Aplicaţii la teorema lui Peano

Radu Trîmbiţaş

7 aprilie 2021

Teorema lui Peano ne permite să determinăm restul unui procedeu de aproximare care este exact pentru polinoame de grad d. (Bineînţeles, acest grad se determină din problemă). De exemplu, la formulele de tip Newton-Cotes gradul de exactitate d este egal cu gradul polinomului de interpolare, dacă gradul este impar sau gradul $+1$, dacă gradul este par. Ideea este că dacă aproximarea este o funcţională liniară şi restul va fi o funcţională liniară.

$$L(f) = \sum A_k L_k(f) + R(f) \Longrightarrow R(f) = L(f) - \sum A_k L_k(f)$$

Dacă gradul de exactitate al procedului este d, atunci $R(f) = 0$, pentru orice $f \in \mathbb{P}_d$, deci $Ker(R) = \mathbb{P}_d$. Dacă $f \in C^{d+1}[a, b]$, f se poate dezvolta cu formula lui Taylor cu restul în formă integrală

$$f(t) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(d)}(a)}{d!}(x-a)^d + \int_a^x \frac{(x-t)^d}{d!} f^{(d+1)}(t).$$

Aplicăm restul ambilor membri şi folosind liniaritatea lui R

$$\begin{aligned} R(f) = R\left(f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(d)}(a)}{d!}(x-a)^d \right) + \\ R\left(\int_a^x \frac{(x-t)^d}{d!} f^{(d+1)}(t) \right) \end{aligned}$$

Primul termen este 0 datorită exactităţii. Integrala se poate extind de la a la b, înlocuind $(x-t)^d$ cu $(x-t)_+^d$.

$$R(f) = R\left(\int_a^b \frac{(x-t)_+^d}{d!} f^{(d+1)}(t) \right) = \int_a^b R_{(x)} \left[\frac{(x-t)_+^d}{d!} \right] f^{(d+1)}(t)$$

Indicele (x) ne indică faptul că R se aplică argumentului privit ca funcţie de x. R şi integrala se pot interschimba dacă R este continuă. Pentru foarte multe resturi uzuale interschimbarea, şi mai mult, continuitatea, sunt valide. Menţionăm că pentru o funcţională liniară este suficient să se verifice continuitatea într-un singur punct (cel mai simplu este în origine, adică pentru funcţia nulă). Cantitatea

$$K_d(t) = R_{(x)} \left[\frac{(x-t)_+^d}{d!} \right]$$

se numeşte *nucleul lui Peano* al lui R. Deci

$$R(f) = \int_a^b K_d(t) f^{(d+1)}(t)\, \mathrm{d}t.$$

Din definiţia nucleului rezultă imediat că nucleul este nul înafara lui $[a, b]$. Dacă nucleul păstrează semn constant pe $[a, b]$ (spunem că el este *definit de ordinul* d) expresia sa se simplifică. Aplicăm teorema a doua de medie şi liniaritatea

$$R(f) = f^{(d+1)}(\xi) \int_a^b K_d(t).$$

Dar,

$$R(e_{d+1}) = \int_a^b K_d(t) \left(t^{d+1}\right)^{(d+1)} \mathrm{d}t = (d+1)! \int_a^b K_d(t)\, \mathrm{d}t.$$

Rezultă

$$R(f) = \frac{f^{(d+1)}(\xi)}{(d+1)!} R(e_{d+1}).$$

Problema 1 *Considerăm formula de cuadratură de tipul*

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx = af(0) + bf(c) + R(f)$$

(a) Determinaţi a, b, c astfel încât formula să aibă gradul de exactitate $d = 2$. Puteţi identifica formula astfel obţinută? (Indicaţie: $\Gamma(n+1) = n!$).

(b) Fie $p_2(x) = (H_2 f)(x, 0, 2, 2)$ polinomul de interpolare Hermite corespunzător funcţiei f şi nodurilor $x = 0$, simplu şi $x = 2$, dublu. Calculaţi $\int_0^\infty e^{-x} p_2(x) dx$ şi comparaţi cu rezultatul de la punctul (a).

