EJERCICIOS SOBRE CÁLCULO DE DERIVADAS

I. PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Calcular la derivada de cada una de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$, b) $f(x) = (2x+1)^3$, c) $\sqrt{x^2+9}$,

d) $f(x) = \operatorname{sen}^3 2x$, e) $f(x) = arctg 3x$, f) $f(x) = \log\left(\frac{x}{x+1}\right)$,

g) $f(x) = xe^{2x}$, h) $f(x) = (\log 4x)^2$, i) $f(x) = x2^{x^2}$,

j) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$, k) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$, l) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}$.

Soluciones:

a) Derivamos sumando a sumando: $f'(x) = 3 \cdot 2x + 2 \cdot 1 - 0 = 6x + 2$.

b) Tiene la forma $f(u) = u^3$, siendo $u(x) = 2x + 1$. Por tanto, $f'(x) = 3u(x)^2 u'(x) = 3(2x+1)^2 \cdot 2 = 6(2x+1)^2$.

c) $f(x) = \sqrt{u(x)}$, siendo $u(x) = x^2 + 9$. Por tanto, $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

d) $f(x) = \operatorname{sen}^3 u(x)$, siendo $u(x) = 2x$. Entonces, $f'(x) = 3\operatorname{sen}^2 u(x) \cdot \cos u(x) \cdot u'(x) = 3\operatorname{sen}^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 6\operatorname{sen}^2 2x \cdot \cos 2x$.

e) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} u(x)$, donde $u(x) = 3x$. Entonces $f'(x) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} = \frac{3}{1+9x^2}$.

f) $f(x) = \log u(x)$, donde $u(x) = \frac{x}{x+1}$. Entonces $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$. Hacemos aparte el cálculo de $u'(x)$:

$$u'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Por tanto, $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{(x+1)^2} : \frac{x}{x*1} = \frac{1}{x(x+1)}$.

g) Se trata de un producto de dos funciones, por tanto, $f'(x) = 1 \cdot e^{2x} + xe^{2x} \cdot 2 = e^{2x}(2x+1)$.

h) $f(x) = u(x)^2$, siendo $u(x) = \log 4x$. Entonces $f'(x) = 2u(x) \cdot u'(x)$. Calculamos aparte la derivada de $u(x)$. $u'(x) = \frac{4}{4x} = \frac{1}{x}$. Finalmente, $f(x) = 2u(x) \cdot u'(x) = 2\Big(\log 4x\Big) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\log 4x}{x}$.

i) En primer lugar, calculamos la derivada de $g(x) = 2^{x^2}$. Pasamos la potencia de base 2 a base e: $g(x) = e^{(\log 2)x^2}$. Entonces $g'(x) = (\log 2) \cdot 2x \cdot e^{(\log 2)x^2} = 2(\log 2)x2^{x^2}$. Ahora obtenemos la derivada de f por la regla del producto: $f'(x) = 1 \cdot 2^{x^2} + x \cdot \Big(2^{x^2}\Big)' = 2^{x^2} + x \cdot 2(\log 2)x2^{x^2} = 2^{x^2}(1 + 2(\log 2)x^2)$.

j) Se trata de la derivada de un cociente, por tanto

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot (1+\cos x) - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}.$$

k) $f(x) = \sqrt[3]{u(x)} = u(x)^{1/3}$, donde $u(x) = x^2+1$. Entonces $f'(x) = (1/3)u(x)^{(1/3)-1} \cdot u'(x) = (1/3)(x^2+1)^{-2/3} \cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$.

l) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} u(x)$, siendo $u(x) = \sqrt{x}$. Por tanto,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} : \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

2. *Estudiar el crecimiento de $f(x) = x^2 \log x$ y determinar sus extremos absolutos.*

   En primer lugar, nótese que el dominio de $f(x)$ es el intervalo $D = (0, +\infty)$. Para estudiar el crecimiento, calculamos la derivada $f'(x) = 2x\log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x(\log x - \frac{1}{2})$. El signo de la derivada sólo depende del factor $(\log x - \frac{1}{2})$, que se anula para $x = \sqrt{e}$. Como la función logaritmo es creciente (si la base es mayor que 1) en todo su dominio, deducimos que $(\log x - \frac{1}{2})$ es negativo para $x < \sqrt{e}$ y positivo cuando $x > \sqrt{e}$. Concluimos, por tanto, que $f(x)$ es estrictamente decreciente en el intervalo

