CURS 3

Determinanţi

Fie $(K,+,\cdot)$ este un corp comutativ, $n \in \mathbb{N}^*$ şi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

Definiţia 1. Determinantul matricei A este

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} (\in K).$$

Funcţia $M_n(K) \to K$, $A \mapsto \det A$ se numeşte **(funcţia) determinant**.

Observaţia 2. În nici unul dintre produsele care apar în egalitatea de mai sus nu apar 2 elemente din A care să fie situate în aceeaşi linie sau aceeaşi coloană.

Pentru determinantul matricei A se foloseşte şi notaţia

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Exemplele 3. a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

b) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

Lema 4. Determinantul matricei A este egal cu determinantul matricei transpuse ${}^tA$.

Demonstraţie.

$$\det {}^tA = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

$i = \sigma(j) \iff j = \sigma^{-1}(i)$

$\sigma \mapsto \sigma^{-1}$, $S_n \to S_n$ este o fcţie bijectivă

$1 = \varepsilon(e) = \varepsilon(\sigma\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma^{-1}) \Longrightarrow \varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$

Prin urmare, $\det {}^tA = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \det A$

putem nota $\sigma^{-1} = \tau$

Observaţia 5. Orice proprietate a determinantului unei matrici A care se refară la liniile lui A poate fi formulată şi pentru coloanele lui A şi viceversa.

Propoziţia 6. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ şi $i \in \{1, \ldots, n\}$ atunci

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \ldots & a_{in}+a'_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{det. matricii } A} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots & a_{i-1,n} \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \ldots & a'_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{det. matricii } A'}.$$

Proprietatea poate fi generalizată şi reformulată pentru coloane (temă).

Demonstraţie.

Determinantul din stânga este

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i-1,\sigma(i-1)} (a_{i\sigma(i)} + a'_{i\sigma(i)}) a_{i+1,\sigma(i+1)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} +$$

$$+ \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i-1,\sigma(i-1)} a'_{i\sigma(i)} a_{i+1,\sigma(i+1)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \det A + \det A'$$

Peste tot în cele ce urmează în această secţiune vom considera $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ, $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ şi $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$.

Propoziţia 7. Dacă matricea B se obţine din A prin înmulţirea fiecărui element dintr-o linie (coloană) a lui A cu un $\alpha \in K$ atunci $\det B = \alpha \det A$.

Demonstraţie.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ - & - & - & - \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \dots & \alpha a_{in} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{matrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots (\alpha a_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \alpha \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \alpha \det A.$$

Propoziţia 8. Dacă toate elementele unei linii (coloane) ale lui A sunt 0, atunci $\det A = 0$.

Demonstraţie. Să presupunem că linia i a lui A este formată numai din 0 $\Longrightarrow$ în fiecare produs din $\det A$ avem un factor $0\ (= a_{i\sigma(i)})$ $\Longrightarrow$ fiecare termen e 0 $\Longrightarrow$ $\det A = 0$.

Propoziţia 9. Dacă matricea B se obţine din A prin permutarea a două linii (coloane) ale lui A atunci $\det B = -\det A$.

Demonstraţie.

Pp. $i<j$, $\tau = (ij)$

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ - & - & - & - \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ - & - & - & - \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\underset{\tau(1)}{\underset{\shortparallel}{\sigma(1)}}} \cdots a_{i\underset{\tau(i)}{\underset{\shortparallel}{\sigma(j)}}} \cdots a_{j\underset{\tau(j)}{\underset{\shortparallel}{\sigma(i)}}} \cdots a_{n\underset{\tau(n)}{\underset{\shortparallel}{\sigma(n)}}} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1(\sigma\circ\tau)(1)} \cdots a_{i(\sigma\circ\tau)(i)} \cdots a_{n(\sigma\circ\tau)(n)}.$$

$\sigma \longmapsto \sigma\circ\tau$, $S_n \longrightarrow S_n$ bijectivă

$\varepsilon(\sigma\circ\tau) = \varepsilon(\sigma)\cdot\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma)$

$$\det B = -\sum_{\sigma\circ\tau \in S_n} \varepsilon(\sigma\circ\tau) a_{1(\sigma\circ\tau)(1)} \cdots a_{n(\sigma\circ\tau)(n)} = -\det A$$

Propoziţia 10. Dacă A are două linii (coloane) egale, atunci $\det A = 0$.

