CURS 8

Subspaţiu generat. Transformări liniare

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ şi V un K-spaţiu vectorial.

Din cursul anterior:

• Fie $A \subseteq V$. Sunt echivalente următoarele afirmaţii:

1) A este subspaţiu al lui V.

2) A verifică condiţiile:

α) $0 \in A$;

β') $a_1, a_2 \in A \Rightarrow a_1 + a_2 \in A$;

γ) $\alpha \in K,\ a \in A \Rightarrow \alpha a \in A$.

3) A verifică condiţiile:

α) $0 \in A$;

β'') $\alpha_1, \alpha_2 \in K,\ a_1, a_2 \in A \Rightarrow \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \in A$.

• Dacă $X \subseteq V$ atunci $\langle X \rangle = \bigcap \{A \leq_K V \mid X \subseteq A\}$ este subspaţiul lui V generat de X.

• Din definiţia subspaţiului generat rezultă:

a) $\langle \emptyset \rangle = \{0\} = \langle 0 \rangle$;

b) $X, Y \subseteq V,\ X \subseteq Y \Rightarrow \langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$;

c) $A \leq_K V \Rightarrow \langle A \rangle = A$;

d) $X \subseteq V \Rightarrow \langle \langle X \rangle \rangle = \langle X \rangle$.

• Dacă $\emptyset \neq X \subseteq V$ atunci $\langle X \rangle$ este format din toate combinaţiile liniare de elemente din X.

• Dacă $A, B \leq_K V$ atunci $A + B = \langle A \cup B \rangle$. $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$

• Dacă $A_1, \ldots, A_n$ sunt subspaţii ale K-spaţiului vectorial V, atunci

$$A_1 + \cdots + A_n = \langle A_1 \cup \cdots \cup A_n \rangle. \leftarrow \text{temă}$$

Suma de subspaţii e subspaţiu. (ind. după nr. de subspaţii)

• Dacă $X_i \subseteq V$ $(i = 1, \ldots, n)$, atunci $\langle X_1 \cup \cdots \cup X_n \rangle = \langle X_1 \rangle + \cdots + \langle X_n \rangle$. $\Uparrow X_i = A_i,\ i=\overline{1,n}$

dem: „$\subseteq$" $X_i \subseteq \langle X_i \rangle \subseteq \langle X_1 \rangle + \ldots + \langle X_n \rangle,\ \forall i = \overline{1,n} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow X_1 \cup \ldots \cup X_n \subseteq \langle X_1 \rangle + \ldots + \langle X_n \rangle \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \langle X_1 \cup \ldots \cup X_n \rangle \subseteq \langle \underbrace{\langle X_1 \rangle + \ldots + \langle X_n \rangle}_{\leq_K V} \rangle = \langle X_1 \rangle + \ldots + \langle X_n \rangle$

„$\supseteq$" $X_i \subseteq X_1 \cup \ldots \cup X_n \Longrightarrow \langle X_i \rangle \subseteq \langle X_1 \cup \ldots \cup X_n \rangle \quad (i = \overline{1,n})$

$\Longrightarrow \langle X_1 \rangle + \ldots + \langle X_n \rangle \subseteq \langle X_1 \cup \ldots \cup X_n \rangle + \ldots + \langle X_1 \cup \ldots \cup X_n \rangle \subseteq$

$\subseteq \langle X_1 \cup \ldots \cup X_n \rangle$

Am văzut că suma a două subspaţii este un subspaţiu.

Definiţia 1. Dacă A şi B sunt subspaţii ale lui V şi $A \cap B = \{0\}$, subspaţiul $A + B$ se notează cu $A \oplus B$ şi se numeşte **suma directă** a lui A şi B.

În particular, $V = A \oplus B$ dacă şi numai dacă au loc următoarele:

i) $A + B = V$; $\supseteq$ nou ($\subseteq$ are loc întotdeauna)

ii) $A \cap B = \{0\}$. $\subseteq$ –"– ($\supseteq$ — " —)

În acest caz, spunem că A (sau B) este **sumand** (sau **sumant**) **direct** al lui V (prin urmare, A şi B sunt sumanzi (sumanţi) direcţi ai lui V). De asemenea, spunem că A este un **complement direct** al lui B (în V); la fel B pentru A.

Observaţiile 2. a) Pentru un sumand direct pot exista mai mulţi complemenţi direcţi.

