1^o Grado en Informática.Matemáticas I.

Hoja 3. Resolución

1. *a*) Realicemos el cambio $sen(x) = y$, con este cambio, la ecuación queda:

$$2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

Si $y = -1 \Rightarrow sen(x) = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2}$

Si $y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow sen(x) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ ó $x = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$

b) $sen(x) = \sqrt{1 - cos^2(x)} \Rightarrow \sqrt{1 - cos^2(x)} + cos(x) = 1 \Rightarrow \sqrt{1 - cos^2(x)} = 1 - cos(x) \Rightarrow$

$(\sqrt{1 - cos^2(x)})^2 = (1 - cos(x))^2 \Rightarrow 1 - cos^2(x) = 1 + cos^2(x) - 2cos(x)$

$$\Rightarrow 2cos^2(x) - 2cos(x) = 0 \Rightarrow cos(x)(cos(x) - 1) = 0 \begin{cases} cos(x) = 0 \\ cos(x) = 1 \end{cases}$$

$\cos(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\cos(x) = 1 \Longleftrightarrow x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Éstas son las posibles soluciones, al elevar al cuadrado, hay que tener en cuenta que podemos tener algunas soluciones de más. Las comprobamos por tanto:
Si $cos(x) = 1 \Rightarrow sen(x) = 0 \Rightarrow cos(x) + sen(x) = 1 + 0 = 1$, por lo que son soluciones del problema.

$$\text{Si } cos(x) = 0 \begin{cases} sen(x) = 1 \Rightarrow cos(x) + sen(x) = 0 + 1 = 1 \\ sen(x) = -1 \Rightarrow cos(x) + sen(x) = 0 - 1 = -1 \neq 1 \end{cases}$$

Es decir, entre aquellos valores en los que el $cos(x) = 0$, nos interesan sólo aquellos en los que $sen(x) = 1$, es decir, los puntos de la forma $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

c) $tan(x) = \dfrac{1}{tan(x)} \Rightarrow \dfrac{sen(x)}{cos(x)} = \dfrac{cos(x)}{sen(x)} \Rightarrow sen^2(x) = cos^2(x) \Rightarrow cos^2(x) - sen^2(x) = 0$

$\Rightarrow cos(2x) = 0 \Rightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

2. *a*) $$\frac{sen(x) - tan(x)}{sen^3(x)} = \frac{sen(x) - \frac{sen(x)}{cos(x)}}{sen^3(x)} = \frac{sen(x)cos(x) - sen(x)}{sen^3(x)cos(x)} = \frac{sen(x)(cos(x) - 1)}{sen^3(x)cos(x)} = \frac{cos(x) - 1}{sen^2(x)cos(x)} =$$

$$\frac{cos(x) - 1}{(1 - cos^2(x))cos(x)} = \frac{cos(x) - 1}{(1 - cos(x))(1 + cos(x))cos(x)} = \frac{-1}{cos(x)(1 + cos(x))}$$

$b)$ $\dfrac{sen(3x)+sen(x)}{sen(2x)} = \dfrac{sen(2x)cos(x)+sen(x)cos(2x)+sen(x)}{2sen(x)cos(x)} =$

$\dfrac{2sen(x)cos(x)cos(x)+sen(x)(cos^2(x)-sen^2(x))+sen(x)}{2sen(x)cos(x)} = \dfrac{2cos^2(x)+cos^2(x)-sen^2(x)+1}{2cos(x)} =$

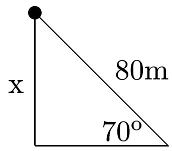
$\dfrac{3cos^3(x)-(1-cos^2(x))+1}{2cos(x)} = \dfrac{4cos^2(x)-1+1}{2cos(x)} = 2cos(x)$

$c)$ $\dfrac{2sen(x)-sen(2x)}{sen^3(x)} = \dfrac{2sen(x)-2sen(x)cos(x)}{sen^3(x)} = \dfrac{2-2cos(x)}{sen^2(x)} = \dfrac{2(1-cos(x))}{1-cos^2(x)} =$

$\dfrac{2(1-cos(x))}{(1-cos(x))(1+cos(x))} = \dfrac{2}{1+cos(x)}$

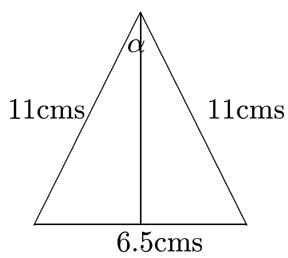
3. $75^o = \dfrac{5\pi}{12}$ Teniendo en cuenta la definición de radián, la longitud del arco de circunferencia citado será: $\dfrac{5\pi}{12} \cdot 18\text{cms} = \dfrac{15\pi}{2}\text{cms}$

4. El dibujo asociado sería:



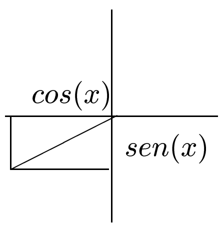
Teniendolo en cuenta, se sabe que $sen(70^{\circ}) = \dfrac{x}{80} \Rightarrow x = 80sen(70^{\circ})$ cms.

