f]_v = A$.

Observaţia 9. O matrice $A \in M_n(K)$ este diagonalizabilă dacă şi numai dacă există $S \in GL_n(K)$ astfel încât $S^{-1}AS$ are forma (4).

Teorema 10. Un endomorfism $f \in End_K(V)$ este diagonalizabil dacă şi numai dacă V are o bază $v = (v_1, \dots, v_n)$ formată numai din vectori proprii ai lui f.

Demonstraţie. Un $f \in End_K(V)$ este diagonalizabil dacă şi numai dacă există o bază ordonată $v = (v_1, \dots, v_n)$ a lui V în care matricea $[f]_v$ are forma (4) ceea ce este echivalent cu

$$\begin{cases} f(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \dots + 0 \cdot v_n \\ f(v_2) = 0 \cdot v_1 + \lambda_2 v_2 + 0 \cdot v_3 + \dots + 0 \cdot v_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(v_n) = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \dots + \lambda_n v_n \end{cases}$$

adică cu faptul că fiecare v_i $(i = 1, \dots, n)$ este vector propriu al lui f cu valoare proprie λ_i. $\square$

Corolarul 11. Dacă $f \in End_K(V)$ este diagonalizabil, atunci polinomul caracteristic al lui f are toate rădăcinile în K.

Într-adevăr, dacă există o bază v a lui V pentru care $[f]_v$ are forma (4), atunci

$$p_f(\lambda) = \det([f]_v - \lambda I_n) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

ceea ce ne arată că cele n rădăcini ale lui $p_f(\lambda)$ sunt $\lambda_i \in K$ $(i = 1, \dots, n)$.

Definiţia 12. Fie $f \in End_K(V)$ şi $\lambda_i \in K$ o rădăcină a polinomului $p_f(\lambda)$. Ordinul de multiplicitate m_i al lui λ_i în polinomul caracteristic $p_f(\lambda)$ se numeşte **multiplicitatea algebrică** a lui λ_i, iar $n_i = \dim V(\lambda_i)$ se numeşte **multiplicitatea geometrică** a lui λ_i.

Propoziţia 13. Fie $f \in End_K(V)$ şi $\lambda_i \in K$ o rădăcină a polinomului $p_f(\lambda)$. Dacă m_i este multiplicitatea algebrică a lui λ_i, atunci $\dim V(\lambda_i) \leq m_i$ (adică multiplicitatea geometrică a lui λ_i este cel mult egală cu multiplicitatea algebrică a lui λ_i).

Demonstraţie. *(facultativă)*

Dacă $v = (v_1, \dots, v_{n_i})$ este o bază a lui $V(\lambda_i)$ şi $v' = (v_1, \dots, v_{n_i}, v_{n_i+1}, \dots, v_n)$ este o completare a lui v la o bază a lui V, atunci $f(v_1) = \lambda_i v_1, \dots, f(v_{n_i}) = \lambda_i v_{n_i}$. Prin urmare, notând cu B_1 matricea diagonală din $M_{n_i}(K)$ care are pe diagonala principală scalarul λ_i, adică $B_1 = \lambda_i I_{n_i}$, avem

$$[f]_{v'} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & B_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

unde O este matrice zero. Din (5) rezultă

$$p_f(\lambda) = \det(B_1 - \lambda I_{n_i}) \cdot \det(B_3 - \lambda I_{n-n_i}) = (\lambda_i - \lambda)^{n_i} \cdot \det(B_3 - \lambda I_{n-n_i})$$

ceea ce ne arată că

$$p_f(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{n_i} \cdot p_{B_3}(\lambda). \tag{6}$$

Din (6) urmează $n_i \leq m_i$. $\square$

Corolarul 14. Fie $f \in End_K(V)$ şi $\lambda_i \in K$ o rădăcină simplă a polinomului $p_f(\lambda)$. Atunci multiplicitatea geometrică a lui λ_i este egală cu multiplicitatea algebrică a lui λ_i şi ambele sunt 1.

Într-adevăr, dacă m_i şi n_i sunt multiplicităţile algebrică, respectiv geometrică ale lui λ_i, atunci

$$1 \leq \dim V(\lambda_i) = n_i \leq m_i = 1 \;\Rightarrow\; m_i = n_i = 1.$$

Vom vedea că vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte sunt liniar independenţi.

Teorema 15. Dacă $f \in End_K(V)$ şi $v_1, \ldots, v_k \in V$ sunt vectori proprii ai lui f care au valorile proprii două câte două diferite, atunci $v_1, \ldots, v_k$ sunt liniar independenţi.

Demonstraţie. Fie λ_i valoarea proprie corespunzătoare lui v_i $(i = 1, \ldots, k)$.

Demonstrăm teorema prin inducţie după k. Pentru $k = 1$, din $v_1 \neq 0$ rezultă că dacă $\alpha_1 v_1 = 0$ cu $\alpha_1 \in K$, atunci $\alpha_1 = 0$. Deci pentru $k = 1$ afirmaţia din teoremă este adevărată.

Presupunem afirmaţia adevărată pentru $k \geq 1$ şi o demonstrăm pentru $k+1$ valori proprii distincte. $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1} \in K$
Dacă $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1} \in K$ şi $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0 \tag{7}$$

atunci aplicând pe f obţinem $0 = f(0) = f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k+1} v_{k+1}) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_{k+1} f(v_{k+1})$

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_k v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0. \tag{8}$$

Înmulţind pe (7) cu $-\lambda_{k+1}$ şi adunând cu (8) primim

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})v_1 + \cdots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})v_k = 0$$

de unde conform ipotezei inducţiei rezultă l.indep.

