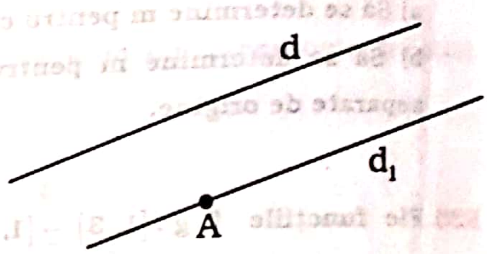
ELEMENTE DE GEOMETRIE

I. VECTORI ÎN PLAN

1 SEGMENTE ORIENTATE RELAȚIA DE ECHIPOLENȚĂ

1.1. DIRECȚIA UNEI DREPTE ÎN PLAN

Fie d o dreaptă în planul $\mathscr{P}$. Vom spune că dreapta $d_1 \subset \mathscr{P}$ are aceeași direcție cu dreapta d dacă $d_1 \parallel d$ sau $d_1 = d$.



După cum se știe, prin fiecare punct A al planului $\mathscr{P}$ se poate duce o dreaptă d′ paralelă cu dreapta d. Astfel, rezultă că există o infinitate de drepte în planul P care au aceeași direcție cu dreapta d.

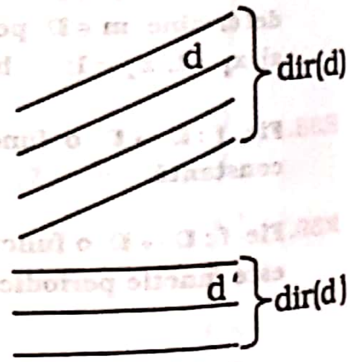
DEFINIȚIE

- Mulțimea tuturor dreptelor din plan care au aceeași direcție cu dreapta d formează **direcția dreptei d.**

Direcția dreptei d se notează cu $\text{dir}(d)$.

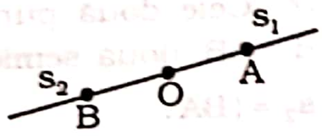
Rezultă că $\text{dir}(d) = \{d_1 \subset \mathscr{P} \mid d_1 \parallel d \text{ sau } d_1 = d\}$.

OBSERVAȚII



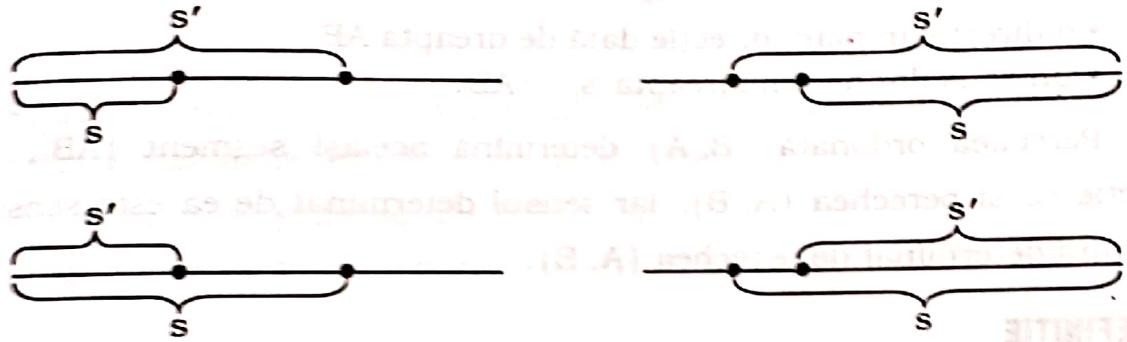
1. Două drepte concurente din planul $\mathscr{P}$ au direcții diferite.
2. Printr-un punct $A \in \mathscr{P}$ se pot duce o infinitate de drepte concurente. Rezultă că în plan există o infinitate de direcții diferite.
3. Relația „aceeași direcție" pe mulțimea dreptelor are **proprietatea de simetrie:** dacă d și d′ au aceeași direcție atunci d′ și d au aceeași direcție.
4. Relația „aceeași direcție" pe mulțimea dreptelor are **proprietatea de tranzitivitate:** dacă d_1 și d_2 au aceeași direcție și dacă d_2 și d_3 au aceeași direcție, atunci d_1 și d_3 au aceeași direcție.

1.2. SENS PE O DREAPTĂ

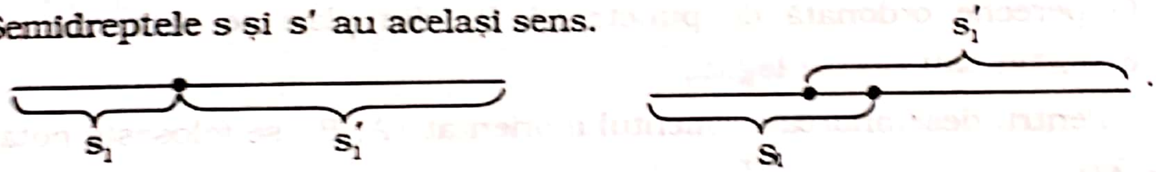


Fie d o dreaptă în plan. Orice punct $O \in d$ determină pe dreapta d exact două semidrepte s_1 și s_2. Dacă $A \in s_1$ și $B \in s_2$, deplasarea de la O spre A și de la O spre B se face în sensuri diferite. Astfel cele două semidrepte $s_1 = [OA$ și $s_2 = [OB$ determină pe dreapta d două **sensuri** diferite (opuse).

Două semidrepte s și s' pe dreapta d au **același sens** dacă $s \subset s'$ sau $s' \subset s$ și au **sensuri diferite** dacă $s \not\subset s'$ și $s' \not\subset s$.



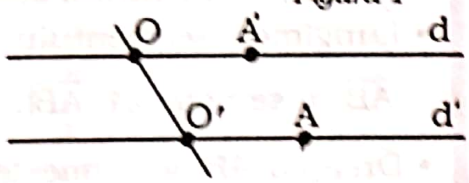
Semidreptele s și s' au același sens.



Semidreptele s_1 și s_1' au sensuri diferite.

1.3. SENSUL A DOUĂ SEMIDREPTE CARE AU ACEEAȘI DIRECȚIE

Figura 1



Fie d, d' două drepte paralele în planul $\mathscr{P}$, iar $s \subset d$, $s' \subset d'$ două semidrepte:

$s = (OA$, $s' = (O'A'$.

Semidreptele s și s' au **același sens** dacă sunt incluse în același semiplan determinat de dreapta OO' în planul $\mathscr{P}$ (figura 1).

Semidreptele s și s' au **sensuri opuse** dacă sunt în semiplane diferite determinate de dreapta OO' în planul $\mathscr{P}$ (figura 2).

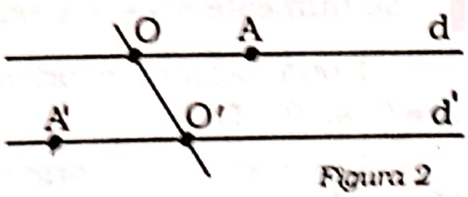
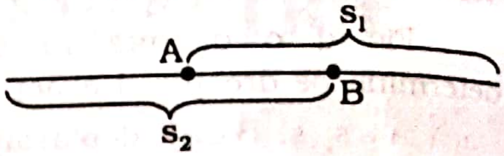


Figura 2

➲ OBSERVAȚII

- Dacă semidreptele s și s' au același sens, atunci și semidreptele s' și s au același sens **(proprietatea de simetrie)**.
- Dacă s și s' au același sens, s' și s'' au același sens, atunci s și s'' au același sens **(proprietatea de tranzitivitate)**.

1.4. SEGMENTE ORIENTATE



Fie A, B două puncte diferite în planul $\mathcal{P}$. Cele două puncte determină pe dreapta $d = AB$ două semidrepte diferite: $s_1 = (AB$ și $s_2 = (BA$.

Cele două semidrepte s_1, s_2 au sensuri diferite.

O pereche ordonată (A, B) de puncte ale planului determină, în mod unic:

- un segment $[AB]$ cu lungimea $\ell = d(A, B)$;
- o direcție în plan, direcție dată de dreapta AB;
- un sens dat de semidreapta $s_1 = (AB$.

Perechea ordonată (B, A) determină același segment $[AB]$, aceeași direcție ca și perechea (A, B), iar sensul determinat de ea este sensul opus sensului determinat de perechea (A, B).

❖ DEFINIȚIE

- O pereche ordonată de puncte (A, B) din plan se numește **segment orientat** sau **vector legat**.

Pentru desemnarea segmentului orientat (A, B) se folosește notația $\overline{AB}$ sau $\overrightarrow{AB}$.

❖ DEFINIȚII

- Punctul A se numește **originea** (punctul de aplicație), iar B **extremitatea** (vârful) segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$.
- Lungimea segmentului $[AB]$ se numește **modulul** segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$ și se notează $|\overrightarrow{AB}|$.
- Dreapta AB se numește **suportul** segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$, iar direcția ei se numește **direcția** segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$.

Două segmente orientate $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ sunt **egale** dacă și numai dacă $A = C$ și $B = D$.

Două segmente orientate $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ au **aceeași direcție** dacă dreptele AB și CD au aceeași direcție. Două segmente care au aceeași direcție se numesc **coliniare.**

Două segmente orientate $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ au **același sens** dacă semidreptele (AB și (CD au același sens.

