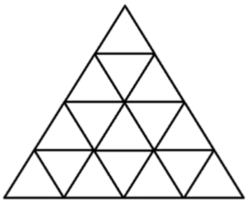
TEOREMA DE RAÚL DE LOS TRIANGULOS APILADOS

Raúl C. Urzúa Cortés
raulelrey86@gmail.com
Licenciado en Ciencias de la Ingeniería.
Ingeniero Civil en Computación e Informática.
Universidad de Atacama.
Fecha: 1 de agosto de 2021.



RESUMEN

La investigación se centra en el área de las matemáticas recreativas, en especial en un juego matemático, el cual se trata de contar cuantos triángulos hay en una estructura triangular donde los triángulos están apilados unos encima de otros. En donde el lector trata de contar la cantidad triángulos. El problema se vuelve más complicado cuando aumentan la cantidad de triángulos volviéndose mucho más complicado la capacidad de contar. Y por lo anterior se realiza la siguiente pregunta, sí es posible contar la cantidad de triángulos de una forma más sencilla, utilizando algún método o fórmula matemática.

ABSTRACT

In this work, a logical analysis of a mathematical game is carried out, which consists of counting a set of triangles that are stacked on top of each other, forming a larger triangle. The complexity increases in relation to the number of triangles. Because of this, an easier way to count the triangles is sought, using a mathematical formula.

RESUMEN

En este trabajo, se realiza un análisis lógico de un juego matemático, el cual consta de contar un conjunto de triángulos que están apilados unos encimas de otros formando un triángulo más grande. La complejidad aumenta en relación a la cantidad de triángulos. Debido a esto se busca una forma más sencilla de contar los triángulos, mediante una fórmula matemática.

1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo se mostrará un descubrimiento matemático de un popular juego que aparece frecuentemente en periódicos y revistas. El cual consta en contar la cantidad de triángulos apilados unos arribas de otros, en donde se forma un triángulo más grande.

2 JUEGO POPULAR

Observe la ilustración 1 y dígame, ¿cuantos triángulos hay?

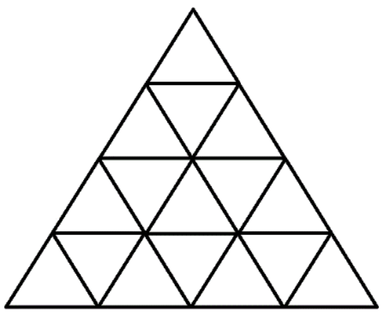


Ilustración 1: Triangulos apilados.

La mejor forma de contarlos seria contar la cantidad de triángulos por fila, como se muestra en la figura 2.

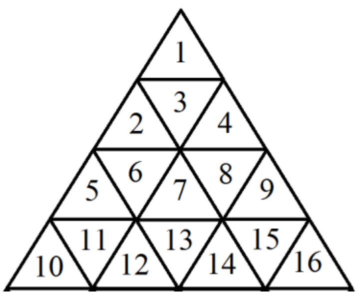


Ilustración 2: Contar triángulos apilados.

En este caso la respuesta seria: Hay 16 triángulos

Pero que sucediera si hay más de 100 triángulos, o más de 1.000, o más de 1.000.000 de triángulos. La complejidad de contar tiene directa relación con la cantidad de triángulos

Por eso la necesidad de establecer un método o fórmula matemática que permita realizar esta labor.

3 OBSERVACIÓN

Al observar la Ilustración 2, me di cuenta que la ilustración posee 4 filas, como se muestra en la ilustración 3.

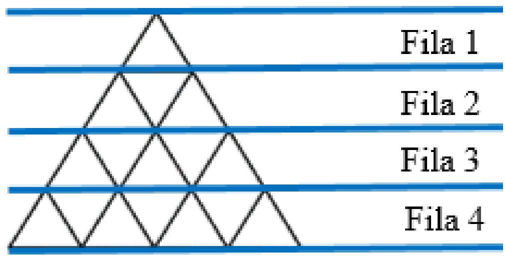


Ilustración 3: Contar número de filas.

