Proiecţiile acestui vector $\bar{v}$ şi deci parametrii directori ai dreptei D vor fi coeficienţii lui $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, adică determinanţii scoşi din matricea

$$\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{Vmatrix}.$$

Rezultă

$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \quad m = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \quad n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

§ 4. Unghiul a două drepte în spaţiu

Definiţia 4.1. Unghiul a două drepte în spaţiu. Fie dreptele D_1 şi D_2 de vectori directori, respectiv, $\bar{v}_1\ (l_1, m_1, n_1)$ şi $\bar{v}_2\ (l_2, m_2, n_2)$.

Prin definiţie, *unghiul dreptelor* D_1 şi D_2 este egal cu unghiul vectorilor $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$.

Teorema 4.1. *Fiind date două drepte D_1 şi D_2 prin ecuaţiile lor*

$$(D_1)\ \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

$$(D_2)\ \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{m_2}.$$

Unghiul (φ) *al acestor două drepte este dat de formula*

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\varepsilon\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}},$$

$$(\varepsilon = \pm 1).$$

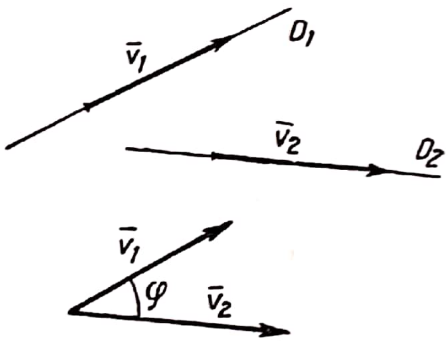

Fig. V. 14

Demonstraţie: Considerăm dreapta D_1 de vector director $\bar{v}_1\ (l_1, m_1, n_1)$ şi dreapta D_2 de vector director $\bar{v}_2(l_2, m_2, n_2)$ (fig. V. 14).

Notînd cu φ unghiul dintre cei doi vectori $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ (deci unghiul dintre cele două drepte), avem

$$\left| \cos\varphi = \cos(\widehat{\bar{v}_1, \bar{v}_2}) = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\varepsilon\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2}} \right|. \qquad (35)$$

Observaţii. Cele două valori ale lui ε corespund celor două unghiuri suplimentare formate de cele două drepte date D_1 şi D_2.

Teorema 4.2. *Condiţiile necesare şi suficiente ca două drepte date prin ecuaţiile*

$$(D_1)\ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$
$$(D_2)\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2} \qquad (36)$$

să fie paralele sînt

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

Demonstraţie: Dacă dreptele sînt paralele, vectorii directori ai lor, respectiv $\bar{v}_1(l_1, m_1, n_1)$ şi $\bar{v}_2(l_2, m_2, n_2)$, sînt coliniari, deci parametrii lor directori sînt proporţionali.

Rezultă

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

Reciproc, dacă $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$, vectorii $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ sînt coliniari, deci dreptele D_1 şi D_2 sînt paralele.

Teorema 4.3. *Două drepte, date prin ecuaţiile* (36), *sînt perpendiculare dacă şi numai dacă*

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

Demonstraţie: Dacă dreptele D_1 şi D_2 sînt perpendiculare, vectorii lor directori sînt perpendiculari, deci $\varphi=\frac{\pi}{2}$ şi deci $\cos\varphi=\cos\frac{\pi}{2}=0.$

Rezultă, din formula (35) că

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

Reciproc. Dacă

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

din formula (35) rezultă

$$\cos\varphi=0,$$

deci

$$\varphi=\frac{\pi}{2}$$

adică

$$D_1 \perp D_2$$

Teorema 5.6. (Intersecţia unei drepte cu un plan). *Fiind dată dreapta*

$$(D)\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{46}$$

şi planul

$$(P)\ Ax+By+Cz+D=0, \tag{47}$$

coordonatele punctului de intersecţie dintre dreaptă şi plan sînt date de soluţia sistemului format de ecuaţiile (46) *ale dreptei şi ecuaţia* (47) *a planului.*

