Tema 3

Variables aleatorias y modelos de distribuciones

3.1 Una variable aleatoria discreta X viene dada por la ley de probabilidad:

X	2	4	7
$P(X=x)$	0.5	0.2	0.3

(a) Hallar la función de distribución y representarla gráficamente.

(b) Hallar $P(X \leq 5)$ y $P(X > 2|_{X<4})$.

3.2 Los tres cañones de una batería tienen probabilidades de hacer blanco $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.4$, respectivamente. Encontrar la función de distribución del número de blancos obtenidos al hacer una descarga.

3.3 Sea X una variable aleatoria discreta que toma los valores 0, 1, 2 ó 3, y de la que se conoce:

$$P(X < 1) = \frac{1}{4} \qquad P(1 \leq X \leq 2) = \frac{1}{2} \qquad P(0.5 \leq X \leq 3) = \frac{6}{8} \qquad E(X) = \frac{11}{8}$$

Determinar la función de distribución de X.

3.4 Sean a y b dos números enteros estrictamente positivos. Sea X una variable aleatoria discreta que toma todos los valores enteros comprendidos entre 1 y $a \cdot b$ con probabilidades:

$$P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} & \text{si} \quad x \in \{1, \dots, a \cdot b\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¿Qué condición deben verificar a y b para que $p(x) = P(X = x)$ pueda ser considerada como la distribución de probabilidad de X?

3.5 Se venden 5000 boletos, de 1 euro cada uno, para el sorteo de un ordenador de 2000 euros. ¿Cuál es la ganancia esperada de una persona que compra tres boletos?

3.6 Dos personas A y B disparan sobre una diana con probabilidades de acertar $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$, respectivamente. Si A dispara 2 veces y B dispara 1 vez, ¿cuál es el número esperado de aciertos? ¿Y su varianza?

3.7 La variable aleatoria X viene dada por la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} sen\, 3x & \text{si} \quad x \in (0, \frac{\pi}{3}) \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (0, \frac{\pi}{3}) \end{cases}$$

Hallar la probabilidad de que X esté comprendida en el intervalo $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$.

3.8 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ x - k & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

(a) Determinar k para que f sea función de densidad de una variable aleatoria X.
(b) Calcular su función de distribución.
(c) Calcular la media y la varianza de esta variable.

3.9 Una magnitud aleatoria tiene asociada la función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ \frac{3x}{4} + \frac{3}{4} & \text{si} \quad -1 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 1 & \text{si} \quad x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

(a) Hallar su función de densidad.
(b) Hallar la probabilidad de que X tome un valor comprendido en el intervalo $(0, \frac{1}{3})$.
(c) Hallar la esperanza y la mediana de X.

3.10 Sea la variable aleatoria X dada por la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in (0, 1) \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (0, 1) \end{cases}$$

Hallar la esperanza y la varianza de X.

3.11 Sea X una variable aleatoria con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \frac{x^2}{9} & \text{si} \quad 0 < x \leq 3 \\ 1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

(a) Determinar su función de densidad.
(b) Calcular $P(X > 2)$, $P(1 < X \leq 2)$, $P(X < 2 \quad \cup \quad X > 2.5)$.
(c) Determinar $E(X)$, $Var(X)$.

3.12 Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} kx(1 - x) & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (0, 1) \end{cases}$$

Hallar $E(X)$, $Var(X)$ y $P(X > 0.3)$.

3.13 Se lanza una moneda hasta que sale cruz. Si X es la variable aleatoria que mide el número de lanzamientos realizados, hallar la función de probabilidad y la esperanza de X.

3.14 Calcular la esperanza y la varianza del número de puntos obtenidos en la tirada de un dado ordinario.

3.15 Sea X el número de veces que se ha tirado un dado antes de que salga 6. Obtener la función de probabilidad y la esperanza de dicha variable.

3.16 Una variable aleatoria continua X viene dada por la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} & \text{si} \quad x \in (a-\alpha, a+\alpha) \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (a-\alpha, a+\alpha) \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$. Hallar la esperanza y la varianza de X.

3.17 El tiempo de espera en el taller necesario para que a un automóvil se le realice la ITV sigue una distribución exponencial de media 0.2 horas. Hallar

(a) La probabilidad de que el tiempo de espera sea inferior a 12 minutos.
(b) La probabibilidad de que el tiempo de espera esté entre 15 y 30 minutos.

