

# Teoría de Campos Cuánticos Quantum Field Theory (QFT)

Raúl Ortega

Madrid, November 2019

## **Abstract**

Este documento es una recopilación de apuntes de las clases y libros que utilicé para la asignatura de Teoría de Campos Cuánticos del grado en Física en 2019. Son unos apuntes personales y por ello pueden contener erratas.

This document is a compilation of notes from lectures and books I used to study Quantum Field Theory for the Physics Bsc in 2019. These are personal notes and thus may include mistakes.

# Contents

<b>1</b>	<b>Tema 0. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Tema 1. Ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac</b>	<b>3</b>
2.1	Ecuación de Schrödinger para una partícula no relativista . . . . .	3
2.2	Ecuaciones de Klein- Gordon (1926) . . . . .	6
2.3	Ecuación de Dirac . . . . .	9
2.4	Campo electromagnético clásico . . . . .	15
2.4.1	Transformaciones Gauge . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Tema 2. Cuantización del campo EM</b>	<b>17</b>
3.1	Cuantización canónica . . . . .	17
3.1.1	El oscilador armónico. (resolución algebraica) . . . . .	18
3.2	Campo Electromagnético en una cavidad . . . . .	19
3.3	Cuantización del campo EM. . . . .	21
3.4	Emisión y absorción de fotones en átomos . . . . .	24
3.4.1	Absorción de un fotón. . . . .	25
3.4.2	Emisión de un fotón. . . . .	25
3.5	Teoría de perturbaciones dependientes del tiempo. . . . .	26
3.6	Emisión espontánea . . . . .	28
3.7	Transición $2p \rightarrow 1s \gamma$ en el átomo de Hidrógeno. . . . .	29
3.8	Distribución de Planck. . . . .	31
<b>4</b>	<b>Tema 3. Cuantización canónica covariante de un campo escalar.</b>	<b>32</b>
4.1	Teoría clásica de campos relativista. . . . .	32
4.2	Cuantización canónica covariante de un campo escalar real $\phi \in \mathbb{R}$ . . . . .	34
4.3	Cuantización del campo escalar complejo. $\psi \in \mathbb{C}$ . . . . .	39
4.4	Imágenes o representaciones de la Mec. Cuántica . . . . .	41
4.4.1	Representación de Schrödinger . . . . .	41
4.4.2	Representación de Heisenberg . . . . .	42
4.4.3	Representación de interacción (o de Dirac) . . . . .	42
4.5	Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo . . . . .	43
4.6	Teoría cuántica de campos en interacción . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Tema 4. Matriz S, secciones eficaces y anchuras de desintegración.</b>	<b>45</b>
5.1	Desintegración de partículas. . . . .	46
5.2	Colisión de partículas. Sección eficaz. . . . .	48
5.3	Colisiones y desintegraciones a dos cuerpos. . . . .	49
5.4	Anchura a dos cuerpos (en CM) . . . . .	50
5.5	Secciones eficaces 2 a 2. (en CM) . . . . .	50
5.6	Amplitud de dispersión y teoría de perturbaciones . . . . .	51

# 1 Tema 0. Introducción

La teoría cuántica de campos relativista nace de casar la mecánica cuántica con la relatividad especial. De la RS (relatividad especial)  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$  que a altas energías se aproxima  $E \sim pc$ , y de la mecánica cuántica  $\Delta p \Delta x \sim \hbar$  combinándolas tenemos el principio de indeterminación  $\Delta E \Delta x \sim c \hbar$  que quiere decir que a energías grandes cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  entonces  $\Delta E \rightarrow \infty$  donde se da la producción de partículas. El ámbito natural de la teoría es el de altas energías.

Algunos de los resultados de esta teoría son la existencia de antipartículas, producción de partículas, conexión espín estadística (teorema), teorema CPT (tres operaciones) y el modelo estandar.

## 2 Tema 1. Ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac

### 2.1 Ecuación de Schrödinger para una partícula no relativista

Un estado físico es un ket  $|\psi\rangle \in \varepsilon$ , con  $\varepsilon$  el espacio de estados del sistema.

Los observables vienen representados por operadores  $\hat{A}$  hermiticos ( $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ ) en un espacio de Hilbert y que actúan sobre los estados de este espacio.

Se define el valor esperado  $\langle \hat{A} \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$  en el límite  $N \rightarrow \infty$

El operador Hamiltoniano,  $\hat{H}$ , implementa la evolución del sistema con la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H} |\psi(t)\rangle \text{ y } |\psi(t_0)\rangle \text{ en } t = t_0 \text{ (cond.inicial)} \quad (1)$$

*Ejemplo:*

Sea  $x$ ,  $p = m\dot{x} \rightarrow H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$  y su Lagrangiano  $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$  cuantizamos el sistema (Cuantización Canónica):

$x \rightarrow \hat{x}$ ,  $p \rightarrow \hat{p}$  e imponemos  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$  (relaciones canónicas). Introducimos un espacio de estados  $\varepsilon$ , la ecuación de Schrödinger general con  $\hat{H} = \hat{H}(\hat{x}, \hat{p})$  hamiltoniano clásico sustituyendo  $x \rightarrow \hat{x}$ ,  $p \rightarrow \hat{p}$ .

En realidad este procedimiento no siempre está bien definido ya que existe ambigüedad cuando tenemos por ejemplo:  $xpx$ ,  $x^2p$ ,  $px^2$  que al no conmutar  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$  no son iguales al cuantizar. En nuestro ejemplo esto no es problema y entonces  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$

Introducimos una base del espacio de estados  $\varepsilon$  (una reparametrización del sistema)<sup>1</sup>

Introducimos la base de posiciones, formada por autoestados del operador  $\hat{X}$ :  $\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle$  donde  $|x\rangle$  es un estado de posición bien definida (y entonces por principio de Heisenberg

---

<sup>1</sup>Técnicamente debe ser discreta, finita o infinita numerable, pero a veces utilizaremos bases continuas.

del momento no sabemos nada)

Introducimos la base de representación de momentos formada por autoestados del operador momento  $\hat{P}$  :  $\hat{P}|p\rangle = p|p\rangle$  donde  $|p\rangle$  es un estado de momento bien definido (y entonces por principio de Heisenberg la indeterminación en la posición es infinita).

Deben ambas cumplir las relaciones de ortonormalidad:<sup>2</sup>  $\langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$  y la relación de cierre:  $\int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle \langle x| = 1$ .

Para la base de momentos por cuestiones de dimensiones (hay transformadas de Fourier):  $\langle p|p'\rangle = 2\pi\hbar\delta(p-p')$  y relación de cierre  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} |p\rangle \langle p| = 1$ .

Pongamos estamos en representación de posiciones:

$$|\psi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle \langle x|\psi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle \psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x,t) |x\rangle \quad (2)$$

$\psi(x,t)$  son las componentes de  $|\psi(t)\rangle$  en la base de posiciones  $|x\rangle$ , es lo que llamamos función de onda. En el problema de una partícula no relativista  $\psi(x,t) = \langle x|\psi(t)\rangle$ .

Expresemos ahora los elementos de la base de representación de momentos en función de la base de posiciones <sup>3</sup>:

$$|p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_p(x) |x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle x|p\rangle |x\rangle \quad (3)$$

introduciendo la relación de ortonormalidad<sup>4</sup>,

$$\langle p|p'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_p^*(x) \langle x| \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi_{p'}(x') |x'\rangle = \quad (4)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi_p^*(x) \psi_{p'}(x') \delta(x-x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_p^*(x) \psi_{p'}(x) \quad (5)$$

y por las leyes de ortonormalidad, entonces:  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_p^*(x) \psi_{p'}(x) = 2\pi\hbar\delta(p-p')$ .

