INDUKSI MATEMATIKA

IF1220 Matematika Diskrit

Narendra Dharma Wistara Marpaung

NIM 13524044

Semester 2 Tahun 2025

Contents

1 Pendahuluan **1**

2 Prinsip Induksi Matematika **1**

2.1 Prinsip Induksi Sederhana 1

2.2 Prinsip Induksi yang Dirampatkan 2

2.3 Prinsip Induksi Kuat 4

3 Aplikasi Induksi Matematika **6**

Referensi

1. Rinaldi Munir. (2025). Homepage Rinaldi Munir. https://informatika.stei.itb.ac.id/ rinaldi.munir/Matdis/matdis.htm
   **Salindia bahan pelajaran terdapat di tautan tersebut.*

2. Kenneth H. Rosen. (2019). *Discrete mathematics and its applications (Eight Edition)*. McGraw-Hill.

1 Pendahuluan

Definisi 1.1 – Induksi Matematika

Induksi Matematika adalah metode pembuktian untuk proposisi yang berkaitan dengan bilangan bulat

Contoh induksi matematika:

1. Buktikan bahwa jumlah n buah bilangan bulat positif pertama adalah $n(n+1)/2$.
2. Buktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Melalui induksi matematik, kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam himpunan kebenaran dengan sejumlah langkah terbatas. Hal ini dilakukan karena tidak mungkin membuktikan suatu proposisi dengan mencoba semua bilangan bulat.

2 Prinsip Induksi Matematika

2.1 Prinsip Induksi Sederhana

Teorema 2.1 – Prinsip Induksi Sederhana

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif. Untuk membuktikan suatu proposisi $p(n)$ benar menggunakan induksi matematika, maka kita perlu menunjukkan bahwa:

i) **Basis Induksi** : $p(1)$ benar.

ii) **Langkah Induksi** : jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar, untuk setiap $n \geq 1$.

Langkah induksi berisi asumsi yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut disebut **hipotesis induksi**. Apabila kita sudah dapat menunjukkan kedua langkah tersebut benar, maka terbukti bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan bulat positif n.

Contoh 2.1

Buktikan bahwa jumlah n bilangan bulat positif pertama adalah $n(n+1)/2$.

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan proposisi bahwa jumlah n bilangan bulat positif pertama adalah $n(n+1)/2$, yaitu

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n+1)/2$$

Penyelesaian:

i) **Basis Induksi:** $p(1)$ benar, karena untuk $n = 1$ kita peroleh:

$$1 = 1(1+1)/2 = 1$$

ii) **Langkah Induksi:** Asumsikan $p(n)$ benar, dengan kata lain asumsikan bahwa

$$p(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = n\frac{(n+1)}{2}$$

benar (hipotesis induksi). Kita perlu menunjukkan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu:

$$p(n+1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = (n+1)\frac{(n+1)+1}{2}$$

dengan cara:

$$\begin{aligned}
p(n+1) &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) \\
&= \underbrace{(1 + 2 + 3 + \cdots + n)}_{n\frac{(n+1)}{2}\text{, menurut hipotesis induksi}} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= (n+1)\frac{(n+2)}{2} \\
&= (n+1)\frac{(n+1)+1}{2}.
\end{aligned}$$

Langkah (i) dan (ii) sudah terbukti benar, maka menurut induksi matematika, $p(n)$ benar untuk setiap bilangan bulat positif n.

2.2 Prinsip Induksi yang Dirampatkan

Prinsip induksi sederhana hanya dapat digunakan untuk $n \geq 1$. Namun, untuk sembarang $n \geq n_0$, kita dapat menggunakan prinsip induksi yang dirampatkan.

Teorema 2.2 – Prinsip Induksi yang Dirampatkan

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif. Untuk membuktikan suatu proposisi $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$ menggunakan induksi yang dirampatkan, maka kita perlu menunjukkan bahwa:

i) **Basis Induksi** : $p(n_0)$ benar.

ii) **Langkah Induksi** : jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar, untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$

Contoh 2.2 Untuk semua $n \geq 1$, buktikan dengan induksi matematika bahwa n^3+2n adalah kelipatan 3. Buktikan pernyataan ini menggunakan induksi matematika.

Misalkan, $p(n)$ adalah proposisi yang menyatakan n^3+2n adalah kelipatan 3.

