

TEMA 6: " Planificación temporal de proyectos, el método PERT"

1. Introducción.
2. Notaciones Gráficas
3. Métodos de planificación temporal
4. El método PERT.
 - 4.1. Principios básicos
 - 4.2. Construcción del grafo PERT
 - 4.3. Asignación de tiempos a las actividades
 - 4.4. Cálculo de los tiempos EET y LET
 - 4.5. Conceptos de holgura y camino crítico
 - 4.6. Calendario de ejecución del proyecto
 - 4.7. El método PERT en un concepto aleatorio
 - 4.8. El Pert Coste

BIBLIOGRAFÍA

1. Introducción

1.1. Concepto de Planificación temporal: *Identificación de tareas, asignación de tiempos y recursos a dichas tareas y planificación de la secuencia de ejecución de forma que el tiempo de desarrollo del proyecto sea mínimo.*

- El objetivo del gestor del proyecto es definir todas las tareas del proyecto, identificar las que son críticas y hacerles un seguimiento para detectar de inmediato posibles retrasos.
- La planificación temporal distribuye el esfuerzo estimado a lo largo de la duración prevista del proyecto.
- La planificación evoluciona con el tiempo: durante las primeras etapas se desarrolla una *planificación temporal macroscópica* y a medida que el proyecto va progresando se refina obteniéndose una *planificación temporal detallada*.

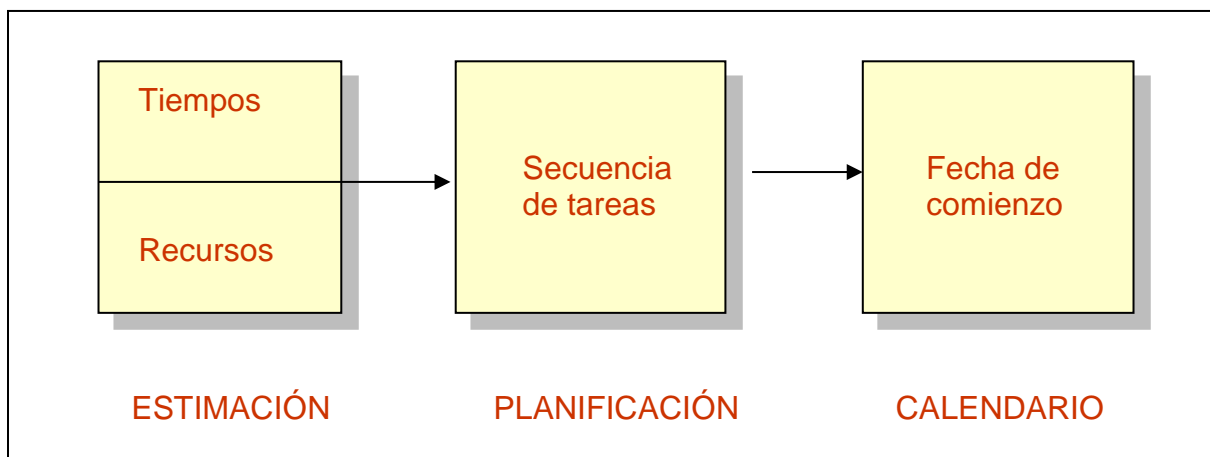


Figura 1. Actividades relacionadas con la planificación temporal

Los métodos de planificación temporal tienen aplicaciones en ámbitos como:

- Construcción de edificios, autopistas, casas, puentes, etc.
- Fabricación de aviones, barcos, ordenadores, etc.
- Diseño, fabricación y distribución de nuevos productos.
- Reparación y mantenimiento de barcos, refinerías de petróleo, etc.
- Proyectos simples como restauración de casas, mudanza a una nueva casa, etc.

1.2. Principios de la planificación temporal:

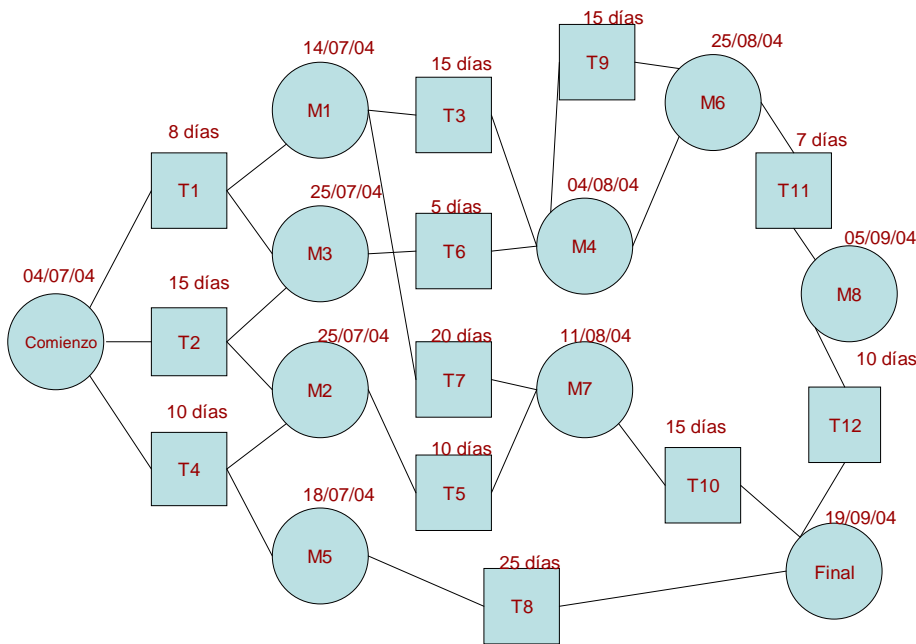
- **Compartimentación:** descomposición del proyecto en un número manejable de actividades o tareas.
- **Interdependencia:** Se deben determinar las interdependencias de cada actividad o tarea compartimentada.
- **Asignación de tiempo:** A cada tarea que se vaya a programar se le deben asignar un cierto número de unidades de trabajo, una fecha de inicio y otra de finalización.
- **Validación del esfuerzo:** A medida que se realiza la asignación de tiempo, el gestor del proyecto se tiene que asegurar de que hay en plantilla el suficiente número de personas que se requiere en cada momento.
- **Responsabilidades definidas:** Cada tarea que se programe debe asignarse a un miembro específico del proyecto.
- **Resultados definidos:** El resultado de cada tarea, normalmente un producto, deberá estar definido. Los productos se combinan generalmente en entregas.

