CURS 9 + 10

Baze. Dimensiune

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ şi V un K-spaţiu vectorial.

Definiţiile 1. Vectorii $x_1, \dots, x_n \in V$ se numesc **liniar independenţi** dacă

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0,$$

unde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. În caz contrar vectorii $x_1, \dots, x_n$ se numesc **liniar dependenţi**. O submulţime finită a lui V se numeşte **liberă** dacă elementele sale sunt vectori liniar independenţi, iar în caz contrar se numeşte **legată**. O submulţime oarecare $X \subseteq V$ se numeşte **liberă** dacă orice submulţime finită a lui X este liberă, iar în caz contrar se numeşte **legată**.

Observaţiile 2. a) Vectorii $x_1, \dots, x_n \in V$ sunt liniar dependenţi dacă şi numai dacă există scalarii $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ nu toţi zero astfel încât

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0.$$

b) Dacă unul dintre vectorii $x_1, \dots, x_n \in V$ este zero, atunci ei sunt liniar dependenţi.

$x_i = 0 \Longrightarrow 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_{i-1} + \underset{\neq 0}{1} \cdot \underset{=0}{x_i} + 0 \cdot x_{i+1} + \dots + 0 \cdot x_n = 0$

c) Dacă vectorii $x_1, \dots, x_n \in V$ sunt liniar independenţi, atunci ei sunt doi câte doi diferiţi.

$i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, $x_i = x_j \Longrightarrow x_1, \dots, x_n$ liniar dependenți deoarece
$0 \cdot x_1 + \dots + 1 \cdot x_i + \dots + (-1) \cdot x_j + \dots + 0 \cdot x_n = 0$

d) Dacă $x \in V$ atunci $\{x\}$ este liberă dacă şi numai dacă $x \neq 0$. $(\alpha x = 0 \Longrightarrow \alpha = 0)$

e) Submulţimea vidă $\emptyset \subseteq V$ este liberă.

f) Orice submulţime a unei mulţimi libere este liberă.

g) Dacă submulţimea $X \subseteq V$ are o submulţime legată atunci X este legată. În particular, orice submulţime a lui V care conţine vectorul zero este legată.

Teorema 3. Vectorii $x_1, \dots, x_n \in V$ sunt liniar dependenţi dacă şi numai dacă unul dintre ei este o combinaţie liniară a celorlalţi.

Demonstraţie. ($x_1, \dots, x_n \in V$ l. indep. $\Longleftrightarrow$ nici unul dintre vectorii $x_1, \dots, x_n$ nu e comb. liniară a celorlalți.)

„$\Longrightarrow$" $x_1, \dots, x_n \in V$ l. dep. $\Longrightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ nu toți nuli a.i.

$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_i x_i + \dots + \alpha_n x_n = 0 \quad (*)$

Pp. că $\alpha_i \neq 0 \Longrightarrow \exists\, \alpha_i^{-1} \in K$ a.i. $\alpha_i^{-1} \cdot \alpha_i = 1$

$(*) \Rightarrow \alpha_i x_i = -\alpha_1 x_1 - \dots - \alpha_{i-1} x_{i-1} - \alpha_{i+1} x_{i+1} - \dots - \alpha_n x_n \quad \Big|\, \alpha_i^{-1} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x_i = -(\alpha_i^{-1} \alpha_1) x_1 - \dots - (\alpha_i^{-1} \alpha_{i-1}) x_{i-1} - (\alpha_i^{-1} \alpha_{i+1}) x_{i+1} - \dots - (\alpha_i^{-1} \alpha_n) x_n$

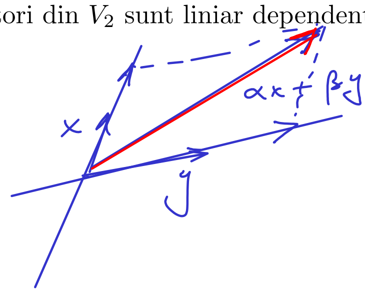
este o comb. liniară de $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$.

