6 INTEGRACIÓN

(Resumen teórico)

6.1 El teorema fundamental del cálculo

El teorema fundamental del cálculo enlaza dos temas aparentemente lejanos: integración y derivadas.

Teorema fundamental del cálculo. Sea f una función integrable en $[a,b]$ y definamos la función $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Entonces,

i) F es continua en $[a,b]$.

ii) Si f es continua en $c \in (a,b)$, entonces F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

Si f y F son funciones definidas en un intervalo (a,b) y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$, se dice que F es una primitiva de f en (a,b). En el caso frecuente de que la función f sea continua, el teorema anterior adquiere la siguiente forma.

Corolario. Si f es una función continua en $[a,b]$ y definimos la función F en $[a,b]$ por $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$, entonces F es derivable en $[a,b]$ y es una primitiva de f en (a,b).

Obsérvese que la función F está definida mediante integración de la función f y que su derivada $(F'(x) = f(x))$ puede calcularse aun cuando no se sepa expresar F como combinación de funciones elementales.

Como consecuencia del teorema anterior, se deduce la llamada *regla de Barrow*, que permite, para una función f continua en $[a,b]$, calcular su integral en dicho intervalo a partir de una primitiva suya en (a,b).

Regla de Barrow. Si f es continua en $[a, b]$ y F es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

El teorema fundamental del cálculo admite varias versiones. Una de ellas es la siguiente:

Teorema. Sea f una función continua en $[a, b]$, y u, v funciones derivables en un punto x_0 tal que $u(x_0), v(x_0) \in (a, b)$. Entonces la función

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt$$

es derivable en x_0 y $\quad F'(x_o) = f(v(x_0))v'(x_0) - f(u(x_0))u'(x_0)$.

Este teorema se aplica en particular en los casos en que una de las funciones u o v es constante o la identidad.

6.2 Integración numérica

A veces el cálculo de una integral puede ser muy difícil, laborioso o imposible usando la regla de Barrow. En esos casos el valor de la integral se puede aproximar mediante la integración numérica. Los métodos más elementales consisten en considerar particiones y sustituir la función por un polinomio en cada subintervalo. Después, el punto crucial es poder acotar el error cometido con este proceder.

Método de los trapecios

Sea f una función continua en $[a, b]$, y consideremos una partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$ con los puntos equiespaciados y, por tanto, con todos los subintervalos de longitud $h = (b - a)/n$. El método de los trapecios consiste en aproximar la integral de $f(x)$ en $[a, b]$ por la suma de las integrales de las rectas que pasan por $(x_i, f(x_i))$ y $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Si se puede obtener una cota de la derivada segunda, entonces el error puede acotarse. Con precisión, el teorema es el siguiente.

Teorema (Método de los trapecios). Sea f una función con segunda derivada continua en $[a, b]$, $h = (b - a)/n$ y $x_i = a + ih$ para $i = 0, \ldots, n$.
Si $|f''(x)| < M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces el error que se comete con la aproximación $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \simeq h \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(b)}{2} \right)$ es menor que $\dfrac{(b-a)^3}{12n^2} M$.

Método de Simpson

El método de Simpson consiste en aproximar la integral de f en cada intervalo de la forma $[x_i, x_{i+2}]$ mediante el polinomio de segundo grado que pasa por los tres puntos $(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1})), (x_{i+2}, f(x_{i+2}))$.

Si se puede obtener una cota de la derivada cuarta, entonces el error puede acotarse. Con precisión, el teorema es el siguiente.

Teorema (Método de Simpson). Sea f una función con derivada cuarta continua en $[a, b]$, $h = (b-a)/n$ con $n = 2m$ par y $x_i = a + ih$ para $i = 0, \ldots, n$. Si $|f^{(4)}(x)| < M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces el error que se comete con la aproximación

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1}) + f(b)\right)$$

es menor que $\dfrac{(b-a)^5}{180n^4}M$.