– **Sucesos o Hitos definidos:** Todas las tareas grupos de tareas deberían asociarse con algún hito del proyecto. Se considera un hito cuando se ha revisado la calidad de uno o más productos y se han aceptado. Acontecimiento que marca el principio o fin de una actividad o conjunto de actividades.

2. Notaciones gráficas

□ **Redes de Tareas:** En ellas se representan las actividades que deben ejecutarse en paralelo y las que deben llevarse a cabo en secuencia debido a una dependencia respecto a la actividad o actividades anteriores.

- Los nodos rectangulares representan las *tareas*.
- Los nodos redondeados representan los *hitos*



Tarea	Duración	Dependencias
T1	8	
T2	15	
T3	15	T1
T4	10	
T5	10	T2, T4
T6	5	T1, T2
T7	20	T1
T8	25	T4
T9	15	T3, T6
T10	15	T5, T7
T11	7	T9
T12	10	T11

- ☐ **Diagramas de barras o de Gantt:** Representación gráfica de las actividades sobre una escala de tiempos. Las actividades se representan en forma de barra sobre dicha escala manteniendo la relación de proporcionalidad entre sus duraciones y su representación gráfica, y su posición respecto del punto origen del proyecto.
- No permiten la representación de conexiones cruzadas que muestre directamente la dependencia de tareas.
- Tampoco permiten conocer claramente la lógica utilizada en la planificación.
- ☐ Los grafos son la base de la mayoría de los métodos de planificación temporal.
- ☐ Un **grafo** se puede definir por medio de dos conjuntos:
 - Un conjunto X que representa n puntos del plano denominados **vértices**.
 - Un conjunto U que representa las relaciones que existen entre los elementos del conjunto X. Dichas relaciones se denominan **arcos**.

3. Métodos de planificación temporal

Aunque los diagramas de Gantt se pueden utilizar como técnica de planificación temporal, los métodos utilizados para la planificación de grandes proyectos se basan en el uso de redes de tareas. Algunos de estos métodos son:

- **PERT** (*Program Evaluation & Review Technique*): Creado para proyectos del programa de defensa del gobierno norteamericano entre 1958 y 1959. Se utiliza para controlar la ejecución de proyectos con gran número de actividades desconocidas que implican investigación, desarrollo y pruebas.
- **CPM** (*Critical Path Method*): Desarrollado para dos empresas americanas entre 1956 y 1958 por un equipo liderado inicialmente por James E. Kelley y Morgan R. Walker. Se utiliza en proyectos en los que hay poca incertidumbre en las estimaciones. Es prácticamente el mismo que el PERT sólo que supone conocidos los tiempos de duración de las actividades (tiene un carácter determinista).
- **MCE** “Minimum Cost Expediting”, “aceleración del proyecto a coste mínimo” o PERT Coste: Es una de las variantes del CPM, pero introduciendo la relación que existe entre coste y duración de una actividad. De esta forma se obtiene la programación de proyectos a coste mínimo.
- **Método de ROY**: Desarrollado en Europa entre 1958 y 1961 por un grupo de ingenieros encabezados por B. Roy y M. Simmonard. Similar a los métodos PERT y CPM, pero permite establecer las redes sin utilizar actividades ficticias e iniciar los cálculos sin la construcción de la red.
- **Método GERT** (*Graphical Evaluation & Review Technique*): Desarrollado por A. A. Pritsker tomando como base los trabajos de Eisner y Elmaghraby. El método GERT extiende la incertidumbre en la duración de las actividades a la propia programación, permitiendo considerar un número mayor de situaciones del proyecto que otros métodos. Las actividades precedentes de cada nudo pueden ser de naturaleza determinante o probabilística.
- Otros métodos:
 - Método de secuencia mínima irreductible para programas de mantenimiento.
 - PEP (*Program Evaluation Procedure*) desarrollado por las Fuerzas Aéreas de EEUU.
 - PERT-Recursos: aplicable cuando existen limitaciones en los recursos.

4. Método PERT

4.1. Principios básicos

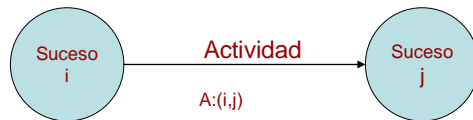
El método PERT parte de la descomposición del proyecto en actividades. Entendiendo por **actividad** la ejecución de una tarea que exige para su realización el uso de recursos. recursos tales como mano de obra, maquinaria, materiales, . . .

Así, por ejemplo, la nivelación de terrenos, la excavación de cimientos, la colocación de tuberías etc, . . ., son actividades en el proyecto de construcción de un edificio.

Se establece también el concepto de **suceso**: acontecimiento que indica el principio o fin de una actividad o conjunto de actividades. No consume tiempo ni recursos.

El método utiliza una estructura de **grafo** para la representación gráfica de las actividades o tareas de un proyecto, sus tiempos de comienzo y finalización y las dependencias entre las distintas actividades.

- Las **actividades** se representan por líneas o flechas (arcos del grafo).
- Los **sucesos** se representan por círculos (vértices del grafo).



4.1.1. Tipos de prelación entre las actividades:

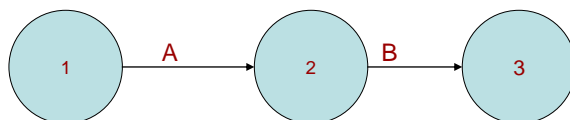
Una vez descompuesto el proyecto en actividades, la fase siguiente del PERT consiste en establecer las “prelaciones” o “prioridades” existentes entre las diferentes actividades, debidas a razones de tipo técnico, económico o jurídico. (Es decir, las diferentes actividades que constituyen un proyecto deben ejecutarse según un cierto orden).

Ejemplos:

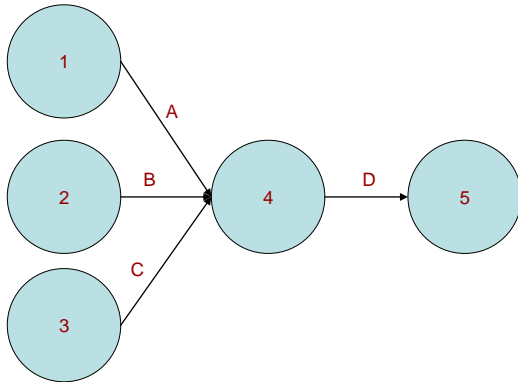
- Para poder iniciar la fase de excavación es necesario que previamente se haya finalizado la actividad de nivelación.
- Para poder iniciar la obra se ha tenido que conseguir previamente el correspondiente permiso administrativo.

