1^o Grado en Informática.Matemáticas I.

Hoja 4. Resolución

1. Para calcular el centro y el radio de la circunferencia, hay que fijarse en la forma general de una circunferencia centrada en (x_0, y_0) y radio r, que es:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Si desarrollamos,

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2x_0x + y^2 - 2y_0y = r^2 - x_0^2 - y_0^2$$

Es decir, para calcular el centro, bastará con fijarse en los terminos x e y, y dividir por -2:

a) En este caso, tenemos -4 asociado a x y 6 asociado a y, por lo que el centro será $(\frac{-4}{-2}, \frac{6}{-2}) = (2, -3)$
Para calcular el radio, despejando en la ecuación anterior, sabemos que $r^2 - y_0^2 - x_0^2 = 23 \Rightarrow$
$r^2 - (-3)^2 - (2)^2 = 23 \Rightarrow r^2 = 23 + 9 + 4 = 36 \Rightarrow r = \sqrt{36} = 6$.

b) Análogamente al apartado anterior, el centro será $(\frac{-8}{-2}, \frac{12}{-2}) = (4, -6)$, $r^2 - y_0^2 - x_0^2 = 48 \Rightarrow$
$r^2 - (4)^2 - (-6)^2 = 48 \Rightarrow r^2 = 48 + 16 + 36 = 100 \Rightarrow r = \sqrt{100} = 10$.

2. Si pasa por los puntos $P(-1, 2)$ $Q(2, -1)$, la pendiente será: $m = \frac{2-(-1)}{-1-2} = \frac{3}{-3} = -1$. Para construir la recta:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -1(x - (-1)) \Rightarrow y = 2 - x - 1 \Rightarrow y = 1 - x$$

3. Si es paralela al vector $(2, -1)$, entonces su pendiente será $m = \frac{-1}{2}$, y la recta:

$$y - (-1) = \frac{-1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

4. La recta dada es $y = \frac{3}{2}x - \frac{4}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 2$, por lo que su pendiente es $\frac{3}{2}$. La pendiente de una recta perpendicular a esta será $m = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = \frac{-2}{3}$, por lo que la recta será:

$$y - 1 = \frac{-2}{3}(x - 0) \Rightarrow y = 1 - \frac{2}{3}x$$

5.

$$y - (-1) = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{2}{2} - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2$$

6. Despejamos y en ambas ecuaciones:

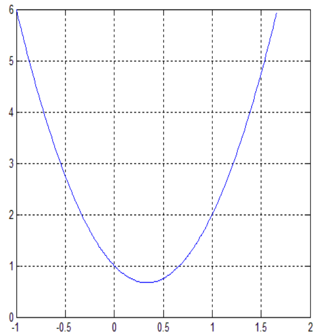
$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}; \quad y = \frac{\frac{4}{3}}{2}x + \frac{2}{2}$$
$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}; \quad y = \frac{2}{3}x + 1$$

Viendo ambas rectas, es evidente que ambas tienen la misma pendiente $\frac{2}{3}$, por lo que ambas son paralelas.

7. En una parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ tiene por coordenada x del vértice $\frac{-b}{2a}$, su eje es $x = \frac{-b}{2a}$, y los puntos de corte con los ejes son los puntos soluciones de $y = 0$ y $x = 0$.

$a)$ Teniendo en cuenta lo anterior, para calcular el vértice, $x_v = \frac{-(-2)}{2\cdot 3} = \frac{1}{3} \Rightarrow y_v = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\frac{1}{3} + 1 \Rightarrow y_v = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3}$, es decir, el vértice está en el punto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, y el eje es la recta $x = \frac{1}{3}$. Si $x = 0$, $y = 1$, y para que $y = 0$:

$$3x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{6} \Rightarrow \text{No corta al eje } OX.$$