Ex: $V = \mathbb{R}^2$, $A = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$

$K = \mathbb{R}$ $\quad B = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{R}\} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$

$C = \{(c,c) \mid c \in \mathbb{R}\} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$

$A+B = \{(a,0)+(0,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

$A \cap B = \{(0,0)\}$ $\implies$

$\implies \mathbb{R}^2 = A \oplus B.$

$A + C = \{(a,0)+(c,c) \mid a,c \in \mathbb{R}\} = \{(a+c, c) \mid a,c \in \mathbb{R}\} \subseteq \{(b,c) \mid b,c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

$\overset{?}{\supseteq}$ Luăm $a = b - c$

$A \cap C = \{(0,0)\}$

$\implies \mathbb{R}^2 = A \oplus C.$

Evident, $C \neq B$ $\quad ((1,1) \in C, (1,1) \notin B).$

b) Proprietatea de a fi sumand direct este tranzitivă (la seminar).

Definiţia 3. Fie V, V' două K-spaţii vectoriale. O funcţie $f : V \to V'$ se numeşte **transformare liniară** (sau **funcţie liniară** sau **aplicaţie liniară** sau **morfism de K-spaţii vectoriale**) dacă

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in V \tag{1}$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x),\ \forall x \in V,\ \forall \alpha \in K. \tag{2}$$

O transformare liniară bijectivă se numeşte **izomorfism** de spaţii liniare. O transformare liniară a unui spaţiu vectorial V în V se numeşte **endomorfism** al lui V. Un endomorfism bijectiv al lui ${}_K V$ se numeşte **automorfism** al lui V.

Observaţiile 4. a) O funcţie $f : V \to V'$ este (transformare) liniară dacă şi numai dacă

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in V,\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K. \tag{3}$$

dem: „$\Longrightarrow$" f transf. liniară $\Longrightarrow$ (3)

Fie $x_1, x_2 \in V$, $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ arbitrare. Atunci

$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \overset{(1)}{=} f(\alpha_1 x_1) + f(\alpha_2 x_2) \overset{(2)}{=} \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$

„$\Longleftarrow$" În (3) luăm $\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \Longrightarrow (1)$

$\begin{pmatrix} x_1 = \alpha \text{ şi} \\ x_1 = x \end{pmatrix}$ $\alpha_2 = 0 \Longrightarrow (2)$

b) Dacă $f : V \to V'$ este o transformare liniară, atunci

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n),\ \forall x_1, \ldots, x_n \in V,\ \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K.$$

dem: Inducţie după $n \in \mathbb{N}^*$ (temă)

c) Dacă $f : V \to V'$ este o transformare liniară, atunci f este un morfism între grupurile $(V, +)$ şi $(V', +)$ de unde rezultă

$$f(0) = 0 \text{ şi } f(-x) = -f(x),\ \forall x \in V.$$

d) Dacă V, V' şi V'' sunt K-spaţii vectoriale şi $f : V \to V'$, $g : V' \to V''$ sunt transformări liniare, atunci $g \circ f$ este transformare liniară. $g \circ f : V \to V''$

dem: Fie $\alpha, \beta \in K$, $x, y \in V$. Arătăm că

$(g \circ f)(\alpha x + \beta y) \overset{?}{=} \alpha \cdot (g \circ f)(x) + \beta (g \circ f)(y)$

$(g \circ f)(\alpha x + \beta y) = g(f(\alpha x + \beta y)) \underset{(3)}{\overset{f}{=}} g(\alpha \underbrace{f(x)}_{\in V'} + \beta \underbrace{f(y)}_{\in V'}) \underset{(3)}{\overset{g}{=}}$

$= \alpha g(f(x)) + \beta g(f(y)) = \alpha \cdot (g \circ f)(x) + \beta \cdot (g \circ f)(y)$

e) Dacă $f : V \to V'$ este un izomorfism de spaţii vectoriale, atunci şi $f^{-1} : V' \to V$ este izomorfism de spaţii vectoriale, adică

$$f^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 f^{-1}(y_1) + \alpha_2 f^{-1}(y_2),\ \forall\, y_1, y_2 \in V',\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K. \tag{4}$$

dem: f^{-1} bijectivă (clar), f^{-1} transf. liniară (i.e. (4))

$y_i \in V' \xRightarrow[f \text{ bij.}]{} \exists!\, x_i \in V : f(x_i) = y_i \qquad (i=1,2)$

$\Longrightarrow x_i = f^{-1}(y_i),\ i=1,2.$

$$f^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = f^{-1}(\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)) \underset{(3)}{\overset{f}{=}} f^{-1}(f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) =$$

$$= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 f^{-1}(y_1) + \alpha_2 f^{-1}(y_2)$$

$\Longrightarrow$ (4) are loc.

$\{f : V \to V \mid f \text{ endom. al lui } {}_K V\}$

$\Vert$

f) Fie V un K-spaţiu vectorial, $End_K(V)$ mulţimea endomorfismelor K-spaţiului vectorial V. Din Observaţia 4 d) rezultă că $End_K(V)$ este stabilă în monoidul $(V^V, \circ)$, iar $(End_K(V), \circ)$ este monoid.

op. indusă

$1_V : V \to V$, $1_V(x) = x$
automorfism al lui ${}_K V$ (temă) = el. neutru din $(End_K(V), \circ)$

g) Grupul elementelor inversabile ale monoidului $(End_K(V), \circ)$ este $(Aut_K(V), \circ)$, unde $Aut_K(V)$ este mulţimea automorfismelor spaţiului vectorial V.

