

# Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Continguts:

5. Matrius, sistemes i determinants
6. Espais vectorials
7. Aplicacions lineals
8. Diagonalització

Anna de Mier  
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtiques  
Abril 2020

## 5. Matrius, sistemes i determinants

### 5.1 Matrius: operacions bàsiques i matrius escalonades

# Repàs de l'àlgebra de matrius

# Els escalars

Per un **cos d'escalars**  $\mathbb{K}$  entendrem un conjunt de nombres amb dues operacions (*suma* i *producte*) tals que

- es satisfan les propietats habituals (*commutativa, associativa, distributiva, elements neutres*)
- són invertibles (podem *restar* i *dividir*)

Exemples:  $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{C}$

# Matrius

Siguin  $m, n \geq 1$  enters. Una **matriu de tipus  $m \times n$  amb elements al cos  $\mathbb{K}$**  consisteix en  $mn$  elements de  $\mathbb{K}$  arranats en una taula de  $m$  files i  $n$  columnes

Denotarem per  $a_{ij}$  l'element que es troba a la fila  $i$ , columna  $j$

Una matriu genèrica la representem així:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Farem servir també la notació  $A = (a_{ij})_{m \times n}$

El conjunt de totes les matrius  $m \times n$  el denotarem per  $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$

# Tipus de matrius

- ▶ Una matriu de tipus  $1 \times n$  s'anomena **matriu fila**
- ▶ Una matriu de tipus  $m \times 1$  s'anomena **matriu columna**
- ▶ La **matriu nul·la**  $O_{m,n}$  (o simplement  $O$ ) és la matriu tipus  $m \times n$  on tots els elements són iguals a 0
- ▶ Una matriu de tipus  $n \times n$  s'anomena **quadrada**. El conjunt de totes les matrius quadrades  $n \times n$  amb elements a  $\mathbb{K}$  es denota per  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Una matriu quadrada  $(a_{ij})_{n \times n}$  és
  - ▶ **triangular superior** si  $a_{ij} = 0$  per tot  $i > j$
  - ▶ **triangular inferior** si  $a_{ij} = 0$  per tot  $i < j$
  - ▶ **diagonal** si és triangular superior i inferior simultàniament
- ▶ La matriu  $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  és la matriu diagonal  $(d_{ij})_{n \times n}$  amb  $d_{ii} = \lambda_i$  per tot  $i$
- ▶ La matriu **identitat**  $I_n$  és la matriu diagonal  $\text{Diag}(1, 1, \dots, 1)$

# Suma de matrius

Siguin  $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  amb  $A = (a_{ij})$  i  $B = (b_{ij})$

La seva **suma** és la matriu  $A + B = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  definida per

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

## Propietats

Si  $A, B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ , es compleix:

- ▶ *(Associativa)*  $(A + B) + C = A + (B + C)$
- ▶ *(Commutativa)*  $A + B = B + A$
- ▶ *(Element neutre)*  $A + O = O + A = A$
- ▶ *(Element oposat)* Existeix una matriu  $B$  tal que

$$A + B = B + A = O$$

(a aquesta  $B$  l'anomenem  $-A$ )

# Producte per escalars

Siguin  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  amb  $A = (a_{ij})$  i  $\lambda \in \mathbb{K}$  un escalar

El **producte d'A per l'escalar  $\lambda$**  és la matriu

$\lambda A = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  definida per

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

## Propietats

Si  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  i  $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ , es compleix:

- ▶ (*Pseudoassociativa*)  $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- ▶ (*Distributiva 1*)  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- ▶ (*Distributiva 2*)  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- ▶ (*Identitat*)  $1A = A$

Fixem-nos que  $(-1)A = -A$

# Transposició

Sigui  $A = (a_{ij})_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$

La seva **transposada** és la matriu  $A^t = (b_{ij})_{n \times m} \in \mathcal{M}(\mathbb{K})_{n \times m}$  definida per  $b_{ij} = a_{ji}$

Clarament  $(A^t)^t = A$

Una matriu quadrada  $A$  és

**simètrica** si  $A^t = A$

**antisimètrica** si  $A^t = -A$

# Producte de matrius

Siguin  $A = (a_{ij})_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  i  $B = (b_{ij})_{n \times p} \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$

El seu **producte** és la matriu  $AB = (c_{ij})_{m \times p} \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$  amb

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

## Observacions

- ▶ El producte de dues matrius qualssevol no té per què estar definit
- ▶  $AB$  pot estar definit però  $BA$  no
- ▶ Encara que  $AB$  i  $BA$  estiguin definits, en general  $AB \neq BA$
- ▶ El producte és una operació interna dins de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

## Propietats del producte de matrius

Si  $A, B, C$  són matrius i les operacions següents estan definides, es compleix:

- ▶ (*Associativa*)  $(AB)C = A(BC)$
- ▶ (*Distributives*)  $A(B + C) = AB + AC$  i  $(A + B)C = AC + BC$
- ▶ (*Element unitat*)  $IA = A = AI$ , on  $I$  és la matriu identitat del tipus que convingui
- ▶ (*Relació amb la transposada*)  $(AB)^t = B^t A^t$

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , denotarem per  $A^k$  el producte  $AA \cdots A$  (és a dir,  $A^2 = AA$ ,  $A^3 = AAA$ , etc.)

