Temă - funcții continue

ex 1: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ Să se verif dacă e continuă:

Fie $a \in \mathbb{R}$ un punct arbitrar ales

f este c în $a \Leftrightarrow \forall (a_n) \subseteq \mathbb{R}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

să avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a) = a^2$

Fie $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ arbitrar ales cu

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ f(a_n) = a_n^2 \end{array}\right\} \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = a^2 = f(a) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f \text{ este continuă în } a. \\ \quad a \text{ arbitrar} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

ex 2: a) Folosind $T(\varepsilon, \delta)$ f cont în 0

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

f este cont în $0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ a.î. $\forall x \in \mathbb{R}$ cu

$|x - 0| < \delta$ să avem $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar ales ? $|f(x) - f(0)|$

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| < \varepsilon$$

$$|f(x)| = \begin{cases} |x|, & x \in \mathbb{Q} \\ |-x|, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \leq |x| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \exists \delta := \varepsilon$ a.î. $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x - 0| < \delta$

să avem [illegible] $|f(x) - f(0)| \leq |x| < \delta = \varepsilon$ $\Big\}$ ε arbitrar

$\Rightarrow f$ este cont în 0.

b) Să se dem că $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ f disc în x

fie $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ arbitrar ales. Arătăm că $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

$\exists (a_n) \subseteq \mathbb{Q}$ $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$

$\exists (b_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\lim_{n \to \infty} b_n = x_0$

$$\left.\begin{array}{l} f(a_n) = a_n \\ f(b_n) = -b_n \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \to \infty} f(b_n)$$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ f nu este continuă în x_0 $\Big\}$ $\Rightarrow$

x_0 arbitrar

$\Rightarrow f$ nu este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

ex 3:

a) $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in(-\infty,0)\\ 7, & x=0\end{cases}$

fie $a\in(-\infty,0)$ arbitrar ales

f este c. în $a \Leftrightarrow \forall (a_n)\subseteq D$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$

să avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=f(a)=\sin a$

Fie $(a_n)\subseteq(-\infty,0]$ cu

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} a_n=a\\ &f(a_n)=\sin a_n\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_n=\sin \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$=\sin a=f(a)\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow \lim f(a_n)=f(a)\\ &(a_n)\text{ arbitrar}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ cont în $(-\infty,0)$

fie $a=0$. f cont. în $0\Leftrightarrow \forall (a_n)\subseteq D$ cu

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ să avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=f(0)=7$

fie $a_n=\frac{1}{n}$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

$f(a_n) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = \sin \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \sin 0 = 0 \neq 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ nu e cont în 0.

b) $f : [-1, 2] \cup \{4\} \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \in [-1, 2] \\ 0, & x = 4 \end{cases}$$

Fie $a \in [-1, 2]$ arbitrar ales

f este c în $a \Leftrightarrow \forall (a_n) \subseteq D$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ să avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$

Fie $(a_n) \subseteq [-1, 2]$ cu

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ f(a_n) = 2a_n + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) =$$

$$= \lim\limits_{n\to\infty} 2a_n + 3$$

$$\left.\begin{array}{l} = 2a + 3 = f(a) \\ (a_n) \text{ arbitrar.} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ cont în $[-1, 2]$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{|x|} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x}{1}$$

$$= 0 = f(0) \Rightarrow f \text{ cont în } 0.$$

f va fi c pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ca o comp de fcții elementare.

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^{-1}}, & x\in(0,\infty) \\ 0, & x = 0 \\ x^2+2x+\sin x, & x\in(-\infty,0) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\nearrow 0} x^2+2x+\sin x = 0 = f(0) \\ \lim\limits_{x\searrow 0} e^{x^{-1}} = 0 = f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ cont în 0.

f va fi c pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ca o comp de fcții elementare.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{|x|} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cos x}{1}$

$= 0 = f(0) \Rightarrow f$ cont în 0.

f va fi c pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ca o comp de fcții elementare.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^{-1}}, & x \in (0, \infty) \\ 0, & x = 0 \\ x^2 + 2x + \sin x, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \nearrow 0} x^2 + 2x + \sin x = 0 = f(0)$

$\lim\limits_{x \searrow 0} e^{x^{-1}} = 0 = f(0)$

$\Rightarrow f$ cont în 0.

f va fi c pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ca o comp de fcții elementare.

