Lógica da Computação - 2019/2

Aula 25/T11 - 06/Nov/2019

Raul Ikeda - rauligs@insper.edu.br

Objetivos

1. Provas de Teoremas

Transformando Texto em Premissas

No exemplo abaixo realizamos a conversão de um texto na forma de afirmações lógicas, que serão úteis para realizar as provas formais das proposições.

Exemplo - Conjectura de Goldbach: Todo inteiro par maior que 2 é a soma de dois primos.

Note o uso dos quantificadores $\forall$ e $\exists$, que não estão definidos na Lógica Proposicional, mas sim na Lógica de Primeira Ordem.

Abaixo estão algumas definições alguns termos e em seguida algumas técnicas de provas.

> **Definição**: "**Definição** é uma explicação exata e não-ambígua de uma expressão."
> **Definição**: "**Teorema** é uma afirmação que é verdadeira e foi provada ser verdadeira."
> **Definição**: "**Lema** é um teorema cujo propósito é ajudar a provar outro teorema."
> **Definição**: "**Corolário** é um resultado que é um resultado imediato de um teorema ou proposição."
> **Definição**: "**Proposição** é uma afirmação verdadeira mas não tão significante como um teorema."
> **Definição**: "**Prova** é uma verificação escrita que demonstra que um teorema é definitivamente e inequivocamente verdadeiro."

Prova Direta ou Prova por Construção

> É o resultado de aplicações sucessivas de regras matemáticas ou de derivações lógicas. É útil para realizar provas do formato Se/Então.

Exemplo 1 - Proposição: Se x é ímpar, então x^2 também é ímpar.

Exemplo 2 - Proposição: Se $n \in \mathbb{N}$, então $1 + (-1)^n(2n-1)$ é múltiplo de 4.

Exemplo 3 (Contraposição) - Proposição: Suponha $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $12a$ não possui o mesmo resto de divisão de $12b$, então n não divide 12.

Prova por Contradição ou Prova por Absurdo

É uma outra forma de realizar provas de proposições de um modo geral, onde talvez a Prova Direta seria complicada de se realizar. Consiste em assumir como hipótese que a conclusão é falsa e mostrar que isso leva a uma contradição (absurdo).

Exemplo 4 - Proposição: Se $a, b \in \mathbb{N}$, então $a^2 - 4b \neq 2$.

Exemplo 5 - Proposição: Todo número racional diferente de zero pode ser expressado como um produto de dois números irracionais.

Prova por Indução

> É uma forma de provar teoremas que possuem inúmeras proposições dependentes entre si. Primeiramente provamos a primeira proposição, ou **caso base**. Em seguida demonstra-se o **passo indutivo**, na qual dada uma determinada proposição, é possível demonstrar sua dependência de uma proposição anterior. Ao final, por **hipótese indutiva**, demonstra-se que com o caso base e o passo indutivo, qualquer proposição do teorema é verdadeiro.

Exemplo 6 - Conjectura: A soma de todos os n primeiros números naturais ímpares é igual a n^2.

Lista de Exercícios

Prova Direta:

1. Se a é um inteiro ímpar, então $a^2 + 3a + 5$ é ímpar.
2. Suponha $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Se a divide b e c divide d, então ac divide bd.
3. Se $n \in \mathbb{Z}$, então $n^2 + 3n + 4$ é par.
4. Se $n \in \mathbb{N}$, então $\binom{2n}{n}$ é par.

Prova Direta via Contraposição:

1. Se n é ímpar, então 8 divide $n^2 - 1$.
2. Seja $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Se o resto da divisão de a por n é igual ao resto da divisão de b por n, então o resto de divisão de a^3 e b^3 por n também são iguais.
3. Se $n \in \mathbb{N}$ e $2^n - 1$ é primo, então n é primo.

Prova por Contradição:

1. Prove que $\sqrt{3}$ é irracional.
2. Suponha $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Se $a^2 + b^2 = c^2$, então a ou b é par.
3. Para qualquer $x \in [\pi/2, \pi]$, $sinx - cosx \geq 1$.
4. O produto de quaisquer 5 números inteiros consecutivos é divisível por 120. Use qualquer um dos três métodos anteriores.

Prova por Indução:

1. Se $n \in \mathbb{N}$, então $\sum\limits_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2$.
2. Mostre que a Série Harmônica ($\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$) diverge. Dica: mostrar que $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \geq 1 + \frac{n}{2}$
3. Basel Problem - Mostre que $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

Próxima Quarta: Corrêa da Silva et al. Cap. 1.

1. Introdução à Lógica Proposicional