Demonstraţie: Fie ecuaţiile dreptei

$$(D)\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{46}$$

şi ecuaţia planului

$$(P)\ Ax+By+Cz+D=0. \tag{47}$$

Egalînd rapoartele din ecuaţiile (46) cu λ, avem

$$(D)\begin{cases} x=x_0+\lambda l\\ y=y_0+\lambda m\\ z=z_0+\lambda n.\end{cases} \tag{48}$$

Sistemul format din ecuaţiile (46) şi (47) este echivalent cu sistemul format din ecuaţiile (48) şi (47), adică

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda l\\ y=y_0+\lambda m\\ z=z_0+\lambda n\\ Ax+By+Cz+D=0.\end{cases}$$

Eliminînd pe x, y, z din acest sistem, obţinem ecuaţia rezolvantă în λ

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D+\lambda(Al+Bm+Cn)=0. \tag{49}$$

Discuţie. Din ecuaţia (49) rezultă

$$\lambda=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}.$$

Discutînd ecuaţia (49), reies următoarele cazuri:

— Dacă $Al+Bm+Cn\neq 0$, avem pentru coordonatele punctului de intersecţie o soluţie unică

$$x=x_0-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}\cdot l$$

$$y=y_0-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}\cdot m$$

$$z=z_0-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}\cdot n.$$

În acest caz, dreapta şi planul au numai un singur punct comun, *deci dreapta intersectează planul într-un punct.*

— Dacă $Al + Bm + Cn = 0$ şi $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, atunci ecuaţia (49) nu are soluţii finite, deci dreapta nu are puncte comune cu planul la distanţă finită; *dreapta este paralelă cu planul.*

În adevăr, condiţia $Al + Bm + Cn = 0$ arată că dreapta D este perpendiculară pe normala la plan, iar $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ arată că punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de pe dreaptă nu este situat în planul P, deci dreapta este paralelă cu planul.

— Dacă $Al + Bm + Cn = 0$ şi $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, ecuaţia (49) admite o infinitate de soluţii; rezultă că toate punctele dreptei considerate sînt situate în planul dat; *dreapta este situată în plan.*

În adevăr, condiţia $Al + Bm + Cn = 0$ arată că dreapta D este perpendiculară pe normala la plan şi $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ arată că punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de pe dreaptă este conţinut în plan, deci dreapta D este conţinută în planul P.

Observaţie. Din discuţia făcută reies *poziţiile relative ale unei drepte D faţă de un plan P:*

1° *Dreapta intersectează planul într-un punct.* Condiţia este

$$Al + Bm + Cn \neq 0.$$

2° *Dreapta este paralelă cu planul.* Condiţiile sînt

$$Al + Bm + Cn = 0$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0.$$

3° *Dreapta este conţinută în plan.* Condiţiile sînt

$$Al + Bm + Cn = 0$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Teorema 5.7. *Ecuaţiile proiecţiei unei drepte*

$$(D)\ \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

pe un plan

$$(P)\ Ax + By + Cz + D = 0$$

sînt

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{array}\right.$$

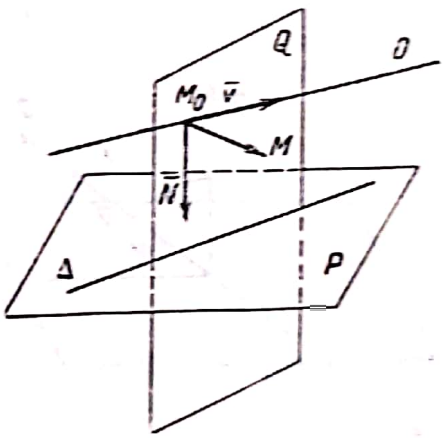

Fig. V. 15

Demonstraţie: Fie dreapta (fig. V.15)

$$(D)\ \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

şi planul

$$(P)\ Ax + By + Cz + D = 0.$$

Pentru a găsi proiecţia dreptei D pe planul P, ducem prin dreapta D un plan Q proiectant (perpendicular) pe planul P.

$\bar{v}(l, m, n)$ fiind vectorul director al dreptei D şi $\bar{N}(A, B, C)$ fiind vectorul normal la planul P, planul Q este determinat de aceşti doi vectori duşi din punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de pe dreaptă.