"$\Longleftarrow$" Dacă $x_i = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{i-1} x_{i-1} + \alpha_{i+1} x_{i+1} + \dots + \alpha_n x_n$ $(i \in \{1, \dots, n\})$

$\Longrightarrow \alpha_1 x_1 + \dots + \underset{\neq 0}{(-1)} \cdot x_i + \dots + \alpha_n x_n = 0 \Longrightarrow x_1, \dots, x_n$ l. dep.

Corolarul 4. a) Dacă $X \subseteq V$, atunci X este legată dacă şi numai dacă există $x \in X$ astfel încât $x \in \langle X \setminus \{x\} \rangle$.
b) Dacă $X \subseteq V$, atunci X este liberă dacă şi numai dacă pentru orice $x \in X$ avem $x \notin \langle X \setminus \{x\} \rangle$.

Exemplele 5. a) Fie V_2, respectiv V_3, $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial al vectorilor din plan, respectiv spaţiu. Doi vectori din V_2 sau V_3 sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă nu au aceeaşi direcţie. Orice trei vectori din V_2 sunt liniar dependenţi.



$\alpha x + \beta y = 0 \Longrightarrow \alpha x$ și βy sunt pe aceeași dreaptă

Trei vectori din V_3 sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă nu sunt coplanari. Orice patru vectori din V_3 sunt liniar dependenţi.

b) Fie K un corp comutativ şi $n \in \mathbb{N}^*$. În K-spaţiul vectorial K^n vectorii

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),\ e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots,\ e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

sunt liniar independenţi pentru că

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = (0, \dots, 0) \Rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (0, \dots, 0) \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

c) Fie K un corp comutativ. În K-spaţiul vectorial $K[X]$ mulţimea $\{\underset{=X^0}{1}, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$ $= \{X^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este liberă.

Fie $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ distincte, $X^{k_1}, \dots, X^{k_m}$ l. indep., $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$

$\alpha_1 X^{k_1} + \dots + \alpha_m X^{k_m} = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$

Definiţiile 6. Fie V un K-spaţiu vectorial. O submulţime $X \subseteq V$ se numeşte **bază** a lui V dacă X este liberă şi X generează pe V, adică $V = \langle X \rangle$.

Teorema 7. Fie V un K-spaţiu vectorial. O submulţime X a lui V este bază a lui V dacă şi numai dacă orice vector din V se exprimă într-un singur mod ca şi combinaţie liniară de elemente din X (mai exact, pentru orice $v \in V$ există o singură familie de scalari $(\alpha_x)_{x \in X}$ cu un număr finit de componente nenule astfel încât $v = \sum_{x \in X} \alpha_x x$).

Demonstraţie. $V = \langle X \rangle \iff$ orice $v \in V$ se scrie ca o comb. liniară de vectori din X

X liberă $\overset{?}{\iff}$ unicitatea scrierii ce rezultă de mai sus

"$\Longrightarrow$" Fie $v \in V$, $\overbrace{x_1, \dots, x_n}^{\text{distincți}} \in X$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in K$

$v = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (\alpha_1 - \beta_1) x_1 + (\alpha_2 - \beta_2) x_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) x_n = 0 \xrightarrow{X \text{ liberă}} \begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ \alpha_2 - \beta_2 = 0 \\ \dots \\ \alpha_n - \beta_n = 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow \alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$

"$\Longleftarrow$" Fie $\underbrace{x_1,\dots,x_n}_{\text{arbitrari distincți}} \in X$, $x_1,\dots,x_n$ l. indep.

Fie $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in K$, $\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n=0 = 0\cdot x_1+\dots+0\cdot x_n \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$

Exemplele 8. a) Orice doi vectori din V_2 (plan) care nu au aceeaşi direcţie formează o bază a lui V_2. Orice trei vectori necoplanari din V_3 (spaţiu) formează o bază a lui V_3.
b) Vectorii $e_1=(1,0,\dots,0)$, $e_2=(0,1,\dots,0),\dots,$ $e_n=(0,0,\dots,1)$ formează o bază în K-spaţiul vectorial K^n numită **baza canonică**.
c) Fie K un corp comutativ. Mulţimea $\{X^n \mid n\in\mathbb{N}\}$ este o bază în K-spaţiul vectorial $K[X]$.

