Seminar 7

Funcții injective, surjective și bijective

Recap:

<u>Def.</u> Fie $f: A \to B$ o fct. Spunem că:

a) f este inj. dc. $\forall x_1, x_2 \in A$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

b) f este surj. dc. $\forall y \in B, \exists x \in A$ a.î. $f(x) = y$.

c) f este bij dc este inj și surj.

<u>Caract. funcț. inj.</u> $f: A \to B$. UASE

(1) f este injectivă

(2) $\forall$ $A' \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$ $\quad f \circ \alpha = f \circ \beta \Rightarrow \alpha = \beta$ (simplificare la st.)

(3) $A \underset{r}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$ $\quad \exists r: B \to A$ a.î. $r \circ f = 1_A$.
(inversa la stânga / retractă)

<u>Caract. funcț. surj.</u> $f: A \to B$ UASE

(1) f este surjectivă

(2) $\forall$ $A \longrightarrow B \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B'$ $\quad \alpha \circ f = \beta \circ f \Rightarrow \alpha = \beta$ (simplificare la dr.)

(3) $A \underset{s}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$ $\quad \exists s: B \to A$ a.î. $f \circ s = 1_B$.
(inversa la dreapta / secțiune)

<u>Caract. funcț. bij.</u>

f bij $\Leftrightarrow \exists g: B \to A$ aî $f \circ g = 1_B$ și $g \circ f = 1_A$

În acest caz g este unic și notăm $g = f^{-1}$.

Exercițiu: Să se determine toate secțiunile funcției surjective $f: A \to B$, unde $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c\}$ și

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	c	c	a	b	a

Soluție: $\operatorname{Im} f = \{a, b, c\} = B \Rightarrow f$ surjectivă $\xRightarrow{th}$

$\exists\, s: B \to A$ a.î. $f \circ s = 1_B$.

$(f \circ s)(a) = 1_B(a) \Rightarrow f(s(a)) = a \Rightarrow s(a) \in \{3, 5\}$. (2 posib.)

$(f \circ s)(b) = 1_B(b) \Rightarrow f(s(b)) = b \Rightarrow s(b) = 4$. (1 posib.)

$(f \circ s)(c) = 1_B(c) \Rightarrow f(s(c)) = c \Rightarrow s(c) \in \{1, 2\}$. (2 posib.)

Așadar avem $2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$ posibilități de alegere a secțiunii:

$s: B \to A$.

x	a	b	c
$s_1(x)$	3	4	1
$s_2(x)$	5	4	1
$s_3(x)$	3	4	2
$s_4(x)$	5	4	2

Funcții injective, surjective și bijective

50 Fie $f: A \to B$ și $g: B \to C$ două funcții. S.s.a.c.

a) Dc f și g este inj (surj) $\Rightarrow g \circ f$ este inj (surj).

b) Dc $g \circ f$ este inj (surj) $\Rightarrow f$ este inj (g este surj)

c) Dc $g \circ f$ este inj și f surj $\Rightarrow g$ este inj

d) Dc $g \circ f$ este surj și g inj $\Rightarrow f$ este surj.

Sol: a) • Pp. f, g inj. Vrem $g \circ f$ inj.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Fie $a_1, a_2 \in A$ a.î. $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \Rightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, dar g este inj $\Rightarrow f(a_1) = f(a_2)$, dar f este inj $\Rightarrow a_1 = a_2$

Așadar $g \circ f$ inj.

• Pp f, g surj. Vrem $g \circ f$ surj.

Fie $c \in C$, cum g este surj $\Rightarrow \exists\, b \in B$ a.î. $g(b) = c$. (1)

$b \in B$, iar f e surj $\Rightarrow \exists\, a \in A$ a.î. $f(a) = b$. (2)

$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \overset{(2)}{=} g(b) \overset{(1)}{=} c$. Prin urmare $g \circ f$ este surj.

b) • Pp $g \circ f$ inj. Vrem f inj.

Fie $a_1, a_2 \in A$ a.î. $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow (g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$, dar $g \circ f$ este inj $\Rightarrow a_1 = a_2$. Prin urmare f este inj.

• Pp. $g \circ f$ surj. Vrem g surj.

Fie $c \in C$, iar $g \circ f$ este surj $\Rightarrow \exists\, a \in A$ a.î. $(g \circ f)(a) = c \Rightarrow g(f(a)) = c$. Fie $f(a) = b \in B \Rightarrow g(b) = c$. Așadar g este surj.

c). Pp. $g\circ f$ inj și f surj. Vrem g inj.