Me llamo la atención que para 4 filas la cantidad de triángulos son 16.

Donde me voy atrever a generar la siguiente hipótesis.

4 HIPÓTESIS

Realizare la siguiente hipótesis:

Para todo conjunto de triángulos apilados, que forman un triángulo igual o más grande, al contar la cantidad de filas (C_F), la cantidad de triángulos (C_T) va hacer igual al cuadrado de la cantidad de filas.

$$C_T, C_F \in N$$
$$C_T = {C_F}^2$$

Ecuación 1: Formula Hipótesis.

Por eso probaré para otros ejemplos gráficos con otras cantidades de filas.

5 PRUEBA GRÁFICA

Prueba grafica para un triángulo apilado de 5 filas, como se observa en la ilustración 4.

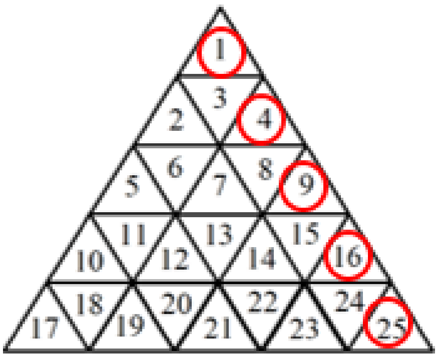


Ilustración 4: Prueba Grafica.

Voy a tomar los últimos números de cada fila, los que aparecen dentro de una círculo rojo y los colorare en una tabla de acuerdo a su número de fila, como se observa en la tabla 1.

Cantidad de filas (C_F)	Cantidad de triángulos (C_T)
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

Tabla 1: Tabla cantidad de filas versus cantidad de triángulos.

Como se observa en el patrón para cada cantidad de filas (C_F), la Cantidad de Triángulos (C_T) es el cuadrado de la cantidad de filas (C_F).

6 CALCULO DE LA FÓRMULA

Voy a determinar cómo se calcula la cantidad, para ello voy a contar las filas, como se observa en la ilustración 5.

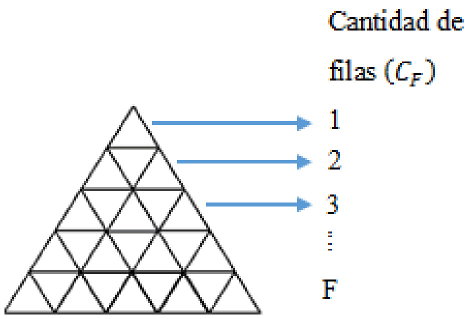


Ilustración 5: Cantidad de filas.

Dividiré la figura en dos conjuntos:

- Un conjunto de triángulos azules.
- Un conjunto de triángulos rojos.

Como se muestra en la ilustración 6.

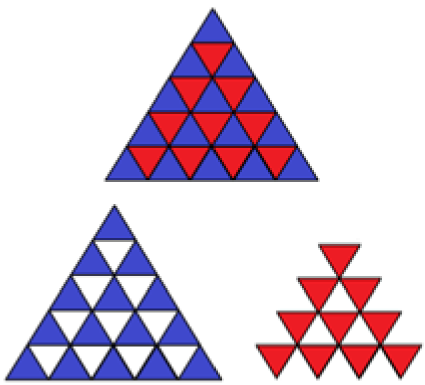


Ilustración 6: División en 2 conjuntos de triángulos.

Voy a dar vuelta los triángulos rojos.

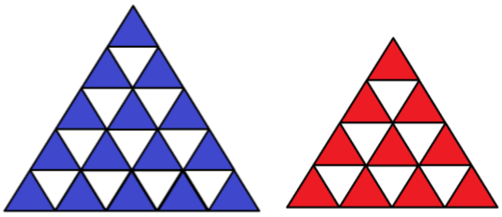


Ilustración 7: Dos conjuntos de triángulos apilados.

