CURS 6

04.11.2020

Reamintire:

- $\rho = (A, A, R)$ relație de echivalență $\Leftrightarrow$ ρ - reflexivă, tranzitivă, simetrică

- $\pi \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ partiție a lui $A \Leftrightarrow \begin{cases} - \bigcup_{B \in \pi} B = A \\ - B, B' \in \pi, B \neq B' \text{ atunci } B \cap B' = \emptyset \end{cases}$

$\Leftrightarrow \forall x \in A\ \exists!\ B \in \pi$ a.î. $x \in B$

Teor 1 Dacă π este partiție a lui A, atunci ρ_π este relație de echivalență pe A, unde $\boxed{x \rho_\pi y \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists B \in \pi \text{ a.î. } x, y \in B}$.

Teor 2 Dacă ρ relație de echivalență pe A, atunci $\boxed{A/\rho \overset{def}{=} \{\rho\langle x\rangle \mid x \in A\}}$ este o partiție a lui A.

mulțimea factor (cât) a lui A relativ la ρ

$\rho\langle x\rangle = [x]_\rho$ clasa lui x modulo ρ

$= \{y \in A \mid x \rho y\} \subseteq A$

Obs $A/\rho_\pi = \pi$

$\rho_{A/\rho} = \rho$

(adică cele două construcții sunt inverse una alteia)

Funcții și relații de echivalență

Def 1 Fie $f: A \to B$ o funcție.
Definim pe A relația $\ker f$ (nucleul lui f) astfel:

$$\forall x, y \in A, \quad \boxed{x \ker f\, y \overset{def}{\Longleftrightarrow} f(x) = f(y)}$$

Prop 1 Fie $f: A \to B$ o funcție. Atunci:

1) $\ker f$ este relație de echivalență pe A.

2) $A/_{\ker f} = \{ f^{-1}(b) \mid b \in \operatorname{Im} f \}$.

Dem

1) (R) $x \ker f\, x \Leftrightarrow f(x) = f(x)$ adev $\forall x \in A$

(T) Fie $x, y, z \in A$ a.î. $x \ker f\, y$ și $y \ker f\, z$

$\Rightarrow f(x) = f(y)$ și $f(y) = f(z) \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow x \ker f\, z$

(S) Fie $x, y \in A$ a.î. $x \ker f\, y \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow y \ker f\, x$

2) Avem $A/_{\ker f} = \{ (\ker f)\langle x \rangle \mid x \in A \}$.

Fie $x \in A$. Fie $b = f(x) \in \operatorname{Im} f$

Arătăm că $(\ker f)\langle x \rangle \underset{?}{=} f^{-1}(b)$

Amintim: $f^{-1}(b) \overset{def}{=} \{ a \in A / f(a) = b \}$
imaginea inversă a lui b.

Fie $y \in A$

$y \in (\ker f)\langle x \rangle \Leftrightarrow x \ker f\, y \Leftrightarrow f(x) = f(y) = b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y \in f^{-1}(b)$

Def 2 Fie ρ o relație de echivalență pe A.

Proiecția canonică asociată lui ρ este funcția:

$$\begin{cases} p_\rho : A \to A/\rho \\ p_\rho(x) = \rho\langle x\rangle \end{cases}$$ (asociază fiecărui element propria sa clasă)

$\overset{\shortparallel}{[x]_\rho}$

Prop 2

Proiecția canonică $p_\rho : A \to A/\rho$ are următoarele proprietăți:

1) p_ρ surjectiv

2) $\mathrm{Ker}\, p_\rho = \rho$ (deci orice rel de echivalență este un kernel unei funcții)

Dem

1) Avem $A/\rho = \{\rho\langle x\rangle \mid x \in A\}$

Avem $\forall x \in A$, $\rho\langle x\rangle = p_\rho(x)$, deci p_ρ este surj.

2) Fie $x, y \in A$

$x \ \ker p_\rho \ y \iff p_\rho(x) = p_\rho(y)$

$\iff \rho\langle x\rangle = \rho\langle y\rangle \iff$ (conform lemei de data trecută)

$\iff x \rho y$

Teorema I de factorizare

Fie $f : A \to B$ o funcție.

Am.h: $\mathrm{Im} f = \{f(x) / x \in A\} \subseteq B$

$\boxed{\imath \text{ - iota}}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_{\ker f}"'] & B \\ A/\ker f \arrow[r, dotted, "\bar{f}"'] & \mathrm{Im} f \arrow[u, hook, "\imath"'] \end{tikzcd}$$

$\imath$ (incluziunea canonică)

$\imath(y) = y$

$$\boxed{\bar{f}(\ker f\,(x)) = f(x)}$$

Atunci $\exists!\ \bar{f} : A/\ker f \to \mathrm{Im} f$ a.î. $\bar{f}$ este bijectivă și diagrama alăturată este comutativă.
(de mai sus)

adică, $f = \imath \circ \bar{f} \circ p_{\ker f}$

(aceasta este descompunerea canonică a lui f)

$\boxed{\text{Dem}}$ (!) (unicitatea)

Pp că $\bar{f}$ există și are proprietățile din enunț. Arătăm că $\bar{f}$ este unic.

Fie $(\ker f)\langle x\rangle \in A/\ker f$, unde $x \in A$

Avem $\underline{f(x)} = (\imath \circ \bar{f} \circ p_{\ker f})(x) = \imath(\bar{f}(p_{\ker f}(x))) =$
$= \underline{\bar{f}(\ker f\langle x\rangle)}$

Deci $\bar{f}(\ker f\langle x\rangle) = f(x)$ este unic determinat pt $\forall x \in A$.