Fie $\underbrace{b_1, b_2 \in B}$ a.î. $g(b_1) = g(b_2)$.

iar f este surj $\Rightarrow \exists\, a_1, a_2 \in A$ a.î. $f(a_1) = b_1$ și $f(a_2) = b_2$ $\Bigg| \Rightarrow$

$g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \Rightarrow (g\circ f)(a_1) = (g\circ f)(a_2)$, iar $g\circ f$ este inj

$\Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow b_1 = b_2 \Rightarrow g$ inj.

d) Pp. $g\circ f$ surj și g inj. Vrem f surj.

Fie $b \in B$. $g(b) = c \in C$, iar $g\circ f$ surj $\Rightarrow \exists\, a \in A$ a.î. $(g\circ f)(a) = c$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} g(f(a)) = c \\ g(b) = c \\ g \text{ inj} \end{array}\right| \Rightarrow f(a) = b. \Rightarrow f \text{ surj.}$$

<u>Metoda a II-a</u>

Recap. $\begin{cases} f \text{ inj} \Leftrightarrow \text{se poate simplifica la st} \Leftrightarrow \text{are inv la st} \\ f \text{ surj} \Leftrightarrow \text{se poate simplifica la dr} \Leftrightarrow \text{are inv la dr} \end{cases}$

a) Pp f și g inj. Vrem $g\circ f$ inj.

$\Updownarrow$

$g\circ f$ se poate simplifica la st.

$$(g\circ f)\circ\alpha_1 = (g\circ f)\circ\alpha_2 \Leftrightarrow g\circ(f\circ\alpha_1) = g\circ(f\circ\alpha_2) \overset{g \text{ inj}}{\Longrightarrow} f\circ\alpha_1 = f\circ\alpha_2 \overset{f \text{ inj}}{\Longrightarrow} \alpha_1 = \alpha_2.$$

b) Pp. g și f surj. Ar că $g\circ f$ are inv la dr.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[r, shift left, "g"] & C \arrow[l, shift left, "t"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "g\circ f"] & C \arrow[l, bend left, "s\circ t"] \end{tikzcd}$$

f surj $\Rightarrow \exists\, s: B \to A$ a.î. $f\circ s = 1_B$.

g surj $\Rightarrow \exists\, t: C \to B$ a.î. $g\circ t = 1_C$.

$$(g\circ f)\circ(s\circ t) = g\circ(f\circ s)\circ t = g\circ 1_B\circ t = g\circ t = 1_C \Rightarrow g\circ f \text{ surj.}$$

(52) Fie $f: A \to B$ o funcție.

!{ a) Sp. urm. afirm sunt echiv:

(i) f este inj

(ii) $f^{-1} \circ f = 1_A$ (rel. inv).

(iii) $\forall X \subseteq A \quad f^{-1}(f(X)) = X$.

(iv) $\forall X \subseteq A \quad f(C(X)) \subseteq C f(X)$

(v) $\forall X_1, X_2 \subseteq A \quad f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$.

b) Sp. urm. afirm sunt echiv:

(i) f este surj

(ii) $f \circ f^{-1} = 1_B$

(iii) $\forall Y \subseteq B \quad f(f^{-1}(Y)) = Y$

(iv) $\forall X \subseteq A \quad C f(X) \subseteq f(C(X))$

Sol: a) (i) $\Rightarrow$ (ii)

Recap. • $b f^{-1} a \Leftrightarrow a f b \Leftrightarrow f(a) = b$
• rel f^{-1} este fct $\Leftrightarrow$ f bij
• $f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$
• $f^{-1}(Y) = \{ x \in A \mid f(x) \in Y \}$.

Pp. f inj. Vrem $f^{-1} \circ f = 1_A$.

$f = (A, B, G_f)$ $\quad f^{-1} \circ f = (A, A, G_f^{-1} \circ G_f)$

$f^{-1} = (B, A, G_f^{-1})$

$1_A = (A, A, \{(a,a) \mid a \in A\})$

Demonstrăm prin dublă incluziune: $f^{-1} \circ f \subseteq 1_A$ și $1_A \subseteq f^{-1} \circ f$

Arătăm $1_A \subseteq f^{-1} \circ f \Leftrightarrow \forall a \in A \quad a f^{-1} \circ f a. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists b \in B$ și $a f b$ și $\underbrace{b f^{-1} a}_{\Leftrightarrow a f b} \Leftrightarrow \forall a \in A, \exists b \in B$ și $a f b$

$\Uparrow$ f funcție. Nu avem nevoie de inj

Ar. $f^{-1} \circ f \subseteq 1_A$ adică $\forall a_1, a_2 \in A$ și $a_1 f^{-1} \circ f a_2 \Rightarrow a_1 = a_2$ ale inj.