Como  $\delta(p-p') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(p-p')/h}$ , entonces:

$$2\pi\hbar\delta(p-p') = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(p-p')/h} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_p^*(x) \psi_{p'}(x) \quad (6)$$

e identificando términos finalmente llegamos a  $\psi_p(x) = e^{ipx/h} = \langle x|p\rangle$ .

Veamos como se aplican los operadores posición y momento sobre el estado:

$$\hat{X}|\psi(x,t)\rangle = \hat{X} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x,t) |x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x \psi(x,t) |x\rangle \quad (7)$$

<sup>2</sup>No es  $\delta_{x,x'}$  porque puede ser base infinita.

<sup>3</sup>Se ha supuesto no hay dependencia temporal.

<sup>4</sup>También suponemos funciones suaves tal que podemos cambiar el orden de integración.

y ahora veamos lo mismo para el operador momento:

$$\hat{P} |\psi(t)\rangle = \hat{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} |p\rangle \langle p| |\psi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} p |p\rangle \langle p| |\psi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx p |p\rangle \langle p| |x\rangle \psi(x, t) \quad (8)$$

identificando aquí  $\langle p| x = e^{\frac{-ipx}{\hbar}}$  y entonces  $pe^{\frac{-ipx}{\hbar}} = i\hbar \frac{d}{dx} e^{\frac{-ipx}{\hbar}}$ :

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx |p\rangle i\hbar \frac{d}{dx} (e^{\frac{-ipx}{\hbar}}) \psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx |p\rangle e^{\frac{-ipx}{\hbar}} (-i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x, t)) \quad (9)$$

donde para el último paso se ha integrado por partes, finalmente:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} |p\rangle \langle p| \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\frac{-ipx}{\hbar}} (-i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x, t)) |x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\frac{-ipx}{\hbar}} (-i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x, t)) |x\rangle \quad (10)$$

y entonces vemos que  $-i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x, t)$  es como actúa el operador momento sobre el ket estado en representación de posiciones.

Veamos la ecuación de onda de una partícula no relativista sometida a un potencial  $V(x)$ :

Teniendo en cuenta la ecuación de Schrödinger  $\hat{H} |\psi(t)\rangle = i\hbar \partial_t |\psi(t)\rangle$  con el hamiltoniano de la partícula no relativista sometida a un potencial, y conociendo la forma en que actúa el operador momento en representación de posiciones  $\hat{P}^2 = \hat{P}\hat{P} = -\hbar^2 \partial_x^2$  entonces:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V(x) \right) \psi(x, t) = i\hbar \partial_t \psi(x, t) \quad (11)$$

Hasta aquí hemos estado trabajando en una dimensión, haciendo los cambios  $x \rightarrow \vec{x}$  y  $\partial_x \rightarrow \nabla$  tenemos la generalización a 3 dimensiones.

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right) \psi(\vec{x}, t) = i\hbar \partial_t \psi(\vec{x}, t) \quad (12)$$

La condición de normalización  $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\vec{x}, t)|^2 d\vec{x} = 1$  (La partícula debe estar en algún sitio) me permite definir la densidad de probabilidad  $\rho(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2 \geq 0 \forall \vec{x}, t$ , además la normalización se mantiene en la evolución temporal, la evolución temporal de la función de onda conserva las probabilidades.

Definimos también la densidad de corriente de probabilidad como:

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \frac{-i\hbar}{2m} \left( \psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right) \quad (13)$$

A partir de las definiciones de  $\vec{j}(\vec{x}, t)$  y  $\rho(\vec{x}, t)$  y la ecuación de onda se puede probar la ecuación de continuidad  $\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0$  que da cuenta de la conservación de la probabilidad.

## 2.2 Ecuaciones de Klein- Gordon (1926)

Introducimos el sistema natural de unidades, donde  $c = 1$ , entonces las dimensiones de longitud y tiempo son las mismas ( $[L] = [t]$ ) y las dimensiones de momento y energía también coinciden ( $[M] = [E] = [P]$ ), además hacemos que la unidad de acción o unidad de momento angular  $\hbar = 1$ , con lo que  $[s] = [L] = [\sigma] = [v]$ .

En este sistema de unidades en que  $c = \hbar = 1$  solo nos hará falta una unidad, el electron-voltio (eV), aunque será más común emplear el GeV. Este sistema de unidades es habitual utilizarlo en física de partículas como en el CERN y en general en la física de altas energías.

En este nuevo sistema de unidades, en representación de posiciones la ecuación de Schrödinger es  $\hat{H} |\psi(t)\rangle = i \partial_t |\psi(t)\rangle$ .

Sea  $|\psi\rangle$  autoestado del hamiltoniano y sea  $E$  su autovalor,  $\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle$ , entonces  $E |\psi\rangle = i \partial_t |\psi(t)\rangle \rightarrow |\psi(t)\rangle = C \cdot e^{-E t i} |\psi(0)\rangle$ . Los estados estacionarios tienen energía bien definida y una evolución temporal sencilla.

Podemos decir entonces que  $\hat{H} \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}$ , (solo cuando el estado es estacionario).

Tratemos ahora de llegar a una ecuación relativista:

- i.) Partícula no relativista  $\hat{H}_0 = \frac{\hat{P}^2}{2m}$
- ii.) Partícula relativista  $\hat{H} = \sqrt{\hat{P}^2 + m^2} \approx m + \frac{\hat{P}^2}{2m} + o(\hat{P}^3)$

La raíz de un operador da problemas así que es mejor elevar todo al cuadrado.

$$E^2 = \hat{P}^2 + m^2 \rightarrow (\hat{P}^2 + m^2)\psi = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi \text{ ó } \sqrt{\hat{P}^2 + m^2}\psi(\vec{x}, t) = i \frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t)$$

Pasando  $-\partial_t^2 \psi$  al lado derecho de la igualdad, finalmente:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \psi(\vec{x}, t) = 0 \quad (14)$$

Que es la ecuación de Klein-Gordon (invariante bajo transformaciones de Lorentz)

En un espacio Minkowski cualquier suceso se puede representar por un cuadrivector  $x^\mu = (t, \vec{x})$ . Así definimos el cuadrivector momento  $P^\mu = (E, \vec{P})$ , con  $\vec{P} = m\gamma\vec{v}$  y  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ .  
Y

$$V^\mu = (V^0, \vec{V})$$

Definimos el tensor de la métrica Minkowski:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Existe otra notación con los signos cambiados pero utilizaremos esta para la asignatura.

Se define el producto escalar en el sentido Minkowski: sean  $A = (A^0, \vec{A})$  y  $B = (B^0, \vec{B})$ :

$$A \cdot B = \sum_{\mu, \nu=0} A^\mu B^\nu g_{\mu\nu} = A^\mu B^\nu g_{\mu\nu} = A^\mu B^\mu.$$

Un producto de dos cuadvectores es un invariante Lorentz:  
 $A \cdot B = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$  ó  $V \cdot V = (V^0)^2 - \vec{V}^2$ .

Definimos el inverso del tensor simétrico:  $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$ .

Introducimos el cuadvector gradiente:  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$  con  $x^\mu = (t, \vec{x})$  y entonces  $\partial^\mu = (\partial_t, -\vec{\nabla})$ . E introducimos también el operador D'Alembertiano  $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \nabla^2$  con lo que reescribimos la ecuación de Klein-Gordon como:

$$(\square + m^2) \psi(\vec{x}, t) = 0 \quad (15)$$

Hasta ahora todo ha ido bien pero empezaremos a ver los problemas con esa ecuación en breves.

