Conocimientos previos de Matemáticas

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Departamento de Matemáticas – Universidad de Huelva

Autores

El presente documento se ha obtenido de los apuntes del Curso 0 para la Facultad de Ciencias experimentales impartido durante el mes de septiembre de 2007 cuyos autores fueron los profesores:

D. Juan Manuel Delgado Sánchez, Dña. Patricia Díaz Rosa, Dña. Mónica Esquivel Rosado, D. Antonio Lozano Palacio, Dña. Begoña Marchena González, D. Cándido Piñeiro Gómez, D. Ramón Rodríguez Álvarez, D. Enrique Serrano Aguilar e Dña. Inmaculada Ventura Molina.

Índice general

Capítulo 1

Cálculo Operacional

1.1. Potencia de un número real

Si a es un número real no nulo y $n \in \mathbb{N}$, se definen

$$a^n = a \overset{(n)}{\cdots} a \qquad , \qquad a^0 = 1 \qquad \text{y} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Propiedades

1) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

4) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

5) $(a^n)^m = a^{nm}$

1.2. Raíces reales de un número real: Radicales

Si a es un número real y $n \in \mathbb{N}$, se llama ***raíz n-ésima*** de a a todo número real x tal que $x^n = a$ (así, en cierta forma, hablamos de invertir la potencia n-ésima).

¿Cuántas raíces n-ésimas tiene un número $a \in \mathbb{R}$?

- La única raíz n-ésima de 0 es 0. Escribimos $\sqrt[n]{0} = 0$.
- Si n es par, todo $a > 0$ tiene dos raíces n-ésimas que son números opuestos. Las designaremos $\sqrt[n]{a}$ y $-\sqrt[n]{a}$.

- Si n es par y $a < 0$, no existe raíz n-ésima real de a.
- Si n es impar, todo número real $a \neq 0$ tiene una única raíz n-ésima del mismo signo que a. Observemos que si n es impar y $a > 0$, entonces $(-\sqrt[n]{a})^n = -(\sqrt[n]{a})^n = -a$, lo que significa que $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Las consideraciones anteriores permiten en todos los cálculos que las raíces se puedan transformar en otras cuyo radicando es positivo por lo que en adelante sólo nos referimos a radicales $\sqrt[n]{a}$, con radicando $a > 0$ e índice $n \in \mathbb{N}$.

Propiedades

Si $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $n, m \in \mathbb{N}$, se verifica que:

1) $\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[n]{a^p \cdot b^q}$ $\qquad \sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[m]{b^q} = \sqrt[nm]{a^{mp} \cdot b^{nq}}$

2) $\sqrt[n]{a^p} : \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[n]{a^p : b^q}$ $\qquad \sqrt[n]{a^p} : \sqrt[m]{b^q} = \sqrt[nm]{a^{mp} : b^{nq}}$

3) $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$

4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

5) $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$ (sirve para extraer o introducir factores en un radical)

Los radicales se pueden expresar como potencias de exponente fraccionario, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, siéndoles de aplicación las propiedades de las potencias y, para los índices, la simplificación de fracciones produce radicales equivalentes y la reducción a común denominador radicales del mismo índice.

Las expresiones radicales $\alpha\sqrt[n]{a}$ y $\beta\sqrt[m]{b}$ se denominan semejantes si $n = m$ y $a = b$. Se pueden efectuar sumas y restas de expresiones radicales semejantes.

Ejemplo 1.2.1.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{24} + 7\sqrt[3]{192} - 2\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{81} &= \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} + 7\sqrt[3]{2^6 \cdot 3} - 2\sqrt[3]{5^3 \cdot 3} - \sqrt[3]{3^4} \\
&= 2\sqrt[3]{3} + 2^2 \cdot 7\sqrt[3]{3} - 2 \cdot 5\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} \\
&= (2 + 28 - 10 - 3)\sqrt[3]{3} \\
&= 17\sqrt[3]{3}
\end{aligned}$$

Racionalizar una expresión fraccionaria en la que aparecen radicales en el denominador es transformarla en otra equivalente cuyo denominador no contenga raíces. Los casos más habituales de racionalización son los siguientes:

- En el denominador aparece un factor radical de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$: Se multiplican numerador y denominador de la fracción por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

Ejemplos 1.2.2.

$$\frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$\frac{6}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{6\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}} = \frac{6\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{6\sqrt[5]{3^3}}{3} = 2\sqrt[5]{3^3}$$

- En el denominador aparece una suma o una diferencia con raíces cuadradas: Se multiplican numerador y denominador por la expresión conjugada del denominador (el conjugado de la suma es la diferencia y viceversa).

Ejemplos 1.2.3.

$$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{1^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2-\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{18}-\sqrt{12}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}-4\sqrt{3}$$

1.3. Logaritmos

Si $b > 0$ y $b \neq 1$ se llama ***logaritmo en base*** $\mathbf{b}$ ***de*** $\mathbf{a > 0}$ al exponente $x \in \mathbb{R}$ al que se debe elevar b para que dé como resultado a. Es decir $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$.

Propiedades

1) $\log_b b = 1$ y $\log_b 1 = 0$

2) $\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c$

3) $\log_b(a : c) = \log_b a - \log_b c$

4) $\log_b(a^p) = p\log_b a$

5) $\log_b(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}\log_b a$

6) $\log_b a = \log_d a \cdot \log_b d$ (Cambio de base).

1.4. Monomios y polinomios

Monomio en la ***indeterminada*** x es toda expresión de la forma ax^n donde el número real a es el ***coeficiente*** y el número natural n su ***grado.***

Los monomios ax^n y bx^m coinciden si $a = b$ y $n = m$.

Se pueden sumar o restar monomios del mismo grado: $ax^n \pm bx^n = (a \pm b)x^n$.

Se pueden multiplicar monomios arbitrarios: $(ax^n) \cdot (bx^m) = (ab)x^{n+m}$.

Si $n \geq m$, $(ax^n) : (bx^m) = (a : b)x^{n-m}$.

Polinomio es una suma indicada de monomios. El grado del polinomio es el grado de su monomio de mayor grado. El polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, donde $a_n \neq 0$, es de grado n, su coeficiente principal es a_n y su término independiente es a_0.

División de polinomios: Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios con $\mathrm{gr}[P(x)] \geq \mathrm{gr}[Q(x)]$, existen $C(x)$ y $R(x)$, únicos, tales que

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x) \quad \text{y} \quad \text{gr[R(x)]} < \text{gr[Q(x)]}$$

El grado de $C(x)$ siempre es igual a la diferencia entre los grados de $P(x)$ y $Q(x)$.

En el caso de ser $R(x) \equiv 0$, decimos que $Q(x)$ es divisor de $P(x)$ ó que $P(x)$ es múltiplo de $Q(x)$.

Teorema del resto

Si $a \in \mathbb{R}$, el resto de dividir el polinomio $P(x)$ por el binomio $x - a$ es igual al valor numérico $P(a)$.

En particular, $P(x)$ es divisible por $x - a$ si y sólo si $P(a) = 0$.

La regla de Ruffini permite hacer las divisiones del tipo $P(x) : (x - a)$ con comodidad.

Ejemplo: Si queremos dividir $-x^4 + 3x^3 - 15x + 7$ entre $x + 2$, por la regla de Ruffini procedemos así:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & -1 & 3 & 0 & -15 & 7 \\
-2 & \downarrow & 2 & -10 & 20 & -10 \\
\hline
 & -1 & 5 & -10 & 5 & \underline{|-3}
\end{array}$$

de forma que el cociente de la división es $-x^3 + 5x^2 - 10x + 5$ y el resto es -3.

1.4.1. Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio es descomponerlo en factores irreducibles de alguna de las formas $(x - a)$ ó $(px^2 + qx + r)$ con $q^2 - 4pr < 0$. Para conseguirlo necesitamos hallar sus raíces reales.

Raíz (ó cero) de $P(x)$ es todo $a \in \mathbb{R}$ tal que $P(a) = 0$ lo que, según hemos visto anteriormente, equivale a que $(x - a)$ es un divisor de $P(x)$.

Algunas pautas a seguir en la localización de raíces y la factorización de un polinomio:

- Las raíces enteras del polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con coeficientes enteros se encuentran entre los divisores de su término independiente a_0.
- Las raíces racionales de un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con coeficientes enteros se encuentran entre las fracciones $\dfrac{p}{q}$ tales que su numerador p es divisor de a_0 y su denominador q es divisor del coeficiente principal a_n.
- Cada vez que encontremos una raíz, a, del polinomio $P(x)$, podemos dividir $P(x)$ por $(x-a)$ y seguir con el polinomio cociente que tiene grado inferior en una unidad.
- El cálculo las raíces irracionales de un polinomio de grado superior a dos es un problema que no abordamos de momento. Las raíces irracionales de un polinomio de segundo grado se obtienen resolviendo la ecuación correspondiente.
- Un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces reales.