Las prioridades o prelación se representan el grafo por medio de flechas que indican que una actividad precede a otra. Existen varios tipos de prelación.

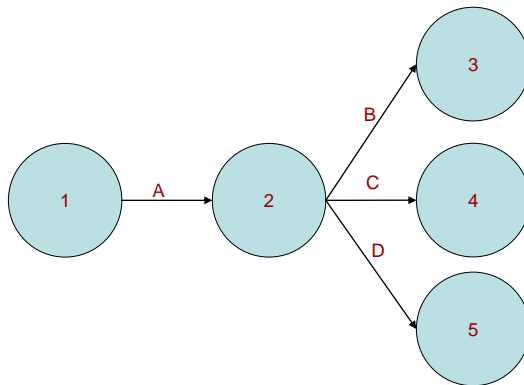
– **Prelaciones lineales:** Para poder iniciar una determinada actividad es necesario que haya finalizado una única actividad.



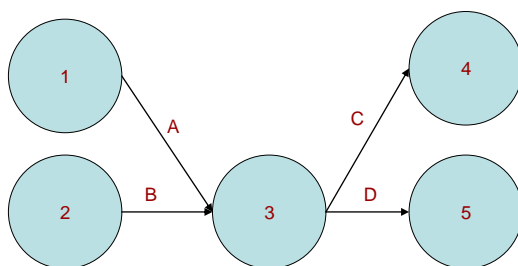
- **Prelaciones que originan una convergencia:** Para poder iniciar una determinada actividad es necesario que hayan finalizado dos o más actividades.



– **Prelaciones que originan una divergencia:** Para poder iniciarse un conjunto de actividades es necesario que haya finalizado una única actividad.



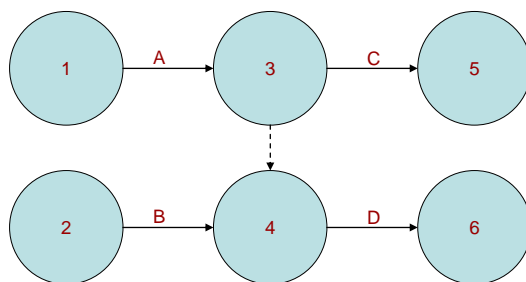
– **Prelaciones que originan convergencia-divergencia:** Para poder iniciarse un conjunto de actividades es necesario que hayan finalizado dos o más actividades.



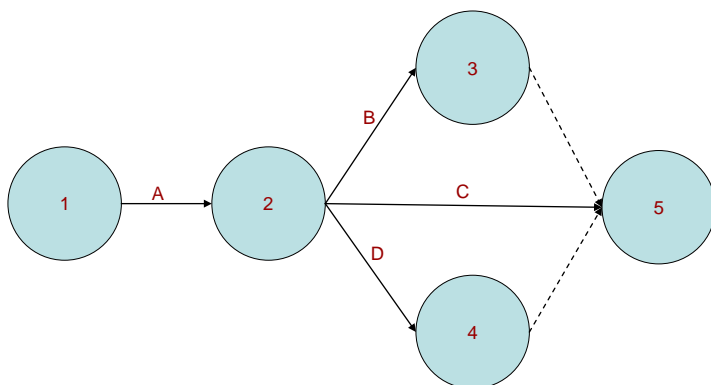
4.1.2. Actividades ficticias: son actividades que no consumen tiempo ni recursos, sólo reflejan prelaciones existentes entre distintas actividades del proyecto.

Se utilizan en dos casos:

– Cuando se presentan simultáneamente prelaciones lineales y de convergencia o divergencia:



– Con actividades paralelas:



4.2. Construcción del grafo PERT

4.2.1. Prelaciones: Se comienza recogiendo de manera sistematizada toda la información referente a las prelaaciones entre las distintas actividades. Existen dos procedimientos:

– **Matriz de encadenamientos:** matriz cuadrada cuya dimensión es igual al número de actividades en que se ha descompuesto el proyecto. Si en los puntos de cruce aparece una X indica que para poder iniciar la actividad de la fila tiene que haber terminado la correspondiente a la columna.

– **Cuadro de prelaaciones:** tabla de dos columnas, en la primera se encuentran las actividades del proyecto y en la segunda figuran las actividades precedentes de su homologa en la primera columna.

Matriz de encadenamientos							Matriz de precedentes	
	A	B	C	D	E	F	ACTIVIDADES	PRECEDENTES
A							A	
B							B	
C	X	X					C	A,B
D	X						D	A
E	X						E	A
F				X			F	D

4.2.2. Construir el grafo: El grafo comienza en un vértice que representa el suceso inicio del proyecto y termina en otro vértice que representa el suceso fin del proyecto.

– **Suceso inicio del proyecto:** representa el inicio de una o más actividades pero no representa el fin de ninguna.

– **Suceso fin del proyecto:** representa el fin de una o más actividades pero no representa el comienzo de ninguna.

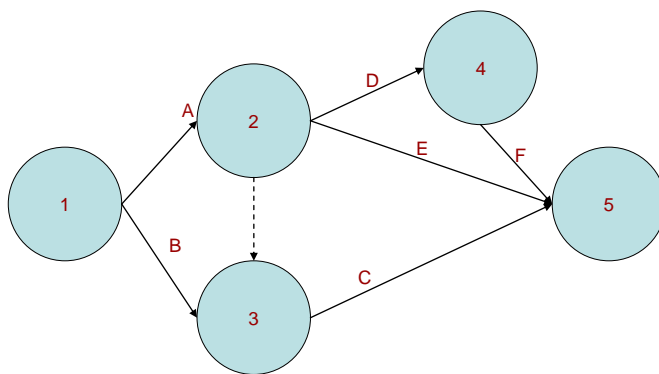
– **Actividades inicio del proyecto:** no tienen ninguna actividad precedente.

– **Actividades fin del proyecto:** no preceden a ninguna otra actividad.

La numeración de los vértices del grafo debe cumplir siempre la siguiente condición:

El número del vértice que represente el comienzo de cierta actividad debe ser menor que el número del vértice que represente el suceso fin de esa actividad.

CONSTRUCCIÓN DEL GRAFO PERT



4.3. Asignación de tiempos a las actividades

La duración de una actividad no puede fijarse, en la mayoría de los casos, con exactitud. Depende de circunstancias aleatorias (averías en las máquinas, cortes de energía eléctrica, retraso en la entrega de suministros, enfermedad del personal etc.). Este problema es abordado por el método PERT de modo muy peculiar, pues considera tres estimaciones de tiempo distintas:

- **Estimación optimista (E_o):** tiempo mínimo en que podría ejecutarse la actividad i si no surgiera ningún contratiempo.
- **Estimación más probable** o estimación **modal (E_m):** tiempo que se empleará en ejecutar la actividad i en circunstancias normales
- **Estimación pesimista (E_p):** tiempo máximo de ejecución de la actividad i si las circunstancias son muy desfavorables.

