Lógica da Computação - 2019/2

Aula 14/T07 - 18/Sep/2019

Raul Ikeda - rauligs@insper.edu.br

Objetivos

1. Linguagens Recursivas
2. Linguagens Recursivamente Enumeráveis
3. Máquina de Turing

Linguagens Recursivas e Recursivamente Enumeráveis:

A última classe de linguagens da Hierarquia de Chomsky diz respeito às linguagens ditas Recursivamente Enumeráveis. Tais linguagens são representadas por uma Gramática Irrestrita, que possui regras de produção do tipo:

$$\alpha \to \beta$$

$$\alpha \in V^*NV^*,\ \beta \in V^*$$

`>> Ver Ramos et al. Pag 594.`

Reconhecedor: Máquina de Turing

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, <, B, F)$$

Onde:

- Q é o conjunto de estados finitos
- Σ é o alfabeto finito de símbolos de entrada
- Γ é um conjunto, também finito, de todos os símbolos que podem ser lidos ou gravados na fita. $\Sigma \subseteq \Gamma$.
- δ é a função parcial de transição. $Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{E, D\}$.
- q_0 é o estado inicial.
- $<, B \notin \Gamma$ são símbolos que delimitam a fita à esquerda e uma posição em branco, respectivamente.
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais.

Apesar de ser conhecida como Máquina de Turing de fita infinita, a fita é infinita à direita apenas.

Critérios de aceitação:

`>> Ver Ramos et al. Pag. 556.`

Diferença entre LRec e LRE

Definição: Uma Linguagem é dita Recursiva se existe pelo menos uma Máquina de Turing M tal que:

- Para toda cadeia $w \in L$, M para e aceita w.
- Para toda cadeia $z \in \Sigma^* - L$, M para e rejeita z.

`>> Ver Ramos et al. Pag 553.`

Definição: Uma Linguagem é dita Recursivamente Enumerável se for aceita por pelo menos uma Máquina de Turing M. Ou seja:

- Para toda cadeia $w \in L$, M para e aceita w.
- Para toda cadeia $z \in \Sigma^* - L$, M para e rejeita z ou executa uma sequência infinita de movimentações.

`>> Ver Ramos et al. Pag 583.`

Como consequência as Linguagens Recursivas estão contidas no conjunto das Linguagens Recursivamente Enumeráveis. As Linguagens Recursivas também são denominadas **Turing decidíveis**, ao passo que as linguagens Recursivamente Enumeráveis são denominadas **Turing reconhecíveis**.

Extensões da MT

Existem algumas extensões da Máquina de Turing, contudo nenhuma das extensões demonstrou-se ser superior computacionalmente à formulação anterior:

- Múltiplas Trilhas
- Múltiplas Fitas
- Múltiplos Cursores
- Fita Ilimitada em ambos os sentidos
- Transições que deslocam o cursor um número variável de posições
- Transição sem leitura ou sem gravação de símbolo.

`>> Ver Ramos et al. Pag. 558.`

Linguagens que não são Recursivas

`>> Ver Ramos et al. Pag. 562.`

Quem quer ser um milionário? Parte I

Definição: **Cardinalidade** é uma medida acerca do tamanho de um conjunto. A medida é óbvia para conjuntos finitos, mas não tão óbvia para conjuntos infinitos.

Definição: Um conjunto é dito **Enumerável**, ou **Contável** se ele for finito ou se ele possuir a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$. Uma forma simples de verificar é se existe uma função bijetora que mapeia todos os elementos no conjunto alvo aos elementos de $\mathbb{N}$. Ou seja, se é possível parear o conjunto alvo com $\mathbb{N}$.

Consequências:

- $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.
- $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

Definição: (Ramos et al. Pag 54) "Os números transfinitos representam quantidades não-finitas ordenadas de forma crescente. Tais quantidades são representadas por $\aleph_0, \aleph_1, ..., \aleph_n$ de tal forma que $\aleph_{i-1} < \aleph_i < \aleph_{i+1}$."

Portanto:

- $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$
- $\aleph_1 = |\mathbb{R}|$

Teorema de Cantor: "Seja A um conjunto qualquer, $|A| = \aleph_i$. Então $|2^A| > |A|$ e $|2^A| = \aleph_{i+1}$". Ramos et al. Pag 55.

Pergunta do milhão: Existe algum conjunto X, tal que $\aleph_0 < |X| < \aleph_1$?

Linguagens que não são Recursivamente Enumeráveis

Teorema: "O conjunto 2^{Σ^*} (conjunto de todas as **linguagens** definidas sobre o alfabeto Σ) não é enumerável;". Ramos et al. Pag 611.

Teorema: "O conjunto de todas as gramáticas definíveis sobre sobre um certo alfabeto Σ é enumerável;". Ramos et al. Pag 611.

Portanto podemos concluir que existem linguagens que não podem ser representadas por uma gramática e portanto está fora to tipo 0 da Hierarquia de Chomsky.

Teorema: "Se L é uma linguagem recursiva, então $\bar{L}$ também o é." Ver Hopcroft et. al. Pag. 404.

Teorema: "Se uma linguagem L e seu complemento são ambas RE, então L é uma linguagem recursiva." Ver Hopcroft et. al. Pag. 405.

Exemplos:

```
>> Ver Ramos et al. Pag. 610.
```

Hierarquia de Chomsky 2.0

```
>> Ver Ramos et al. Pag. 629.
```

Resumo das Propriedades de Fechamento

	LReg	LLC	LSC	LRec	LRE
União	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
Concatenação	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
Intersecção	$\surd$		$\surd$	$\surd$	$\surd$
Complementação	$\surd$		$\surd$	$\surd$	
Fechamento	$\surd$	$\surd$			$\surd$

Resumo das Questões Decidíveis

	LReg	LLC	LSC	LRec	LRE
$w \in L$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	
$L = \emptyset$	$\surd$	$\surd$			
$L = \Sigma^*$	$\surd$				
$L_1 = L_2$	$\surd$				
$L_1 \subseteq L_2$	$\surd$				
$L_1 \cap L_2 = \emptyset$	$\surd$				

Lista de Exercícios

Ramos et al Cap. 6.9: Exercício 1.
Ramos et al Cap. 7.12: Exercícios 8, 9 e 10.

Próxima aula: Boolos et al. Cap. 3, Hopcroft et al. Cap. 7, Sipser Cap 2.3.

1. Computabilidade
2. Problema da Parada
3. Tese de Church-Turing