

## Tema 2

# Teoría de la Probabilidad

### 2.1 Introducción

Se dice que un experimento es aleatorio cuando no es posible predecir el resultado del mismo aún repitiéndolo en condiciones iniciales similares. Son ejemplos de experimentos aleatorios: lanzar una moneda y observar si sale cara o cruz, observar el número de lanzamientos de una moneda que hay que realizar hasta que salga cara o la elección al azar de dos números reales del intervalo  $[0, 1]$ .

**Definición:** Se llama **suceso** asociado a un experimento aleatorio a cualquier cuestión relacionada con dicho experimento a la que no podamos responder, en el sentido de si ha ocurrido o no, hasta una vez realizado el experimento.

Son ejemplos de sucesos asociados a experimentos aleatorios los siguientes: al lanzar una moneda se obtiene cara; al lanzar una moneda sucesivas veces se obtiene una cara antes de la quinta tirada; al elegir al azar dos números del intervalo  $[0, 1]$  la diferencia entre ambos números es menor que 0.5.

**Definición:** Se llama **suceso elemental** a cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio.

**Definición:** Se llama **espacio muestral** al conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Lo denotaremos por  $\Omega$ .

Un espacio muestral  $\Omega$  se dice que es de tipo **discreto** si tiene una cantidad finita o infinita pero numerable de elementos. En caso contrario, si el número de sucesos elementales es infinito y no numerable, se dice que el espacio muestral es continuo.

Las definiciones anteriores son útiles para entender algunos de los conceptos con los que vamos a trabajar pero no para resolver problemas en la práctica. Por este motivo vamos a “redefinir”, a continuación, los conceptos anteriores haciendo uso de la Teoría de Conjuntos.

**Definición:** Dado un experimento aleatorio, cuyo espacio muestral es  $\Omega$ , se llama **suceso** asociado a dicho experimento a cualquier subconjunto de  $\Omega$ . Los subconjuntos unitarios de  $\Omega$  son los **sucesos elementales** y los denotaremos por  $\omega$ .

#### Ejemplo 1:

- En el lanzamiento de una moneda,  $\Omega = \{C, X\}$ . Los sucesos, asociados a este

experimento, distintos de  $\Omega$ , son  $S_0 = \emptyset$ ,  $S_1 = \{C\}$ ,  $S_2 = \{X\}$ .

- En el experimento que consiste en lanzar una moneda hasta obtener cara, el espacio muestral es  $\Omega = \{C, XC, XXC, XXXC, \dots\}$ . El suceso “obtener cara antes de la quinta tirada” se representa como  $S_3 = \{C, XC, XXC, XXXC\}$ .
- Para el experimento que consiste en la elección al azar de dos números del intervalo  $[0, 1]$ , el espacio muestral es  $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ . El suceso que se verifica cuando la diferencia entre los números elegidos es menor que 0.5 se escribe como  $S_4 = \{(x, y) \in \Omega : |x - y| < 0.5\}$ .

Nótese que, de los sucesos anteriores, sólo  $S_1$  y  $S_2$  son sucesos elementales.

**Definición:** Al realizar una prueba de un experimento aleatorio diremos que se ha verificado el suceso  $A$  si el resultado obtenido en el experimento pertenece a  $A$ .

- $\Omega$  representa el suceso seguro pues es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento.
- $\emptyset$  representa el suceso imposible pues el conjunto vacío no contiene ningún elemento.

## 2.2 Operaciones con sucesos

Dados dos sucesos  $A$  y  $B$  asociados a un experimento aleatorio:

- $A \cup B$  es el suceso que se verifica siempre que se verifique al menos uno de los dos sucesos.
- $A \cap B$  es el suceso que se verifica siempre que se verifiquen los dos sucesos.
- $B \setminus A$  es el suceso que se verifica siempre que se verifique  $B$  y no se verifique  $A$ .

