Seminar 6

Sisteme dinamice generate de sisteme planare de ecuaţii diferenţiale autonome

6.1 Flux. Portret fazic

Se consideră sistemul planar de ecuaţii diferenţiale autonome

$$\begin{cases} x' = & f_1(x,y) \\ y' = & f_2(x,y) \end{cases} \tag{6.1}$$

Fluxul generat de sistemul planar (6.1) reprezintă soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} x' = & f_1(x,y) \\ y' = & f_2(x,y) \\ x(0) = & \eta_1 \\ y(0) = & \eta_2 \end{cases} \tag{6.2}$$

unde $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$, parametru. Notăm cu $x(t;\eta), y(t;\eta) : I_\eta \to \mathbb{R}$, $I_\eta = (\alpha_\eta, \beta_\eta)$, unica soluţie saturată a problemei (6.2) în ipoteza că $f \in C^1$. Fluxul este dat de

$$\begin{gathered} \varphi : W \to \mathbb{R}^2 \\ \varphi(t,\eta) = (x(t;\eta), y(t;\eta)) \end{gathered} \tag{6.3}$$

unde

$$W = \left\{ I_\eta \times \{\eta\} : \quad \eta \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Dacă $I_\eta = \mathbb{R}$

Proprietăţile fluxului:

1. $\varphi(0,\eta) = \eta$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$;

2. $\varphi(t+s,\eta) = \varphi(t,\varphi(s,\eta))$, $t,s \in I_\eta$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$;

3. φ continuă.

$\gamma^+(\eta) = \bigcup_{t\in[0;\beta_\eta)} \varphi(t,\eta)$ orbita pozitivă a lui $\eta \in \mathbb{R}$

$\gamma^-(\eta) = \bigcup_{t\in(\alpha_\eta;0]} \varphi(t,\eta)$ orbita negativă a lui $\eta \in \mathbb{R}$

$\gamma(\eta) = \gamma^+(\eta) \cup \gamma^-(\eta)$ orbita lui $\eta \in \mathbb{R}$

Reuniunea tuturor orbitelor împreună cu sensul de parcurgere al acestora formeaza portretul fazic.

Exerciţiul 6.1.1 *Se consideră sistemul*

$$\begin{cases} x' = & -x \\ y' = & -2y \end{cases}$$

(a) Să se determine fluxul generat de sistem;

(b) Să se determine orbitele $\gamma(0,0)$, $\gamma(1,0)$, $\gamma(-1,0)$, $\gamma(0,1)$, $\gamma(0,-1)$, $\gamma(1,1)$;

(c) Să se determine portretul fazic.

Se consideră sistemul (6.1), ecuaţia

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)} \tag{6.4}$$

reprezintă ecuaţia diferenţială a orbitelor din portretul fazic.

Exerciţiul 6.1.2 *Să se determine portretul fazic pentru sistemele folosind ecuaţia diferenţială a orbitelor (6.4):*

(a) $\begin{cases} x' = & x \\ y' = & -2y \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x' = & y \\ y' = & -\omega^2 x \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' = & x \\ y' = & x + 2y \end{cases}$

6.2 Puncte de echilibru. Stabilitate

Fie sistemul planar autonom (6.1)

$$\begin{cases} x' = & f_1(x,y) \\ y' = & f_2(x,y) \end{cases}$$

Soluţiile constante de forma $(x(t), y(t)) \equiv (x^*, y^*)$, se numesc **soluţii echilibru** (staţionare), iar valoarea $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ se numesc **puncte de echilibru** (staţionare). Punctele de echilibru sunt **soluţiile reale** ale sistemului algebric

$$\begin{aligned} f_1(x,y) = & \ 0 \\ f_2(x,y) = & \ 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

În cazul sistemelor liniare

$$\begin{cases} x' = & a_{11}x + a_{12}y \\ y' = & a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

notăm cu $A = (a_{ij})_{i.j=1}^{2}$ matricea coeficienţilor. $(0,0)$ este punct de echilibru pentru acest sistem şi avem următorul rezultat de stabilitate:

Teorema 6.2.1 *(Teorema stabilităţii sistemelor liniare)*

(a) Dacă $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, $\forall\lambda$ *valoare proprie a matricii* A *atunci punctul de echilibru* $(0,0)$ *este asimptotic stabil;*

(b) Dacă $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$, $\forall\lambda$ *valoare proprie a matricii* A, *egalitatea cu* 0 *având loc pentru valori proprii simple, atunci punctul de echilibru* $(0,0)$ *este local stabil;*

(c) Dacă nu are loc (b) *atunci punctul de echilibru* $(0,0)$ *este instabil.*

În cazul sistemelor neliniare,

$$\begin{cases} x' = & f_1(x,y) \\ y' = & f_2(x,y) \end{cases}$$

notăm prin

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

jacobianul funcţiei vectoriale $f = (f_1, f_1)$

Teorema 6.2.2 *(Teorema stabilităţii în primă aproximaţie)*
Fie $f \in C^1(\mathbb{R})$ *şi* $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ *un punct de echilibru a sistemului (6.1).*

(a) Dacă $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, $\forall\lambda$ *valoare proprie a matricii* $J_f(x^*, y^*)$ *atunci punctul de echilibru* (x^*, y^*) *este local asimptotic stabil;*

(b) Dacă există λ *valoare proprie a matricii* $J_f(x^*, y^*)$ *cu* $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ *atunci punctul de echilibru* (x^*, y^*) *este instabil.*

Exerciţiul 6.2.1 *Să se determine punctele de echilibru şi să se studieze stabilitatea acestora pentru*

(a) $\begin{cases} x' = & x \\ y' = & -2y \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x' = & y \\ y' = & -\omega^2 x \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' = & x + 5y \\ y' = & 5x + y \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x' = & 1 - xy \\ y' = & x - y^3 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x' = & y \\ y' = & 2x^3 + x^2 - x \end{cases}$