Considerînd un punct curent $M(x, y, z)$ în planul Q, vectorii $\overline{M_0M}$, $\bar{v}$ şi $\bar{N}$ sînt coplanari, produsul lor mixt este nul, deci

$$\overline{M_0M}(\bar{v} \times \bar{N}) = 0.$$

Trecînd la expresia analitică a acestui produs mixt, obţinem ecuaţia planului proiectant Q

$$(Q) \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultă că ecuaţiile proiecţiei dreptei D pe planul P sînt

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Definiţia 5.2. (Unghiul unei drepte cu un plan). *Se numeşte unghiul unei drepte cu un plan* cel mai mic dintre unghiurile formate de această dreaptă cu proiecţia ei pe plan.

Teorema 5.8. Determinarea unghiului unei drepte cu un plan. *Dreapta D fiind definită de ecuaţiile*

$$(D)\ \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

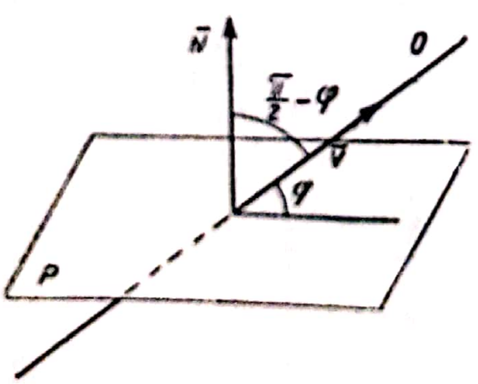

Fig. V. 16

iar planul P fiind definit de ecuaţia

$$(P)\quad Ax + By + Cz + D = 0,$$

unghiul φ dintre dreapta D şi planul P rezultă din

$$\sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Demonstraţie: Fie dreapta D (fig. V.16)

$$(D)\ \frac{x_0 - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

şi planul P

$$(P)\quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Cosinusul unghiului $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ dintre vectorul $\overline{N}(A, B, C)$ perpendicular pe planul considerat și vectorul director $\bar{v}(l, m, n)$ al dreptei este dat de

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

de unde rezultă

$$\sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Teorema 5.9. *Condiția necesară și suficientă ca dreapta*

$$(D)\ \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

să fie perpendiculară pe planul

$$(P)\quad Ax + By + Cz + D = 0$$

este

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Demonstrație: Vectorul director $\bar{v}(l, m, n)$ al dreptei fiind coliniar cu vectorul $\overline{N}(A, B, C)$ normal planului, rezultă

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Reciproc, dacă aceste relații sînt îndeplinite, vectorii $\bar{v}(l, m, n)$ și $\overline{N}(A, B, C)$ sînt coliniari, deci dreapta D este perpendiculară pe planul P.

Teorema 5.10. *Dreapta*

$$(D)\ \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

este paralelă cu planul

$$(P)\quad Ax + By + Cz + D = 0$$

dacă și numai dacă este îndeplinită condiția

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Demonstrație: Fie dreapta D și planul P definite prin ecuațiile de mai sus.

Dacă dreapta D este paralelă cu planul P, unghiul φ dintre dreaptă și plan este nul, adică $\varphi = 0$.

Cum unghiul dintre dreaptă şi plan este dat de formula

$$\sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

şi cum în acest caz $\sin \varphi = 0$, rezultă condiţia de paralelism dintre dreaptă şi plan

$$Al + Bm + Cn = 0$$

Reciproc. Dacă $Al + Bm + Cn = 0$, rezultă că $\sin \varphi = 0$, $\varphi = 0$; unghiul φ dintre dreaptă şi plan fiind nul, dreapta este paralelă cu planul.

