Laticea ca structură algebrică

- Recap: <u>Def</u> Mulțimea ord. $(A, \leq)$ s.n. <u>latice</u> dc. $\forall a, b \in A$, $\exists \inf_A\{a,b\}$, $\sup_A\{a,b\}$.

- <u>Obs.</u> Dc. $(A, \leq)$ latice, at. putem defini pe A operațiile:

  $\vee : A \times A \to A \quad a \vee b := \sup_A\{a,b\}$

  $\wedge : A \times A \to A \quad a \wedge b := \inf_A\{a,b\}$

- <u>Exercițiu (dem. th. 6.1.2)</u> S.s.a.c. cele 2 op satisfac urm. propr.:

  1) comutativitate: $\forall a, b \in A$ avem $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$.
  2) asociativitate: $\forall a, b, c \in A$ avem $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
     $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
  3) absorbție: $\forall a, b \in A$ avem $a \vee (b \wedge a) = a$
     $a \wedge (b \vee a) = a$
  4) idempotență: $\forall a \in A$ avem $a \vee a = a \wedge a = a$.

- <u>Def</u> Fie $(A, \vee, \wedge)$ o structură algebrică cu 2 operații binare care satisfac axiomele:

  (1) comutativitate

  (2) asociativitate

  (3) absorbție

Atunci $(A, \vee, \wedge)$ s.n. tot latice.

• Obs. Avem 2 noțiuni de latice: ca mulțime ordonată respectiv ca structură algebrică. Ele sunt echivalente, legătura fiind dată de $a \leq b \overset{def}{\Longleftrightarrow} a \vee b = b$

$$\overset{def}{\Longleftrightarrow} a \wedge b = a.$$

• Exemple: 1) Fie $(A, \leq)$ o mulțime total ordonată.

Atunci $a \vee b = \max\{a, b\}$, $a \wedge b = \min\{a, b\}$ $\Rightarrow \begin{cases} (A, \leq) \text{ latice} \\ (A, \vee, \wedge) \text{ latice.} \end{cases}$

2) Fie M o mulțime, $\mathcal{P}(M) = \{X \mid X \subseteq M\}$.

$(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ mulțime ordonată - latice completă.

$$X \wedge Y = \inf\{X, Y\} = X \cap Y$$
$$X \vee Y = \sup\{X, Y\} = X \cup Y$$

Așadar avem structura algebrică $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$ - latice

3) $(\mathbb{N}, |)$ mulțime ordonată.

$$a \vee b = [a; b] = \text{cmmmc}[a; b]$$
$$a \wedge b = (a; b) = \text{cmmdc}(a; b).$$

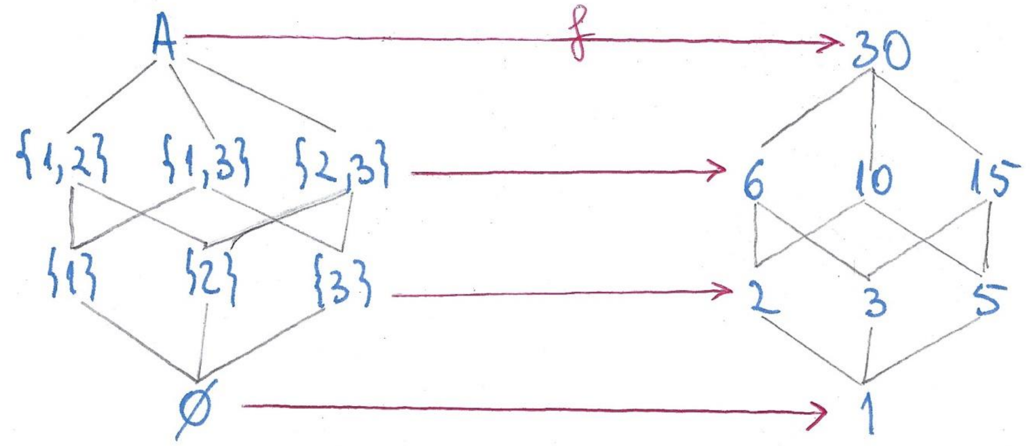
• Def Fie $(A, \vee, \wedge)$, $(A', \vee', \wedge')$ 2 latici. O funcție $f: A \to A'$ s.n morfism de latici dc $\forall a, b \in A$ avem:

$$\begin{cases} f(a \vee b) = f(a) \vee' f(b) \\ f(a \wedge b) = f(a) \wedge' f(b). \end{cases}$$

