# $1^o$ Grado en Informática.Matemáticas I.
## Hoja 1. Resolución

1. a) $\sqrt{2x} = 1 + \sqrt{x+1} \Rightarrow (\sqrt{2x})^2 = (1+\sqrt{x+1})^2 \Rightarrow 2x = 1 + x + 1 + 2\sqrt{x+1} \Rightarrow x - 2 = 2\sqrt{x+1} \Rightarrow$

$(x-2)^2 = (2\sqrt{x+1})^2 \Rightarrow x^2 + 4 - 4x = 4(x+1) = 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x(x-8) = 0.$

Con lo que las soluciones posibles serán $x = 0$ y $x = 8$. Ahora hay que comprobar que sean correctas, porque al elevar al cuadrado, podemos haber introducido falsas soluciones a la ecuación original:

$\sqrt{0} - \sqrt{1} = -1 \neq 1$, por lo que no es solución de la ecuación.
$\sqrt{16} - \sqrt{9} = 4 - 3 = 1$, por lo que es solución de la ecuación.

b) Se realiza el cambio $t = x^2$, y nos queda la ecuación: $t^2 + t - 2 = 0$, resolviendo dicha ecuación:

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4*1*(-2)}}{2*1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \nearrow & t = 1 \\ \searrow & t = -2 \end{cases}$$

Como $t$ es el cuadrado de un número real, debe ser positivo, descartándose la solución $t = -2$, por lo que las soluciones serán $x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$.

c) $(\sqrt{x^2+4})^2 = (3x+2)^2 \Rightarrow x^2 + 4 = 9x^2 + 4 + 12x \Rightarrow 8x^2 + 12x = 0 \Rightarrow 4x(2x+3) = 0 \Rightarrow x(2x+3) = 0$

Por lo que los candidatos a soluciones serán $x = 0$ y $x = -\frac{3}{2}$

$\sqrt{0^2+4}) = 2; (3*0+2) = 2 \Rightarrow x = 0$ es una solución.

$\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}; -3*\frac{3}{2}+2 = -\frac{5}{2}$, son distintos, por lo que $x = -\frac{3}{2}$ no es solución del problema.

d) El denominador común de todas las fracciones es $2(x^2-1) = 2(x-1)(x+1)$, poniendo todas las fracciones con denominador común, nos quedaría:

$$\frac{x*2(x+1)}{2(x^2-1)} + \frac{3}{2(x^2-1)} = \frac{2x*2(x-1)}{2(x^2-1)}$$

Multiplicando por el denominador y operando:

$2x^2 + 2x + 3 = 4x^2 - 4x \Rightarrow 2x^2 - 6x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36+24}}{4} = \dfrac{6 \pm \sqrt{60}}{4} = \dfrac{6 \pm \sqrt{2^2 * 15}}{4} = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{15}}{4} = \dfrac{3 \pm \sqrt{15}}{2}$

e) Sacamos denominador común $2x$:

$\frac{x^2}{2x} - \frac{2}{2x} = \frac{x}{2x} \Rightarrow x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} \nearrow & 2 \\ \searrow & -1 \end{cases}$

*f*) Aplicamos Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 16 & -12 \\ & & & & \\ 3 & & 3 & -12 & 12 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

Por lo que $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x-3)(x^2-4x+4) = 0 \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \nearrow \; x-3=0 \\ \searrow \; x^2-4x+4=0 \end{array}$

$x - 3 = 0 \Longleftrightarrow x = 3$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$

*g*) Sacando denominador común 12, nos queda la ecuación:

$\frac{2(x-5)}{12} - \frac{4x}{12} = \frac{x}{12} + \frac{3(x+2)}{12} \Rightarrow 2x - 10 - 4x = x + 3x + 6 \Rightarrow -6x - 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{-16}{6} = \frac{-8}{3}$

*h*) $|x| = x \Longleftrightarrow x \geq 0:$

$x = x + 5 \Rightarrow 0 = 5$ Imposible, por lo que no hay solución en este caso

$|x| = -x \Longleftrightarrow x < 0:$

$-x = x + 5 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{2} < 0,$ esta sí es una solución al problema

*i*) $|3x-2| = 3x - 2 \Longleftrightarrow 3x - 2 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \frac{2}{3}:$

$3x - 2 = 2x \Rightarrow x = 2 \geq \frac{2}{3},$ por lo que es una solución del problema

$|3x-2| = -3x + 2 \Longleftrightarrow 3x - 2 < 0 \Longleftrightarrow x < \frac{2}{3}:$

$-3x + 2 = 2x \Rightarrow x = \frac{2}{5} < \frac{2}{3},$ por lo que es una solución del problema

2. Si admite la solución $x = 1$, significa que al sustituir $x$ por 1 en la ecuación, esta debe de cumplirse:

$$1^3 - 4 * 1^2 + 2m * 1 - 2 = 0 \Longleftrightarrow 1 - 4 + 2m - 2 = 0 \Longleftrightarrow m = \frac{5}{2}$$

Con esta $m$, la ecuación quedaría:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$

Aplicamos Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 5 & -2 \\ & & & & \\ 1 & & 1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

Tenemos ahora que resolver la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \; 2 \\ \searrow \; 1 \end{array}$

Por lo que las soluciones serán, $x = 1$ doble, y $x = 2$.