$a_1 f^{-1} \circ f a_2 \Leftrightarrow \exists b \in B$ și $a_1 f b$, $\underbrace{b f^{-1} a_2}_{\Leftrightarrow a_2 f b}$, $\Longleftrightarrow$ $\exists b \in B$ și $f(a_1) = f(a_2) = b$

, din f inj $\Rightarrow a_1 = a_2$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Pp. $f^{-1} \circ f = 1_A$. Vrem (iii)

Fie $X \subseteq A \Rightarrow (f^{-1} \circ f)(X) = 1_A(X) = X$

„$(iii) \Rightarrow (i)$" $\Longleftrightarrow$ „$(\overline{i}) \Rightarrow (\overline{iii})$"

Pp. $\forall X \subseteq A$ avem $f^{-1}(f(X)) = X$. Ar. f inj.

Pp. f nu e inj. Ar. că $\exists\ X \subseteq A$ a.î. $f^{-1}(f(X)) \neq X$.

f nu e inj $\Rightarrow \exists\ x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2$ a.î. $f(x_1) = f(x_2) = y$

Fie $X = \{x_1\}$ $\qquad f(X) = \{y\}$

$$f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(\{y\}) \supseteq \{x_1, x_2\} \Rightarrow f^{-1}(f(X)) \neq X$$

$(i) \Rightarrow (iv)$ Pp. f inj. Vrem. $\forall X \subseteq A$. $f(C(X)) \subseteq C(f(X))$

Fie $b \in B$ ai $b \in f(C(X))$ Vrem $b \in C(f(X))$, adică $b \notin f(X)$

$\Downarrow$

$\exists\ x \in C(X)$ ai $f(x) = b$

Fie $x' \in X \Rightarrow x' \neq x \underset{f \text{ inj}}{\Rightarrow} f(x') \neq f(x) \Rightarrow f(x') \neq b \Rightarrow b \notin f(X)$.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Dem $(\overline{i}) \Rightarrow (\overline{iv})$.

Pp. că f nu e inj. Vrem $\exists\ X \subseteq A$ ai $f(C(X)) \not\subseteq C(f(X))$

adică $\exists\ y \in f(C(X))$ a.î. $y \notin C(f(X))$ adică $y \in f(X)$

f nu inj $\Rightarrow \exists\ x_1 \neq x_2 \in A$ a.î. $f(x_1) = f(x_2) = y$

Fie $X = \{x_1\} \Rightarrow x_2 \in C(X)$.

$x_1 \in X \Rightarrow y \in f(X)$

$x_2 \in C(X) \Rightarrow y \in f(C(X))$ $\qquad \square$

(i) $\Rightarrow$ (v)

Fie $X_1, X_2 \subseteq A$

„$\subseteq$" $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$

Fie $y \in f(X_1 \cap X_2) \Rightarrow \exists x \in X_1 \cap X_2$ ai $y = f(x)$

$\Rightarrow \exists (x \in X_1$ și $x \in X_2)$ ai $y = f(x)$

$\Rightarrow (\exists x \in X_1$ ai $y = f(x))$ și $(\exists x \in X_2$ ai $y = f(x))$

$\Rightarrow y \in f(X_1)$ și $y \in f(X_2)$

$\Rightarrow y \in f(X_1) \cap f(X_2)$. adev, $\forall$ fct. f, nu neapărat inj.

„$\supseteq$". $f(X_1) \cap f(X_2) \subseteq f(X_1 \cap X_2)$.

Fie $y \in f(X_1) \cap f(X_2) \Rightarrow y \in f(X_1)$ și $y \in f(X_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x_1 \in X_1$ ai $f(x_1) = y$ și $\exists x_2 \in X_2$ ai $f(x_2) = y$.

Dar f inj $\Rightarrow x_1 = x_2 \in X_1 \cap X_2 \Rightarrow y = f(x_1) = f(x_2) \in f(X_1 \cap X_2)$

(v) $\Rightarrow$ (i) Dem $\overline{(i)} \Rightarrow \overline{(v)}$.

P.p.că f nu inj. Vrem $\exists X_1, X_2 \subseteq A$ ai $f(X_1 \cap X_2) \neq f(X_1) \cap f(X_2)$

$\Downarrow$

$\exists x_1 \neq x_2 \in A$ ai $f(x_1) = f(x_2) = y$

Fie $X_1 = \{x_1\}$ $X_2 = \{x_2\}$.

$X_1 \cap X_2 = \{x_1\} \cap \{x_2\} = \emptyset \Rightarrow f(X_1 \cap X_2) = f(\emptyset) = \emptyset$.

$f(X_1) = f(\{x_1\}) = \{y\}$

$f(X_2) = f(\{x_2\}) = \{y\}$

$\Bigg| \Rightarrow f(X_1) \cap f(X_2) = \{y\} \cap \{y\} = \{y\}$.