Teorema 5.11. *Ecuaţia planului determinat de două drepte concurente D_1 şi D_2, date prin ecuaţiile*

$$(D_1)\ \frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{m_1} = \frac{z - z_0}{n_1}$$

şi

$$(D_2)\ \frac{x - x_0}{l_2} = \frac{y - y_0}{m_2} = \frac{z - z_0}{n_2}$$

este

$$(P)\ \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstraţie: Fie dreptele D_1 şi D_2, date prin ecuaţiile

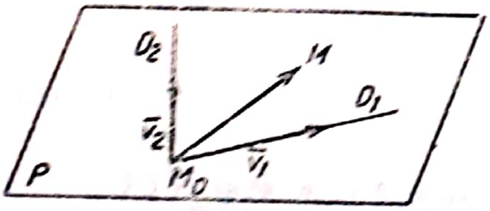

Fig. V. 17

$$(D_1)\ \frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{m_1} = \frac{z - z_0}{n_1}$$

$$(D_2)\ \frac{x - x_0}{l_2} = \frac{y - y_0}{m_2} = \frac{z - z_0}{n_2},$$

concurente în punctul M_0 (x_0, y_0, z_0) (fig. V.17).

Ducem din punctul de concurenţă M_0 vectorii coliniari cu vectorii directori ai celor două drepte, respectiv $\bar{v}_1 (l_1, m_1, n_1)$ şi $\bar{v}_2 (l_2, m_2, n_2)$. Aceşti vectori, fiind situaţi, respectiv, pe dreptele D_1 şi D_2, sînt conţinuţi în planul P, determinat de cele două drepte concurente D_1 şi D_2. Luînd un punct curent $M (x, y, z)$ în acest plan, rezultă că vectorii $\overline{M_0M}$, $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ sînt coplanari, deci

$$\overline{M_0M}\ (\bar{v}_1 \times \bar{v}_2) = 0.$$

Scriind expresia analitică a acestui produs mixt egalată cu zero, obţinem ecuaţia planului P determinat de cele două drepte concurente D_1 şi D_2

$$(P)\ \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Teorema 5.12. *Ecuaţia planului determinat de o dreaptă D*

$$(D)\ \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

şi un punct

$$M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$$

nesituat pe dreaptă este

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

Demonstraţie: Fie dreapta $(D)\ \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ şi punctul $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ (fig. V.18). Pentru a stabili ecuaţia planului P determinat de această dreaptă şi punctul M_2, ducem din punctul M_1 vectorul director $\bar{v}(l,\ m,\ n)$ al dreptei D şi vectorul $\overline{M_1M_2}$ care uneşte punctul M_1 cu M_2.

De asemenea, considerăm în planul P un punct curent $M(x,\ y,\ z)$.

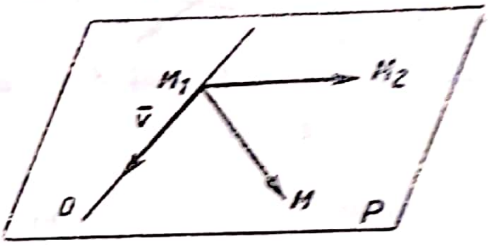

Fig. V. 18

Vectorii $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ şi $\bar{v}$ fiind coplanari produsul mixt al lor este nul

$$\overline{M_1M}\ (\overline{M_1M_2}\times\bar{v})=0.$$

Expresia analitică a acestui produs mixt egalată cu zero reprezintă ecuaţia planului determinat de dreapta D şi punctul $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$

$$(P)\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

Teorema 5.13. *Ecuaţia planului determinat de două drepte paralele D_1 şi D_2, date prin ecuaţiile*

$$(D_1)\ \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

$$(D_2)\ \frac{x-x_2}{l}=\frac{y-y_2}{m}=\frac{z-z_2}{n}$$

este

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

Demonstraţie: Fie dreptele paralele

$$(D_1)\ \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

$$(D_2)\ \frac{x-x_2}{l}=\frac{y-y_2}{m}=\frac{z-z_2}{n}.$$

Pentru a găsi ecuaţia planului P determinat de aceste drepte, luăm un punct curent $M(x, y, z)$ în planul P şi considerăm vectorii: $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ şi $\bar{v}(l, m, n)$, $\bar{v}$ fiind vectorul director al dreptelor D_1 şi D_2 (fig. V.19).

