Dacă P_1 are coordonatele $(\alpha, 0)$ şi P_2 are coordonatele $(0, \beta)$ atunci ecuaţia dreptei P_1P_2 este:

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$

(ecuaţia dreptei prin tăieturi).

2) α) Ecuaţia dreptei AM (prin tăieturi) este:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda} = 1 \ \Leftrightarrow\ \lambda x + ay - a\lambda = 0$$

β) Panta dreptei AM este:

$$m_{AM} = -\frac{\lambda}{a}.$$

Panta perpendicularei BC pe AM este $m_{BC} = \dfrac{a}{\lambda}$, unde C este piciorul perpendicularei din B pe AM.

Ecuaţia dreptei BC este:

$$y = \frac{a}{\lambda}(x - b) \ \Leftrightarrow\ ax - \lambda y - ab = 0.$$

γ) Pentru aflarea locului geometric al lui C, eliminăm λ între cele două ecuaţii:

$$\lambda x + ay - a\lambda = 0 \ \Leftrightarrow\ ay = -\lambda(x - a) \text{ şi } y = \frac{a}{\lambda}(x - b) \ \Rightarrow$$

$$ay^2 = -a(x - a)(x - b) \ \Leftrightarrow\ x^2 + y^2 - (a + b)x + ab = 0$$

adică cercul cu centrul în $\dfrac{a+b}{2}$ şi rază $\dfrac{|a-b|}{2}$, adică cercul cu diametru AB, ceea ce se putea demonstra imediat sintetic.

Problema 8.6.5 *Pe parabola de ecuaţie $y^2 = 2px$ se iau trei puncte distincte A, B, C. Tangentele în A, B, C la parabolă determină un triunghi $A'B'C'$. Să se demonstreze că dreapta care uneşte centrele de greutate ale triunghiurilor ABC şi $A'B'C'$ este paralelă cu axa Ox.*

(Admitere Facultatea de Matematică şi Informatică, Cluj-Napoca, 1996)

Soluţie. Fie $A\left(\dfrac{\alpha^2}{2p},\alpha\right)$, $B\left(\dfrac{\beta^2}{2p},\beta\right)$, $C\left(\dfrac{\gamma^2}{2p},\gamma\right)$.

Ecuaţia tangentei la parabolă într-un punct $M_0(x_0,y_0)$ este

$$yy_0=p(x+x_0).$$

În cazul nostru:

Ecuaţia tangentei în A este: $\alpha y=p\left(x+\dfrac{\alpha^2}{2p}\right)$.

Ecuaţia tangentei în B este: $\beta y=p\left(x+\dfrac{\beta^2}{2p}\right)$.

Ecuaţia tangentei în C este: $\gamma y=p\left(x+\dfrac{\gamma^2}{2p}\right)$.

Fie $\{A'\}$ intersecţia dintre tangentele în B şi C la parabolă. Coordonatele sale se determină rezolvând sistemul format de ecuaţiile celor două tangente:

$$\begin{cases}\beta y=p\left(x+\dfrac{\beta^2}{2p}\right)\\ \\ \gamma y=p\left(x+\dfrac{\gamma^2}{2p}\right)\end{cases}\Rightarrow\ (\beta-\gamma)y=\frac{\beta^2-\gamma^2}{2}\quad |:(\beta-\gamma)$$

($\beta\neq\gamma$ pentru că punctele A,B şi C sunt distincte).

Rezultă $y_{A'}=\dfrac{\beta+\gamma}{2}$.

Analog $y_{B'}=\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$, $y_{C'}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Centrul de greutate G al triunghiului ABC are coordonatele: $\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3},\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$. Deci $y_G=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$.

Centrul de greutate G' al triunghiului $A'B'C'$ are coordonatele:

$$\left(\frac{x_{A'}+x_{B'}+x_{C'}}{3},\frac{y_{A'}+y_{B'}+y_{C'}}{3}\right).$$

Deci $y_{G'}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$. Deoarece $y_G=y_{G'}$ rezultă că $GG'\|Ox$.

Problema 8.6.6 *Se dă parabola de ecuaţie $y^2 = 2px$.*

a) Să se scrie ecuaţia tangentei la parabolă într-un punct oarecare al ei.

b) Să se afle coordonatele proiecţiei unui punct din plan pe tangentă.

c) Să se afle locul geometric al proiecţiilor focarului pe tangentele la parabolă.

(Admitere Facultatea de Matematică şi Informatică, Cluj-Napoca, 1997)

Soluţie. a) Ecuaţia tangentei la parabolă în punctul $M_0(x_0, y_0)$ este $yy_0 = p(x + x_0)$.