Demonstraţie.

$1 \le i < j \le n$, $\det A = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}$

I) Dacă în K, $1+1 \neq 0$.

Permutând liniile i şi j în $A \Longrightarrow A \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \det A = -\det A \Longleftrightarrow \det A + \det A = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \underbrace{\det A}_{\in K} \cdot \underbrace{(1+1)}_{\neq 0} = 0 \Longrightarrow \det A = 0$

II) Dacă în K, $1+1 = 0$

$1+1 = 0 \Longrightarrow \forall a \in K$, $a + a = a(1+1) = 0 \Longrightarrow a = -a, \forall a \in K$

$$\Longrightarrow \det A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{il} & \cdots \\ \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jl} & \cdots \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} k & l \end{array} \end{array} \begin{array}{c} i \\ j \\ \\ \end{array} \qquad \text{pt } 1 \le k < l \le n$$

$$\det A = \sum_{1 \le k < l \le n} \big(\overbrace{a_{ik} a_{jl} + \underbrace{a_{il} a_{jk}}_{a_{ik} a_{jl}}}^{=0}\big) \overline{\sigma}_{kl} = 0$$

suma tuturor prod. de $n-2$ elem. care nu sunt 2 din ac. linie şi ac. coloană şi nu e niciunul în l_i, l_j, c_k, c_l

Să notă cu $l_1, l_2, \cdots, l_n$ liniile şi cu $c_1, c_2, \cdots, c_n$ coloanele matricii A. Spunem că **liniile (coloanele)** i **şi** j ($i, j \in \{1, \ldots, n\}$ diferite) **sunt proporţionale** dacă există un $\alpha \in K$ pentru care toate elementele uneia să se obţină din elementele celeilalte prin înmulţire cu α. Scriem, după caz, $l_i = \alpha l_j$ sau $l_j = \alpha l_i$ sau $c_i = \alpha c_j$ sau $c_j = \alpha c_i$.

Corolarul 11. Dacă A are două linii (coloane) proporţionale, atunci $\det A = 0$.

Într-adevăr,

$1 \le i < j \le n$, $l_j = \alpha l_i$

$$\det A = \alpha \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cancel{\alpha} a_{i1} & \cdots & \cancel{\alpha} a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \\ \end{array} = \alpha \cdot 0 = 0.$$

Definiţia 12. Spunem că linia i a matricei A **este o combinaţie liniară a celorlalte linii** ($i \in \{1, \ldots, n\}$) dacă există $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n \in K$ astfel încât

$$a_{ij} = \alpha_1 a_{1j} + \cdots + \alpha_{i-1} a_{i-1,j} + \alpha_{i+1} a_{i+1,j} + \cdots + \alpha_n a_{nj}, \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Scriem

$$l_i = \alpha_1 l_1 + \cdots + \alpha_{i-1} l_{i-1} + \alpha_{i+1} l_{i+1} + \cdots + \alpha_n l_n.$$

O definiţie analoagă se poate da pentru coloane (temă).

Proprietatea din corolarul de mai sus poate fi generalizată:

Corolarul 13. Dacă o linie (coloană) a lui A este o combinaţie liniară a celorlalte linii (coloane), atunci $\det A = 0$.

Se aplică P6 $\Longrightarrow$ o sumă de $n-1$ determinanți ca cei din C11 $\Longrightarrow \det A = 0$

Corolarul 14. Dacă matricea B se obţine din A prin adunarea la linia (coloana) i a liniei (coloanei) j, cu $i \neq j$, înmulţită cu un $\alpha \in K$, atunci $\det B = \det A$.