$U(End_K(V)) = \{f \in End_K(V) \mid f \text{ bijectivă}\} = \{f : V \to V \mid f \text{ autom. } {}_K V\}$

$\Longrightarrow Aut_K(V)$ p.s. în $(End_K(V), \circ)$ şi $(Aut_K(V), \circ)$ grup
op. ind.

h) Dacă $f : V \to V'$ este transformare liniară şi $X \subseteq V$, atunci

$$f(\langle X \rangle) = \langle f(X) \rangle. \tag{5}$$

dem: I) $X = \emptyset$, $f(\langle \emptyset \rangle) = f(\{\underset{\text{din } V}{0}\}) = \{f(0)\} = \{\underset{\text{din } V'}{0}\} = \underset{\text{în } {}_K V'}{\langle \emptyset \rangle} = \langle f(\emptyset) \rangle$

II) $X \neq \emptyset$ $\quad f(\langle X \rangle) = f(\{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \mid \alpha_i \in K, x_i \in X, i = \overline{1,n}, n \in \mathbb{N}^*\})$

$= \{f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \mid \alpha_i \in K, x_i \in X, i = \overline{1,n}, n \in \mathbb{N}^*\} =$

$= \{\alpha_1 \underbrace{f(x_1)}_{=y_1} + \dots + \alpha_n \underbrace{f(x_n)}_{=y_n} \mid$ — " — " — " — $\} =$

$= \{\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n \mid \alpha_i \in K, y_i \in f(X), i = \overline{1,n}, n \in \mathbb{N}^*\} = \langle f(X) \rangle$

Exemplele 5. a) Pentru orice K-spaţii vectoriale V şi V' funcţia $\theta : V \to V'$, $\theta(x) = 0$ este o transformare liniară numită transformarea liniară **nulă** sau **zero**.

din V'

Într-adevăr,

$$\theta(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = 0 = 0 + 0 = \alpha_1 0 + \alpha_2 0 = \alpha_1 \theta(x_1) + \alpha_2 \theta(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in V,\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K.$$

b) Pentru orice K-spaţiu vectorial V aplicaţia identică $1_V : V \to V$, $1_V(x) = x$ este automorfism al lui V. Acest automorfism este element neutru în $(End_K(V), \circ)$. (temă)

c) Fie $\varphi \in \mathbb{R}$ fixat. Rotaţia planului de unghi φ, adică funcţia

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x \cos\varphi - y \sin\varphi, x \sin\varphi + y \cos\varphi),$$

este o transformare liniară (la seminar).

d) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, $C(I, \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă pe } I\}$. Funcţia

$$F : C(I, \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ F(f) = \int_a^b f(x)dx$$

este o transformare liniară.

Într-adevăr, pentru orice $f, g \in C(I, \mathbb{R})$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avem

$$F(\alpha f + \beta g) = \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx = \alpha F(f) + \beta F(g).$$

Teorema 6. Fie V şi V' K-spaţii vectoriale. Dacă $f, g : V \to V'$ şi $\alpha \in K$, atunci definim $f + g : V \to V'$ şi $\alpha f : V \to V'$ prin

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \tag{6}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x). \tag{7}$$

1) Dacă f şi g sunt transformări liniare, atunci $f + g$ este o transformare liniară.

2) Dacă f este transformare liniară, atunci αf este transformare liniară.

Dem: 1) Fie $x, y \in V$, $\beta, \gamma \in K$. Arătăm că

$(f+g)(\beta x + \gamma y) \overset{?}{=} \beta (f+g)(x) + \gamma (f+g)(y)$

$(f+g)(\beta x + \gamma y) \overset{(6)}{=} f(\beta x + \gamma y) + g(\beta x + \gamma y) \overset{(3)}{=} \beta f(x) + \gamma f(y) +$
$+ \beta g(x) + \gamma g(y) = \beta f(x) + \beta g(x) + \gamma f(y) + \gamma g(y) = \beta(f(x) + g(x)) +$
$+ \gamma(f(y) + g(y)) \overset{(6)}{=} \beta(f+g)(x) + \gamma(f+g)(y)$

2) Fie $x, y \in V$, $\beta, \gamma \in K$. Arătăm că:

$(\alpha f)(\beta x + \gamma y) \overset{?}{=} \beta(\alpha f)(x) + \gamma(\alpha f)(y)$

$$(\alpha f)(\beta x+\gamma y) \overset{(7)}{=} \alpha \cdot f(\beta x+\gamma y) \overset{(3)}{=} \alpha(\beta f(x)+\gamma f(y)) =$$
$$= (\alpha\beta)f(x) + (\alpha\gamma)f(y) = \beta(\alpha f(x)) + \gamma(\alpha f(y)) =$$
$$\overset{(7)}{=} \beta(\alpha f)(x) + \gamma(\alpha f)(y)$$

Reamintim că $(V')^V = \{f \mid f : V \to V'\}$ este K-sp. vect. în rap. cu op. definite ca în (6) și (7), adică punctual (vezi seminar)

$Hom_K(V,V') = \{f : V \to V' \mid f$ transf. liniară de K-sp. vect.$\}$.

