# Estadística. Práctica 7

# Intervalos de Confianza y Contrastes de Hipótesis en poblaciones normales (I)

Los Intervalos de Confianza (I.C.) y los Contrastes de Hipótesis (C.H.) son dos herramientas estadísticas relacionadas, hasta el punto de que R las muestra conjuntamente.

Para resolver un C.H. a nivel de significación $\alpha$, aplicaremos la siguiente regla:

Se rechaza la hipótesis nula $H_0$ si el p-valor obtenido es menor o igual que $\alpha$

## 7.1 Estudio de la normalidad de los datos

El cálculo de intervalos de confianza y la realización de los contrastes de hipótesis que vamos a ver están diseñados, y por lo tanto son válidos, cuando los datos sobre los que se realiza el estudio proceden de una distribución normal. Por tanto, habría que comprobar la normalidad de los datos mediante algún test de normalidad, como el **test de Shapiro-Wilk**. Este test suele aplicarse cuando el tamaño muestral es inferior a 50. De este modo, si tenemos una muestra aleatoria simple $X_1, \ldots, X_n$ procedente de una variable aleatoria $X$, el test de Shapiro-Wilk permite resolver el contraste de hipótesis

$$\begin{cases} H_0: & X \sim N(\mu, \sigma^2) \\ H_1: & X \nsim N(\mu, \sigma^2) \end{cases}$$

El test de Shapiro-Wilk podemos encontrarlo en el menú de R-Commander: `Estadísticos`→`Resúmenes`→`Test de Normalidad`.

## 7.2 C.H. e I.C. para la media y para la varianza de una población normal

Se obtienen a través del menú `Estadísticos` → `Medias` → `Test t para una muestra` y a través de `Estadísticos` → `Varianzas` → `Test de varianza para una muestra`.

**Ejemplo 1:** Un proceso químico debe producir cada día una cantidad media de 800 toneladas de un producto. El gerente sospecha que se está produciendo menos de esa cantidad y por ello ha observado las producciones durante los últimos 5 días, que son: 802, 795, 752, 810, 783. ¿Hay evidencia para afirmar, al 5% de significación, que la sospecha del gerente es correcta? Construir intervalos de confianza (bilaterales) al 95% para la media poblacional y para la varianza poblacional.

Tras introducir los datos, en primer lugar comprobamos si proceden de una distribución normal aplicando el test de Shapiro-Wilk. Obtenemos un p-value=0.4555 y por tanto, tomando $\alpha = 0.05$, llegamos a que *no se rechaza* $H_0$, es decir, no hay evidencia significativa para rechazar que los datos proceden de una distribución Normal.

Para resolver el ejercicio tenemos que resolver el siguiente contraste unilateral, tomando $\alpha = 0.05$:

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 800 \\ H_1: & \mu < 800 \end{cases}$$

Para ello, seleccionamos `Estadísticos` $\rightarrow$ `Medias` $\rightarrow$ `Test t para una muestra`. Elegimos la variable, marcamos como hipótesis alternativa la opción `media poblacional <mu0` y escribimos `hipótesis nula:mu=` 800. Obtenemos p-value=0.1578, que al ser mayor que 0.05 nos lleva a que *no se rechaza* $H_0$ y, por tanto, no podemos afirmar la sospecha del gerente.

Nótese que en este caso, el intervalo de confianza (al 95%) obtenido para la media es un intervalo unilateral, concretamente obtenemos el intervalo (-Inf., 809.9791). Como queremos un intervalo bilateral, tenemos que repetir el procedimiento marcando como hipótesis alternativa la opción `media poblacional!=mu0`. El intervalo obtenido es (760.2961,816.5039). Nótese también que es posible cambiar el nivel de confianza del intervalo, si es necesario.

Para obtener un intervalo de confianza bilateral al 95% para la varianza poblacional procedemos de forma similar a través `Estadísticos` $\rightarrow$ `Varianzas` $\rightarrow$ `Test de varianza para una muestra`. Obtenemos el intervalo (183.8955,4230.2261).