En la ecuación de onda no hay grados de libertad de espín, luego describe una partícula de espín 0. Buscamos soluciones en forma de ondas planas:

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{\mp i E_p t + i \vec{p} \cdot \vec{x}}$$

Donde  $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ , que depende solo entonces del módulo del momento y no de su dirección. Introducimos la solución anterior en la ecuación Klein-Gordon:

$$\partial_t \psi(\vec{x}, t) = \psi(\mp i E_p) \rightarrow \partial_t^2 \psi = -E_p^2 \psi \quad y \quad \nabla^2 \psi = -\vec{p}^2 \psi$$

$$(-E_p^2 + \vec{p}^2 + m^2) \psi(\vec{x}, t) = 0$$

Luego  $E_p^2 = \vec{p}^2 + m^2$ , son soluciones de energía bien definida. Pero de  $\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle$  con energía,  $E > 0$ , veámos que  $|\psi(t)\rangle = e^{-iEt} |\psi(0)\rangle$  que comparando con nuestra solución  $\psi(\vec{x}, t) = e^{\mp i E_p t + i \vec{p} \cdot \vec{x}}$  no da problemas cuando elijo el signo "menos", pero cuando cojo el signo "más" estamos cogiendo solución de onda plana con energías negativas.

Esto no tiene sentido físico, como el operador hamiltoniano es hermitico sus autovalores deben ser positivos y además deben estar acotados inferiormente. Todo estado físico debe tener un estado de mínima energía o de lo contrario podríamos extraer energía de él infinitamente.

En la ecuación de Klein-Gordon se puede definir un cuadvector  $j^\mu = \frac{i}{2m} (\Psi^* \partial^\mu \Psi - \Psi \partial^\mu \Psi^*)$  con  $\Psi$  escalar, invariante Lorentz. Podemos escribirlo como  $j^\mu = (\rho, \vec{j})$  donde:  $\rho = \frac{i}{2m} (\Psi^* \partial_t \Psi - \Psi \partial_t \Psi^*)$  y  $\vec{j} = -\frac{i}{2m} (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*)$ . Y calculando la cuadridivergencia:

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{i}{2m} (\partial_\mu \Psi^* \partial^\mu \Psi + \Psi^* \square \Psi - \partial_\mu \Psi \partial^\mu \Psi^* - \Psi \square \Psi^*) = 0$$

Vemos entonces que se cumple la ecuación de continuidad, la densidad de probabilidad se conserva.  $\partial_\mu j^\mu = 0$ ;  $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ . Pero además  $\rho$  debe ser definida positiva, veamos si es así:

$\rho = \frac{i}{2m} (|\Psi|^2 (\mp E_p) - |\Psi|^2 (\pm E_p)) = \pm \frac{|\Psi|^2}{m} E_p$  con  $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \geq 0$  Salen soluciones negativas!.

La solución más general es combinación de solución de ondas planas, y aparecen signos negativos, luego  $\rho$  no está en general definido positivo. Dirac vio este problema y trata de arreglarlo modificando  $\rho$  añadiéndole una carga  $q$  tal que ahora es una densidad de carga, que puede ser negativa:

Utilizamos el sistema de unidades eléctricas Heaviside-Lorentz racionalizado (+natural). En este nuevo sistema las ecuaciones de Maxwell son:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{j} + \partial_t \vec{E}\end{aligned}$$

Recordamos el cuadrivector potencial  $A^\mu = (\phi, \vec{A})$  y la relación entre los potenciales y los campos:  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ;  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$

De la dinámica relativista: la acción  $S = -m \int dS - q \int A_\mu dx^\mu$  con  $dx^\mu = (dt, d\vec{x})$  ;  $S = -m \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1-v^2} - q \int_{t_1}^{t_2} dt A_\mu \frac{dx^\mu}{dt}$  con lo que el Lagrangiano de una partícula relativista sometida a un campo electromagnético:

$$L = -m\sqrt{1-v^2} + q\vec{v} \cdot \vec{A} - q\phi$$

Definimos momento canónico conjugado  $\vec{\Pi} = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \vec{p} + q\vec{A}$  con  $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$  y entonces ahora podemos construir el hamiltoniano del sistema: Mientras que  $L = L(\vec{x}, \vec{v})$ ,  $H = H(\vec{x}, \vec{\Pi})$

$$H = \vec{v} \cdot \vec{\Pi} - L = \sqrt{m^2 + (\vec{\Pi} - q\vec{A})^2} + q\phi$$

Donde el primer término es relativista y el segundo viene del campo eléctrico (no hay componente del campo magnético ya que estos curvan trayectorias pero no aceleran en el sentido de aumentar el módulo de la velocidad,  $|\vec{v}|^2$ ).

Defino el operador  $P^\mu = (i\partial_t, -i\vec{\nabla}) = i\partial^\mu$  en representación de posiciones.

La introducción de campos electromagnéticos, comparándolo con el hamiltoniano libre hace:

$$\begin{aligned}i\partial_t &\rightarrow i\partial_t - q\phi \\ -i\vec{\nabla} &\rightarrow -i\vec{\nabla} - q\vec{A}\end{aligned}$$

De formas más compacta,  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$  con  $A^\mu = (\phi, \vec{A})$  que corresponde a cambiar derivadas ordinarias por derivadas covariantes. Con lo que  $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\psi = 0 \rightarrow (D_\mu D^\mu + m^2)\psi = 0$  y entonces,

Ecuación Klein-Gordon en presencia de campos EM:

$$\left[ \left( i\frac{\partial}{\partial t} - q\phi \right)^2 - \left( -\vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 \right] \Psi = m^2 \Psi \quad (16)$$

Esta ecuación tiene una serie de propiedades interesantes, podemos definir

$J^\mu = \frac{iq}{2m}(\Psi^* \partial^\mu \Psi - \Psi \partial^\mu \Psi^*)$  que satisface  $\partial_\mu J^\mu = 0$ , lo que quiere decir que satisface la



ecuación de continuidad  $\frac{\partial J^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ , luego  $J^0$  se conserva.

Además satisface el segundo par de ecuaciones de Maxwell:  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = T^\nu$  con  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ , luego interpretamos  $J^\mu = \frac{iq}{2m}(\Psi^* \partial^\mu \Psi - \Psi \partial^\mu \Psi^*)$  como la densidad de carga.

Si imponemos  $\Psi \in \mathbb{R}$  entonces  $\Psi = \Psi^*$  y sustituyendo  $J^\mu = 0$ , no hay densidad de carga, por lo que  $\Psi$  es una partícula neutra, sin carga. Esto está relacionado con el hecho de existencia de antipartículas.

## 2.3 Ecuación de Dirac

Cuando escribimos el estado de una partícula de espín no nulo escribimos  $\Psi = [\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n]^t$ . En el caso no relativista el número de componentes  $n = 2s + 1$  con  $s$  el espín de la partícula, pero para el caso relativista veremos como esto no es así.

Partimos de la ecuación de Schrödinger  $i\partial_t |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$  que queremos aplicar ahora para una partícula de espín. Queremos buscar el hamiltoniano de Dirac, que debe cumplir  $\hat{H}_D = \hat{H}_D^t$ .

Para evitar la aparición de soluciones negativas cogemos un Hamiltoniano lineal con el tiempo (no cogemos segundas derivadas), lo que nos lleva a construir un Hamiltoniano lineal en el momento. Recordando  $\hat{H}\Psi = i\partial_t \Psi = E\Psi$  y nuestro nuevo hamiltoniano  $\hat{H} = \bar{\alpha} \cdot \hat{p} + m\beta$  con  $\bar{\alpha}, \beta$  matrices  $n \times n$ :

$$[E - \bar{\alpha} \cdot \hat{p} - m\beta]\Psi = 0$$

El siguiente requerimiento es que para una partícula física:  $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ , luego  $[E^2 - p^2 - m^2]\Psi = 0$ .

