CURS 2 07.10.2020

data trecută:

## Logica propozițiilor

- formule
- interpretări și valori de adevăr
- relații între formule

$\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$

- problema deciziei
  - tabele de adevăr
  - forme normale (FND, FNC)
  - deducție formală

## Teorema de completitudine Frege-Lukasiewicz

Avem: $\frac{A_1, \dots, A_n}{B}$ dacă și numai dacă B este deductibilă formal din $A_1, \dots, A_n$

# Cap 2. Logica predicatelor de ordinul I

Față de ce am avut în cadrul logicii propozițiilor, vom formaliza și alte expresii din limbajul natural:

„pentru orice" $\forall$ „există" $\exists$

(cuantificatori)

Din punct de vedere „naiv", un predicat este o „afirmație deschisă", astfel încât dacă înlocuiesc variabilele cu valori, obținem propoziții.

ex:

$x+y=1$ — $\exists x,y \in \mathbb{R}$ a.î. $x+y=1$

$1+0=1$ (A)

$3+2=1$ (F)

Obs Ordinul I se referă la faptul că vom cuantifica doar elemente ale mulțimilor. (de ex. $\forall x \in M$)

Ordinul II înseamnă să cuantificăm și mulțimi: (de ex. $\forall M$ mulțime)

## Limbajul de ordinul I

Def Un limbaj de ordinul I constă din:

a) Simboluri:

1) parantize: ( , )
2) conectori: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
3) cuantificatori: $\forall$ [orice] (universal), $\exists$ [există] (existențial)
4) simbolul de egalitate: $=$
5) simboluri de constante: $a, b, c, \ldots; a_1, a_2, \ldots$
6) variabile: $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots$
7) simboluri de funcții: $f, g, \ldots; f_1, f_2, \ldots$
8) simboluri de predicate: $P, Q, \ldots; P_1, P_2, \ldots$

se precizează aritatea (un număr natural n) care înseamnă numărul de variabile (nular, unar, binar, ... n-ar)

b) Expresii (termeni) acestea se definesc recursiv.

1) constantele sunt termeni } atomi (expresii atomice)
2) variabilele sunt termeni }

3) dacă $f$ este un simbol de funcție $n$-ară și $t_1, \dots, t_n$ sunt termeni, atunci $f(t_1, \dots, t_n)$ este termen

c) Formule (se definesc recursiv):

Formule atomice
1) Dacă $P$ este un predicat $n$-ar și $t_1, \dots t_n$ sunt termeni, atunci $P(t_1, \dots, t_n)$ este formulă
2) Dacă $t_1, t_2$ sunt termeni, atunci $t_1 = t_2$ este formulă

3) Dacă $A, B$ sunt formule, atunci $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$ sunt formule

4) Dacă $A$ este o formulă ce depinde de variabila $x$, atunci $\exists x A$, $\forall x A$ sunt formule

Obs de ex în formula:

$\forall x A(x, y)$

$x$ se numește variabilă legată (sau cuantificată)
$y$ se numește variabilă liberă

O formulă fără variabile libere, de ex $\forall x \exists y A(x, y)$ se numește formulă închisă. Acestea se vor identifica cu propoziții.

## Structura unui limbaj de ord I și interpretări

Vom da valori (într-o mulțime) expresiilor, respectiv valori de adevăr formulelor.

**Def** O **structură a unui limbaj de ordinul I** $\mathcal{L}$ constă din următoarele date:

1) o mulțime $M$.

2) Fiecărui simbol de constantă $a$ îi corespunde un element fixat $\tilde{a} \in M$

3) Fiecărui simbol de funcție $n$-ară $f$ îi corespunde o funcție $\tilde{f} : M^n \to M$ de $n$ variabile (unde:

$$M^n = \underbrace{M \times \ldots \times M}_{n \text{ ori}} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in M, i = 1, \ldots, n\}$$

4) Fiecărui simbol de predicat $n$-ar $P$ îi corespunde o submulțime $\tilde{P} \subseteq M^n$

5) Simbolului de egalitate $(=)$ îi corespunde relația de egalitate pe $M$ adică submulțimea:

(Delta)

$$\Delta(M) = \{(x, x) \mid x \in M\} \subseteq M^2$$

**Def** O **interpretare** a limbajului $\mathcal{L}$ este o funcție

$$s : V \longrightarrow M$$

mulțimea variabilelor limbajului (simbolurilor de variabile)