Într-adevăr, fie $1 \le i < j \le n$

$$\det B = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} + \alpha a_{i1} & a_{j2} + \alpha a_{i2} & \cdots & a_{jn} + \alpha a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}\begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \overset{P6}{=}$$

$$= \det A + \cancel{\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{i1} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}} = \det A$$

Definiţia 15. Fie $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, $n \geq 2$ şi $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Fie $A_{ij} \in M_{n-1}(K)$ matricea obţinută din A prin eliminarea liniei i şi coloanei j, adică aliniei şi coloanei lui a_{ij}. Determinantul

$$d_{ij} = \det A_{ij}$$

se numeşte **minorul lui** a_{ij} şi

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ij}$$

se numeşte **complementul algebric al elementului** a_{ij}.

Avem:

Teorema 16. (dezvoltarea determinantului $\det(A)$ **după linia** i**)**

$$\det(A) = \underline{a_{i1}}\alpha_{i1} + \underline{a_{i2}}\alpha_{i2} + \cdots + \underline{a_{in}}\alpha_{in}, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Demonstraţie. Să notăm

$$S_i = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \cdots + a_{in}\alpha_{in}. \qquad (*)$$

(A) Pentru $i = 1$, avem $S_1 = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + \cdots + a_{1n}\alpha_{1n}$. Considerăm termenul $\underline{a_{11}\alpha_{11} = a_{11}d_{11}}$ şi observăm că d_{11} este o sumă in care apar toate produsele de forma

$$\underline{a_{2k_2}a_{3k_3} \cdots a_{nk_n}} \text{ cu } \{k_2, \ldots, k_n\} = \{2, \ldots, n\},$$

fiecare cu semnul $(-1)^{Inv\,\tau}$ unde $\tau = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \ldots & n \\ k_2 & k_3 & \ldots & k_n \end{pmatrix}$. Fiecare termen al lui S_1 ce conţine pe a_{11} provine din $a_{11}\alpha_{11}$. Aşadar, aceşti termeni sunt produsele de forma

$$(-1)^{Inv\,\tau} a_{11}a_{2k_2}a_{3k_3} \cdots a_{nk_n}.$$

Pe de altă parte, termenii lui $\det A$ care conţin pe a_{11} sunt toate produsele de forma

$$a_{11}a_{2k_2}a_{3k_3} \cdots a_{nk_n} \text{ cu } \{k_2, \ldots, k_n\} = \{2, \ldots, n\},$$

fiecare termen având semnul $(-1)^{Inv\,\sigma}$, unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & k_2 & k_3 & \ldots & k_n \end{pmatrix}$.

Dar $1 < k_2, \ldots, 1 < k_n$, prin urmare $Inv\,\sigma = Inv\,\tau$ şi putem conchide că termenii ce conţin pe a_{11} sunt aceiaşi atât în S_1 şi în $\det A$ (şi când spunem aceasta ne referim, desigur, şi la faptul că apar cu acelaşi semn în ambele scrieri).

(B) Să considerăm cazul general. Fie $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, iar în scrierea $(*)$ să considerăm termenul

$$\underline{a_{ij}\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}a_{ij}d_{ij}}.$$

Acesta ne va furniza toţi termenii lui S_i care conţin pe a_{ij}. Pe de altă parte, să rescriem $\det A$ procedând astfel: prin permutări scuccesive de linii vecine aducem a_{ij} pe prima linie, apoi prin permutări succesive de coloane vecine, îl aducem în poziţia $(1, 1)$. Notăm cu D determinantul rezultat. Deoarece au fost i pemutări de linii şi j permutări de coloane, putem scrie

$$\det A = (-1)^{i+j} D.$$

În baza acestei egalităţi, toţi termenii care conţin pe a_{ij} din $\det A$ rezultă raţionând ca la (A) asupra lui D. Aşa cum am văzut, în poziţia $(1, 1)$ a lui D este a_{ij}; având în vedere modul în care s-a format

D, minorul corespunzător este chiar d_{ij}, iar complementul său algebric este $(-1)^{1+1}d_{ij} = d_{ij}$. Se deduce imediat că termenii care îl conţin pe a_{ij} sunt aceiaşi cu termenii din

$$(-1)^{i+j}a_{ij}d_{ij} = a_{ij}\alpha_{ij},$$

adică exact termenii care conţin pe a_{ij} din S_i.