# Matriu inversa

Siguin  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Diem que  $B$  és la **matriu inversa** d' $A$  si

$$AB = BA = I_n$$

Si això es compleix diem que  $A$  és **invertible** i denotem per  $A^{-1}$  la matriu inversa

## Observacions

- ▶ Si existeix la inversa, és única
- ▶ No tota matriu té inversa
- ▶ Les matrius invertibles no tenen files ni columnes nul·les

## Propietats de la matriu inversa

Si  $A$  i  $B$  són matrius invertibles del mateix tipus i  $\lambda$  és un escalar no nul, es compleix:

- ▶ la matriu  $A^{-1}$  és invertible i  $(A^{-1})^{-1} = A$
- ▶ la matriu  $A^k$  és invertible i  $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$
- ▶ la matriu  $\lambda A$  és invertible i  $(\lambda A)^{-1} = (\lambda)^{-1} A^{-1}$
- ▶ la matriu  $A^t$  és invertible i  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- ▶ el producte  $AB$  és invertible i  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

# Transformacions elementals i matrius escalonades

# Transformacions elementals

Sigui  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$

Una **transformació elemental per files** d' $A$  consisteix en una de les tres operacions següents:

- (I) intercanviar dues files d' $A$
- (II) multiplicar una fila d' $A$  per un escalar no nul
- (III) sumar a una fila d' $A$  el resultat de multiplicar una altra fila per un escalar no nul

Una matriu és **elemental (per files)** si es pot obtenir a partir d'una matriu identitat mitjançant una única transformació elemental per files

# Matrius equivalents

## Teorema

Sigui  $T$  una transformació elemental i sigui  $M \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ . El resultat d'aplicar la transformació  $T$  a la matriu  $M$  és  $EM$ , on  $E$  és la matriu elemental resultant d'aplicar  $T$  a la identitat  $I_m$

Una matriu  $B$  és **equivalent (per files)** a una matriu  $A$  si  $B$  es pot obtenir a partir d' $A$  fent una seqüència finita de transformacions elementals

Per tant, si  $B$  és equivalent a  $A$  podem escriure

$$B = E_r E_{r-1} \cdots E_2 E_1 A,$$

on les  $E_i$  són matrius elementals

# Matrius escalonades

Una matriu és **escalonada (per files)** si

- si una fila és nul·la (composta enterament per zeros), totes les que estan per sota d'ella també son nul·les
- en cada fila no nul·la, el primer element no nul és un 1 (anomenat l'*1 dominant* o el *pivot* de la fila)
- el pivot d'una fila sempre es troba més a la dreta que el pivot de la fila anterior

## Teorema

Tota matriu és equivalent a una matriu escalonada per files

El **rang** d'una matriu  $A$  és el nombre de files no nul·les de qualsevol matriu escalonada equivalent a  $A$

# Aplicació al càlcul de la inversa (I)

## Lema

Si  $E$  és una matriu elemental, aleshores  $E$  és invertible i la seva inversa  $E^{-1}$  també és una matriu elemental

Comprovació:

- (I) Si  $B$  és una matriu elemental corresponent a una transformació de tipus (I) (intercanvi files  $i$  i  $j$ ), tenim  $BB = I$
- (II) Si  $C_\lambda$  és la matriu elemental corresponent a una transformació de tipus (II) (multiplicar una fila per  $\lambda \neq 0$ ), tenim
$$C_\lambda C_{\lambda^{-1}} = I = C_{\lambda^{-1}} C_\lambda$$
- (II) Si  $D_k$  és la matriu elemental corresponent a una transformació de tipus (III) (sumar a la fila  $i$  la fila  $j$  multiplicada per  $k$ ), tenim  $D_k D_{-k} = I = D_{-k} D_k$

# Aplicació al càlcul de la inversa (II)

## Teorema

Siguin  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  i  $M$  una matriu escalonada equivalent a  $A$ . Aleshores  $A$  és invertible si i només si tots els elements de la diagonal de  $M$  són iguals a 1

## Corol·lari

Siguin  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , aleshores  $A$  és invertible si i només si el rang d' $A$  és  $n$

# Mètode de Gauss-Jordan per al càlcul de la inversa

Sigui  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

La demostració del teorema anterior implica que

si  $I_n = E_r \cdots E_2 E_1 A$ , aleshores  $A^{-1} = E_r \cdots E_2 E_1$

Donada  $A$ , podem seguir els passos següents per trobar  $A^{-1}$ , si existeix:

- ▶ Comencem amb la matriu  $(A|I_n)$
- ▶ Apliquem transformacions elementals a  $(A|I_n)$ , amb l'objectiu d'arribar a  $(I_n|B)$
- ▶ Si ho aconseguim,  $A^{-1} = B$
- ▶ Altrament,  $A$  no és invertible

## 5. Matrius, sistemes i determinants

### 5.2 Sistemes d'equacions lineals

# Sistemes d'equacions lineals

Una **equació lineal** en les variables  $x_1, \dots, x_n$  és una expressió del tipus

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

on  $a_1, \dots, a_n, b$  pertanyen al cos d'escalars  $\mathbb{K}$

Una **solució** és  $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{K}^n$  tal que

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n = b$$

(Obs. Una equació lineal pot tenir entre zero i infinites solucions)

# Sistemes d'equacions lineals

Un **sistema d'equacions lineals** és un conjunt d'equacions lineals (totes amb les mateixes variables  $x_1, \dots, x_n$ )

La forma genèrica d'un sistema d'equacions lineals seria doncs:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Una **solució del sistema** és una  $n$ -upla  $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{K}^n$  que és solució de totes les equacions del sistema