La distribución de los tiempos sigue una distribución del tipo beta (B).

– La función de densidad $f(t)$ de una variable aleatoria t , que sigue una distribución de probabilidad tipo beta en un intervalo cerrado (E_o, E_p) es:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= 0 & t &\leq E_o \\
 f(t) &= K(t - E_o)^\alpha (E_p - t)^\varphi & E_o &< t < E_p \\
 f(t) &= 0 & t &\geq E_p
 \end{aligned}$$

- La campana no es simétrica como en las distribuciones normales pudiendo presentar asimetría:

- A la derecha: $(E_o + E_p / 2) > E_m$
- A la izquierda: $(E_o + E_p / 2) < E_m$

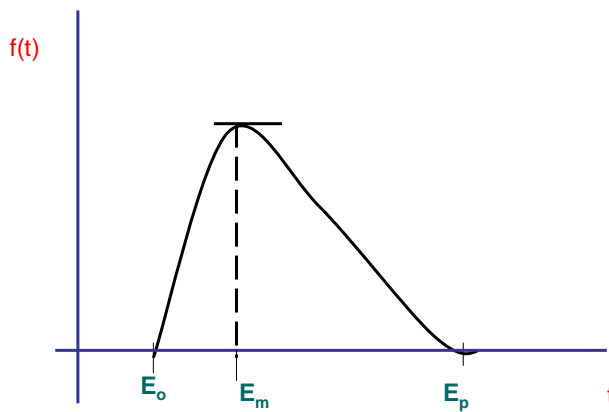
Para distribuciones del tipo beta las expresiones de Esperanza matemática (que expresan la duración de la actividad i y la varianza de la actividad i son las siguientes:

El tiempo PERT (D) o duración será la media o esperanza matemática:

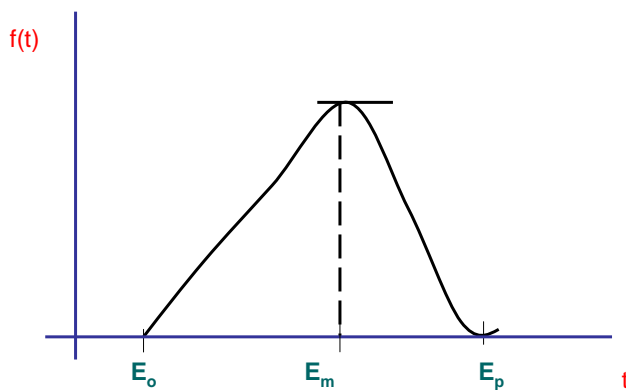
$$t_{ij} = \frac{E_O + 4E_m + E_P}{6}$$

Varianza de una actividad: Las actividades con mayor varianza tienen un mayor riesgo en la estimación de su duración.

$$\sigma_{ij}^2 = \left(\frac{E_O - E_P}{6} \right)^2$$



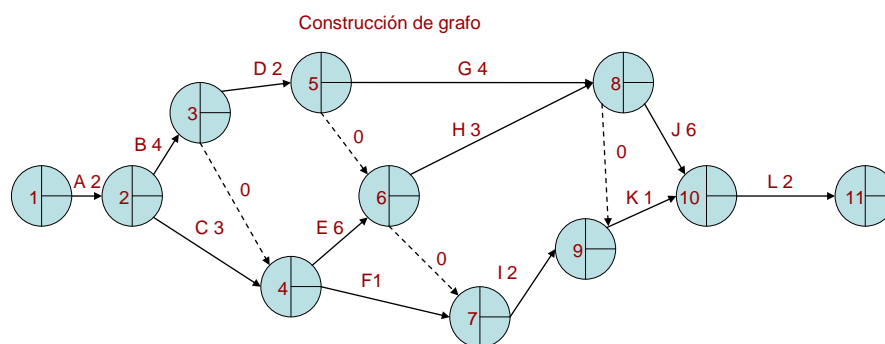
Distribución beta con asimetría a la izquierda



Distribución beta con asimetría a la derecha

Ejemplo: Elaborar el grafo PERT y calcular las duraciones, varianza y desviación típica del siguiente proyecto:

ACTIVIDAD	PRECED.	Optimista (Eo)	Probable (Em)	Pesimista (Ep)	Duración	Varianza
A		1	2	3	2	0,111
B	A	8	3	4	4	0,444
C	A	1	3	5	3	0,444
D	B	1	2	3	2	0,111
E	B,C	10	5	6	6	0,444
F	B,C	0	1	2	1	0,111
G	D	5	4	3	4	0,111
H	E,D	7	2	3	3	0,444
I	D,E,F	1	2	3	2	0,111
J	G,H	5	6	7	6	0,111
K	G,H,I	0,5	1	1,5	1	0,028
L	J,K	1	2	3	2	0,111



4.4. Cálculo de los tiempos EET y LET

Una vez construido el grafo del proyecto y asignados tiempos de ejecución a las actividades, el siguiente paso consistirá en calcular dos parámetros para cada suceso:

Sea t_{ij} el tiempo PERT de una actividad (i,j):

– **EET (Earliest Even Time)**: Se define el tiempo más pronto posible (“early”) de un suceso j. Representa el tiempo mínimo hemos de emplear para poder empezar cualquier actividad que salga del suceso j. El EET del suceso inicial es cero, para el resto de los sucesos el EET se calcula siguiendo las siguientes reglas:

- Seleccionar todas las actividades que llegan al suceso.
- Para cada actividad que entra, se suma la duración de la actividad y el tiempo early, EET de su suceso inicial.
- Seleccionar el EET más alto que se haya obtenido.

$$t_j = \max [t_i + t_{ij}] \forall i$$

– **LET (Latest Even Time)**: Se define como el tiempo más tarde permisible (“last”) de un suceso i. Representa lo más tarde que puede llegar a ese suceso, sin que afecte a la duración del proyecto.

