Criterios generales de corrección

I - Responda a las preguntas que se le formulan. Las respuestas a preguntas no formuladas carecen de valor.
II - Las respuestas deben razonarse. La aplicación mecánica de fórmulas carece de valor (aunque el resultado sea correcto).
III - El alumno debe conocer y manejar con soltura el cálculo básico por lo que las expresiones algebraicas deben simplificarse en lo posible y las operaciones han de completarse dando las respuestas correctas.
IV - Especial atención merecerá en todo el proceso de evaluación el uso que el alumno hace del lenguaje. Esto incluye tanto a símbolos y expresiones matemáticas como al lenguaje ordinario.
V - Los resultados obtenidos deben interpretarse correctamente.

1 - Determinar el menor entero positivo x que satisface la congruencia $53x \equiv 1 \pmod{56}$. [1p]

Nota: Resolver el problema "por tanteo" no está permitido.

SOLUCIÓN

Dado $x \in \mathbf{Z}$, sabemos que $53x \equiv 1 \pmod{56}$ si y solo si existe $k \in \mathbf{Z}$ tal que $53x - 1 = 56k$. Por tanto, es evidente que basta resolver la ecuación diofántica lineal $56y + 53x = 1$ y después determinar el menor entero positivo x que forma parte de una de las soluciones de dicha ecuación.

En primer lugar calcularemos una solución particular de la ecuación $56y + 53x = 1$. Para ello, usamos el algoritmo extendido de Euclides.

$$\boxed{\begin{array}{l} u_2 = u_0 - u_1 q \\ v_2 = v_0 - v_1 q \end{array}}$$

A	B	q	r	u_i	v_i
				1	0
				0	1
56	53	1	3	1	-1
53	3	17	2	-17	18
3	2	1	1	18	-19
2	**1**	2	0		

Hemos obtenido que

$$1 = 56 \cdot 18 + 53 \cdot (-19)$$

Resolvemos la ecuación homogénea asociada $56y + 53x = 0$. Puesto que $\operatorname{mcd}(56, 53) = 1$, las soluciones de esta ecuación son $(y, x) = (-53m, 56m)$ para $m \in \mathbf{Z}$.

Concluimos que las soluciones de $56y + 53x = 1$ vienen dadas por $(y, x) = (18 - 53m, -19 + 56m)$ para $m \in \mathbf{Z}$. Y, evidentemente, el menor entero positivo x que forma parte de una de estas soluciones es $x = -19 + 56 = 37$.

2 - Resolver el siguiente sistema de congruencias: [1p]

$$\begin{cases} 8x \equiv 4 \pmod{14} \\ 3x \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Por el Teorema 1.3.3 (6) se tiene que la ecuación $8x \equiv 4 \pmod{14}$ es equivalente a $2x \equiv 1 \pmod{7}$. A su vez, esta última ecuación (teniendo en cuenta que el inverso de $\bar{2}_7$ es $\bar{4}_7$) es equivalente a $x \equiv 4 \pmod{7}$. Por otro lado, teniendo en cuenta que el inverso de $\bar{3}_5$ es $\bar{2}_5$, la ecuación $3x \equiv 1 \pmod{5}$ es equivalente a $x \equiv 2 \pmod{5}$. Concluimos por tanto que el sistema dado es equivalente al sistema siguiente:

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$$

Buscamos una solución particular de la forma

$$x = 7a + 5b$$

Trivialmente se deduce que $5b \equiv 4 \pmod 7$ y $7a \equiv 2 \pmod 5$, de donde fácilmente se deriva que podemos tomar $a = 1$ y $b = 5$. Por tanto, una solución de sistema es $x = 32$. Puesto que sabemos que la solución del sistema es única en $\mathbf{Z}_{35}$, se tiene que

$$x = 32 + 35k, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

---

3 - Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a+1 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mediante el algoritmo de Gauss-Jordan, determine el número de soluciones del sistema según el valor del parámetro a. [1p]

SOLUCIÓN

Aplicamos el algoritmo de Gauss-Jordan a la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{array}{rcl}
F_{2,1}(-1) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & a+1 & a & a \\ 0 & a & -1 & 1 \end{array}\right) & \mapsto & \\
F_2\left(\frac{1}{a}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & a & a & 0 \\ 0 & a & -1 & 1 \end{array}\right) & \mapsto & (*)\ \text{Suponemos que } a \neq 0 \\
\begin{array}{r} F_{1,2}(-1) \\ \\ F_{3,2}(-a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & -1 & 1 \end{array}\right) & \mapsto & \\
F_3\left(-\frac{1}{a+1}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a-1 & 1 \end{array}\right) & \mapsto & (**)\ \text{Suponemos que } a \neq -1 \\
\begin{array}{r} F_{1,3}(1) \\ F_{2,3}(-1) \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a+1} \end{array}\right) & \mapsto & \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a - \frac{1}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a+1} \end{array}\right) & &
\end{array}$$

Por tanto, si $a \neq 0, -1$ el sistema es compatible determinado (tiene una única solución).