Raţionamentul este completat de faptul că suma S_i are n termeni şi fiecare termen este o sumă de $(n-1)!$ produse de elemente ale lui A (cu semnul corespunzător), prin urmare S_i are $(n-1)!n = n!$ termeni care sunt chiar cei din $\det A$. $\square$

De asemenea, avem:

Teorema 16'. (dezvoltarea determinantului $\det(A)$ **după coloana** j**)**

$$\det A = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \cdots + a_{nj}\alpha_{nj}, \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Acum putem calcula det. de ordin ușor / orice

Corolarul 17. Dacă $i, k \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq k$, atunci

$$a_{i1}\alpha_{k1} + a_{i2}\alpha_{k2} + \cdots + a_{in}\underset{\alpha_{kn}}{\cancel{\alpha_{in}}} = 0.$$

De asemenea, dacă $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq k$ atunci

$$a_{1j}\alpha_{1k} + a_{2j}\alpha_{2k} + \cdots + a_{nj}\alpha_{nk} = 0.$$

Într-adevăr,

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}\alpha_{k1} + a_{i2}\alpha_{k2} + \cdots + a_{in}\alpha_{kn}$$

$\forall\, i, k \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq k$

Corolarul 18. Dacă $d = \det A \neq 0$ atunci A este inversabilă în inelul $M_n(K)$ şi

$$A^{-1} = d^{-1} \cdot A^*,$$

unde A^* este matricea

$$A^* = {}^t(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

(numită **adjuncta matricei** A).

Intr-adevăr, fol. T16 şi C17 rezultă că

$$\left.\begin{array}{l} d^{-1} \cdot \mid A \cdot A^* = d \cdot I_n \Longrightarrow A \cdot (d^{-1} \cdot A^*) = I_n \\ \text{Analog } A^* \cdot A = d \cdot I_n \Longrightarrow (d^{-1} \cdot A^*) A = I_n \end{array}\right| \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = d^{-1} \cdot A^*$$

Observaţia 19. Vom vedea mai târziu că şi reciproca acestei afirmaţii este adevărată, adică *dacă A este inversabilă atunci* $\det A \neq 0$, ceea ce va completa caracterizarea elementelor inversabile ale inelului $M_n(K)$ cu ajutorul determinanţilor.

Corolarul 20. (Regula lui Cramer) Fie sistemul de n ecuaţii cu n necunoscute

$$(S) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \ a_{ij}, b_i \in K \ (i, j \in \{1, \dots, n\}).$$

Notăm cu d determinantul $d = \det A$ al matricei $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ şi d_j determinantul matricei obţinute din A prin înlocuirea coloanei j cu coloana

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Dacă $d \neq 0$ atunci sistemul (S) are o soluţie unică, dată de egalităţile

$$x_i = d_i \cdot d^{-1}, \ i = 1, \dots, n.$$

$$(S) \xLeftrightarrow{A^{-1}\cdot} A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = d^{-1} \cdot A^{*} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= d^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \dots & & & \\ \alpha_{1j} & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{nj} \\ \dots & & & \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\}, \ x_j = d^{-1} \cdot (\underbrace{b_1\alpha_{1j} + b_2\alpha_{2j} + \dots + b_n\alpha_{nj}}_{d_j}) = d^{-1} \cdot d_j$$

↓ CURS 4

Rangul unei matrice

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$.

Definiţia 21. Fie $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \in \mathbb{N}^*$ cu $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$ şi $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n$. O matrice

$$\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_lj_1} & a_{i_lj_2} & \dots & a_{i_lj_k} \end{pmatrix}$$

formată din elementele matricei A situate la intersecţiile liniilor $i_1, \dots, i_k$ cu coloanele $j_1, \dots, j_l$ se numeşte **submatrice a matricei** A de tipul (k, l). Determinantul unei submatrice de tipul (k, k) se numeşte **minor de ordinul** k **al matricei** A. Formarea unui minor de ordinul $k+1$ prin adăugarea unei linii şi unei coloane la un minor de ordinul k se numeşte **bordare**.