**Propiedades** de la unión y la intersección de sucesos:

1. Conmutativa:

- (a)  $A \cup B = B \cup A$ .
- (b)  $A \cap B = B \cap A$ .

2. Asociativa:

- (a)  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ .
- (b)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ .

3. Distributiva:

- (a)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .
- (b)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

**Ejemplo 2:** Consideremos el experimento que consiste en lanzar un dado con 6 caras. En este caso  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y los sucesos:

- $A$ : Lanzar un dado y obtener un número par.
- $B$ : Lanzar un dado y obtener un múltiplo de 3.
- $A \cup B$ : Lanzar un dado y obtener un número par o múltiplo de 3.
- $A \cap B$ : Lanzar un dado y obtener un número par y múltiplo de 3.
- $B \setminus A$ : Lanzar un dado y obtener un número múltiplo de 3 que no sea par.

se representan como:  $A = \{2, 4, 6\}$ ,  $B = \{3, 6\}$ ,  $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$ ,  $A \cap B = \{6\}$  y  $B \setminus A = \{3\}$ .

**Definición:** Diremos que dos sucesos  $A$  y  $B$  son **incompatibles** o **mutuamente excluyentes** si  $A \cap B = \emptyset$  (esto es, no pueden ocurrir los dos a la vez).

**Definición:** Dado un suceso  $A$ , se denota por  $\bar{A}$  al **suceso complementario** o **suceso contrario** de  $A$ . Es el suceso que se verifica si y sólo si no se verifica  $A$ <sup>1</sup>.

**Propiedades:** Dados dos sucesos  $A$  y  $B$

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $B \setminus A = B \cap \bar{A}$

**Definición:** Un conjunto de sucesos  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ , asociados a un experimento aleatorio, cuyo espacio muestral es  $\Omega$ , se dice que forman un sistema completo de sucesos si:

1.  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$
2.  $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

**Ejemplo 3:** En el experimento consistente en lanzar un dado con 6 caras el espacio muestral es  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Los sucesos  $A_1 = \{1, 2\}$ ,  $A_2 = \{3, 4\}$ ,  $A_3 = \{5, 6\}$  constituyen un sistema completo de sucesos.

## 2.3 Axiomas de probabilidad

**Definición:** Consideremos un experimento aleatorio cuyo espacio muestral es  $\Omega$ . Sea  $\mathcal{A}$  una  $\sigma$ -álgebra de sucesos asociada a dicho experimento aleatorio. Una aplicación  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es una función de probabilidad si cumple las siguientes condiciones:

<sup>1</sup>Es necesario ser cuidadoso a la hora de definir el suceso complementario a uno dado. Consideremos, por ejemplo, el experimento que consiste en lanzar un dado ordinario 5 veces y sea  $A$  el suceso que ocurre cuando los cinco números obtenidos son pares. Entonces  $\bar{A}$  no es el suceso que ocurre cuando todos los números obtenidos son impares, como podría pensarse intuitivamente, sino el suceso que ocurre cuando no todos los números obtenidos son pares o lo que es igual, cuando alguno de los números es impar.

1.  $P(A) \geq 0 \quad \forall \quad A \in \mathcal{A}$
2.  $P(\Omega) = 1$
3. Si  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$  y  $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall \quad i \neq j$ , entonces  $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

A la terna  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  se le llama **espacio de probabilidad**.

Nota: el concepto de  $\sigma$ -álgebra excede de las pretensiones de este curso. En lo que sigue, interpretaremos  $\mathcal{A}$  como el conjunto de sucesos a los que asignamos una probabilidad.