$(*)$ Caso $a = 0$. En este caso, después del primer paso en la secuencia de transformaciones anterior, obtenemos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Evidentemente, en este caso el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).

$(**)$ Caso $a = -1$. En este caso, después de los tres primeros pasos en la secuencia de transformaciones vista arriba, obtenemos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

En este caso el sistema es incompatible (no tiene solución).

---

4 - Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -5 \\ -3 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine si se verifica que Fila(A) = Fila(B). [0,5p]

b) Escribir código de MATLAB que permita resolver el apartado anterior. [0,5p]

SOLUCIÓN

Apartado *a)* 0,5p

Los correspondientes espacios fila de dos matrices coinciden si y solamente si las filas no nulas de las correspondientes formas escalonadas reducidas coinciden. Puesto que en nuestro caso ambas matrices tienen el mismo número de filas, se tiene que los espacios fila de A y B coinciden si y solamente si A y B tienen la misma forma escalonada reducida. Calculemos, por tanto, la forma escalonada reducida de A y la forma escalonada reducida de B.

$$F_{2,1}(3)\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -5 \\ -3 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix} \mapsto \quad F_2\left(-\tfrac{1}{5}\right)\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & -5 & -2 & -7 \end{pmatrix} \mapsto$$
$$F_{1,2}(2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

$$F_{2,1}(-3)\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & -5 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \quad F_2\left(-\tfrac{1}{20}\right)\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 9 \\ 0 & -20 & -8 & -28 \end{pmatrix} \mapsto$$
$$F_{1,2}(-8)\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

Por tanto, Fila(A) = Fila(B).

Apartado *b)* 0,5p

```
>> A=sym([1,-2,-3,-5;-3,1,7,8])
>> B=sym([1,8,1,9;3,4,-5,-1])
>> isequal(rref(A),rref(B))
```

(no es necesario usar ni conocer el comando `isequal`. Basta calcular la forma escalonada reducida de cada matriz y comparar a simple vista)

---

5 - En $\mathbf{R}^4$ se consideran los subespacios

$$H = \mathsf{Gen}\{(1,-2,2,0),(3,2,0,2)\},$$

$$K = \mathsf{Gen}\{(1,2,-1,1),(3,-2,3,-1),(0,-4,3,-2)\}.$$

a) Hallar una base de $H \cap K$. ¿Cuántos vectores contiene $H \cap K$? [1p]

b) Hallar una base de $H + K$. [0,5p]

SOLUCIÓN

Apartado *a)* 1p

En primer lugar vamos a hallar unas ecuaciones implícitas de H y unas ecuaciones implícitas de K. Comencemos por el subespacio H.

$$\begin{matrix} F_{2,1}(2) \\ F_{3,1}(-2) \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ -2 & 2 & y \\ 2 & 0 & z \\ 0 & 2 & t \end{array}\right) \mapsto \quad F_2\left(\tfrac{1}{8}\right)\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & 8 & 2x+y \\ 0 & -6 & -2x+z \\ 0 & 2 & t \end{array}\right) \mapsto \quad \begin{matrix} F_{3,2}(6) \\ F_{4,2}(-2) \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & \frac{1}{4}x+\frac{1}{8}y \\ 0 & -6 & -2x+z \\ 0 & 2 & t \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & \frac{1}{4}x+\frac{1}{8}y \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y+z \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y+t \end{array}\right)$$

Obtenemos que unas ecuaciones implícitas de H vienen dadas por

$$H \equiv \begin{cases} -2x + 3y + 4z = 0 \\ -2x - y + 4t = 0 \end{cases}$$

Obtengamos ahora unas ecuaciones implícitas de K.