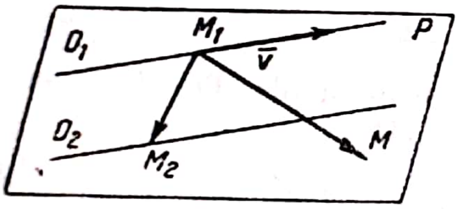

Fig. V. 19

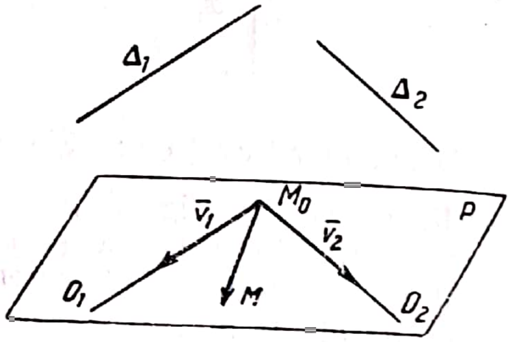

Fig. V. 20

Aceşti trei vectori, fiind coplanari, produsul lor mixt este nul, adică

$$\overline{M_1M}\,(\overline{M_1M_2}\times\bar{v})=0.$$

Scriind expresia analitică a acestui produs mixt egalată cu zero, obţinem ecuaţia planului P determinat de cele două drepte paralele

$$(P)\ \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

Teorema 5.14. *Ecuaţia planului determinat de un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi paralel cu două direcţii date prin parametrii directori (l_1, m_1, n_1), respectiv (l_2, m_2, n_2), este*

$$(P)\ \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

Demonstraţie: Fie punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ prin care trebuie să ducem un plan paralel cu direcţiile Δ_1 de parametri directori (l_1, m_1, n_1) şi Δ_2 de parametri directori (l_2, m_2, n_2) (fig. V.20).

Pentru aceasta, prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ducem o dreaptă D_1 paralelă cu direcţia Δ_1, avînd vectorul director $\bar{v}_1(l_1, m_1, n_1)$, şi o dreaptă D_2 paralelă cu direcţia Δ_2, avînd vectorul director $\bar{v}_2(l_2, m_2, n_2)$.

Considerînd un punct curent $M(x, y, z)$ în planul determinat de punctul M_0 și dreptele D_1 și D_2, vectorii $\overline{M_0M}$, $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ sînt coplanari, deci produsul lor mixt este nul.

Scriind expresia analitică a produsului mixt

$$\overline{M_0M}\,(\bar{v}_1 \times \bar{v}_2) = 0$$

obținem ecuația carteziană a planului P determinat de punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și paralel cu direcțiile Δ_1 și Δ_2

$$(P)\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 6. Pozițiile relative a două drepte în spațiu

T e o r e m a 6.1. (Pozițiile relative a două drepte în spațiu). *Fie dreptele D_1 și D_2, date prin ecuațiile*

$$(D_1)\ \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

$$(D_2)\ \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

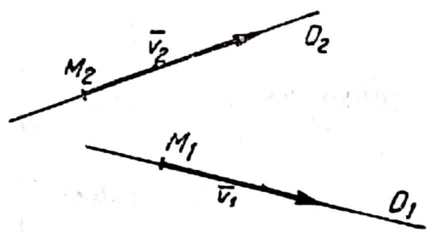

Fig. V. 21

Notînd

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}$$

pozițiile relative a două drepte în spațiu sînt:

1° Dacă $\Delta \neq 0$, dreptele D_1 și D_2 nu sînt situate în același plan.

2° Dacă $\Delta = 0$, dreptele D_1 și D_2 sînt conținute în același plan, și anume:

— Dacă vectorii directori $\bar{v}_1(l_1, m_1, n_1)$ și $\bar{v}_2(l_2, m_2, n_2)$ nu sînt coliniari, atunci dreptele sînt concurente.

— Dacă vectorii directori $\bar{v}_1(l_1, m_1, n_1)$ și $\bar{v}_2(l_2, m_2, n_2)$ sînt coliniari, însă vectorul $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ nu este coliniar cu vectorii $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$, atunci dreptele sînt paralele.

— Dacă vectorii $\bar{v}_1(l_1, m_1, n_1)$, $\bar{v}_2(l_2, m_2, n_2)$ și $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ sînt coliniari, dreptele coincid.

D e m o n s t r a ț i e: 1° Dreptele D_1 și D_2, avînd ecuațiile date mai sus, considerăm vectorul $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ și vectorii directori ai dreptelor date: $\bar{v}_1(l_1, m_1, n_1)$, $\bar{v}_2(l_2, m_2, n_2)$ (fig. V. 21). Dacă $\Delta \neq 0$, vectorii $\overline{M_1M_2}$, $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ nu sînt coplanari.