(c) Obţineţi restul $R(f)$ sub forma

$$R(f) = const \cdot f'''(\xi), \quad \xi > 0.$$

Soluţie. Din condiţia de grad de exactitate avem

$$f(x) = 1 \Longrightarrow a + b = \int_0^\infty e^{-x} dx = \Gamma(1) = 0! = 1$$
$$f(x) = x \Longrightarrow bc = \int_0^\infty x e^{-x} dx = \Gamma(2) = 1$$
$$f(x) = x^2 \Longrightarrow bc^2 = \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = \Gamma(3) = 2$$

Sistemul

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ bc &= 1 \\ bc^2 &= 2 \end{aligned}$$

are soluţiile $\left[a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}, c=2\right]$. Am obţinut formula

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(2) + R(f).$$

Gradul de exactitate cel puţin2; verificăm să nu fie 3

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = \Gamma(4) = 3!$$
$$\frac{1}{2}0^3 + \frac{1}{2}2^3 \neq 6$$

Deci gradul efectiv este 2. Calculăm restul cu teorema lui Peano

$$R(f) = \int_0^\infty e^{-x} f(x)dx - \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{2}f(2).$$

Nucleul lui Peano este $R\left[\frac{(x-t)_+^2}{2!}\right]$

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{2!}\left[\int_0^\infty e^{-t}(x-t)_+^2 \, \mathrm{d}t - \frac{1}{2}(0-t)_+^2 - \frac{1}{2}(2-t)_+^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{cc} -\frac{1}{2}(2-t)_+^2 - \frac{t^2}{2} & \text{pentru } t \geq 2 \\ -\frac{1}{2}(2-t)_+^2 & t \leq 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Cu corolarul la teorema lui Peano

$$R(f) = \frac{f'''(\xi)}{3!} R(e_3)$$

$$R(e_3) = \int_0^\infty e^{-x} x^3 dx - \frac{1}{2}\cdot 0^3 - \frac{1}{2}2^3 = \Gamma(4) - 4 = 2.$$

Deci

$$R(f) = \frac{f'''(\xi)}{3}.$$

Polinomul de interpolare Hermite

$$\begin{array}{llcc} 0 & f(0) & \frac{f(2)-f(0)}{2} & \frac{f'(2)}{2} - \frac{f(2)}{4} + \frac{f(0)}{4} \\ 2 & f(2) & f'(0) & \\ 2 & f(2) & & \end{array}$$

Polinomul de interpolare este

$$(H_2 f)(t) = f(0) + \frac{f(2)-f(0)}{2}t + t(t-2)\left(\frac{f'(2)}{2} - \frac{f(2)}{4} + \frac{f(0)}{4}\right)$$

$$\int_0^\infty \exp(-t)\cdot\left(f(0) + \frac{f(2)-f(0)}{2}t + t(t-2)\left(\frac{f'(2)}{2} - \frac{f(2)}{4} + \frac{f(0)}{4}\right)\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(2)$$

■

Problema 2 *(a) Se consideră o formulă de cuadratură de tipul*

$$\int_0^1 f(x)dx = \alpha f(x_1) + \beta[f(1) - f(0)] + R(f). \tag{1}$$

Să se determine α, β, x_1 astfel încât gradul de exactitate să fie cât mai mare posibil. Care este gradul de exactitate maxim care se poate atinge?

(b) Utilizaţi interpolarea şi teorema lui Peano pentru a obţine o margine a lui $|R(f)|$ în funcţie de $\|f^{(r)}\|_\infty = \max\limits_{0\leq x\leq 1} |f^{(r)}(x)|$, pentru un r adecvat.

(c) Adaptaţi (1), inclusiv delimitarea pentru $|R(f)|$, pentru a obţine o integrală de forma $\int_c^{c+h} f(t)dt$, unde c este o constantă şi $h > 0$.

