Lema lui Zorn

Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată nevidă și pp. că orice submulțime total ordonată $\mathcal{L}$ a lui A este majorată în A. Atunci în A $\exists$ elem. maximale.

Exercițiu-teoremă. Orice spațiu vectorial are o bază.

Recap: Fie V un K-sp. vectorial și $X \subseteq V$.

<u>Def</u> 1) X este liniar independentă $\Longleftrightarrow$

$\forall x_1, \dots, x_n \in X$ distincți sunt liniar independenți

2) $\langle X \rangle = V \Longleftrightarrow \forall x \in V, \exists x_1, \dots, x_n \in X, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$

a.î. $x = \alpha_1 \cdot x_1 + \dots + \alpha_n x_n$.

3) X este o bază în $V \Longleftrightarrow X$ liniar indep. și $\langle X \rangle = V$

$\Longleftrightarrow X$ este liniar independentă maximală

i.e. $\forall x \in V \setminus X$ avem că $X \cup \{x\}$ este liniar dependentă

Așadar pt. a demonstra că $\exists$ o bază trebuie să arătăm că $\exists$ mulțimi liniar independente maximale.

Fie $A = \{X \subseteq V \mid X \text{ este liniar independentă}\}$

Știm că $(A, \subseteq)$ este o mulțime ordonată.

Clar $A \neq \emptyset$, deoarece $\emptyset$ este liniar independentă $\Rightarrow \emptyset \in A$.

Verificăm dacă A satisface ipoteza lemei lui Zorn:

Fie $\mathcal{L} \subseteq A$ a.î $(\mathcal{L}, \subseteq)$ să fie total ordonată.

Dem. că $\exists\, Y \in A$ majorant al lui $\mathcal{L}$, adică
$\forall\, X \in \mathcal{L}$. avem $X \subseteq Y$.

Fie $Y = \bigcup_{X \in \mathcal{L}} X \Rightarrow X \subseteq Y, \forall X \in \mathcal{L}$. v.

deci acest Y este majorant al lui $\mathcal{L}$.

Rămâne să dem că $Y \in A$, i.e. Y liniar indep.

Fie $y_1, \ldots, y_n \in Y$. Arătăm că ei sunt l.i.

Pentru $i = \overline{1,n}$, din $y_i \in Y = \bigcup_{X \in \mathcal{L}} X \Rightarrow \exists\, X_i \in \mathcal{L}$ a.î $y_i \in X_i$.

Deoarece $\mathcal{L}$ este total ordonată $\Rightarrow \exists \max\{X_1, \ldots, X_n\}$
$\stackrel{\text{not}}{=} X_{i_0}$. $\Rightarrow X_1, \ldots, X_n \subseteq X_{i_0}$

$y_i \in X_i \quad i = \overline{1,n}$ $\Bigg| \Rightarrow y_1, \ldots, y_n \in X_{i_0}$. $\Bigg| \Rightarrow$

Dar $X_{i_0} \in \mathcal{L} \subseteq A \Rightarrow X_{i_0}$ liniar independentă

$\Rightarrow y_1, \ldots, y_n$ liniar independenți.

Așadar conf. lemei lui Zorn, în A $\exists$ elem maximale.

$\square$.

(100) Fie A o mulțime și considerăm mulțimea ordonată $(\mathcal{O}(A), \subseteq)$ a relațiilor de ordine pe A. Folosind lema lui Zorn, să se demonstreze că:

a) ρ este element maximal al lui $\mathcal{O}(A)$
$\Longleftrightarrow$ ρ este ordonare totală.

Soluție: „$\Rightarrow$" Pp. că ρ este elem. maximal al lui $\mathcal{O}(A)$.
Dem. că ρ este ordonare totală.
Fie $x, y \in A$ arbitrar alese.
Pp. RA că x și y NU sunt comparabile.
Atunci definim relația de ordine:
$$\sigma = \rho \cup \{(x,y)\} \cup \{(a,y) \mid a \rho x\} \cup \{(x,b) \mid y \rho b\}$$
(pentru a asigura proprietatea de tranzitivitate)
$\Rightarrow \rho \subsetneqq \sigma$ contradicție cu faptul că ρ este elem. maximal al lui $\mathcal{O}(A)$.

„$\Leftarrow$" Pp. că (A, ρ) este total ord. Dem. că ρ este elem. maximal al lui $\mathcal{O}(A)$.
Fie $\sigma \in \mathcal{O}(A)$ a.î. $\rho \subseteq \sigma$. Vrem să dem că $\rho = \sigma$.
Cum $\rho \subseteq \sigma$, trebuie să arătăm că $\sigma \subseteq \rho$.

Fie $x, y \in A$ a.î. $x \sigma y$. Dem că $x \rho y$.

Deoarece (A, ρ) total ord $\Rightarrow x \rho y$ sau $y \rho x$.

Cazul I. Dc. $x \rho y$. ✓

Cazul II. Dc $y \rho x \xRightarrow{\rho \subseteq \sigma} y \sigma x$, dar $x \sigma y \xRightarrow{AS.}$
$x = y \xRightarrow{R} x \rho y$ ✓.

□.

b) Pentru orice $\rho \in \mathcal{O}(A)$ există o ordonare totală $\overline{\rho} \in \mathcal{O}(A)$ a.î. $\rho \subseteq \overline{\rho}$.

Soluție: Fie $\mathcal{A} = \{\sigma \in \mathcal{O}(A) \mid \rho \subseteq \sigma\}$.

Clar $(\mathcal{A}, \subseteq)$ este mulț. ordonată.

$\rho \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Conform punctului a) trebuie să arătăm că în $\mathcal{A}$ există elemente maximale. Pentru aceasta folosim lema lui Zorn.

Fie $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ un lanț.

Arătăm că $\mathcal{L}$ este majorată în $\mathcal{A}$.

Fie $\tau = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{L}} \sigma \Rightarrow \sigma \subseteq \tau, \forall \sigma \in \mathcal{L} \Rightarrow$

τ este un majorant a lui $\mathcal{L}$. Rămâne să verificăm că $\tau \in \mathcal{A}$, adică să avem că $\rho \subseteq \tau$ și $\tau \in \mathcal{O}(A)$

Cum $\overbrace{\tau = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{L}} \sigma}^{(*)} \Rightarrow \sigma \subseteq \tau, \forall \sigma \in \mathcal{L}$

dar $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \sigma \in \mathcal{A} \Rightarrow \rho \subseteq \sigma$ $\Rightarrow \rho \subseteq \tau$.

Rămâne să verificăm că $\tau \in \mathcal{O}(A)$, i.e τ este relație de ordine.

<u>Reflexivitate:</u> Vrem $x \tau x, \forall x \in A \overset{(*)}{\Longleftrightarrow}$

$\exists \sigma \in \mathcal{L}$ a.î. $x \sigma x, \forall x \in A$. ?

$\sigma \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}(A) \Rightarrow x \sigma x, \forall x \in A. \quad \forall \sigma \in \mathcal{L}$.

<u>Tranzitivitate:</u> temă

<u>Antisimetrie:</u> temă

Așadar cnf. lemei lui Zorn $\Rightarrow \exists \bar{\rho} \in \mathcal{A}$ elem. maximal $\Rightarrow \bar{\rho}$ este o rel. de ordine totală ce conține pe ρ $\square$.