Rezultă că dreptele D_1 şi D_2 nu sînt situate în acelaşi plan.

2° Dacă $\Delta = 0$, vectorii $\overline{M_1M_2}$, $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ sînt coplanari, deci dreptele D_1 şi D_2 sînt situate în acelaşi plan.

— Δ fiind nul, dacă vectorii directori $\bar{v}_1(l_1, m_1, n_1)$ şi $\bar{v}_2(l_2, m_2, n_2)$ nu sînt coliniari, rezultă că dreptele D_1 şi D_2, fiind conţinute în acelaşi plan, sînt concurente (fig. V. 22).

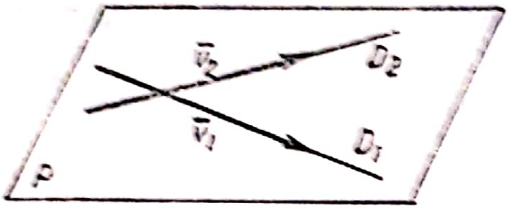

Fig. V. 22

Fig. V. 23

— Dacă vectorii directori $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ sînt coliniari, însă vectorul $\overline{M_1M_2}$ cu originea într-un punct M_1 al primei drepte şi extremitatea într-un punct M_2 al dreptei a doua, nu este coliniar cu vectorii $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ rezultă că dreptele D_1 şi D_2 sînt paralele (fig. V. 23).

Fig. V. 24

— Dacă vectorii $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\overline{M_1M_2}$ sînt coliniari, dreptele coincid (fig. V. 24).

Observaţie. Condiţiile de concurenţă a două drepte din spaţiu, date prin ecuaţiile

$$(D_1)\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_1'x + B_1'y + C_1'z + D_1' = 0 \end{cases}$$

$$(D_2)\begin{cases} A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_2'x + B_2'y + C_2'z + D_2' = 0. \end{cases}$$

sînt

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1' & B_1' & C_1' \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{şi} \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_1' & B_1' & C_1' & D_1' \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_2' & B_2' & C_2' & D_2' \end{vmatrix} = 0.$$

Aceste condiţii sînt aceleaşi cu condiţiile de concurenţă a patru plane determinate la teorema 5.3.

Definiţia 6.1. Perpendiculara comună a două drepte în spaţiu. Se numeşte *perpendiculara comună a două drepte date* orice dreaptă care este simultan perpendiculară pe ambele drepte.

Observaţie. Din definiţie rezultă că există o infinitate de drepte perpendiculare pe două drepte date, toate paralele între ele.

Printre acestea există una singură care se sprijină pe ambele drepte date.

În cadrul acestui curs, vom considera ca perpendiculară comună perpendiculara care se sprijină pe ambele drepte.

Teorema 6.2. *Ecuaţiile perpendicularei comune a două drepte date D_1 şi D_2, definite prin ecuaţiile*

$$(D_1)\ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

$$(D_2)\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

sînt date de ecuaţiile $\begin{cases} P_1 = 0 \\ P_2 = 2 \end{cases}$, P_1 şi P_2 avînd ecuaţiile:

$$(P_1)\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0$$

$$(P_2)\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstraţie: Fie D_1 şi D_2 două drepte date prin ecuaţiile

$$(D_1)\ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

$$(D_2)\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Notăm cu D dreapta care intersectează ambele drepte D_1 şi D_2 sub un unghi drept (fig. V. 25)