Teorema 9. Fie V un K-spaţiu vectorial şi $X\subseteq V$. Dacă X generează pe V şi submulţimea $X_1\subseteq X$ e liberă, atunci există o bază X_2 a lui V astfel încât $X_1\subseteq X_2\subseteq X$.

Demonstraţie. *(facultativă)*
Fie $\mathcal{C}=\{X' \mid X_1\subseteq X'\subseteq X,\ X' \text{ liberă}\}$. Cum $X_1\in\mathcal{C}$, $\mathcal{C}\neq\emptyset$. Fie $\mathcal{C}'\subseteq\mathcal{C}$ un lanţ nevid în $(\mathcal{C},\subseteq)$ şi

$$X_0=\bigcup\{X' \mid X'\in\mathcal{C}'\}.$$

Arătăm că $X_0\in\mathcal{C}$. Pentru orice $x_1,\dots,x_n\in X_0$ există $X'_1,\dots,X'_n$ în $\mathcal{C}'$ astfel încât $x_i\in X'_i$ $(i=1,\dots,n)$, iar $\mathcal{C}'$ fiind lanţ rezultă că există $i_0\in\{1,\dots,n\}$ astfel încât $X'_i\subseteq X'_{i_0}$ $(i=1,\dots,n)$ ceea ce implică $x_i\in X'_{i_0}$ $(i=1,\dots,n)$. Prin urmare, din $X'_{i_0}\in\mathcal{C}$ deducem că elementele $x_1,\dots,x_n$ sunt liniar independente. Deci X_0 este liberă şi $X_1\subseteq X_0\subseteq X$, adică $X_0\in\mathcal{C}$ şi X_0 este majorantă a lui $\mathcal{C}'$. Din lema lui Zorn rezultă că există, în $\mathcal{C}$, un element maximal X_2. Din $X_2\in\mathcal{C}$ urmează că X_2 este liberă.

Pentru a arăta că X_2 este o bază a lui V mai trebuie arătat că $V=\langle X_2\rangle$. Dacă $V\neq\langle X_2\rangle$ urmează că $X\nsubseteq\langle X_2\rangle$, adică există $x\in X\setminus\langle X_2\rangle$ şi vom deduce că $X_2\cup\{x\}$ este liberă ceea ce contrazice maximalitatea lui X_2.

Într-adevăr, dacă

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i+\alpha x=0,$$

unde $x_i\in X_2$ şi $\alpha,\alpha_i\in K$ $(i=1,\dots,n)$ atunci $\alpha=0$ deoarece în caz contrar

$$x=-\sum_{i=1}^{n}\alpha^{-1}\alpha_i x_i\in\langle X_2\rangle$$

ceea ce contrazice alegerea lui x. Întrucât X_2 este liberă rezultă $\alpha_i=0$ $(i=1,\dots,n)$. Deci $X_2\cup\{x\}$ este liberă.

Corolarul 10. a) Orice spaţiu vectorial V are o bază.

$X_1=\emptyset\subseteq V=X \Longrightarrow \exists\, X_2$ bază în V

b) Orice submulţime liberă X_1 a unui spaţiu vectorial V poate fi extinsă la o bază X_2 a lui V.

$X=V \xRightarrow[\text{T.ant.}]{} \exists\, X_2$ bază în V a.î. $X_1\subseteq X_2(\subseteq V)$

c) O submulţime Y a unui spaţiu vectorial V este o bază a lui V dacă şi numai dacă Y este o submulţime liberă maximală a lui V.

$Y\subseteq V$, Y bază în $V \Longleftrightarrow (X'$ liberă şi $Y\subseteq X'\subseteq V\Longrightarrow Y=X')$

dem: „$\Longrightarrow$" Pp. $\exists X'$ liberă în ${}_K V$ a.î. $Y \subsetneq X' \Longrightarrow \exists x \in X' \setminus Y$

$\Longrightarrow$ $Y \cup \{x\} \subseteq X'$, $Y \cup \{x\}$ liberă $\Big\}$ contradicție
$x \in V = \langle Y \rangle$

„$\Longleftarrow$" Y subm. liberă maximală a lui V, $V = \langle Y \rangle$
$y \in Y \Longrightarrow y \in \langle Y \rangle$. Fie $x \in V \setminus Y$ arbitrar, $x \in \langle Y \rangle$

$Y \subsetneq Y \cup \{x\}$ nu este liberă $\Longrightarrow x \in \langle Y \rangle$

d) Din orice sistem de generatori X al unui spaţiu vectorial V se poate extrage o bază X_2 a lui V.