Segmentul orientat pentru care originea coincide cu extremitatea se numește **segment nul (vector nul)** și se notează $\vec{0}$.

1.5. RELAȚIA DE ECHIPOLENȚĂ PE MULȚIMEA SEGMENTELOR ORIENTATE

Fie $\mathscr{P}$ un plan și $\mathscr{V}$ mulțimea segmentelor orientate din $\mathscr{P}$.

❖ DEFINIȚIE

- Segmentele orientate $\vec{a}, \vec{b} \in \mathscr{V}$ se numesc **echipolente** dacă au același modul, aceeași direcție și același sens.

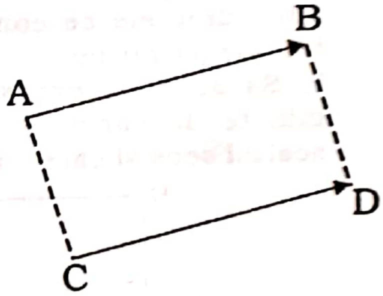
Dacă segmentele orientate $\vec{a}, \vec{b} \in \mathscr{V}$ sunt echipolente se va folosi notația $\vec{a} \sim \vec{b}$.

Relația de echipolență pe mulțimea $\mathscr{V}$ are următoarele proprietăți:

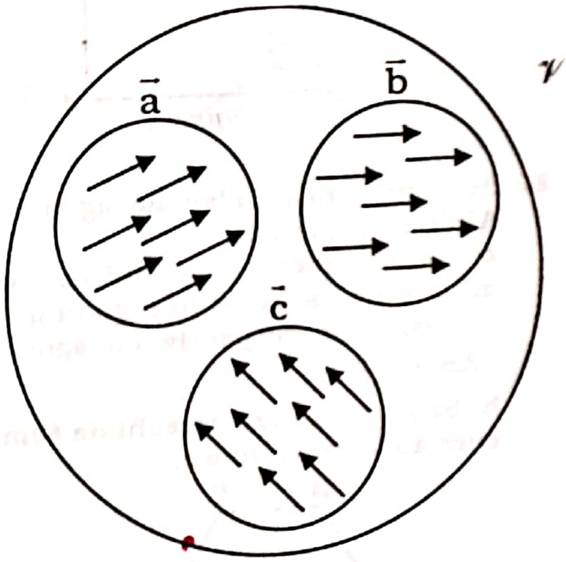
- proprietatea de reflexivitate: $\vec{a} \sim \vec{a}, \forall \vec{a} \in \mathscr{V}$;
- proprietatea de simetrie: $\vec{a} \sim \vec{b} \Rightarrow \vec{b} \sim \vec{a}$;
- proprietatea de tranzitivitate: $\vec{a} \sim \vec{b}, \vec{b} \sim \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \sim \vec{c}$.

➲ OBSERVAȚIE

- Dacă $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, iar dreptele AB și CD sunt diferite, punctele A, B, D, C sunt vârfurile unui paralelogram.
  Într-adevăr, segmentele [AB] și [CD] au aceeași lungime și sunt paralele, deci ABDC este paralelogram.



Relația de echipolență determină pe mulțimea $\mathscr{V}$ a segmentelor orientate din planul $\mathscr{P}$ submulțimi de segmente orientate, astfel încât fiecare două segmente orientate din aceeași submulțime sunt echipolente, iar oricare două segmente orientate din submulțimi diferite nu sunt echipolente.



❖ **DEFINIȚIE**

- Se numește **vector liber** mulțimea tuturor segmentelor orientate echipolente cu un segment orientat dat.

Vectorii liberi se vor nota fie cu litere mici $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$, fie specificând un reprezentant al acestuia dat de un segment orientat (vector legat) $\overline{AB}, \overline{MN}, \ldots$. În desen un vector liber se va reprezenta tot printr-un segment orientat, dar se va subînțelege că acestuia îi putem schimba originea într-un punct arbitrar cu condiția de păstrare a direcției, a sensului și a modulului.

În cele ce urmează, prin cuvântul vector se va înțelege un vector liber. Dacă sunt specificate originea și extremitatea prin puncte, de exemplu A și B, vom înțelege că $\overline{AB}$ este un vector legat $\overline{AB}$ sau vectorul liber dat de reprezentantul său $\overline{AB}$.

Doi vectori care au aceeași direcție se numesc **coliniari**.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Se consideră pătratul ABCD în planul $\mathcal{P}$ (figura 1).

a) Să se precizeze câte direcții determină dreptele ce conțin câte două vârfuri ale pătratului.

b) Să se precizeze semidreptele determinate de vârfurile pătratului care au același sens și care au sensuri opuse.

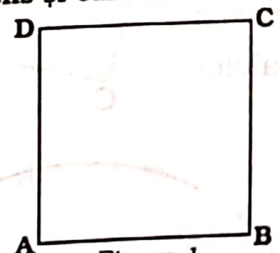


Figura 1

E2. Se consideră în plan hexagonul regulat ABCDEF (figura 2).

a) Să se precizeze semidreptele determinate de vârfurile hexagonului care au același sens respectiv cu semidreptele (AB și (FD.

b) Să se precizeze perechi de semidrepte care au sensuri opuse.

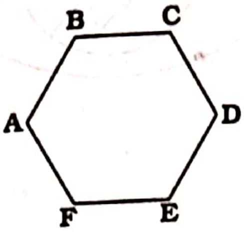


Figura 2

E3. Se consideră rețeaua de pătrate din desenul alăturat (figura 3).

a) Să se precizeze segmentele orientate echipolente cu segmentele orientate $\overline{AG}$, respectiv $\overline{GC}$.

b) Să se precizeze segmentele orientate care sunt reprezentanți ai aceluiași vector liber.

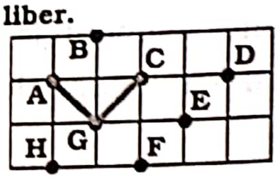


Figura 3

E4. Se consideră pătratul ABCD și O centrul său.

a) Să se scrie segmentele orientate echipolente cu $\overline{AB}$.

b) Să se precizeze perechi de vectori opuși.

E5. Se consideră hexagonul regulat ABCDEF și O centrul său.

a) Să se precizeze perechi de segmente orientate echipolente.

b) Să se determine segmentele orientate care sunt reprezentanții aceluiași vector liber.

E6. Se consideră triunghiul ABC în planul $\mathcal{P}$.

a) Să se arate că există un singur punct $M \in \mathcal{P}$ astfel încât segmentele $\overline{BC}$ și $\overline{AM}$ sunt echipolente.

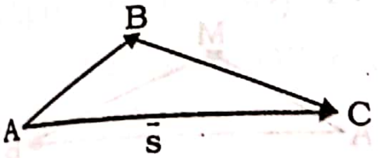
b) Să se stabilească poziția punctelor P, $Q \in \mathcal{P}$ pentru care segmentele orientate $\overline{BQ}$, $\overline{CP}$ și $\overline{MC}$ sunt echipolente.

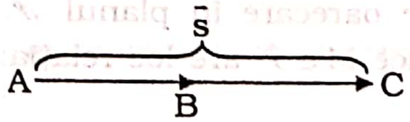
2 OPERAȚII CU VECTORI

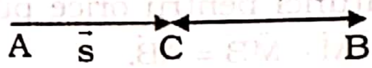
2.1. ADUNAREA VECTORILOR ÎN PLAN

Adunarea segmentelor orientate. Relația lui Chasles

Fie $\overline{AB}$ și $\overline{BC}$ două segmente orientate. Suma celor două segmente orientate este segmentul orientat $\vec{s} = \overline{AC}$.

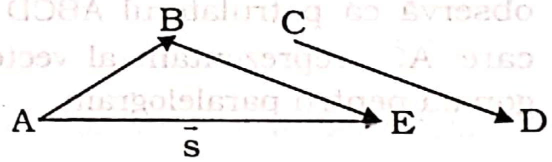






Așadar, pentru oricare puncte A, B, C din plan are loc egalitatea:
$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ **(Relația lui Chasles)**.

În cazul segmentelor orientate $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ suma se obține astfel: se consideră punctul E din plan astfel încât segmentele orientate $\overline{BE}$ și $\overline{CD}$ să fie echipolente. Suma segmentelor orientate $\overline{AB}$ și $\overline{BE}$ este dată de relația lui Chasles: $\overline{AB} + \overline{BE} = \overline{AE}$.

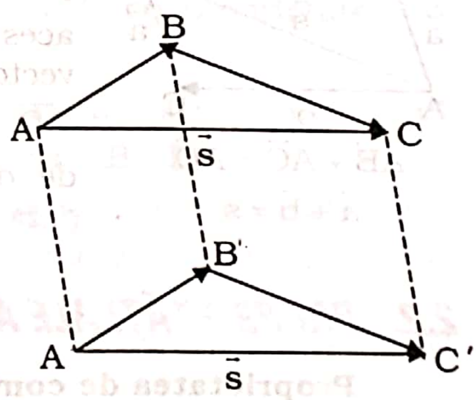


Segmentul orientat $\overline{AE}$ reprezintă suma segmentelor orientate $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$, deci $\vec{s} = \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AE}$.