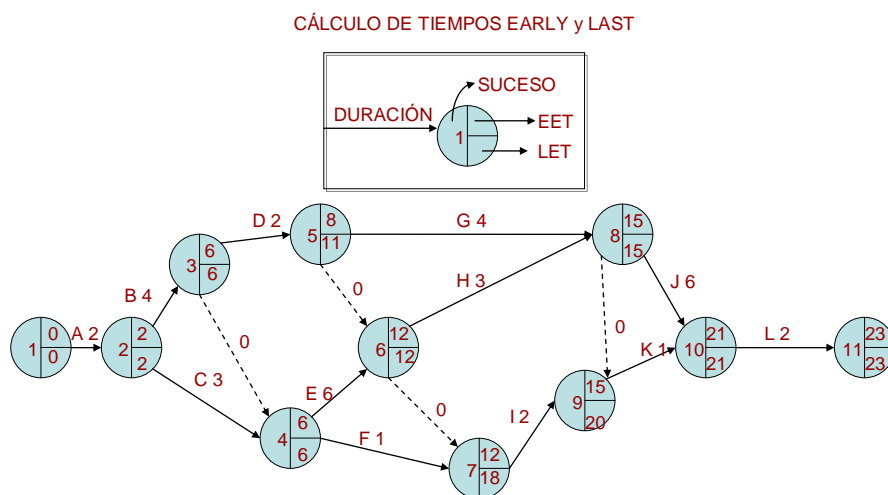
El suceso fin del proyecto tiene LET igual al EET, para el resto de los sucesos se aplican las reglas siguientes:

- Considerar todas las actividades que salen del suceso.

- Restar al LET del suceso final la duración de cada actividad.
- Seleccionar el menor LET que se haya obtenido

$$t_i^* = \min [t_j^* - t_{ij}] \forall j$$

En nuestro ejemplo, si partimos del grafo calculamos los tiempos “early” y “last”



	EET	LET
ACTIVIDAD	$t_j = \max(t_i + t_{ij})$	$t_i^* = \min(t_j^* - t_{ij})$
1	0	$\min(2-2) = 0$
2	$\max(0+2) = 2$	$\min(6-3; 6-4) = 2$
3	$\max(2+4) = 6$	$\min(11-2; 6-0) = 6$
4	$\max(2+3; 6+0) = 6$	$\min(18-1; 12-6) = 6$
5	$\max(6+2) = 8$	$\min(15-4; 12-0) = 11$
6	$\max(8+0; 6+6) = 12$	$\min(18-0; 15-3) = 12$
7	$\max(12+0; 6+1) = 12$	$\min(20-2) = 18$
8	$\max(8+4; 12+3) = 15$	$\min(21-6; 20-0) = 15$
9	$\max(12+2; 15+0) = 15$	$\min(21-1; 15-0) = 20$
10	$\max(15+6; 15+1) = 21$	$\min(23-2) = 21$
11	$\max(21+2) = 23$	=a tiempo EET 23

Cuando el grafo PERT es muy grande (muchas actividades) el cálculo de los tiempos “más pronto posible” y “más tarde permisible” puede ser muy engorroso. Por eso Zaderenko propuso un método matricial de cálculo de tiempos “más pronto posible” y “más tarde permisible”, que resulta sencillo para grafos grandes y pequeños, y además, es fácil de programar.

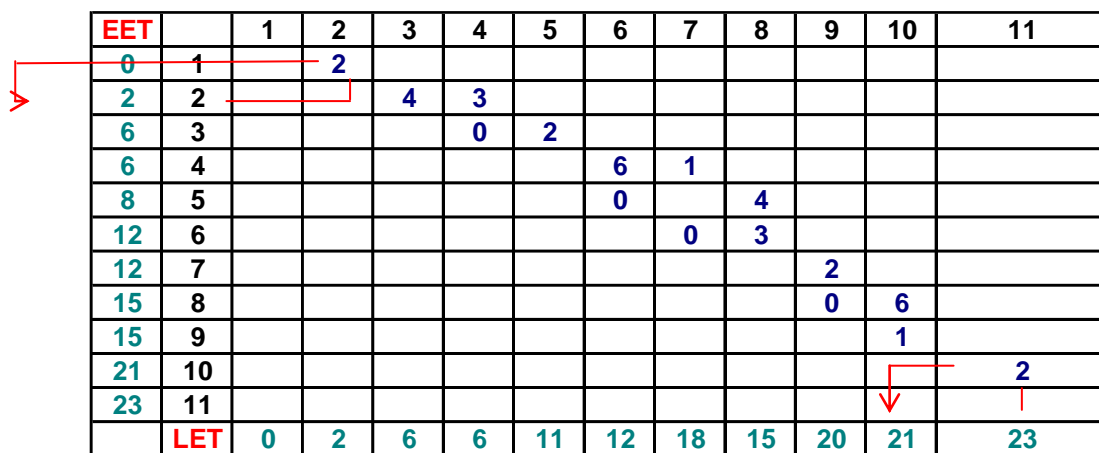
a) Se construye una matriz cuadrada A de dimensión igual al número de nodos del grafo y tal que a_{ij} es el tiempo PERT de la actividad (i,j) si tal actividad existe, sino, a_{ij} no está definido.

b) Para calcular los tiempos “early” se comienza por agregar una columna adicional a la izquierda de la matriz (en la que se irán escribiendo los tiempos “early”. El primer elemento de la columna es el cero. Para calcular los tiempos “early” de los demás sucesos:

$$t_j = \max \{t_i + a_{ij}\} \text{ si el elemento } a_{ij} \text{ existe para la columna } j.$$

c) Para calcular los tiempos “más tarde permisible” se agrega una fila adicional en la parte inferior de la matriz. El último elemento de la fila es igual al tiempo “más pronto posible” del nodo final. Para calcular los tiempos “más tarde permisible” de los demás sucesos:

$$t_i^* = \min \{t_j^* - a_{ij}\} \text{ si el elemento } a_{ij} \text{ existe para la fila } i.$$



EET		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	2										
2	2		4	3								
6	3				0	2						
6	4						6	1				
8	5						0		4			
12	6							0	3			
12	7									2		
15	8									0	6	
15	9										1	
21	10											2
23	11											
	LET	0	2	6	6	11	12	18	15	20	21	23

4.5. Conceptos de holgura y camino crítico

La información que proporciona el conocimiento de los tiempos “más pronto posible” y “más tarde permisible” de los diferentes sucesos no es demasiado importante, salvo los del suceso fin del proyecto, pues este tiempo representa la duración del proyecto.

La verdadera importancia de los tiempos “más pronto posible” y “más tarde permisible” es que constituyen la base para el cálculo de las holguras, que son la pieza fundamental en todo el proceso de análisis del método PERT.