3. *a*) Tomando la primera ecuación y despejando $y : y = 5 - x$, sustituyendo en la segunda y sacando denominador común:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{5-x} = 4 \Rightarrow \frac{5-x}{x(5-x)} + \frac{x}{x(5-x)} = \frac{4x(5-x)}{x(5-x)} \Rightarrow 5 - x + x = 20x - 4x^2 \Rightarrow 4x^2 - 20x + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400-80}}{8} = \frac{20 \pm \sqrt{320}}{8} = \frac{20 \pm \sqrt{2^6 * 5}}{8} = \frac{20 \pm 2^3\sqrt{5}}{8} = \frac{5 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

*b*) Tomando la primera ecuación y despejando $y : y = x - 3$, sustituyendo en la segunda:

$$\sqrt{3}x + x - 3 = 1 \Rightarrow (\sqrt{3}+1)x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3}+1} = \frac{4}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{4\sqrt{3}-4}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{4\sqrt{3}-4}{2} = 2\sqrt{3} - 2$$

$x = 2\sqrt{3} - 2 \Rightarrow y = 2\sqrt{3} - 5$

*c*) Tomando la primera ecuación y despejando $y : y = \frac{2x-1}{3}$, sustituyendo en la segunda:

$$2\frac{2x-1}{3} - 3x = 1 \Rightarrow \frac{4x-2}{3} - \frac{9x}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow 4x - 2 - 9x = 3 \Rightarrow -5x = 5 \Rightarrow x = -1$$

Si $x = -1 \Rightarrow y = \frac{-2-1}{3} = -1$

4. *a*) El numerador: $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

Para el denominador, hay que aplicar Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & & -1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Por lo que $x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1)$

De forma que nos queda:

$$\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x+1)(x^2+1)} = x - 1$$

*b*) El numerador: $x^2 + 6x + 9 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$

El denominador: $x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3); x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{array}{l} \nearrow 1 \\ \searrow -3 \end{array}$

$\Rightarrow x^3 + 2x^2 - 3x = x(x-1)(x+3)$

Al plantear el cociente:

$$\frac{(x+3)^2}{x(x-1)(x+3)} = \frac{x+3}{x(x-1)}$$

*c*) Para el numerador, empezamos aplicando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 1 & & 1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

Resolvemos ahora $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{array}$

Con esto, el numerador queda: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)(x-2)(x-1) = (x-1)^2(x-2)$

Procedemos de manera análoga con el denominador:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Resolvemos ahora $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \; 2 \\ \searrow \; -1 \end{array}$

Con esto, el denominador queda: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x-2)(x+1)$

Planteamos el cociente:

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$$

5. *a*) $\dfrac{6x^2y^3 - 4xy^2}{8x^2y^2 - 6xy^2} = \dfrac{2xy^2(3xy-2)}{2xy^2(4x-3)} = \dfrac{3xy-2}{4x-3}$

*b*) $\dfrac{2\sqrt{6} - 4\sqrt{2}}{\sqrt{8} - 4\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{2\cdot 3} - 4\sqrt{2}}{\sqrt{2^3} - 4\sqrt{2\cdot 3}} = \dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{3} - 4\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}(2\sqrt{3}-4)}{\sqrt{2}(2-4\sqrt{3})} = \dfrac{2\sqrt{3}-4}{2-4\sqrt{3}} \cdot \dfrac{2+4\sqrt{3}}{2+4\sqrt{3}}$

$= \dfrac{4\sqrt{3} - 8 + 8\cdot 3 - 16\sqrt{3}}{2^2 - (4\sqrt{3})^2} = \dfrac{-12\sqrt{3}+16}{4-16\cdot} = \dfrac{-12\sqrt{3}+16}{-44} =$ ( sacando factor común $-4$ en el numerador y denominador y simplificando ) $= \dfrac{3\sqrt{3}-4}{11}$

6. *a*)

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & -4x^2 & -3x & +1 & -2x \quad +1 \\ \cline{5-5} -3x^3 & +\frac{3}{2}x^2 & & & -\frac{3}{2}x^2 \quad +\frac{5}{4}x \quad +\frac{17}{8} \\ \cline{1-3} & -\frac{5}{2}x^2 & -3x & & \\ & \frac{5}{2}x^2 & -\frac{5}{4}x & & \\ \cline{2-4} & & -\frac{17}{4}x & +1 & \\ & & \frac{17}{4}x & -\frac{17}{8} & \\ \cline{3-4} & & & -\frac{9}{8} & \end{array}$$

Por lo que el cociente es $-\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{17}{8}$ y el resto es $\frac{-9}{8}$

$b)$

$$
\begin{array}{rrrrr|rr}
2x^4 & -4x^3 & +2x^2 & & -3 & x^2 & -2x \\
\cline{6-7}
-2x^4 & +4x^3 & & & & 2x^2 & +2 \\
\cline{1-3}
 & & 2x^2 & & & & \\
 & & -2x^2 & +4x & & & \\
\cline{3-4}
 & & & 4x & -3 & & \\
\end{array}
$$

Por lo que el cociente es $2x^2 + 2$ y el resto es $4x - 3$