$X \supseteq X_1 = \emptyset$ liberă $\underset{T.ant.}{\Longrightarrow} \exists X_2$ bază în ${}_K V$ a.î. $(\emptyset \subseteq) X_2 \subseteq X$.

e) O submulţime Y a unui spaţiu vectorial V este o bază a lui V dacă şi numai dacă Y este un sistem de generatori minimal al lui V.

$Y \subseteq V$ bază $\Longleftrightarrow$ (X' sistem de generatori și $X' \subseteq Y \Longrightarrow X' = Y$)

dem: „$\Longrightarrow$" Pp. $\exists X'$ sist. de generatori pt. V, $X' \subsetneq Y \Longrightarrow \exists y \in Y \setminus X' \Longrightarrow y \in V = \langle X' \rangle$
$X' \subseteq Y \setminus \{y\}$ $\qquad \cap\!|\ \langle Y \setminus \{y\} \rangle$ contradicție Y liberă

„$\Longleftarrow$" Y liberă. Fie $y_1, \dots, y_n \in Y$ distincte, $y_1, \dots, y_n$ l. indep.
Fie $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0$
Pp. că $\alpha_1 \neq 0$ (eventual după o renumerotare) $\Big| \Longrightarrow y_1 = -\alpha_1^{-1}\alpha_2 y_2 - \dots - \alpha_1^{-1}\alpha_n y_n \in \langle Y \setminus \{y_1\} \rangle$

$\Longrightarrow V = \langle Y \rangle \subseteq \langle Y \setminus \{y_1\} \rangle \subseteq V \Longrightarrow V = \langle Y \setminus \{y_1\} \rangle$ contrazice minimalitatea lui Y. contrad

Deci $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

f) Dacă X_1 este o submulţime liberă a lui V şi $V = \langle Y \rangle$ atunci X_1 poate fi completată cu vectori din Y până la o bază X_2 a lui V.

$X_1 \subseteq X = X_1 \cup Y \Rightarrow V = \langle Y \rangle \subseteq \langle X_1 \cup Y \rangle \subseteq V \Rightarrow V = \langle X \rangle \Rightarrow \exists X_2$ bază în V
$X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_1 \cup Y$.

Teorema 11. (Proprietatea de universalitate a spaţiilor vectoriale)

$\longrightarrow$ 1) Dacă V este un K-spaţiu vectorial şi X o bază a sa, atunci pentru orice K-spaţiu vectorial V' şi orice funcţie $f : X \to V'$ există o singură transformare liniară $\overline{f} : V \to V'$ pentru care $\overline{f}|_X = f$ (cu alte cuvinte $f : X \to V'$ se poate prelungi în mod unic la o transformare liniară $\overline{f} : V \to V'$).

$\overline{f}(x) = f(x)$ $\forall x \in X$

2) Transformarea liniară $\overline{f}$ este injectivă dacă şi numai dacă f este injectivă şi $f(X)$ este liberă.

3) Transformarea liniară $\overline{f}$ este surjectivă dacă şi numai dacă $V' = \langle f(X) \rangle$.

Demonstraţie. Considerăm că $\overline{f}$ există ca mai sus.

1) Unicitatea lui $\overline{f}$: Fie $v \in V$; v se poate scrie în mod unic sub forma

$$v = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K, \ x_1, \dots, x_n \in X \qquad (1)$$

$$\overline{f}(v) \overset{(1)}{=} \overline{f}(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \underset{\overline{f}\text{ transf. liniară}}{=} \alpha_1 \overline{f}(x_1) + \dots + \alpha_n \overline{f}(x_n) = \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

$$\overline{f}(v) = \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n) \qquad (2)$$

Din unicitatea scrierii (1) $\Longrightarrow$ unicitatea lui $\overline{f}$ definit ca în (2).