Într-adevăr, pentru orice curbă de ecuaţie explicită $y = f(x)$ ecuaţia tangentei în punctul $M_0(x_0, y_0)$ unde $y_0 = f(x_0)$ este:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

În cazul nostru, ecuaţiile explicite ale parabolei sunt $y = \pm\sqrt{2px}$, semnul plus fiind pentru ramura parabolei din cadranul I iar minus pentru ramura din cadranul IV. Vom efectua calculul simultan.

$$f'(x) = \pm\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}} = \frac{\pm p}{\sqrt{2px}}, \quad f'(x_0) = \pm\frac{p}{\sqrt{2px_0}} = \frac{p}{y_0}$$

Ecuaţia tangentei:

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) \ \Leftrightarrow \ yy_0 - y_0^2 = p(x - x_0)$$

dar $y_0^2 = 2px_0 \ \Rightarrow \ yy_0 = p(x + x_0)$.

3) Fie $P(\alpha, \beta)$ un punct arbitrar în plan. Ecuaţia perpendicularei din P pe tangenta în M_0 la parabolă este: $y - \beta = -\dfrac{y_0}{p}(x - \alpha)$.

Coordonatele proiecţiei se obţin rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} y - \beta = -\dfrac{y_0}{p}(x - \alpha) \\ yy_0 = p(x + x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} py + y_0x = \beta p + \alpha y_0 \\ y_0y - px = px_0 \end{cases}$$

Înmulţim prima ecuaţie cu y_0 şi a doua cu $(-p)$ şi le adunăm. Rezultă:

$$x(y_0^2+p^2) = -p^2x_0 + \alpha y_0^2 + \beta p y_0 \;\Rightarrow$$

$$x = \frac{-p^2x_0 + \alpha y_0^2 + \beta p y_0}{p^2+y_0^2}$$

Înmulţim prima ecuaţie cu p şi a doua cu y_0 şi le adunăm. Rezultă

$$y(p^2+y_0^2) = px_0y_0 + \alpha p y_0 + p^2\beta \;\Rightarrow$$

$$y = \frac{px_0y_0 + \alpha p y_0 + p^2\beta}{p^2+y_0^2}$$

c) Focarul parabolei are coordonatele $\alpha = \dfrac{p}{2}$, $\beta = 0$. Rezultă

$$x = \frac{-p^2x_0 + \frac{p}{2}y_0^2}{p^2+y_0^2} = \frac{-p^2x_0 + p^2x_0}{p^2+y_0^2} = 0,$$

adică locul geometric al proiecţiei focarului pe tangentele la parabolă este axa Oy.

Problema 8.6.7 *Se dau parabolele de ecuaţii $y^2 = 2px$ şi $y^2 = 2qx$, $(0 < q < p)$. O tangentă variabilă dusă la a doua parabolă intersectează prima parabolă în punctele M_1 şi M_2. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului $[M_1M_2]$.*

(Admitere Facultatea de Matematică şi Informatică, Cluj-Napoca, 1998)

Soluţie. Ecuaţia tangentei la a doua parabolă în punctul variabil $M_0(x_0, y_0)$ este: $yy_0 = q(x+x_0)$.

Coordonatele punctelor M_1 şi M_2 se obţin rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} yy_0 = q(x+x_0) \\ y^2 = 2px \end{cases}$$

Înlocuind $x = \dfrac{y^2}{2p}$ în prima ecuaţie obţinem ecuaţia de gradul II în y:

$$qy^2 - 2py_0y + 2pqx_0 = 0.$$

Deoarece punctul M, mijlocul segmentului $[M_1M_2]$, are coordonatele

$$x_M = \frac{x_{M_1} + x_{M_2}}{2}, \quad y_M = \frac{y_{M_1} + y_{M_2}}{2},$$

nu este necesar să calculăm separat soluţiile ecuaţiei de gradul II ci putem folosi relaţiile lui Viète, deci $y_M = \dfrac{py_0}{q}$.

Înlocuind $y = \dfrac{q}{y_0}(x+x_0)$ în a doua ecuaţie, obţinem ecuaţia de gradul II în x: $q^2x^2 + 2(x_0q^2 - py_0^2)x + q^2x_0^2 = 0 \ \Rightarrow$

$$x_M = \frac{x_{M_1} + x_{M_2}}{2} = \frac{py_0^2 - x_0q^2}{q^2},$$

dar $x_0 = \dfrac{y_0^2}{2q} \ \Rightarrow \ x_M = \dfrac{2p-q}{2q^2}y_0^2$. Eliminând y_0 între $x_M = \dfrac{2p-q}{2q^2}y_0^2$ şi $y_M = \dfrac{py_0}{q}$ obţinem $y_M^2 = \dfrac{2p^2}{2p-q}x_M$ adică locul geometric al lui M este o parabolă.

Observaţie. Deoarece $q < \dfrac{p^2}{2p-q} < p$ (ţinând cont de ipoteza $0 < q < p$) rezultă că parabola obţinută ca loc geometric este situată "între" cele două parabole iniţiale.

Problema 8.6.8 *Fie a, b, c trei tangente distincte la o parabolă, care se intersectează două câte două în trei puncte distincte:*

$$a \cap b = \{A_3\}, \quad c \cap a = \{A_2\}, \quad b \cap c = \{A_1\}.$$

Să se demonstreze că focarul parabolei se află pe cercul circumscris triunghiului $A_1A_2A_3$.

(Admitere, Facultatea de Matematică, 1988)