Tratemos de igualarlas, sea  $\bar{\alpha} \cdot \hat{p} = \sum_i^3 \alpha_i \hat{P}_i$ :

$$[E + \bar{\alpha} \cdot \hat{P} + m\beta][E - \bar{\alpha} \cdot \hat{P} - m\beta]\Psi = [E^2 - (\bar{\alpha} \cdot \hat{P} + m\beta)^2]\Psi = 0$$

$$[E^2 - \sum_{ij} \alpha_i \alpha_j \hat{P}_i \hat{P}_j - m \sum_i \alpha_i \beta \hat{P}_i - m \sum_i \beta \alpha_i \hat{P}_i - m^2 \beta^2]\Psi = 0$$

$$[E^2 - \sum_i \alpha_i \hat{P}_i - \sum_{i < j} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \hat{P}_i \hat{P}_j - m \sum_i (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \hat{P}_i - m^2 \beta^2]\Psi = 0$$

Donde, identificando términos con  $[E^2 - p^2 - m^2]\Psi = 0$  tenemos:

$$\begin{aligned} -\sum_i \alpha_i \hat{P}_i &= -\hat{P}^2 \rightarrow \alpha_i^2 = \mathbb{1} \\ (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) &= 0 \quad \text{para } i \neq j \\ (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) &= 0 \\ \beta^2 &= \mathbb{1} \end{aligned}$$

Lo que nos da algunas restricciones para las matrices  $\bar{\alpha}$  y  $\beta$ . Además ambas matrices deben ser autoadjuntas debido a que el hamiltoniano completo lo es.

Buscamos soluciones  $\alpha, \beta$  matrices que satisfagan lo anterior y resulta que no existe solución para  $n = 1, 2, 3$  y para  $n = 4$  existen infinitas soluciones, sistema compatible indeterminado. Luego tenemos el cuadriespino  $\Psi = [\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4]^t$ .

Volviendo de nuevo sobre la ecuación de Dirac en presencia de campos EM, en representación de posiciones:

$$\begin{aligned} E &\rightarrow i\partial_t \xrightarrow{\text{EM}} i\partial_t - q\phi \\ \hat{P} &\rightarrow -i\vec{\nabla} \xrightarrow{\text{EM}} -i\vec{\nabla} - q\vec{A} \end{aligned}$$

Con lo que la ecuación de Dirac en presencia de campos EM en representación de posiciones es:

$$[(i\partial_t - q\phi) - \bar{\alpha} \cdot (-i\vec{\nabla} - q\vec{A}) - m\beta]\Psi = 0$$

Hacemos un cambio de notación. En lugar de trabajar con las matrices  $\bar{\alpha}$  y  $\beta$  trabajamos con gammas de Dirac, que definimos:

$$\gamma^0 = \beta \quad \text{y} \quad \vec{\gamma} = \beta\bar{\alpha} \quad \text{con} \quad \gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma})$$

De forma que la ecuación anterior se reescribe  $[\gamma^\mu(i\partial_\mu - qA_\mu) - m]\Psi =$ , que si además escribimos en términos de la derivada covariante  $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$

$$[i\gamma^\mu D_\mu - m]\Psi = 0 \tag{17}$$

O en notación de Feynman, donde  $\not{V} = \gamma^\mu V_\mu$

$$[i\not{D} - m]\Psi = 0 \tag{18}$$

Las condiciones que antes poníamos sobre  $\bar{\alpha}$  y  $\beta$  ahora se trasladan sobre  $\gamma^0$  y  $\vec{\gamma}$  que quedan reducidas a las condiciones:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu \quad (\text{anticommutador})$$

Que resumen todas las condiciones que imponíamos sobre las matrices  $\alpha, \beta$  excepto que han de ser adjuntas, que se impone:

$$\gamma^0 = (\gamma^0)^\dagger \quad (\text{hermítica}) \quad \text{y} \quad \gamma^i = -(\gamma^i)^\dagger \quad (\text{antihermítica})$$

Veamos la forma que toman estas matrices en algunas representaciones:

i.) Representación de Dirac:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{\gamma} = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & \vec{\sigma}_{2 \times 2} \\ -\vec{\sigma}_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \\ \beta &= \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{\alpha} = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & \vec{\sigma}_{2 \times 2} \\ \vec{\sigma}_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Con  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  las matrices de Pauli, que verifican:

- i.)  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k$
- ii.)  $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k$

- iii.)  $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$   
iv.)  $\sigma_i = \sigma_i^\dagger$

i.) Representación de Weyl (Quiral):

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & \mathbb{1}_{2 \times 2} \\ \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{\gamma} = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & \bar{\sigma}_{2 \times 2} \\ -\bar{\sigma}_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & \mathbb{1}_{2 \times 2} \\ \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{\alpha} = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & \bar{\sigma}_{2 \times 2} \\ -\bar{\sigma}_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

### Propiedades de la ec. de Dirac para una partícula cargada.

Sea  $\Psi = [\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4]^t$  y entonces  $\Psi^\dagger = [\Psi_1^*, \Psi_2^*, \Psi_3^*, \Psi_4^*]$  definimos el conjugado de Dirac como  $\bar{\Psi} = \psi^* \gamma^0$ . Reescribimos el cuadrivector  $J^\mu = J^\mu(\rho, \vec{j}) = q \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ , que si se satisface la ecuación de Dirac debe verificar la ecuación de continuidad  $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ , y entonces interpretábamos  $J^\mu$  como densidad de corriente.

Consideremos ahora una teoría de Maxwell-Dirac, sea  $\mathcal{L}$  la densidad Lagrangiana y sea  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  el tensor electromagnético:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\Psi - J^\mu A_\mu$$

Con este Lagrangiano podemos encontrar ecuaciones de trayectorias con el principio de mínima acción.

Con todo esto aún no sabemos qué son las 4 componentes del espinor que salieron, para ello estudiamos el límite no relativista de la ecuación de Dirac.

### Límite no relativista de la ec. de Dirac

$$[(i\partial_t - q\phi) - \bar{\alpha} \cdot (-i\vec{\nabla} - q\vec{A}) - m\beta]\Psi = 0$$

Donde escribiremos  $\Psi = [\xi, \chi]^t$  con  $\xi, \chi$  bi-espinores y trabajamos en la representación de Dirac. Para cada uno de los dos bi-espinores:

$$i\frac{\partial \xi}{\partial t} = \bar{\sigma} \cdot (-i\vec{\nabla} - q\vec{A})\chi + q\phi\xi + m\xi$$

$$i\frac{\partial \chi}{\partial t} = \bar{\sigma} \cdot (-i\vec{\nabla} - q\vec{A})\xi + q\phi\chi - m\chi$$

En el límite no relativista  $E = \sqrt{p^2 + m^2} \stackrel{\text{Taylor}}{\approx} m + p^2/2m + \dots \approx m$  (a primer orden). Para  $E \approx m$  (a primer orden) la evolución del estado viene en su mayor parte de la contribución de la masa. Definamos  $\xi', \chi'$  bi-espinores de evolución lenta:

$$\xi = e^{-imt} \xi' \quad ; \quad \chi = e^{-imt} \chi'$$

De forma que separamos la dependencia temporal principal de los nuevos bi-espinores prima, así  $\partial_t \xi'$  y  $\partial_t \chi'$  son pequeños, varían poco con el tiempo, evolución lenta. Reescribimos ahora las ecuaciones de los biespinores  $\xi$ ,  $\chi$  para  $\xi'$ ,  $\chi'$ :

$$i \frac{\partial \xi'}{\partial t} = \bar{\sigma} \cdot (-i \vec{\nabla} - q \vec{A}) \chi' + q \phi \xi'$$

$$i \frac{\partial \chi'}{\partial t} = \bar{\sigma} \cdot (-i \vec{\nabla} - q \vec{A}) \xi' + q \phi \chi' - 2m \chi'$$

Ahora aproximamos en  $\xi' = e^{-iE_k t} \xi'_0$  con  $E_k \ll m$ .

