Seminar 4

Probleme ataşate ecuaţiilor diferenţiale

4.1 Problema Cauchy

Se consideră sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$y' = f(x, y) \tag{4.1}$$

unde $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$. Printr-o *problemă Cauchy* (*problemă cu valori iniţiale*) ataşată sistemului de ecuaţii (4.1) înţelegem problema

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y^0 \end{cases} \tag{4.2}$$

unde $x_0 \in I$, $y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Rezolvarea problemelor Cauchy revine la determinarea soluţiei generale a ecuaţiei după care sunt utilizate condiţiile iniţiale pentru determinarea valorilor constantelor de integrare, soluţia problemei fiind soluţia obţinută prin înlocuirea acestor constante în expresia soluţiei generale.

Exerciţiul 4.1.1 *Să se determine soluţiile următoarelor probleme Cauchy:*

(a) $\begin{cases} (1 + e^x)\, yy' - e^x &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} xy' + y &= e^x \\ y(a) &= b, \quad a, b \in \mathbb{R} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + 4y_2 \\ y_1(0) &= 0 \\ y_2(0) &= -1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y_1' &= 3y_1 - y_2 \\ y_2' &= 10y_1 - 4y_2 \\ y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= 5 \end{cases}$

În cazul ecuaţiilor diferenţiale de ordinul n problema Cauchy are următoarea formă

$$\begin{cases} y^{(n)} & = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) \\ y(x_0) & = y_1^0 \\ y'(x_0) & = y_2^0 \\ \vdots & \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) & = y_n^0 \end{cases} \tag{4.3}$$

unde $x_0 \in I$, $y_1^0, ...y_n^0 \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 4.1.2 *Să se determine soluţiile următoarelor probleme Cauchy:*

$$(a) \begin{cases} y'' - 5y' + 4y & = 0 \\ y(0) & = 5 \\ y'(0) & = 8 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} y'' + 4y & = 4x \\ y(\pi) & = 0 \\ y'(\pi) & = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} y'' - 4y' + 5y & = 2x^2 e^x \\ y(0) & = 2 \\ y'(0) & = 3 \end{cases} \qquad (d) \begin{cases} y'' + 6y' + 9y & = 6\cos x + 8\sin x \\ y(0) & = 1 \\ y'(0) & = 1 \end{cases}$$

4.2 Problema bilocală

Problema bilocală se ataşează ecuaţiilor diferenţiale de ordinul II şi spre deosebire de problema Cauchy condiţiile sunt date în două puncte diferite, adică:

$$\begin{cases} y'' & = f(x, y, y') \\ y(a) & = \alpha \\ y(b) & = \beta \end{cases} \tag{4.4}$$

Determinarea soluţiei se face ca în cazul problemelor Cauchy, adică se determină soluţia generală a ecuaţiei, după care sunt utilizate cele două condiţii pentru determinarea celor două constante de integrare, soluţia problemei bilocale fiind soluţia obţinută prin înlocuirea acestor constante în expresia soluţiei generale.

Exerciţiul 4.2.1 *Să se determine soluţiilor următoarelor probleme bilocale:*

$$(a) \begin{cases} y'' + 3y' & = 0 \\ y(0) & = 0 \\ y(3) & = 0 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} y'' + y & = x \\ y(0) & = 1 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) & = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} y'' + \pi^2 y & = 0 \\ y(0) & = 0 \\ y(1) & = 0 \end{cases} \qquad (d) \begin{cases} y'' + 4y' + 4y & = e^{-x} \\ y(0) & = 1 \\ y(\ln 2) & = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln 2 \end{cases}$$

Exerciţiul 4.2.2 *Să se determine valorile parametrului real λ pentru care problema bilocală*

$$\begin{cases} y'' + \lambda y & = 0 \\ y(0) & = 0 \\ y(1) & = 0 \end{cases}$$

admite soluţii nebanale (diferite de soluţia identic nulă) şi să determine aceste soluţii.

4.3 Alte tipuri de probleme

În categoria "alte tipuri de probleme" sunt incluse probleme care au ataşate ale tipuri condiţii decât cele utilizate în cazul problemelor Cauchy sau bilocale.

Exerciţiul 4.3.1 *Să se determine soluţiilor următoarelor ecuaţii care satisfac condiţiile date:*

(a) $\begin{cases} x^2 y' \cos \frac{1}{x} - y \sin \frac{1}{x} & = -1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} y(x) & = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y'' - y & = 1 \\ y(0) & = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} y(x) & < +\infty \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'' - 4y' + 5y & = \sin(x) \\ y(x) & \textit{mărginită pe } \mathbb{R} \end{cases}$