(d) Aplicaţi rezultatul de la (c) pentru a obţine o formulă de cuadratură repetată pentru $\int_a^b f(t)dt$, subdivizând $[a, b]$ în n subintervale de lungime totală $h = \frac{b-a}{n}$. Găsiţi o margine a erorii totale.

Problema 3 *(a) Construiţi prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi o formulă de cuadratură de tipul*

$$\int_0^1 f(x)dx = -\alpha f'(0) + \beta f\left(\frac{1}{2}\right) + \alpha f'(1) + R(f)$$

care are grad maxim de exactitate.

(b) Care este gradul exact de exactitate al formulei de la punctul (a)?

(c) Utilizaţi nucleul lui Peano al funcţionalei de eroare Q pentru a exprima $R(f)$ în funcţie de o derivată adecvată, folosind rezultatul de la (b).

(d) Transformaţi formula de la punctul (a) într-una potrivită pentru a evalua $\int_c^{c+h} g(t)dt$ şi apoi obţineţi formula repetată corespunzătoare pentru $\int_a^b g(t)dt$, utilizând n subintervale de lungime egală şi deduceţi restul. Interpretaţi rezultatul.

Problema 4 *Să se construiască o formulă de derivare numerică de forma*

$$f'(\alpha) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + (Rf)(\alpha)$$

cu gradul de exactitate $r = 2$.

Soluţie. Coeficienţii se determină din condiţia ca gradul de exactitate să fie $r = 2$. Formula trebuie să fie exactă pentru $f = e_k$, $k = 0, 1, 2$.

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 &= 0 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 &= 1 \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 &= 2\alpha \end{aligned}$$

Rezolvând sistemul se obţine

$$A_0 = -\frac{1}{2(\alpha - x_0)},\ A_1 = \frac{1}{2(\alpha - x_0)},\ x_1 = 2\alpha - x_0, \text{ dacă } x_0 \neq \alpha.$$

Restul se determină cu teorema lui Peano. Pentru $x_0 < x_1$

$$(Rf)(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} K_2(s) f'''(s)\,\mathrm{d}s,$$

unde

$$\begin{aligned}
K_2(s) &= \frac{1}{2!}\left[\frac{d}{d\alpha}(\alpha - s)_+^2 - A_0 (x_0 - s)_+^2 - A_1 (x_1 - s)_+^2\right] \\
&= (\alpha - s)_+ - \frac{1}{4(\alpha - x_0)}(2\alpha - x_0 - s)^2 \\
&= -\frac{1}{4(\alpha - x_0)}\begin{cases} (s - x_0)^2, & \alpha \geq s \\ (2\alpha - x_0 - s)^2, & \alpha < s \end{cases}
\end{aligned}$$

Nucleul este tot timpul negativ, deci conform corolarului la teorema lui Peano

$$\begin{aligned}
(Rf)(\alpha) &= \frac{f'''(\xi)}{3!}\int_{x_0}^{x_1} K_2(s)\,\mathrm{d}s = \frac{f'''(\xi)}{3!}\left[3\alpha^2 - A_0 x_0^3 - A_1 x_1^3\right] \\
&= \frac{f'''(\xi)}{3!}\left[3\alpha^2 + \frac{1}{2(\alpha - x_0)}x_0^3 - \frac{1}{2(\alpha - x_0)}(2\alpha - x_0)^3\right] \\
&= \frac{-(\alpha - x_0)^2}{6} f'''(\xi).
\end{aligned}$$

Am obţinut formula

$$f'(\alpha) = -\frac{1}{2(\alpha - x_0)}\left[f(x_0) - f(2\alpha - x_0)\right] - \frac{(\alpha - x_0)^2}{6} f'''(\xi).$$

De fapt, am obţinut o familie de formule de derivare numerică

$$f'(\alpha) = -\frac{1}{2(\alpha - \lambda)}\left[f(\lambda) - f(2\alpha - \lambda)\right] - \frac{(\alpha - \lambda)^2}{6} f'''(\xi), \quad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq \alpha.$$

■