Insper

Lógica da Computação - 2020/1

Aula 24/T13 - 20/May/2020

Raul Ikeda - rauligs@insper.edu.br

Objetivos

1. Lógica de Predicados
2. Teorema da Incompletude de Gödel

Observe as afirmações abaixo:

> *Javascript é derivada do C.*
> *Toda linguagem derivada do C é imperativa.*
> *Logo, Javascript é imperativa.*

Você conseguiria modelar essas afirmações usando Lógica Proposicional?

Para não mentir sozinho, podemos testar isso no Prolog:

- https://swish.swi-prolog.org/
- Criar um novo programa
- Rules (quadro esquerdo):

  ```
  deriv_c(javascript).
  imperativa(X) :- deriv_c(X).
  ```

- Query (quadro direito inferior):

  ```
  imperativa(javascript).
  ```

Apenas para ver o poder do Prolog, abrir o exemplo da resolução do Sudoku no interpretador acima.

Lógica de Predicados:

Como dito na aula anterior A Lógica de Primeira Ordem, ou Lógica de Predicados, é uma extensão da Lógica Proposicional, utilizando dos quantificadores $\forall$ e $\exists$. Uma outra característica é possuir sentenças no formato de Predicados, ou $P(X)$ como visto acima, ao passo que a Lp possui apenas premissas ou sentenças sem estruturas. Pode ser **monádica**, quando as funções possuem apenas um argumento, ou **poliádica**, quando possuem vários argumentos.

Exercício: Transcrever em lógica

> Todos os sushis são crus.
> Nenhum cru é de porco.
> Então, nenhum sushi é de porco.

A Linguagem Proposicional é **decidível** (Boolos et al Pag. 246), assim como a Linguagem de Primeira Ordem Monádica. Já a Poliádica é indecidível (Boolos et al Pag. 285).

Questão: Pesquisar sobre Lógica de Segunda Ordem.

Algumas Equivalências:

$$\neg\forall x\, P(x) \Leftrightarrow \exists x\, \neg P(x)$$
$$\neg\exists x\, P(x) \Leftrightarrow \forall x\, \neg P(x)$$
$$\forall x\, \forall y\, P(x,y) \Leftrightarrow \forall y\, \forall x\, P(x,y)$$
$$\exists x\, \exists y\, P(x,y) \Leftrightarrow \exists y\, \exists x\, P(x,y)$$
$$\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Leftrightarrow \forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$$
$$\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x) \Leftrightarrow \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$$

Algumas Inferências:

$$\exists x\, \forall y\, P(x,y) \Rightarrow \forall y\, \exists x\, P(x,y)$$
$$\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x) \Rightarrow \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$$
$$\exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$$
$$\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$$

Teorema da Dedução:

1. Lp: Seja Γ um conjunto de fórmulas e A e B fórmulas. Então

$$\Gamma, A \vDash B \Leftrightarrow \Gamma \vDash A \rightarrow B$$

2. Lpo: Considere que $\Gamma = \xi_1, ..., \xi_n$ e φ são fórmulas. Então

$$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \vdash \xi_1 \rightarrow (\xi_2 \rightarrow (... \rightarrow (\xi_n \rightarrow \varphi)...))$$

Teoremas da Incompletude de Gödel

Seja **Q** um conjunto finito de *axiomas da aritimética minimal.*

> **Primeiro Teorema de Incompletude de Gödel**: "Não há nenhuma extensão axiomatizável, consistente e completa de **Q**." Boolos et al., Pag. 284.

Considere agora os *axiomas da aritmética de Peano* como um conjunto infinito de axiomas, através de passos indutivos, que estende **Q**. Ainda, considere a teoria **P** da *aritmética de Peano* como o conjunto de todas as sentenças da linguagem da aritmética que são demonstráveis a partir desses axiomas.

Segundo Teorema de Incompletude de Gödel: "Seja **T** uma extensão consistente e axiomatizável de **P**. Então a sentença de consistência para **T** não é demonstrável em **T**." Boolos et al., Pag. 295.

Para verificar as consequências dos teoremas, precisamos também:

Teorema da indecidibilidade essencial: "Nenhuma extensão consistente de **Q** é decidível (e, em particular, a própria **Q** é indecidível)" Boolos et al., Pag. 284.

Traduzindo e demonstrando informalmente:

```
>> Ver Boolos et al. Cap. 17.
```

Próxima aula:

- Verificação de Programas

Referências:

- Corrêa da Silva et al. Cap 7.