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = \cdots = \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$$

ceea ce împreună cu $\lambda_1 \neq \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_k \neq \lambda_{k+1}$ implică $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Acum din (7) rezultă şi $\alpha_{k+1} = 0$. Deci vectorii $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}$ sunt liniar independenţi. $\square$

$\Downarrow$

Corolarul 16. Dacă $f \in End_K(V)$, $n = \dim V$ şi f are n valori proprii două câte două diferite, atunci V are o bază formată din vectori proprii, deci f este diagonalizabil.

$\Uparrow$ $k \in \mathbb{N}^*$

Teorema 17. Fie $n = \dim V$, $f \in End_K(V)$. Sunt echivalente următoarele afirmaţii:
a) f este diagonalizabil.
b) Polinomul caracteristic $p_f(\lambda)$ are toate rădăcinile în K, iar dacă $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sunt aceste rădăcini (două câte două diferite) şi m_i, respectiv n_i este multiplicitatea algebrică, respectiv geometrică a lui λ_i, atunci $m_i = n_i$ pentru toţi $i \in \{1, \ldots, k\}$.

(fără demonstraţie)

După cum am văzut în Corolarul 14, pentru λ_i cu $m_i = 1$ egalitatea multiplicităţilor este automat verificată. În practică, pentru a testa diagonalizabilitatea lui f folosim următorul corolar:

Corolarul 18. Cu notaţiile din teorema 17, f este diagonalizabil dacă şi numai dacă toate rădăcinile lui $p_f(\lambda)$ sunt în K şi

$$m_i = n - \text{rang}\,(f - \lambda_i 1_V),\ \forall\, i \in \{1, \dots, k\}. \tag{9}$$

Condiţia (9) se obţine din $m_i = n_i$ având în vedere că $V(\lambda_i) = \text{Ker}\,(f - \lambda_i 1_V)$ astfel:

$$n_i = \dim V(\lambda_i) = \dim \text{Ker}\,(f - \lambda_i 1_V) = \dim V - \dim(f - \lambda_i 1_V)(V) = n - \text{rang}\,(f - \lambda_i 1_V).$$

Teorema Cayley-Hamilton

Fie K un corp comutativ, $f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m \in K[X]$ şi $A \in M_n(K)$. Matricea

$$f(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_m A^m$$

se numeşte valoarea polinomului f în A iar dacă $f(A) = O_n$, atunci spunem că A e rădăcină a lui f.

Dacă $f, g \in K[X]$, $\alpha \in K$, atunci

$$(f+g)(A) = f(A) + g(A),\ (fg)(A) = f(A)g(A),$$

$$(\alpha f)(A) = \alpha f(A),\ f(A)g(A) = g(A)f(A).$$

Teorema 19. (Teorema Cayley-Hamilton). Orice matrice $A \in M_n(K)$ este rădăcină a polinomului său caracteristic, adică $p_A(A) = O$, unde $O = O_n$ este matricea nulă din $M_n(K)$.

Demonstraţie. (*facultativă*)

Să observăm că orice matrice $C \in M_n(K[X])$ se scrie în mod unic sub forma

$$C = C_0 + C_1 X + \cdots + C_m X^m,\ \text{unde } C_i \in M_n(K)\ (i = 0, 1, \dots, m).$$

Dacă B este matricea adjunctă a matricei $A - XI_n$, atunci

$$B \cdot (A - XI_n) = p_A(X) \cdot I_n \tag{10}$$

pentru că $p_A(X) = \det(A - XI_n)$. Polinomul caracteristic este de forma

$$p_A(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n. \tag{11}$$

Elementele lui B fiind complemenţii algebrici ai elementelor matricei $A - XI_n$ urmează că aceste elemente sunt polinoame din $K[X]$ de grad cel mult $n-1$. Deci B se poate scrie sub forma

$$B = B_0 + B_1 X + \cdots + B_{n-1} X^{n-1} \tag{12}$$

unde $B_i \in M_n(K)$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$. Din (10), (11) şi (12) rezultă

$$(B_0 + B_1 X + \cdots + B_{n-1} X^{n-1})(A - XI_n) = (a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n) I_n$$

ceea ce are loc dacă

$$\begin{cases} -B_{n-1} = a_n I_n \\ B_{n-1} A - B_{n-2} = a_{n-1} I_n \\ \vdots \\ B_1 A - B_0 = a_1 I_n \\ B_0 A = a_0 I_n \end{cases}$$

Înmulţind la dreapta prima egalitate cu A^n, a doua cu $A^{n-1}, \ldots,$ penultima cu A şi adunând egalităţile obţinute cu ultima egalitate primim

$$a_nA^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_1A + \underbrace{a_0}_{=\det A}I_n = O \tag{13}$$

adică $p_A(A) = O$. □

Corolarul 20. Dacă $A \in M_n(K)$ este o matrice inversabilă, atunci din (13) rezultă

$$A^{-1} = -\cancel{\frac{1}{\det A}}(a_1I_n + a_2A + \cdots + a_nA^{n-1}).$$

$-(\det A)^{-1}$