La **holgura** de cierto suceso i (H_i) se define como la diferencia entre los tiempos LET y EET: indica el número de unidades de tiempo en que puede retrasarse la realización del mismo, de manera que la duración del proyecto no experimente ningún retraso.

$$H_i = t_i^* - t_i$$

Holgura total de cierta actividad ij (H_{ij}^T) se define como el tiempo que resulta de restar el tiempo LET del suceso final del EET del suceso inicial y la duración de esa actividad:

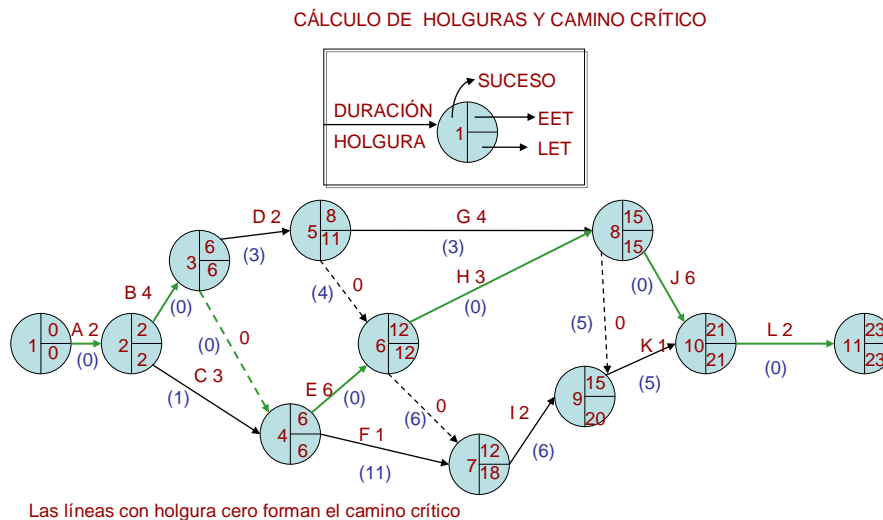
$$H_{ij}^T = t_j^* - t_i - t_{ij}$$

La holgura total de una actividad indica el número de unidades de tiempo en que puede retrasarse la realización de la actividad con respecto al tiempo PERT previsto, de manera que la duración del proyecto no se retrase.

Aquellas actividades cuya holgura total sea cero se denominan **actividades críticas**. El camino que forman se denomina **camino crítico**. El retraso en la realización de cualquiera de las actividades críticas producirá un retraso en la finalización del proyecto.

El camino crítico es el camino de longitud generalizada máxima que va desde el vértice que representa el suceso inicio del proyecto al vértice que representa el suceso fin del proyecto.

Cuando existen varios caminos críticos se pueden aplicar criterios estadísticos para establecer diferentes índices de criticidad.



4.6. Calendario de ejecución del proyecto

En el calendario se establecen cuatro fechas para cada una de las actividades:

- Fecha de comienzo más temprana: $\Delta_{ij} = t_i$
- Fecha de comienzo más tardía: $\Delta_{ij}^* = t_i + H_{ij}^T = t_j^* - t_{ij}$
- Fecha de finalización más temprana: $\nabla_{ij} = t_i + t_{ij}$
- Fecha de finalización más tardía: $\nabla_{ij}^* = t_j^*$

En el caso de las actividades críticas las fórmulas anteriores coinciden.

La holgura total de una actividad es igual a la diferencia entre las fechas de comienzo más tardía y más temprana e igual a la diferencia entre las fechas de finalización más tardía y más temprana:

$$H_{ij}^T = \Delta_{ij}^* - \Delta_{ij} = \nabla_{ij}^* - \nabla_{ij}$$

ACTIVIDAD	PRECEDENTES	DURACIÓN	HOLGURA	SUCESOS		COMIENZOS			FINALIZACIONES	
				INICIAL	FINAL	MÁS TEMPRANA	MÁS TARDÍA		MÁS TEMPRANA	MÁS TARDÍA
						EET inicial	LET FINAL	EET + HOLG LETfinal-DUR	EET ini + DUR	EET ini + DUR + HOL
A		2	0	1	2	0	2	0	2	2
B	A	4	0	2	3	2	6	2	6	6
C	A	3	1	2	4	2	6	3	5	6
D	B	2	3	3	5	6	11	9	8	11
E	B,C	6	0	4	6	6	12	6	12	12
F	B,C	1	11	4	7	6	18	17	7	18
G	D	4	3	5	8	8	15	11	12	15
H	E,D	3	0	6	8	12	15	12	15	15
I	D,E,F	2	6	7	9	12	20	18	14	20
J	G,H	6	0	8	10	15	21	15	21	21
K	G,H,I	1	5	9	10	15	21	20	16	21
L	J,K	2	0	10	11	21	23	21	23	23

ACTIVIDAD	COMIENZOS		FINALIZACIONES	
	MÁS TEMPRANA	MÁS TARDÍA	MÁS TEMPRANA	MÁS TARDÍA
	EET inicial	EET + HOLG LETfinal-DUR	EET ini + DUR	EET ini + DUR + HOL
A	1-ene-00	1-ene-00	3-ene-00	3-ene-00
B	3-ene-00	3-ene-00	7-ene-00	7-ene-00
C	3-ene-00	4-ene-00	6-ene-00	7-ene-00
D	7-ene-00	10-ene-00	9-ene-00	12-ene-00
E	7-ene-00	7-ene-00	13-ene-00	13-ene-00
F	7-ene-00	18-ene-00	8-ene-00	19-ene-00
G	9-ene-00	12-ene-00	13-ene-00	16-ene-00
H	13-ene-00	13-ene-00	16-ene-00	16-ene-00
I	13-ene-00	19-ene-00	15-ene-00	21-ene-00
J	16-ene-00	16-ene-00	22-ene-00	22-ene-00
K	16-ene-00	21-ene-00	17-ene-00	22-ene-00
L	22-ene-00	22-ene-00	24-ene-00	24-ene-00

4.7. El método PERT en un contexto aleatorio

Se trata de la aplicación del método PERT en un contexto de riesgo en el que sólo se conoce la distribución de probabilidad de la duración de las actividades. Se pretende, a partir de la expresiones estudiadas en el numeral 4.3 establecer la probabilidad de terminación de un proyecto en un plazo no superior a un número de unidades de tiempo T :

$$t_{ij} = \frac{E_O + 4E_m + E_P}{6} \quad \sigma_{ij}^2 = \left(\frac{E_O - E_P}{6} \right)^2$$

Para aplicar las expresiones a un contexto de riesgo definimos las duraciones y varianzas para una actividad i :

