Seminar 5

Sisteme de ecuații liniare

$$(1)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ necunoscute.

Sistem:
- incompatibil = nu are soluții
- compatibil
  - determinat = are o singură sol.
  - nedet. = are mai mult

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ matricea sistemului (1) ; $$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

matricea coloană a termenilor liberi

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B \quad ; \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{mn} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ $\to$ matricea extinsă a sist. (1).

Teoremă (Kronecker Capelli):

Sistemul (1) este compatibil $\Leftrightarrow$ rang A = rang $\bar{A}$.

Teoremă (Rouché):

Sistemul (1) este compatibil $\Leftrightarrow$ toți minorii caracteristici corespunzători unui minor principal sunt nuli.

(minor principal = minor nenul al lui A de ordin egal cu rang A.

minor caracteristic = minor al lui $\bar{A}$ obținut prin bordarea unui minor principal cu elemente din coloana termenilor liberi.)

Rezolvarea sistemelor de ec. liniare

Regula lui Cramer: (1) cu $m=n$ și $\det A \neq 0$

Sist. este compatibil determinat și

$$x_i = \frac{1}{\det A} \cdot d_i \quad , \quad i=\overline{1,n}.$$

d_i = det. obținut din determinantul lui A înlocuind col. i cu B.

Metodă de rezolvare a sist. cu ajutorul T. Rouché (și regulii lui Cramer)

Considerăm sist. (1). Determinăm un minor principal.

Să considerăm că acesta este:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \quad (\neq 0)$$

Dacă printre minorii caracteristici coresp. lui d găsim unul nenul, sist. este incompatibil.

Dacă toți minorii caract. coresp. lui d sunt nuli atunci:

retinem ec. care intervin ca linii în d = ec. principale.

- nec. ale căror coef. intervin în d = nec. principale.

  → celelalte nec. = nec. secundare (= parametrii).

Sist. (1) devine:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

care este un sistem de tip Cramer pe care îl rezolvăm.

Lista 4:

(2) Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$ $\quad$ (în $\mathbb{R}^3$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ (rang $A \geq 2$) ; $\exists$ un singur mod de a borda la un minor mai mare și acela e $\det A$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} \underset{C_3 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot (2+4) = 6 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Rang $A = 3$.

$\Rightarrow$ sist. comp. determinat și

$$x_1 = \frac{d_1}{6} \; ; \quad x_2 = \frac{d_2}{6} \; ; \quad x_3 = \frac{d_3}{6}.$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 8 - 4 - 4 + 2 + 16 = 6$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

$d_3 = -12$.

$\Rightarrow x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$.

Mulțimea soluțiilor este : $\{(1, 2, -2)\}$.

b) $(2)\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$ (în $\mathbb{R}^4$)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc:c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{iar} \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 5 \\ 12 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{singurele moduri de bordare}$$

Prin urmare $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ este minor principal.

<u>Obs</u>: rang $A = 2$

Există un singur minor caracteristic coresp. acestui minor principal:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 10 & 13 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{sist. este compatibil}$$

$C_1 + C_2 = C_3$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 + 2x_4 = 3 - 3x_1 - 4x_2 \quad | \cdot 2 \\ 2x_3 + 5x_4 = 7 - 6x_1 - 8x_2 \end{cases} \quad -$$

$$/ \qquad x_4 = 1$$

$x_3 = 3 - 2 - 3x_1 - 4x_2$

$x_3 = 1 - 3x_1 - 4x_2$

$S = \{(x_1, x_2, 1 - 3x_1 - 4x_2, 1) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. $\Rightarrow$ sist. compatibil dublu-nedeterminat

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$ (în $\mathbb{R}^3$)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

- căutăm un minor principal

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- bordăm cu linii și coloane

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

$C_2 - C_1$

- acesta este un minor principal. $\Rightarrow$ Rang A = 3

Există un singur minor caracteristic:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$L_2 - L_1$; $L_3 - L_1$; $L_4 - 2L_1$ $\qquad$ $C_3 - C_2$

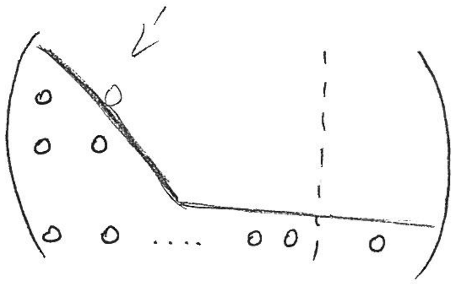
$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4(0+1) = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{sistemul este incompatibil}$$

$\exists$ un minor caracteristic $\neq 0$.

II Metoda lui Gauss

- se efectuează transf. elementare asupra liniilor unei matrici (pornim de la matricea extinsă a sistemului) și eventual permutări de coloane diferite de col. termenilor liberi.

dacă apare un 0 în plus permutăm 2 coloane



- în a doua ec. îmi doresc să nu mai apară x_1 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ coef. lui să fie 0
- în a 3-a ec x_1, x_2 să dispară, etc.
- Concluzie: să aduc matricea la o formă trapezoidală.

OBS: Dacă pe parcursul acestor transformări obținem o linie în care toate elem. sunt nule exceptând pe cel din coloana termenilor liberi, sistemul este incompatibil.

Lista 5+6

1) Să se rezolve:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$ (în $\mathbb{R}^3$).

Matricea sistemului:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{l_2-2l_1 \\ l_3-4l_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right) \underset{l_3-l_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

- are formă trapezoid

Sistemul dat este echivalent cu:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = -2 \\ \qquad -2x_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

- sist. este compatibil det.

$\Rightarrow (1, 2, -2)$ - soluție.

b) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$ (în $\mathbb{R}^4$)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right) \underset{\substack{l_2-2l_1 \\ l_3-3l_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \underset{c_2 \leftrightarrow c_4}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \underset{l_3-4l_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc|c} 3 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- dacă avem o linie de 0 => sistem comp. nedeterminat.

Sistemul dat este echivalent cu:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_4 + x_3 + 4x_2 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(1 - 4x_2 - x_3) \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Mulțimea sol. este: $S = \left\{ \left(\frac{1}{3}(1 - 4x_2 - x_3), x_2, x_3, 1 \right) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$ (în $\mathbb{R}^3$).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{l_2-l_1 \\ l_3-l_1 \\ l_4-2l_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \end{array}\right) \underset{l_4+l_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{l_4-l_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{sistemul este incompatibil.}$$