Ejemplo 1.4.1. Si consideramos el polinomio $P(x) = 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 1$, sus posibles raíces enteras son 1 y -1. Como $P(1) = 8$, 1 no es raíz; al ser $P(-1) = 0$, -1 sí es raíz. Dividimos $P(x)$ entre $(x+1)$ obteniendo que $P(x) = (x+1)(2x^4+x^3+x^2+x-1)$. Como $2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$ vuelve a tener la raíz -1, volvemos a dividir por $(x + 1)$ obteniendo que $P(x) = (x + 1)^2(2x^3 - x^2 + 2x - 1)$. Comprobamos que -1 no es raíz de $(2x^3 - x^2 + 2x - 1)$ y obtenemos que sus posibles raíces racionales son $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$. Al ser $P(-\frac{1}{2}) = -\frac{5}{2}$ y $P(\frac{1}{2}) = 0$, tiene la raíz racional $\frac{1}{2}$ y podemos dividir por $(x-\frac{1}{2})$, obteniendo así que $P(x) = (x + 1)^2(x - \frac{1}{2})(2x^2 + 2)$. Ya que el cociente resultante $2x^2 + 2$ no tiene raíces reales, la descomposición factorial de $P(x)$ es $P(x) = 2(x + 1)^2(x - \frac{1}{2})(x^2 + 1)$.

1.4.2. Potencia n-ésima de un binomio (Binomio de Newton)

Para cada $k \in \mathbb{N}$, se define el ***factorial de*** $k > 0$ como $k! = 1 \cdot 2 \cdot (k - 1) \cdot k$. Se conviene que sea $0! = 1$.

Se verifica que $k! = (k - 1)! \cdot k$.

Se define el ***número combinatorio*** de numerador n y orden k como $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ para cada $k = 0, 1, \cdots, n$.

Se puede comprobar con facilidad que son ciertas las siguientes identidades:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad ; \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Si $n \in \mathbb{N}$ y a y b son números reales, se verifica:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Algunos casos particulares:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

1.5. Valor absoluto

Dado un número $x \in \mathbb{R}$, se define el ***valor absoluto*** de x como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Propiedades

1) $|x| \geq 0$

2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3) $-|x| \leq x \leq |x|$

4) $|x| = |-x|$, en particular $|x-y| = |y-x|$

5) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, en particular $|x|^2 = |x^2| = x^2$

6) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$

7) Si $r > 0$ se tienen que $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$ (la equivalencia sigue siendo cierta si cambiamos $\leq$ por $<$)

8) $|x| \geq k \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq k \\ \text{ó} \\ x \leq -k \end{cases}$ (la propiedad se mantiene considerando todas las desigualdades estrictas)

9) Desigualdad triangular $\quad |x+y| \leq |x| + |y|$

10) $|x-y| \geq \left| |x| - |y| \right|$

11) $|x| = c \Rightarrow x = \pm c$ en particular $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$

Notas:

(1) $|x| = \sqrt{x^2}$, más general si $n \in \mathbb{N}$ es par, $|x| = \sqrt[n]{x^n}$.

(2) $|a-b| = |b-a|$ representa la distancia entre a y b. Por tanto el valor absoluto de un número representa la distancia del punto al origen. Observe que la distancia del 3 al origen es 3 unidades, $|3| = 3$, igualmente la distancia del punto -3 al origen es 3, $|-3| = 3$.

1.6. Desigualdades. Propiedades

Las siguientes propiedades se deducen de los axiomas de orden. Éstas nos serán útiles a la hora de trabajar con números reales, en especial con inecuaciones.

1) Propiedad transitiva. Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

2) Si $a < b$ se tiene que $a + c < b + c$, para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

3) Si $a < b$ y $c > 0$ se tiene que $a \cdot c < b \cdot c$.

4) Si $a < b$ y $c < 0$ se tiene que $a \cdot c > b \cdot c$.

5) Si $a < b$ es $-a > -b$. En particular si $a < 0$, es $-a > 0$.

6) Si $a \cdot b > 0$ entonces a y b son o ambos positivos o ambos negativos.

7) Si $a \cdot b < 0$ entonces a y b tienen signos opuestos.

1.7. Ecuaciones. Definiciones y propiedades básicas

- Una ***ecuación*** es una igualdad que contiene una o más incógnitas.
- Hay muchas formas de clasificar las ecuaciones, una de ellas consiste en expresar el número de incógnitas.

  Ejemplo: $3x - 2y = 5$ es una ecuación con dos incógnitas x e y.
- El ***grado*** de una ecuación con una incógnita y expresada a través de una igualdad polinómica coincide con el grado del polinomio.

  Ejemplo: $4x^3 + 7x^2 + 2 = 0$ es una ecuación de grado 3.

- Resolver una ecuación consiste en hallar los valores que deben tomar las incógnitas para que la igualdad se cumpla.

  Ejemplo: $x^2 - 9 = 0$ es una ecuación con una incógnita x y dos soluciones, $x = -3; x = 3$.

- Debemos tener cuidado ya que no todas las ecuaciones tienen solución.

  Ejemplo: En el conjunto de los números reales no existe x tal que $x^2 + 1 = 0$ tenga solución.

- No debe confundirse ecuación con identidad.

  Ejemplo: La expresión $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ no es una ecuación sino una identidad, ya que ésta se cumple de forma universal para cualquier valor de x que tomemos.

  Una sencilla técnica para comprobar que estamos ante una identidad consiste en pasar todos los términos a un solo miembro de la igualdad y obtendremos $0 = 0$ (compruébese en el ejemplo).

Propiedades que se usan en el proceso de resolución de ecuaciones:

-> *Regla 1*: Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta un mismo número, se obtiene otra ecuación equivalente, esto es: $a = b \Leftrightarrow a \pm c = b \pm c$, siendo a, b y c números reales.

-> *Regla 2*: Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por un número real distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente, esto es: $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$, siendo a, b, $c \neq 0$, números reales.

-> *Regla 3*: Si el producto de dos números reales es igual a cero, entonces al menos uno de los números debe ser igual a cero, esto es: $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ó $b = 0$, siendo a y b números reales.

1.7.1. Tipos de ecuación, técnicas de resolución y ejemplos

I) Ecuación lineal con una incógnita y con coeficientes enteros.

Técnica: pasamos la incógnita a un miembro de la igualdad y los coeficientes al otro, usando las reglas vistas en la sección anterior.

Ejemplo: Resolver $3x - 44 = 2x - 35; \Rightarrow 3x - 2x = 44 - 35 \Rightarrow$ la solución es $x = 9$

II) Ecuación lineal con una incógnita y con coeficientes racionales.

Técnica: Multiplicamos la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores de los coeficientes y queda reducida al caso I).

Ejemplo: Resolver $\dfrac{x-3}{6}+\dfrac{2x-1}{3}=5(x-2)+5$; dado que m.c.m$(3,6)=6$, multiplicamos la ecuación por 6, tenemos $x-3+4x-2=30(x-2)+30 \Rightarrow x+4x-30x = 3+2-60+30 \Rightarrow -25x=-25 \Rightarrow$ la solución es $x=1$.

III) Ecuación con una incógnita, polinómica de segundo grado.

Técnica: Se utiliza la fórmula de la ecuación de segundo grado: $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, con $a\neq 0$.

Ejemplo: Resolver $4x^2+5x-9=0$.

IV) Ecuación con una incógnita, polinómica de grado mayor o igual a tres.

Técnica: Se pretende factorizar el polinomio, para ello podemos intentar hallar las raíces aplicando la regla de Ruffini.

V) Si la ecuación es bicuadrada, es decir de la forma $ax^4+bx^2+c=0$ entonces la fórmula de la ecuación de segundo grado nos permite hallar la solución, previo cambio de variable.

Ejemplo: $x^4-10x^2+9=0$, es una ecuación bicuadrada $\Rightarrow x^2=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2} \Rightarrow x^2 = 9; x^2=1 \Rightarrow$ las soluciones son: $x=-3, x=-1, x=1, x=3$.

VI) Ecuación con radicales y con una incógnita.

Técnica: Aunque no siempre es eficaz, se suele pasar la raíz a un miembro de la igualdad y se elevan ambos miembros de la igualdad al índice de la raíz. Hay que comprobar si las soluciones que se obtienen por este método son soluciones de la ecuación original.

Ejemplo: Resolver $x-2+\sqrt{x}=0$, dejamos la raíz sola $\sqrt{x}=2-x$, elevando al cuadrado $x=4-4x+x^2$, resolviendo $x=4; x=1$, pero la única solución es $x=1$ (compruébese).

VII) Ecuación logarítmica con una incógnita.

Técnica: Se utilizan las propiedades básicas de los logaritmos junto a que si $A>0; B>0$ se tiene que $\ln(A)=\ln(B) \Leftrightarrow A=B$.

Ejemplo: Resolver $\ln(x)+\ln(100)=2, \Rightarrow \ln(100x)=\ln(e^2) \Rightarrow x=\dfrac{e^2}{100}$.

VIII) Ecuación exponencial con una incógnita.

Técnica: Se deben aplicar las propiedades de las exponenciales, teniendo además en cuenta que: Si $a>0$ se tiene que $a^x=a^y \Leftrightarrow x=y$.

Ejemplo: Resolver $2^{x+5}=16, \Rightarrow 2^{x+5}=2^4, \Rightarrow x+5=4, \Rightarrow$ la solución es $x=-1$.

Nota 1.7.1. Existen muchos otros tipos de ecuaciones, por ejemplo las trigonométricas para cuya resolución se han de tener presente las fórmulas de trigonometría. Además, cuando hay varias incógnitas y varias ecuaciones estamos ante lo que se denominan sistemas de ecuaciones (téngase en cuenta ahora que cada ecuación puede ser de algún tipo de las anteriores). Las técnicas de resolución son muy variadas y se adaptan a cada sistema en particular. Por ejemplo, los sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas se suelen resolver mediante las famosas técnicas de: sustitución, igualación y reducción. Además se pueden resolver por métodos geométricos dibujando en el plano los puntos representados por cada una de las ecuaciones.

