Matemáticas II - Grado en Ing. Informática - Curso 2021/22

- Sesión 2 de Prácticas -

Matrices y S.E.L.

Generación de matrices elementales.
Para generar matrices elementales procedemos como sigue:

$\gg$ `E=eye(n)   % genera la matriz identidad de orden` n.
$\gg$ `E([i j],:)= E([j i],:)   % cambia las filas` i y j `en la matriz E. Es decir crea la matriz elemental` E_{ij}`.A esto se le conoce como función` $cambiaf$
$\gg$ `E(i,:)= c*E(i,:)   % multiplica la fila` i `de la matriz E por la constante c` $\neq 0$. `Es decir, crea la matriz` $E_i(c)$`.A esto se le conoce como función` kf
$\gg$ `E(i,:)= E(i,:)+ c*E(j,:)   % suma a la fila` i `de la matriz E, la fila` j `multiplicada por la constante c` $\neq 0$. `Es decir, crea la matriz` $E_{ij}(c)$`.A esto se le conoce como función` $sumaf$

Teniendo en cuenta como generar matrices elementales desarrolla el ejercicio 1a, 1b y 1c.

Ejercicio 1a
Cambiar la fila 1 y 3 de la siguiente matriz (cambiaf)para tener el pivote de la primera fila igual a 1.
$\gg$ C=[2 1 0 1; 0 1 -1 2; 1 -1 -1 2]
C=

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{matrix}$$

Ejercicio 1b
Multiplica la fila 3 por k=1/5, para tener en la fila 3 un pivote igual a 1

$\gg$ B=[1 0 -2 4; 0 1 -1 2; 0 0 5 -9]
B=

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \end{matrix}$$

Ejercicio 1c
Suma la fila 1 y 3 de la siguiente matriz (sumaf), es decir, f1+2f3 para poder eliminar el -2

$\gg$ D=[1 0 -2 4; 0 1 0 1/5; 0 0 1 $-9/5$]
D=

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -9/5 \end{matrix}$$

Algoritmo de Gauus-Jordan y funciones anteriores para hallar FER

Ejercicio 2

Como ejemplo de aplicación resolveremos, aplicando el método de Gauss-Jordan, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2z+10t+m & = & -1 \\ 2x+4y+z+t-2m & = & -12 \\ x+2y-z-7t & = & 7 \\ 2x+4y-4t+m & = & 13 \end{array}\right\}$$

PASO 1: Introducimos la matriz ampliada del sistema.

$\gg$ A=[0 0 2 10 1 −1; 2 4 1 1 −2 −12;1 2 −1 −7 0 7;2 4 0 −4 1 13]

A=

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 2 & 10 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & -2 & -12 \\ 1 & 2 & -1 & -7 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & -4 & 1 & 13 \end{array}$$

PASO 2: Debemos cambiar la fila 1 por la 3 para tener el pivote de la primera fila igual a 1. Para ello generamos la matriz elemental E_{13} y multiplicamos, a la izquierda, la matriz A por dicha matriz elemental.

$\gg$ E1=eye(4); % Generamos la matriz identidad de orden 4, que llamaremos $E1$.

$\gg$ E1([1 3],:)= E1([3 1],:) % Usamos las transformaciones descritas para generar la matriz elemental necesaria.

$\gg$ A1=E1*A % Multiplicamos E1 y A, la matriz resultante la llamaremos A1.

PASO 3:

$\gg$ E2=eye(4); E2(2,:)=(1/2)*E2(2,:).

Podemos declarar la matriz identidad y la transformación elemental en una misma línea usando ";"

$\gg$A2=E2*A1

PASO 4 a PASO 13:

Debemos realizar 10 transformaciones elementales para llegar a la siguiente FER).

Nuestra A12 debe ser igual a:

A12=

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto podemos concluir que el sistema inicial es un S.C.indet., es decir, tiene solución infinita. La solución del sistema es la obtenida en la última columna de la matriz escalonada reducida de Gauss-Jordan, esto es, $x+2y-2t=3$, $z+5t=-4=$, $m=7$.

Ejercicios 3:

Comprobando la solución del sistema anterior usando el comando $\gg$ rref(A)

Comprobando: A12=rref(A)

Resolviendo: rref(A)

Calculando la inversa de una matriz usando Gauss-Jordan y usando el comando INV(A)

Ejercicio 4

La FER nos puede servir para decidir si una matriz tiene o no inversa, para calcularla, caso que la tenga y para descomponer dicha matriz en producto de matrices elementales.

A=

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Recordemos que la inversa según matrices elementales se desarrolla de la forma
A I then I $A^{-}1$

PASO1:
A=[1 −1 0 1;2 −1 1 1; 2 1 4 −1;0 -1 1 0];AI=[A eye(4)]

```
AI =

     1    -1     0     1     1     0     0     0
     2    -1     1     1     0     1     0     0
     2     1     4    -1     0     0     1     0
     0    -1     1     0     0     0     0     1
```

PASO2:
E1=eye(4); E1(1,:)=(2)*E1(1,:); AI1=E1*AI

PASO3:
E2=eye(4); E2(2,:)=E2(2,:)-E2(1,:); AI2=E2*AI1

PASO 4 a PASO 14:
Debemos realizar 10 transformaciones elementales de tal forma, que nos quede la siguiente matriz

```
AI13 =

     1     0     0     0    -5     4    -1     0
     0     1     0     0     4    -3     1    -1
     0     0     1     0     4    -3     1     0
     0     0     0     1    10    -7     2    -1
```

PASO 15: Como solo queremos rescatar la inversa, es decir, las columnas 5 a la 8 de AI13, entonces hacemos lo siguiente:
Ainv=AI13(:,5:8)

PASO 16:
Verificamos que la inversa es correcta multiplicando por la matriz original A.El producto debe ser una matriz identidad
A*Ainv

PASO 17:
Podemos comprobar que hemos calculado la inversa usando matrices elementales usando el comando ≫ inv(A), que halla la inversa de manera automáticA

Calculando el rango de una matriz-teorema de Rouché-Frobenius

El comando $\gg$ rank(A

Ejercicio 5

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 5 \\ 5x+y+6z+t &= 7 \\ 3x-3y+t &= -3 \\ 4x-y+3z+t &= 2 \\ x-3y-2z &= 7 \end{aligned}$$

```
PASO 1: Escribir Matriz ampliada
A=[1 2 3 0 5; 5 1 6 1 7;3 -3 0 1 -3;4 -1 3 1 2;1 -3 -2 0 7]
PASO 2: Escribir Matriz de coeficientes
A2=[1 2 3 0; 5 1 6 1;3 -3 0 1;4 -1 3 1;1 -3 -2 0]
PASO 2: Hallar el rango de cada matriz
R1=rank(A)
R2=rank(A2)
NOTA: Los rangos son iguales
R1=R2=3, pero el valor de los rangos es menor que el nÃºmero de incognitas.
Entonces S es compatible indeterminado
COMPROBAMOS CON LA SOLUCIÓN
```

con el comando $rref(A)$