LÍMITES DE SUCESIONES

Indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Para salvar la indeterminación basta con dividir numerador y denominador por el monomio de mayor grado de numerador y/o denominador.

1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4-3n^2+1}{3n^4+5n^3+3n^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^4}{n^4}-\frac{3n^2}{n^4}+\frac{1}{n^4}}{\frac{3n^4}{n^4}+\frac{5n^3}{n^4}+\frac{3n^2}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}}{3+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}=\frac{2-0+0}{3+0+0}=\frac{2}{3}$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4-3n^2+1}{3n^5+5n^3+n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^4}{n^4}-\frac{3n^2}{n^4}+\frac{1}{n^4}}{\frac{3n^5}{n^4}+\frac{5n^3}{n^4}+\frac{n}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}}{3n+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}}=\frac{1}{\infty}=0$$

De otra forma:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4-3n^2+1}{3n^5+5n^3+n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^4}{n^5}-\frac{3n^2}{n^5}+\frac{1}{n^5}}{\frac{3n^5}{n^5}+\frac{5n^3}{n^5}+\frac{n}{n^5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{0-\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^5}}{3+\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^4}}=\frac{0}{3}=0$$

Nota: Evidentemente, el resultado es el mismo en ambos casos.

3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4-3n^2+1}{7n^3+5n+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^4}{n^4}-\frac{3n^2}{n^4}+\frac{1}{n^4}}{\frac{7n^3}{n^4}+\frac{5n}{n^4}+\frac{1}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}}{\frac{7}{n}+\frac{5}{n^3}+\frac{1}{n^4}}=\frac{2}{0}=\infty$$

De otra forma:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4-3n^2+1}{7n^3+5n+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^4}{n^3}-\frac{3n^2}{n^3}+\frac{1}{n^3}}{\frac{7n^3}{n^3}+\frac{5n}{n^3}+\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}{7+\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=\frac{\infty}{7}=\infty$$

Nota: Nuevamente, el resultado es el mismo en ambos casos.

En resumen:

a) Si el grado del numerador es igual que el grado del denominador, el resultado es el cociente de los coeficientes de los monomios de mayor grado**.**
b) Si el grado del numerador es menor que el del denominador, el resultado es 0 **.**
c) Si el grado del numerador es mayor que el del denominador, el resultado es ∞ **.**

Nota: En lo sucesivo, el resultado de estos límites los escribiremos directamente.

Indeterminación del tipo $\infty - \infty$

Multiplicando y dividiendo por el conjugado la expresión se convierte en una indeterminación del tipo anterior.

1) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2-\left(\sqrt{n^2-n}\right)^2}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-\left(n^2-n\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{n}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+1}=1$$

Nota: Obsérvese que en el denominador dividimos por n^2 por hacerlo dentro de la raíz.

2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3+n^2}-\sqrt{n^3-n^2}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3+n^2}-\sqrt{n^3-n^2}\right)\frac{\sqrt{n^3+n^2}+\sqrt{n^3-n^2}}{\sqrt{n^3+n^2}+\sqrt{n^3-n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^3+n^2}\right)^2-\left(\sqrt{n^3-n^2}\right)^2}{\sqrt{n^3+n^2}+\sqrt{n^3-n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2-\left(n^3-n^2\right)}{\sqrt{n^3+n^2}+\sqrt{n^3-n^2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2\frac{n^2}{n^2}}{\sqrt{\frac{n^3}{n^4}+\frac{n^2}{n^4}}+\sqrt{\frac{n^3}{n^4}-\frac{n^2}{n^4}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{0+0}=\infty$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3+3n}-\sqrt{n^3-2n}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3+3n}-\sqrt{n^3-2n}\right)\frac{\sqrt{n^3+3n}+\sqrt{n^3-2n}}{\sqrt{n^3+3n}+\sqrt{n^3-2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^3+3n}\right)^2-\left(\sqrt{n^3-2n}\right)^2}{\sqrt{n^3+3n}+\sqrt{n^3-2n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n-\left(n^3-2n\right)}{\sqrt{n^3+3n}+\sqrt{n^3-2n}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{5\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^3}{n^2}+3\frac{n}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^3}{n^2}-2\frac{n^2}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\infty+\infty}=0$$

LÍMITES DE FUNCIONES

Indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$

Cuando la función es un cociente de polinomios (***función racional***), la resolución del límite requiere la factorización de numerador y denominador, bien sacando factor común o bien descomponiendo los polinomios en factores primos mediante la ***Regla de Ruffini***.