Adunarea vectorilor în plan

Să considerăm vectorii $\vec{a}, \vec{b}$ în plan și $\overline{AB}, \overline{BC}$ reprezentanți ai acestora.

Punctele A și C determină segmentul orientat $\overline{AC}$ care este suma segmentelor orientate $\overline{AB}$ și $\overline{BC}$.

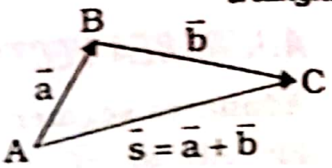


Alegând alți reprezentanți $\overline{A'B'}$ și $\overline{B'C'}$ ai vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ se obține $\overline{A'B'} + \overline{B'C'} = \overline{A'C'}$. Dar segmentele orientate $\overline{AC}$ și $\overline{A'C'}$ sunt segmente orientate echipolente, deci ele sunt reprezentanți ai aceluiași vector liber $\vec{s}$. În concluzie, vectorul $\vec{s}$ obținut nu depinde de alegerea reprezentanților vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

Vom spune că vectorul $\vec{s}$ reprezintă **suma** vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ și vom scrie $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$.

Vectorii $\overline{a}$ și $\overline{b}$ se numesc **componente**, iar $\overline{s}$ **vectorul sumă** sau **vectorul rezultant** (rezultantă) al vectorilor $\overline{a}$ și $\overline{b}$.

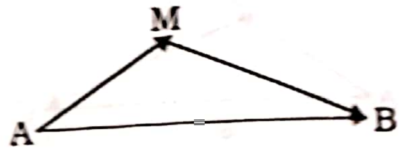
Regula triunghiului



Regula de adunare descrisă anterior se numește **regula triunghiului**.

Regula de adunare a vectorilor are la origine fapte experimentale în domeniul mecanicii. Ea a fost găsită la compunerea (adunarea) forțelor, apoi la compunerea vitezelor și a altor mărimi vectoriale.

OBSERVAȚIE

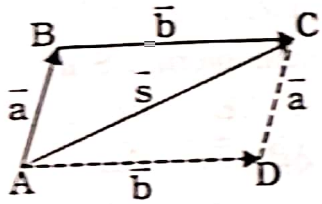


- Dacă A, B sunt puncte oarecare în planul $\mathcal{P}$, atunci pentru orice punct $M \in \mathcal{P}$ are loc relația: $\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AB}$.

  Această relație permite scrierea unui vector $\overline{AB}$ ca sumă a doi vectori din plan.

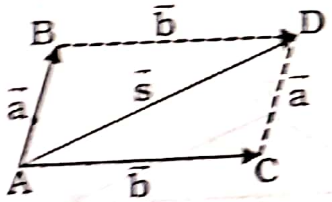
Regula paralelogramului

Fie vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$ dați prin reprezentanții lor $\overline{AB}$ și $\overline{BC}$.



Considerând punctul D astfel încât $\overline{AD} = \overline{BC}$, se observă că patrulaterul ABCD este un paralelogram în care $\overline{AC}$, reprezentant al vectorului sumă $\overline{s}$, este diagonală pentru paralelogram.

Regula paralelogramului



$\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD}$

$\overline{a} + \overline{b} = \overline{s}$

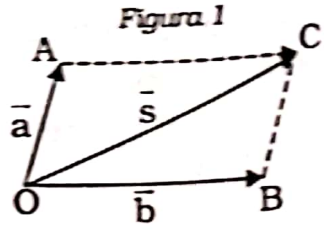
Așadar, fiind dați vectorii necolineari $\overline{a}$ și $\overline{b}$ în plan, pentru determinarea sumei lor $\overline{s} = \overline{a} + \overline{b}$ se poate proceda astfel: se aleg doi reprezentanți $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ai acestora cu originea comună. Vectorul sumă $\overline{s}$ este vectorul al cărui reprezentant este segmentul orientat $\overline{AD}$, diagonala paralelogramului ABDC. Această regulă de determinare a sumei $\overline{s} = \overline{a} + \overline{b}$ se numește **regula paralelogramului.**

2.2. PROPRIETĂȚI ALE ADUNĂRII VECTORILOR

Proprietatea de comutativitate

$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a},\ \forall\ \overline{a}, \overline{b} \in \mathcal{V}$.

Figura 1



Într-adevăr, fie $\overline{OA}$ și $\overline{OB}$ reprezentanți ai celor doi vectori $\overline{a}$ și $\overline{b}$ (figura 1).

Folosind regula paralelogramului rezultă că vectorii sumă $\overline{a} + \overline{b}$ și $\overline{b} + \overline{a}$ au același reprezentant, segmentul orientat $\overline{OC}$, deci coincid. Așadar, $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$.

Proprietatea de asociativitate

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}),\ \forall\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathcal{V}.$

Alegem ca reprezentanți ai vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ segmentele orientate $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ (figura 2).

Aplicând regula triunghiului se obține:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ și $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$, de unde se obține că $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$.

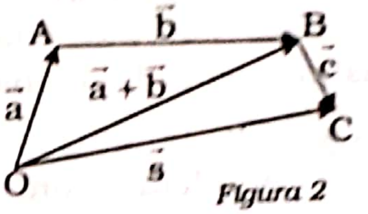
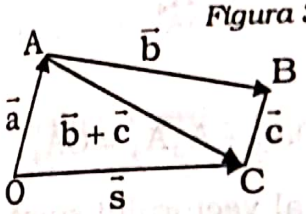


Figura 2

Rezultă că $\overrightarrow{OC}$ este un reprezentant al vectorului $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

Figura 3


Analog se obține că:

$\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$, (figura 3).

Așadar, segmentul orientat $\overrightarrow{OC}$ este reprezentant pentru vectorii $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ și $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$, deci $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

Proprietatea elementului neutru

Vectorul nul este element neutru în raport cu adunarea vectorilor în plan.

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a},\ \forall\ \vec{a}\in\mathcal{V}.$

Proprietatea vectorului opus

Oricare ar fi vectorul $\vec{a}\in\mathcal{V}$ există un vector $\vec{b}\in\mathcal{V}$ cu proprietatea că $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}=\vec{0}$.

Într-adevăr, fie $\overrightarrow{AB}$ un reprezentant al vectorului $\vec{a}$. Atunci segmentul orientat $\overrightarrow{BA}$ este reprezentantul unui vector $\vec{b}$. Avem că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

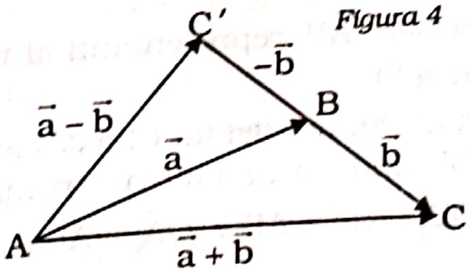
Așadar, vectorul $\vec{b}$ are proprietatea cerută. El se numește **opusul** vectorului $\vec{a}$ și se notează $-\vec{a}$. Opusul unui vector are aceeași direcție, același modul cu vectorul dat și sens contrar acestuia.

Existența vectorului opus pentru vectorul dat permite definirea operației de scădere pe mulțimea $\mathcal{V}$ a vectorilor din plan.

Fie $\vec{a}, \vec{b}\in\mathcal{V}$. Prin definiție $\mathbf{\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})}$.

Cu ajutorul reprezentanților $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$ ai vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$, diferența acestora se exprimă astfel:

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{AC'}$ (figura 4).

Figura 4


2.3. ADUNAREA MAI MULTOR VECTORI

Proprietatea de asociativitate a adunării vectorilor permite determinarea sumei a n vectori, $n \in \mathbb{N}^*$, astfel:

$$\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\ldots+\overrightarrow{a_n}=\left(\left(\left(\left(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}\right)+\overrightarrow{a_3}\right)+\overrightarrow{a_4}\right)+\ldots\right)+\overrightarrow{a_n}.$$

Pentru adunarea celor n vectori din plan se aplică succesiv regula triunghiului. Vom ilustra modul de adunare a 4 vectori, $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}$.

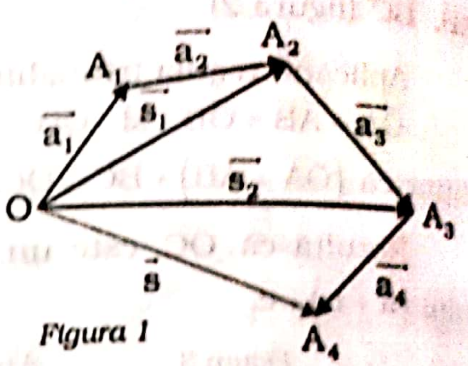


Figura 1

Considerăm un punct O în plan și reprezentanții $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4}$ ai vectorilor $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, respectiv $\overrightarrow{a_4}$ (figura 1).

Obținem succesiv:

$$\left(\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{AA_2}\right)+\overrightarrow{A_2A_3}\right)+\overrightarrow{A_3A_4}=\left(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2A_3}\right)+\overrightarrow{A_3A_4}=\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{A_3A_4}=\overrightarrow{OA_4}.$$

Așadar, segmentul orientat $\overrightarrow{OA_4}$ este un reprezentant al vectorului sumă $\vec{s}=\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_4}$. Se observă că $\overrightarrow{OA_4}$ închide linia poligonală $OA_1A_2A_3A_4$. Această modalitate de adunare a vectorilor se numește **regula poligonului.**

OBSERVAȚII

- Dacă linia poligonală obținută la adunare este închisă, vectorul sumă este vector nul.

