Seminar 2

Fie ABC un triunghi oarecare și $M \in$ $\in Int(ABC)$. Notăm cu s_A, s_B, s_C, s ariile triunghiurilor MBC, MCA, MAB, ABC.

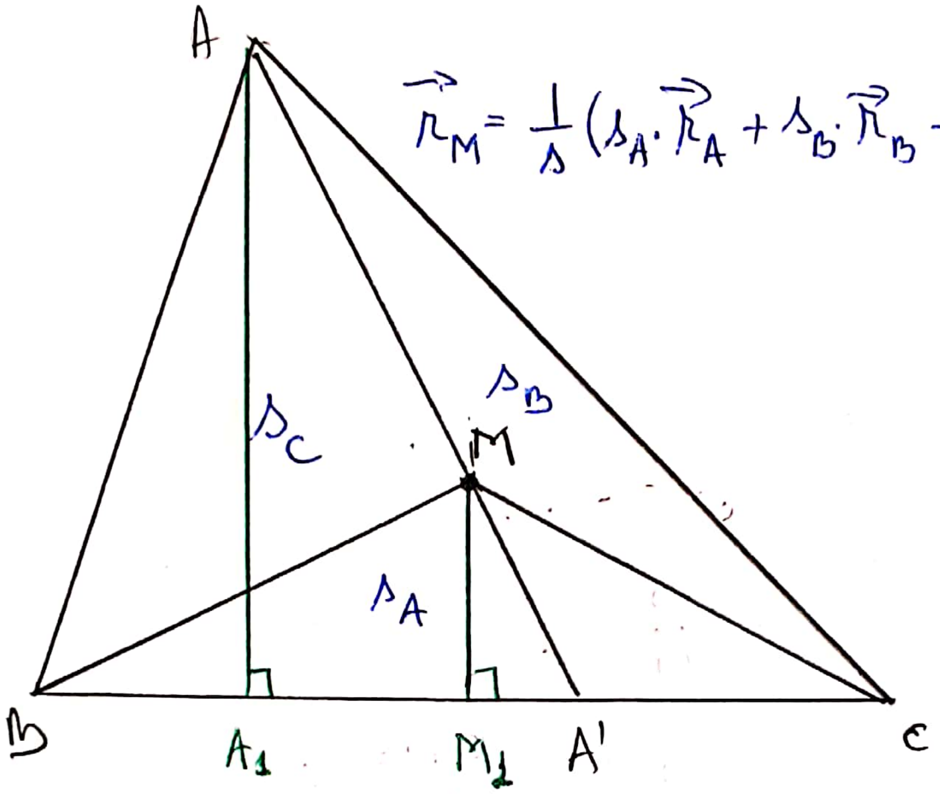
Să se demonstreze că

$$\vec{r}_M = \frac{1}{s}\left(s_A \cdot \vec{r}_A + s_B \cdot \vec{r}_B + s_C \cdot \vec{r}_C\right).$$

Cazuri particulare

1. $M \equiv G$, atunci $\vec{r}_G = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$
2. $M \equiv I$, atunci $\vec{r}_I = \frac{1}{a+b+c}(a\vec{r}_A + b\vec{r}_B + c\vec{r}_C)$
3. $M \equiv H$, atunci $\vec{r}_H = \frac{1}{tgA + tgB + tgC}(tgA \cdot \vec{r}_A + tgB\, \vec{r}_B + tgC \cdot \vec{r}_C)$
4. $M \equiv O$, atunci

$$\vec{r}_O = \frac{1}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}\left(\sin 2A \cdot \vec{r}_A + \sin 2B\, \vec{r}_B + \sin 2C \cdot \vec{r}_C\right).$$



$$\vec{r}_M = \frac{1}{s}\left(s_A \cdot \vec{r}_A + s_B \cdot \vec{r}_B + s_C \cdot \vec{r}_C\right)$$

Rezolvare $\quad \vec{r}_M = \frac{1}{1+k}\left(\vec{r}_A + k \cdot \vec{r}_{A'}\right)$, unde $k = \frac{AM}{MA'}$, $(\{A'\} = AM \cap BC)$.