$i \dot{\chi}' = E_k \chi' \ll 2m \chi'$  luego de la ecuación anterior:

$$i \frac{\partial \chi'}{\partial t} = \bar{\sigma} \cdot (-i \vec{\nabla} - q \vec{A}) \xi' + q \phi \chi' - 2m \chi'$$

$$\bar{\sigma} \cdot (-i \vec{\nabla} - q \vec{A}) \xi' = 2m \chi'$$

Sustituyendo  $\hat{P} = -i \vec{\nabla} - q \vec{A}$ , entonces  $\bar{\sigma} \cdot \hat{P} \xi' = 2m \chi'$  y finalmente  $\chi' = \frac{\bar{\sigma} \cdot \hat{P}}{2m} \xi'$ .

En el límite no relativista  $|\hat{P}| \ll m$  luego  $\chi' = \frac{\bar{\sigma} \cdot \hat{P}}{2m} \xi' \ll \xi'$ . Es decir, en representación de Dirac, en el límite no relativista  $\xi' \ll \chi' \Rightarrow \xi \ll \chi$  y entonces resulta que uno de los dos bi-espinores se puede despreciar respecto al otro, recuperando la función de onda un bi-espinor que es lo que teníamos de la mecánica cuántica. Para el límite no relativista tenemos de nuevo un bi-espinor.  $\Psi = [\xi, \chi]^t \xrightarrow{\text{Lim.no relativ.}} [\xi, 0]^t$ .

Gracias a la nueva relación  $\chi' = \frac{\bar{\sigma} \cdot \hat{P}}{2m} \xi'$  podemos desacoplar las ecuaciones de los bi-espinores:

$$i \frac{\partial \xi'}{\partial t} = \frac{(\bar{\sigma} \cdot \hat{P})^2}{2m} \xi' + q \phi \xi'$$

En representación de posiciones reescribimos la ecuación anterior:

$$i \frac{\partial \xi'}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2m} (\bar{\sigma} \cdot (-i \vec{\nabla} - q \vec{A}))^2 + q \phi \right] \xi' \quad ; \quad \xi' = [\xi_1, \xi_2]^t$$

E introducimos el operador espín definido  $\vec{s} = \frac{\bar{\sigma}}{2}$  con  $\bar{\sigma}$  las matrices de Pauli. Con lo que podemos reescribir la ecuación anterior como<sup>5</sup>:

$$i \frac{\partial \xi'}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2m} (-i \vec{\nabla} - q \vec{A})^2 - \frac{q}{m} \vec{s} \cdot \vec{B} + q \phi \right] \xi'$$

Presentamos ahora la ecuación de Pauli para una partícula no relativista de espín 1/2 sometida a un campo EM:

$$i \frac{\partial \xi'}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2m} (-i \vec{\nabla} - q \vec{A})^2 - \vec{M}_s \cdot \vec{B} + q \phi \right] \xi'$$

---

<sup>5</sup>Procedimiento en el Galindo-Pascual

con  $\xi' = [\xi_+, \xi_-]^t$  y  $\vec{M}_s$  momento magnético de espín.

Como vemos, esta ecuación tiene la estructura usual de ecuación de Schrödinger  $i\partial_t\chi' = H_p\chi'$ . Al menos en el límite no relativista la ecuación de Dirac describe partícula de espín 1/2 sometida a un campo EM, y además relaciona  $\vec{M}_s$  con  $\vec{s}$ .

Se introduce de forma estándar  $\vec{M}_s = g\frac{q}{2m}\vec{s}$  donde  $g$  es el radio giromagnético y depende del tipo de partícula. De comparar nuestra ecuación resultado de hacer la aproximación no relativista y la ecuación de Pauli resulta  $g = 2$ . De los experimentos obtenemos valores  $g_{e-}/2 = 1,001159652209...$  para el electrón<sup>6</sup>,  $g_{p+}/2 = 2,7928...$  para el protón y  $g_n/2 = -1,9130...$  para el neutrón. Como vemos los valores del radio giromagnético para los protones y neutrones no es 2, esto es debido a que la ecuación de Dirac solo vale para partículas elementales y los protones y neutrones tienen estructura interna, no son elementales, están compuestas por Quarks.

Se puede resolver la ec. de Dirac (límite no relativista) para  $\phi = -e/4\pi r$  del átomo de Hidrógeno y  $\vec{B} = 0$ . Se obtiene entonces una corrección a la energía  $\Delta E$ , donde la energía total es entonces  $E = E_0 + \Delta E$  con  $E_0 = \alpha/2a_0n^2$  con  $\alpha = e^2/4\pi$  y la corrección:

$$\Delta E \approx -\alpha^2 E_0 \frac{1}{m} \left( \frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) \quad ; \quad \vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$$

Que rompe la degeneración de los niveles de energía del átomo. La ecuación de Dirac describe la estructura fina, sin embargo no explica el efecto Lambda ni la estructura hiperfina.

En la situación general (sin hacer el límite no relativista) aparecen dos términos que no sabemos lo que son, para buscar su significado buscamos soluciones a la ecuación de Dirac:

$$(i\gamma - m)\Psi = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0 \quad (\text{partícula libre})$$

Utilizamos la representación Quiral (Weyl), y recordamos  $X^\mu = (t, \vec{X})$  y  $P^\mu = (P^0, \vec{P})$  con  $\vec{P} = m\gamma\vec{v}$ . Buscamos soluciones para la partícula libre de la forma de ondas planas  $e^{-iP \cdot X} = e^{-i(P^0 t - \vec{X} \cdot \vec{P})} = e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{X})}$ . Es decir, buscamos soluciones de la forma (ansatz)

$$\psi(\vec{x}, t) = U(p) e^{-iP \cdot X}$$

Donde  $e^{-iP \cdot X}$  es una fase y como  $\psi(\vec{x}, t)$  es un cuadriespinor, entonces  $U(p)$  también lo es. Definimos  $\sigma^\mu = (\mathbb{1}_{2 \times 2}, \vec{\sigma})$  y  $\bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}_{2 \times 2}, -\vec{\sigma})$  en función de lo que pondremos las dos soluciones.

El primer conjunto de soluciones<sup>7</sup> es  $U^s$  con  $s = 1, 2$ :

$$U^s = \begin{bmatrix} \sqrt{P \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{P \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{P^0 \mathbb{1} - \vec{P} \cdot \vec{\sigma}} \xi^s \\ \sqrt{P^0 \mathbb{1} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}} \xi^s \end{bmatrix}$$

<sup>6</sup>Los decimales se pueden llegar a explicar con correcciones a la ecuación de Dirac.

<sup>7</sup>Para más detalle sobre como se obtienen las soluciones ver *Pesquil-Introduction to Quantum Field Theory*

Con el producto  $P.\sigma$ ,  $P.\bar{\sigma}$  un producto escalar en sentido Mimkowski ,  $P^0 = E_p > 0$  y además  $\xi^s$  biespinores que deben estar normalizados ( $\xi^\dagger \xi = 1$ ,  $\sum_s \xi^{s\dagger} \xi^s = \mathbb{1}$ ).

