Àlgebra de límits

1.-Límits finits:

Si $\lim a_n = a$, i $\lim b_n = b$, $a, b \in \mathbf{R}$ aleshores

$$\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$$
$$\lim a_n b_n = ab$$
$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \text{ si } b \neq 0,\ b_n \neq 0\ \forall n$$
$$\lim b_n^{a_n} = b^a \text{ si } b, b_n > 0\ \forall n$$
$$\lim \log a_n = \log a \text{ si } a_n, a > 0\ \forall n$$

2.-Límits infinits:

Si $\lim a_n = a$, $\lim b_n = \lim c_n = +\infty$ i $\lim d_n = 0$, $a \in \mathbf{R}$ aleshores:

$\lim(a_n \pm b_n) = \pm\infty$	$\lim(\pm c_n \pm b_n) = \pm\infty$
$\lim a_n b_n = \pm\infty$ si $a \neq 0$	$\lim c_n b_n = +\infty$
$\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$	$\lim \frac{a_n}{d_n} = \pm\infty$
$\lim \frac{b_n}{a_n} = \pm\infty$	$\lim \frac{b_n}{d_n} = \pm\infty$
$\lim \frac{d_n}{a_n} = 0$	$\lim \frac{d_n}{b_n} = 0$
$\lim a_n^{b_n} = +\infty$ si $a > 1$	$\lim a_n^{b_n} = 0$ si $0 < a < 1$
$\lim b_n^{a_n} = +\infty$ si $a > 0$	$\lim b_n^{a_n} = 0$ si $a < 0$
$\lim c_n^{b_n} = +\infty$	$\lim c_n^{-b_n} = 0$

(quan en el resultat posa $\pm\infty$, vol dir que és $+\infty$, $-\infty$, o ∞ depenent de les conegudes regles del producte de signes)

3.-Indeterminacions:

$$\infty - \infty\ , 0 \cdot \infty\ , \frac{\infty}{\infty}\ , \frac{0}{0}\ , 1^{\infty}\ , 0^0\ , \infty^0$$

RESUM DE RESOLUCIÓ D'INDETERMINACIONS

$$\lim \quad (a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + \cdots + a_1 n + a_0) = \lim \quad n^r (a_r + a_{r-1}\frac{1}{n} + \cdots + a_1 \frac{1}{n^{r-1}} + a_0 \frac{1}{n^r}) = \quad +\infty \cdot a_r = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

$\boxed{\dfrac{\infty}{\infty} \text{ o } \dfrac{0}{0}}$

Si és $\dfrac{P(n)}{Q(n)}$:

$$\begin{cases} \text{grau P(n) > grau Q(n)} \Rightarrow \lim = +\infty \text{ o } -\infty \\ \text{grau P(n) < grau Q(n)} \Rightarrow \lim = 0 \\ \text{grau P(n) = grau Q(n)} \Rightarrow \lim = \text{quocient dels coeficients dels termes de major grau} \end{cases}$$

Si no: dividir numerador i denominador pel terme dominant (el infinit més gran), simplificar,…

$\boxed{\infty - \infty}$

Si en el límit hi ha una resta d'arrels quadrades, es multiplica i es divideix per la suma de les arrels i s'aplica: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Es pot utilitzar:

$$a_n - b_n = a_n \cdot b_n \cdot \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_n} \right)$$

$\boxed{1^\infty}$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

De la mateixa forma: $a_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \lim (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$

Per tant:

$$\left. \begin{array}{l} a_n \to 1 \\ b_n \to +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim a_n^{b_n} = \lim (1 + a_n - 1)^{b_n} = \lim \left[(1 + a_n - 1)^{\frac{1}{a_n - 1}} \right]^{b_n \cdot (a_n - 1)} =$$

$$= e^{\lim b_n \cdot (a_n - 1)}$$

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} a_n \to 1 \\ b_n \to +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim a_n^{b_n} = e^{\lim b_n \cdot (a_n - 1)}}$$

$0 \cdot \infty$

Hi ha dues possibilitats:

i) Es passa a la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

ii) Es passa a la forma 1^{∞}:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to 0 \\ b_n \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 1+a_n \to 1 \\ b_n \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim (1+a_n)^{b_n} = e^{\lim b_n \cdot (a_n)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim a_n b_n = \ln (\lim (1+a_n)^{b_n})$$

0^0 i ∞^0

Es prenen logaritmes i es passa a la indeterminació $0 \cdot \infty$

$$0^0 \quad \left.\begin{array}{l} a_n \to 0 \\ b_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ln {a_n}^{b_n} = b_n \cdot \ln a_n$$

$$\infty^0 \quad \left.\begin{array}{l} a_n \to +\infty \\ b_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ln {a_n}^{b_n} = b_n \cdot \ln a_n$$

4 CRITERIS ÚTILS

Criteri arrel-quocient:

$$\left(a_n \neq 0, \forall n \geq n_0 \wedge \lim \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = l\right) \Rightarrow \lim \sqrt[n]{|a_n|} = l$$

Criteri del quocient:

$$\left(a_n \neq 0, \forall n \geq n_0 \wedge \lim \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = l < 1\right) \Rightarrow \lim a_n = 0 \text{ i}$$

Criteri de l'arrel: $\left(\lim \sqrt[n]{|a_n|} = l < 1\right) \Rightarrow \lim a_n = 0$

Criteri del sandwich:

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim a_n = \lim c_n = l \Rightarrow \lim b_n = l$$