# Solucions d'un sistema

Direm que un sistema és

- ▶ **incompatible** si no té cap solució
- ▶ **compatible determinat** si té una única solució
- ▶ **compatible indeterminat** si té més d'una solució

La **solució general** d'un sistema és el conjunt de totes les seves solucions

Dos sistemes són **equivalents** si tenen la mateixa solució general

# Sistemes equivalents

Dos sistemes amb les mateixes equacions però ordenades de manera diferent són equivalents

I si en un sistema

- ▶ multipliquem una equació per un escalar (no nul), o bé
- ▶ a una equació li sumem un múltiple d'una altra

el sistema resultant és equivalent al primer

# Matriu associada a un sistema

Donat el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

la seva **matriu associada** i les matrius de variables i de termes independents són

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Podem escriure el sistema com un producte de matrius:

$$Ax = b$$

# Matriu ampliada

La **matriu ampliada** és la matriu  $(A|b)$ , és a dir,

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Obs. Si es realitzen transformacions elementals a la matriu ampliada d'un sistema, el sistema resultant és equivalent al primer

Per tant, tot sistema d'equacions lineals és equivalent a un en què la matriu ampliada és escalonada

# Sistemes escalonats compatibles

Un sistema escalonat genèric compatible seria

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n & = & d_1 \\ & & x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ & & \vdots \\ & & x_r + \cdots + c_{rn}x_n = d_r \end{array} \right.$$

(si cal reordenem les variables)

Les variables  $x_1, \dots, x_r$  les anomenarem **principals** i la resta les anomenarem **lliures**

Podem resoldre el sistema aïllant “cap amunt”

La variable principal  $x_r$  la podem aïllar en termes de les variables lliures:

$$x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n$$

Ara podem aïllar  $x_{r-1}$  en termes de  $x_r$  i de les variables lliures, etc

# Solució general d'un sistema escalonat

En un sistema escalonat podem expressar totes les variables principals en termes de les lliures (i de constants escalars):

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1 + e_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{1,n}x_n \\x_2 &= f_2 + e_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{2,n}x_n \\&\vdots \\x_r &= f_r + e_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{r,n}x_n\end{aligned}$$

Aquesta és la solució general del sistema

Obs. Per a cada assignació de valors que donem a les variables lliures  $x_{r+1}, \dots, x_n$  obtindrem una solució particular del sistema

Diem que el sistema té  $n - r$  graus de llibertat

# Forma paramètrica de la solució general

Si la solució general d'un sistema és

$$x_1 = f_1 + e_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{1,n}x_n$$

$$x_2 = f_2 + e_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{2,n}x_n$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$x_r = f_r + e_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{r,n}x_n$$

anomenarem **forma paramètrica** de la solució a l'expressió

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+1} \begin{pmatrix} e_{1,r+1} \\ e_{2,r+1} \\ \vdots \\ e_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} e_{1,n} \\ e_{2,n} \\ \vdots \\ e_{r,n} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Discussió de sistemes: el teorema de Rouché-Frobenius

## Teorema

Considerem un sistema d'equacions lineals que té matriu associada  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  i matriu ampliada  $(A|b)$

Sigui  $r$  el rang d' $A$  i sigui  $r'$  el rang de  $(A|b)$

Aleshores,

- ▶ si  $r < r'$ , el sistema és incompatible (SI)
- ▶ si  $r = r' = n$ , el sistema és compatible determinat (SCD)
- ▶ si  $r = r' < n$ , el sistema és compatible indeterminat (SCI) amb  $n - r$  graus de llibertat

Anomenarem **rang** d'un sistema lineal compatible al rang de la matriu associada

# Sistemes homogenis

Un sistema d'equacions lineals és **homogeni** si tots els termes independents són iguals a 0

Obs. Un sistema homogeni sempre és compatible (ja que tenim la solució trivial  $x_1 = \dots = x_n = 0$ )

## Corol·lari

Sigui  $A$  la matriu associada a un sistema homogeni en  $n$  variables; sigui  $r$  el rang d' $A$ . Aleshores

- ▶ si  $r = n$ , el sistema és compatible determinat i l'única solució és la trivial
- ▶ si  $r < n$ , el sistema és compatible indeterminat i té alguna solució diferent de la trivial

# Resolució de sistemes: eliminació gaussiana

Per trobar la solució general d'un sistema d'equacions lineals qualsevol fem el següent:

1. Cerquem la matriu ampliada  $(A|b)$
2. Cerquem la matriu escalonada  $M$  equivalent a  $(A|b)$
3. Apliquem el teorema de Rouché-Frobenius per determinar si el sistema és compatible
4. Cas que el sistema sigui compatible, trobem la solució general a partir del sistema equivalent amb matriu ampliada  $M$

## 5. Matrius, sistemes i determinants

### 5.3 Determinants

# Definició de determinant

Sigui  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Un **menor d'A** és qualsevol matriu formada a partir d'A eliminant un cert nombre de files i el mateix nombre de columnes

El **menor associat a l'element  $a_{ij}$**  és la matriu  $A_{ij}$  obtinguda en eliminar la fila  $i$  i la columna  $j$  de la matriu  $A$ .

