

Funcții continue

Exercițiul 1: Folosind definiția, verificați dacă funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

este continuă.

Exercițiul 2:

a) Folosind teorema de caracterizare cu ε și δ demonstrați că funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & : x \in \mathbb{Q} \\ -x & : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

este continuă în 0.

b) Folosind definiția demonstrați că funcția de la **a)** nu are alte puncte de continuitate în afară de 0, deci $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f este discontinuă în x .

Exercițiul 3: Studiați continuitatea funcției

a) $f : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & : x \in (-\infty, 0) \\ 7 & : x = 0, \end{cases}$$

b) $f : [-1, 2] \cup \{4\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & : x \in [-1, 2] \\ 0 & : x = 4. \end{cases}$$

Exercițiul 4: Studiați continuitatea funcțiilor:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x^2}{|x|} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^{-1}} & : x \in (0, \infty) \\ 0 & : x = 0, \\ x^2 + 2x + \sin x & : x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & : x \in \mathbb{Q} \\ \cos x & : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

d) $f : [-2, 1] \cup \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & : x \in [-2, 0] \\ 1 + \sin x & : x \in (0, 1] \\ 2 & : x = 3. \end{cases}$$

Exercițiul 5: Discutați în funcție de valoarea parametrului $a \in \mathbb{R}$, continuitatea următoarelor funcții:

a) $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{a^2 - 2ax + x^2} & : x \in [1, 2] \\ 3a + 2x & : x \in (2, 3]. \end{cases}$$

b) $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x} & : x \in (0, 1] \\ a \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 5x + 4} & : x \in (1, \pi). \end{cases}$$

Exercițiul 6: Fie $0 < a < b \in \mathbb{R}$ și $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x) = \left(\frac{b^x - a^x}{x(b-a)} \right)^{\frac{1}{x-1}}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

- a) Arătați că f este o funcție continuă.
- b) Arătați că există o funcție continuă $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $F(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
- c) Calculați $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$.

Considerații teoretice

Ipoteze generale

$$\begin{cases} \emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R} \\ f : D \rightarrow \mathbb{R} \\ x_0 \in D. \end{cases}$$

Definiție:

Funcția f este **continuă** în x_0 dacă

$$\forall (x_n) \subseteq D \quad \text{cu} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Teorema de caracterizare cu vecinătăți:

f este continuă în x_0 dacă și numai dacă

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0)), \quad \exists U \in \mathcal{V}(x_0) \quad \text{astfel încât} \quad f(x) \in V,$$

Teorema de caracterizare cu ε și δ :

f este continuă în x_0 dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \text{astfel încât} \quad \forall x \in D \quad \text{cu} \quad |x - x_0| < \delta, \quad \text{avem} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Teorema de legătură între limitele de funcții și continuitate:

Dacă $x_0 \in D \cap D' = D \setminus \text{Iso}D$, atunci următoarele afirmații sunt adevărate:

1. f este continuă în $x_0 \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.
2. Dacă $\begin{cases} \exists f(x_0 - 0) \\ \exists f(x_0 + 0) \\ f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0) \end{cases} \implies f \text{ este continuă în } x_0.$

Observație: Se poate demonstra ușor, cu ajutorul definiției, că toate funcțiile elementare sunt continue pe mulțimea maximă de definiție. De aceea, dacă nu vi se cere în mod explicit demonstrarea continuității unor astfel de funcții, ele se pot considera automat continue.