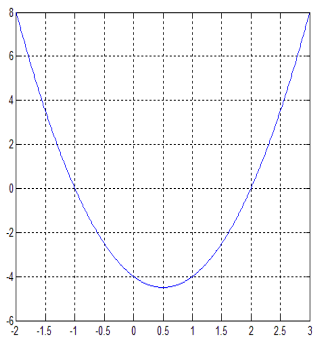


$b)$ El vértice: $x_v = \frac{-(-2)}{2\cdot 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y_v = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{2} - 4 = \frac{1}{2} - 5 = \frac{-9}{2}$, es decir, el punto $(\frac{1}{2}, \frac{-9}{2})$

El eje: $x = \frac{1}{2}$

Puntos de corte con los ejes: $Six = 0 \Rightarrow y = -4$

Si $y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{4} = \frac{2 \pm 6}{4} = \begin{array}{l} \nearrow\ 2 \\ \searrow\ -1 \end{array}$, es decir, corta al eje OX en los puntos $(2, 0)$ y $(-1, 0)$



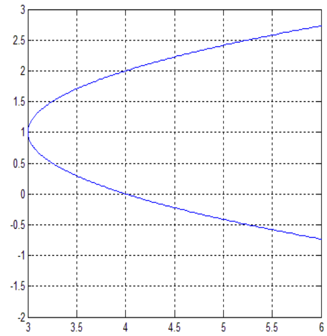
$c)$ En esta parábola, los papeles de x e y se intercambian, de manera que:

Vértice: $y_v = \frac{-(-2)}{2\cdot 1} = 1 \Rightarrow x = 1^2 - 2 \cdot 1 + 4 = 3$, es decir $(3, 1)$

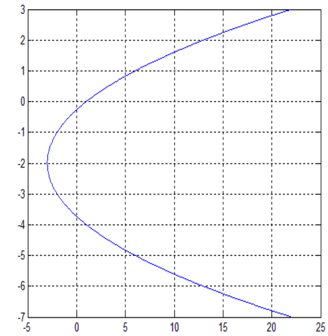
Eje: $y = 1$

Puntos de corte con los ejes: Si $y = 0 \Rightarrow x = 4$ (punto de corte con el eje OX).

Si $x = 0 \Rightarrow y^2 - 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} \Rightarrow$ No corta al eje OY



d) Vértice: $y_v = \frac{-4}{2\cdot 1} = -2 \Rightarrow x_v = (-2)^2 + 4\cdot(-2) + 1 = -3$, por lo que el vértice será $(-3, -2)$
Eje: $y = -2$
Puntos de corte con los ejes: Si $y = 0 \Rightarrow x = 1$ (punto de corte con el eje OX)
Si $x = 0 \Rightarrow y^2 + 4y + 1 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$, por lo que los puntos de corte con el eje OY serán $(-2-\sqrt{2}, 0)$ y $(-2+\sqrt{2}, 0)$.



8. Hay varias formas de resolver este problema, la más básica consiste en imponer que la parábola pasa por cada uno de los tres puntos dados.

Dada una parábola genérica, $y = ax^2 + bx + c$, sustituimos los tres puntos y obtenemos las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3 = a(-1)^2 + b(-1) + c \\ 3 = a(3)^2 + b(3) + c \\ -1 = a(1)^2 + b(1) + c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 = a - b + c \\ 3 = 9a + 3b + c \\ -1 = a + b + c \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema:

A la tercera ecuación, le restamos la primera, y quedaría:

$$-1 - 3 = a + b + c - (a - b + c) \Rightarrow -4 = 2b \Rightarrow b = -2$$

Sustituyendo en las dos primeras:

$$\left.\begin{array}{l} 3 = a - (-2) + c \\ 3 = 9a + 3(-2) + c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a + c = 1 \\ 9a + c = 9 \end{array}\right\}$$

Restándole a la segunda ecuación la primera:

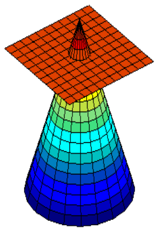
$$9 - 1 = 9a + c - (a + c) \Rightarrow 8 = 8a \Rightarrow a = 1 \Rightarrow c = 1 - a = 1 - 1 = 0$$

Por lo que la parábola resultante será:$y = x^2 - 2x + 0 \Rightarrow y = x^2 - 2x$

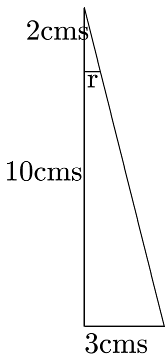
Esta es la única parábola que pasa por esos tres puntos, ahora tendríamos que comprobar que, efectivamente, el vértice es el punto $(-1, 1)$:

Vértice: $x_v = \frac{-(-2)}{2} = 1 \Rightarrow y_v = 1$, con lo que queda comprobado.

9. El dibujo en tres dimensiones asociado sería:



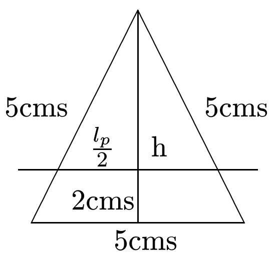
Donde la parte superior seccionada por el cono, es el cono del que nos piden su radio y volumen. Primero calcularemos el radio utilizando semejanza de triángulos:



Teniendo en cuenta que 10cms es el total del lado, se tiene que $\frac{10}{2} = \frac{3}{r} \Rightarrow 5r = 3 \Rightarrow r = \frac{3}{5}$cms.

El volumen de un cono regular de radio r y altura h es $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$, por lo que el volumen de nuestro cono será $V = \dfrac{\pi\left(\frac{3}{5}\right)^2 2}{3} = \dfrac{\pi \cdot 9 \cdot 2}{25 \cdot 3} = \dfrac{6\pi}{25}$

10. El dibujo asociado es:



Si llamamos h a la altura del triángulo original, usando el teorema de Pitágoras, tendremos que $h = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{25 - \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

Es claro deducir que la altura del triángulo pequeño será $h_p = \frac{5\sqrt{3}}{2} - 2 = \frac{5\sqrt{3}-4}{2}$cms

Para conseguir la longitud de la base (l_p), podemos fijarnos en uno de los dos triángulos rectángulos que tenemos dibujados, es claro que el ángulo de arriba, es de $\frac{\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, y la tangente de dicho ángulo es:

$$tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{l_p}{2}}{\frac{5\sqrt{3}-4}{2}} = \frac{l_p}{5\sqrt{3}-4} \Rightarrow l_p = \frac{\sqrt{3}}{3}(5\sqrt{3}-4) = \frac{15-4\sqrt{3}}{3}\text{cms}$$

El área del triángulo es $A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\frac{15-4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{5\sqrt{3}-4}{2}}{2} = \frac{(15-4\sqrt{3})(5\sqrt{3}-4)}{3 \cdot 2 \cdot 2} =$
$\frac{75\sqrt{3}-60-20(\sqrt{3})^2+16\sqrt{3}}{3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{91\sqrt{3}-120}{12}\text{cm}^2$.

11. Dado un punto (x_0, y_0, z_0), y un vector perpendicular (v_1, v_2, v_3) al plano, la ecuación se escribiría:

$$v_1(x-x_0) + v_2(y-y_0) + v_3(z-z_0) = 0$$

Aplicándolo a este caso:

$$2(x-1) - 1(y-2) + 3(z-(-1)) = 0 \Rightarrow 2x - y + 3z + 3 = 0$$

12. Si es perpendicular a dicho plano, y teniendo en cuenta lo dicho en el apartado anterior, el vector de la recta será el $(1, 2, 1)$. Tenemos, además, un punto de la recta, por lo que la recta puede escribirse como:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-(-1)}{1} \Rightarrow x - 1 = \frac{y-1}{2} = z + 1$$