Din $k = \frac{AM}{MA'} \Rightarrow k+1 = \frac{AM+MA'}{MA'} \Leftrightarrow k+1 = \frac{AA'}{MA'}$.

Ducem $AA_1 \perp BC$, $MM_1 \perp BC$.

Din $\Delta AA_1A' \sim \Delta MM_1A'$ (t. fundamentală a asemănării) $\Rightarrow \frac{AA'}{MA'} = \frac{AA_1}{MM_1} = \frac{\mathcal{A}[ABC]}{\mathcal{A}[MBC]} = \frac{s}{s_A}$

(pentru că $\mathcal{A}[ABC] = \frac{BC \cdot AA_1}{2}$, $\mathcal{A}[MBC] = \frac{BC \cdot MM_1}{2}$).

Deci $\boxed{k+1 = \frac{s}{s_A}} \Rightarrow k = \frac{s}{s_A} - 1 \Leftrightarrow k = \frac{s-s_A}{s_A} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{k = \frac{s_B+s_C}{s_A}}$.

Deci $\vec{r}_M = \frac{s_A}{s}\left(\vec{r}_A + \frac{s_B+s_C}{s_A} \cdot \vec{r}_{A'}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{r}_M = \frac{s_A \cdot \vec{r}_A}{s} + \frac{s_B + s_C}{s} \cdot \vec{r}_{A'}} \quad (1).$$

Acum îl exprimăm pe $\vec{r}_{A'}$.

$$\vec{r}_{A'} = \frac{1}{1+l}\left(\vec{r}_B + l\,\vec{r}_C\right), \text{ unde } l = \frac{A'B}{A'C} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{\mathcal{A}[ABA']}{\mathcal{A}[ACA']} = \frac{\mathcal{A}[MBA']}{\mathcal{A}[MCA']} \ \overline{\overset{\text{proprietăți}}{\text{derivate}}}$$

$$= \frac{\mathcal{A}[ABA'] - \mathcal{A}[MBA']}{\mathcal{A}[ACA'] - \mathcal{A}[MCA']} = \frac{s_C}{s_B}$$

(Am folosit că $\frac{\mathcal{A}[ABA']}{\mathcal{A}[ACA']} = \frac{\frac{A'B \cdot \cancel{AA_1}}{2}}{\frac{A'C \cdot \cancel{AA_1}}{2}} = \frac{A'B}{A'C} = l$ și

$$\frac{\mathcal{A}[MBA']}{\mathcal{A}[ACA']} = \frac{\frac{A'B \cdot \cancel{MM_1}}{2}}{\frac{A'C \cdot \cancel{MM_1}}{2}} = \frac{A'B}{A'C} = l \ ).$$

Deci $\vec{r}_{A'} = \frac{1}{1+\frac{s_C}{s_B}}\left(\vec{r}_B + \frac{s_C}{s_B} \cdot \vec{r}_C\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{r}_{A'} = \frac{s_B}{s_B+s_C} \cdot \vec{r}_B + \frac{s_C}{s_B+s_C} \cdot \vec{r}_C} \quad (2)$$

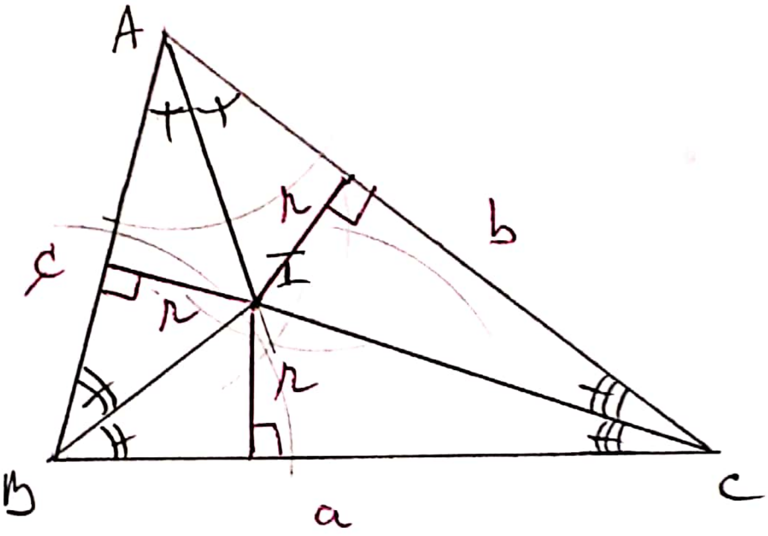
Înlocuind (2) în (1) rezultă relația cerută. #

Cazuri particulare

1). $M \equiv G$, atunci $\frac{S_A}{S} = \frac{S_B}{S} = \frac{S_C}{S} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \vec{r}_G = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$.