Exemplu

Dacă A, B, C sunt puncte necoliniare în plan, se obține relația $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

Această relație constituie o condiție necesară și suficientă ca vectorii necoliniari $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ să „formeze" un triunghi.

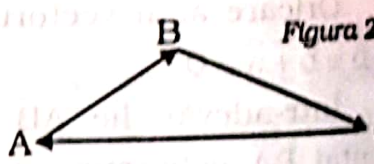


Figura 2

- Dacă $\overrightarrow{a_1}=\overrightarrow{a_2}=\ldots=\overrightarrow{a_n}=\vec{a}$ vom scrie: $\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\ldots+\overrightarrow{a_n}=\vec{a}+\vec{a}+\ldots+\vec{a}=n\vec{a}$.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Se consideră $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}$. Să se demonstreze că $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$.

<u>Soluție</u>

Fie $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}$ reprezentanți ai vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$, (figura 3)

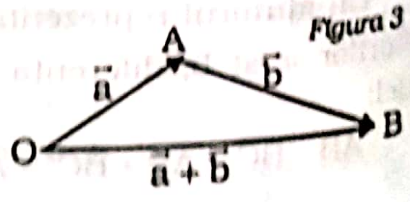


Figura 3

Conform relației lui Chasles avem $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$.

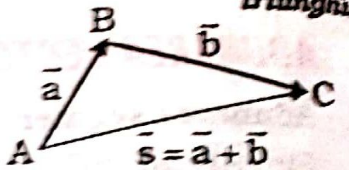
Folosind inegalitatea triunghiului rezultă că $|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}| \le |\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{AB}|$, deci $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$.

Vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ se numesc **componente**, iar $\bar{s}$ **vectorul sumă** sau **vectorul rezultant** (rezultantă) al vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

Regula de adunare descrisă anterior se numește **regula triunghiului**.

Regula de adunare a vectorilor are la origine fapte experimentale în domeniul mecanicii. Ea a fost găsită la compunerea (adunarea) forțelor, apoi la compunerea vitezelor și a altor mărimi vectoriale.

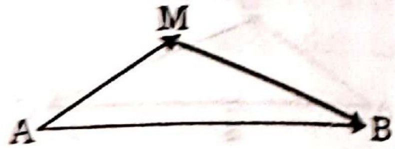
Regula triunghiului



OBSERVAȚIE

- Dacă A, B sunt puncte oarecare în planul $\mathcal{P}$, atunci pentru orice punct $M \in \mathcal{P}$ are loc relația: $\overline{AM}+\overline{MB}=\overline{AB}$.

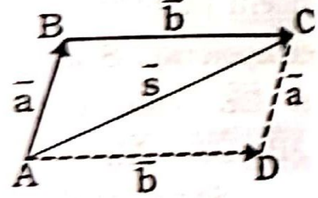
  Această relație permite scrierea unui vector $\overline{AB}$ ca sumă a doi vectori din plan.



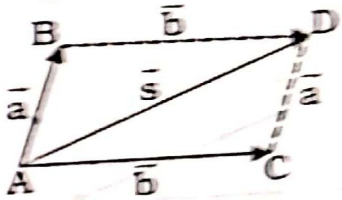
Regula paralelogramului

Fie vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$ dați prin reprezentanții lor $\overline{AB}$ și $\overline{BC}$.

Considerând punctul D astfel încât $\overline{AD}=\overline{BC}$, se observă că patrulaterul ABCD este un paralelogram în care $\overline{AC}$, reprezentant al vectorului sumă $\bar{s}$, este diagonală pentru paralelogram.



Regula paralelogramului



$\overline{AB}+\overline{AC}=\overline{AD}$

$\bar{a}+\bar{b}=\bar{s}$

Așadar, fiind dați vectorii necoliniari $\bar{a}$ și $\bar{b}$ în plan, pentru determinarea sumei lor $\bar{s}=\bar{a}+\bar{b}$ se poate proceda astfel: se aleg doi reprezentanți $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ai acestora cu originea comună. Vectorul sumă $\bar{s}$ este vectorul al cărui reprezentant este segmentul orientat $\overline{AD}$, diagonala paralelogramului ABDC. Această regulă de determinare a sumei $\bar{s}=\bar{a}+\bar{b}$ se numește **regula paralelogramului**.

2.2. PROPRIETĂȚI ALE ADUNĂRII VECTORILOR

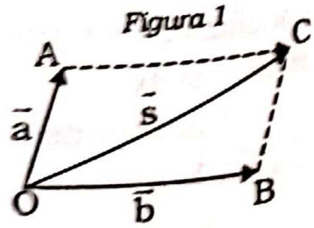
Proprietatea de comutativitate

$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$, $\forall\, \bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{V}$.

Într-adevăr, fie $\overline{OA}$ și $\overline{OB}$ reprezentanți ai celor doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ (figura 1).

Folosind regula paralelogramului rezultă că vectorii sumă $\bar{a}+\bar{b}$ și $\bar{b}+\bar{a}$ au același reprezentant, segmentul orientat $\overline{OC}$, deci coincid. Așadar, $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$.

Figura 1



Proprietatea de asociativitate

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}), \forall\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathscr{V}.$

Alegem ca reprezentanți ai vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ segmentele orientate $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ (figura 2).

Aplicând regula triunghiului se obține: $\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$ și $\overline{OB}+\overline{BC}=\overline{OC}$, de unde se obține că $(\overline{OA}+\overline{AB})+\overline{BC}=\overline{OC}$.

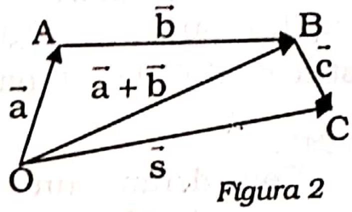
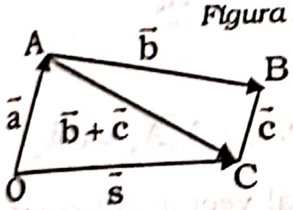


Figura 2

Rezultă că $\overline{OC}$ este un reprezentant al vectorului $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

Figura 3



Analog se obține că:

$\overline{OA}+(\overline{AB}+\overline{BC})=\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OC}$, (figura 3).

Așadar, segmentul orientat $\overline{OC}$ este reprezentant pentru vectorii $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ și $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$, deci $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=$ $=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

Proprietatea elementului neutru

Vectorul nul este element neutru în raport cu adunarea vectorilor în plan.

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}, \forall\ \vec{a} \in \mathscr{V}.$

Proprietatea vectorului opus

Oricare ar fi vectorul $\vec{a} \in \mathscr{V}$ există un vector $\vec{b} \in \mathscr{V}$ cu proprietatea că $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}=\vec{0}$.

Într-adevăr, fie $\overline{AB}$ un reprezentant al vectorului $\vec{a}$. Atunci segmentul orientat $\overline{BA}$ este reprezentantul unui vector $\vec{b}$. Avem că $\overline{AB}+\overline{BA}=\overline{AA}=\vec{0}$.

Așadar, vectorul $\vec{b}$ are proprietatea cerută. El se numește **opusul** vectorului $\vec{a}$ și se notează $-\vec{a}$. Opusul unui vector are aceeași direcție, același modul cu vectorul dat și sens contrar acestuia.

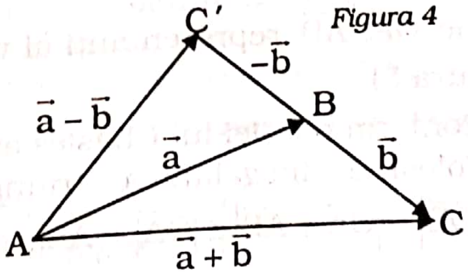
Existența vectorului opus pentru vectorul dat permite definirea operației de scădere pe mulțimea $\mathscr{V}$ a vectorilor din plan.

Fie $\vec{a}, \vec{b} \in \mathscr{V}$. Prin definiție $\mathbf{\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})}$.

Cu ajutorul reprezentanților $\overline{AB}$ și $\overline{BC}$ ai vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$, diferența acestora se exprimă astfel:

$\overline{AB}-\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{BC'}=\overline{AC'}$ (figura 4).

Figura 4



2.3. ADUNAREA MAI MULTOR VECTORI

Proprietatea de asociativitate a adunării vectorilor permite determinarea sumei a n vectori, $n \in \mathbb{N}^*$, astfel:

$$\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\ldots+\overrightarrow{a_n}=\left(\left(\left(\left(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}\right)+\overrightarrow{a_3}\right)+\overrightarrow{a_4}\right)+\ldots\right)+\overrightarrow{a_n}.$$

Pentru adunarea celor n vectori din plan se aplică succesiv regula triunghiului. Vom ilustra modul de adunare a 4 vectori, $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}$.

Considerăm un punct O în plan și reprezentanții $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4}$ ai vectorilor $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, respectiv $\overrightarrow{a_4}$ (figura 1).

