Capítulo 1

Números complejos

Números complejos en forma binómica y polar.

1. Dados $Z_1 = 3 - 2i$, $Z_2 = -1 + 3i$, $Z_3 = 1 + 2i$, hallar $(Z_1 + Z_2)^2 - \dfrac{Z_2}{Z_3}$
2. Calcular $\dfrac{1-Z}{1+Z}$, siendo $Z = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$
3. Hallar el valor de $m \in \mathbb{R}$ para que $Z = \dfrac{1+mi}{m+i}$ verifique:

   a) $Re(Z) = 0$, b) $Im(Z) = 0$, c) $|Z| = 1$, d) Z esté en la bisectriz del segundo cuadrante.

4. Sabiendo que el complejo $(1 + i + i^2 + \cdots + i^{22})(3 + ki)$ tiene módulo 5, hallar razonadamente el valor del número real k.
5. Calcular el valor del número real $\left(1+\sqrt{3}i\right)^n + \left(1-\sqrt{3}i\right)^n$ siendo n un número natural.
6. Hallar dos números complejos sabiendo que la diferencia entre ambos es real, la suma tiene parte real 8, y su producto es $11 - 16i$.
7. Demuestra que $\overline{iz} = -i\overline{z}$

Lugares geométricos.

8. Indicar la región del plano que satisface cada una de las siguientes condiciones:

   a) $|Z-1| + |Z+1| < 4$, b) $|Z-1| + |Z+1| > 2$, c) $|Z-2| - |Z+2| > 3$,

   d) $|Z| = \mathrm{Re}(Z) + 1$, e) $|Z-5| = |Z-i|$, f) $|Z-4| > 1$,

   g) $\mathrm{Im}(Z) \geq 2$, h) $0 < \mathrm{Re}(iZ) < 1$.

9. Hallar y describir el conjunto de todos los números complejos tales que:

   a) $\dfrac{1}{Z} + \dfrac{1}{\overline{Z}} = 1$, b) $\left|\dfrac{Z-1}{Z+1}\right| \leq 1$

10. Hallar las coordenadas de los vértices de un cuadrado,inscrito en una circunferencia centrada en el origen, sabiendo que uno de los vértices es el número complejo $1 + 2i$.

Raíces, exponenciales y logaritmos complejos.

11. Calcular el valor de los siguientes complejos:

$$\text{a)}\quad \sqrt[3]{-2+2i}, \quad \text{b)}\quad (1+i)^{-3i}, \quad \text{c)}\quad i^i, \quad \text{d)}\quad \sqrt[5]{(1+i)^3}, \quad \text{e)}\quad \frac{1}{\sqrt[4]{-16i}}.$$

12. Hallar los siguientes logaritmos complejos, indicando sus valores principales:

$$\text{a)}\quad \ln(4), \quad \text{b)}\quad \ln(-2), \quad \text{c)}\quad \ln(-i), \quad \text{d)}\quad \ln(2-3i).$$

13. Obtener la suma y el producto de las raíces n-ésimas de la unidad.

14. Calcula y representa los afijos de las raíces cúbicas de $\frac{2i^9+i^{-7}}{3i}$. Expresar el resultado en forma binómica.

15. Hallar el argumento del complejo Z que tenga módulo 1, siendo

$$Z = (1+i)^{\left(\frac{9\pi}{4}+i\ln\sqrt{2}\right)}.$$

16. Calcular $Z = ln\sqrt{t}$ siendo t un número complejo de módulo 1 que verifica que $\dfrac{t}{1+\sqrt{3}i} \in \mathbb{R}$.

17. Utilizando la fórmula de Moivre, hallar en función de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$:

$$\text{a)}\quad \operatorname{sen} 5x, \quad \text{b)}\quad \cos 7x.$$

18. Los afijos de Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 y Z_6 son los vértices consecutivos de un hexágono regular. Sabiendo que $Z_1 = 0$ y $Z_4 = 4+6i$, hallar los restantes vértices.

19. Expresar en forma binómica $z = i\mathrm{e}^{\left(i\frac{7\pi}{4}\right)}$.

Soluciones de algunos de los problemas propuestos.

1.- $2+3i$.

2.- $\dfrac{-\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}i$.

3.- a) $m=0$; b) $m=\pm 1$; c) $\forall m\in\mathbb{R}$; d) $m=-1\pm\sqrt{2}$.

4.- $k=\pm 4$.

5.- $2^{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{3}$.

8.- b) Imposible, c) Zona interior de la hipérbola $\dfrac{x^2}{\frac{9}{4}} - \dfrac{y^2}{\frac{7}{4}} = 1$,

f) Exterior de la circunferencia de centro $(4,0)$ y radio 1.

13.- $S=0$, $P=\pm 1$ según sea n par o impar.

15.- $\alpha = \left(\ln\sqrt{2}\right)^2 + \dfrac{81\pi^2}{16}$.