$$\begin{array}{r} \\ F_{2,1}(-2) \\ F_{3,1}(1) \\ F_{4,1}(-1) \end{array} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 3 & 0 & x \\ 2 & -2 & -4 & y \\ -1 & 3 & 3 & z \\ 1 & -1 & -2 & t \end{array}\right) \mapsto \begin{array}{r} \\ \\ F_{3,2}\left(\frac{3}{4}\right) \\ F_{4,2}\left(-\frac{1}{2}\right) \end{array} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 3 & 0 & x \\ 0 & -8 & -4 & -2x+y \\ 0 & 6 & 3 & x+z \\ 0 & -4 & -2 & -x+t \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 3 & 0 & x \\ 0 & -8 & -4 & -2x+y \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y+z \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}y+t \end{array}\right)$$

Obtenemos que unas ecuaciones implícitas de K vienen dadas por

$$K \equiv \begin{cases} -2x + 3y + 4z = 0 \\ - y + 2t = 0 \end{cases}$$

De las ecuaciones obtenidas para H y K deducimos que unas ecuaciones implícitas de $H \cap K$ son

$$H \cap K \equiv \begin{cases} -2x + 3y + 4z = 0 \\ -2x - y + 4t = 0 \\ - y + 2t = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema para obtener una base de $H \cap K$.

$$\begin{array}{r} F_1\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{array}{r} \\ F_{2,1}(2) \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{array}{r} \\ F_2\left(-\frac{1}{4}\right) \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} F_{1,2}\left(\frac{3}{2}\right) \\ \\ F_{3,2}(1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{array}{r} F_{1,3}\left(\frac{1}{2}\right) \\ F_{2,3}(-1) \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se obtiene que una base de $H \cap K$ es

$$\mathcal{B}_{H \cap K} = \{(1, 2, -1, 1)\}$$

Evidentemente, $H \cap K$ contiene infinitos vectores.

Apartado *b)* 0,5p

Sabemos que

$$H + K = \mathsf{Gen}\{(1, -2, 2, 0), (3, 2, 0, 2), (1, 2, -1, 1), (3, -2, 3, -1), (0, -4, 3, -2)\}.$$

Procedemos a determinar una base de este subespacio.

$$\begin{array}{r} \\ F_{2,1}(-3) \\ F_{3,1}(-1) \\ F_{4,1}(-3) \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{array}{r} \\ F_2\left(\frac{1}{8}\right) \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{array}{r} \\ \\ F_{3,2}(-4) \\ F_{4,2}(-4) \\ F_{5,2}(4) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Una base de $H + K$ es

$$\mathcal{B}_{H+K} = \{(1, -2, 2, 0), (0, 4, -3, 1), (0, 0, 0, 1)\}$$

6 - En $\mathbf{R}^3$ se considera el subespacio H tal que unas ecuaciones implícitas de este subespacio respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1,0,2),(-1,1,0),(1,-1,1)\}$ son

$$H \equiv \left\{ 2\bar{x} - \bar{y} + 4\bar{z} = 0 \right.$$

Calcular unas ecuaciones implícitas de H respecto de la base $\mathcal{B}' = \{(1,-2,1),(2,-3,1),(2,-2,1)\}$. [1p]

SOLUCIÓN

Denotamos $\mathcal{C}$ la base canónica en $\mathbf{R}^3$. Se tiene que

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se verifica

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} &= P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} \cdot P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}'} = (P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1} \cdot P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$ denotamos $(\mathbf{u})_{\mathcal{B}} = (\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, $(\mathbf{u})_{\mathcal{B}'} = (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$. Hemos visto que

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$$

Puesto que unas ecuaciones implícitas de H respecto de $\mathcal{B}$ son

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = 0$$

tendremos que unas ecuaciones implícitas de H respecto de $\mathcal{B}'$ son

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = 0.$$

Obtenemos por tanto

$$H \equiv \left\{ 9\tilde{x} + 10\tilde{y} + 5\tilde{z} = 0 \right.$$

$(*)$ **Nota:** El cálculo de $(P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1}$ queda a cargo del lector.

---

7 - Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ a & 5 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Usando el Teorema de Rouché-Frobenius y el concepto de rango por determinantes, hallar los valores de a para los cuales el sistema es compatible. [0,5p]

b) Para los valores hallados en el apartado anterior, resolver el sistema usando el método de Cramer. [0,5p]

SOLUCIÓN

Apartado *a)* 0,5p

Para determinar el rango de la matriz ampliada, calcularemos el menor de orden 3 obtenido al eliminar la primera columna de la matriz.

$$\begin{array}{r} \\ F_{2,1}(5) \\ F_{3,1}(2) \end{array}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 16 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 16 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Para cualquier valor de a, el rango de la matriz ampliada es 3. Calculemos ahora el rango de la matriz de los coeficientes.

$$\begin{array}{r} \\ F_{2,1}(5) \\ F_{3,1}(2) \end{array}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ a & 5 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ a+5 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+5 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3a - 15$$

Así pues, para $a \neq 5$ se tiene que el rango de la matriz de los coeficientes es 3 y, por tanto, el sistema es compatible determinado. Para $a = 5$ el rango de la matriz de los coeficientes es menor que 3 y, por tanto, el sistema es incompatible.