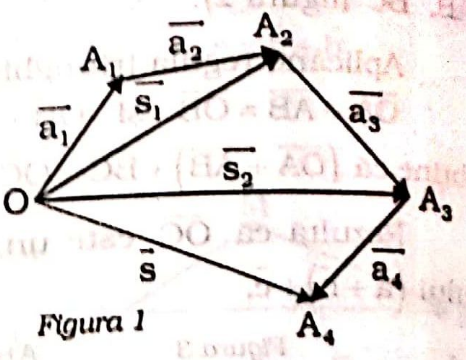


Figura 1

Obținem succesiv:

$$\left(\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{AA_2}\right)+\overrightarrow{A_2A_3}\right)+\overrightarrow{A_3A_4}=\left(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2A_3}\right)+\overrightarrow{A_3A_4}=\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{A_3A_4}=\overrightarrow{OA_4}.$$

Așadar, segmentul orientat $\overrightarrow{OA_4}$ este un reprezentant al vectorului sumă $\vec{s}=\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_4}$. Se observă că $\overrightarrow{OA_4}$ închide linia poligonală $OA_1A_2A_3A_4$. Această modalitate de adunare a vectorilor se numește **regula poligonului**.

OBSERVAȚII

- Dacă linia poligonală obținută la adunare este închisă, vectorul sumă este vector nul.

Exemplu

Dacă A, B, C sunt puncte necoliniare în plan, se obține relația $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

Această relație constituie o condiție necesară și suficientă ca vectorii necoliniari $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ să „formeze" un triunghi.

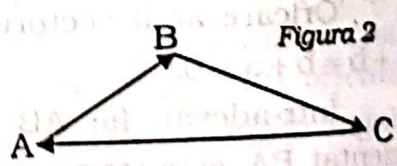


Figura 2

- Dacă $\overrightarrow{a_1}=\overrightarrow{a_2}=\ldots=\overrightarrow{a_n}=\vec{a}$ vom scrie: $\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\ldots+\overrightarrow{a_n}=\vec{a}+\vec{a}+\ldots+\vec{a}=n\vec{a}$.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Se consideră $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}$. Să se demonstreze că $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$.

Soluție

Fie $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}$ reprezentanți ai vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$, (figura 3)

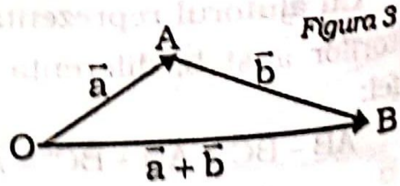


Figura 3

Conform relației lui Chasles avem $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$.
Folosind inegalitatea triunghiului rezultă că $|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}| \le |\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{AB}|$, deci $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$.

OBSERVAȚIE

- Dacă $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, sunt vectori în plan atunci:

$$\left|\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+...+\overrightarrow{a_n}\right| \le \left|\overrightarrow{a_1}\right|+\left|\overrightarrow{a_2}\right|+...+\left|\overrightarrow{a_n}\right|.$$

2. Fie ABCD un paralelogram. Să se arate că pentru orice punct M din planul paralelogramului are loc relația: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Soluție

Notăm cu O punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului (figura 4).

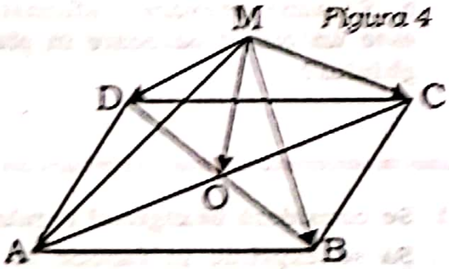


Figura 4

Aplicând regula triunghiului se obține: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{MO}$ și $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{MO}$. Prin adunarea acestor relații se obține: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO}$, deoarece $\overrightarrow{AO}$ și $\overrightarrow{CO}$ sunt segmente orientate opuse.

Analog rezultă relațiile $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{MO}$ și $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{MO}$ și se obține că $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$.

În concluzie $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

3. Se consideră patrulaterul ABCD și M, N mijloacele segmentelor [AD], respectiv [BC]. Să se arate că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{MN}$.

Soluție

Folosind regula poligonului se obține (figura 5):

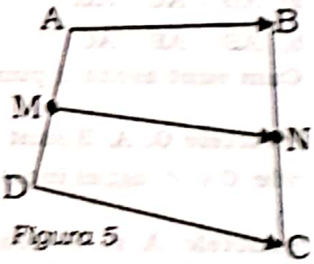


Figura 5

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MN}$.

Adunăm cele două relații și, având în vedere că vectorii $\overrightarrow{MA}$ și $\overrightarrow{MD}$, respectiv $\overrightarrow{BN}$ și $\overrightarrow{CN}$ sunt opuși, se obține:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{MN}$ sau

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{MN}$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Se consideră triunghiul ABC în plan. Să se exprime sumele:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$;

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$; d) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$.

E2. Se consideră paralelogramul ABCD în plan și se notează cu O centrul său. Să se exprime sumele:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CO}$; b) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OA}$;

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}$; d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}$.

E3. Se consideră un paralelogram ABCD și fie $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DB}$. Să se exprime vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ în funcție de $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

E4. Fie ABC un triunghi în plan și M, N puncte astfel încât $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{BC}$. Ce patrulater formează punctele A, B, M, N?

E5. Fie ABCD un patrulater în plan. Să se demonstreze că:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$;

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

E6. Fie ABC un triunghi și M mijlocul segmentului [BC]. Să se exprime sumele:

a) $\overline{AB} + \overline{BM}$; b) $\overline{AB} + \overline{MC}$; c) $\overline{AB} + \overline{CM}$;
d) $\overline{AC} + \overline{BM}$; e) $\overline{AM} + \overline{CM}$.

E7. Fie M un punct oarecare pe latura [BC] a triunghiului ABC.

a) Să se arate că expresia $\overline{AM} - \overline{BM} + \overline{BC}$ nu depinde de poziția punctului M.
b) Rămâne adevărată afirmația dacă M este un punct oarecare în planul triunghiului?

E8. Să se precizeze valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) „Dacă $\overline{AB} = \overline{CD}$, atunci $\overline{AC} = \overline{BD}$.";
b) „Dacă $\overline{CA} = \overline{CB}$, atunci A = B.";
c) „Dacă punctul C este egal depărtat de punctele A și B, atunci $\overline{CA} = \overline{CB}$.";
d) „Dacă $\overline{AB} = \overline{DC}$, atunci punctele A, B, C, D sunt coliniare.".

APROFUNDARE

A1. Se consideră hexagonul regulat ABCDEF. Să se exprime în funcție de $\vec{a} = \overline{AB}$ și $\vec{b} = \overline{BC}$ vectorii $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$.

A2. Fie ABC un triunghi. Să se construiască punctele D, E, F, G cu proprietățile:

a) $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD}$; b) $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{AE}$;
c) $\overline{CB} + \overline{BA} = \overline{AF}$; d) $\overline{AG} = \overline{AC} - \overline{AB}$.

A3. Fie ABC un triunghi. Să se determine punctele D și E astfel încât:

a) $\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{AB}$;
b) $\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{AC}$.
Cum sunt așezate punctele A, D, E?

A4. Punctele O, A, B sunt în planul $\mathscr{P}$. Să se afle $C \in \mathscr{P}$ astfel încât $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \vec{0}$.

A5. Punctele A și B sunt distincte, iar M este mijlocul segmentului [AB]. Să se arate că pentru oricare punct O din plan are loc egalitatea:
$\overline{OA} + \overline{OB} + 2\overline{MO} = \vec{0}$.

A6. Punctele A_1, B_1, C_1 sunt mijloacele laturilor [BC], [AC], [AB] ale triunghiului ABC. Să se arate că pentru oricare punct O din planul triunghiului are loc relația:
$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1}$.

A7. Se consideră punctele A, B, C, D distincte și coliniare. Să se arate că dacă pentru un punct M al planului, are loc relația $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MC} + \overline{MD}$, atunci segmentele [AB] și [CD] au același mijloc.

A8. În triunghiul ABC punctele D, E, F sunt mijloacele segmentelor [BC], [AC], [AB]. Să se calculeze:
a) $\overline{AE} + \overline{CD} + \overline{BF}$; b) $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF}$.

A9. Fie ABCD un patrulater și M punctul de intersecție a dreptelor care unesc mijloacele laturilor opuse. Să se arate că pentru oricare punct O din planul patrulaterului are loc egalitatea:
$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 4\overline{OM}$.

A10. Coardele [AB] și [CD] ale cercului $\mathscr{C}(O, r)$ sunt perpendiculare și se intersectează în punctul P.
Să se demonstreze relația:
$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} = 2\overline{PO}$.

2.4. DESCOMPUNEREA UNUI VECTOR DUPĂ DOUĂ DIRECȚII DATE

Fie (Δ_1), (Δ_2) două direcții date de dreptele d_1, respectiv d_2 și vectorul $\vec{v}$ dat prin reprezentantul său $\overrightarrow{AB}$.

S-a arătat anterior că pentru oricare punct M din plan $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$, deci vectorul $\overrightarrow{AB}$ poate fi descompus ca sumă de doi vectori. Dacă punctul C din plan este ales astfel încât $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$ se obține relația $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}$. Această relație arată că vectorul $\overrightarrow{AB}$ poate fi scris ca sumă a doi vectori $\overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{MC}$ cu același punct de aplicație, M.