3.18 La función de distribución de una variable aleatoria T que mide el tiempo de trabajo sin fallos de cierto dispositivo es igual a:

$$F(t) = 1 - e^{-0.1\,t} \qquad t > 0$$

donde t viene expresado en horas.

(a) Hallar la probabilidad de que el tiempo de trabajo sin fallos sea superior a 10 horas.
(b) Hallar la probabilidad de que se produzca algún fallo antes de 15 horas si en las 10 primeras no se ha producido.
(c) Hallar e interpretar la esperanza de T.

3.19 Se prueban tres elementos que trabajan independientemente entre sí. La duración del tiempo de trabajo sin fallos, en horas, de los elementos está distribuída, respectivamente, según las siguientes funciones de distribución:

- Para el primer elemento $F_1(t) = 1 - e^{-0.1t}$ si $t > 0$.
- Para el segundo elemento $F_2(t) = 1 - e^{-0.2t}$ si $t > 0$.
- Para el tercer elemento $F_3(t) = 1 - e^{-0.3t}$ si $t > 0$.

Hallar la probabilidad de que antes de 5 horas fallen:

(a) Uno de los elementos.
(b) Al menos uno de los elementos.
(c) Los tres elementos.

3.20 El tiempo de reparación (en horas) de un tipo de máquina es una variable aleatoria X con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.5x & 0 \leq x < 1 \\ 0.5 & 1 \leq x < 2 \\ 0.25x & 2 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

(a) Determinar la función de densidad de X.

(b) Calcular el tiempo medio de reparación de este tipo de máquina.

(c) Si se realizan 10 reparaciones, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellas requieran más de 2.5 horas?

3.21 Se ha comprobado experimentalmente que el 2% de las piezas fabricadas por una factoría son defectuosas. Dichas piezas se introducen en cajas de 10 unidades. Cada vez que se realiza un pedido se lleva a cabo un control de calidad que consiste en abrir 5 cajas, elegidas al azar, de ese pedido y si hay más de una con piezas defectuosas se rechaza el pedido. ¿Cuál es la probabilidad de que un pedido sea rechazado?

3.22 En una estación agrónoma se ha obtenido un tipo de semilla de maíz de calidad extra que germina en el 98% de los casos. Las semillas se distribuyen en bolsas de 500 granos y se garantiza la germinación de un 96% como mínimo. ¿Cuál es la probabilidad de que un paquete no cumpla la garantía?

3.23 Se sabe que el número de microorganismos por gramo de una cierta muestra de suelo, diluida en agua destilada, sigue una distribución de Poisson de media 0.8. Si una preparación se vuelve turbia, este gramo contiene al menos un microorganismo. Hallar la probabilidad de que una preparación que se ha vuelto turbia contenga:

(a) Un solo microorganismo.

(b) Menos de tres microorganismos.

(c) Más de tres microorganismos.

3.24 Las llamadas de servicio llegan a un centro de mantenimiento de acuerdo a un proceso de Poisson con un promedio de 2.7 llamadas por minuto. Calcular la probabilidad de que lleguen, a lo más, 4 llamadas en cualquier minuto.

3.25 Se sabe que la probabilidad de que un instrumento de medición sufra una desviación excesiva es de 0.1. ¿Cuál es la probabilidad de que, de 10 instrumentos elegidos al azar, al menos dos sufran desviación excesiva? ¿Cuál es la probabilidad de que el octavo de los instrumentos utilizados sea el tercero en mostrar una desviación excesiva?

3.26 Las probabilidades de que una lamparilla de cierto tipo de proyector de transparencias dure menos de 40 horas, entre 40 y 80 horas o más de 80 horas de uso continuo, son 0.3, 0.5 y 0.2, respectivamente. Calcular la probabilidad de que de 8 de tales lamparillas, dos duren menos de 40 horas, cinco duren entre 40 y 80 horas y una dure más de 80 horas.

3.27 Un lote de 20 dispositivos electrónicos contiene cinco defectuosos. Si se eligen 10 dispositivos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que 2 de los 10 dispositivos estén defectuosos?

3.28 El kilometraje (en miles de kilómetros) que los automovilistas logran de cierto tipo de neumáticos, es una variable aleatoria con densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}e^{-x/20} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Determinar el kilometraje medio de duración de los neumáticos.

(b) La probabilidad de que uno de los neumáticos dure, a lo sumo 10000 Km., entre 10000 y 16000 Km. y, al menos, 16000 Km.

