# LOGICA MATEMATICA

CURS 1
30.09.2020

## Organizare

- manual: http://math.ubbcluj.ro/~marcus
  secțiunea: Teaching
- examinare: - examen în sesiune
  (ianuarie - februarie 2021)

4 subiecte
fiecare notat 1-10
+puncte bonus la seminar ?

- prezența la seminar 75%
- ce presupunem cunoscut: Algebra clasa a IX-a

## Introducere

- discutăm aspecte formale ale demonstrațiilor matematice
- aplicații ale metodelor matematice în logică

Acest curs nu este:
- logică filozofică → (Facultatea de Istorie-Filozofie)
- logică computațională → la Informatică

Vom discuta mai ales teoria mulțimilor.

# Cap 1. Logica propozițiilor

- Aristotel

Din punct de vedere „naiv", prin propoziție înțelegem o afirmație despre care știm că e adevărată sau falsă.

Putem forma propoziții compuse folosind cuvinte ca: sau, și, non, dacă... atunci, dacă și numai dacă, ...

Acest punct de vedere (cel naiv) nu e suficient de riguros. =)

Introducem un limbaj formal.

**Def** Limbajul logicii propozițiilor constă din:

1) Simboluri:

   a) parantezele: ( , )

   b) conectori:

| $\neg$ | $\vee$ | $\wedge$ | $\rightarrow$ | $\leftrightarrow$ |
|---|---|---|---|---|
| non | sau | și | dacă... atunci | dacă și numai dacă |
| negația | disjuncția | conjuncția | implicația | echivalența |

   c) atomi (formule atomice): $\underbrace{a, b, c, p, q, r, x_1, x_2, \ldots}_{\text{alfabet}}$

2) Formule: (acestea se definesc recursiv (prin inducție))

   a) formulele atomice sunt formule

   b) dacă $A$, $B$ sunt formule, atunci putem forma:

$$(\neg A),\ (A \vee B),\ (A \wedge B),\ (A \rightarrow B),\ (A \leftrightarrow B)$$

Acestea sunt, de asemenea, formule.

**Exemple**

1) $((\neg p) \rightarrow (q \vee r)) \leftrightarrow (p \vee (\neg q)))$ e formulă

identificăm subformule

2) $(\neg \to (p \vee r)) \leftrightarrow (\neg q) \vee \wedge r$ nu e formulă

$\boxed{\text{Obs}}$

Practic, vom omite unele paranteze (astfel):

- dând ordine de prioritate conectorilor:

I $\neg$

II $\vee, \wedge$

III $\to, \leftrightarrow$

- omitem parantezele exterioare

ex 1) poate fi scris astfel: $(\neg p \to q \vee r) \leftrightarrow p \vee \neg q$

## Interpretarea formulelor

Fiind dată o formulă A, definim valoarea de adevăr a lui A astfel:

- presupunem că se dă o funcție $v : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ (interpretare; $\mathcal{A}$ [alfabet] (mulțimea atomilor); 0 = fals, 1 = adevărat)

- valoarea de adevăr a unei formule compuse este dată de următoarele tabele de adevăr:

| A | ¬A |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| A | B | A ∨ B | A ∧ B | A → B | A ↔ B |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Def** Formula A se numește:

a) tautologie dacă $v(A)=1$ pt orice interpretare

b) contradicție dacă $v(A)=0$ pt orice interpretare

c) realizabilă dacă $\exists$ o interpretare pt care $v(A)=1$

## Relații între formule

**Def** Fie A, B formule.

a) $A \Rightarrow B$ (B este consecință a lui A) dacă formula $(A \to B)$ este tautologie

b) $A \Leftrightarrow B$ (A echivalentă cu B) dacă formula $(A \leftrightarrow B)$ este tautologie

## Problema deciziei

Dându-se o formulă A, să se stabilească dacă A este tautologie, contradicție sau realizabilă.