El menor  $A_{ij}$  és una matriu quadrada de tipus  $(n-1) \times (n-1)$

El **determinant d'A** es defineix recursivament com

- si  $n = 1$ , aleshores  $\det(A) = a_{11}$
- si  $n \geq 2$ , aleshores

$$\begin{aligned} \det(A) = & a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) + \cdots + \\ & (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det(A_{1n}) \end{aligned}$$

L'**adjunt de l'element  $a_{ij}$**  és  $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

# Càlcul de determinants

(Enlloc de  $\det(A)$ , a vegades escriurem  $|A|$ )

- Matrius  $2 \times 2$  i  $3 \times 3$ :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \det((d)) - b \det((c)) = ad - bc$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \\ &= aei + cdh + bfg - ceg - afh - bdi \end{aligned}$$

- Es demostren per inducció:

Si  $A$  té una fila o una columna nul·la llavors  $\det(A) = 0$

Si  $A = \text{Diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , llavors  $\det(A) = a_1 a_2 \dots a_n$

## Teorema

Siguin  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  i  $i, j \in [n]$ . Aleshores

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{i+k} \det(A_{ik})$$

(Càlcul del determinant desenvolupant per la fila  $i$ )

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{kj} (-1)^{k+j} \det(A_{kj})$$

(Càlcul del determinant desenvolupant per la columna  $j$ )

# Determinants i transformacions elementals

Siguin  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $B$  és la matriu que s'obté d' $A$

- ▶ intercanviant dues files, aleshores  $\det(B) = -\det(A)$  (transformació tipus (I))
- ▶ multiplicant la fila  $i$ -èsima d' $A$  per  $\lambda$ , aleshores  $\det(B) = \lambda \det(A)$  (transformació tipus (II))
- ▶ sumant-li a una fila un múltiple d'una altra, aleshores  $\det(B) = \det(A)$  (transformació tipus (III))

## Corol·lari

Si  $M$  s'obté a partir d' $A$  fent transformacions elementals,

$$\det(M) = K \det(A), \quad \text{on } K \neq 0$$

Per tant, si  $A$  i  $M$  són matrius equivalents aleshores,

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(M) \neq 0$$

# Caracterització de matrius invertibles

## Teorema

Una matriu  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  és invertible si i només si  $\det(A) \neq 0$

## Corol·lari

Una matriu  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  té rang  $n$  si i només si  $\det(A) \neq 0$

## Teorema

Sigui  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ . El rang d' $A$  és  $r$  si i només si el més gran menor d' $A$  amb determinant no nul és  $r \times r$

# Determinants i operacions amb matrius

Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , aleshores

- ▶  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
- ▶  $\det(A^t) = \det(A)$
- ▶ si  $A$  és invertible,  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

Però en general,  $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

## 6. Espais vectorials

## $\mathbb{R}^n$ i les seves operacions

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \right\}$$

Siguin  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  i  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  elements de  $\mathbb{R}^n$  i  $\lambda \in \mathbb{R}$

Suma a  $\mathbb{R}^n$ :

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Producte per escalars a  $\mathbb{R}^n$ :

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

(És a dir, les dues operacions són “component a component”)

## Propietats

La suma a  $\mathbb{R}^n$  satisfà les propietats següents:

- s1) (associativa)  $x + (y + z) = (x + y) + z$
- s2) (commutativa)  $x + y = y + x$
- s3) (element neutre)  $x + \mathbf{0} = x$  on  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$
- s4) (element oposats) per tot  $x$  existeix  $x'$  tal que  $x + x' = \mathbf{0}$

El producte per escalars a  $\mathbb{R}^n$  satisfà:

- p1)  $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
- p2)  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- p3)  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- p4)  $1x = x$

(Totes les propietats són certes perquè ho són a  $\mathbb{R}$  i les operacions són component a component)

## 6.2 Espais vectorials

Un **espai vectorial sobre un cos**  $\mathbb{K}$  consisteix en

1. un conjunt no buit  $E$
2. una operació interna  $E \times E \rightarrow E$  (*suma*  $+$ ) i
3. una aplicació  $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$  (*producte per escalars*  $\cdot$ )

de manera que per a tot  $u, v, w \in E$  i tot  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  es satisfà:

- e1) (*associativa*)  $u + (v + w) = (u + v) + w$
- e2) (*commutativa*)  $u + v = v + u$
- e3) (*element neutre*) existeix un únic element  $\mathbf{0}_E \in E$  tal que  
 $u + \mathbf{0}_E = u$
- e4) (*element oposat*) per cada  $u \in E$  existeix un únic  $u' \in E$  tal  
que  $u + u' = \mathbf{0}_E$
- e5)  $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$
- e6)  $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- e7)  $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
- e8)  $1u = u$ , on 1 és el neutre del producte de  $\mathbb{K}$

## Alguns exemples d'espais vectorials

- ▶  $\mathbb{R}^n$
- ▶  $\mathbb{Z}_2^n$ : cadenes de  $n$  bits  
La suma és bit a bit: p. ex.,

$$(0, 1, 1, 0) + (1, 1, 1, 0) = (1, 0, 0, 0)$$

Producte per escalars:  $0u = \mathbf{0}_{\mathbb{Z}_2^n}$  i  $1u = u$

- ▶  $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  (les matrius  $m \times n$  amb entrades en el cos  $\mathbb{K}$ )
- ▶ Les matrius de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  que són triangulars superiors
- ▶  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ : el conjunt dels polinomis amb coeficients a  $\mathbb{R}$
- ▶  $\mathcal{P}_d(\mathbb{R})$ : els polinomis de grau com a molt  $d$  i coeficients a  $\mathbb{R}$
- ▶ L'espai vectorial trivial format per un únic element:  $\{\mathbf{0}_E\}$
- ▶ Les solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni

## Propietats

Si  $v$  pertany a l'espai vectorial  $E$  i  $\lambda$  és un escalar, es satisfà:

- ▶  $0v = \mathbf{0}_E$
- ▶  $\lambda \mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E$
- ▶ Si  $\lambda v = \mathbf{0}_E$ , aleshores  $\lambda = 0$  o  $v = \mathbf{0}_E$
- ▶ L'element oposat de  $v$  és  $(-1)v$ ; normalment escriurem  $-v$

## 6.3 Subespais vectorials i combinacions lineals

Un subconjunt  $S \subseteq E$  és un **subespai vectorial (SEV)** si compleix

(s1)  $S \neq \emptyset$

(s2) per tot  $u, v \in S$ ,  $u + v \in S$

(s3) per tot  $u \in S$  i tot  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda u \in S$

El vector  $\mathbf{0}_E$  pertany a tots els subespais vectorials

### Alguns exemples de subespais espais vectorials

- ▶  $\mathcal{P}_d(\mathbb{R})$  és un subespai vectorial de l'espai de polinomis  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$
- ▶ Les matrius triangulars superiors de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  formen un SEV de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- ▶ Les solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni amb  $n$  variables i coeficients a  $\mathbb{R}$  és un SEV de  $\mathbb{R}^n$

## Intersecció de subespais

**Lema** Si  $S$  i  $S'$  són subespais vectorials d' $E$ , aleshores  $S \cap S'$  també ho és

La unió de subespais vectorials no és normalment un subespai vectorial, com és el cas per exemple de  $S = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$  i  $S' = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$  ( $(1, 1) + (2, -2) \notin S \cup S'$ )

## Combinació lineal

Donats  $u_1, \dots, u_k$  vectors d' $E$ , una **combinació lineal de  $u_1, \dots, u_k$**  és una expressió del tipus

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k,$$

on  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  són escalars

El vector  **$v$  és combinació lineal de  $u_1, \dots, u_k$**  si existeixen escalars  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tals que

$$v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k$$

## Subespai generat

Siguin  $u_1, \dots, u_k$  vectors d' $E$ . El **subespai generat** per  $u_1, \dots, u_k$  és el conjunt

$$\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \{ \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K} \},$$

és a dir, el conjunt de totes les combinacions lineals de  $u_1, \dots, u_k$

### Proposició

El subespai generat  $\langle u_1, \dots, u_k \rangle$  és, com el seu nom indica, un subespai vectorial. A més, és el subespai més petit que conté  $u_1, \dots, u_k$

Si un espai  $S$  el podem escriure com  $S = \langle u_1, \dots, u_\ell \rangle$ , direm que  $\{u_1, \dots, u_\ell\}$  és un **conjunt de generadors** de  $S$ . El conjunt de generadors d'un espai no és únic

Observem que  $v$  és combinació lineal de  $u_1, \dots, u_k$  si i només si  $v \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle$

## Exemples de subespais generats

- ▶  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$   
 $= \langle (1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1) \rangle$
- ▶ L'espai de les matrius  $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  està generat per les matrius  $M_{ij}$  que tenen totes les entrades iguals a 0, excepte la de la posició  $i, j$ , que és igual a 1,  $1 \leq i \leq n$  i  $1 \leq j \leq m$   
Per exemple,  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \langle M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22} \rangle$ , on

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ▶ Si volguéssim generar les matrius triangulars superiors, agafaríem de les matrius  $M_{ij}$  anteriors només les que tenen  $i \leq j$
- ▶ Subespai donant els vectors en funció de paràmetres

$$\begin{aligned}
 & \{a + (b - a)x + (c - b)x^2 + (a - c)x^3 : a, b, c \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{a(1 - x + x^3) + b(x - x^2) + c(x^2 - x^3) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \\
 &= \langle 1 - x + x^3, x - x^2, x^2 - x^3 \rangle
 \end{aligned}$$

## 6.4 Independència lineal

Siguin  $u_1, \dots, u_k \in E$ . L'equació

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_E$$

sempre té la solució  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ .

Si aquesta és l'única solució direm que els vectors  $u_1, \dots, u_k$  són **linealment independents** (LI)

Si hi ha alguna solució amb un  $\lambda_i \neq 0$ , direm que els vectors són **linealment dependents** (LD)

(També direm que el conjunt  $\{u_1, \dots, u_k\}$  és LI o LD, resp.)

Exemples:

- ▶ El vector  $\mathbf{0}_E$  és linealment dependent
- ▶ Donat un vector  $u \neq \mathbf{0}_E$ , el vector  $u$  és linealment independent
- ▶ Si  $u$  és un vector qualsevol i  $\lambda$  és un escalar,  $\{u, \lambda u\}$  és LD

Per determinar si un conjunt de vectors  $u_1, u_2, \dots, u_k$  de  $\mathbb{R}^n$  són linealment independents seguim els passos següents:

- (1) formem una matriu  $A$  amb els vectors donats, posant-los per columnes
- (2) calculem el rang  $r$  d' $A$
- (3)
  - ▶ si  $r = k$ , aleshores els  $k$  vectors són LI
  - ▶ si  $r < k$ , aleshores són LD; si hem calculat el rang escalonant la matriu  $A$ , aleshores els vectors que corresponen a les columnes on hi ha els uns dominants són un subconjunt LI el més gran possible; si hem calculat el rang per menors, els vectors que corresponent a les columnes del menor d' $A$  més gran amb determinant no nul són un subconjunt LI el més gran possible