Pero, ¿Qué es la raíz de una matriz? Solo matrices con autovalores reales positivos tienen raíces. Unas propiedades importantes de esta matriz son:

$$\begin{aligned}\sum_s U^s(p) \bar{U}^s(p) &= \not{P} + m \\ \bar{U}^r(p) U^s(p) &= 2m \delta_{rs}\end{aligned}$$

Donde  $\bar{U} = U^\dagger \gamma^0$  es el conjugado de Dirac.

Hay además otro conjunto de soluciones para el ansatz

$$\psi(\vec{x}, t) = V(p) e^{iP.X}$$

Donde otra vez  $P.X = E_p t - \vec{P} \cdot \vec{X}$ . Y entonces de nuevo aparecen soluciones de energía negativa. Al pensar en la evolución temporal de un estado de energía bien definida la evolución viene dada por la fase  $e^{-iEt}$  pero como vemos del ansatz, la forma de las soluciones que estamos buscando tiene fase temporal  $e^{iE_p t}$  con  $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} > 0$ , luego identificando términos  $E = -E_p$  y entonces tenemos las soluciones de energía negativa. Las soluciones son  $V^s$  con  $s = 1, 2$ :

$$V^s = \begin{bmatrix} \sqrt{P.\sigma} \eta^s \\ \sqrt{P.\bar{\sigma}} \eta^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{P^0 \mathbb{1} - \vec{P}.\vec{\sigma}} \eta^s \\ \sqrt{P^0 \mathbb{1} + \vec{P}.\vec{\sigma}} \eta^s \end{bmatrix}$$

Con  $\eta$  un biespinor que cumple las condiciones de normalización ( $\eta^\dagger \eta = 1$ ,  $\sum_s \eta^{s\dagger} \eta^s = \mathbb{1}$ ) y como para el otro ansatz también tienen otras propiedades:

$$\begin{aligned}\sum_s V^s(p) \bar{V}^s(p) &= \not{P} - m \\ \bar{V}^r(p) V^s(p) &= -2m \delta_{rs}\end{aligned}$$

Para cuantizar el espín solemos utilizar el eje z, pero en física de partículas se suele utilizar la dirección del momento intrínseco.

LLamamos helicidad a la componente del espín de una partícula en dirección del momento de la misma, así:  $h = \vec{s} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ . O introduciendo la matriz de Pauli generalizada:

$$\bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix} \quad \vec{S} = \frac{1}{2} \bar{\Sigma}$$

podemos escribir el operador helicidad como  $h = \frac{1}{2} \bar{\Sigma} \cdot \frac{\vec{P}}{|\vec{P}|}$ .

Consideremos por simplificar el momento paralelo al eje z, entonces:

$$\xi^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \xi^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \eta^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \eta^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Que satisfacen:

$$h\xi^1 = \frac{1}{2}\xi^1 \quad , \quad h\xi^2 = -\frac{1}{2}\xi^2 \quad , \quad h\eta^1 = -\frac{1}{2}\eta^1 \quad , \quad h\eta^2 = \frac{1}{2}\eta^2$$

Para cada vector  $\vec{p}$  tenemos 4 soluciones: los dos primeras corresponden a partícula de espín 1/2 y  $E_p > 0$  y las dos segundas corresponden a partícula de espín 1/2 y  $E_p < 0$

## 2.4 Campo electromagnético clásico

Recordamos  $J^\mu = (\rho, \vec{j})$  y  $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ . Podríamos expresar los campos eléctrico y magnético en función de este potencial como:  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ,  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$ . Sea el tensor de Maxwell  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  podemos escribir  $E_i = F_{0i}$  y  $B_i = -1/2 \varepsilon_{ijk} F_{jk}$ . El tensor  $F_{\mu\nu}$  tiene 6 componentes independientes:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Escribimos las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}) = -\partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\partial_t \vec{B} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \partial_t \vec{E} \end{aligned}$$

Las dos últimas pueden escribirse de forma compacta en términos del tensor de Maxwell como  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$ .

### 2.4.1 Transformaciones Gauge

Haciendo la transformación  $A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \xi$ , que separada en  $\phi, \vec{A}$  se escribe:

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi' = \phi + \partial_t \xi \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} \xi \end{aligned}$$

Es fácil ver que la transformación gauge no afecta a los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , es decir  $\vec{E}' = \vec{E}$  y  $\vec{B}' = \vec{B}$ . Veamos como no varían en notación tensorial con el tensor de Maxwell:

$$F^{\mu\nu'} = \partial^\nu A'^\mu - \partial^\mu A'^\nu = \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu \xi) - \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu \xi) = \partial^\nu A^\mu + \partial^\nu \partial^\mu \xi - \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu \xi = F^{\mu\nu}$$

Volviendo al segundo par de ec. de Maxwell  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = J^\nu$  o en términos del d'lambertiano  $\square A^\nu - \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = J^\nu$ .

Hacemos una simplificación de las ecuaciones de Maxwell por la teoría Gauge. Elijo  $\xi$  tal que  $\square \xi = -\partial_\mu A^\mu$ , entonces  $\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu (A^\mu + \partial^\mu \xi) = \partial_\mu A^\mu + \square \xi = \partial_\mu A^\mu - \partial_\mu A^\mu = 0$ , luego para todo  $A^\mu$  existe  $\xi$  tal que  $\partial_\mu A'^\mu = 0$ , que se trata de la condición de Lorentz. En el vacío como  $\rho, \vec{j}$  son nulos entonces  $\square A^\mu = 0$  y  $\partial_\mu A^\mu = 0$ .

Segunda transformación Gauge, escogemos  $\xi$  tal que  $\partial_t \xi = -\phi$  de forma que  $\phi' = \phi + \partial_t \xi = \phi - \phi = 0$ . aquí  $\xi = \int \partial_t \phi$ . Se comprueba que la segunda transformación no altera la primera. El nuevo potencial vector es  $\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} \xi$ , entonces:

$$\vec{\nabla} \vec{A}' = \vec{\nabla} \vec{A} - \nabla^2 \xi = \vec{\nabla} \vec{A} + \int \partial_t \nabla^2 \xi = \vec{\nabla} \vec{A} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \partial_t \phi = \vec{\nabla} \vec{A} - \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\partial_\mu A^\mu = 0$$

Se cumple entonces  $\partial_t^2 \phi = \nabla^2 \phi$ . Las condiciones resultantes son:  $\phi' = 0$ , y  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$  que son las condiciones del Gauge de Coulomb, también llamado Gauge de radiación o Gauge transversal.

Si  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ,  $\vec{E} = -\partial_t \vec{A}$  entonces  $\square \vec{E} = \square \vec{B} = 0$  y los campos  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  son invariantes Gauge. En el vacío los campos no son nulos sino que cumplen la ecuación de onda con velocidad de propagación igual a la velocidad de la luz.

Las soluciones de  $\square A^\mu = 0$  son funciones de la forma  $e^{-iK_\mu X^\mu}$  con  $X^\mu = (t, \vec{X})$  y  $K_\mu = (K^0, \vec{K})$  donde  $K^0 = \omega = |\vec{K}|$ .

Para una partícula  $P^0 = \sqrt{|\vec{K}|^2 + m^2}$  por lo que si  $m = 0$  entonces  $P^0 = |\vec{K}|$ , lo que implica son ondas electromagnéticas asociadas a partículas de masa 0.