Penyelesaian:

i) **Basis Induksi:** $p(1)$ benar, karena $p(1) = (1)^3 + 2(1) = 3$, yang merupakan kelipatan 3.

ii) **Langkah Induksi:** Asumsikan $p(n)$ benar, dengan kata lain asumsikan bahwa

$$p(n) = n^3 + 2n$$

benar. Kita perlu menunjukkan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu:

$$p(n+1) = (n+1)^3 + 2(n+1)$$

dengan cara:

$$\begin{aligned} p(n+1) &= (n+1)^3 + 2(n+1) \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 \\ &= n^3 + 2n + (3n^2 + 5n + 3) \\ &= n^3 + 2n + 3(n^2 + n + 1). \end{aligned}$$

$n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3 (menurut hipotesis induksi) dan $3(n^2+n+1)$ juga merupakan kelipatan 3. Oleh karena itu, $p(n+1)$ juga kelipatan 3.

Langkah (i) dan (ii) sudah terbukti benar, maka menurut induksi matematika, $p(n)$ benar untuk setiap bilangan bulat positif n.

Contoh 2.3

Untuk tiap $n \geq 3$, jumlah sudut di dalam sebuah poligon dengan n sisi adalah $180(n-2)^o$. Buktikan pernyataan ini menggunakan induksi matematika.

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi yang menyatakan bahwa jumlah sudut di dalam sebuah poligon dengan n sisi adalah $180(n-2)^o$.

Penyelesaian:

i) **Basis Induksi:** $p(3)$ benar, karena $p(3) = 180(3-2) = 180^o$. Di mana jumlah sudut dalam poligon 3 sudut (segitiga) adalah 180^o.

ii) **Langkah Induksi:** Asumsikan $p(n)$ benar, dengan kata lain asumsikan bahwa

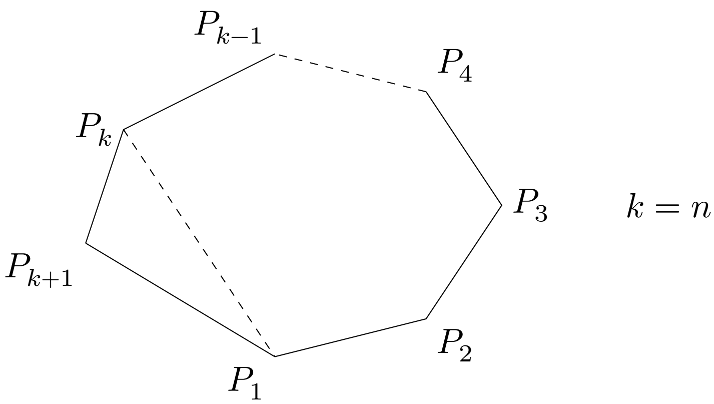
$$p(n) = 180(n-2)^o$$

benar. Kita perlu menunjukkan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu:

$$p(n+1) = 180((n+1)-2)^o$$

dengan cara:

$$\begin{aligned} p(n+1) &= 180((n+1)-2)^o \\ &= 180(n-1)^o \\ &= 180(n-2)^o + 180^o. \end{aligned}$$



Terlihat pada poligon di atas dengan $k = n$ bahwa jumlah sudut dalam poligon $k+1$ sudut adalah jumlah sudut dalam poligon k, yaitu $180(n-2)^o$ ditambah sudut luar yang terbentuk oleh dua sisi yang bertemu di titik P_{k+1} yaitu 180^o. Oleh karena itu, $p(n+1)$ juga benar.

2.3 Prinsip Induksi Kuat

Terkadang, diperlukan adanya lebih dari satu hipotesis induksi untuk membuktikan sebuah pernyataan. Untuk itu, kita dapat menggunakan prinsip induksi kuat (*strongly induction principle*).

Teorema 2.3 – Prinsip Induksi Kuat

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat. Untuk membuktikkan sebuah proposisi $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$ menggunakan induksi kuat, maka kita perlu menunjukkan bahwa:

i) **Basis Induksi**: $p(n_0)$ benar.

ii) **Langkah Induksi**: jika $p(n_0), p(n_0 + 1), \dots, p(n)$ benar, maka $p(n + 1)$ juga benar, untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.

Pada langkah induksi, terdapat lebih dari satu hipotesis, yaitu mengasumsikan $p(n_0), p(n_0 + 1), \dots, p(n)$ benar.