Apartado *b)* 0,5p

Supongamos que $a \neq 5$. Usando el método de Cramer se tiene que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ a & 5 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{6}{3a-15} = \frac{2}{a-5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ a & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ a & 5 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{5a-39}{3a-15}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ a & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ a & 5 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{7a-45}{3a-15}$$

---

8 - Sea $T : \mathbf{R}^2 \longmapsto \mathbf{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x + y, x - y, x)$.

a) Calcular la matriz de T respecto de las bases $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$. [0,5p]

b) Escribir código de MATLAB que permita resolver el apartado anterior. [0,5p]

c) Calcular unas ecuaciones implícitas del subespacio $\text{Img}(T)$ respecto de la base $\mathcal{B}'$. [0,5p]

SOLUCIÓN

Apartado *a)* 0,5p

Se tiene que

$$\begin{aligned} T(1,1) &= (2,0,1) = 2(1,0,1) - (0,0,1) \\ T(1,-1) &= (0,2,1) = 2(0,1,1) - (0,0,1) \end{aligned}$$

Por tanto, la matriz de T respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es

$$[T]_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Apartado *b)* 0,5p

```
>> A=sym([1,1;1,-1;1,0])                    % Matriz de T respecto de ambas bases canónicas
>> P=sym([1,1;1,-1])                % Matriz de cambio de base de B a la base canónica de R^2
>> Q=sym([1,0,0;0,1,0;1,1,1])      % Matriz de cambio de base de B' a la base canónica de R^3
>> inv(Q)*A*P                                          % Matriz de T respecto de B y B'
```

Apartado *c)* 0,5p

Por el apartado anterior sabemos que $\mathrm{Img}(T) = \mathsf{Gen}\,\{(2,0,-1)_{\mathcal{B}'}, (0,2,-1)_{\mathcal{B}'}\}$. Pasamos a calcular unas ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{B}'$ de este subespacio.

$$F_1\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & \bar{x} \\ 0 & 2 & \bar{y} \\ -1 & -1 & \bar{z} \end{array}\right) \mapsto F_{3,1}(1)\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2}\bar{x} \\ 0 & 2 & \bar{y} \\ -1 & -1 & \bar{z} \end{array}\right) \mapsto F_1\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2}\bar{x} \\ 0 & 2 & \bar{y} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2}\bar{x}+\bar{z} \end{array}\right)$$

$$F_{3,2}(1)\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2}\bar{x} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\bar{y} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2}\bar{x}+\bar{z} \end{array}\right) \mapsto F_{3,2}(1)\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2}\bar{x} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\bar{y} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\bar{x}+\frac{1}{2}\bar{y}+\bar{z} \end{array}\right) \mapsto$$

Luego unas ecuaciones implícitas de $\mathrm{Img}(T)$ respecto de $\mathcal{B}'$ son

$$\left\{\bar{x}+\bar{y}+2\bar{z}=0\right.$$

---

9 - Sea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcular una matriz P invertible y una matriz D diagonal tal que $P^{-1}AP = D$. [1p]

SOLUCIÓN

En primer lugar debemos calcular el polinomio característico de A.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

Debemos calcular ahora una base de cada uno de los subespacios propios.

Comencemos con el autovalor -1. Sabemos que $V_{-1} = N(A+I)$. Por tanto, unas ecuaciones implícitas de V_{-1} vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La resolución de este sistema nos lleva a que $\mathcal{B}_{V_{-1}} = \{(1,0,0),(0,1,-1)\}$ es una base de V_{-1}.

Calculemos ahora una base de V_5. Se tiene que $V_5 = N(A-5I)$. Así, unas ecuaciones implícitas de V_5 vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema (la resolución de deja al lector) y obtenemos que $\mathcal{B}_{V_5} = \{(1,1,2)\}$ es una base de V_5.

Ya estamos en condiciones de afirmar que las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

satisfacen las condiciones pedidas en el ejercicio.