Como se muestra en la ilustración 7 se generan dos conjuntos de triángulos.

- El conjunto de triángulos azules posee la cantidad de filas (F).
- El conjunto de triángulos rojos posee la cantidad de filas menos uno $(F-1)$.

Para calcular la cantidad de triángulos se deben sumar las cantidades de los conjuntos de triángulos, azules y rojos.

Para ello se generan una sumatoria para cada conjunto.

En el conjunto de triángulos azules se genera una sumatoria desde *i = 1* hasta $n = C_F$.

$$C_{\mathrm{T}\,azules} = \sum_{i=1}^{C_F} i$$

Ecuación 2: Sumatoria conjunto de triángulos azules.

En el conjunto de triángulos rojos se genera una sumatoria desde *j = 1* hasta $n = C_{F-1}$.

$$C_{\mathrm{T}\,rojos} = \sum_{j=1}^{C_{F-1}} j$$

Ecuación 3: Sumatoria conjunto de triángulos rojos.

Donde se deben sumar las dos sumatoria para calcular la cantidad de triángulos (C_T), como se muestra en la ecuación 4.

$$C_T = C_{\mathrm{T}\,azules} + C_{\mathrm{T}\,rojos}$$

$$C_T = \sum_{i=1}^{C_F} i + \sum_{j=1}^{C_{F-1}} j$$

Ecuación 4: Formula ampliada de Cantidad de Triángulos

A continuación, vamos a despejar la formula.

Sumatoria triángulos azules.

$$C_{\mathrm{T}\,azules} = \sum_{i=1}^{C_F} i = \frac{C_F(C_F+1)}{2}$$

$$C_{\mathrm{T}\,azules} = \frac{C_F(C_F+1)}{2}$$

$$C_{\mathrm{T}\,azules} = \frac{{C_F}^2 + C_F}{2}$$

Sumatoria triángulos rojos.

$$C_{\mathrm{T}\,rojos} = \sum_{j=1}^{C_{T-1}} j = \frac{C_{F-1}(C_{F-1}+1)}{2}$$

$$C_{\mathrm{T}\,rojos} = \frac{C_{F-1}(C_{F-1}+1)}{2}$$

Donde:

$$C_{F-1} = C_F - 1$$

Entonces:

$$C_{\mathrm{T}\,rojos} = \frac{(C_F-1)\big((C_F-1)+1\big)}{2}$$

$$C_{\mathrm{T}\,rojos} = \frac{(C_F-1)(C_F-1+1)}{2}$$

$$C_{\mathrm{T}\,rojos} = \frac{(C_F - 1)(C_F)}{2}$$

$$C_{\mathrm{T}\,rojos} = \frac{{C_F}^2 - C_F}{2}$$

Al sumar las dos sumatorias

$$C_T = C_{\mathrm{T}\,azules} + C_{\mathrm{T}\,rojos}$$

$$C_T = \sum_{i=1}^{C_F} i + \sum_{j=1}^{C_{F-1}} j$$

$$C_T = \frac{{C_F}^2 + C_F}{2} + \frac{{C_F}^2 - C_F}{2}$$

$$C_T = \frac{{C_F}^2 + C_F + {C_F}^2 - C_F}{2}$$

$$C_T = \frac{2{C_F}^2}{2}$$

$$C_T = {C_F}^2$$

7 OBSERVACIÓN EXTRA

Voy a realizar el siguiente ejercicio mental. Como se observa en la Ilustración 8, que corresponde a un conjunto de triángulos apilados separados en 2 conjuntos: azul y rojo.

