Práctica 4

Cálculo Simbólico.

4.1. Cálculo de Límites.Valoración de funciones.

Para definir una función en Matlab, se usa el comando *syms* seguido del nombre de la/s variable/s que tenga la función:
$syms\ x\ y$
$f = x * sin(x)/cos(y);$

Con esas dos líneas, hemos definido la función $f(x, y) = \frac{xsen(x)}{cos(y)}$.
Para valorar una función en un punto dado, se usa el comando *subs*, por ejemplo, si queremos sustituir en la función anterior x por $\frac{\pi}{3}$ e y por π, escribiremos:
$g = subs(f, x, pi/3)$ Con esto, sustituimos x por $\frac{\pi}{3}$, y lo almacenamos en la función g.

Para substituir el valor en y, escribimos:
$h = subs(g, y, pi)$

Es recomendable recordar el comando $vpa(h, n)$, que redondeaba un resultado numérico h a tantas cifras como indique el valor n.

Ejercicio 4.1.1.– Calcular el valor que toman las siguientes funciones en los puntos indicados, con un máximo de 5 cifras.

1. $f(x) = x^2 sen(x)$ cuando $x = \frac{\pi}{3}$.
2. $f(x) = \frac{ln(3\sqrt{x})}{tan(x)}$ cuando $x = 3$.

Para calcular límites, Matlab cuenta con el comando *limit*, permite calcular límites en un punto, en el infinito y laterales, por ejemplo, si queremos calcular el límite de una función $f(x)$ en un punto x_0, bastará escribir $limit(f, x, x_0)$, si lo queremos sólo por la derecha, añadiremos $limit(f, x, x_0, 'right')$, mientras que si es por la izquierda, escribiremos $limit(f, x, x_0, 'left')$. Para calcular límites en el infinito, baste recordar que Matlab lo reconoce al escribir inf.

Ejemplo 4.1.2.– Para calcular el límite cuando x tiende a 0 de la función $\frac{sen(x)}{x}$, escribimos:
$syms\ x$
$f = sin(x)/x;$

$limit(f,x,0)$

Para calcular el límite cuando x tiende a 0 por la derecha de la función $\frac{ln(x)}{x}$, escribimos:
$syms\ x$
$f = log(x)/x;$
$limit(f,x,0,'right')$

Si queremos calcular el límite cuando x tiende a ∞ de la función anterior, cambiamos la última expresión por $limit(f,x,inf)$

Ejercicio 4.1.3.– Calcular los siguientes límites:

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2}}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mid x \mid}{x^2+x}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x\sqrt{x}-x}{x-1}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)-sen(x)}{x-sen(x)}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{sen(x^2-1)}{\mid x-1 \mid}$

6. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{1-x^2}{x^2+\sqrt{x}-cos(x)}$

4.2. Derivadas. Taylor.

Para derivar, Matlab cuenta con el comando $diff$, este comando, permite calcular la derivada de cualquier orden de una determinada función f, su sintaxis es $diff(f,x,n)$, donde n es el grado de la derivada que se desea calcular (si el queremos la primera derivada, no hay que poner n), y x, la variable con respecto a la que se deriva.

Ejemplo 4.2.4.– Calcular la derivada de la función $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$, respecto de las variables x e y
$syms\ x\ y$
$f = x^2 * y/(x^2+y^2);$
$diff(f,x)$
$pretty(ans)$
$diff(f,y)$
$pretty(ans)$

Calcular la segunda derivada de la función $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$
$syms\ x$
$f = sin(x)/x;$
$diff(f,2)$

Ejercicio 4.2.5.–

1. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

   b) $f(x) = \sqrt{\frac{sen(x)}{cos(x)-2}}$

   c) $f(x) = ln(\frac{x^2}{x+1})$

2. Calcular la tercera derivada de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = ln(1+x^2)$

   b) $f(x) = sen^2(x) - x$

   c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-cos(x)}{1+cos(x)}}$

4.2.1. Taylor

Para calcular el polinomio de Taylor de una función, Matlab tiene dos comandos, *taylor* y *taylortool*. Para utilizar el primero, hay que indicarle la función, el punto x_0 en el que se desea calcular el polinomio, y el grado del polinomio de Taylor que se desea (Matlab considera el número de términos del polinomio, por lo que se debe introducir el grado del polinomio más uno).