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x^2-5x}{x^2+4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(x^2+2x-5\right)}{x(x+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x-5}{x+4}=-\frac{5}{4}$$

2) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}$$

En casos en que en el numerador y/o el denominador aparecen expresiones binómicas irracionales se tratan de eliminar, si es posible, multiplicando y dividiendo por el conjugado de la expresión binómica irracional.

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}\cdot\frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(x+1)}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=-\frac{1}{2}$$

4) $$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\cdot\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{(x-1)\left(x+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)\left(x+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

Indeterminación del tipo 1^{∞}

Los límites de este tipo se abordarán mediante la búsqueda del **número *e***

<u>Definición:</u> $e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=2.718281828459...$

<u>Consecuencias:</u>

a) $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{-1\frac{x}{-1}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{\frac{x}{-1}}\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

b) $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e,\ \text{ya que si } x\Longrightarrow 0\Rightarrow t\to\infty$$

Ejemplos:

1) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{2x}{2}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2} = e^{2}$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{2x}{5}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\frac{3}{x}\frac{2x}{5}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{\frac{3}{x}\frac{2x}{5}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{\frac{6x}{5x}} = \underbrace{\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]}_{e}^{\frac{6}{2}} = e^{6/5} = \sqrt[5]{e^{6}}$$

3) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{3x^2+1}{2x+3}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-1}-1\right)^{\frac{3x^2+1}{2x+3}} = \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{(x+1)-(x-1)}{x-1}\right]^{\frac{3x^2+1}{2x+3}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2}{x-1}\cdot\frac{3x^2+1}{2x+3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2}{x-1}\cdot\frac{3x^2+1}{2x+3}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+2}{2x^2+x-3}} = e^{6/2} = e^{3}$$

4) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{3x^2+5}\right)^{\frac{3x^5+1}{2x^2+3}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x^2+1}{3x^2+5}-1\right)^{\frac{3x^5+1}{2x^2+3}} = \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{(3x^2+1)-(3x^2+5)}{3x^2+5}\right]^{\frac{3x^5+1}{2x^2+3}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{3x^2+5}\right)^{\frac{3x^2+5}{-4}\cdot\frac{-4}{3x^2+5}\cdot\frac{3x^5+1}{2x^2+3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-4}{3x^2+5}\right)^{\frac{3x^2+5}{-4}}\right]^{\frac{-4}{3x^2+5}\cdot\frac{3x^5+1}{2x^2+3}} = e^{-\infty} = 0$$

Nota: Téngase en cuenta que $e^{0}=1$, $e^{\infty}=\infty$ y $e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$

CÁLCULO DE LÍMITES MEDIANTE INFINITÉSIMOS EQUIVALENTES

En ocasiones, los límites pueden resolverse utilizando infinitésimos equivalentes:

TABLA DEINFINITÉSIMOS EQUIVALENTES PARA *x→0*

$x \approx \sin x \approx \tan x$	$kx \approx \sin kx \approx \tan kx$
$x \approx \ln(1+x)$	$kx \approx \ln(1+kx)$
$x \approx \arcsin x \approx \arctan x$	$kx \approx \arcsin kx \approx \arctan kx$
$x \approx e^x - 1$	$x \ln a \approx a^x - 1, a > 0$
$\frac{x^2}{2} \approx 1 - \cos x$	$\frac{(kx)^2}{2} \approx 1 - \cos kx$
$\frac{(1+x)^k - 1}{x} \approx k, k > 1$	$\frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} \approx \frac{1}{n}, n \in \mathrm{N}$

Ejemplos:

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\tan 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x\ln a - (1 + x\ln b)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\ln a - \ln b)}{x} = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$