(102) Fie mulțimile $A=\{1,2,3\}$ și $B=\{d>0 \mid d \mid 30\}$.
Să se determine toate izomorfismele de latici.

$$f:(\mathcal{P}(A),\subseteq,\cup,\cap)\longrightarrow(B,\mid,\vee,\wedge)$$

$a\vee b=\text{cmmmc}[a;b]$ $\quad$ $a\wedge b=\text{cmmdc}(a;b)$



f morfism de latici $\Rightarrow$ $f(X\cup Y)=\text{cmmmc}[f(X);f(Y)]$

$f(X\cap Y)=\text{cmmdc}(f(X);f(Y))$

$\forall X,Y\in\mathcal{P}(A)$.

X	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	A
$f_1(X)$	1	2	3	5	6	10	15	30
$f_2(X)$	1	2	5	3	10	6	15	30
$f_3(X)$	1	3	2	5	6	15	10	30
$f_4(X)$	1	3	5	2	15	6	10	30
$f_5(X)$	1	5	2	3	10	15	6	30
$f_6(X)$	1	5	3	2	15	10	6	30

(103) Fie $(A, \leq, \wedge, \vee)$ și $(B, \leq, \wedge, \vee)$ 2 latici și fie $f : A \to B$ o funcție. S.s.a.c.

a) Dacă f este morfism de latici, atunci f crescător.

b) Afirmația reciprocă nu e adevărată, adică $\exists$ funcții crescătoare care NU sunt morfisme de latici.

c) Dacă A este total ordonată și f este crescător, atunci f este morfism de latici.

Temă d), e).

---

a). Știm că f este morf. de latici. Vrem f. crescător.

Fie $a_1, a_2 \in A$ cu $a_1 \leq a_2$. Vrem $f(a_1) \leq f(a_2)$.

$a_1 \leq a_2 \Rightarrow a_1 \vee a_2 = a_2 \Rightarrow f(a_1 \vee a_2) = f(a_2)$

Dar $f(a_1 \vee a_2) \overset{f \text{ morf de latici}}{=} f(a_1) \vee f(a_2)$ $\Rightarrow$

$f(a_1) \vee f(a_2) = f(a_2) \Rightarrow f(a_1) \leq f(a_2)$.

b) Fie $1_{\mathbb{N}^*} : (\mathbb{N}^*, |, \vee, \wedge) \to (\mathbb{N}^*, \leq, \vee', \wedge')$. $1_{\mathbb{N}^*}(x) = x, \forall x$

Am. dem. în seminariile anterioare că $1_{\mathbb{N}^*}$ este cresc.

Recap: În $(\mathbb{N}^*, |)$ $a \vee b = [a; b]$ și $a \wedge b = (a; b)$

În $(\mathbb{N}^*, \leq)$ $a \vee' b = \max\{a, b\}$ și $\min\{a, b\} = a \wedge' b$.

Dacă $1_{\mathbb{N}^*}$ ar fi morfism de latici $\Rightarrow$

$$1_{\mathbb{N}^*}(a \vee a') = 1_{\mathbb{N}^*}(a) \vee' 1_{\mathbb{N}^*}(a') \Leftrightarrow$$

$$a \vee a' = a \vee' a' \Leftrightarrow [a, a'] = \max\{a, a'\}.$$

Fals (în general NU este adev:

$$\text{cmmmc}[2,3] = 6 \quad , \text{dar} \quad \max\{2,3\} = 3).$$

c) Vrem f morfism de latici.