2) $M \equiv I$.



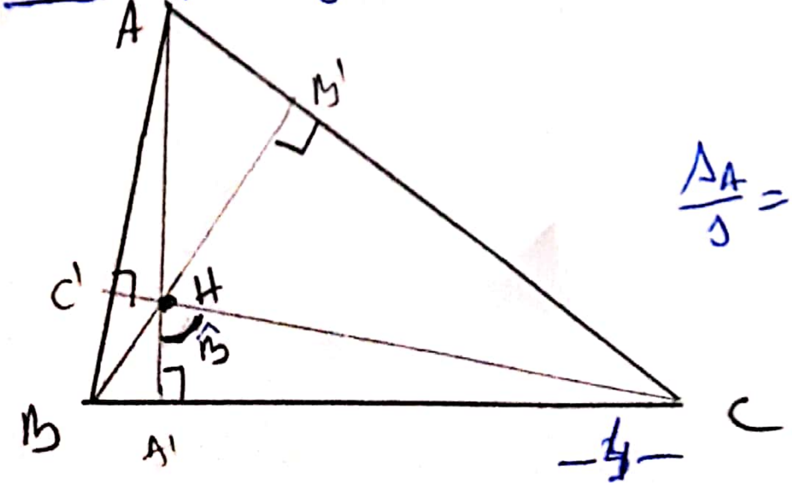
$S_A = \frac{a \cdot r}{2}$, $S_B = \frac{b \cdot r}{2}$, $S_C = \frac{c \cdot r}{2}$, unde

r este raza cercului înscris.

Deci $\vec{r}_I = \frac{1}{(a+b+c)\cdot\frac{r}{2}}\left(\frac{a \cdot r}{2}\vec{r}_A + \frac{b \cdot r}{2}\vec{r}_B + \frac{c \cdot r}{2}\cdot\vec{r}_C\right)$

$\vec{r}_I = \frac{1}{a+b+c}(a\vec{r}_A + b\vec{r}_B + c\vec{r}_C)$.

3). $M \equiv H$. (numai pentru triunghiuri nedreptunghice).



$\frac{S_A}{S} = \frac{HA'}{AA'}$

$$\frac{A'C}{HA'} = tg\,B \quad \text{din } \Delta HA'C$$

$$\Rightarrow \boxed{HA' = \frac{A'C}{tg\,B}}$$

$$\frac{AA'}{A'C} = tg\,C \quad \text{din } \Delta AA'C$$

$$\Rightarrow \boxed{AA' = A'C \cdot tg\,C}$$

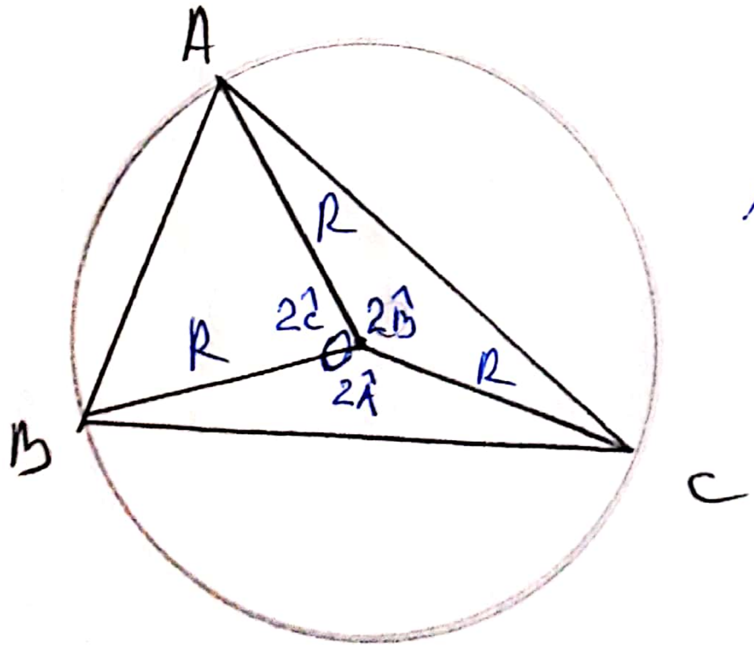
Deci $\frac{HA'}{AA'} = \frac{\frac{\cancel{A'C}}{tg\,B}}{\cancel{A'C} \cdot tg\,C} = \frac{1}{tg\,B \cdot tg\,C} = \frac{tg\,A}{tg\,A \cdot tg\,B \cdot tg\,C}$