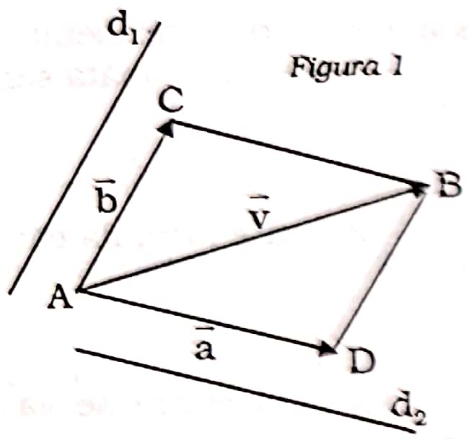


Figura 1

Ne punem problema dacă vectorul $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ poate fi descompus ca sumă a doi vectori care să aibă direcțiile date (Δ_1) și (Δ_2). Răspunsul este afirmativ.

Prin punctele A și B se duc drepte paralele cu d_1 și d_2. Se obține astfel paralelogramul ACBD (figura 1). Folosind regula paralelogramului se obține relația $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

Vectorii $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$ și $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ se numesc **componentele vectorului** $\vec{v}$ după direcțiile (Δ_1) și (Δ_2).

Dacă dreptele d_1 și d_2 sunt perpendiculare, componentele $\vec{a}$ și $\vec{b}$ ale vectorului $\vec{v}$ sunt proiecțiile ortogonale ale acestuia pe cele două drepte.

Problemă rezolvată

☒ Se consideră pătratul ABCD și O centrul său.

a) Să se descompună vectorul $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, după direcțiile date de $\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{BD}$.

b) Să se descompună $\vec{v} = \overrightarrow{AO}$ după direcțiile date de $\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{BD}$.

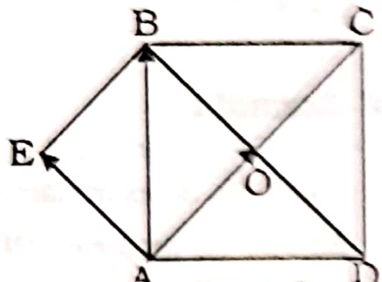


Figura 2

__Soluție__

a) Prin punctele A și B se duc paralele la dreptele BD și AC. Se formează paralelogramul AOBE (figura 2).

Avem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AE}$, deci componentele sunt $\overrightarrow{AO}$ și $\overrightarrow{AE}$.

b) Prin punctele A și O se duc paralele la BD și AD și se obține paralelogramul ADOE.

Rezultă că $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$ (figura 3).

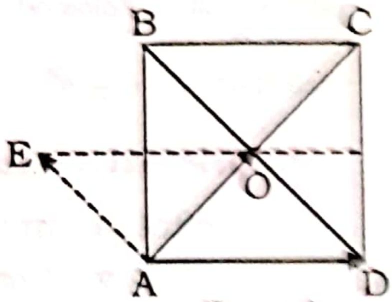


Figura 3

2.5. ÎNMULȚIREA CU SCALARI A VECTORILOR

Fie $\vec{v}$ un vector în plan. Pentru sumele de vectori cu termeni egali s-au folosit notațiile $2\vec{v}=\vec{v}+\vec{v}$, $3\vec{v}=\vec{v}+\vec{v}+\vec{v}$, ..., $n\vec{v}=\vec{v}+\vec{v}+...+\vec{v}$, ..., n indicând numărul termenilor egali.

Așadar, a înmulți un vector $\vec{v}$ cu un număr natural $n\in\mathbb{N}^*$, revine la a construi vectorul $\vec{v}+\vec{v}+...+\vec{v}$, suma având n termeni.

Dacă vom considera vectorul $\vec{u}=-\vec{v}$, opusul vectorului $\vec{v}$, vom avea:
$$n\left(-\vec{v}\right)=n\vec{u}=\vec{u}+\vec{u}+...+\vec{u}=\left(-\vec{v}\right)+\left(-\vec{v}\right)+...+\left(-\vec{v}\right)=-\left(\vec{v}+\vec{v}+...+\vec{v}\right)=(-n)\vec{v}$$
(sumele având n termeni).

În acest fel capătă semnificație înmulțirea unui vector cu un număr întreg.

Se poate formula că:
$$n\vec{v}=\begin{cases}\underbrace{\vec{v}+\vec{v}+...+\vec{v}}_{n}, & n\in\mathbb{N}^*\\ \vec{0}, & n=0\\ -\left(\underbrace{\vec{v}+\vec{v}+...+\vec{v}}_{-n}\right), & n\in\mathbb{Z},\ n<0\end{cases}$$

În continuare se va da sens înmulțirii unui vector cu un număr real (scalar) oarecare.

DEFINIȚIE

- Fie $\alpha\in\mathbb{R}$ și $\vec{v}$ un vector din plan. Vectorul $\alpha\cdot\vec{v}$ este prin definiție un vector care are aceeași direcție cu $\vec{v}$, modulul egal cu $|\alpha|\cdot|\vec{v}|$, același sens cu $\vec{v}$ dacă $\alpha>0$ sau sens contrar lui $\vec{v}$ dacă $\alpha<0$ și este vector nul dacă $\alpha=0$.

Exemplu

- Fie ABC un triunghi și M, N mijloacele laturilor [AB] și [AC]. (figura 4). Să exprimăm vectorial proprietățile liniei mijlocii.

Se știe că dreptele MN și BC sunt paralele și că $MN=\frac{1}{2}BC$.

Rezultă că vectorii $\overline{MN}$ și $\overline{BC}$ au aceeași direcție, același sens și $|\overline{MN}|=\frac{1}{2}|\overline{BC}|$. Folosind înmulțirea cu scalari se obține relația vectorială $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$.

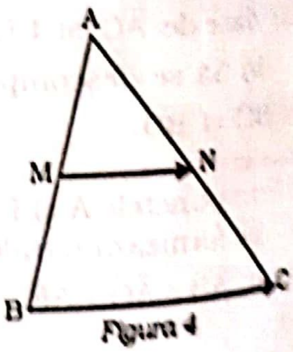


Figura 4

Proprietăți ale înmulțirii cu scalari

Din definiția înmulțirii cu scalari se obține ușor că:

1. vectorii $\vec{v}$ și $\alpha\vec{v}$ sunt coliniari;

2. $\alpha\cdot\vec{v}=\vec{0}$ dacă și numai dacă $\alpha=0$ sau $\vec{v}=\vec{0}$;

3. $1\cdot\vec{v}=\vec{v}$ și $(-1)\cdot\vec{v}=-\vec{v}$.

■ TEOREMA 1

Fie $\mathcal{V}$ mulțimea vectorilor din plan. Atunci:

a) $(\alpha \cdot \beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in \mathcal{V}$;

b) $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in \mathcal{V}$;

c) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$.

Demonstrație

a) Fie $\overline{AB}$ un reprezentant al vectorului $\vec{v} \in \mathcal{V}$, $\overline{AC}$ un reprezentant al vectorului $\beta\vec{v}$ și $\overline{AD}$ un reprezentant al vectorului $(\alpha\beta)\vec{v}$.

Se obțin relațiile $\beta\overline{AB} = \overline{AC}$ și $\alpha\overline{AC} = \overline{AD}$, de unde $\overline{AD} = \alpha\overline{AC} = \alpha(\beta\overline{AB})$.

Dar $\overline{AD} = (\alpha\beta)\overline{AB}$ și astfel $(\alpha\beta)\overline{AB} = \alpha(\beta\overline{AB})$ relație care arată că $(\alpha\beta)\overline{AB}$ și $\alpha(\beta\overline{AB})$ sunt reprezentanți ai aceluiași vector. Așadar $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$.

b) Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ și A un punct al planului. Considerăm punctul B astfel încât $\overline{AB}$ să fie un reprezentant al vectorului $\vec{v}$.
Pe semidreapta (AB se iau punctele C, D, E cu proprietatea că $AC = \alpha \cdot AB$, $AD = \beta \cdot AB$ și $AE = (\alpha + \beta)AB$ (figura 5). Rezultă că segmentele orientate $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ au același sens și $\overline{AE} = (\alpha + \beta)\overline{AB}$, $\overline{AC} = \alpha \cdot \overline{AB}$.
De asemenea se obține că $\overline{CE} = \overline{AE} - \overline{AC} = (\alpha + \beta)\overline{AB} - \alpha\overline{AB} = \beta\overline{AB}$. Dar $\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{CE}$ și se obține că $(\alpha + \beta)\overline{AB} = \alpha\overline{AB} + \beta\overline{AB}$, deci vectorii $(\alpha + \beta)\overline{AB}$ și $\alpha\overline{AB} + \beta\overline{AB}$ sunt reprezentanți ai aceluiași vector. Așadar $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$.
Cazurile $\alpha, \beta \in (-\infty, 0)$ sau $\alpha > 0, \beta < 0$ se tratează având în vedere că $-\overline{AB} = \overline{BA}$ și se folosesc segmente orientate opuse.