– E_{oi} , E_{mi} y E_{pi} representan las estimaciones optimista, más probable y pesimista de la duración de una actividad i

– Si ξ_i representa la variable aleatoria que mide la duración de una actividad i que pertenece al camino crítico, la media y varianza de esa variable aleatoria serán:

$$\xi_i = \frac{E_{oi} + 4E_{mi} + E_{pi}}{6} \quad \sigma_i^2 = \left(\frac{E_{oi} - E_{pi}}{6} \right)^2$$

– Definimos una nueva variable aleatoria η que mide la duración del proyecto:

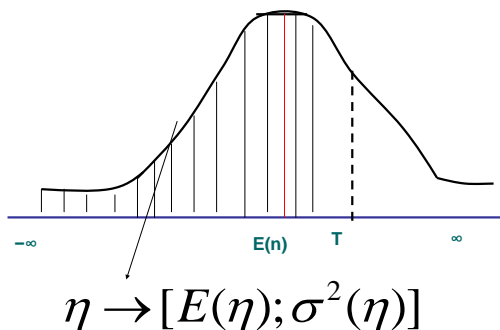
$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

siendo n el número de actividades del camino crítico.

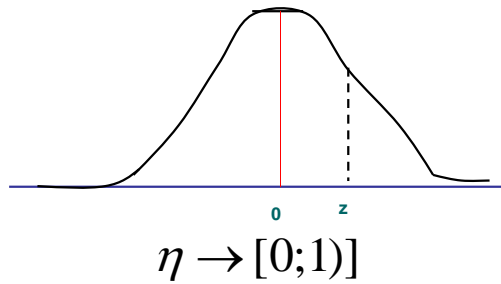
– Cuando el número de actividades sea lo suficientemente elevado ($n \rightarrow \infty$) la variable aleatoria que mide la duración del proyecto converge en distribución a una ley normal:

$$\eta \rightarrow N[E(\eta), \sigma^2(\eta)]$$

A partir de la expresión anterior se puede determinar la probabilidad de terminación de un proyecto en un plazo no superior a un número de unidades de tiempo T : $P(\eta \leq T) = F(T)$



La relación de η con la función de distribución normal (0,1) es:



$$\eta = \xi * \sigma(\eta) + E(\eta)$$

de donde despejamos ξ :

$$\xi = \frac{\eta - E(\eta)}{\sigma(\eta)}$$

Por tanto, si llamamos $E(\eta)$ al valor esperado de la duración del proyecto, es decir, la suma de las duraciones del camino crítico, y queremos determinar la probabilidad de que el proyecto tenga una duración inferior a un cierto número de días, T , tendríamos:

$$\begin{aligned} P(\eta \leq T) &= P[\xi * \sigma(\eta) + E(\eta) \leq T] \\ &= P\left[\xi \leq \frac{T - E(\eta)}{\sigma(\eta)}\right] \\ &= P[\xi \leq z] + 0,5 \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que buscamos en la tabla de distribución normal tipificada (0,1) la probabilidad asignada para ese valor de z y al resultado le sumamos 0,5:

Ejemplo 1: Cuál es la probabilidad de que el proyecto termine en menos de 28 días

ACTIVIDAD	Óptimista (Eo)	Probable (Em)	Pesimista (Ep)	Duración	Varianza
A	1	2	3	2	0,111
B	8	3	4	4	0,444
E	10	5	6	6	0,444
H	7	2	3	3	0,444
J	5	6	7	6	0,111
L	1	2	3	2	0,111

Duración total $E(\eta)$	23
Varianza total $\sigma^2(\eta)$	1,667
Desviación $\sigma(\eta)$	1,290994

$$P(\eta \leq T) = P[\xi * \sigma(\eta) + E(\eta) \leq T]$$

$$P(\eta \leq 28) = P[\xi \leq \frac{28 - 23}{1,290994}]$$

$$P(\eta \leq 28) = P[\xi \leq z] + 0,5$$

$$P(\eta \leq 28) = P[\xi \leq 3,8729] + 0,5$$

$$P(\eta \leq 28) = 0,4999 + 0,5 = 99,99\%$$

Tal es, por consiguiente, la probabilidad de que el proyecto se finalice en menos de 28 días.

Si el empresario quiere tener una probabilidad del 95% de terminar la preparación 20 de enero, cuándo deberá comenzar?

$$P[\xi \leq z] + 0,5 = 0,9505$$

$$P[\xi \leq z] = 0,4505$$

$$= P[\xi \leq 1,65]$$

$$z = \frac{T - E(\eta)}{\sigma(\eta)}$$

$$1,65 = \frac{T - 23}{1,290994}$$

$$T = 25,94 \text{ dias}$$

Ejemplo 2:

Supongamos que, una vez determinado el camino crítico de un proyecto, resulta estar formado por 100 actividades de las cuales:

- 50 actividades tienen una duración optimista de 3 días, un tiempo más probable de 5 días y un tiempo pesimista de 7 días.
- 30 actividades tienen una duración optimista de 8 días, un tiempo más probable de 9 días, y una duración pesimista de 16 días.
- Las 20 actividades restantes tienen un tiempo optimista de 16 días, un tiempo normal de 30 días y una duración pesimista de 32 días.

¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto se termine en menos de 1.123 días (si es aplicable el teorema central del límite)?

Solución:

Actividades	Op.	Pr.	Pe.	Duración por actividad	Dur. Total E(η)	Varianza $\sigma^2(\eta)$	Varianza Total
Grupo 1: 50	3	5	7	$\frac{3 + 4.5 + 7}{6} = 5$	250	$\frac{(7-3)^2}{36} = 0,4444$	22,2222
Grupo 2: 30	8	9	16	$\frac{8 + 4.9 + 16}{6} = 10$	300	$\frac{(16-8)^2}{36} = 1,7777$	53,3311
Grupo 3: 20	16	30	32	$\frac{16 + 4.30 + 32}{6} = 28$	560	$\frac{(32-16)^2}{36} = 7,1111$	142,2222
					1.110		217,7777
$\sigma(\eta)$							14,76

Por tanto,

$$\xi = \frac{\eta - E(\eta)}{\sigma(\eta)} = \frac{\eta - 1.110}{14,76}$$

$$P(\eta \leq 1.123) = P[\xi * 14,76 + 1.110 \leq 1.123]$$

$$= P\left[\xi \leq \frac{1.123 - 1.110}{14,76}\right]$$

$$= P[\xi \leq 0,88] = 0,3106 + 0,5 = 81,06\%$$

Tal es, por consiguiente, la probabilidad de que el proyecto se finalice en menos de 1.123 días.