Dar $tg\,A \cdot tg\,B \cdot tg\,C = tg\,A + tg\,B + tg\,C$

Deci $\frac{S_A}{S} = \frac{tg\,A}{tg\,A + tg\,B + tg\,C}$ și analoagele,

de unde rezultă $\vec{r}_H = \ldots$

4.



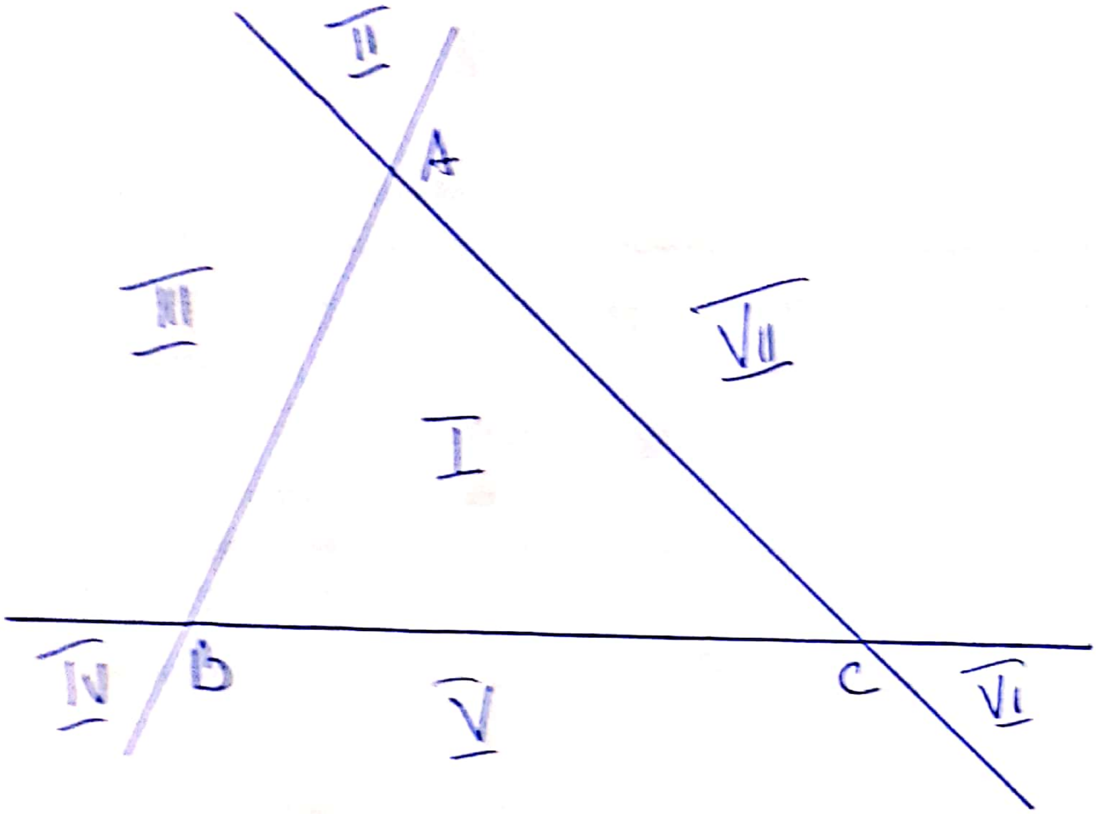
$$S_A = \frac{R^2 \sin 2A}{2}$$

$$S_B = \frac{R^2 \sin 2B}{2}$$

$$S_C = \frac{R^2 \sin 2C}{2}$$

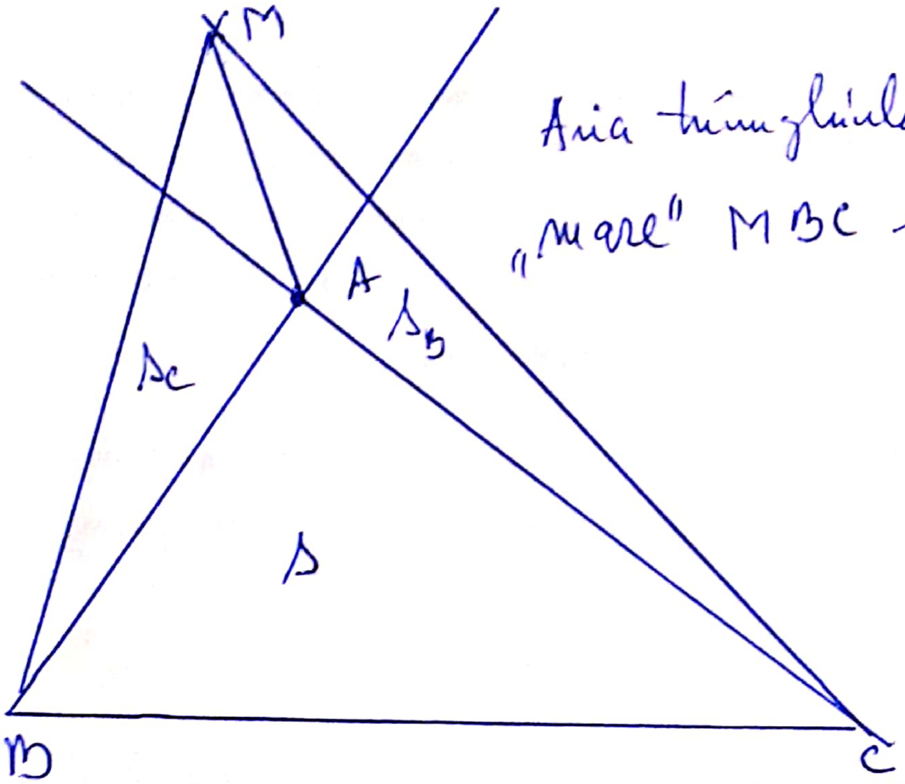
De unde rezultă $\vec{r}_O$.

Dreptele suport ale laturilor triunghiului ABC împart planul în 7 regiuni.



Ne propunem să determinăm o formulă asemănătoare pentru $\vec{r}_M$ în cazul în care M aparține regiunii II (în regiunile IV și VI va fi o formulă analoagă) și în cazul în care M aparține regiunii V (în III și VII va fi analog).

$M \in$ regiunii $\overline{\underline{II}}$



Aria triunghiului „mare" MBC este S_A.

Se aplică formula demonstrată deja pentru cazul $M \in$ regiunii I cu triunghiul „mare" MBC și punctul $A \in \text{Int}(MBC)$.

$$\Rightarrow \vec{r}_A = \frac{1}{S_A}\left(S\vec{r}_M + S_B \cdot \vec{r}_B + S_C \cdot \vec{r}_C\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_A \cdot \vec{r}_A = S \cdot \vec{r}_M + S_B \cdot \vec{r}_B + S_C \cdot \vec{r}_C \Leftrightarrow$$

