SEMINAR 9

1) Fie funcţiile:
a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_1(x,y) = (-x,y)$ (simetria în raport cu axa Oy);
b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f_2(x,y) = (x,-y)$ (simetria în raport cu axa Ox);
c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f_3(x,y) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi),\ \varphi \in \mathbb{R},$ (rotaţia în plan de unghi φ);
d) $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f_4(x,y) = (x+y, 2x-y, 3x+2y)$.
Să se arate că $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ sunt transformări liniare de $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale. Care dintre acestea sunt izomorfisme? Care dintre acestea sunt endomorfisme? Care dintre acestea sunt automorfisme?

2) Există o transformare liniară de $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ astfel încât

$$f(1,0,3) = (1,1) \text{ şi } f(-2,0,-6) = (2,1)\,?$$

3) Fie V, V_1, V_2 K-spaţii vectoriale, două funcţii $f : V \to V_1,\ g : V \to V_2$ şi

$$h : V \to V_1 \times V_2,\ h(x) = (f(x), g(x)).$$

Să se arate că h este o transformare liniară dacă şi numai dacă f şi g sunt transformări liniare. Generalizare.

4) a) Fie $m \in \mathbb{N}^*$ şi $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Să se arate că f este o transformare liniară de $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale dacă şi numai dacă există $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, unic determinate, astfel încât

$$f(x_1, \ldots, x_m) = a_1x_1 + \cdots + a_mx_m,\ \forall (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

b) Să se determine tranformările liniare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$.

5) Să se arate că există o transformare $\mathbb{R}$-liniară $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ astfel încât $f(1,1) = (2,5)$ şi $f(1,0) = (1,4)$. Să se determine $f(2,3)$. Este f izomorfism?