1.7.2. Ecuaciones con valores absolutos

Para resolver ecuaciones con valor absoluto se intenta quitar éste haciendo uso de la definición y propiedades del valor absoluto, después se sigue la misma técnica de resolución de ecuaciones.

Ejemplo 1.7.2. Resolver la ecuación $|x-3| = 5$. Como

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & \text{si} \quad x-3 < 0. \end{cases}$$

quiere decir que tenemos dos ecuaciones

$$\begin{cases} x-3 = 5 & \text{si} \quad x-3 \geq 0 \\ -(x-3) = 5 & \text{si} \quad x-3 < 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos que $x = 8$ y satisface $x-3 \geq 0$, por tanto es solución de nuestra primitiva ecuación. De la segunda obtenemos que $x = -2$ y satisface $x-3 \leq 0$, por tanto también es solución de nuestra primitiva ecuación. Hemos obtenido dos soluciones de la ecuación planteada.

1.8. Inecuaciones

- Una ***inecuación*** es una desigualdad que contiene una o más incógnitas.
- Resolver una inecuación consiste en hallar los valores que deben tomar las incógnitas para que la desigualdad se cumpla. Las soluciones de inecuaciones no tienen por qué ser ahora puntos aislados sino que nos podemos encontrar como solución la unión de intervalos abiertos, cerrados o semiabiertos.

  El proceso de resolución es análogo al de resolución de ecuaciones salvo en algunos detalles.

Propiedades que se usan en el proceso de resolución de inecuaciones:

-> *Regla 1*: Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o resta un mismo número, se obtiene otra inecuación equivalente, esto es: $a < b \Leftrightarrow a \pm c < b \pm c$, siendo a, b y c números reales. (ídem con $\leq$)

-> *Regla 2*: Si los dos miembros de una inecuación se multiplican o dividen por un número real POSITIVO, se obtiene una inecuación equivalente, esto es:

$$a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c, \text{ siendo } a,\ b,\ c \text{ números reales con } c > 0 \text{ (ídem con } \leq)$$

-> *Regla 3*: Si los dos miembros de una inecuación se multiplican o dividen por un número real NEGATIVO, se obtiene otra inecuación equivalente, donde la desigualdad cambia de sentido, esto es:

$$a < b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c, \text{ siendo } a,\ b,\ c \text{ números reales con } c < 0$$

(ídem si las desigualdades no son estrictas)

1.8.1. Inecuaciones con valores absolutos

Igual que en las ecuaciones con valor absoluto, para resolver inecuaciones con valor absoluto se intenta quitar éste haciendo uso de la definición y propiedades del valor absoluto, después se sigue la misma técnica de resolución de inecuaciones. En particular, se usan las propiedades del valor absoluto:

7) $|x| < r$ si y sólo si $-r < x < r$, válido con $\leq$.

8) $|x| > k$ si y sólo si $x < -k$ ó $x > k$, válido con $\geq$.

Estas equivalencias nos permitirán resolver inecuaciones con valores absolutos al transformarlas en inecuaciones sin valor absoluto.

1.9. Ejercicios y problemas

1. Efectuar simplificando al máximo los resultados:

a) $\dfrac{(4\cdot 3^2\cdot 6^{-2})^2\cdot(2^3\cdot 3^4)^{-1}}{(2^6\cdot 3^7)^{-3}\cdot(6^4)^3}$ *b)* $\left(-2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3}\right)^{-2}$ *c)* $\dfrac{(a\cdot b)^2\cdot(a^{-3}\cdot b^3)^3}{(a\cdot b^2\cdot c^3)^{-5}}$

2. Efectuar simplificando al máximo los resultados:

a) $\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[8]{81}$ *b)* $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{2^2}}:\sqrt[3]{\sqrt{2}}$

c) $5\sqrt{12}+\sqrt{27}-8\sqrt{75}+\sqrt{45}$ *d)* $\dfrac{3^{-\frac{3}{4}}\cdot 9^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt{3})^{-3}\cdot\sqrt{81}}$

3. Racionalizar las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{3-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ *b)* $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ *c)* $\dfrac{4\sqrt{2}}{2\sqrt[3]{4}}$ *d)* $\dfrac{\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}$ *e)* $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

4. Efectuar simplificando al máximo los resultados:

a) $\sqrt[4]{x+1}\cdot\sqrt[2]{(x+1)^3}\cdot\sqrt[8]{\dfrac{1}{(x+1)^7}}$ *b)* $\dfrac{1}{1-a}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{(a+1)^2}}\cdot\sqrt[3]{(1-a)^2}$

c) $-\sqrt[3]{-16}-\sqrt[3]{-54}-\sqrt[3]{-250}$

5. Mediante la definición, calcular los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 32$ *b)* $\log_{\frac{1}{2}} 32$ *c)* $\log_3\left(\dfrac{1}{3}\right)$ *d)* $\log_{10} 0'001$ *e)* $\log_{\frac{1}{2}} 4$

f) $\log_{\frac{1}{10}} 10$ *g)* $\log_{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{9}\right)$

6. Calcular:

a) $\log_3 729-\log_2 128+\log_5 125-\log_{11} 121$ *b)* $\log_3\dfrac{1}{3}+\log_2\dfrac{1}{8}-\log_4\dfrac{1}{16}+\log_5\dfrac{1}{25}$

c) $\left(3^{\log_2 4}\right):\log_8 2$

7. Expresar como un solo logaritmo en base 10:

a) $3(\log 5+\log 2)-\log 2-\log 7$ *b)* $\dfrac{3}{2}(1-\log 5)+\dfrac{1}{2}\log 2$ *c)* $3\log 2-1+\dfrac{\log 5}{3}$

8. Efectuar las siguientes operaciones con polinomios:

a) $(3x-2)^3$

b) $(-x^2+\sqrt{2}x)(x^2+\sqrt{2}x)$

c) $\left(\dfrac{2}{3}x+3x^2-5x^3+1\right)\cdot\left(5-2x+\dfrac{1}{2}x^2\right)$

d) $(3x^2-2)(5x-4)-[2x(x^2-1)-(3x+2)(5x^2+4)]$

e) $2x[(3x-4)-(2x+1)]-(5x+4)[2x(3x-1)+2x(x-3)]$

9. Hallar el cociente y el resto en las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(7x^5+4x^4-3x^3-12x^2+5):(x^3+2x)$

b) $(6x^3+2x-3):(x-5)$

c) $(x^4-5x^2+1):(x^2-1)$

10. Calcular las raíces enteras y fraccionarias de los polinomios siguientes y descomponerlos en factores:

a) $4x^3-20x^2-x+5$ *b*) $x^4-2x^3-4x^2+8x$ *c*) x^5-x
d) $6x^3+13x^2+x-2$ *e*) $8x^3-62x^2-17x+8$ *f*) $64x^4-20x^2+1$
g) $x^4+x^3-x^2-11x+10$

11. ¿Qué sumando debemos añadir a $16x^4+40x^2$ para obtener un cuadrado perfecto?

12. Desarrollar las siguientes potencias:

a) $(x-1)^5$ *b*) $\left(x-\dfrac{2}{x^2}\right)^3$ *c*) $(2x+3)^4$
d) $\left(2x-\dfrac{1}{2x}\right)^6$ *e*) $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{2x}}\right)^5$ *f*) $(2x-1)^2$

13. Determinar el coeficiente de x^{30} en el desarrollo de $\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^{21}$. ¿Aparece x^7 en el desarrollo anterior?

14. En las siguientes operaciones con fracciones algebraicas, factorizar los polinomios convenientes, efectuar las operaciones indicadas y simplificar al máximo el resultado:

a) $\dfrac{2}{x^3-1}-\dfrac{x^2-x+1}{x-1}+\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ *b*) $\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-9}\cdot\dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-8x-5}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2+1}-\dfrac{4x^2}{x^4-1}-\dfrac{x^2-x}{x^3+x^2+x+1}$ *d*) $\left(2-\dfrac{3}{x+2}\right):\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}\right)$

e) $\left(x+\dfrac{1}{x}+\sqrt{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}-\sqrt{2}\right)$ *f*) $\dfrac{x^2}{x+1}:\left[x-(x^2-1):\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]$

15. Convertir cada una de las siguientes desigualdades en otra proposición equivalente sin valor absoluto:

a) $|2x-1|>1$ *b*) $|2-5x|\leq 3$ *c*) $4-|1-x|\leq 1$
d) $2|x-2|-1\leq 2$.

16. Escribir las siguientes proposiciones en términos de desigualdades y valores absolutos:

a) x está a más de 3 unidades de -7.

b) x está al menos a 3 unidades de 5.

c) x dista de 7 en menos de 3 unidades.

d) El número de horas que trabaja una máquina sin interrupciones, x, difiere de 12 en menos de 2 horas.