Această dreaptă, D, fiind perpendiculară pe ambele drepte D_1 şi D_2, are drept vector director produsul vectorial $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2$ al vectorilor directori ai dreptelor date

$$\bar{v}_1(l_1, m_1, n_1) \text{ şi } \bar{v}_2(l_2, m_2, n_2).$$

Notînd cu

$$\bar{v} = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2,$$

urmează că vectorul director al perpendicularei D este

$$\bar{v}\left(\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}\right).$$

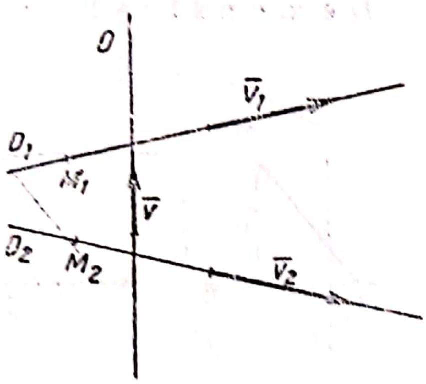

Fig. V. 25

Dreapta D, perpendiculara comună pe cele două drepte date, este definită ca dreapta de intersecţie a planului P_1 care trece prin dreptele D_1 şi D, cu planul P_2, care trece prin dreptele D_2 şi D.

Deoarece planul P_1 trece prin punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ al dreptei D_1 şi conţine vectorii $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}$, ecuaţia lui este

$$(P_1)\quad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0.$$

În mod analog se obţine ecuaţia planului P_2, care trece prin punctul $M_2(x_2, y_2, z_2)$ al dreptei D_2 şi conţine vectorii $\bar{v}_2$ şi $\bar{v}$

$$(P_2)\quad \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0.$$

Perpendiculara comună D pe dreptele date are ecuaţiile

$$\begin{cases} P_1 = 0 \\ P_2 = 0. \end{cases}$$

Teorema 6.3. (Distanţa de la un punct la o dreaptă). *Fie dreapta*

$$(D)\ \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}.$$

Distanţa d de la punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ la dreapta D este dată de formula

$$d = \frac{|\overline{M_0M_1} \times \bar{v}|}{|\bar{v}|}.$$

Demonstraţie: Fie dreapta $(D)\ \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ şi punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

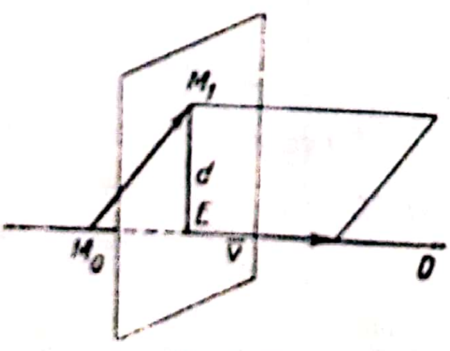

Fig. V. 26

Pentru a găsi relaţia care dă distanţa punctului M_1 la dreapta D procedăm astfel:

Ştim că dreapta D trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi are vectorul director $\bar{v}(l, m, n)$ (fig. V. 26).

Ducem din $M_0(x_0, y_0, z_0)$ vectorul coliniar cu $\bar{v}$.

Considerăm şi vectorul:

$$\overline{M_0M_1}\,(x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0).$$

Distanța dintre punctul M_1 și dreapta D este înălțimea paralelolgramului construit pe vectorii $\overline{M_0M_1}$ și $\bar{v}$.

Notînd cu d distanța căutată, avem

$$d = \frac{|\overline{M_0M_1} \times \bar{v}|}{|\bar{v}|},$$

dar

$$\overline{M_0M_1} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}.$$

Rezultă

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ n & l \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Distanța este totdeauna pozitivă, deci $d > 0$.

Observație. Distanța d de la punctul M_1 la dreapta dată D se mai poate găsi și astfel: Se duce prin punctul M_1 un plan Q perpendicular pe dreapta D (fig. V.27).

Notînd cu E punctul unde dreapta D intersectează planul Q, lungimea segmentului M_1E este distanța căutată.

Definiția 6.2. Distanța între două drepte în spațiu. *Distanța între două drepte* este lungimea perpendicularei comune, cuprinsă între cele două drepte date.