Existența $\overline{f}$: Fie $\overline{f} : V \to V'$ definit prin (2) (unicitatea scrierii (1) a lui v asigură că $\overline{f}$ este o funcție).

$\bar{f}$ transf. liniară: Fie $\alpha, \beta \in K$, $u, v \in V$. Vectorii u și v admit scrieri unice

$u = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n$ și $v = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$, $x_1, \dots, x_n \in X$, $\alpha_i, \beta_i \in K$, $i = \overline{1,n}$

$$\bar{f}(\beta u + \alpha v) = \bar{f}(\beta\beta_1 x_1 + \dots + \beta\beta_n x_n + \alpha\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha\alpha_n x_n) =$$

$$= \bar{f}((\beta\beta_1 + \alpha\alpha_1)x_1 + \dots + (\beta\beta_n + \alpha\alpha_n)x_n) \overset{(2)}{=} (\beta\beta_1 + \alpha\alpha_1)f(x_1) + \dots + (\beta\beta_n + \alpha\alpha_n)f(x_n)$$

$$= \beta(\beta_1 f(x_1) + \dots + \beta_n f(x_n)) + \alpha(\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)) \overset{(2)}{=} \beta\bar{f}(u) + \alpha\bar{f}(v)$$

$\bar{f}|_X \overset{?}{=} f \iff \bar{f}(x) \overset{?}{=} f(x), \forall x \in X$ ($\overset{(2)}{\Leftarrow}$ luând $x = 1 \cdot x$).

2) „$\Leftarrow$" Fie $v \in \operatorname{Ker}\bar{f} \subseteq V \Longrightarrow v \overset{?}{=} 0$

2x2 diferite (f inj.)

v admite o scriere unică (1) $\overset{(2)}{\Longrightarrow} \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n) = \bar{f}(v) = 0$ în V'

$\overset{f(X) \text{ liberă}}{\Longrightarrow} \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} v = 0$.

„$\Longrightarrow$" $f = \bar{f}|_X \Longrightarrow f$ injectivă (orice restricție a unei injecții este injecție)

distincți

Fie $v_1, \dots, v_n \in f(X)$, $v_1, \dots, v_n$ l. indep (?)

$\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in X$ a.i. $f(x_1) = v_1, \dots, f(x_n) = v_n$

Fie $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \iff \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n) = 0 \overset{(2)}{\iff}$

$\iff \bar{f}(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = 0 \iff \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \in \operatorname{Ker}\bar{f} \underset{\bar{f} \text{ inj.}}{=} \{0\} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \overset{X \text{ liberă}}{\Longrightarrow} \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

distincte

3) $\bar{f}(V) = \bar{f}(\langle X \rangle) = \langle \bar{f}(X) \rangle = \langle f(X) \rangle$

$\bar{f}$ surj. $\iff \bar{f}(V) = V' \iff \langle f(X) \rangle = V'$

Corolarul 12. a) Dacă X este o bază a spaţiului vectorial V şi $\varphi, \varphi' : V \to V'$ sunt transformări liniare, atunci

$$\varphi|_X = \varphi'|_X \Rightarrow \varphi = \varphi',$$

adică o transformare liniară este determinată de restricţia sa la o bază.

b) Dacă $\varphi : V \to V'$ este o transformare liniară şi X o bază a lui V, atunci φ este izomorfism dacă şi numai dacă $\varphi|_X$ este injectivă şi $\varphi(X)$ este o bază a lui V'.

În Corolarul 10 a) am arătat că orice spaţiu vectorial are o bază. **În cele ce urmează vom considera că spaţiile vectoriale cu care lucrăm sunt de tip finit.** Vom arăta că toate bazele unui spaţiu vectorial V de tip finit au acelaşi cardinal (adică acelaşi număr de elemente). Acest cardinal se numeşte **dimensiunea** lui V. Chiar dacă în acest material nu este inclus cazul spaţiilor vectoriale care au un sistem infinit de generatori, menţionăm că şi în cazul lor toate bazele au acelaşi cardinal, cardinal care este dimensiunea spaţiului. De altfel, cititorul atent va observa că unele demonstraţii ce vor urma se potrivesc şi pentru spaţii vectoriale care nu sunt finit generate.