(c) Se eligen 10 neumáticos al azar. Determinar la probabilidad de que exactamente 4 de ellos duren 10000Km. o menos, 2 duren entre 10000 y 16000 Km., y cuatro duren al menos 16000 Km.

3.29 Un estacionamiento tiene dos entradas. Los coches llegan a la entrada I de acuerdo a una distribución de Poisson de media 3 por hora, y a la entrada II de acuerdo con una distribución de Poisson de media 4 por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que, en una hora, lleguen exactamente dos coches al estacionamiento?

3.30 El peso en toneladas de los rollos de acero fabricados en una planta se distribuyen según una función de densidad normal de media 10 y desviación típica 0.5. Sólo se admiten los rollos con peso comprendido entre 9.5 y 11 toneladas. ¿Cuál es la probabilidad de rechazar un rollo dado?

3.31 El tiempo de respuesta en la conexión con un servidor sigue una distribución normal con media 16.46 ms. y desviación típica 1.15 mm. Si se realizan cinco conexiones calcular la probabilidad de que, en menos de tres de estas conexiones, el tiempo de respuesta sea superior a 17.5 ms.

3.32 El 20% de las placas que perfora una máquina son de un material de tipo I, mientras que el 80% restante son de un material de tipo II. El tiempo X_1 (en segundos) que tarda la máquina en perforar un material de tipo I sigue una distribución exponencial de media 2.5. El tiempo X_2 (en segundos) que tarda en perforar el material de tipo II, es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{32}(12x - 3x^2) & \text{si} \quad x \in (0,4) \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (0,4) \end{cases}$$

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina tarde menos de 2 segundos en perforar una placa de tipo I? ¿Y una placa de tipo II?

(b) Si la máquina ha tardado menos de 2 segundos en perforar una placa cualquiera, ¿cuál es la probabilidad de que sea de material de tipo II?

3.33 La longitud de cierta población de coleópteros sigue una distribución normal. Se sabe que la probabilidad de que un individuo mida menos 12 mm. es de 0.77, y que la probabilidad de que mida más de 7 mm. es de 0.84. Determinar la probabilidad de que un coleóptero elegido al azar tenga una longitud comprendida entre 8 y 10 mm.

3.34 La longitud X de las semillas de cierta flor sigue una distribución normal de la que se sabe que $P(X < 30) = 0.975$ y $P(X < 10) = 0.025$. Si se sabe que una semilla germina cuando su longitud es mayor que 15, calcular la probabilidad de que una semilla elegida al azar no germine.

3.35 La longitud de cierta variedad de semillas sigue una distribución normal, de la que se conoce que la probabilidad de ser menor que 9 mm. es 0.879 y ser menor que 2.32 mm. es 0.015. Determinar la probabilidad de que una semilla mida menos de 3 mm.

3.36 Sean X e Y variables aleatorias independientes que representan la altura en cm. de los hombres y mujeres, respectivamente, de cierta población. Se sabe que ambas alturas se distribuyen según leyes normales de igual varianza y que la altura media de los hombres es mayor que la de las mujeres en 10 cm. Además, la probabilidad de que un hombre elegido al azar mida menos de 190 cm. es de 0.67 y la probabilidad de que un hombre sea más alto que una mujer es 0.883.

(a) Determinar los parámetros de las distribuciones.

(b) Se forman diez parejas al azar formadas, cada una de ellas, por un hombre y una mujer. Determinar el número esperado de parejas en las que el hombre es más alto que la mujer.

3.37 En un cierto proceso de producción se fabrican unas piezas que constan de dos componentes C_1 y C_2 de las que se conoce que sus longitudes siguen, respectivamente, distribuciones $N(\mu, \sigma^2)$ y $N(\mu, 3\sigma^2)$.

La experiencia indica que la probabilidad de que la suma de las longitudes sea mayor que 2 es de 0.5 y que la probabilidad de que la longitud de C_1 sea menor que 0.75 es de 0.4013

Una pieza se considera apta para su comercialización si las longitudes de sus componentes difieren a lo sumo en una unidad. Determinar la probabilidad de que entre 5 piezas producidas al menos dos sean aptas para la comercialización.

3.38 El llenado de los paquetes de 1 Kg. de café de una determinada marca se realiza de forma mecánica, siendo el peso real de cada paquete una variable aleatoria con distribución $N(1000, 25)$. Desde el punto de vista comercial un paquete se considera aceptable si su peso es superior a 990 gr.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un paquete elegido al azar cumpla las condiciones del mercado?