5. Al decirnos que se trata de un compás, sabemos que hay dos lados iguales, este sería el dibujo asociado:



Tenemos que $sen(\frac{\alpha}{2}) = \dfrac{\frac{6,5}{2}}{11} = \dfrac{6,5}{22} = 0{,}29 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = arcosen(0{,}29) \Rightarrow \alpha = 2arcosen(0{,}29)$

6. Un dibujo aproximado de la situación sería:



Sabemos que $sen(\alpha) = \dfrac{-1}{2} = -sen(\dfrac{\pi}{6}) \Rightarrow \alpha = \pi + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6} \Rightarrow cos(\alpha) = -cos(\dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$;

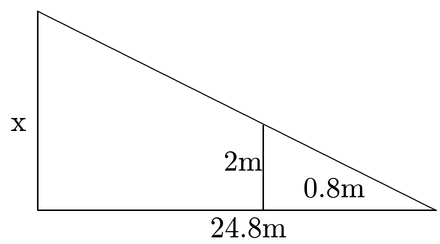
$tan(\alpha) = \dfrac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)} = \dfrac{\frac{-1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

7. $sen(\frac{2\pi}{3}) = 2sen(\frac{\pi}{3})cos(\frac{\pi}{3}) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos(\frac{2\pi}{3}) = cos^2(\frac{\pi}{3}) - sen^2(\frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

$tan(\frac{2\pi}{3}) = \frac{sen(\frac{2\pi}{3})}{cos(\frac{2\pi}{3})} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

8. El dibujo asociado será:



Utilizando semejanza de triángulos, se obtiene:
$\frac{x}{2} = \frac{24{,}8}{0{,}8} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 24{,}8}{0{,}8} = \frac{248}{4} = \frac{124}{2} = 62m$

9. Basta con usar una regla de tres simple, usando como base, el área del círculo de radio r, que es πr^2, asociada a un ángulo de 2π, llamando x al área que deseamos clacular, y α al ángulo del sector que tenemos (α en radianes):

$$\begin{array}{ccc} 2\pi & \dots\dots\dots & \pi r^2 \\ \alpha & \dots\dots\dots & x \end{array}$$

Con lo que nos quedaría que:

$$x = \frac{\pi r^2 \alpha}{2\pi} = \frac{r^2\alpha}{2}$$

10. Despenjando en la primera ecuación, obtenemos que $y = \frac{\pi}{2} + x$, y sustituyendo en la segunda, $cos(x) + sen(\frac{\pi}{2} + x) = 1$, utilizando las propiedades trigonométricas:

$sen((\frac{\pi}{2} + x) = sen(\frac{\pi}{2})cos(x) + sen(x)cos(\frac{\pi}{2}) = cos(x) \Rightarrow cos(x) + sen(\frac{\pi}{2} + x) = cos(x) + cos(x) =$

$2cos(x) = 1 \Rightarrow cos(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \Rightarrow \quad y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ si } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$

$y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ si } x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi, \text{ en todos los casos, } \quad k \in \mathbb{Z}$

11. 30^o son $\frac{\pi}{6}$ radianes, y $15^o = \frac{30^o}{2}$, $\frac{\pi}{12}$ radianes.

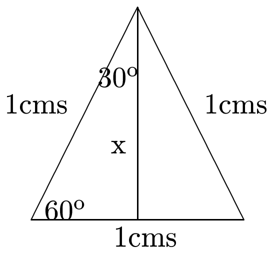
$sen(\frac{\pi}{12}) = sen(\frac{\frac{\pi}{6}}{2}) = \sqrt{\frac{1 - cos(\frac{\pi}{6})}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

$cos(\frac{\pi}{12}) = cos(\frac{\frac{\pi}{6}}{2}) = \sqrt{\frac{1 + cos(\frac{\pi}{6})}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

$tan(\frac{\pi}{12}) = \frac{sen(\frac{\pi}{12})}{cos(\frac{\pi}{12})} = \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2^2 - \sqrt{3}^2}}{2 + \sqrt{3}} =$

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3}^2} = 2-\sqrt{3}$$

12. El dibujo asociado será:



Teniendo en cuenta el teorema de Pitágoras, $x = \sqrt{1-(\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Utilizando ahora las definiciones de las razones trigonométricas en triángulos rectángulos:

$sen(60^o) = \frac{x}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad sen(30^o) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$

$cos(60^o) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$ $\qquad cos(30^o) = \frac{x}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tan(60^o) = \frac{sen(60^o)}{cos(60^o)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ $\qquad tan(30^o) = \frac{sen(30^o)}{cos(30^o)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

13. $sen(3x) = sen(2x+x) = sen(2x)cos(x)+sen(x)cos(2x) = 2sen(x)cos(x)cos(x)+sen(x)(cos^2(x)-sen^2(x)) =$
$= 2sen(x)cos^2(x) + sen(x)cos^2(x) - sen^3(x) = 3sen(x)cos^2(x) - sen^3(x)$

$cos(3x) = cos(2x+x) = cos(2x)cos(x)-sen(2x)sen(x) = (cos^2(x)-sen^2(x))cos(x)-2sen(x)cos(x)sen(x) =$
$= cos^3(x) - sen^2(x)cos(x) - 2sen^2(x)cos(x) = cos^3(x) - 3sen^2(x)cos(x)$