SEMINAR 7

1) Arătaţi că grupul abelian $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ este un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial în raport cu operaţia externă $*$ definită prin

$$\alpha * x = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}_+^*\,.$$

2) Fie V un K-spaţiu vectorial şi M o mulţime. Să se arate că V^M este K-spaţiu vectorial în raport cu operaţiile definite punctual în V^M, adică

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x),\ \forall f, g \in V^M,\ \forall \alpha \in K.$$

3) Poate fi organizată o mulţime finită M ca un spaţiu vectorial peste un corp infinit K?

4) Fie $p \in \mathbb{N}$ prim. Poate fi organizat grupul abelian $(\mathbb{Z}, +)$ ca spaţiu vectorial peste corpul $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$?

5) Care dintre următoarele submulţimi sunt subspaţii în spaţiile indicate alăturat:
a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\},\ (a, b \in \mathbb{R}$ fixate) în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$;
b) $D = [-1, 1]$ în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$;
b') $D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$;
b") $D'' = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n$;
c) $P_n(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{grad} f \leq n\}$ în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[X]$ ($n \in \mathbb{N}$ fixat);
d) $B = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{grad} f = n\}$ în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[X]$ ($n \in \mathbb{N}$ fixat)?

6) Fie V un K-spaţiu vectorial, $A \leq_K V$ şi $C_V A = V \setminus A$.
i) Este $C_V A$ subspaţiu în ${}_K V$?
ii) Dar $C_V A \cup \{0\}$?