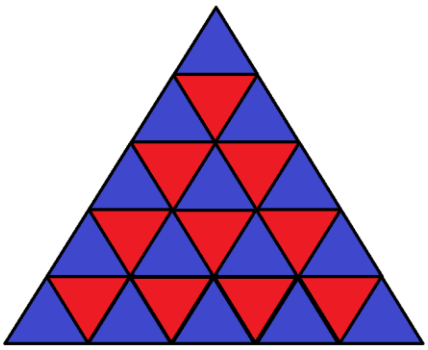


Ilustración 8: Triángulos apilados separados en 2 conjuntos.

Voy a separar los conjuntos, como se observa en la ilustración 9.

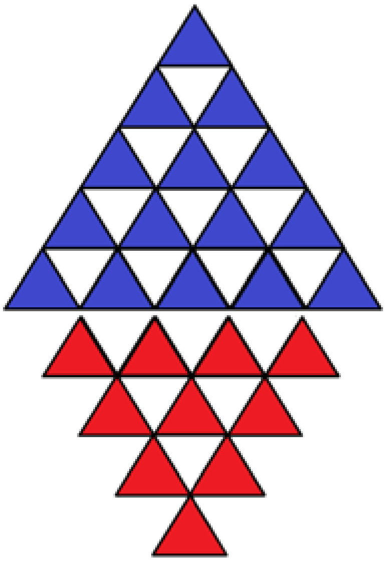


Ilustración 9: Triángulos separados en dos conjuntos.

Voy a pintar los triángulos de un mismo color. Como se observa en la ilustración 9.

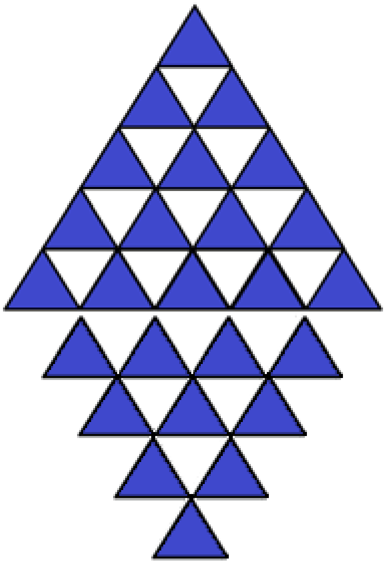


Ilustración 10: Triángulos separados y pintados de un mismo color.

A continuación, voy a transformar los triángulos en rombos. Como se observa en la ilustración 11.

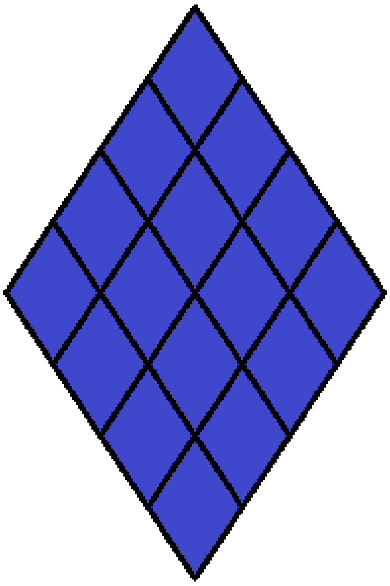


Ilustración 11: Triángulos convertidos en rombos.

La ilustración 11, la inclinamos y se puede convertir perfectamente en un conjunto de cuadrados. Como se observa en la ilustración 12.

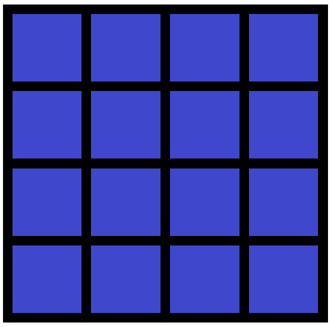


Ilustración 12: Conjunto de cuadrados.

Esto quiere decir que el número de filas de triángulos corresponde al número de filas de un cuadrado, y para calcular la cantidad de cuadrados se eleva a dos el número de filas. Igual que un conjunto de triángulos apilados, como se observa en la ilustración 12.

8 CONCLUSIÓN

El trabajo realizado fue muy gratificante