Definiţia 22. Fie $A \in M_{m,n}(K)$. Dacă A este nenulă, adică $A \neq O_{m,n}$, spunem că **rangul matricei** A este r, şi scriem $\operatorname{rang} A = r$, dacă există un minor de ordinul r al lui A nenul şi toţi minorii lui A de ordin mai mare decât r (dacă există) sunt nuli. Prin definiţie, $\operatorname{rang} O_{m,n} = 0$.

Observaţia 23. a) $\operatorname{rang} A \leq \min\{m, n\}$.
b) Dacă $A \in M_n(K)$ atunci $\operatorname{rang} A = n$ dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$.
c) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} {}^tA$.

În continuare vom considera $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ şi $A \neq O_{m,n}$.

Determinarea rangului matricei A după definiţie necesită, în general, calculul unui număr mare de minori. Teorema următoare este un prim pas pentru a reduce numărul acestor calcule.

Teorema 24. $\operatorname{rang} A = r$ dacă şi numai dacă există un minor de ordinul r al lui A nenul şi toţi minorii lui A de ordinul $r+1$ (dacă există) sunt nuli.

Demonstraţie.

Teorema 25. Rangul matricei A este numărul maxim de coloane (linii) ce se pot alege dintre coloanele (liniile) lui A astfel încât nici una să nu fie o combinaţie liniară a celorlalte.

Demonstraţie. Să considerăm că matricea A are rangul r. Atunci A un minor de ordinul r nenul. Pentru a nu complica notaţiile, putem presupunem că

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

şi orice minor de ordinul $r+1$ este zero. (Demonstraţia cazului general nu prezintă alte dificultăţi decât, eventual, de notaţie.) Prin urmare, determinantul

$$D_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

de ordinul $r+1$, obţinut prin adăugarea la d a liniei i şi a coloanei j, cu $1 \leq i \leq m$ şi $r < j \leq n$, este zero, adică $D_{ij} = 0$. Să observăm că dacă $1 \leq i \leq r$ atunci D_{ij} are două linii egale, iar dacă $r < i \leq m$ şi $r < j \leq n$, atunci D_{ij} se obţine din d prin bordarea lui d cu linia i şi coloana j. Dezvoltând determinantul D_{ij} după linia $r+1$ primim

$$a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + \cdots + a_{ir}d_r + a_{ij}d = 0$$

unde complemenţii algebrici $d_1, d_2, \dots, d_r$ nu depind de linia adăugată. Rezultă

$$a_{ij} = -d^{-1}d_1a_{i1} - d^{-1}d_2a_{i2} - \cdots - d^{-1}d_ra_{ir}$$

pentru $i = 1, 2, \dots, m$ şi $j = r+1, \dots, n$ ceea ce ne arată că

$$c_j = \alpha_1c_1 + \alpha_2c_2 + \cdots + \alpha_rc_r \text{ pentru } j = r+1, \dots, n,$$

unde $\alpha_k = -d^{-1}d_k$, $1 \leq k \leq r$, adică c_j este combinaţie liniară de $c_1, c_2, \dots, c_r$. Astfel am arătat că numărul maxim de coloane ce se pot alege dintre coloanele lui A astfel încât nici una să nu fie o combinaţie liniară a celorlalte este cel mult r. Dacă acest număr ar fi strict mai mic decât r, ar rezulta că una dintre coloanele $c_1, \dots, c_r$ ar fi o combinaţie liniară a celorlalte, ceea ce ar implica $d = 0$ ceea ce este fals. Aşadar, numărul maxim de coloane ce se pot alege dintre coloanele lui A astfel încât nici una să nu fie o combinaţie liniară a celorlalte este egal cu r, ceea ce completează demonstraţia teoremei.

Corolarul 26. $\operatorname{rang} A = r$ dacă şi numai dacă există un minor nenul d de ordinul r al lui A şi toţi minorii lui A de ordinul $r+1$ obţinuţi prin bordarea acestuia (dacă există) sunt nuli.