**Consecuencias:** Dado  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  y dos sucesos  $A, B \in \mathcal{A}$ :

- Si  $A \subseteq B$  entonces  $P(A) \leq P(B)$ .
- $P(A) \leq 1$ .
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ .
- $P(\emptyset) = 0$ .
- $P(B \setminus A) = P(B) - P(B \cap A)$ .
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

Llegados a este punto, tenemos que decidir cómo asignar las probabilidades:

- Si el espacio muestral  $\Omega$  es de tipo discreto, bastará con asignar probabilidades a cada uno de los sucesos elementales  $\{\omega_i\}$  con lo cual, dado un suceso  $A$ , por el axioma 3:

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} P(\{\omega_k\})$$

- Si el espacio muestral es continuo el problema necesita un tratamiento diferente y conduce al cálculo, generalmente mediante integrales, de las longitudes o volúmenes asociados a los sucesos y al espacio muestral.

## 2.4 Regla de Laplace

Sea  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  un espacio muestral discreto formado por  $n$  sucesos elementales EQUIPROBABLES. En este caso, todas las probabilidades  $P(\{\omega_k\})$  son iguales y, dado que,

$$1 = P(\Omega) = \sum_{i=1}^n P(\{\omega_i\}) = n \cdot P(\{\omega_j\}), \text{ para cualquier } j,$$

se obtiene que  $P(\{\omega_j\}) = \frac{1}{n} \quad \forall j$ .

En consecuencia, dado un suceso  $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$  la probabilidad de  $A$  viene dada por:

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

es decir,

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}}$$

**Ejemplo 4:** Se extrae una bola de una urna que contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

Denotaremos por  $B$  al suceso que ocurre cuando se extrae una bola de la urna y la misma resulta ser de color blanco. Dado que todas las bolas que se encuentran en la urna tienen la misma probabilidad de ser elegidas, para calcular la probabilidad pedida usaremos la regla de Laplace. De este modo,

$$P(B) = \frac{\#(B)}{\#(\Omega)} = \frac{3}{8},$$

donde  $\#$  denota 'cardinal'.

Nota: la Regla de Laplace es válida únicamente si los SUCESOS ELEMENTALES SON EQUIPROBABLES. Si los sucesos elementales no son equiprobables, la naturaleza del problema determinará cómo calcular las probabilidades.

## 2.5 Probabilidad condicionada

**Definición:** Se define la probabilidad de un suceso  $B$  condicionado a otro suceso  $A$  tal que  $P(A) > 0$ , y se representa por  $P(B|A)$ , como:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

El cálculo de probabilidades condicionadas es necesario cuando se tiene información "extra" que puede influir en el experimento o bien cuando el problema es complejo y se puede abarcar mediante la descripción de un sistema completo de sucesos adecuado, concepto éste que veremos más adelante.

**Ejemplo 5:** En un taller, que atiende a coches de dos marcas  $A$  y  $B$ , se dispone de los siguientes datos sobre el número de coches que llegaron al taller el último mes y que resultaron tener o no cierta avería:

	$A$	$B$	Total
$V$	75	125	200
$\bar{V}$	115	100	215
Total	190	225	415

donde  $A$  y  $B$  indican, respectivamente, que el coche es de la marca  $A$  o  $B$ , y  $V$  indica que el coche presenta la avería. Se elige uno de los coches al azar que resulta ser de la marca  $A$ , ¿cuál es la probabilidad de que presentara la avería?

$$P(V|A) = \frac{P(V \cap A)}{P(A)} = \frac{75/415}{190/415}$$

Nótese que para el cálculo de  $P(V \cap A)$  y de  $P(A)$  se ha utilizado la regla de Laplace.

**Propiedad:**  $P(\cdot|A)$  verifica los axiomas de probabilidad, esto es:

1.  $P(B|A) \geq 0 \quad \forall B \in \mathcal{A}$
2.  $P(\Omega|A) = 1$
3. Si  $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots \in \mathcal{A}$  y  $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ , entonces  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i|A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A)$

Por tanto, verifica también las consecuencias que se deducen de los axiomas.

**Ejemplo 6:** En una bolsa tenemos tres fichas: la primera tiene las dos caras blancas, la segunda tiene las dos caras rojas y la tercera tiene una cara blanca y otra roja. Se saca una ficha y se mira la cara superior, que resulta ser de color blanco. ¿Qué es más probable, que la otra cara sea blanca o que sea roja?