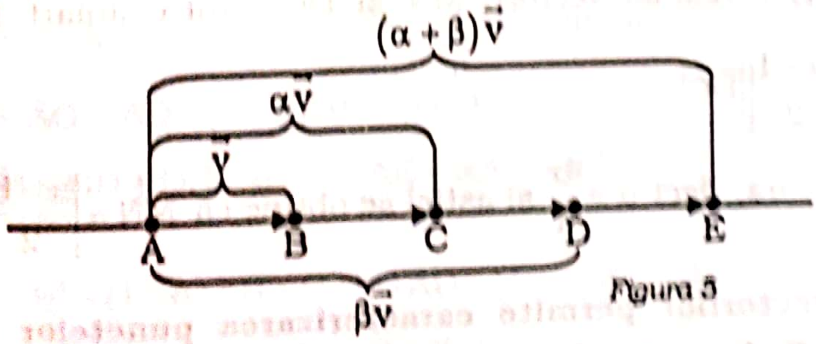


Figura 5

c) Rămâne drept temă. ■

Condiții de coliniaritate

Operația de înmulțire cu scalari a vectorilor oferă posibilitatea de a exprima un vector $\vec{v}$ cu ajutorul oricărui alt vector nenul coliniar cu el.

Într-adevăr, fie $\vec{u}$ un vector nenul coliniar cu $\vec{v}$, $\alpha = |\vec{v}|$, $\beta = |\vec{u}|$ și $m = \frac{\alpha}{\beta}$. Atunci $\vec{v} = m\vec{u}$ dacă $\vec{v}$ și $\vec{u}$ au același sens sau $\vec{v} = -m\vec{u}$ dacă $\vec{v}$ și $\vec{u}$ au sensuri opuse.

Astfel, rezultă condițiile de coliniaritate:

1. Doi vectori $\vec{u}, \vec{v}$ din plan sunt coliniari dacă și numai dacă există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{v} = m\vec{u}$.
2. Doi vectori $\vec{u}, \vec{v}$ sunt coliniari dacă și numai dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. Rezultatele anterioare arată că dacă vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt necoliniari atunci nu există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$.

   Așadar dacă $\vec{u}, \vec{v}$ sunt vectori necoliniari, atunci din orice relație de forma $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ rezultă că $\alpha = \beta = 0$.

Problemă rezolvată

☒ Fie ABCD un trapez cu bazele AB și CD, iar M, N mijloacele segmentelor [AC] și [BD]. Să se arate că $\overline{MN}$ este vector coliniar cu vectorii $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ (figura 6).

Soluție

Fie $a = DC$, $b = AB$. Folosind regula poligonului se obține $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AB} + \overline{BN}$ și $\overline{MN} = \overline{MC} + \overline{CD} + \overline{DN}$. Prin adunare se obține $2\overline{MN} = \overline{AB} + \overline{CD}$ sau $\overline{MN} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} - \overline{DC}\right)$, (1).

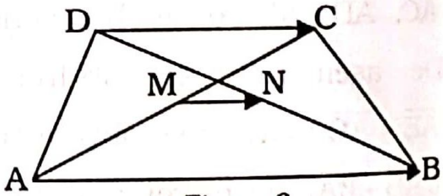


Figura 6

Deoarece vectorii $\overline{DC}$ și $\overline{AB}$ sunt coliniari rezultă că $\overline{AB} = \alpha\overline{DC}$, iar relația (1) se scrie: $\overline{MN} = \frac{\alpha - 1}{2}\overline{DC}$. Așadar vectorii $\overline{MN}$ și $\overline{DC}$ sunt coliniari. Rezultă că $MN \parallel DC$ și $|\overline{MN}| = \left|\frac{\alpha - 1}{2}\right| |\overline{DC}|$.

Dar $b = |\overline{AB}| = \alpha|\overline{DC}| = \alpha a$, deci $\alpha = \frac{b}{a}$ și astfel se obține că $MN = \left|\frac{a-b}{2}\right|$.

• **Coliniaritatea vectorilor permite caracterizarea punctelor coliniare. Astfel, punctele A, B, C sunt coliniare dacă și numai dacă vectorii $\overline{AB}$ și $\overline{BC}$ sunt coliniari, deci dacă există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{AB} = m \cdot \overline{BC}$.**

Problemă rezolvată

☒ Se consideră paralelogramul ABCD și punctele $M \in (AB)$, $N \in (DM)$ astfel încât $AM = MB$ și $MD = 3MN$.
Să se demonstreze că punctele A, N, C sunt coliniare (figura 7).

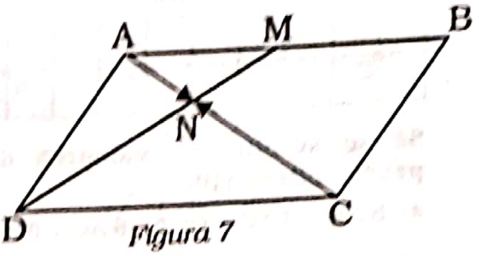


Figura 7

__Soluție__
Folosind operațiile cu vectori se obțin relațiile $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN}$. Se înmulțește prima relație cu 2 și prin adunare cu a doua egalitate se obține:
$2\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MN} - 2\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{MN} = \vec{0}$. Așadar $2\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$, deci vectorii $\overrightarrow{AN}$ și $\overrightarrow{CN}$ sunt coliniari. Rezultă că punctele A, N, C sunt coliniare.

- **Coliniaritatea vectorilor este utilă pentru demonstrarea paralelismului a două drepte.**

Astfel, două drepte sunt paralele dacă ele sunt suporturile a doi vectori coliniari.

Problemă rezolvată

☒ Fie ABCD un paralelogram și O un punct interior acestuia. Prin O se duc paralelele la laturi $GF \parallel AB$ și $EH \parallel AD$, $G \in (AD)$, $F \in (BC)$, $E \in (AB)$, $H \in (CD)$.

Să se arate că dacă $\frac{AE}{AB} + \frac{AG}{AD} = 1$, atunci $GH \parallel EF$ (figura 8).

__Soluție__
Vom arăta că vectorii $\overrightarrow{GH}$ și $\overrightarrow{EF}$ sunt coliniari. Notăm $\alpha = \frac{AE}{AB}$. Rezultă că $\frac{AG}{AD} = 1 - \alpha$ și $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG} = (1-\alpha)\overrightarrow{AD}$. Din aceste relații se obține:
$\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} - (1-\alpha)\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AD}$.
Așadar $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DH} = \alpha\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AD} + \alpha\overrightarrow{AB} = \alpha\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) = \alpha\overrightarrow{AC}$, (1).

Analog:
$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = (1-\alpha)\overrightarrow{AB} + (1-\alpha)\overrightarrow{AD} = (1-\alpha)\overrightarrow{AC}$, (2).

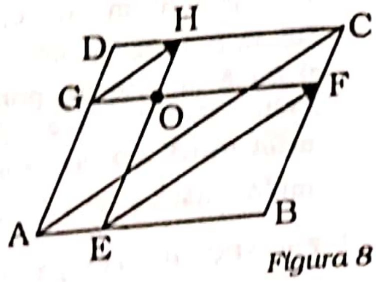


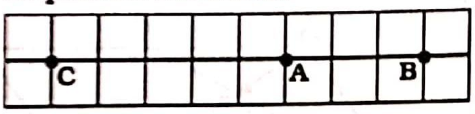
Figura 8

Relațiile (1) și (2) arată că vectorii $\overrightarrow{GH}$ și $\overrightarrow{EF}$ sunt coliniari cu $\overrightarrow{AC}$. Astfel se obține că $GH \parallel AC$, $EF \parallel AC$, deci $GH \parallel EF$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Se consideră punctele A, B, C în rețeaua de pătrate alăturată.



Să se stabilească valoarea de adevăr pentru afirmațiile:

a) $5\overline{AB}+3\overline{AC}=\overline{0}$; b) $8\overline{AC}+5\overline{BC}=\overline{0}$;

c) Dacă $\overline{MA}+\overline{MC}=\overline{0}$, atunci $\overline{AM}=\frac{1}{8}\overline{BC}$.

E2. Se consideră vectorul $\vec{a}=\overline{AB}$. Să se determine vectorul $\vec{v}$ în cazurile:

a) $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{a}$; b) $\vec{v}=\frac{2}{3}\vec{a}$;

c) $\vec{v}=-\frac{2}{3}\vec{a}$; d) $\vec{v}=-\frac{5}{3}\vec{a}$.

E3. Se consideră vectorii $\vec{u}=\overline{AB}$ și $\vec{v}=\overline{AC}$. Să se scrie cât mai simplu:

a) $\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})-\vec{u}$; b) $\frac{2}{3}(\vec{u}-\vec{v})+\frac{1}{3}(\vec{u}+\vec{v})$;

c) $2\vec{u}+3\overline{CA}-2\overline{BA}+\overline{BC}$.

E4. Folosind proprietățile înmulțirii cu scalari a vectorilor să se verifice egalitățile:

a) $\alpha(\vec{a}-\vec{b})=\alpha\vec{a}-\alpha\vec{b},\ \forall\ \alpha\in\mathbb{R},\ \vec{u},\ \vec{v}\in\mathcal{V}$;

b) $(\alpha-\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}-\beta\vec{u},\ \forall\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{R},\ \vec{u}\in\mathcal{V}$;

c) $\alpha(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}+\alpha\vec{c},\ \forall\ \alpha\in\mathbb{R},\ \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\in\mathcal{V}$.

