Minuță Aurelian

Seminar 2

– Scheme de deducții –

• <u>Def</u> Fie $A_1, \dots, A_n$ $(n \geq 0)$, B formule propozitionale
Spunem că B este o consecință a formulelor $A_1, \dots, A_n$ dacă orice interpretare care face $A_1, \dots, A_n$ adev. face și formula B adevărată.

<u>Not.</u> $A_1, \dots, A_n \models B$ sau $\dfrac{A_1, \dots, A_n}{B}$

și o numim schemă de deducție (inferență).

$A_1, \dots, A_n$ = premize
B = concluzie.

<u>Obs.</u> 1) $A_1, \dots, A_n \models B \iff A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \to B$ este tautologie

$\iff A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$

2) Dc $n = 0$, B trebuie să fie o tautologie.

• <u>Exemple</u>:

1) Modus ponendo ponens $\dfrac{A, A \to B}{B}$

2) Modus tollens $\dfrac{A \to B, \neg B}{\neg A}$

3) Contrapoziția $\dfrac{A \to B}{\neg B \to \neg A}$

4) Silogismul ip. $\dfrac{A \to B,\ B \to C}{A \to C}$.

5) Silogismul disjunctiv $\dfrac{A \vee B,\ \neg A}{B}$.

- Exercițiul 10:

1) $\dfrac{A,\ A \to B}{B} \iff$ „$A \wedge (A \to B) \Rightarrow B$"

Metoda 1 (tabele de adevăr)

A	B	$A \to B$	$A \wedge (A \to B)$	$(A \wedge (A \to B)) \to B$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Metoda 2 (forme normale)

$(A \wedge (A \to B)) \to B \xLeftrightarrow{\text{l. implicației}}$

$(A \wedge (\neg A \vee B)) \to B \xLeftrightarrow{\text{l. implicației}}$

$\neg(A \wedge (\neg A \vee B)) \vee B \xLeftrightarrow{\text{De Morgan}}$

$(\neg A \vee \neg(\neg A \vee B)) \vee B \xLeftrightarrow[\text{l. d. neg}]{\text{De Morgan}}$

$(\neg A \vee (A \wedge \neg B)) \vee B \xLeftrightarrow{\text{asoc}}$

$(\neg A) \vee (A \wedge \neg B) \vee B$ FND. Așadar NU avem o contradicție.

$\overset{distrib}{\Longleftrightarrow}$ $((\neg A) \vee A \vee B) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B) \vee B)$ FNC.

Așadar avem o tautologie. Restul temă.

• Obs. Multe dem. din matematică devin mai ușoare folosind o schemă de deducție echivalentă.

1. Dem. directă $\dfrac{A}{B \to C} \Leftrightarrow \dfrac{A, B}{C}$

2. Dem. prin contrapoziție $\dfrac{A, B}{C} \Leftrightarrow \dfrac{A, \neg C}{\neg B}$

3. Dem. indirectă $\dfrac{A}{B} \Leftrightarrow$ „arătăm că $A \wedge (\neg B)$ este o contr."

• Exercițiul 12. temă.

Cap. 2. Logica de ordinul I

- logica propozițională formalizează utilizarea conectorilor logici $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- logica de ord. I introduce cuantificatori $\forall, \exists$
- logica de ord. II se cuantifică pe lângă var și predicate (mulțimi)
- **Def** Fie $M \neq \emptyset$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Un predicat n-ar pe mulțimea M este o submulț. a mulț. (M^n).

Obs. Un predicat n-ar pe M este o afirm. $P(x_1, \dots, x_n)$ în care putem înlocui variabilele $x_1, \dots, x_n$ cu elem $a_1, \dots, a_n \in M$ a.î. $P(a_1, \dots, a_n)$ să fie adev.
$= \{(a_1, \dots, a_n) \in M^n \mid P(a_1, \dots, a_n) \text{ adev}\}$.

Exemple: a) „$x + y = z$" predicat de 3 var. pe $M = \mathbb{R}$

b) „$x < y$" predicat binar pe $M = \mathbb{N}$

c) „$|x| = 1$" predicat unar pe $M = \mathbb{C}$.