17. Describir y representar el conjunto determinado por cada una de las siguientes condiciones:

a) $|x| < 1$ *b*) $|x| \leq 3$ *c*) $|x| \geq 1$ *d*) $|x| > 12$
e) $|-x| \leq 2$ *f*) $|x| < -2$ *g*) $|x| \geq -2$ *f*) $|-x| \geq -2$

18. Determinar si cada una de las siguientes igualdades es una ecuación o una identidad:

a) $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

b) $(x-3)(x+3) = x^2 - 9 + 6x$

c) $(x-3)^2 + 5 = x - 4$

Resolver las siguientes ecuaciones y sistemas de ecuaciones:

19. $\dfrac{x-5}{6} - \dfrac{x}{3} = \dfrac{x}{12} + \dfrac{x+2}{4}$

20. $x + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{3}\right) - \dfrac{2x-1}{18} = 0$

21. $12x^2 + 15x - 18 = 0$

22. $x^3 - 9x^2 = 15 - 23x$

23. $\sqrt{2x-5} = 1 + \sqrt{x-3}$

24. $\sqrt{-x+2} - 1 = 0.5\sqrt{x+6}$

25. Resolver por igualación, sustitución y reducción. Comprueba el resultado gráficamente:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4; \\ x + 3y = 5; \end{cases}$$

26. Resolver:

$$\begin{cases} 2x^2 - y - 3 = 0; \\ x - y = 2; \end{cases}$$

27. Resolver:

a) $|x-4| = 3$ *b*) $3|5-4x| = 9$ *c*) $|x-5| = -2$
d) $|x| = x + 1$ *e*) $|x| = x - 1$

28. Encontrar todos los puntos cuya distancia a 3 es igual a 4.

Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto:

29. $|2x-1| \leq 3$

30. $10-3|2x-3| < 4$

31. $|x+4| \geq 7$

32. $|x-1| \leq -34$

33. $1-|2x-3| < 4$

34. $|x-3| \leq 0$

35. $\dfrac{|6x-6|}{3} = 1$

Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

36. $|2x-3| < 1$

37. $(x-2)^2 \geq 4$

38. $x^2+2x-8 \leq 0$

39. $|x| = x+5$

40. $|x^2-7x+12| > x^2-7x+12$

41. $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$

42. $|x^2-5x+6| = -(x^2-5x+6)$

43. Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^2-5x+1=(x-1)^2$ *b*) $9x^2+30x+25=0$

c) $3x^2+5=4x^2$ *d*) $(x+\frac{1}{2})^2 = x-4$

44. Escribir una ecuación polinómica cuyas soluciones sean:

a) $x=0$, $x=-1$ y $x=2$ *b*) $x=0$ doble, $x=-4$ doble.

45. Escribir una ecuación polinómica de grado 2 cuyas soluciones sumen 3 y su producto sea 9.

46. Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas bicuadradas:

a) $6x^4-5x^2=0$ *b*) $x^4+5x^2+6=0$

47. Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^4 - 10x^3 + 25x^2 = 0$ *b*) $4x^4 - 49 = 0$ *c*) $-5x^2 + x + 2 = 0$

48. Resolver las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\dfrac{2x^3 + 6x^2 + 8x + 4}{x^2 + 2x + 1} = 0$ *b*) $\dfrac{3x}{x^2 - 9} = \dfrac{5}{x - 3}$

49. Resolver las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $4x - 5\sqrt{x} = 0$ *b*) $\sqrt{x - 2} = x - 8$ *c*) $\sqrt[3]{2x - 1} = x$

50. Resolver las inecuaciones:

a) $3x - 1 \geq 7x + 7$ *b*) $\dfrac{6 - 2x}{9} > \dfrac{1 - x}{6}$

51. Resolver la inecuación:

$4x^2 + 6x - 1 < 3x^2 + 7x + 11$

Capítulo 2

Trigonometría

2.1. Medida de ángulos: el radián

La Trigonometría es la parte de la Matemática que se ocupa de la medida de los lados y ángulos de un triángulo a partir del conocimiento de algunas de estas medidas (*trigonos* es una palabra griega que significa triángulo). Un ángulo es una porción del plano limitada por dos semirrectas que parten de un mismo punto O, llamado vértice. Las semirrectas que lo delimitan se denominan lados del ángulo (Figura 2.1).

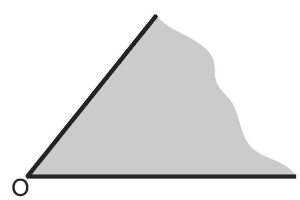


Figura 2.1: Un ejemplo de ángulo.

Para medir ángulos usaremos una medida adimensional cuya unidad se denomina radián. Supongamos que se desea medir el ángulo representado en la Figura 2.1. Para ello, con centro en O, trazamos un arco de circunferencia de radio r que intercepta con los lados en los puntos A y B (ver Figura 2.1). Si ℓ denota la longitud del arco de extremos A y B, tomaremos el cociente $\alpha = \frac{\ell}{r}$ como medida del ángulo y diremos que el ángulo mide α radianes. Un ángulo cuya medida es un radián es aquel que tiene la propiedad de que el radio r coincide con la longitud ℓ del arco de extremos A y B.

Nótese que el radián es adimensional pues se trata de un cociente de dos longitudes.

Teorema 2.1.1 (Tales)**.** *Consideremos un triángulo cualquiera ABC y tracemos una recta paralela a uno de sus lados (paralela al lado AB, por ejemplo). Sean M y N los puntos*

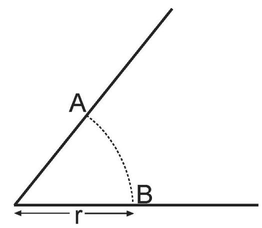


Figura 2.2: Definiendo el radian.

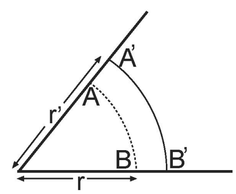


Figura 2.3: La definición de radian es independiente del radio elegido.

donde dicha recta intersecta a los otros lados. Entonces los triángulos ABC y MNC son semejantes (Figura 2.1)

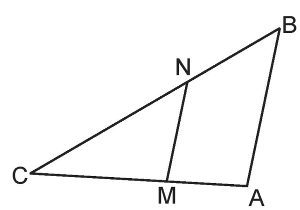


Figura 2.4: Triángulos semejantes.

El hecho de ser semejantes ambos triángulos se traduce en que se tienen las siguientes relaciones entre sus lados y ángulos:

I. Los ángulos homólogos son iguales, es decir, $\hat{A} = \hat{M}$ y $\hat{B} = \hat{N}$.

II. Las longitudes de sus lados son proporcionales, es decir, se verifica

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MC}} = k,$$

donde la constante k es un valor estrictamente positivo que recibe el nombre de razón de semejanza.

Ejemplos

a) Un arco correspondiente a cierto ángulo mide 12 cm y su radio 4 cm. ¿Cuántos radianes mide el ángulo?

b) ¿Cuántos radianes mide un ángulo recto?

c) Un ángulo mide 2.5 radianes. Si dibujamos un arco de radio 4 cm, ¿cuál es la longitud del arco?

d) Un ángulo mide 1.2 radianes y uno de sus arcos mide 6 cm. ¿Cuánto mide el radio con el que se ha trazado dicho arco?

e) Sabiendo que $180° = \pi\, rad$ calcular, aproximadamente, cuántos grados mide un radián.

2.2. Razones trigonométricas

Las razones trigonométricas básicas son el seno (que denotaremos por sen) y el coseno (que denotaremos por cos) pues, como veremos más adelante, el resto de razones se definen a partir de ellas. Tanto el seno como el coseno son periódicas de período 2π. Esto significa que para cualquier valor α se verifica que

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha \text{ y } \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha,$$

y por ello basta definir $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ para cada $\alpha \in [0, 2\pi)$. En todos los casos, se procederá como sigue: dado el ángulo con vértice en O, se escoge un punto B en uno de sus lados y se traza la recta que pasa por dicho punto y es perpendicular al otro lado, al que corta en un punto que denotaremos por A (Figura **??**).

Se define entonces $\operatorname{sen}\alpha$ como el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa del triángulo OAB, con signo positivo o negativo según el cuadrante al que pertenezca el ángulo en cuestión.

Existe una relación fundamental entre $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$, que se deduce directamente al aplicar el Teorema de Pitágoras, que enunciamos a continuación.

Teorema 2.2.1 (Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Esto es, en un triángulo rectángulo como el de la Figura 2.5, que es rectángulo en A y por tanto tiene como catetos los lados b y c y por hipotenusa el lado a, se verifica que $a^2 = b^2 + c^2$.

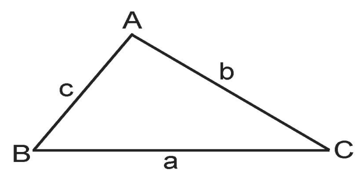


Figura 2.5: Teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$)

Ya estamos en condiciones de obtener la **relación fundamental** que relaciona $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$. Cualquiera que sea el ángulo α, se verifica que

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

De la relación fundamental se deduce además que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se verifica que $-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1$ y que $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.

Como ya se indicó al principio del tema, a partir del seno y del coseno es posible definir las restantes razones trigonométricas. De esta forma, dado un ángulo α se definen la tangente, la cotangente, la cosecante y la secante de α como:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Es importante señalar que tanto la tangente como la cotangente son periódicas y más concretamente, tienen periodo π. La prueba es muy fácil, basta tener en cuenta que $\operatorname{sen}(\pi+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$. Por tanto, resulta

$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Ejemplo

Completar la siguiente tabla:

	$\alpha = 0$	$\alpha = \pi/6$	$\alpha = \pi/4$	$\alpha = \pi/3$	$\alpha = \pi/2$
$\operatorname{sen}\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\operatorname{tg}\alpha$					

2.3. Resumen de fórmulas trigonométricas

Finalizaremos el capítulo con una relación de relaciones y fórmulas trigonométricas que serán de gran utilidad para la resolución de los problemas.

- $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.
- $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$.
- $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$.
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$.
- $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.
- $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.
- $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$.
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$.
- $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2 \cdot \operatorname{sen}(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$.
- $\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2 \cdot \cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \operatorname{sen}(\frac{\alpha-\beta}{2})$.
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$.
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \operatorname{sen}(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \operatorname{sen}(\frac{\alpha-\beta}{2})$.