La ecuación de onda<sup>8</sup>  $\epsilon_\mu(\vec{K}, \lambda) e^{-iK_\mu X^\mu}$  con las condiciones de Lorentz:  $\partial_\mu A^\mu = 0$  que implica  $K_\mu \epsilon^\mu = 0$  y en el Gauge de radiación:  $\phi = 0$ ,  $A^0 = 0$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{K} \cdot \vec{\epsilon} = 0$ . Tenemos entonces  $\epsilon_\mu(\vec{K}, \lambda) = (0, \vec{\epsilon}(\vec{K}, \lambda))$  tal que  $\vec{\epsilon}(\vec{K}, \lambda) \cdot \vec{K} = 0$  con  $\lambda = 1, 2$ . Llamamos ahora  $\vec{e}_1 = \vec{\epsilon}(\vec{K}, 1)$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{\epsilon}(\vec{K}, 2)$  y  $\vec{e}_3 = \frac{\vec{K}}{|\vec{K}|} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$  que hacen una base ortonormal ( $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ )

Sobre la interpretación de las soluciones de energía negativa en los biespinores: Surge la idea del mar de Dirac, electrones indetectables que llenan todos los estados de energía negativa y en virtud del principio de exclusión de Pauli no permiten que nuevos electrones llenen esas capas pues se encuentran ya llenas. De acuerdo a esto lo que llamábamos vacío es un mar lleno, y la energía del vacío es negativa.

En 1928 descubren que un hueco en el mar de Dirac se comporta como una partícula de carga positiva  $+e$  igual a la del electrón pero de signo opuesto, al hueco del mar de electrones de Dirac se le llama Positrón. Más tarde, en 1932 Anderson estudiando rayos cósmicos descubre el positrón. La idea de mar de Dirac es errónea pero gracias a ella se predijo la existencia del positrón. Los estados de energía negativa corresponden a antipartículas.

No hay manera de escribir una ecuación de onda para una partícula relativista, aparecen antipartículas. El número de partículas no se conserva y por ello no podemos tener una ecuación de onda de una partícula, necesitamos un formalismo más complejo, amplio. Cuantificando los campos es como se logra.

---

<sup>8</sup> $\epsilon_\mu(\vec{K}, \lambda)$  es el vector de polarización de la onda.  $\epsilon^0 = 0$ .



## 3 Tema 2. Cuantización del campo EM

### 3.1 Cuantización canónica

Formalismo Lagrangiano:

A partir de un sistema clásico de  $N$  grados de libertad  $q_1, q_2, \dots, q_n$  con  $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$  y su lagrangiano <sup>9</sup>  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$  definimos la acción (un funcional)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$$

Aplicando el principio de mínima acción o principio de Hamilton  $\delta S = 0$  llegamos a las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

De las que si las resolvemos para ciertas condiciones iniciales  $q_{i0} = q_i(t_0)$ ,  $\dot{q}_{i0} = \dot{q}_i(t_0)$  obtenemos la evolución del sistema  $q_i(t)$ ,  $\dot{q}_i(t)$ .

Formalismo Hamiltoniano:

Para pasar al formalismo Hamiltoniano definimos el momento canónicamente conjugado  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$  y se introduce la función Hamiltoniana:

$$H = H(q_i, p_i) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad \text{con} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{y} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (19)$$

Con lo que logramos con este formalismo pasar de tener  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de 2º orden a tener  $2n$  ecuaciones diferenciables ordinarias de 1º orden. Es en este formalismo Hamiltoniano (o canónico) en el que está basado la cuantización canónica.

Por cada coordenada generalizada asociamos un operador que trabaja en un espacio de Hilbert (espacio de estados del sistema  $\varepsilon$ ). Entonces  $q_i \rightarrow \hat{q}_i$ ,  $p_i \rightarrow \hat{p}_i$  y a estos operadores les imponemos las reglas de conmutación  $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}$  y  $[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$ .

Ahora estudiamos la dinámica del sistema. A partir del Hamiltoniano clásico introducimos el operador Hamiltoniano  $\hat{H}$ ,  $H(q_i, p_i) \rightarrow \hat{H}(\hat{q}_i, \hat{p}_i)$ . Este procedimiento no siempre está bien definido pues como  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$  no conmutan se generan ambigüedades, por ejemplo al hacer la cuantización canónica del producto  $qp$  no es lo mismo escribir  $\hat{q}\hat{p}$  o  $\hat{p}\hat{q}$ .

Un estado ahora vendrá descrito por un ket  $|\phi(t)\rangle \in \varepsilon$  y evolucionará según la ecuación de Schrödinger  $\hat{H} |\phi(t)\rangle = i\hbar \partial_t |\phi(t)\rangle$ . Buscando los autoestados del hamiltoniano  $\hat{H} |\varepsilon_m\rangle = E_m |\varepsilon_m\rangle$  estos estados de energía bien definida evolucionan según  $|\phi_m(t)\rangle = e^{-iE_m(t-t_0)/\hbar} |\phi_m(t_0)\rangle$ .

---

<sup>9</sup>Sistema aislado, tal que no depende del tiempo, autónomo.

### 3.1.1 El oscilador armónico. (resolución algebraica)

Sistema unidimensional,  $q_1 = \hat{X}$ , escribimos su op. Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{X}) = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}k\hat{X}^2 \quad \text{con } k = m\omega_0^2$$

Introducimos los operadores creación y destrucción definidos:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2}} \left( \hat{X} + \frac{i}{m\omega_0\hat{P}} \right) \quad ; \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2}} \left( \hat{X} - \frac{i}{m\omega_0\hat{P}} \right)$$

o invirtiendo

$$\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega_0}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad ; \quad \hat{P} = i\sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad \text{con } [\hat{X}, \hat{P}] = i$$

Y a partir de estos se define un nuevo operador  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$  autoadjunto<sup>10</sup>, luego tiene sus autovalores reales.

Entonces:

$$\begin{aligned} \omega_0\hat{N} = \omega_0\hat{a}^\dagger\hat{a} &= \frac{m\omega_0^2}{2} \left( \hat{X}^2 - \frac{i}{m\omega_0}\hat{P}\hat{X} + \frac{i}{m\omega_0}\hat{X}\hat{P} + \frac{1}{m^2\omega_0^2}\hat{P}^2 \right) = \\ &= \frac{m\omega_0^2}{2} \left( \hat{X}^2 - \frac{1}{m\omega_0} + \frac{1}{m^2\omega_0^2}\hat{P}^2 \right) = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2}\hat{X}^2 - \frac{\omega_0}{2} \end{aligned}$$

Vemos entonces que  $\omega_0\hat{N} = \hat{H} - \omega_0/2$  con lo que finalmente  $\hat{H} = \omega_0(\hat{N} + 1/2)$ .

*Ejercicio 4/5. Demostrar:*

- i.)  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ .
- i.)  $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$ .
- i.)  $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$ .

Como ya decíamos anteriormente, dado que  $\hat{N}$  es autoadjunto sus autovalores  $\mu$ ,  $\hat{N}|\mu\rangle = \mu|\mu\rangle$  son reales. Pongamos ahora  $\exists \mu / \hat{a}|\mu\rangle = 0$  entonces  $\hat{N}|\mu\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}|\mu\rangle = \hat{a}^\dagger 0 = 0$  luego  $\mu = 0$ . Podemos calcular la energía para ese estado:  $\hat{H}|0\rangle = \omega_0(\hat{N} + 1/2)|0\rangle = \omega_0/2|0\rangle$ . El estado  $|0\rangle$  de  $\hat{N}$  es un autoestado también de  $\hat{H}$ , un estado de energía bien definida  $\omega_0/2$ . Los autoestados de  $\hat{N}$  serán de  $\hat{H}$  y viceversa, solo se diferencian ambos operadores en una cantidad constante y un factor multiplicativo.