• Simbolurile unui limbaj de ord I ($\mathcal{L}$).

- paranteze (și)
- conectori $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- cuantificatori $\forall$, $\exists$
- egalitatea $=$
- variabile $x, y, z, \ldots$
- constante $a, b, c, \ldots$
- fct. (op.) $f, g, \ldots$
- predicatele $P, Q, \ldots$

• Def a) Expresiile (termenii) limb. de ord I $\mathcal{L}$ sunt șiruri finite de simboluri ce satisfac. urm. reg:

1. $\forall$ variabilă este o expr.
2. $\forall$ ct. este o expr.
3. dc. f este o funcție de n var și $t_1, \ldots, t_n$ sunt expr. at. $f(t_1, \ldots, t_n)$ este o expr. ($f(x,y) \overset{not}{=} x f y$.
4. alte expr. nu $\exists$.

b) Formulele limb. de ord I sunt șiruri finite de simboluri ce satisfac. urm. reg.:

form. atomice

1. Dc. P este un predicat n-ar și $t_1, \dots, t_n$ expr. at. $P(t_1, \dots, t_n)$ formulă
2. Dc. t_1 și t_2 sunt expr., at $t_1 = t_2$ formulă
3. Dc φ și ψ sunt formule, at
$\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$ formule.
4. Dc. φ form și x var. at $\forall x \varphi$, $\exists x \varphi$ form.
5. alte formule nu $\exists$.

• Ex 14 Fie f, g, h simboluri de funcții de 1, 2 și resp. 3 var. și P, Q simb. de pr. de 1 și resp. 3 var.

1) Sunt termeni urm. cuv?

(a) $f(g(x,y))$ DA

(b) $g(f(z), h(x,y,z))$ DA

(c) $f(g(x), h(x,y,z))$ NU g este o fct de 2 var.

2) Sunt formule urm. cuv.?

(a) $Q(x, f(x), h(x,y,z))$ DA

(b) $P(x) \rightarrow (\forall y)(Q(x,y,z) \wedge P(g(x,y)))$ DA

(c) $Q(P(x), f(y), z)$ NU, $P(x)$ NU este expr.

(d) $f(h(x,y,z))$ NU e form., este expr.

• Ex 15 Să se scrie toate subformulele formulelor:

a) $Q(f(x), g(x,y))$ atomică

b) $\exists x Q(x,y) \rightarrow \neg(P(g(x,y)) \wedge \forall z P(z))$

$Q(x,y)$, $\exists x Q(x,y)$, $P(g(x,y))$, $P(z)$, $\forall z P(z)$,
$P(g(x,y)) \wedge \forall z P(z)$, $\neg(P(g(x,y)) \wedge \forall z P(z))$, toate.

• Ex 16 Să se descrie mult. term. (expr.) unui limbaj de ord. I dc. se dau:

a) o var. x și un simbol de fct. unară f

b) o var x și un simbol de fct. binară f

a) x
$f(x)$
$f(f(x)) = (f \circ f)(x)$
$\vdots$
$(f \circ f \circ \ldots \circ f)(x) \ldots$

b) x
$f(x, x)$
$f(x, f(x,x))$, $f(f(x,x), x)$, $f(f(x,x), f(x,x))$
$\ldots$,

Tautologii importante:

(1) $\forall x \forall y A \Leftrightarrow \forall y \forall x A$, $\exists x \exists y A \Leftrightarrow \exists y \exists x A$

(2) $(\exists x)(\forall y)A \Rightarrow (\forall y)(\exists x)A$, $\forall x A \Rightarrow \exists x A$

(3) $\forall x(A \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A \wedge \forall x B$

(4) $\exists x(A \vee B) \Leftrightarrow \exists x A \vee \exists x B$

(5) $\forall x A \vee \forall x B \Rightarrow \forall x(A \vee B)$

(6) $\exists x(A \wedge B) \Rightarrow \exists x A \wedge \exists x B$

(7) $\neg\forall x A \Leftrightarrow \exists x(\neg A)$, $\neg\exists x A \Leftrightarrow \forall x(\neg A)$ (legile lui De Morgan)

Exercițiul 17 a) Să se arate că în (2), (5) și (6) implicațiile inverse nu sunt adevărate (dând contraexemple).
b) Să se demonstreze (9) folosind (8) și (7).