Corolarul 7. a) Mulţimea $Hom_K(V, V')$ a transformărilor liniare ale lui V în V' este stabilă în raport cu operaţia definită de (6) şi $(Hom_K(V, V'), +)$ este grup abelian.

în $((V')^V, +)$

op. indusă

dem:

$+$ asoc., com.

$\theta : V \to V'$ transf. liniară (vezi exemplele) $\leftarrow$ elementul nul.

$f : V \to V'$ —"— $\Longrightarrow$ $-f : V \to V'$, $(-f)(x) = -f(x)$ transf. liniară

b) Mulţimea $Hom_K(V, V')$ este stabilă în raport cu operaţiile definite în (6) şi (7) şi $Hom_K(V, V')$ este K-spaţiu vectorial în raport cu operaţiile induse de acestea.

dem: $Hom_K(V,V') \leq_K (V')^V \Longleftarrow$ obs. a) și T.6., 2)

$V = V' \Longrightarrow Hom_K(V,V) = End_K(V)$

c) Grupul abelian $(End_K(V), +)$ este un K-spaţiu vectorial în raport cu operaţia externă definită de (7). Mai mult, compunerea $\circ$ a endomorfismelor K-spatiului vectorial V este distributivă faţă de $+$, prin urmare avem şi o structură de inel cu unitate pe $End_K(V)$, şi anume $(End_K(V), +, \circ)$.

El. unitate este $1_V : V \to V$, $1_V(x) = x$ (autom. $_K V$).

d) $End_K(V)$ este o K-algebră cu unitate.

$\forall f, g \in End_K(V)$, $\forall \alpha \in K$

$\alpha(f \circ g) = (\alpha f) \circ g = f \circ (\alpha g)$ (temă) de K-sp. vectoriale

Teorema 8. Dacă $f : V \to V'$ este o transformare liniară, atunci:
1) $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in V\}$ (adică **imaginea** lui f) este un subspaţiu al lui V'.
2) $\operatorname{Ker} f = \{x \in V \mid f(x) = \underline{\underline{0}}\}$ este un subspaţiu al lui V numit **nucleul** lui f.
3) Transformarea liniară f este injectivă dacă şi numai dacă $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. $\longleftarrow$ caract. inj. unei transf. liniare cu ajutorul nucleului

Dem: 1) $\operatorname{Im} f = f(V) \leq_K V'$ (temă: cu t. de caract. a subsp.)

$$f(V) = f(\langle V\rangle) = \langle f(V)\rangle \leq_K V'$$

2) $\operatorname{Ker} f = \{x \in V \mid f(x) = 0\} \overset{?}{\leq_K} V$ $\left(= f^{-1}(\{0\}) \right)$ — 0 din V'

$f(\underline{0}) = 0 \Longrightarrow 0 \in \operatorname{Ker} f$

Fie $\alpha, \beta \in K$, $x, y \in \operatorname{Ker} f$, $\underline{\alpha x + \beta y} \overset{?}{\in} \operatorname{Ker} f$

$$f(\alpha x + \beta y) \overset{(3)}{=} \alpha f(\underset{\operatorname{Ker} f}{x}) + \beta f(\underset{\operatorname{Ker} f}{y}) = \underbrace{\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0}_{\text{în } V'} = 0$$

3) f inj. $\overset{?}{\Longleftrightarrow} \operatorname{Ker} f = \{0\}$

Obs: $0 \in \operatorname{Ker} f$.

"$\Longrightarrow$" $x \in \operatorname{Ker} f \Longrightarrow f(x) = 0 = f(0) \overset{f \text{ inj}}{\Longrightarrow} x = 0$

Deci $\operatorname{Ker} f \subseteq \{0\} \Longrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$

"$\Longleftarrow$" Fie $x, y \in V$, $f(x) = f(y) \Longrightarrow x \overset{?}{=} y$

$f(x) = f(y) \Longleftrightarrow f(x) - f(y) = \underset{\text{în } V'}{0} \Longleftrightarrow f(x-y) = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x - y \in \operatorname{Ker} f = \{0\} \Longrightarrow x - y = 0 \Longrightarrow x = y$