E5. Se consideră punctele distincte A și B. Să se afle $\overline{AM}$, $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, dacă:

a) $M\in[AB$ și $\overline{MA}=\frac{2}{3}\overline{BA}$;

b) M verifică egalitatea $3\overline{BA}=\overline{AM}$;

c) $M\in[AB$ și $2\overline{AM}=5\overline{AB}$;

d) M este simetricul lui B în raport cu A.

E6. Se consideră paralelogramul ABCD cu centrul O. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ știind că:

a) $\overline{AB}=x\overline{CD}$;

b) $\overline{AC}=x\overline{OA}$;

c) $\overline{OC}=x\overline{CA}$.

APROFUNDARE

A1. Fie A și B puncte în plan. Să se arate că există un singur punct G în plan în situațiile:

a) $\overline{GA}+\overline{GB}=\overline{0}$; b) $\overline{GA}+2\overline{GB}=\overline{0}$;

c) $2\overline{AG}+5\overline{GB}=\overline{AB}$; d) $3\overline{GA}+2\overline{GB}=7\overline{AB}$.

A2. Se consideră punctele A, B în plan și $m,\ n\in\mathbb{R}^*$.

a) Să se arate că există un singur punct G în plan cu proprietatea $m\overline{GA}+n\overline{GB}=\overline{0}$.

b) Dacă $m\overline{GA}+n\overline{GB}=\overline{0}$, să se determine pentru $m+n\neq 0$, vectorii $\overline{GA}$ și $\overline{GB}$ în funcție de $\overline{AB}$.

c) Dacă M este un punct oarecare din plan, iar G are proprietatea că $m\overline{GA}+n\overline{GB}=\overline{0}$, să se arate că: $m\overline{MA}+n\overline{MB}=(m+n)\overline{MG}$.

A3. Fie ABC un triunghi și punctele $M\in(AB)$, $N\in(AC)$, astfel încât $2\overline{AM}=\overline{MB}$ și $2\overline{AN}=\overline{NC}$. Să se exprime în funcție de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, vectorii $\overline{BM}$, $\overline{CN}$, $\overline{MN}$, $\overline{BN}$, $\overline{CM}$.

A4. Se consideră punctele A și B în plan.

a) Să se determine poziția punctelor M, $N\in AB$, astfel încât $\overline{MB}=-4\overline{MA}$, $\overline{NB}=4\overline{NA}$.

b) Dacă O este un punct oarecare în plan, să se verifice dacă $5\overline{OM}=4\overline{OA}+\overline{OB}$ și $3\overline{ON}=4\overline{OA}-\overline{OB}$.

A5. Punctele A, B, C sunt distincte și $\overline{AB}+3\overline{CB}=\overline{0}$. Să se determine $m,\ n\in\mathbb{R}$ astfel încât pentru un punct M din plan să aibă loc egalitatea $\overline{MB}=m\overline{MA}+n\overline{MC}$.

A6. Să se determine punctele I, J, K, L, M, N din planul triunghiului ABC în cazurile:

a) $\overline{AI}=-2\overline{BC}$; b) $\overline{AJ}=\frac{1}{2}\overline{BC}$;

c) $\overline{BK}=\frac{2}{3}\overline{AC}$; d) $\overline{CM}=-3\overline{AB}$;

e) $\overline{BL}=-2\overline{CA}$; f) $\overline{NC}=2\overline{AB}$.

A7. Se consideră paralelogramul ABCD. Să se construiască punctele M, N, P, Q din planul paralelogramului în cazurile:

a) $\overline{CM}=2\overline{CB}+\overline{CD}$; b) $\overline{NA}+\overline{NB}=2\overline{BC}$;

c) $2\overline{PA}-\overline{PB}=\overline{DA}$; d) $\overline{QA}+\overline{QB}-\overline{QD}=\overline{0}$.

2.6. DESCOMPUNEREA UNUI VECTOR DUPĂ DOI VECTORI NECOLINIARI

Fie $\vec{a}, \vec{b}$ doi vectori necoliniari. A descompune un vector $\vec{v}$ din plan după vectorii $\vec{a}, \vec{b}$ înseamnă a descompune vectorul $\vec{v}$ ca sumă de doi vectori coliniari cu $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

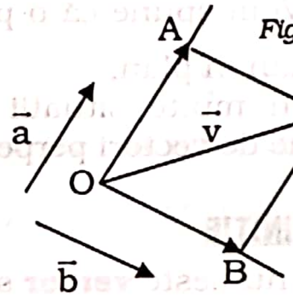


Figura 1

Problema descompunerii vectorului $\vec{v}$ după vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ revine la determinarea numerelor reale α și β cu proprietatea că $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Procedeul descompunerii este asemănător cu cel al descompunerii vectorului $\vec{v}$ după două direcții date.

Se alege un punct O în plan și se consideră dreptele care trec prin O și care au direcțiile vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ (figura 1).
Se obțin componentele $\overline{OA}$ și $\overline{OB}$ ale lui $\vec{v}$ după cele două direcții. Rezultă că $\vec{v} = \overline{OA} + \overline{OB}$. Deoarece $\overline{OA}$ și $\overline{OB}$ sunt vectori coliniari cu $\vec{a}$, respectiv $\vec{b}$, rezultă că există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, astfel încât $\overline{OA} = \alpha \cdot \vec{a}$ și $\overline{OB} = \beta \cdot \vec{b}$, (1).

Astfel se obține că $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ și deci descompunerea lui $\vec{v}$ după vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este posibilă.

Mai mult, din relațiile (1) se obține că $|\alpha| = \dfrac{|\overline{OA}|}{|\vec{a}|}$, iar $|\beta| = \dfrac{|\overline{OB}|}{|\vec{b}|}$.

Se observă că descompunerea unui vector $\vec{v}$ din plan după doi vectori necoliniari $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este unică. Într-adevăr, dacă $\vec{v}$ ar avea două descompuneri, $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = m\vec{a} + n\vec{b}$ după vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ atunci se obține relația:

$$(\alpha - m)\vec{a} + (\beta - n)\vec{b} = \vec{0}.$$

Deoarece vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt necoliniari rezultă că $\alpha - m = 0$ și $\beta - n = 0$, deci $\alpha = m$ și $\beta = n$. Așadar există și sunt unice numerele reale α, β cu proprietatea că $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, (2).

Numerele $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ care verifică relația (2) se numesc **coordonatele vectorului** $\vec{v}$ în raport cu vectorii necoliniari $\vec{a}$ și $\vec{b}$ și se scrie $\vec{v}(\alpha, \beta)$.

Se observă că unui vector $\vec{v}$ i se asociază în mod unic o pereche (α, β) de numere reale și reciproc, fiecare pereche de numere reale (α, β) determină în plan un singur vector $\vec{v}$, prin relația (2). În acest mod mulțimea $\mathcal{V}$ a vectorilor din plan poate fi identificată cu produsul cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Mulțimea $S = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ constituie un **sistem de generatori** pentru mulțimea vectorilor din plan. Aceasta înseamnă că oricare vector din plan este o combinație liniară de forma $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ a vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

Vom spune că o pereche de vectori necoliniari $(\vec{a}, \vec{b})$ formează un reper cartezian în plan.

În multe situații este convenabil a alege ca sistem de generatori o pereche de vectori perpendiculari și de lungime 1.

❖ **DEFINIȚIE**

- Se numește **versor** sau **vector unitate** al unui vector nenul $\vec{a}$ un vector $\vec{u}$ care are aceeași direcție și același sens cu $\vec{a}$ și modulul egal cu o unitate.

Din definiție se observă că pentru orice vector $\vec{a} \in \mathcal{V}$ avem $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{u}$ sau

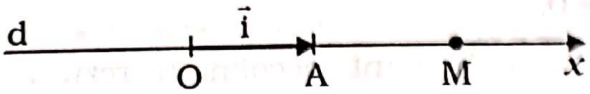
$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}.$$

Dacă (Δ) este o direcție în plan, un vector $\vec{u}$ care are direcția (Δ) și modulul 1 se numește **versor** sau **vector unitate** al direcției (Δ).

2.7. DESCOMPUNEREA UNUI VECTOR ÎNTR-UN REPER CARTEZIAN

Reper cartezian pe dreaptă

Fie d o dreaptă în plan. Se numește **reper cartezian** pe dreapta d o pereche $(O, \vec{i})$ formată dintr-un punct O de pe dreaptă și un versor $\vec{i}$ al direcției acestei drepte.



Un reper cartezian pe o dreaptă se va nota Ox sau $(O, \vec{i})$. Dreapta pe care s-a definit un reper cartezian se numește **axă** (axă de coordonate). Punctul O se numește **originea**, iar $\vec{i}$ **versorul** reperului.

Vectorul $\vec{i}$ determină sensul pozitiv pe dreapta d, iar opusul lui $\vec{i}$ determină sensul negativ pe dreapta d.

Dacă $M \in d$ este un punct oarecare, atunci vectorii $\overline{OM}$ și $\vec{i}$ sunt coliniari. Rezultă că există $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\overline{OM} = x\vec{i}$, (1).

Numărul real x cu proprietatea (1) se numește **abscisa** punctului M și se folosește notația $M(x)$.