6.3 Apéndice 1: La integral de Riemann y propiedades elementales

El cálculo de áreas es un problema muy antiguo en Matemática. El procedimiento para calcular áreas de polígonos (regulares o no, convexos o no) se conoce bien desde hace siglos, y consiste fundamentalmente en la triangulación. El problema importante para nosotros ahora es el cálculo de áreas de superficies planas no poligonales.

La figura plana más elemental con un lado curvo es la limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = a$ y $x = b$ (con $a < b$), y por la gráfica de una función $y = f(x)$. Consideraremos sólo las funciones acotadas en un intervalo $[a, b]$.

Sean $a < b$ dos números reales y $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. La discusión siguiente va encaminada a definir cuándo la función f es integrable en el intervalo $[a, b]$.

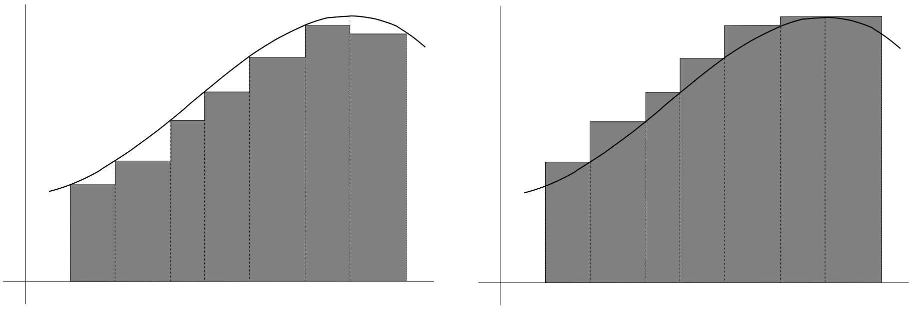
Una partición del intervalo $[a, b]$ es un conjunto ordenado $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$. El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \le i \le n)$ se denomina i-ésimo subintervalo de la partición. Puesto que la función f está acotada en $[a, b]$, también está acotada en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, por lo que tiene ínfimo m_i y supremo M_i en dicho subintervalo. Definimos la suma inferior y la suma superior de f en $[a, b]$ respecto de la partición P por

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

respectivamente.

Si f es continua y positiva, la suma inferior corresponde a la suma de las áreas de n

rectángulos que aproxima por defecto el área que se quiere definir; análogamente, la suma superior la aproxima por exceso (ver figura).



Puede demostrarse la siguiente propiedad: si f es una función acotada en $[a, b]$, y P_1 y P_2 son dos particiones cualesquiera de $[a, b]$, entonces,

$$s(f, P_1) \leq S(f, P_2).$$

Ello implica que el conjunto $\{s(f, P) : P$ es una partición de $[a, b]\}$ está acotado superiormente por cualquier suma superior. Por tanto, tiene supremo, que se denomina integral inferior de f en $[a, b]$ y se denota

$$\underline{\int_a^b} f.$$

Análogamente, el conjunto $\{S(f, P) : P$ es una partición de $[a, b]$ $\}$ está acotado inferiormente por cualquier suma inferior. Por tanto, tiene ínfimo, que se denomina integral superior de f en $[a, b]$ y se denota

$$\overline{\int_a^b} f.$$

Una función acotada f definida en $[a, b]$ es integrable–Riemann (o, simplemente, integrable) en $[a, b]$ si las integrales inferior y superior de f en $[a, b]$ coinciden. Este número común se denomina integral de f en $[a, b]$[1], y se denota por cualquiera de los dos símbolos

$$\int_a^b f \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x)\, dx.$$

La definición de función integrable en un intervalo $[a, b]$ se extiende a los casos $b < a$ y $b = a$ como sigue. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces definimos

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

Si a es un punto del dominio de f, entonces definimos

$$\int_a^a f = 0.$$

[1]La expresión *integral definida de $f(x)$ entre a y b* también se utiliza con frecuencia.