Ejercicios y problemas

1. El radio de una circunferencia mide 18 cm. ¿Cuál es la longitud de un arco correspondiente a un ángulo de 75°?

2. ¿Cuál es la fórmula para hallar el área de un sector circular de n grados de amplitud?¿Y si el ángulo del sector se expresa en radianes?

3. Expresar en radianes las siguientes medidas: 45°, 150°, 210°, 315°.

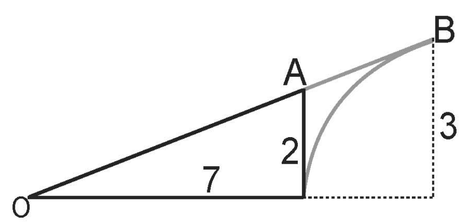
4. Expresar en grados sexagesimales: $2\pi/3\,rad$, $\pi/5\,rad$, $3\pi/8\,rad$.

5. Ordenar, de menor a mayor, las siguientes medidas de ángulos: 18°, $\pi/6\,rad$, 14°, $0.4\,rad$.

6. Un globo está sujeto al suelo mediante un cordel de 80 m. de largo que forma con el suelo horizontal un ángulo de 70°. Suponiendo que el cordel esté recto, calcular distancia del globo al suelo.

7. Si las puntas de los brazos de un compás distan entre sí 6.25 cm y cada brazo mide 11.5 cm, ¿qué ángulo forman los brazos?

8. Un rampa de saltos de exhibición para motocicletas se quiere prolongar de manera que el motorista salte desde una altura de 3m. Calcular la longitud AB.



9. Un poste vertical de dos metros proyecta una sombra de 0.8 m. A la misma hora, la torre de una iglesia es de 24.8 cm. Determinar la altura de la torre.

10. Determinar los valores de las razones trigonométricas del ángulo α si P es un punto del lado terminal, siendo el inicial OX y las coordenadas de P

a) $P = (6, 8)$ *b*) $P = (-6, 8)$ *c*) $P = (-3, -4)$

d) $P = (-1, 5)$ *e*) $P = (4, -7)$ *f*) $P = (5, -12)$

11. Hallar las razones trigonométricas de los ángulos $\pi/6\,rad$, $\pi/4\,rad$, $\pi/3\,rad$, $7\pi/12\,rad$, $25\pi/24\,rad$, $47\pi/12\,rad$.

12. Encontrar el ángulo α y las demás razones trigonométricas, sabiendo que

a) $\text{cotg}\,\alpha = \frac{12}{5}$ *b*) $\text{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$ *c*) $\sec\alpha = -\sqrt{5}$
d) $\text{sen}\alpha = -\frac{2}{3}$ *e*) $\text{cosec}\alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ *f*) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$

Capítulo 3

Nociones de Geometría Plana

Introducción

Un ***Sistema de Referencia Cartesiano*** (ver figura 3) está compuesto por tres elementos:

- Un punto arbitrario del plano que se denomina ***origen***, O, y se designa numéricamente por $(0, 0)$.
- Dos rectas perpendiculares que se cortan en el origen, O, y se denominan ***ejes de coordenadas***.
- Dos puntos, uno sobre cada eje, equidistantes ambos del origen, que se utilizan para indicar la ***unidad de medida*** sobre los ejes, además de señalar el ***sentido positivo*** sobre cada uno de ellos.
    - El primer punto, que se designa por $(1, 0)$, identifica el ***eje de abscisas***.
    - El segundo punto, que se designa por $(0, 1)$, identifica el ***eje de ordenadas***.

Las ***coordenadas*** de un punto en el plano son las longitudes, positivas o negativas, de los segmentos determinados por sus proyecciones sobre los ejes y el origen.

3.1. Distancia entre dos puntos. Ecuación de la circunferencia.

Se denomina ***distancia entre dos puntos*** $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ del plano, ver figura3.1, que denotamos por $d(A, B)$, a la longitud del segmento de recta que tiene por extremos A y B. Esto es:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

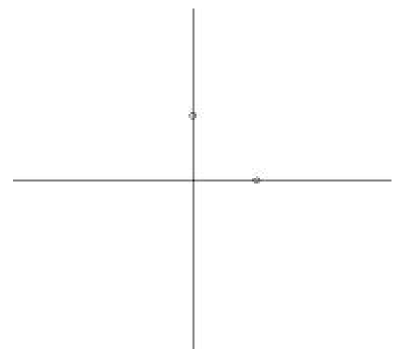


Figura 3.1: Sistema de referencia cartesiano.

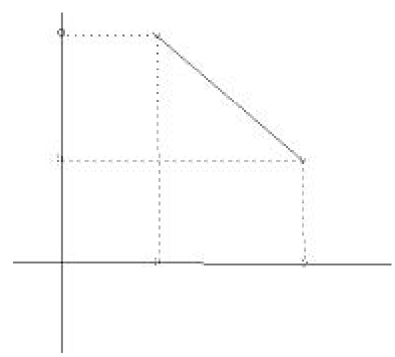


Figura 3.2: Distancia entre dos puntos.

Ejemplo 3.1.1. La distancia entre los puntos $A = (1, 5)$ y $B = (-3, 1)$ respecto de un mismo sistema de referencia, es igual a:

$$d(A, B) = \sqrt{((-3) - 1)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \quad \blacktriangleleft$$

Una ***circunferencia*** es el conjunto de puntos del plano que están a una distancia fija, llamada ***radio***, de un determinado punto, llamado ***centro*** de la circunferencia. La palabra circunferencia proviene del latín *circun*, cuyo significado es alrededor.

Una circunferencia está determinada por su centro, que será un punto de coordenadas (x_0, y_0), y su radio r. Para que un punto (x, y), pertenezca a la circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio r, se debe cumplir la siguiente condición:

$$d((x, y), (x_0, y_0)) = r$$

y según la fórmula para la distancia entre dos puntos esta expresión queda como

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

que, elevada al cuadrado, da lugar a la ecuación de la circunferencia:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Ejemplo 3.1.2. La ecuación de la circunferencia de radio 2 y centro el punto $(3, 4)$ es $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$. ◀

Si en la ecuación de la circunferencia $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ desarrollamos los cuadrados resulta:

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

es decir

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

con $a = -2x_0$, $b = -2y_0$ y $c = x_0^2 + y_0^2 - r^2$. Pero no todas las ecuaciones de la forma anterior representan una circunferencia, es necesario que r^2 sea positivo; es decir, los números a, b, c tienen que ser tales que

$$r^2 = x_0^2 + y_0^2 - c = (-\frac{a}{2})^2 + (-\frac{b}{2})^2 - c = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} > 0.$$

En resumen, si a, b y c son números reales tales que $a^2 + b^2 - 4c > 0$, entonces la ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

representa una circunferencia con:

- Centro: $C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$,
- Radio: $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$

Ejemplo 3.1.3. Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, hallar su centro y su radio.

- Centro: $C = (-\frac{-2}{2}, -\frac{4}{2}) = (1, -2)$,
- Radio: $r = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 4^2 - 4(-4)} = 3$ ◀

3.2. Ecuación de la recta.

Una ***recta*** es el conjunto de todos los puntos, cuyas coordenadas (x, y) satisfacen una ecuación del tipo

$$Ax + By + C = 0 \tag{3.1}$$

donde A, B y C son números reales. A esta ecuación se la conoce como *ecuación implícita* de la recta. Según la definición, un punto pertenece a una recta si, al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación de la recta, ésta se satisface.

Ejemplo 3.2.1. El punto $(1, 3)$ pertenece a la recta $4x - y - 1 = 0$ por ser $4 \cdot 1 - 3 - 1 = 0$ y el punto $(2, 3)$ no pertenece a la recta por ser $4 \cdot 2 - 3 - 1 \neq 0$.

Si $B = 0$, la ecuación 3.1 se reduce a $x = -\frac{C}{A}$, que representa la recta paralela al eje de ordenadas, situada a distancia $-\frac{C}{A}$ del origen.

Si $A = 0$, la ecuación 3.1 se reduce a $y = -\frac{C}{B}$, que es la recta paralela al eje de abscisas situada a distancia $-\frac{C}{B}$ del origen.

Ejemplo 3.2.2.

- La ecuación $2x - 5 = 0$ es una recta paralela al eje de ordenadas formada por los puntos de abscisa constante $x = \frac{5}{2}$.
- La ecuación $3y + 1 = 0$ es una horizontal formada por los puntos de ordenada fija $y = -\frac{1}{3}$.

Cuando $B \neq 0$ la ecuación 3.1 se puede expresar como $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Si hacemos $m = -\frac{A}{B}$ y $n = -\frac{C}{B}$ obtenemos la *ecuación explícita* de la recta:

$$y = mx + n$$

La constante m se denomina ***pendiente*** de la recta e indica su inclinación, y la constante n representa la ***ordenada en el origen***.

La ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y que tiene como pendiente m es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Esta expresión se conoce como *ecuación punto-pendiente* de la recta.

Si ahora conocemos dos puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y queremos calcular la recta que pasa por ellos, debemos buscar una ecuación de la forma $y = mx + n$ que se verifique para los valores (x_1, y_1) y también para (x_2, y_2); luego, tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + n \\ y_2 = mx_2 + n \end{cases}$$

Una vez resuelto, obtenemos la *ecuación de la recta que pasa por dos puntos*:

- Si $x_1 \neq x_2$, la ecuación es $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$.
- Si $x_1 = x_2$, la ecuación es $x = x_1$.