Teorema 13. (Teorema schimbului (Steinitz))
Fie V un K-spaţiu vectorial. Dacă $x_1, \dots, x_m \in V$ sunt vectori liniar independenţi şi $V = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$, atunci $m \leq n$ şi după o reindexare convenabilă avem

$$V = \langle x_1, \dots, x_m, y_{m+1}, \dots, y_n \rangle.$$

$(m, n \in \mathbb{N})$.

Demonstraţie. Inducţie după m.

Pt. $m = 0$ afirmaţia este, evident, adevărată.
Pp. afirmaţia adevărată pt. m vectori l. indep. şi o dem. pt $\underset{\text{2 × 2 diferiţi}}{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}} \in V$ liniar independenţi $(m \in \mathbb{N})$.

$x_1, \dots, x_m$ l. indep. $\xRightarrow{\text{ip. ind}}$ $m \leq n$ şi, după o eventuală reindexare a y-lor,

$$V = \langle x_1, \dots, x_m, y_{m+1}, \dots, y_n \rangle$$

Pp. prin reducere la absurd că $m = n$, avem

$x_{m+1} \in V = \langle x_1, \dots, x_m \rangle \Rightarrow x_{m+1}$ e comb. liniară de $x_1, \dots, x_m$
contrazice l. indep. $x_1, \dots, x_{m+1}$.

Deci $m < n \Longrightarrow m+1 \leq n$.

$x_{m+1} \in V = \langle x_1, \dots, x_m, y_{m+1}, \dots, y_n \rangle \Longrightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ a.i.

$x_{m+1} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m + \alpha_{m+1} y_{m+1} + \dots + \alpha_n y_n$
$x_1, \dots, x_m, x_{m+1}$ l. indep.
$\Longrightarrow \exists\, i \in \{m+1, \dots, n\}$ cu $\alpha_i \neq 0$.

Considerăm, fără a restrânge generalitatea, că $i = m+1$ ($\Leftarrow$ reindexare)

$\alpha_{m+1} \neq 0 \Longrightarrow \exists\, \alpha_{m+1}^{-1} \in K$

$\alpha_{m+1}^{-1} \cdot /\ \alpha_{m+1} y_{m+1} = -\alpha_1 x_1 - \dots - \alpha_m x_m + x_{m+1} - \alpha_{m+2} y_{m+2} - \dots - \alpha_n y_n$

$\Longrightarrow y_{m+1}$ este o comb. liniară de $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n$. $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow y_{m+1} \in \langle x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n \rangle$. $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow V = \langle x_1, \dots, x_m, y_{m+1}, \dots, y_n \rangle \subseteq \langle x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n \rangle \subseteq V$

$\Longrightarrow V = \langle x_1, \dots, x_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n \rangle$.

Corolarul 14. Toate bazele unui spaţiu vectorial V de tip finit (finit generat) sunt finite şi au acelaşi număr de vectori.

V de tip finit $\Longrightarrow \exists\, y_1, \dots, y_n \in V : V = \langle y_1, \dots, y_n \rangle \xRightarrow{\text{T. schimbului}}$ orice $n+1$ vectori din V sunt l. dep. $\Longrightarrow$ orice bază a lui V are cel mult n vectori, deci e finită.

Fie X, Y baze în V, $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, $|X| = m$, $|Y| = n$.

Y sistem de generatori, X liberă $\xRightarrow{\text{T. Steinitz}} m \le n$

Y liberă, X sist. de generatori $\Longrightarrow n \le m$

$\Longrightarrow m = n$.

Din Corolarul 14 rezultă că pentru orice K-spaţiu vectorial V de tip finit toate bazele lui V au acelaşi număr de elemente. Acest număr se numeşte **dimensiunea** lui V şi se notează cu $\dim V$ sau $\dim_K V$. Deci $\dim V$ este cardinalul unei baze a lui V.