Ejemplo 4.2.1.– Si queremos el polinomio de Taylor de la función $f(x) = ln(1+x)$ en el punto $x_0 = 0$ de grado 5, escribiremos:

$syms\ x$
$f = log(1+x)$
$taylor(f, 0, 6)$

Ejercicio 4.2.2.– Calcular el polinomio de Taylor de grado 4 de las siguientes funciones, en los puntos que se indican:

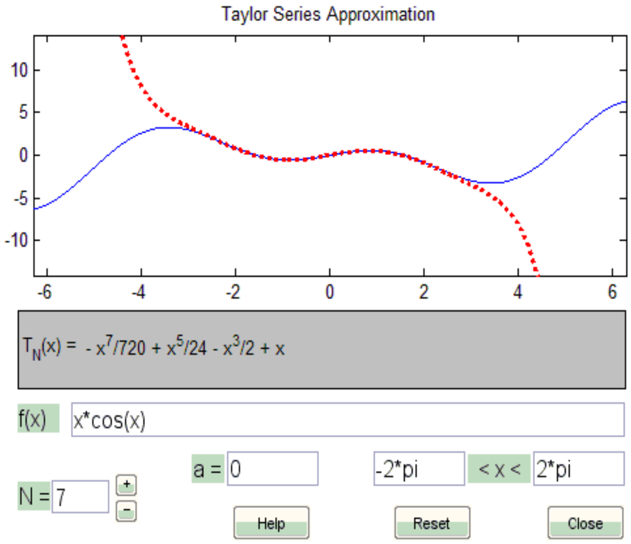
1. $f(x) = sen(x + \frac{\pi}{2})$ en $x = 0$.

2. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ en $x = 0$.

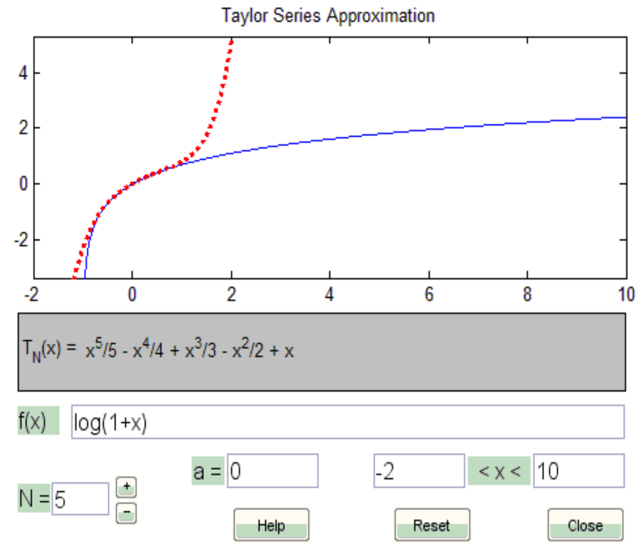
3. $f(x) = cos(x)$ en $x = \frac{\pi}{2}$.

Al usar el comando Taylortool, la forma de trabajar es distinta, se empieza escribiendo simplemente el comando Taylortool:
$taylortool$

Y sale la siguiente ventana gráfica:



En dicha ventana, nos sale la última función que se estudió con dicho comando, en la ventana $f(x)$, podemos sustituir la función por la nuestra, $ln(1+x)$, en a, hay que poner el punto x_0 en el que se desea desarrollar la función $f(x)$, en nuestro caso, 0, en N, el grado del polinomio, y teníamos grado 5 (pulsamos sobre más o menos, según corresponda). También podemos cambiar el rango en el que se observa la función, cambiémoslo por $(-2, 10)$. El resultado será:



En $T_N(x)$, tenemos el polinomio de Taylor, en la gráfica, de color azul, tenemos representada la función $f(x)$, y en color rojo, el polinomio de Taylor asociado, lo que permite observar con claridad el grado de aproximación entre ambos y el intervalo más adecuado para realizar dicha aproximación.

4.3. Integrales.

Para realizar integrales, tenemos el comando *int*, que calcula, tanto primitivas de funciones, como integrales definidas.

Ejemplo 4.3.3.– Para calcular la primitiva de una función, escribimos $int(f, x)$, por ejemplo, para calcular la primitica de la función $f(x) = x^2 sen(x)$, escribiríamos:
$syms\ x$
$f = x \wedge 2 * sin(x);$
$int(f, x)$
Si lo que deseamos es la integral entre los valores 1 y 2, escribiremos:
$int(f, x, 1, 2)$
$vpa(ans, 4)$

Ejercicio 4.3.4.– Calcular las siguientes integrales:

1. $\int (x^3 + \frac{x^2}{3} + 2x + \frac{1}{x})\ dx$
2. $\int cos^2(x)\ dx$
3. $\int \frac{x-1}{x^3-3x^2+3x-1}\ dx$
4. $\int \sqrt{x^2+25}\ dx$
5. $\displaystyle\int_1^3 (x^2 + \frac{1}{x^2})\ dx$
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen(x)}{x^2}\ dx$
7. $\displaystyle\int_1^{10} \frac{x}{x^2 ln(x)}\ dx$