Sol: (6) Afirm. inversă: $\exists x A \wedge \exists x B \Rightarrow \exists x (A \wedge B)$.

$A(x)$: $x > 0$ $\quad \exists x A(x)$ adev.

$B(x)$: $x < 0$. $\quad \exists x B(x)$ adev.

$\Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ adev.

dar $\exists x (A \wedge B)(x)$ adică $\exists x (x > 0 \wedge x < 0)$ falsă.

Restul temă.

b)

(7) $\neg\forall x A \Leftrightarrow \exists x(\neg A)$, $\neg\exists x A \Leftrightarrow \forall x(\neg A)$ (legile lui De Morgan)

(8) $C \wedge \forall x A \Leftrightarrow \forall x(C \wedge A)$,

$C \vee \forall x A \Leftrightarrow \forall x(C \vee A)$,

$C \wedge \exists x A \Leftrightarrow \exists x(C \wedge A)$,

$C \vee \exists x A \Leftrightarrow \exists x(C \vee A)$.

(9) $C \to \forall x A \Leftrightarrow \forall x(C \to A)$,

$C \to \exists x A \Leftrightarrow \exists x(C \to A)$,

$\forall x A \to C \Leftrightarrow \exists x(A \to C)$,

$\exists x A \to C \Leftrightarrow \forall x(A \to C)$.

$$\forall x A \to C \overset{\text{l. impl.}}{\Longleftrightarrow} \neg(\forall x A) \vee C \overset{\text{De Morgan}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\exists x(\neg A) \vee C \overset{(8)}{\Longleftrightarrow} \exists x(\neg A \vee C) \overset{\text{l. impl.}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\exists x(A \to C).$$

Exercițiul 18 Considerăm structura $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, S, P)$, unde S şi P sunt predicate de 3 variabile definite astfel: $S(x, y, z)$ este adevărat dacă şi numai dacă $x + y = z$, iar $P(x, y, z)$ este adevărat dacă şi numai dacă $xy = z$.

1. Să se scrie o formulă cu o variabilă liberă x, adevărată dacă şi numai dacă:
   (a) $x = 0$;
   (b) $x = 1$;
   (c) $x = 2$;
   (d) x este număr par;
   (e) x este număr impar;
   (f) x este număr prim.
2. Să se scrie o formulă cu două variabile libere x, y, adevărată dacă şi numai dacă:
   (a) $x = y$;
   (b) $x \leq y$;
   (c) $x < y$;
   (d) x divide y;
   (e) x şi y sunt numere prime gemene (diferența lor e 2).
3. Să se scrie o formulă cu trei variabile libere x, y, z, adevărată dacă şi numai dacă:
   (a) z este cel mai mic multiplu comun al lui x şi y;
   (b) z este cel mai mare divizor comun al lui x şi y;

4. Să se scrie propoziția (formula închisă) care exprimă:
   (a) comutativitatea adunării;
   (b) asociativitatea adunării;
   (c) comutativitatea înmulțirii;
   (d) asociativitatea înmulțirii;
   (e) distributivitatea adunării față de înmulțire;
   (f) pentru orice număr natural există unul strict mai mare;
   (g) infinitatea mulțimii numerelor prime;
   (h) infinitatea mulțimii perechilor de numere prime gemene;
   (i) orice număr natural este suma a 4 pătrate perfecte;
   (j) existența celui mai mic multiplu comun şi a celui mai mare divizor comun;
   (k) orice număr par > 2 este suma a două numere prime.

<u>Soluție:</u>

(a) $x = 0$ $\qquad$ $S(x,x,x): x + x = x$

$S(x,y,y): x + y = y$

$P(x,2,0): x \cdot 2 = 0$

....