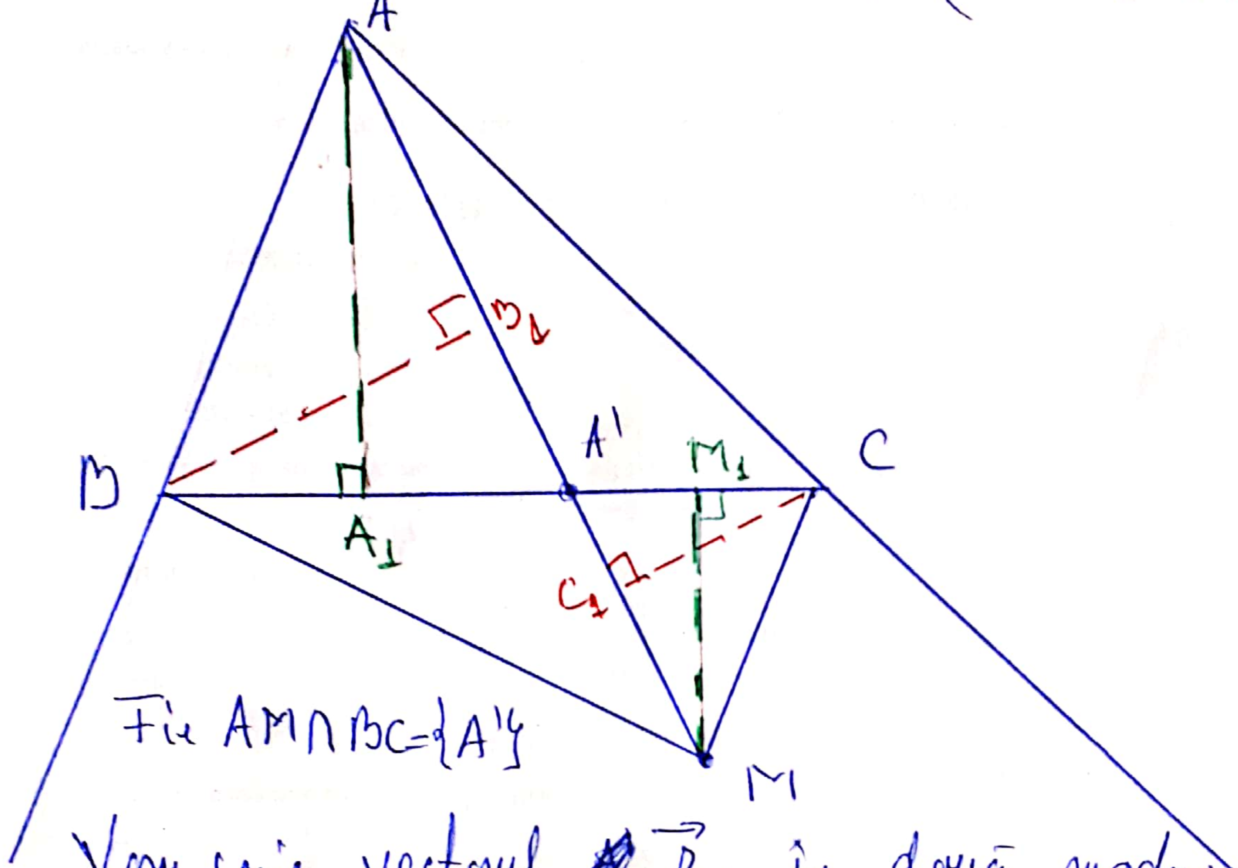
$$\Leftrightarrow \vec{r}_M = \frac{1}{S}\left(S_A \cdot \vec{r}_A - S_B \cdot \vec{r}_B - S_C \cdot \vec{r}_C\right).$$

Analog, dacă $M \in \overline{\underline{IV}}$ ~~avem~~ și $M \in \overline{\underline{VI}}$ avem:

$$\vec{r}_M = \frac{1}{S}\left(-S_A \cdot \vec{r}_A + S_B \cdot \vec{r}_B - S_C \cdot \vec{r}_C\right) \text{ și}$$

$$\vec{r}_M = \frac{1}{S}\left(-S_A \cdot \vec{r}_A - S_B \cdot \vec{r}_B + S_C \cdot \vec{r}_C\right).$$

Dacă $M \in$ regiunii $\overline{V}$ trebuie să facem calcule asemănătoare cazului I. $(M \in Int(ABC))$



Fie $AM \cap BC = \{A'\}$

Vom scrie vectorul $\vec{r}_{A'}$ în două moduri, considerând $A' \in BC$ și apoi $A' \in AM$.