## 7.3 C.H. e I.C. para diferencia de medias en el caso de muestras relacionadas o pareadas

**Ejemplo 2:** Se llevó a cabo un estudio para determinar el grado en el cual el alcohol entorpece la habilidad de pensamiento para llevar a cabo determinada tarea. Se seleccionaron al azar diez personas de distintas características y se les pidió que participaran en el experimento. Inicialmente, cada persona llevó a cabo la tarea sin nada de alcohol en su organismo y se midió el tiempo (en minutos) en realizarla. Posteriormente, la tarea volvió a llevarse a cabo, después de que cada persona había consumido una cantidad suficiente de alcohol para tener un contenido en su organismo de 0.1%. Los datos recogidos fueron los siguientes:

| Sujeto | Tiempo antes | Tiempo después |
|---|---|---|
| 1 | 28 | 29 |
| 2 | 22 | 35 |
| 3 | 55 | 57 |
| 4 | 45 | 51 |
| 5 | 32 | 36 |
| 6 | 35 | 58 |
| 7 | 40 | 51 |
| 8 | 25 | 34 |
| 9 | 37 | 48 |
| 10 | 20 | 30 |

Supuesto que la variable bajo estudio sigue una distribución normal, ¿puede concluirse, al 5% de significación, que el tiempo promedio “antes” es menor que el tiempo promedio “después” de la ingestión de alcohol?

En este caso trabajamos con muestras relacionadas, ya que los datos del tiempo antes y después estan relacionados al medirse sobre los mismos individuos.

La variable bajo estudio es $D$=*Tiempo.antes*− *Tiempo.después.* para la cual vamos a suponer que sigue una distribución Normal. El contraste que debemos resolver, al 5% de significación, es:

$$\begin{cases} H_0: & \mu_D = 0 \\ H_1: & \mu_D < 0 \end{cases}$$

El procedimiento que debemos seguir es `Estadísticos` → `Medias` → `Test t para datos relacionados`. En la ventana emergente seleccionaremos como `Primera variable` *Tiempo.antes*, como `Segunda variable` *Tiempo.después* y como hipótesis alternativa `Diferencia <0`. Se obtiene p-value=0.0007992, que al ser menor que 0.05 nos indica que *sí tenemos evidencia para rechazar la hipotesis nula* y afirmar que el promedio de la diferencia de tiempos es negativa, esto es, que el tiempo promedio tras ingerir alcohol es superior al tiempo promedio antes de ingerir alcohol.

## 7.4 Ejercicios propuestos

1. Una máquina de envasado automático llena en cada saco una cierta cantidad de determinado producto. Se seleccionan 20 sacos, se pesa su contenido y se obtienen los siguientes resultados (en kilos): 51.4, 51.2, 50.3, 49.9, 50.6, 49.9, 50.0, 49.8, 49.9, 50.9, 50.3, 51.4, 50.0, 51.5, 49.6, 48.5, 50.5, 50.2, 49.8, 50.5. A partir de esta información y suponiendo que la variable bajo estudio sigue una distribución normal, ¿se puede afirmar que el peso medio de los sacos que llena la máquina supera los 50 kg? (Tomar $\alpha$= 0.05). Construir intervalos de confianza (bilaterales) al 90% para la media poblacional y para la varianza poblacional.

2. Los siguientes datos fueron recabados para verificar si existe diferencia sistemática en los pesos obtenidos con dos balanzas diferentes:

| Peso en gramos | Balanza I | Balanza II |
|---|---|---|
| Muestra de roca 1 | 11.23 | 11.27 |
| Muestra de roca 2 | 14.36 | 14.41 |
| Muestra de roca 3 | 8.33 | 8.35 |
| Muestra de roca 4 | 10.50 | 10.52 |
| Muestra de roca 5 | 23.42 | 23.41 |
| Muestra de roca 6 | 9.15 | 9.17 |
| Muestra de roca 7 | 13.47 | 13.52 |
| Muestra de roca 8 | 6.47 | 6.46 |
| Muestra de roca 9 | 12.40 | 12.45 |
| Muestra de roca 10 | 19.38 | 19.35 |

   Suponiendo normalidad probar, con nivel de significación $\alpha$ =0.05, si la diferencia de medias de los pesos obtenidos es significativa.