($x$ variabilă, $s(x) \in M$

**Def** Valoarea unei expresii $t$ ($\tilde{t} \in M$) se definește astfel:

1) valoarea constantei $a$ este elementul $\tilde{a} \in M$

2) valoarea variabilei $x$ este elementul $s(x) \in M$

3) dacă $f$ este un simbol de funcție $n$-ară și $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni, atunci valoarea expresiei $f(t_1, \ldots, t_n)$ este elementul $\tilde{f}(\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_n) \in M$

**Def** Valoarea de adevăr a unei formule se definește astfel:

1) Valoarea de adevăr a formulei $P(t_1, \dots, t_n)$ este 1 dacă și numai dacă $(\tilde{t_1}, \dots, \tilde{t_n}) \in \tilde{P}$, respectiv 0 în caz contrar

2) Valoarea de adevăr a formulei $t_1 = t_2$ este 1 dacă și numai dacă $\tilde{t_1} = \tilde{t_2}$ în $M$

3) Valoarea de adevăr a formulelor $(\neg A)$, $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \to B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ se definește ca în logica prop.

4) • val. de adevăr a formulei $\exists x A$ este 1 dacă și numai dacă există un element $\tilde{x} \in M$ a.î. $A(\tilde{x})$ adev

• val de adevăr a formulei $\forall x A$ este 1 dacă și numai dacă pentru orice element $\tilde{x} \in M$, $A(\tilde{x})$ este adev.

**Exemplu**:

Considerăm formula:

$A =$ " $x + y = 1$ " ← simbol de constanta

↖ simbol de egalitate

$x$, $y$ – simboluri de variabile

$+$ ← simbol de funcție binară (puteam scrie $+(x, y)$)

$x+y$, $1$ – sunt termeni

Considerăm următoarea structură:

$M = \mathbb{R}$

– constantei 1 îi corespunde $\tilde{1} = 1 \in \mathbb{R}$

– simbolului = îi corespunde relația de egalitate în $\mathbb{R}$

– simbolului + îi corespunde adunarea numerelor reale, adică funcția $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\tilde{+}$ $(x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{R}$ $\qquad \tilde{+}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x} + \tilde{y}$

considerăm o interpretare $s: V \to \mathbb{R}$, $s(x)=1$, $s(y)=3$

$V = \{x, y\}$

obținem prop: $1+3=1$ (F)

dacă $s(x)=-2$, $s(y)=3$

obținem prop: $(-2)+3=1$ (A)

- $\forall x \exists y (x+y=1)$ (o formulă închisă)

  - $x+y=1$ (ambele var. sunt libere)
  - $\forall x (x+y=1)$ ($x$ legat, $y$ liber)

cu structura de mai sus, aceasta devine o propoziție adevărată:

dacă $x \in \mathbb{R}$ atunci $y = 1 - x \in \mathbb{R}$

- $\exists x \forall y (x+y=1)$ este o propoziție falsă

$\boxed{EX:}$ dacă $M = \mathbb{N}^*$ atunci val lui $\forall x \exists y (x+y=1)$ fals

$\boxed{Def}$ a) O formulă $A$ se numește <u>tautologie</u> dacă ia valoarea de adevăr 1 pentru orice structură și pentru orice interpretare.

b) O formulă $A$ se numește <u>contradicție</u> dacă ia valoarea de adevăr 0 pentru orice structură și pentru orice interpretare.

c) O formulă $A$ este <u>realizabilă</u> dacă nu este contradicție.

$\boxed{Def}$ Relații între formule

a) $A \Rightarrow B$ dacă formula $(A \to B)$ este tautologie

b) $A \Leftrightarrow B$ dacă formula $(A \leftrightarrow B)$ este tautologie

<u>Listă de tautologii fundamentale</u>: $\boxed{2.3.9,\ p. 17-18 \text{ (manual)}}$

**Exemplu:**

1) $\neg(\forall x\, A(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg A(x))$
$\neg(\exists x\, A(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg A(x))$ } de Morgan

2) $\exists x \forall y\, A(x,y) \Longrightarrow \forall y \exists x\, A(x,y)$

$\forall y \exists x\, A(x,y) \Longrightarrow \exists x \forall y\, A(x,y)$ nu are loc în general

**Obs** Relația inversă $\Leftarrow$ nu e adevărată în general:

trebuie să dăm un exemplu în care $\forall y \exists x A(x,y)$ adev, dar $\exists x \forall y\, A(x,y)$ este fals:

În ex. anterior $A(x,y) = (x+y=1)$

**Temă**

până la ex 19