(b) Los paquetes se embalan en cajas de 100.¿Cuál es la probabilidad de que en una caja elegida al azar haya a lo sumo tres paquetes que pesen menos de la cantidad elegida?

(c) El proveedor, para controlar el buen funcionamiento de la máquina, elige 25 paquetes al azar y si el peso medio de estos es superior a 1002 gr. detiene el proceso de empaquetado. ¿Cuál es la probablidad de que ocurra esto?

3.39 En una parada de autobús, el tiempo de espera, en minutos, si el autobús no lleva retraso es una variable aleatoria uniforme en el intervalo (0,8). Cuando el autobús lleva retraso, el tiempo de espera, en minutos, es una variable aleatoria exponencial de media 10 minutos. Se sabe que la probabilidad de que el autobús lleve retraso es 0.3. Si un usuario lleva más de 5 minutos esperando al autobús, ¿cuál es la probabilidad de que venga con retraso?

3.40 La producción diaria de una fábrica, en miles de kg, es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}\, x\,(3-x) & \text{si } x \in (0,3) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,3) \end{cases}$$

(a) Calcular la producción media diaria.

(b) Un día se considera “malo” si se producen menos de 800 kg, “normal” si se producen entre 800 y 2600 kg y “excelente” si se superan los 2600 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que un día resulte “malo”? ¿y “excelente”?

(c) La probabilidad de satisfacer la demanda un día "excelente" es 1, si el día es "normal" dicha probabilidad es de 0.9 y si es "malo" es 0.5. Si un día elegido al azar no se ha cubierto la demanda, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un día "normal"?

(d) Determinar la probabilidad de que, a lo largo de una semana, se observe una producción *mala* en uno de los días, *normal* en cuatro y *excelente* en dos.

(e) Determinar la probabilidad de que haya que esperar, exactamente, 10 días hasta observar el tercero malo.

3.41 Una fábrica ha instalado un sistema automático para detectar la presencia de impurezas en las planchas de vidrio que produce. El número de impurezas por plancha sigue una distribución de Poisson de media 2.

(a) Una plancha se rechaza si presenta más de 3 impurezas. Si se observan 10 planchas fabricadas, ¿cuál es la probabilidad de que se rechacen 2 de ellas?

(b) Si se rechazan 2 planchas de 10 fabricadas, ¿cuál es la probabilidad de que las 2 rechazadas se encuentren entre las 3 primeras que se han fabricado?

(c) ¿Cuántas planchas hay que fabricar por término medio hasta encontrar la primera que no tenga impurezas?

3.42 Un examen de tipo test consta de diez preguntas con cuatro respuestas alternativas cada una, siendo sólo una de ellas correcta. Un alumno responde al azar a todas las preguntas del examen.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya acertado menos de 3 preguntas?

(b) Si cada respuesta correcta suma 1 punto y cada fallo resta 0.5 puntos, determinar la calificación esperada de este alumno.

3.43 Un proceso consta de dos etapas. El tiempo, en minutos, que se requiere para realizar la primera etapa es una variable aleatoria $X \sim N(60, 100)$, mientras que el tiempo, en minutos, requerido para realizar la segunda etapa es una variable aleatoria $Y \sim N(40, 25)$, siendo independientes ambas variables aleatorias. Se pide:

(a) Determinar la probabilidad de que sólo una de las dos etapas requiera más de 45 minutos.

(b) Calcular la probabilidad de que se tarde más tiempo en realizar la primera etapa que la segunda.

3.44 Una variable aleatoria discreta X tomas los valores 3, 5 y 8 con probabilidad 0.1, 0.3 y 0.6, respectivamente. Determinar su función generatriz de momentos y, haciendo uso de la misma, calcular su esperanza y su varianza.

3.45 Una variable aleatoria X tiene función generatriz de momentos $M_X(t) = 0.3 + 0.3e^t + 0.4e^{2t}$. Determinar $E[X]$ y Var[X].

3.46 Determinar la función generatriz de momentos de una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e}{e-1}e^{-x} & \text{si} \quad x \in (0, \log e) \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (0, \log e) \end{cases}$$

3.47 Una variable aleatoria continua tiene función de densidad $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$. Determinar $E[X]$ y $Var[X]$.