$(\exists)$ (existența) Fie $\begin{cases} \bar{f} : A/\ker f \to \mathrm{Im} f \\ \bar{f}((\ker f)\langle x\rangle) = f(x) \in \mathrm{Im} f \end{cases}$

• def este dată folosind reprezentantul $x \in (\ker f)\langle x\rangle$, deci trebuie să verificăm că def. nu depinde de alegerea reprezentanților.

Într-adevăr:

Fie $y \in (\ker f)\langle x\rangle$ un alt reprezentant.

Atunci $(\ker f)\langle x\rangle = (\ker f)\langle y\rangle$

deci $x \ker f\, y$, deci $f(x) = f(y)$,

deci $\bar{f}$ este bine definită.

- Arătăm că $\bar{f}$ este injectiv.

Fie $x, y \in A$ a.î. $\bar{f}(\ker f\langle x\rangle) = \bar{f}(\ker f\langle y\rangle) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x \ker f\, y \Rightarrow \ker f\langle x\rangle = \ker f\langle y\rangle$

- Arătăm că $\bar{f}$ este surjectiv

Fie $b \in \operatorname{Im} f$, deci $\exists x \in A$ a.î. $f(x) = b$

deci $b = \bar{f}(\ker f\langle x\rangle)$ adică $b \in \operatorname{Im} \bar{f}$

Deci $\bar{f}$ este bijectivă.

- Arătăm că diagrama este comutativă

Fie $x \in A$, avem $(i \circ \bar{f} \circ p_{\ker f})(x) =$

$= i(\bar{f}(p_{\ker f}(x))) =$

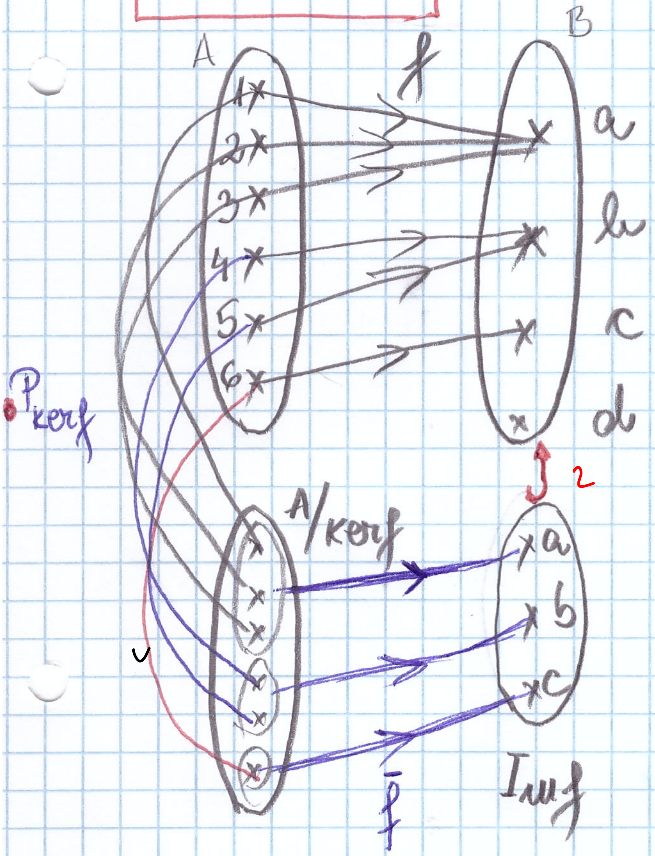
$= \bar{f}(\ker f\langle x\rangle) = f(x)$

Deci $i \circ \bar{f} \circ p_{\ker f} = f$.

EXEMPLU

$f: \{1,2,3,4,5,6\} \to \{a,b,c,d\}$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	a	a	a	b	b	c



- $Im f = \{a, b, c\} \subseteq B$

$f^{-1}(a) = \{1,2,3\} \subseteq A$

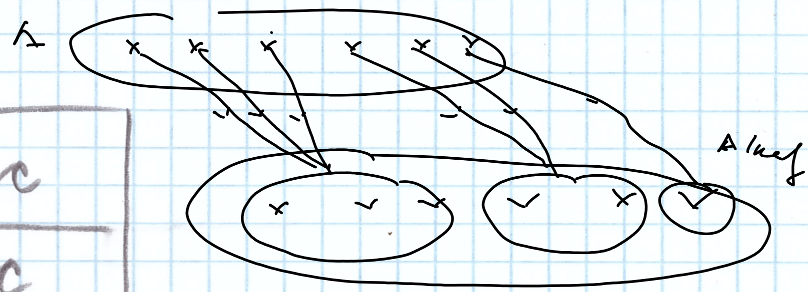
$f^{-1}(b) = \{4,5\} \subseteq A$

$f^{-1}(c) = \{6\} \subseteq A$

- $A/\ker f = \{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6\}\}$
- $\ker f = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(3,2),(2,3),(4,4),(5,5),(4,5),(5,4),(6,6)\}$

$\subseteq A \times A$

$x \in A$	1	2	3	4	5	6
$f(x) \in B$	a	a	a	b	b	c
$A/_{\ker f} \ni P_{\ker f}(x)$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{4,5\}$	$\{4,5\}$	$\{6\}$



$y \in Im f$	a	b	c
$\iota(y) \in B$	a	b	c

tabelul cu funcția $\bar{f}$

$(\ker f)\langle x\rangle \in A/\ker f$	$\{1,2,3\}$	$\{4,5\}$	$\{6\}$
$\bar{f}(\ker f\langle x\rangle) \in Im f$	a	b	c

TEMĂ: 62, 63

exercițiile: 75, 76, 79