Propiedades elementales de las funciones integrables y de la integral de Riemann

- Toda función acotada monótona en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$
- Toda función continua en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$.
- Toda función acotada que tenga un número finito o numerable de discontinuidades en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$.[a]
- (Linealidad) Si f y g son integrables en $[a, b]$ y α, β números reales, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable en $[a, b]$, y además $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \int_a^b \alpha f + \int_a^b \beta g$.
- Si f y g son integrables en $[a, b]$, entonces fg es integrable en $[a, b]$ (sin embargo, no es cierto, en general, que la integral del producto sea igual al producto de las integrales).
- Si f y g son integrables en $[a, b]$ y f/g está definida en $[a, b]$ y es acotada, entonces f/g es integrable en $[a, b]$ (pero no es cierto, en general, que la integral del cociente sea igual al cociente de las integrales).
- Si f es integrable en $[a, b]$ y g es continua en un intervalo que contenga $f([a, b])$, entonces $g \circ f$ es integrable en $[a, b]$.
- (Monotonía) Si f y g son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces, $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

  En particular, si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$.
- Si f es integrable en $[a, b]$, entonces $|f|$ también lo es, y $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.
- (**Teorema de la media**) Si f es integrable en $[a, b]$, y m y M son, respectivamente, el ínfimo y el supremo de f en $[a, b]$, entonces existe $\mu \in [m, M]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f = \mu(b - a)$. En el caso de que f sea continua en $[a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f = f(c)(b - a)$, y se dice que $f(c)$ es la *media* de f en $[a, b]$.
- (Aditividad respecto del intervalo) Si f es integrable en $[a, b]$, y $a \leq c \leq b$, entonces f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$, y $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

[a] En realidad, la propiedad más general de este tipo es la siguiente: una función f acotada en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$ si, y sólo si, el conjunto D de puntos de discontinuidad de f tiene la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de intervalos $[a_o, b_0], [a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ tal que la reunión de todos ellos contiene D y $\sum_{n=0}^{\infty}(b_i - a_i) < \varepsilon$.

6.4 Apéndice 2: Breve repaso de cálculo de primitivas

Sea $f(x)$ una función definida en un dominio D. El problema que abordamos es determinar las funciones $F(x)$ tales que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in D$. Una tal función $F(x)$ se denomina una primitiva de $f(x)$ en D.

La igualdad $F'(x) = f(x)$ puede verse como una ecuación en la que $f(x)$ es un dato y la función $F(x)$ la incógnita. Ciertamente, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en D, entonces, para toda constante K, la función $G(x) = F(x) + K$ también es una primitiva de $f(x)$ en D, pues, en efecto, $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$. Como consecuencia del teorema del valor medio, dos primitivas de una función en el mismo intervalo difieren en una constante.

Si F es una primitiva de f, se escribe $\displaystyle\int f = F + K$ o $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + K$ y se entiende que el conjunto de primitivas de f en un cierto intervalo es el conjunto de funciones de la forma $x \mapsto F(x) + K$, con K constante. La expresión anterior también se lee la integral (indefinida) de $f(x)$ es $F(x) + K$.

De las propiedades de las derivadas se deduce que si α y β son números reales y f y g funciones con primitivas, entonces

$$\alpha \int f \; + \; \beta \int g = \int (\alpha f + \beta g).$$

Integrales inmediatas

Sea u una función derivable. Las reglas de derivación proporcionan las siguientes reglas de integración inmediata.

$$\int u^r u'\,dx = \frac{u^{r+1}}{r+1} + K \quad (r \neq -1) \qquad \int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + K$$

$$\int u' a^u\,dx = \frac{a^u}{\ln a} + K \quad (a > 0) \qquad \int u' e^u\,dx = e^u + K$$

$$\int u' \cos u\,dx = \sin u + K \qquad \int u' \sin u\,dx = -\cos u + K$$

$$\int \frac{u'}{\sin u}\,dx = \ln\left|\tan\frac{u}{2}\right| + K \qquad \int \frac{u'}{\cos^2 u}\,dx = \tan u + K$$

$$\int \frac{u'}{\sin^2 u}\,dx = -\cot u + K \qquad \int \frac{u'}{\sqrt{a^2 - u^2}}\,dx = \arcsin\frac{u}{a} + K$$

$$\int \frac{u'}{a^2 + u^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + K$$