Podemos observar que dados dos puntos existe una única recta que pasa por ellos.

Ejemplo 3.2.3. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(3, -1)$ es $y = \frac{-1-2}{3-1}(x - 1) + 2$ o bien, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$.

3.3. Pendiente de una recta. Rectas paralelas

La ***pendiente*** de la recta indica su inclinación. Expresa lo que crece , o decrece, la ordenada y de los puntos de la recta por cada unidad que aumente la abscisa x. Observamos que la pendiente de una recta es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de las x. Luego, la pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) (ver figura 3.3), es:

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{incremento de } y}{\text{incremento de } x}$$

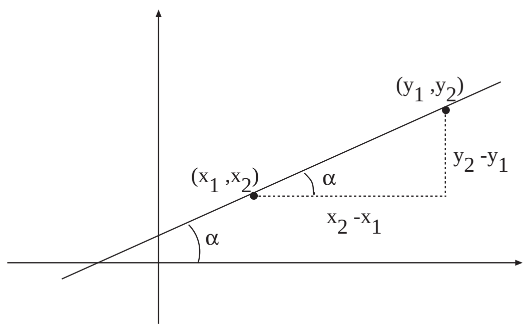


Figura 3.3: La pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Ejemplo 3.3.1. La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(5, 4)$ es $m = \tan\alpha = \frac{4-1}{5-(-2)}$.

Puesto que la pendiente de una recta marca su inclinación con respecto a los ejes de coordenadas, dos rectas son ***paralelas*** si tienen la misma pendiente.

Ejemplo 3.3.2. Las rectas $y = 2x - 3$ e $y = 2x + 6$ son paralelas porque tienen la misma pendiente $m = 2$.

3.4. Rectas perpendiculares. Cálculo de la recta perpendicular por un punto a una recta dada.

Dos rectas $r \equiv y = mx + n$ e $r' \equiv y = m'x + n'$ son ***perpendiculares*** si $m \cdot m' = -1$ o bien, $m' = -\frac{1}{m}$. Toda recta perpendicular a r, es paralela a r'.

La ecuación de la recta perpendicular a $y = ax + b$ que pasa por el punto (x_0, y_0) es

$$y = (-\frac{1}{a})(x - x_0) + y_0.$$

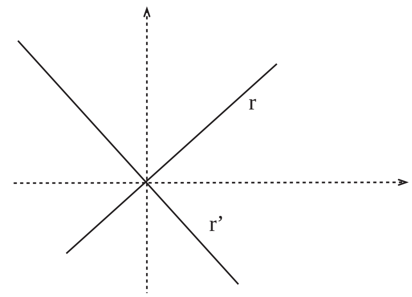


Figura 3.4: Las rectas $r \equiv y = mx + n$ y $r' \equiv y = (-\frac{1}{m})x + n'$ son perpendiculares.

Ejemplo 3.4.1. La ecuación de la recta perpendicular a $y = 2x + 1$ que pasa por el punto $(2, -1)$ es $y = -\frac{1}{2}(x - 2) - 1$.

3.5. Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular a la recta, trazado desde el punto (ver figura 3.5).

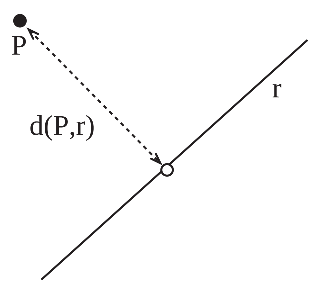


Figura 3.5: Distancia de un punto a una recta.

Esto es, dada una recta $r \equiv Ax + By + C = 0$ y un punto $P = (x_1, y_1)$ no contenido en r. La distancia entre el punto y la recta viene dada por:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo 3.5.1. La distancia del punto $p = (-5, 8)$ a la recta $r \equiv 2x - 6y + 7 = 0$ es:

$$d(p, r) = \frac{|2(-5) - 6 \cdot 8 + 7|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2}} = \frac{51}{\sqrt{40}}.$$

3.6. Área de un triángulo

El área de un triángulo se obtiene multiplicando la base por la altura (donde la altura es la longitud de un segmento perpendicular que parte de la base hasta llegar al vértice opuesto) y dividiéndolo por dos.

Ejemplo 3.6.1. *Los puntos de coordenadas* $A = (3, 8)$*,* $B = (-11, 3)$ *y* $C = (-8, -2)$ *son los vértices de un triángulo. Hallar su área:*

Tomamos como base del triángulo el segmento $\overline{BC}$, su longitud es:

$$d(B, C) = \sqrt{(-8+11)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{34}.$$

La altura del triángulo será la distancia de A a la recta que pasa por B y por C, BC:

Ecuación de BC: $m = \frac{-2-3}{-8+11} = \frac{-5}{3} \rightarrow y = 3 - \frac{5}{3}(x+11) \rightarrow 5x + 3y + 46 = 0$

Altura: $d(A, BC) = \frac{|5 \cdot 3 + 3 \cdot 8 + 46|}{\sqrt{5^2+3^2}} = \frac{85}{\sqrt{34}}$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{34} \cdot \frac{85}{\sqrt{34}} = \frac{85}{2}$$

3.7. Punto medio de un segmento. Mediatriz

Las coordenadas del ***punto medio***, M, de un segmento de extremos (x_1, y_1), (x_2, y_2) son:

$$M = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$$

Ejemplo 3.7.1. El punto medio del segmento de extremos $(-5, 2)$, $(7, -4)$ es el punto $M = (1, -1)$.

Si A' es el ***simétrico*** de A respecto de P, entonces P es el punto medio del segmento AA'. Así, si $A = (a_1, a_2)$ y $P = (p_1, p_2)$, las coordenadas de $A' = (x, y)$ se pueden obtener resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{a_1+x}{2} \\ p_2 = \frac{a_2+y}{2} \end{cases}$$

Ejemplo 3.7.2. *Hallar el simétrico* A'*, del punto* $A = (7, 4)$ *respecto de* $P = (3, -11)$*:*

Llamamos (x, y) a las coordenadas de A'. Se cumple que:

$$\begin{cases} 3 = \frac{7+x}{2} & \rightarrow & \text{x=-1} \\ -11 = \frac{4+y}{2} & \rightarrow & \text{y=-26} \end{cases}$$

Luego, $A' = (-1, -26)$.

Se llama ***lugar geométrico*** al conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad. La ***mediatriz*** de un segmento $\overline{AB}$ es el lugar geométrico de los puntos, que equidistan de sus extremos:

$$d((x,y),A) = d((x,y),B)$$

Ejemplo 3.7.3. *Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos* $A = (-3,4)$*,* $B = (1,0)$*:*

El punto (x,y) pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ si cumple la condición $d((x,y),(-3,4)) = d((x,y),(1,0))$:

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros y desarrollamos los cuadrados indicados:

$$x^2+6x+9+y^2-8y+16 = x^2-2x+1+y^2 \ \rightarrow \ x-y+3=0 \ \rightarrow \ y=x+3$$

La recta obtenida, $y = x+3$, tiene las siguientes características:

- Pasa por $(-1,2)$, que es el punto medio del segmento.
- Su pendiente, 1, y la pendiente del segmento, -1, cumplen que $1\cdot(-1) = -1$. Son perpendiculares.

Ejercicios y problemas

1. Hallar el centro y el radio de cada una de las siguientes circunferencias:

$x^2+y^2=8$	$(x-3)^2+(y+0'3)^2=9$	$4x^2-4x+4y^2-3=0$
$x^2+y^2-4x+6y=100$	$x^2+y^2-8x+10y=4$	$4x^2+4y^2+28y+13=0$
$x^2-8x+y^2+12y=48$	$9x^2-6x+9y^2+6y=-1$	$x^2+2\sqrt{2}x+y^2-2\sqrt{3}y=0$

2. Hallar, en cada caso, el centro, el radio y la ecuación de la circunferencia C que cumple:

a) El segmento que une los puntos $P_1(-1,-3)$ y $P_2(3,1)$ es un diámetro de C.

b) Pasa por los puntos $P_1(1-2)$, $P_2(-3,4)$ y $P_3(4,2)$.

c) Pasa por los tres vértices de un triángulo equilátero del cual se sabe que está en el primer cuadrante, uno de sus lados es paralelo al eje OX, su altura vale $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ y uno de sus vértices es el punto $P(1,1)$ (Hallar todas las soluciones).

d) Pasa por los seis vértices de un hexágono regular uno de cuyos lados es el segmento que une los puntos $P_1(1,1)$ y $P_2(3,1)$ (Hay dos soluciones).

e) Es tangente a la circunferencia $C'\equiv x^2+4x+y^2+6y=-9$, la recta que une los centros de C y C' es paralela al eje OY y el radio de C es dos tercios del radio de C_1 (Hay cuatro soluciones).

f) Tiene el mismo centro que la circunferencia C' que pasa por los puntos $P_1(-2,0)$, $P_2(0,1)$ y $P_3(-1,-2)$ y el área que encierra es la misma que el área de la corona circular que delimita en el interior de C'.

3. La circunferencias C_1 y C_2 tienen radios 1 y 2 respectivamente y sus centros están en los puntos $P(1,1)$ y $Q(3,2)$. Hallar la distancia entre sus puntos de corte.