Consideramos los siguientes sucesos:

- $R_S$ : la cara superior es de color rojo.
- $B_S$ : la cara superior es de color blanco.
- $R_I$ : la cara inferior es de color rojo.
- $B_I$ : la cara inferior es de color blanco.

Sabemos que la cara superior de la ficha es de color blanco. Calcularemos entonces  $P(B_I|B_S)$  y  $P(R_I|B_S)$ . Así,

$$P(B_I|B_S) = \frac{P(B_I \cap B_S)}{P(B_S)} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$

Cada una de las probabilidades anteriores se han calculado utilizando la regla de Laplace. Nótese que, dado que miramos la cara superior de la ficha, hay 6 posibles resultados del experimento que son las seis caras de las fichas. Por otra parte, hay dos sucesos elementales para los que, si la cara superior es blanca, la inferior también lo es. Esos sucesos corresponden con cada una de las dos caras de la ficha que tiene ambas caras de color blanco. En consecuencia,  $P(B_I \cap B_S) = 2/6$ . Del mismo modo hay tres caras blancas, por lo que  $P(B_S) = 3/6$ .

Finalmente, dado que  $R_I$  y  $B_I$  son sucesos complementarios,

$$P(R_I|B_S) = 1 - P(B_I|B_S) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

por lo que es más probable que la cara inferior sea de color blanco.

## 2.6 Teoremas de Probabilidad

### 2.6.1 Teorema del producto

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad y dos sucesos  $A$  y  $B$  con  $P(A) > 0$ . Entonces:

$$P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Este resultado se puede generalizar a una colección finita de sucesos como sigue:

**Teorema:** Dados  $n$  sucesos  $A_1, \dots, A_n$  tales que  $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$ , entonces:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

**Ejemplo 7:** ¿Cuál es la probabilidad de acertar 6 números en el sorteo de la lotería primitiva?

Para cada  $i = 1, \dots, 6$ , denotaremos por  $A_i$  al suceso que se produce cuando se acierta el  $i$ ésimo número que se extrae del bombo cuando se hace el sorteo. Tenemos que calcular  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6)$ . Por el teorema del producto, y utilizando la regla de Laplace, tenemos que

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \dots \cap A_6) &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdot P(A_5|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \cdot \\ &\quad \cdot P(A_6|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{1}{44} = \frac{1}{13983816} \end{aligned}$$

### 2.6.2 Independencia de sucesos

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad y  $A, B \in \mathcal{A}$  con  $P(A) \neq 0$ . Se dice que el suceso  $B$  es independiente de  $A$  si se verifica que  $P(B|A) = P(B)$ .

#### Consecuencias:

1.  $B$  es independiente de  $A$  si y sólo si  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
2. Si  $B$  es independiente de  $A$  entonces  $A$  es independiente de  $B$

La segunda consecuencia nos lleva a la siguiente definición:

**Definición:** Dos sucesos  $A$  y  $B$  son independientes si  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

La definición anterior se generaliza a un conjunto de  $n$  sucesos como sigue:

**Definición:** Dados  $n$  sucesos  $A_1, \dots, A_n$ , se dice que son independientes si para cualquiera  $k$  de dichos sucesos,  $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ , se verifica que

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$$

Se puede comprobar que si dos sucesos  $A$  y  $B$  son independientes, también lo son  $A$  y  $\overline{B}$ ,  $\overline{A}$  y  $B$ ,  $\overline{A}$  y  $\overline{B}$ . Este resultado se extiende a un conjunto cualquiera de  $n$  sucesos independientes y sus complementarios.