Observaţiile 15. a) Dacă spaţiul vectorial V are dimensiune finită, atunci $\dim V = n$ dacă şi numai dacă există n vectori liniar independenţi şi orice $n+1$ vectori din V sunt liniar dependenţi.

Această afirmaţie rezultă din definiţia $\dim V$ şi din faptul că bazele lui V coincid cu submulţimile independente maximale ale lui V.

b) Dacă spaţiul vectorial V are dimensiune finită şi $\dim V = n$, atunci orice n vectori liniar independenţi din V formează o bază a lui V.

c) Dacă V este un spaţiu vectorial de tip finit şi A este un subspaţiu al lui V, atunci $\dim A \le \dim V$. Mai mult, $A \ne V$ dacă şi numai dacă $\dim A < \dim V$.

Fie X o bază a lui ${}_K A \Longrightarrow X$ liberă în ${}_K V \Longrightarrow X$ poate fi completată la o bază Y a lui ${}_K V$.

$\Longrightarrow X \subseteq Y \Longrightarrow \dim A = |X| \le |Y| = \dim V$.

$A \ne V \Longleftrightarrow X \ne Y \underset{X \subseteq Y \text{ finite}}{\Longleftrightarrow} |X| < |Y| \Longleftrightarrow \dim A < \dim V$

(Folosim adesea c) sub forma $A \le_K V$, $\dim A = \dim V \Longrightarrow A = V$).

Exemplele 16. a) Fie K un corp comutativ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Avem $\dim K^n = n$ pentru că $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ formează o bază a lui K^n.

b) Luând $n = 1$ în a) deducem că $\dim_K K = 1$. În particular, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$. Totuşi, cum

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ unic determinate } : \ z = a + bi = a \cdot 1 + b \cdot i\,,$$

se deduce că $\{1, i\}$ este o bază a $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{C}$, prin urmare, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

c) Dacă K este un corp comutativ, atunci $\dim P_n(K) = n + 1$ pentru că $1, X, X^2, \dots, X^n$ formează o bază a K-spaţiului $P_n(K) = \{f \in K[X] \mid \operatorname{grad} f \le n\}$.

d) Dacă V_1 şi V_2 sunt K-spaţii vectoriale şi X, respectiv Y este o bază a lui V_1, respectiv V_2, atunci se verifică uşor că $\{(x,0) \mid x \in X\} \cup \{(0,y) \mid y \in Y\}$ este o bază a produsului direct $V_1 \times V_2$, de unde ţinând seama că $|X| = |\{(x,0) \mid x \in X\}|$, $|Y| = |\{(0,y) \mid y \in Y\}|$ şi $\{(x,0) \mid x \in X\} \cap \{(0,y) \mid y \in Y\} = \emptyset$ rezultă

$$\dim(V_1 \times V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$$

Teorema 17. Două K-spaţii vectoriale V şi V' sunt izomorfe dacă şi numai dacă $\dim V = \dim V'$.

Demonstraţie. $V \simeq V'$ ($\Leftrightarrow \exists \varphi : V \to V'$ izom. de K-s.v.).

$V \simeq V' \Longleftrightarrow \dim V = \dim V'$.

„$\Longrightarrow$" $\exists \varphi : V \to V'$ izom. de K-s.v. | Fie X bază în $_K V$ $\xrightarrow[\text{a sp. vect.}]{\text{P. univ.}}$ $\varphi(X)$ bază în V'

Dar $|X| = |\varphi(X)| \Longrightarrow \dim V = |X| = |\varphi(X)| = \dim V'$.

„$\Longleftarrow$" X bază în V, Y bază în V' cu $|X| = |Y| \Longleftrightarrow \exists f : X \to Y$ fcţie bijectivă

$\xRightarrow{\text{P. univ. a s.v.}} \exists! \bar{f} : V \to V'$ transf. liniară a.î. $\bar{f}|_X = f$ | $\Longrightarrow \bar{f}$ izom. $\Longrightarrow$

$f : X \to V'$ inj., $f(X) = Y$ bază în V'

$\Longrightarrow V \simeq V'$.