Teorema 6.4. (Distanța între două drepte). *Fiind date două drepte neconcurente*

$$(D_1)\ \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

$$(D_2)\ \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2},$$

distanța d între dreptele considerate este

$$d = \frac{|\overline{M_1M_2}(\bar{v}_1 \times \bar{v}_2)|}{|\bar{v}_1 \times \bar{v}_2|}.$$

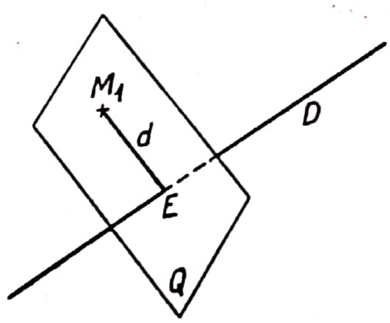

Fig. V. 27

Demonstrație: Considerăm două drepte D_1 și D_2 care nu se întîlnesc

$$(D_1)\ \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

$$(D_2)\ \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

Prin dreapta D_1 ducem un plan P paralel cu dreapta D_2. Distanța de la un punct oarecare al dreptei D_2 la acest plan P este, prin definiție, egală cu distanța căutată dintre dreptele D_1 și D_2. Pentru a duce prin dreapta D_1

un plan paralel cu dreapta D_2, ducem prin punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ al dreptei D_1 doi vectori $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$, coliniari cu vectorii directori $\bar{v}_1(l_1, m_1, n_1)$ şi $\bar{v}_2(l_2, m_2, n_2)$ ai dreptelor date (fig. V. 28). Aceşti vectori determină planul P paralel cu dreapta D_2.

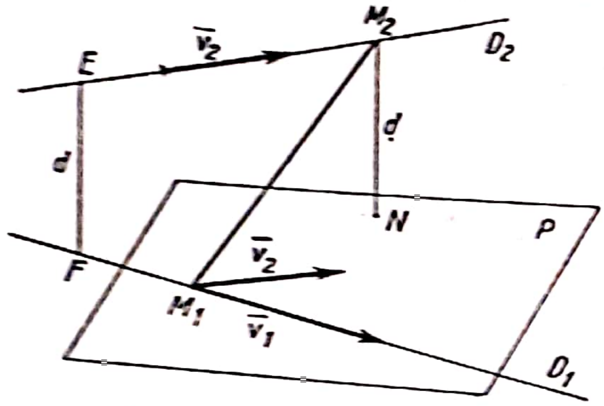

Fig. V. 28

Distanţa căutată d este tocmai înălţimea paralelipipedului construit pe vectorii $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\overline{M_1M_2}$, avînd ca bază paralelogramul construit pe vectorii $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$.

Rezultă

$$d = M_2N = \frac{|\overline{M_1M_2}(\bar{v}_1 \times \bar{v}_2)|}{|\bar{v}_1 \times \bar{v}_2|}$$

sau

$$d = \varepsilon \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2}}; \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Observaţii. 1° Distanţa trebuie să fie totdeauna pozitivă şi deci ε se va lua cu semnul respectiv, astfel ca $d > 0$.

2° Distanţa dintre cele două drepte este egală cu distanţa de la punctul $M_2(x_2, y_2, z_2)$ al dreptei D_2 la planul P

$$(P) \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0,$$

dus prin dreapta D_1 şi paralel cu D_2.

3° Distanţa dintre două drepte paralele (fig. V. 29) este

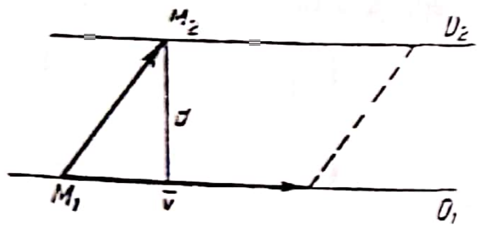

Fig. V. 29

$$d = \frac{|\overline{M_1M_2} \times \bar{v}|}{|\bar{v}|},$$

$\bar{v}(l, m, n)$ fiind vectorul director al celor două drepte paralele.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Să se scrie ecuaţia unui plan:
a) paralel cu planul xOy şi care trece prin punctul $(2, -5, 3)$;
b) care trece prin axa Oz şi prin punctul $(-3, 1, -2)$;
c) paralel cu axa Ox şi care trece prin două puncte $(4, 0, -2)$ şi $(5, 1, 7)$.

2. Planul $3x + y - 2z - 18 = 0$ formează împreună cu planul de coordonate un tetraedru. Să se calculeze muchia cubului care poate să încapă în acest tetraedru, astfel încît trei feţe ale lui să coincidă cu planele de coordonate, iar vîrful opus originii să se afle pe planul dat.