En general, per determinar si un conjunt de vectors  $u_1, u_2, \dots, u_k$  d'un  $\mathbb{K}$ -espai vectorial  $E$  són linealment independents seguim els passos següents:

(1) a partir de l'equació vectorial

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_E$$

obtenim un sistema homogeni amb incògnites  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$

(2) discutim el sistema, si és

- ▶ compatible determinat els vectors  $u_1, u_2, \dots, u_k$  són LI
- ▶ compatible indeterminat els vectors  $u_1, u_2, \dots, u_k$  són LD

## Propietats

Sigui  $S = \{u_1, \dots, u_k\}$  un conjunt de vectors d'un  $\mathbb{K}$ -espai vectorial  $E$

- ▶ Si  $\mathbf{0}_E$  és a  $S$ , llavors  $u_1, \dots, u_k$  són LD
- ▶ Si  $u_1, \dots, u_k$  són LI, llavors  $\mathbf{0}_E$  no és a  $S$
- ▶ Si  $u_1, \dots, u_k$  són LI, tot subconjunt de  $S$  és LI
- ▶ Si  $u_1, \dots, u_k$  són LD, tot conjunt que conté  $S$  és LD

## Teorema

Si  $u_1, \dots, u_k$  són LD i  $u_1$  és combinació lineal dels altres vectors de  $S$ , aleshores

$$\langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle = \langle u_2, \dots, u_k \rangle$$

## Caracteritzacions

### Teorema

Un conjunt de vectors  $S$  és LD si, i només si, hi ha un vector  $v$  a  $S$  que és combinació lineal de la resta de vectors de  $S$

### Corol·lari

Sigui  $v \in E$ . Si  $u_1, \dots, u_k$  són LI, aleshores  $v, u_1, \dots, u_k$  són LI si, i només si,  $v \notin \langle u_1, \dots, u_k \rangle$

## 6.5 Bases i dimensió

Sigui  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espai vectorial. Un conjunt de vectors  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  és una **base d' $E$**  si

- (b1)  $B$  és linealment independent
- (b2)  $E = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ , és a dir,  $b_1, b_2, \dots, b_n$  generen  $E$

La **base canònica**

- ▶ de  $\mathbb{K}^n$  és  $\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$
- ▶ de  $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  és la formada per les  $mn$  matrius  $M_{ij}$  que tenen totes les entrades nul·les excepte la  $i, j$ , que és igual a 1
- ▶ de  $\mathbb{K}_d[x]$  és  $\{1, x, x^2, \dots, x^d\}$   
(també a  $\{x^d, x^{d-1}, \dots, 1\}$  li direm base canònica, caldrà especificar quina usem)

Sigui  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  una base d' $E$

### Proposició

Tot vector d' $E$  s'escriu de manera única com a combinació lineal dels vectors de  $B$

Sigui  $v \in E$ . Si  $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$ , diem que

$$\mathbf{v}_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

és el **vector de coordenades** de  $v$  en la base  $B$

### Proposició

Sigui  $\{u_1, \dots, u_k\}$  un conjunt de vectors d' $E$  que són LI. Aleshores  $k \leq n$

### Corol·lari

Tota base d' $E$  té  $n$  elements

## Dimensió

Al cardinal de les bases d'un espai vectorial  $E$  (o d'un SEV) l'anomenem la **dimensió** de l'espai, denotada  **$\dim(E)$**

- ▶ Les dimensions dels espais amb els que treballem habitualment són:  
 $\dim(\mathbb{K}^n) = n$ ,  $\dim(\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})) = nm$ , i  $\dim(\mathcal{P}_d(\mathbb{K})) = d + 1$
- ▶ La dimensió del subespai  $\{\mathbf{0}_E\}$  és 0
- ▶ La dimensió del subespai  $\langle u_1, \dots, u_k \rangle$  donat per generadors és el nombre màxim de vectors LI entre  $\{u_1, \dots, u_k\}$  (que és igual al rang de la matriu que té per columnes les coordenades de  $u_1, \dots, u_k$ )
- ▶ La dimensió d'un subespai donat com a solució d'un sistema d'equacions homogeni és el nombre de graus de llibertat del sistema

Suposem que la dimensió d' $E$  és  $n$  i sigui  $W = \{w_1, \dots, w_n\}$  un subconjunt d' $E$

- ▶ si  $W$  és un conjunt LI, aleshores  $W$  és una base d' $E$
- ▶ si  $W$  genera  $E$ , aleshores  $W$  és una base d' $E$

Si  $S$  és un subespai d' $E$  aleshores

- ▶  $\dim(S) \leq \dim(E)$
- ▶ si  $\dim(S) = \dim(E)$ ,  $S = E$

## Canvi de base

Siguin  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  i  $B' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$  dues bases d'un  $\mathbb{K}$ -espai vectorial  $E$ . Sigui  $u$  un vector d' $E$

Veiem com es relacionen els vectors de coordenades  $u_B$  i  $u_{B'}$

Anomenem **matriu del canvi de la base B a la base B'** a la matriu que té per columnes els vectors de coordenades  $(b_1)_{B'}, \dots, (b_n)_{B'}$ . La denotem per  **$P_{B'}^B$**

$$P_{B'}^B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ (b_1)_{B'} & (b_2)_{B'} & \dots & (b_n)_{B'} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Aleshores