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\begin{cases}\sin x & , x\in\mathbb{Q}\\ \cos x & , x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

Fie a un punct arbitrar ales.

~~f este c în a <=> $\forall (a_n)\subseteq D$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = a$~~

~~să avem $\lim f(a_n) = f(a) =$~~

fie $(a_n)\subseteq\mathbb{Q}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

fie $(b_n)\subseteq\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\lim_{n\to\infty} b_n = a$

$f(a_n) = \sin a_n$

$f(b_n) = \cos b_n$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \sin \lim_{n\to\infty} a_n = \sin a\\ \lim_{n\to\infty} f(b_n) = \overset{\cos}{\cancel{\sin}} \lim_{n\to\infty} b_n = \underset{\cos}{\cancel{\sin}}\, a\end{array}\right\} = f(a)$$

=> f cont pe $\mathbb{R}$.

d) $f: [-2,1]\cup\{3\}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\cos(\pi x), & x\in[-2,0]\\ 1+\sin x, & x\in(0,1]\\ 2, & x=3\end{cases}$$

ex 3:

a) $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$ $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in(-\infty,0)\\ 7, & x=0\end{cases}$

fie $a\in(-\infty,0)$ arbitrar ales

f este c. în $a \Leftrightarrow \forall (a_n)\subseteq D$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

să avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a) = \sin a$

Fie $(a_n)\subseteq(-\infty,0]$ cu

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\\ f(a_n)=\sin a_n\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\sin a_n = \sin \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$= \sin a = f(a) \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \lim f(a_n) = f(a)\\ (a_n)\text{ arbitrar}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ cont în $(-\infty,0)$

fie $a=0$. f cont. în $0 \Leftrightarrow \forall (a_n)\subseteq D$ cu

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ să avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(0) = 7$

fie $a_n = \frac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

fie x_0 arbitrar ales.

fie $(x_n) \subseteq [1, 2]$ cu $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

fie $(y_n) \subseteq (2, 3]$ cu $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$.

$f(x_n) = \sqrt{a^2 - 2ax_n + x_n^2} = \sqrt{(a-x_n)^2}$

$f(y_n) = \cancel{\sqrt{a^2 - 2ay_n + y_n^2}} = \cancel{\sqrt{(a-y_n)^2}}$

$= 3a + 2y_n$

$f(x_n) = |a - x_n|$

$\cancel{f(y_n) = |a - y_n|}$

$|a - x_0|$

$\cancel{\lim_{n\to\infty} |a - x_n|}$

$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} 3a + 2y_n$

$= 3a + 2x_0 = f(x_0)$ ✓

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} |a - x_n|$

$= |a - x_0| = f(x_0)$ ✓

x_0 arbitrar

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f e continuă pe D.

b) $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} e^{3x}, & x\in(0,1] \\ a\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-5x+4} & x\in(1,\pi) \end{cases}$$

fie x_0 arbitrar ales

fie $(x_n)\subseteq[0,1]$ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$

fie $(y_n)\subseteq(1,\pi)$ $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$

$f(x_n)=e^{3x_n}$

$f(y_n)=a\dfrac{\sin(y_n-1)}{y_n^2-5y_n+4}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty}e^{3x_n}=e^{3x_0}=f(x_0)\checkmark \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty}a\dfrac{\sin(y_n-1)}{y_n^2-5y_n+4}=f(x_0)\checkmark \end{array}\right\}\Rightarrow$$

x_0 arbitrar

$\Rightarrow f$ cont pe D.

ex 6: $0 < a < b \in \mathbb{R}$ $f: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \left(\frac{b^x - a^x}{x(b-a)} \right)^{\frac{1}{x-1}}$$

a) f continuă în x_0 arbitrar $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall (x_n) \subseteq D$ cu $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ să avem

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

fie $(x_n) \subseteq D$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x_n) = \left(\dfrac{b^{x_n} - a^{x_n}}{x_n(b-a)} \right)^{\frac{1}{x_n-1}} \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{b^{x_n} - a^{x_n}}{x_n(b-a)} \right)^{\frac{1}{x_n-1}} = f(x_0) \\ (x_n) \text{ arbitrar} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ cont pe D