Corolarul 18. Dacă V este un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită şi $\dim V = n$, atunci V este izomorf cu K^n. Dacă $\{x_1, \dots, x_n\}$ este o bază a lui V, atunci

K

$$f : K^n \to V, \; f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

este un izomorfism ce aplică baza canonică a lui K^n pe baza $\{x_1, \dots, x_n\}$. ($n \in \mathbb{N}^*$)

Într-adevăr, fcţia $\{e_1, \dots, e_n\} \to \{x_1, \dots, x_n\}$, $e_i \mapsto x_i$, $i = \overline{1,n}$ este bijectivă şi folosind (2) din dem. pr. de univ. a sp. vectoriale, izom. $\bar{f}$ care rezultă este def.

$\bar{f}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \bar{f}(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 \bar{f}(e_1) + \dots + \alpha_n \bar{f}(e_n) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$.

Apendice $\longrightarrow$

Teorema 19. Dacă V şi V' sunt K-spaţii vectoriale şi $f : V \to V'$ este o transformare liniară, atunci

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim f(V). \tag{4}$$

Demonstraţie.

Cu notaţiile din teoremă, $\dim \operatorname{Ker} f$ se numeşte **defectul** lui f, iar $\dim f(V)$ se numeşte **rangul** lui f.

Corolarul 20. a) Fie V un K-spaţiu vectorial şi A, B subspaţii ale lui V. Atunci

$$\dim A + \dim B = \dim(A \cap B) + \dim(A + B). \tag{5}$$

b) Dacă V este un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită, iar A şi B sunt subspaţii ale lui V, atunci

$$\dim(A+B) = \dim A + \dim B \Leftrightarrow A+B = A \oplus B.$$

c) **(Teorema alternativei)** Dacă V, V' sunt K-spaţii vectoriale de aceeaşi dimensiune finită (i.e. $\dim V = \dim V' \in \mathbb{N}$), iar $f : V \to V'$ este o transformare liniară, atunci sunt echivalente următoarele afirmaţii:
i) f este injectivă;
ii) f este surjectivă;
iii) f este izomorfism.

Apendice

Def: Fie V un K-sp. vectorial, $v_1, \dots, v_m \in V$. S.n. rangul sistemului de vectori $(v_1, \dots, v_m)$, notat $\text{rang}(v_1, \dots, v_m)$, numărul

$$\text{rang}(v_1, \dots, v_m) = \dim \langle v_1, \dots, v_m \rangle.$$

Obs: a) $\text{rang}(v_1, \dots, v_m) =$ nr. maxim de vectori l. indep. ce pot fi aleși dintre $v_1, \dots, v_m$

b) Dacă $V = K^n$, $v_1, \dots, v_m \in K^n$

$\text{rang}(v_1, \dots, v_m) =$ nr. maxim de n-uple ce pot fi alese dintre $v_1, \dots, v_m$ a.î. nici unul dintre n-uplele alese nu poate fi scris ca o comb. liniară de celelalte $=$

$=$ rangul matricii de tipul (m, n) ce poate fi formată cu aceste n-uple ca și ~~coloane~~ linii $=$ rangul matricii de tip (n, m) care are aceste n-uple ca ~~linii~~ coloane.

c) Fie $f : K^n \to V$ izomorfism care duce baza canonică a lui K^n în baza $\{x_1, \dots, x_n\}$ a lui ${}_K V$

$\Longrightarrow f^{-1} : V \to K^n$ izom. $\Big|$ $\Longrightarrow f^{-1}(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$v = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$

Fie $v_1, \dots, v_m \in V$.

$\text{rang}(v_1, \dots, v_m) = \dim \langle v_1, \dots, v_m \rangle = \dim f^{-1}(\langle v_1, \dots, v_m \rangle) = \dim \langle \underbrace{f^{-1}(v_1)}_{\in K^n}, \dots, \underbrace{f^{-1}(v_m)}_{\in K^n} \rangle =$

$= \text{rang}(f^{-1}(v_1), \dots, f^{-1}(v_m)) =$ rangul matricii formate cu aceste n-uple $=$ rangul matricii formate cu coord. vectorilor $v_1, \dots, v_m$ în baza $\{x_1, \dots, x_n\}$.