### Metode de rezolvare a problemei deciziei

1) $\boxed{\text{Cu tabele de adevăr}}$

2) $\boxed{\text{Cu forme normale}}$

**Def** Spunem că formula A are formă normală disjunctivă dacă: A este o disjuncție de conjuncții elementare, FND

adică: $A = A_1 \vee \ldots \vee A_n$, unde fiecare $A_i = B_1 \wedge \ldots \wedge B_{n_i}$

unde $B_j$ este atom sau negație de atom

b) Spunem că A are formă normală conjunctivă (FNC) dacă A este o conjuncție de disjuncții elementare.

adică: $A = A_1 \wedge \dots \wedge A_n$, unde $A_i = B_1 \vee \dots \vee B_m$

unde $B_j$ atom sau negație de atom

**Teoremă** Pentru orice formulă A există o formulă B echivalentă cu A astfel încât B are FND sau FNC.

**Obs** O formulă normală echivalentă cu A se obține prin aplicarea următoarelor tautologii fundamentale:

1) Legea echivalenței:

$$A \leftrightarrow B \Longleftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$$

Legea implicației:

$$A \to B \Longleftrightarrow \neg A \vee B$$

2) Legile lui de Morgan:

$$\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

3) Legea terțului exclus

$$A \vee \neg A \Longleftrightarrow 1 \quad \text{(este o tautologie)}$$

Legea necontradicției

$$A \wedge \neg A \Longleftrightarrow 0$$

4) Legea dublei negații

$$\neg\neg A \Longleftrightarrow A$$

5) $A \vee 1 \Longleftrightarrow 1$, $A \wedge 1 \Longleftrightarrow A$

$A \vee 0 \Longleftrightarrow A$, $A \wedge 0 \Longleftrightarrow 0$

6) comutativitatea:

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$$
$$\wedge \qquad \wedge$$

asociativitatea:

$$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$$
$$\wedge \quad \wedge \qquad \wedge \quad \wedge$$

distributivitatea:

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$
$$\wedge \quad \vee \qquad \wedge \quad \vee \quad \wedge$$

idempotență:

$$A \vee A \Leftrightarrow A, \quad A \wedge A \Leftrightarrow A$$

absorbție:

$$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$$
$$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$$

## ③ Deducție formală

Pornim de la niște tautologii pe care le numim axiome și aplicăm reguli de inferență (deducție) cum ar fi:

Modus ponens: $\dfrac{A, \ A \to B}{B}$ ← premise ipoteze

concluzie

Obs Notația $\dfrac{A_1, \dots, A_n}{B}$ înseamnă: $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$, adică formula $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n \to B)$ tautologie

Exemplu

Să se arate că regula MP este o regulă validă de deducție, cu: a) tabele de adevăr
b) forme normale

## Rezolvare:

(MP) $\dfrac{A,\ A\to B}{B}$; scriem formula $C = (A \wedge (A\to B)) \to B$

a)

| $A$ | $B$ | $A\to B$ | $A\wedge(A\to B)$ | $C$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$\Rightarrow$ C este tautologie

b) $C = (A\wedge(A\to B)) \to B \Longleftrightarrow \neg(A \wedge(\neg A \vee B)) \vee B \Longleftrightarrow$

$\overset{deM}{\Longleftrightarrow} (\neg A \vee \neg(\neg A \vee B)) \vee B \underset{asoc}{\overset{deMorgan}{\Longleftrightarrow}}$

$\underset{asoc.}{\overset{deM}{\Longleftrightarrow}} \neg A \vee (\neg\neg A \wedge \neg B) \vee B \underset{leg.\ dublei\ negații}{\Longleftrightarrow}$

$\Longleftrightarrow \neg A \vee (A \wedge \neg B) \vee B$ (F.N.D) $\Longleftrightarrow$

$\overset{comut.}{\Longleftrightarrow} (\neg A \vee B) \vee (A \wedge \neg B) \Longleftrightarrow$

$\overset{distrib.}{\Longleftrightarrow} (\neg A \vee B \vee A) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg B) \Longleftrightarrow (B \vee 1) \wedge (\neg A \vee 1) \Longleftrightarrow$

(FNC)

$\Longleftrightarrow 1 \wedge 1 \Longleftrightarrow 1$

discutăm FND:
- A fals $\Rightarrow \neg A$ adev ✓
- B ad $\Rightarrow$ C ad ✓
- A ad, B fals $\Rightarrow A \wedge \neg B$ ad ✓

deci C taut

**Temă** (din manual)

ex 1–13