Fie $a, b \in A$. Vrem $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ (1)

$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ (2)

Demonstrăm doar (1), pt. (2) se procedează similar.

$a, b \in A \xRightarrow{A \text{ total ord}} a \leq b$ sau $b \leq a$.

<u>Cazul I</u> Dacă $a \leq b \Rightarrow a \vee b = b \Rightarrow f(a \vee b) = f(b)$

$\Downarrow f$ cresc

$f(a) \leq f(b) \Rightarrow f(a) \vee f(b) = f(b)$ $\Rightarrow$ (1).

<u>Cazul II</u> Dacă $b \leq a$ se dem. similar.

$\square$.

Latici distributive

• **Def** Laticea $(A, \vee, \wedge)$ s.n. distributivă, dc $\forall a, b, c \in A$: $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$.

(104) b) Laticea $(A, \vee, \wedge)$ este distributivă $\Longleftrightarrow$ $\forall a, b, c \in A$: $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$. (Proprietatea duală)

Ajunge să dem „$\Rightarrow$", afirm „$\Leftarrow$" fiind similară.

$$(a \vee c) \wedge (b \vee c) \overset{\text{distrib}}{=} (a \wedge (b \vee c)) \vee (c \wedge (b \vee c)) \overset{\text{abs}}{=}$$
$$(a \wedge (b \vee c)) \vee c \overset{\text{comut}}{=} ((b \vee c) \wedge a) \vee c \overset{\text{distrib}}{=}$$
$$((b \wedge a) \vee (c \wedge a)) \vee c \overset{\text{asoc}}{=} (b \wedge a) \vee ((c \wedge a) \vee c) \overset{\text{abs.}}{=}$$
$$(b \wedge a) \vee c \overset{\text{comut}}{=} (a \wedge b) \vee c.$$

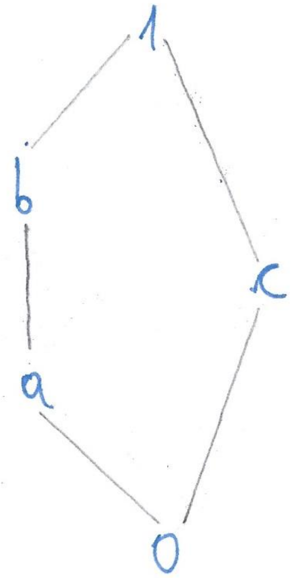
c) Dacă A este distrib., at pt. $\forall a, b, c \in A$ avem:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & a \vee c = b \vee c \\ (2) & a \wedge c = b \wedge c \end{array}\right| \Longrightarrow a = b.$$

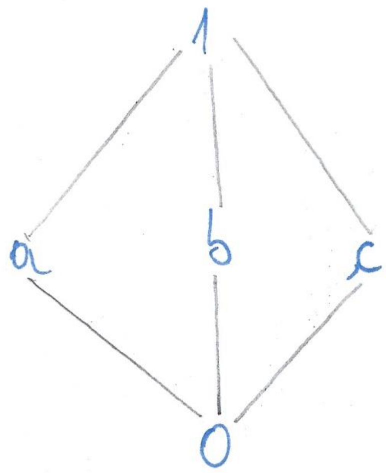
$$a \overset{\text{abs}}{=} a \vee (a \wedge c) \overset{(2)}{=} a \vee (b \wedge c) \overset{\text{distrib}}{=} (a \vee b) \wedge (a \vee c) \overset{(1)}{=}$$
$$(a \vee b) \wedge (b \vee c) \overset{\text{distrib}}{=} b \vee (a \wedge c) \overset{(2)}{=} b \vee (b \wedge c) \overset{\text{abs}}{=} b.$$

e) Sunt distributive următoarele latici:

1)



2)



Soluție și pt 1) și 2):

$$\left.\begin{array}{l} a \vee c = 1 = b \vee c \\ a \wedge c = 0 = b \wedge c \\ \text{Dacă ar fi distributive} \end{array}\right| \xRightarrow{c)} a = b \text{ fals.}$$

Așadar laticile 1) și 2) NU sunt distributive.