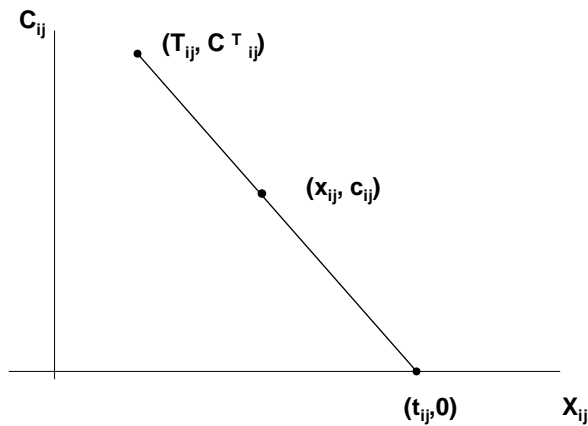
4.8 El PERT Coste ó método MCE:

El método MCE (MINIMUM COST EXPEDITING o “aceleración del proyecto a coste mínimo”) es una prolongación del método PERT, introduciendo la relación entre coste y duración de una actividad.

Este método contempla la posibilidad de que el nivel de utilización de recursos para la realización de una actividad no sea único, y, por lo tanto, no hablaremos de una duración única sino que a cada nivel de recursos le corresponderá una determinada duración. Es decir, se puede reducir la duración de una actividad a base de incrementar su coste de ejecución.

Así, por ejemplo, supongamos que en el proyecto existe una actividad que es el alicatado de paredes con azulejos. El tiempo PERT previsto es de 25 días. Ahora bien, este tiempo PERT se ha calculado en base a un determinado nivel de utilización de recursos (una cuadrilla de albañiles y un turno de trabajo). Indudablemente, este tiempo PERT podría reducirse sin más que incrementar las cuadrillas de albañiles y/o los turnos de trabajo.

En definitiva, existirá una relación funcional decreciente, que supondremos lineal, entre el coste (adicional) y el tiempo de ejecución de una actividad.



Llamaremos:

X_{ij} : duración de la actividad (i,j).

t_{ij} : duración de la actividad (i,j) si le asignamos el mínimo nivel de recursos.

T_{ij} : duración de la actividad (i,j) si le asignamos el máximo nivel de recursos.

c_{ij} : coste (adicional) de ejecución de la actividad (i,j).

c_{ij}^T : coste (adicional) de ejecución de la actividad (i,j) si le asignamos el máximo nivel de recursos.

Además, el coste adicional de ejecución de la actividad si le asignamos el mínimo nivel de recursos es cero.

OBJETIVO:

Proponer un plan de aceleración del proyecto de modo que se incurra en un coste lo más pequeño posible.

- ¿Cuál es el coste (adicional) de ejecución de una actividad (i,j) asociado a una duración X_{ij} ?

Basta calcular la ecuación de la recta:

$$\frac{t_{ij} - X_{ij}}{t_{ij} - T_{ij}} = \frac{0 - c_{ij}}{0 - c_{ij}^T}$$

y despejar c_{ij}

$$c_{ij} = \frac{c_{ij}^T}{t_{ij} - T_{ij}} * (t_{ij} - X_{ij})$$

• Llamaremos a Q_{ij} = el COSTE UNITARIO DE REDUCCIÓN, que es el coste (adicional) de ejecución de la actividad (i,j) por unidad de tiempo que se reduce su duración.

$$Q_{ij} = \frac{c_{ij}^T}{t_{ij} - T_{ij}}$$

EL ALGORITMO DE ACKOFF Y SASIENI

Aunque el método MCE nos lleva a la resolución de un problema de programación lineal paramétrica, en la práctica suele resolverse con algoritmos específicos que resultan más sencillos de aplicar que los algoritmos propios de la programación lineal paramétrica.

Vamos a exponer un algoritmo heurístico muy sencillo que resulta muy práctico en proyectos pequeños.

Para aplicar el algoritmo de Ackoff y Sasieni empezamos construyendo una tabla que explicaremos a continuación.

- 1) En la primera columna de la tabla representamos todos los caminos posibles que van desde el nodo inicio hasta el nodo fin del proyecto.
- 2) Las siguientes columnas corresponden a las diferentes actividades en que se ha descompuesto el proyecto. En las que indicamos en una fila principio y fin de cada actividad y duración de la actividad. Debajo de cada actividad.
- 3) Se escribe el coste unitario de reducción por actividad siempre que esa actividad forme parte del camino que viene indicado por la fila correspondiente. Si, por el contrario, la actividad no forma parte de dicho camino, se deja en blanco el espacio correspondiente.
- 4) Se añade una columna en la que se calculan las duraciones de cada camino calculados en el paso 1.
- 5) Se añade una fila en la parte inferior en la que se indican para cada actividad, las reducciones posibles. (tiempos normales menos tiempos topes) de las diferentes actividades.
- 6) De la observación de la columna calculada en el paso 4 se deduce cuál es la duración del proyecto (duración máxima) que corresponde al camino crítico

7) Comenzamos a reducir días de las actividades que componen el camino crítico teniendo en cuenta el coste de reducción (elegir el mínimo), los días de reducción y la posible aparición de nuevos caminos críticos.

Para reducir la duración de este camino será necesario reducir el tiempo de ejecución de alguna de las actividades que lo forman. Para ello elegiremos la actividad cuyo coste unitario de reducción sea el más pequeño, y recalculamos las duraciones de todos los caminos que incluyen la actividad reducida ampliando la matriz con una nueva columna de duraciones.

8) Añadimos una nueva fila en la parte inferior en la que recalculamos los posibles días de reducción una vez restados los días que hemos quitado de los caminos afectados.

9) Repitiendo el proceso completaremos las demás etapas del algoritmo. Ponemos fin al algoritmo cuando no podamos reducir más la duración del proyecto, o cuando los beneficios marginales que se obtengan por reducir el tiempo de duración del proyecto sean inferiores a los costes marginales. En este último caso es conveniente escribir una tabla donde comparemos los costes y los beneficios.

10) El coste adicional en concepto de reducción lo obtendremos multiplicando el coste unitario de reducción por la correspondiente reducción de tiempo.

Ver ejemplo en el archivo de presentación Power Point disponible en la página web

BIBLIOGRAFÍA

- Pérez Gorostegui, E. *Administración de Empresas Informáticas*. Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A. Madrid. 2011
- Luque de la Torre et al. *Curso Práctico de Economía de la Empresa*. Editorial Pirámide. Madrid 2001.
- www.investigacion-operaciones.com