4. Hallar, en cada caso, la pendiente y la ecuación de la recta r sabiendo que r:

a) Pasa por los puntos $P_1(-1,2)$ y $P_2(2,-1)$.

b) Pasa por los puntos $P_1(0,-2)$ y $P_2(87'3,-2)$.

c) Pasa por los puntos $P_1(-2,0)$ y $P_2(-2,87'3)$.

d) Su ordenada en el origen vale 2 y corta al eje OX en el punto $P(\frac{2}{3},0)$.

e) Pasa por los puntos $P(1,a)$ y $Q(a+1,b)$.

5. Determinar si la recta que pasa por los puntos P y Q es paralela, perpendicular o ninguna de las dos cosas a la recta que pasa por los puntos R y S en los casos siguientes:

a) $P(4,2)$, $Q(8,3)$, $R(-2,8)$ y $S(1,-4)$.

b) $P(0,-5)$, $Q(15,0)$, $R(1,2)$ y $S(0,5)$.

c) $P(-7,8)$, $Q(8,-7)$, $R(-8,10)$ y $S(6,-4)$.

d) $P(8,-2)$, $Q(2,8)$, $R(-2,-8)$ y $S(-8,-2)$.

6. Dibujar y hallar, en cada caso, la ecuación de la recta r sabiendo que r:

a) Pasa por los puntos $P(2,-1)$ y $Q(-2,3)$. Idem con $P(2'5,-3'8)$ y $Q(3'8,-2'5)$.

b) Pasa por el punto $P(-2,1)$ y es paralela a la recta $2x+y+1=0$.

c) Pasa por el punto $P(-2,1)$ y es paralela a la recta $x+2y+1=0$.

d) Pasa por el punto $P(-1'5,\frac{1}{3})$ y es perpendicular a la recta $3x-2y=4$.

e) Pasa por el punto $P(2,3)$ y es una recta vertical.

f) Pasa por el punto $P(3,2)$ y es una recta horizontal.

g) Pasa por el punto $A(-1'2,2'3)$ y es perpendicular al segmento que une los puntos $P(2,-1)$ y $Q(-\frac{3}{5},\frac{9}{7})$.

h) Es la mediatriz del segmento que une los puntos $P(2,-1)$ y $Q(-\frac{3}{5},\frac{9}{7})$.

i) Pasa por el punto medio del segmento que une los puntos de corte de la recta $2x-y+1=0$ con la circunferencia $(x-1)^2+(y-1)^2=5$ y es perpendicular a dicho segmento.

j) Pasa por el punto $P(1,-1)$ y es paralela a la recta $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

k) Es perpendicular a la recta $2x+3y+4=0$ y su ordenada en el origen es 5.

l) Es paralela al segmento que une los puntos $P(2,-1)$ y $Q(3,0)$ y pasa por $R(4,0)$.

m) Es la recta simétrica respecto del eje OY de la recta $2x+3y+4=0$.

n) Es la recta simétrica respecto del eje OX de la recta mediatriz del segmento que une los puntos $A(2,1)$ y $B(1,3)$.

7. Una circunferencia tiene su centro en el punto $C(-1'5,-2'5)$ y su radio vale $\sqrt{2}\,u$. La recta $x=-0'5$ corta a dicha circunferencia en los puntos P_1 y P_2. Encontrar las coordenadas de P_1 y P_2.

8. Hallar la distancia del punto $P(1,1)$ a la recta $x+y-1=0$.

9. Hallar la distancia de la recta $3'2x-5'3y=0'25$ al origen de coordenadas.

10. Hallar la distancia entre las rectas $2x+3y=4$ y $2x+3y=5$.

11. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $P(1,1)$, $Q(3,0)$ y $R(2,3)$.

12. Hallar el área del triángulo delimitado por las rectas $r_1\equiv y=\frac{1}{3}x$, $r_2\equiv x=1$ y $r_3\equiv y=-\frac{1}{3}x+5$

13. Un triángulo equilátero tiene dos de sus vértices en los puntos $P(1,3)$ y $Q(3,1)$. Determinar el vértice que falta (hay dos soluciones) y calcular el área de dicho triángulo.

14. Dados los puntos $A(0,1)$, $B(4,1)$ y $C(7,5)$, hallar:

a) La ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo $\triangle ABC$.

b) La ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABC$.

15. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es el segmento que une los puntos $A(0,0)$ y $B(3,0)$. Se sabe que la longitud de uno de los catetos es 1 u. Hallar el vértice que falta (hay cuatro soluciones).

Capítulo 4

Las Funciones Elementales

4.1. Estudio de las funciones elementales

La mayoría de las funciones con las que se trabaja se obtienen al operar con unas pocas funciones llamadas **funciones elementales**. A continuación se estudian algunas de ellas.

4.1.1. Función polinómica

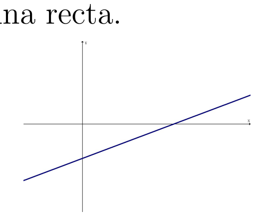
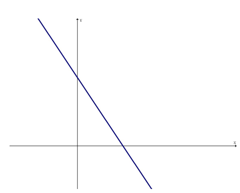
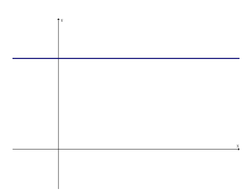
Una **función polinómica de grado** n es una función de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

siendo $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$. El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}$.

Tenemos varios casos particulares especialmente relevantes:

Función afín: son las funciones de la forma $f(x) = ax + b$. La gráfica de este tipo de funciones es una recta.

Función afín $f(x) = ax + b$ con $a > 0$, con $a < 0$, con $a = 0$.

Funciones cuadráticas: son las funciones de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). La gráfica de este tipo de funciones es una parábola. Se llama **vértice** de la parábola al punto en el que la parábola cambia la tendencia de crecimiento; en el caso $a > 0$, corresponde con el punto de menor ordenada, mientras que si $a < 0$ el vértice es el punto de mayor ordenada.

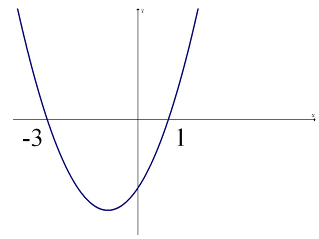


Figura 4.1: Función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$

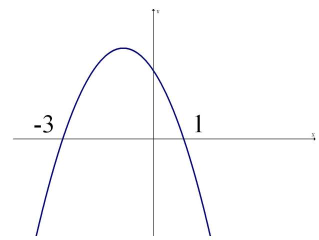


Figura 4.2: Función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a < 0$

4.1.2. Función racional

Una **función racional** es una función de la forma $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ siendo f y g funciones polinómicas. El dominio de estas funciones es el conjunto de todos los números reales que no anulan el denominador.

Dentro de estas funciones cabe destacar la función de proporcionalidad inversa $f(x) = \dfrac{1}{x}$, cuya gráfica es una hipérbola.

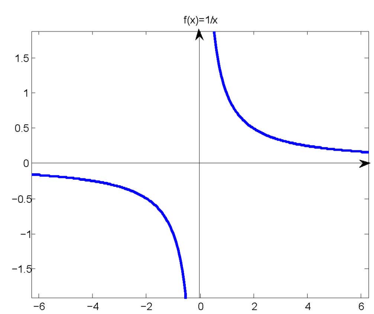


Figura 4.3: Función racional

4.1.3. Función irracional

Una **función irracional** es una función de la forma $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ siendo $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$) y g una función racional.

- Si n es impar, el dominio de la función irracional f coincide con el dominio de g.
- Si n es par, el dominio de la función irracional f es el conjunto formado por los puntos x del dominio de g en los que $g(x) \geq 0$.

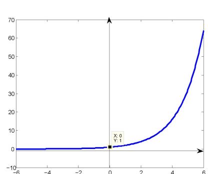
4.1.4. Función exponencial

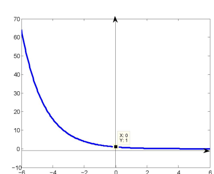
Una **función exponencial** es una función de la forma $f(x) = a^x$ siendo $a \in \mathbb{R}^+$. El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}$ y su imagen es $\mathbb{R}^+$.

A continuación se exponen algunas propiedades de las potencias que resultan muy útiles a la hora de trabajar con las funciones exponenciales (véase capítulo 1):

- $a^x > 0$ cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$
- $a^0 = 1$
- $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $a^{x_1-x_2} = \dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$
- $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$
- $a^{x_1/x_2} = \sqrt[x_2]{a^{x_1}}$
- $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

La gráfica de este tipo de funciones depende de si $a > 1$ o $a \in (0, 1)$ (el caso $a = 1$ no tiene interés pues $f(x) = 1^x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$).





Función exponencial $f(x) = a^x$ con $a > 0$, con $a < 0$.

La función exponencial más utilizada es $f(x) = e^x$; al ser $e > 1$, su gráfica es como la superior izquierda.

4.1.5. Función logarítmica

La **función logaritmo en base** a es una función de la forma $f(x) = \log_a x$, siendo $a > 0$ y $a \neq 1$ (véase capítulo 1). El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}^+$ y su imagen es $\mathbb{R}$.

La función logaritmo en base a resulta ser la función inversa de la función exponencial de base a definida anteriormente. Así pues y como ya se ha visto en el capítulo 1, la relación que define al logaritmo es la siguiente:

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

es decir, $\log_a x$ es el número al que hay que elevar a para obtener como resultado x.