$A' \in BC \Rightarrow \vec{r}_{A'} = \frac{1}{1+k}(\vec{r}_B + k\vec{r}_C)$ unde $k = \frac{A'B}{A'C} =$

$= \frac{\mathcal{A}[AA'B]}{\mathcal{A}[AA'C]} \left(= \frac{\frac{A'B \cdot AA_1}{2}}{\frac{A'C \cdot AA_1}{2}} \right)$ și tot $k = \frac{A'B}{A'C} =$

$= \frac{\mathcal{A}[MA'B]}{\mathcal{A}[MA'C]} \left(= \frac{\frac{A'B \cdot MM_1}{2}}{\frac{A'C \cdot MM_1}{2}} \right)$. Deci

$k = \frac{\mathcal{A}[AA'B]}{\mathcal{A}[AA'C]} = \frac{\mathcal{A}[MA'B]}{\mathcal{A}[MA'C]} = \frac{\mathcal{A}[AA'B] + \mathcal{A}[MA'B]}{\mathcal{A}[AA'C] + \mathcal{A}[MA'C]}$

$$= \frac{\mathcal{A}[ABM]}{\mathcal{A}[ACM]} = \frac{s_C}{s_B}. \text{ Deci } k = \frac{s_C}{s_B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+k = 1+\frac{s_C}{s_B} \Leftrightarrow 1+k = \frac{s_B+s_C}{s_B}.$$

Rezultă

$$\vec{r}_{A'} = \frac{s_B}{s_B+s_C}\left(\vec{r}_B + \frac{s_C}{s_B}\cdot \vec{r}_C\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{r}_{A'} = \frac{1}{\mathcal{A}[ABMC]}\left(s_B\cdot\vec{r}_B + s_C\cdot\vec{r}_C\right)} \quad (1)$$

Considerăm acum $A' \in AM \Rightarrow$

$$\vec{r}_{A'} = \frac{1}{1+l}\left(\vec{r}_A + l\cdot\vec{r}_M\right), \text{ unde } l = \frac{A'A}{A'M} =$$

$$= \frac{\mathcal{A}[ABA']}{\mathcal{A}[MBA']} \left(= \frac{\frac{A'A\cdot BB_1}{2}}{\frac{A'M\cdot BB_1}{2}} \right) \text{ și tot } l = \frac{A'A}{A'M} =$$

$$= \frac{\mathcal{A}[ACA']}{\mathcal{A}[MCA']} = \left(\frac{\frac{A'A\cdot CC_1}{2}}{\frac{A'M\cdot CC_1}{2}} \right). \text{ Deci}$$

$$l = \frac{\mathcal{A}[ABA']}{\mathcal{A}[MBA']} = \frac{\mathcal{A}[ACA']}{\mathcal{A}[MCA']} = \frac{\mathcal{A}[ABA'] + \mathcal{A}[ACA']}{\mathcal{A}[MBA'] + \mathcal{A}[MCA']} =$$

$$= \frac{\mathcal{A}[ABC]}{\mathcal{A}[MBC]} = \frac{s}{s_A} \Rightarrow 1+l = 1+\frac{s}{s_A} \Leftrightarrow 1+l = \frac{s_A+s}{s_A}.$$

Rezultă

$$\vec{r}_{A'} = \frac{\Delta_A}{\Delta_A+\Delta}\left(\vec{r}_A + \frac{\Delta}{\Delta_A}\cdot\vec{r}_M\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{r}_{A'} = \frac{1}{\Delta[ABMC]}\left(\Delta_A\vec{r}_A + \Delta\,\vec{r}_M\right)} \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow \Delta_B\cdot\vec{r}_B + \Delta_C\cdot\vec{r}_C = \Delta_A\cdot\vec{r}_A + \Delta\cdot\vec{r}_M \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{r}_M = \frac{1}{\Delta}\left(-\Delta_A\cdot\vec{r}_A + \Delta_B\cdot\vec{r}_B + \Delta_C\vec{r}_C\right)$. Analog

. Dacă $M \in \overline{\underline{III}}$ ~~sau~~ sau $\underline{\overline{VII}}$ avem

$$\vec{r}_M = \frac{1}{\Delta}\left(\Delta_A\cdot\vec{r}_A + \Delta_B\cdot\vec{r}_B - \Delta_C\cdot\vec{r}_C\right) \text{ sau}$$

$$\vec{r}_M = \frac{1}{\Delta}\left(\Delta_A\cdot\vec{r}_A - \Delta_B\cdot\vec{r}_B + \Delta_C\cdot\vec{r}_C\right)$$