- ▶  $u_{B'} = P_{B'}^B u_B$ , expressant els vectors de coordenades en columna
- ▶  $P_B^{B'} = (P_{B'}^B)^{-1}$

## 7. Aplicacions Lineals

## 7.1 Definicions, exemples i propietats

Siguin  $E$  i  $F$  dos  $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Una aplicació  $f : E \rightarrow F$  és **lineal** si satisfà:

(a1) per tot  $u, v \in E$ ,  $f(u + v) = f(u) + f(v)$

(a2) per tot  $u \in E$  i tot  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Si  $E = F$ , direm que  $f$  és un **endomorfisme**

### Exemples

- ▶ **Aplicació trivial.**  $f : E \rightarrow F$  on  $f(u) = 0_F$ ,  $u \in E$ , és lineal
- ▶ **Aplicació identitat.**  $I_E : E \rightarrow E$  on  $I_E(u) = u$ ,  $u \in E$ , és lineal
- ▶ L'aplicació següent no és lineal

$$f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_2[x], \quad f \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = x^2 - (a+d)x + (2c-b)$$

- ▶ L'aplicació  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (x^2 y^2, x + y)$  no és lineal

## Propietats

Sigui  $f : E \rightarrow F$  una aplicació lineal. Aleshores

- ▶  $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$
- ▶  $f(-u) = -f(u)$ , per a tot  $u \in E$
- ▶ si  $S$  és un subespai d' $E$ ,  $f(S)$  és un subespai d' $F$
- ▶ si  $S'$  és un subespai d' $F$ ,  $f^{-1}(S')$  és un subespai d' $E$

## Proposició

Sigui  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  una base d' $E$ . Aleshores  $f$  està unívocament determinada per  $f(b_1), \dots, f(b_n)$

És a dir, a partir de la imatge d'una base podem obtenir la imatge de qualsevol vector d' $E$ :

si  $u = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$ , aleshores  $f(u) = \alpha_1 f(b_1) + \dots + \alpha_n f(b_n)$

## Corol·lari

Si  $S = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$  és un subespai d' $E$ , aleshores

$$f(S) = \langle f(v_1), \dots, f(v_k) \rangle$$

Siguin  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  una base d' $E$ ,  $W$  una base de  $F$  i  $m$  la dimensió de  $F$

La **matriu associada a  $f$  en les bases  $B$  i  $W$**  és la matriu que té per columnes les imatges dels vectors de la base  $B$  expressades en coordenades en la base  $W$ . La denotem per  **$M_W^B(f)$**

$$M_W^B(f) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(b_1)_W & f(b_2)_W & \dots & f(b_n)_W \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$$

Per trobar el vector de coordenades de la imatge d'un vector  $u \in E$  n'hi ha prou en fer el següent producte matricial:

$$f(u)_W = M_W^B(f)u_B,$$

posant els vectors de coordenades en columna

## 7.2 Nucli i imatge

Sigui  $f : E \rightarrow F$  una aplicació lineal

El **nucli** d' $f$  és

$$\text{Ker}(f) = \{u \in E : f(u) = \mathbf{0}_F\}$$

La **imatge** d' $f$  és

$$\text{Im}(f) = \{v \in F : v = f(u) \text{ per algun } u \in E\} = \{f(u) : u \in E\}$$

### Proposició

$\text{Ker}(f)$  i  $\text{Im}(f)$  són subespais vectorials d' $E$  i  $F$ , respectivament

## Càlcul efectiu del nucli i de la imatge

Siguin  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  i  $W = \{w_1, \dots, w_m\}$  bases d' $E$  i  $F$ , resp., i sigui  $M = M_W^B(f)$  la matriu associada a  $f$  en aquestes bases

- Nucli: treballant amb coordenades, els vectors del nucli són les solucions del sistema homogeni de  $m$  equacions i  $n$  incògnites

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

La dimensió del nucli és  $n - \text{rang}(M)$

- Imatge:  $\text{Im}(f) = \langle f(b_1), \dots, f(b_n) \rangle$

La dimensió de la imatge és el rang de  $M$

Considerant una matriu escalonada equivalent a  $M$ , les columnes on hi ha els pivots corresponen a les columnes de  $M$  que són vectors LI, i per tant formen una base de la imatge

Sigui  $f : E \rightarrow F$  una aplicació lineal i  $M$  una matriu associada a  $f$

### Teorema

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

Les aplicacions lineals bijectives s'anomenen **isomorfismes**

### Caracterització del tipus d'aplicació

- ▶  $f$  és injectiva  $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\} \Leftrightarrow \text{rang}(M) = \dim(E)$
- ▶  $f$  és exhaustiva  
 $\Leftrightarrow \dim(\text{Im}(f)) = \dim(F) \Leftrightarrow \text{rang}(M) = \dim(F)$
- ▶  $f$  és un isomorfisme  $\Leftrightarrow \text{rang}(M) = \dim(E) = \dim(F)$
- ▶ Si  $E$  i  $F$  tenen la mateixa dimensió, llavors  
 $f$  és un isomorfisme  $\Leftrightarrow f$  és injectiva  $\Leftrightarrow f$  és exhaustiva

## 7.3 Composició d'aplicacions lineals

### Proposició

Si  $f : E \rightarrow F$  i  $g : F \rightarrow G$  són aplicacions lineals, l'aplicació composició  $g \circ f : E \rightarrow G$  també és lineal

### Proposició

Si  $f : E \rightarrow F$  és un isomorfisme,  $f^{-1} : F \rightarrow E$  també ho és

Si les bases d' $E$ ,  $F$  i  $G$  són  $B$ ,  $W$  i  $V$  respectivament, tenim:

$$M_V^B(g \circ f) = M_V^W(g)M_W^B(f)$$

$$M_B^W(f^{-1}) = (M_W^B(f))^{-1}$$

## 7.4 Canvi de base

Veiem com es relacionen dues matrius associades a una mateixa aplicació lineal fixant bases diferents a l'espai de sortida i/o a l'espai d'arribada.