A continuación se recuerdan algunas propiedades de los logaritmos (véase capítulo 1):

- $\log_a a = 1$ y $\log_a 1 = 0$
- $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
- $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$
- $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$
- $\log_a \sqrt[p]{x} = \dfrac{1}{p} \log_a x$

Al igual que ocurría con la exponencial, la gráfica de la función logarítmica depende de si la base es mayor que 1 o es un valor entre 0 y 1.

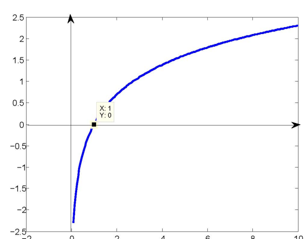


Figura 4.4: Función logaritmo $f(x) = \log_a x$ con $a \in (0, 1)$

La función logaritmo más utilizada es la de base e (**logaritmo neperiano**) y se denota $f(x) = \ln\, x$ o simplemente $f(x) = \log x$; al ser $e > 1$, su gráfica es como la superior izquierda.

4.1.6. Funciones trigonométricas

Es conveniente recordar que, en el Cálculo, se emplea el radián para la medida de los ángulos por ser una medida adimensional.

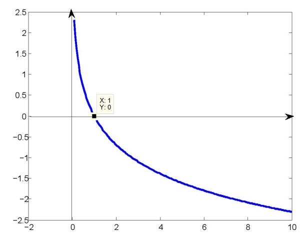
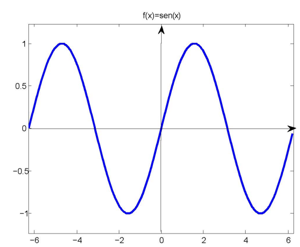


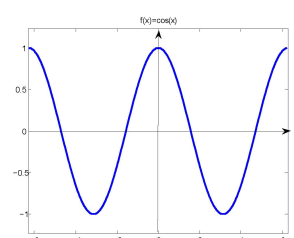
Figura 4.5: Función logaritmo $f(x) = \log_a x$ con $a > 1$

1. Función **seno**: viene dada por $f(x) = \text{sen } x$. Su dominio es $\mathbb{R}$ y su imagen, el intervalo $[-1, 1]$.



   El seno es una función periódica de periodo 2π y, puesto que $\text{sen }(-x) = -\text{sen } x$, es una función impar.

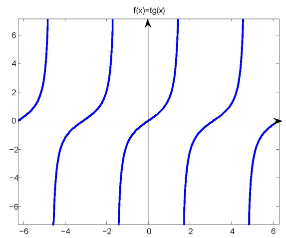
2. Función **coseno**: viene dada por $f(x) = \cos x$. Su dominio es $\mathbb{R}$ y su imagen, el intervalo $[-1, 1]$.



   El coseno es una función periódica de periodo 2π y, puesto que $\cos(-x) = \cos x$, es una función par.

3. Función **tangente**: viene dada por $f(x) = \text{tg } x$. Teniendo en cuenta que $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$, su dominio es $\mathbb{R}$ quitando los puntos en los que se anula la función coseno. Por tanto, el dominio de la función tangente es $\mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\frac{\pi}{2} : \ k \in \mathbb{Z}\}$. Su imagen es $\mathbb{R}$.

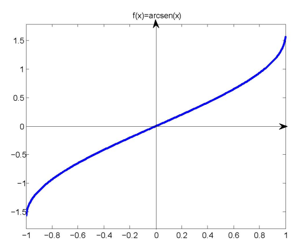
   La tangente es una función periódica de periodo π y, puesto que $\text{tg }(-x) = -\text{tg } x$, es una función impar.



4. Función **arco seno**: viene dada por $f(x) = \text{arcsen } x$. La función arco seno es la inversa de la función seno cuando está última se considera definida en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ (para que sea inyectiva y podamos considerar su función inversa). De esta forma, la relación que define al arco seno es la siguiente:

$$\text{arcsen } x = y \quad \Leftrightarrow \quad \text{sen } y = x$$

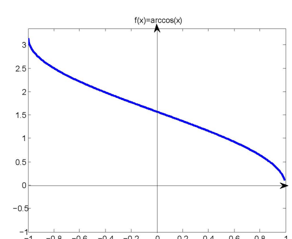
Su dominio es el intervalo $[-1, 1]$ y su imagen, el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.



5. Función **arco coseno**: viene dada por $f(x) = \arccos x$. La función arco coseno es la inversa de la función coseno cuando está última se considera definida en el intervalo $[0, \pi]$ (para que sea inyectiva y podamos considerar su función inversa). De esta forma, la relación que define al arco coseno es la siguiente:

$$\arccos x = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x$$

Su dominio es el intervalo $[-1, 1]$ y su imagen, el intervalo $[0, \pi]$.



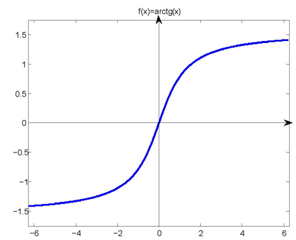
Existe la siguiente relación entre las funciones arco seno y arco coseno

$$\text{arcsen } x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1, 1].$$

6. Función **arco tangente**: viene dada por $f(x) = \operatorname{arctg} x$. La función arco tangente es la inversa de la función tangente cuando está última se considera definida en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ (para que sea inyectiva y podamos considerar su función inversa). De esta forma, la relación que define a la arco tangente es la siguiente:

$$\operatorname{arctg} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} y = x$$

Su dominio es el intervalo $\mathbb{R}$ y su imagen, el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.



Ejercicios y problemas

1. Obtener una función $f(x)$ de la cual sabemos que es un polinomio de tercer grado que corta a los ejes en los puntos (-2,0), (1,0), (3,0) y (0,3).

2. Expresar de otra forma (efectuando la división) y representar gráficamente la función $g(x) = \frac{3x+2}{x+1}$ a partir de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$.

3. Reconocer y dibujar cada una de las siguientes funciones.

a) $y = x + 2$	*b*) $y = 3x^2$	*c*) $y = -x - 3$
d) $y + x + 3 = 0$	*e*) $y + 10x = 0$	*f*) $y = x - 2x - 4$
g) $y = 2x^2 - 1$	*h*) $y = -7x + 1$	*i*) $y = x^2 - 4x$

4. Dibujar cada una de las siguientes parábolas después de hallar su vértice y puntos de corte con los ejes.

a) $y = x^2$	*b*) $y = 2x^2$	*c*) $y = -x^2$
d) $y = -\frac{1}{2}x^2$	*e*) $y^2 + 10x = 0$	*f*) $y = 2x^2 - 2x - 4$
g) $y = 3x^2 - 2x + 1$	*h*) $y = -7x^2 + 1$	*i*) $y = -0'2x^2 - 3x$
j) $y = 0'1x^2 + 2x + 3$	*k*) $y^2 + 2y + x = 1$	*l*) $x = \sqrt{3}y^2 + \sqrt{2}y$
m) $1 = -2y^2 - 3y - x$	*n*) $(y-1)^2 + (x-2)^2 = x^2$	*o*) $9x^2 - 9y + 3x = 1$

5. Una parábola corta al eje OX en los puntos $P_1(-1,0)$ y $P_2(2,0)$. Su vértice está en el punto $V(0'5,2)$. Hallar la ecuación de la parábola.

6. Una parábola corta al eje OX sólo en el punto $P(2,0)$ y al eje OY sólo en el punto $Q(0,2)$. Hallar su ecuación y dibujar dicha parábola.

7. El vértice de una parábola está situado en el punto $V(1,-1)$ y pasa por los puntos $P_1(-1,3)$ y $P_2(3,3)$. Encontrar la ecuación de dicha parábola.

8. Dibujar en unos mismos ejes los siguientes pares de funciones:

   a) $f(x) = \cos x \quad g(x) = |\cos(x+\pi)|$

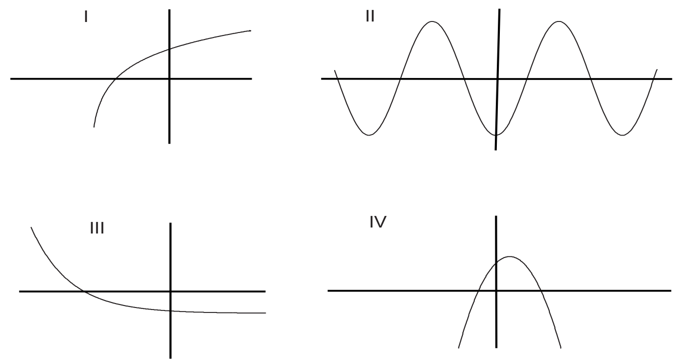
   b) $f(x) = e^x \quad g(x) = 3 - e^{x-1}$

9. Dibujar las siguientes funciones:

a) $f(x) = \cos(x+2)$	*b*) $f(x) = e^2$	*c*) $f(x) = e^{2x}$
d) $f(x) = \ln(x+1)$	*e*) $f(x) = \ln(x-3)$	*f*) $f(x) = e^{2+x}$
g) $f(x) = \sin(x+1)$	*h*) $f(x) = \arcsin(x) + 1$	

10. De entre las siguientes funciones, elegir las que corresponden a las gráficas de la figura.

a) $f(x) = -\cos(2x)$	*b*) $f(x) = -x^2 - 2x + 5$	*c*) $f(x) = 2^{-x} - 3$
d) $f(x) = -\log(x-1)$	*e*) $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$	*f*) $f(x) = \log(x+3)$
g) $f(x) = -2^x + 3$	*h*) $f(x) = -x^2 + 2x + 5$	*i*) $f(x) = -(x-1)^2$


I
II
III
IV