$(0, \sqrt{e}]$ y estrictamente creciente en $[\sqrt{e}, +\infty)$. En consecuencia, $x = \sqrt{e}$ es el mínimo absoluto de $f(x)$. Como $\lim_{x\to+\infty} x^2 \log x = +\infty$, se sigue que f no posee máximo absoluto.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular la derivada de cada una de las funciones siguientes:

   a) $x(x-1)^2$, b) $\sqrt[3]{x^2}$, c) $\operatorname{sen}^2 4x$, d) $\operatorname{tg}^2 x$, e) $x^2 e^{-1/x}$,

   f) $\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$, g) $x\, arctg\left(\frac{1}{x}\right)$, h) $\sqrt[4]{(1+x^4)^3}$, i) $\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$,

   j) $\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, k) $x\sqrt{1+x^2}$,l) $\frac{e^{2x}}{x^2}$, m) x^x, n) $2^{\frac{x+1}{x-1}}$,

   ñ) $(x^2-3x)^3$, o) $\sqrt{\frac{x}{x+1}}$, p) $\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, q) $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$,

   r) $x^2 \log x$, s) $\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$, t) $(1+\cos^2 x)\operatorname{sen} x$, u) $(\sqrt{1-x^4}) \operatorname{arc\,sen} x^2$.

   Soluciones:

   a) $(x-1)(3x-1)$, b) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, c) $4 \operatorname{sen} 8x$, d) $\frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$, e) $(2x-1)e^{-1/x}$,

   f) $\frac{4a^2x}{(x^2+a^2)^2}$, g) $\operatorname{arc\,tg}(1/x) - \frac{x}{x^2+1}$, h) $\frac{3x^3}{\sqrt[4]{1+x^4}}$, i) $\frac{2\cos x}{(1-\operatorname{sen} x)^2}$,

   j) $\frac{-2}{x^2-1}$, k) $\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$, l) $\frac{2e^{2x}(x-1)}{x^3}$, m) $(1+\log x)x^x$, n) $\frac{-2^{2x/(x-1)}\log 2}{(x-1)^2}$,

   ñ) $6x^3 - 27x^2 + 27x$, o) $\frac{1}{2\sqrt{x(x+1)^3}}$, p) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, q) $\frac{\operatorname{sen} 2x}{(1+\operatorname{sen}^2 x)^2}$,

   r) $x(1+2\log x)$, s) $\frac{-x}{2(x+2)^2\sqrt{x+1}}$, t) $\cos x(2-3\operatorname{sen}^2 x)$, u) $2x(1-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}\operatorname{arc\,sen} x^2)$.

2. Calcular la ecuación de la recta tangente a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=1$ en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ y comprobar que es perpendicular al radio que pasa por dicho punto.

   Solución: $x + \sqrt{3}y = 2$.

3. Usar la definición para calcular $f'(0)$ en cada uno de los casos siguientes:

   a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$

c) $f(x) = |x|$, d) $f(x) = \begin{cases} x^2 \log|x| & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$

Solución: a) $f'(0) = 0$, b) $f'(0)$ no existe, la derivada por la derecha es igual a 0, pero la drivada lateral por la izquierda es igual a $+\infty$, c) No es derivable en el origen, la derivada por la derecha es igual a 1 y por la izquierda -1, y d) $f'(0) = 0$.

4. Calcular el valor de a para que sea derivable en el origen la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si} \quad x > 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{si} \quad x \leq 0, \end{cases}$$

Solución: $a = 1$.

5. Demostrar que las curvas $y = \sqrt{2}/x$ e $y = \sqrt{x^2 - 1}$ se cortan perpendicularmente.

Solución: Se cortan en el punto $(\sqrt{2}, 1)$ y las pendientes de las tangentes son $-\sqrt{2}/2$ y $\sqrt{2}$, respectivamente.