Contoh 2.4

Bilangan bulat positif disebut bilangan prima jika dan hanya jika bilangan bulat tersebut hanya habis dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri. Buktikan dengan prinsip induksi kuat bahwa tiap bilangan bulat $n(n \geq 2)$ dapat dinyatakan dengan perkalian dari satu atau lebih bilangan prima.

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi yang menyatakan bahwa bilangan bulat positif n dapat dinyatakan dengan perkalian dari satu atau lebih bilangan prima.

Penyelesaian:

i) **Basis Induksi:** $p(2)$ benar, karena 2 adalah bilangan prima dan dapat dinyatakan sebagai perkalian dari satu buah bilangan prima, yaitu dirinya sendiri.

ii) **Langkah Induksi:** Asumsikan $p(n_0), p(n_0+1), \dots, p(n)$ benar, dengan kata lain asumsikan bahwa bilangan bulat positif $2, 3, \dots, n$ dapat dinyatakan dengan perkalian dari satu atau lebih bilangan prima. Kita perlu menunjukkan bahwa $p(n+1)$ juga benar, terdapat dua kemungkinan nilai $n + 1$:

- Jika $n+1$ adalah bilangan prima, maka $p(n+1)$ benar, karena $n+1$ dapat dinyatakan sebagai perkalian dari satu buah bilangan prima, yaitu dirinya sendiri.
- Jika $n + 1$ bukan bilangan prima, maka terdapat bilangan bulat positif a dan b sehingga $n+1 = ab$, di mana $2 \leq a \leq b < n+1$. Selain itu, a dan b dapat dinyatakan juga sebagai perkalian dari satu atau lebih bilangan positif, karena berada di antara 2 dan n (sesuai hipotesis induksi). Ini berarti, $n + 1$ jelas dapat dinyatakan sebagai perkalian dari dua bilangan bulat positif (a dan b).

Pada langkah (ii) kita menggunakan lebih dari satu hipotesis, yaitu mengasumsikan $2, 3, \dots, n$ dapat dinyatakan sebagai perkalian dari satu atau lebih bilangan prima. Dengan menggunakan banyak hipotesis induksi, pembuktiannya menjadi lebih kuat. Jika hanya satu hipotesisnya, yaitu n dapat dinyatakan sebagai perkalian dari satu atau lebih bilangan prima, maka pembuktiannya menjadi kurang kuat.

3 Aplikasi Induksi Matematika

Sebagai seorang yang berkutat di dunia informatika dan pemrograman, kita dapat menggunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa algoritma yang dibuat benar.

Contoh 3.1

```
function Exp(a: integer, m: integer)
{ Fungsi untuk menghitung a^m }
DEKLARASI
    k, r: integer
ALGORITMA
    r <- 1
    k <- m
    while (k > 0)
        r <- r * a
        k <- k - 1
    end
    return r
    { Computes: r = a^m
        Loop invariant = r x a^k = a^m
    }
```

Buktikan algoritma di atas benar dengan induksi matematika, yaitu di akhir algoritma fungsi mengembalikan nilai a^m

Misal r_n dan k_n adalah nilai berturut-turut dari r dan k pada iterasi ke-n. Misalkan $p(n)$ adalah proposisi: $r_n \times a_n^k = a^m, n \geq 0$.

Penyelesaian:

i) **Basis Induksi**: Untuk $n = 0$, maka $r_0 = 1$ dan $k_0 = m$. Dengan kata lain, $p(0)$ benar, karena $1 \times a^m = a^m$.

ii) **Langkah Induksi**: Asumsikan $p(n)$ benar, dengan kata lain asumsikan bahwa

$$p(n) = r_n \times a^{k_n} = a^m$$

benar. Kita perlu menunjukkan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu:

$$p(n+1) = r_{n+1} \times a^{k_{n+1}} = a^m$$

dengan cara:

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n \times a \text{dan} k_{n+1} = k_n - 1 \\ r_{n+1} \times a^{k_{n+1}} &= (r_n \times a) \times a^{k_n - 1} \\ &= (r_n \times a) \times a^{k_n} \times a^{-1} \\ &= r_n \times a^{k_n} = a^m \end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $r_n \times a^{k_n} = a^m$ untuk setiap iterasi $n \geq 0$.

Langkah (i) dan (ii) sudah terbukti benar, maka menurut induksi matematika, $p(n)$ benar untuk setiap bilangan bulat positif n.

Untuk lebih banyak contoh dan latihan, silakan lihat salindia Induksi Matematika Bagian 1 dan Induksi Matematika Bagian 2.