(105) S s a c:

a) Dacă $(A, \leq)$ este total ord, at A este latice distributivă.

b) $(\mathbb{N}, |)$ este latice distributivă

a). Fie $x, y \in A$, $(A, \leq)$ total ord $\Rightarrow x \leq y$ sau $y \leq x$.

Dc. $x \leq y \Rightarrow \sup\{x, y\} = y$
$\inf\{x, y\} = x$.

Dc. $y \leq x \Rightarrow \sup\{x, y\} = x$
$\inf\{x, y\} = y$

Așadar $(A, \leq)$ este latice, iar
$\begin{cases} \sup\{x, y\} = \max\{x, y\} \\ \inf\{x, y\} = \min\{x, y\} \end{cases}$

Demonstrăm că A este latice distributivă, adică vrem $\forall a, b, c \in A$: $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$.

$a, b, c \in A$, $(A, \leq)$ total ord $\Rightarrow$ avem 6 variante de a ordona pe a, b, c:

caz	$a \vee b$	$(a \vee b) \wedge c$	$a \wedge c$	$b \wedge c$	$(a \wedge c) \vee (b \wedge c)$
$a \leq b \leq c$	b	b	a	b	b
$a \leq c \leq b$	b	c	a	c	c
$b \leq a \leq c$	a	a	a	b	a
$b \leq c \leq a$	a	c	c	b	c
$c \leq a \leq b$	b	c	c	c	c
$c \leq b \leq a$	a	c	c	c	c

Așadar A latice distributivă.

b) Vrem $(\mathbb{N}, |)$ latice distributivă.

Obs. 1) $2 \nmid 3$ și $3 \nmid 2 \Rightarrow (\mathbb{N}, |)$ NU este total ord!

2) $\forall a, b \in \mathbb{N}$ $\quad \sup\{a,b\} = \text{cmmmc}[a,b] \overset{not}{\equiv} [a;b]$

$\inf\{a,b\} = \text{cmmdc}(a;b) \overset{not}{\equiv} (a;b)$

Clar, prin definiție.

Așadar $(\mathbb{N}, |)$ este latice. Vrem să arătăm că e distrib:

pt $a, b, c \in \mathbb{N}$ avem $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$,

i.e. $[a;(b;c)] = ([a;b];[a;c])$.

Descompunem în factori primi nr. a, b, c:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

$$b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$$

$$c = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\gamma_n}$$

cu $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{N}$ (posibil inclusiv 0).

știm $\begin{cases} (a;b) = p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdot \ldots \cdot p_n^{\min\{\alpha_n,\beta_n\}} \\ [a;b] = p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdot \ldots \cdot p_n^{\max\{\alpha_n,\beta_n\}}. \end{cases}$

$$[a;(b;c)] = p_1^{\max\{\alpha_1, \min\{\beta_1,\gamma_1\}\}} \cdot \ldots \cdot p_n^{\max\{\alpha_n, \min\{\beta_n,\gamma_n\}\}}.$$

$$([a;b];[a;c]) = p_1^{\min\{\max\{\alpha_1,\beta_1\}, \max\{\alpha_1,\gamma_1\}\}} \cdot \ldots \cdot p_n^{\min\{\max\{\alpha_n,\beta_n\}, \max\{\alpha_n,\gamma_n\}\}}$$

Clar egale, deoarece avem că $\max\{\alpha, \min\{\beta,\gamma\}\} = \min\{\max\{\alpha,\beta\}, \max\{\alpha,\gamma\}\}$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ (proprietatea de distributivitate de la a); $(\mathbb{N}, \leq)$ este total ord.).