Siguin  $f : E \rightarrow F$  una aplicació lineal,  $B$  i  $B'$  bases d' $E$ , i  $W$  i  $W'$  bases d' $F$

$$\begin{array}{ccc} E_B & \xrightarrow[\quad M_W^B(f) \quad]{\quad f \quad} & F_W \\ I_E \uparrow P_B^{B'} & & P_{W'}^W \downarrow I_F \\ E_{B'} & \xrightarrow[\quad M_{W'}^{B'}(f) \quad]{\quad f \quad} & F_{W'} \end{array}$$

$$f = I_F \circ f \circ I_E$$

$$M_{W'}^{B'}(f) = P_{W'}^W M_W^B(f) P_B^{B'}$$

## 8. Diagonalització

# El problema de la diagonalització

Sigui  $f : E \rightarrow E$  un endomorfisme. Hi ha alguna base  $B$  d' $E$  en què la matriu  $M_B(f)$  sigui senzilla? Més concretament, diagonal?

## Def

Un endomorfisme  $f : E \rightarrow E$  és **diagonalitzable** si existeix alguna base  $B$  d' $E$  tal que  $M_B(f)$  sigui diagonal.

Obs. Suposem que la matriu  $M_B(f)$  no és diagonal, però sabem que l'endomorfisme  $f$  diagonalitza en una altra base  $B'$ . Aleshores la matriu

$$(P_B^{B'})^{-1} M_B(f) P_B^{B'}$$

és diagonal.

Per tant, ser diagonalitzable és equivalent a que existeixi una matriu  $P$  invertible tal que  $P^{-1} M_B(f) P$  sigui diagonal.

# Valors i vectors propis

## Def

L'escalar  $\lambda$  és un **valor propi** de l'endomorfisme  $f$  si existeix algun vector  $v \neq \mathbf{0}_E$  tal que  $f(v) = \lambda v$ .

Tots els vectors  $v \neq \mathbf{0}_E$  que compleixen  $f(v) = \lambda v$  s'anomenen **vectors propis de valor propi**  $\lambda$ .

## Teorema

L'endomorfisme  $f : E \rightarrow E$  diagonalitza si i només si hi ha alguna base d' $E$  formada per vectors propis.

# Càlcul dels valors propis

Sigui  $M$  la matriu associada a  $f : E \rightarrow E$  en una base  $B$

## Def

El **polinomi característic** de l'endomorfisme  $f$  és

$$p_f(x) = \det(M - xI_n)$$

## Teorema

Els valors propis d' $f$  són les arrels del polinomi característic

La **multiplicitat algebraica** d'un valor propi  $\lambda$  és la multiplicitat de  $\lambda$  com a arrel de  $p_f(x)$  i es denota  $m_\lambda$

L'equació  $p_f(x) = 0$  s'anomena **equació característica**

## Teorema

El polinomi característic no depèn de la base en la que calculem la matriu associada  $M$

# Espais de vectors propis

Sigui ara  $\lambda$  un valor propi de l'endomorfisme  $f : E \rightarrow E$   
L'**espai propi** del valor propi  $\lambda$  és el conjunt

$$E_\lambda = \{u \in E : f(u) - \lambda u = 0_E\}$$

## Propietats

- ▶  $E_\lambda$  és un subespai vectorial d' $E$
- ▶  $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$

La dimensió d' $E_\lambda$  s'anomena **multiplicitat geomètrica** de  $\lambda$

# Caracterització dels endomorfismes diagonalitzables

Sigui  $f : E \rightarrow E$  un endomorfisme d'un espai vectorial  $E$  de dimensió  $n$ .

## Teorema

L'endomorfisme  $f$  és diagonalitzable si i només si té  $n$  valors propis (comptant multiplicitats) i per a cada valor propi les multiplicitats algebraica i geomètrica coincideixen.

## Corol·lari

Si  $f$  té  $n$  valors propis diferents, aleshores és diagonalitzable.

# Algorisme de diagonalització

Per a decidir si l'endomorfisme  $f : E \rightarrow E$  és diagonalitzable, podem seguir els passos següents:

- (1) Trobem la matriu associada a  $f$  en una base qualsevol i calculem el polinomi característic  $p_f(x)$ .
- (2) Trobem els valors propis i les seves multiplicitats resolent  $p_f(x) = 0$ .
- (3) Si les multiplicitats dels valors propis sumen menys de  $\dim(E)$ , l'endomorfisme no diagonalitza. Altrament anem a (4).
- (4) Per a cada valor propi  $\lambda$ , trobem l'espai propi  $E_\lambda$  i la seva dimensió  $\dim(E_\lambda)$ .
- (5) Si per a tot  $\lambda$  es compleix  $m_\lambda = \dim(E_\lambda)$ , l'endomorfisme diagonalitza. Altrament no diagonalitza.

Si l'endomorfisme diagonalitza, per trobar una base en què diagonalitzi només cal prendre la unió de les bases dels espais  $E_\lambda$ .