### 2.6.3 Teorema de la probabilidad total

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad y  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  un sistema completo de sucesos tal que  $P(A_i) > 0 \quad \forall i$ . Dado un suceso  $B \in \mathcal{A}$ , entonces:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B|A_i).$$

### 2.6.4 Teorema de Bayes

En las mismas condiciones del teorema anterior, si  $P(B) > 0$  se verifica que:

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}.$$

**Ejemplo 8:** Se dispone de una urna con 4 bolas blancas y 3 bolas negras, y de una segunda urna con 1 bola blanca y 5 bolas negras. Se lanza una moneda con probabilidad  $2/3$  de obtener cara y  $1/3$  de obtener cruz. Si el resultado es cara, se saca una bola de la primera urna, y si es cruz, se saca de la segunda urna. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra? Si la bola extraída es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que al lanzar la moneda haya salido cara?

Consideramos los siguientes sucesos:

- $C$ : obtener una cara al lanzar la moneda.
- $X$ : obtener una cruz al lanzar la moneda.
- $B$ : extraer una bola blanca de la urna.
- $N$ : extraer una bola negra de la urna.

Calculamos, en primer lugar, la probabilidad de extraer una bola de color negro. Para ello usaremos el teorema de la probabilidad total, así como la regla de Laplace:

$$P(N) = P(N|C) \cdot P(C) + P(N|X) \cdot P(X) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{71}{126}.$$

Calcularemos ahora la probabilidad de al lanzar la moneda se haya obtenido cara, sabiendo que la bola extraída es de color blanco. Utilizaremos también el teorema de Bayes:

$$P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|C) \cdot P(C)}{P(B|C) \cdot P(C) + P(B|X) \cdot P(X)} = \frac{\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{8/21}{55/126} = \frac{48}{55}.$$

Nótese que, aunque hemos utilizado el teorema de la probabilidad total para el cálculo de  $P(B)$ , al ser  $B$  y  $N$  sucesos complementarios, podríamos haber calculado esa probabilidad como  $P(B) = 1 - P(N) = 1 - \frac{71}{126} = \frac{55}{126}$ .



# Combinatoria

Dada una colección de  $n$  objetos, se llama **permutación** a cualquier ordenación de esos objetos. El número de posibles permutaciones se denota por  $P_n$  y es:

$$P_n = n!$$

Si con los  $n$  objetos se pueden formar  $k$  grupos de objetos iguales entre sí y en los distintos grupos hay  $m_1, m_2, \dots, m_k$  elementos, cada ordenación recibe el nombre de **permutación con repetición**. El número de permutaciones con repetición que se pueden formar viene dado por:

$$P_n^{m_1, \dots, m_k} = \frac{n!}{m_1! \cdots m_k!}$$

siendo  $m_1 + \dots + m_k = n$ .

Ejemplo: el número de formas que hay de ordenar 3 bolas rojas y 5 blancas viene dado por:

$$P_8^{3,5} = \frac{8!}{3! \cdot 5!}$$

Supongamos ahora que de los  $n$  objetos se desea seleccionar  $m$ . Al realizar la selección puede ocurrir que “importe” el orden en que se eligen los objetos (ej: resultados de la quiniela de fútbol) o puede ocurrir que el orden sea indiferente (ej: combinación ganadora en un sorteo de la Lotería Primitiva). En el primer caso cada elección recibe el nombre de **Variación**, mientras que en el segundo recibe el nombre de **Combinación**. Si cada objeto puede ser elegido más de una vez, diremos que las elecciones se han realizado **con repetición**. Si esto no ocurre (cada objeto puede seleccionarse sólo una vez), diremos que se han realizado **sin repetición**.

El número de combinaciones y variaciones, con o sin repetición, de  $n$  objetos tomados de  $m$  en  $m$ , viene dado en la siguiente tabla:

	Combinaciones	Variaciones
Con repetición	$CR_{n,m} = \binom{n+m-1}{m}$	$VR_{n,m} = n^m$
Sin repetición (Ordinarias)	$C_{n,m} = \binom{n}{m}$ ( $m \leq n$ )	$V_{n,m} = n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1)$ ( $m \leq n$ )