Cambio de variable

Supongamos que se desea calcular una primitiva $F(x)$ de $f(x)$. Si componemos F con una nueva función g derivable e inyectiva, por la regla de la cadena, tenemos

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

Entonces,

$$\boxed{\int f(g(t))g'(t)dt = F(g(t)) + K.}$$

Si, para una función g adecuada, se sabe calcular $\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t))$, entonces, sustituyendo $g(t)$ por x se obtiene $F(x)$.

Integración por partes

La fórmula de la derivada de un producto de dos funciones u y v es $(uv)' = u'v + uv'$. Tomando primitivas y pasando uno de los términos de la derecha a la izquierda, se obtiene

$$\int uv' = uv - \int vu',$$

que se denomina fórmula de integración por partes. Una notación más usual para esta fórmula es

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Integrales racionales

Recordemos que las funciones racionales son las de la forma $f(x) = P(x)/Q(x)$, con $P(x)$, $Q(x)$ polinomios de coeficientes reales.

Para $\deg P(x) > \deg Q(x)$, existen polinomios $C(x)$ (cociente) y $R(x)$ (resto) tales que $P(x) = Q(x)C(x) + R(x)$ y $R(x) = 0$ o $\deg R(x) < \deg P(x)$. Entonces se tiene

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Como $C(x)$ es un polinomio, se sabe integrar. Si $R(x) = 0$, el problema está resuelto. Si no, se reduce a calcular la integral de una función racional $R(x)/Q(x)$ con el grado del numerador menor que el del denominador. En lo que sigue nos referiremos a este tipo de funciones racionales.

Toda función racional $P(x)/Q(x)$, con $\deg P(x) < \deg Q(x)$, admite una descomposición única en suma de $\deg Q(x)$ funciones racionales simples, inducida por la descomposición de $Q(x)$ en factores irreducibles, de acuerdo con los siguientes criterios:

- Por cada factor de $Q(x)$ de la forma $(x-a)^n$, aparece una suma de n términos como

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

- Por cada factor de $Q(x)$ de la forma $(x^2+bx+c)^n$, aparece una suma de n términos

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(x^2+bx+c)^n}.$$

Los coeficientes numéricos de los numeradores se obtienen identificando $P(x)$ con el numerador que resulta del cálculo efectivo de la suma de fracciones de la descomposición. Entonces se obtiene un sistema lineal, cuya solución da los coeficientes deseados.

La integración de funciones racionales se reduce a la de algunas fracciones simples:

- $\displaystyle\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a|+K.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+K$, donde $n \geq 2$ es un número natural.
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx$, con $b^2-4c<0$.

  En este caso, completando el cuadrado tenemos $x^2+bx+c=(x-p)^2+q^2$ para ciertos p, q. Entonces

$$\int \frac{1}{(x-p)^2+q^2}\,dx = \frac{1}{q^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-p}{q}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{q}\arctan\frac{x-p}{q}+K.$$

- $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx$, with $b^2-4c<0$.

  En este caso, para ciertas constantes M, N se tiene $M(2x+b)+N=Ax+B$. Entonces

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx = M\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx + N\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx.$$

  La primera de estas integrales es inmediata:

$$M\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx = M\ln\left(x^2+bx+c\right),$$

  y la segunda es del tipo anterior.

Primitivas que no son combinaciones de funciones elementales

Casi todas las funciones que hemos considerado son combinaciones de funciones elementales. Pero debemos mencionar que existen funciones continuas con expresiones relativamente simples que no admiten primitivas expresables como combinación de funciones elementales. Algunos ejemplos son los siguientes:

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \frac{e^x}{x}\,dx, \quad \int x^x\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\sqrt{\sin x}}{x}.$$