Haciendo<sup>11</sup>  $\hat{N}\hat{a}|\mu\rangle = (\hat{a}\hat{N} - \hat{a})|\mu\rangle = (\mu - 1)\hat{a}|\mu\rangle$  vemos  $\hat{a}|\mu\rangle$  es un autoestado de  $\hat{N}$  con autovalor  $(\mu - 1)$ .

<sup>10</sup>  $\hat{N}^\dagger = (\hat{a}^\dagger\hat{a})^\dagger = \hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{N}$

<sup>11</sup> Aquí se ha utilizado  $[\hat{N}, \hat{a}] = \hat{N}\hat{a} - \hat{a}\hat{N} = -\hat{a}$

Y de forma similar<sup>12</sup>,  $\hat{N}\hat{a}^\dagger|\mu\rangle = (\hat{a}^\dagger\hat{N} + \hat{a}^\dagger)|\mu\rangle = (\mu+1)\hat{a}^\dagger|\mu\rangle$  vemos  $\hat{a}^\dagger|\mu\rangle$  es un autoestado de  $\hat{N}$  con autovalor  $(\mu+1)$ .

Por ello es por lo que llamamos a los operadores  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^{dagger}$  operadores escalera, o creación destrucción.

Los autoestados del operador Hamiltoniano son las energías  $E_n = \omega_0(n+1/2)$  con  $E_0 = \omega_0/2$  la energía fundamental. Imponemos ahora ortonormalidad entre los autoestados del Hamiltoniano,  $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ , entonces podemos escribir:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \quad ; \quad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (destruc) \quad ; \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (creac.) \quad (20)$$

### 3.2 Campo Electromagnético en una cavidad

Para conseguir que el número de grados de libertad sea infinito numerable tenemos que reducir el espacio a una cavidad, pues en todo el espacio los grados de libertad son infinito no numerable. Como cavidad escogemos un cubo de lado  $L$  y volumen  $V = L^3$ , que luego elongaremos haciendo  $L \rightarrow \infty$  para volver al problema de todo el espacio.

Debemos definir unas condiciones de contorno en las fronteras de la cavidad. Lo natural sería hacer que el campo se anule en las fronteras, pero mientras que la superficie va como  $L^2$  el volumen va como  $L^3$  lo que quiere decir que cuando hacemos el límite  $L \rightarrow \infty$  los efectos de superficie son despreciables. La solución en el límite  $L \rightarrow \infty$  no depende de condiciones de contorno, solo de efectos de volumen. Como dan igual las condiciones de contorno que elegimos elegimos las mas sencillas, condiciones de contorno periódicas.

Desarrollamos el vector potencial  $\vec{A}$  en ondas planas de coeficientes  $\vec{A}_k(t)$ ,  $\vec{A} = \sum_k \vec{A}_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ , que es un desarrollo en serie de Fourier y no una transformada de Fourier debido a que estamos en una cavidad y no en todo el espacio. De la condición de que el vector potencial ha de ser real  $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$  sacamos que los coeficientes han de cumplir  $\vec{A}_k^* = \vec{A}_{-\vec{k}}$ , de forma que la suma total en  $\vec{k}$  sea real.

La condición de periodicidad se traduce en  $\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x} + L\vec{e}_i, t)$  con  $\vec{e}_i$  un vector unitario del sistema de referencia. Esta condición impuesta sobre el desarrollo en serie anterior hace:

$$\sum_k \vec{A}_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \sum_k \vec{A}_k e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x} + L\vec{e}_i)} \quad \forall \vec{x}, t \Rightarrow e^{i\vec{k}\cdot\vec{e}_i L} = e^{ik_i L} = 1$$

Que se cumple para  $k_i = \frac{2\pi n_i}{L}$  con  $n_i \in \mathbb{Z}$  de forma que  $e^{ik_i L} = e^{i2\pi n_i} = 1$ . Esto se puede resumir diciendo  $\vec{k} = \frac{2\pi}{L}\vec{n}$  con  $\vec{n}$  con componentes enteras.  $\mathbb{Z}$  es un conjunto infinito pero numerable.

---

<sup>12</sup> $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{N}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{N} = \hat{a}^\dagger$

Por último las condiciones de transversalidad  $\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$  hacen que  $\vec{k} \cdot \vec{A}_{\vec{k}} = 0$ .

Entonces, a partir de la ecuación

$$\square \vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \sum_{\vec{k}} \ddot{\vec{A}}_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \sum_{\vec{k}} |\vec{k}|^2 \vec{A}_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = 0$$

A partir de donde, identificando  $|\vec{k}| = \omega_k$ , tenemos la ecuación de un oscilador armónico simple.

$$\ddot{\vec{A}}_{\vec{k}} + \omega_k^2 \vec{A}_{\vec{k}} = 0$$

Por tanto tenemos campos cuyos coeficientes del desarrollo en serie de Fourier dependen del tiempo como un oscilador armónico simple. La dinámica del campo EM en una cavidad es la dinámica de un sistema infinito de osciladores.

Veamos el número de posibles valores puede tomar  $k$  entre  $\vec{k}$  y  $\vec{k} + \Delta \vec{k}$ . Sea  $\Delta n_i = \frac{L}{2\pi} \Delta k_i$ , entonces el numero de estados que tenemos entre  $\vec{k}$  y  $\vec{k} + \Delta \vec{k}$  es:

$$\Delta n = \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = \frac{V}{(2\pi)^3} \Delta \vec{k}$$

Que si tomamos el límite  $L \rightarrow \infty$  se transforma en una expresión diferencial:  $dn = \frac{V}{(2\pi)^3} d\vec{k}$ , ó  $dn = \frac{V}{(2\pi)^3} |\vec{k}|^2 d|\vec{k}| d\Omega$  en esféricas, luego  $dn = \frac{V}{2\pi^2} \omega^2 d\omega$  que si ahora dividimos por el volumen nos da la densidad de estados:

$$\frac{1}{V} \frac{dn}{d\omega} = \frac{\omega^2}{2\pi^2}$$

Calculamos los campos  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  dentro de la cavidad. En el Gauge de Coulomb ( $\phi = 0$ ,  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ):

$$\vec{E} = -\dot{\vec{A}} = -\sum_{\vec{k}} \dot{A}_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = i \sum_{\vec{k}} \vec{k} \times A_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

y siendo la energía del sistema es  $H = \frac{1}{2} \int d\vec{x} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$ , ahora lo ponemos en términos de los coeficientes  $\vec{A}_{\vec{k}}$ :

$$\begin{aligned} \vec{E}^2 &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \dot{A}_{\vec{k}} \dot{A}_{\vec{k}'} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}} = \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \dot{A}_{\vec{k}} \dot{A}_{\vec{k}'} e^{i\vec{x} \cdot (\vec{k} + \vec{k}')} \\ \vec{B}^2 &= - \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} (\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}) \cdot (\vec{k}' \times \vec{A}_{\vec{k}'}) e^{i\vec{x} \cdot (\vec{k} + \vec{k}')} \end{aligned}$$

Y como la integral  $\int d\vec{x} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$  es en  $d\vec{x}$  solo parte exponencial de los campos contribuye a la integral y esta es  $\int d\vec{x} e^{i\vec{x} \cdot (\vec{k} + \vec{k}')}$  que se compone de integrales  $\int_0^L dx e^{ix(k_x + k'_x)}$ :

$$\int_0^L dx e^{ix(k_x + k'_x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k_x + k'_x \neq 0 \\ L & \text{si } k_x + k'_x = 0 \end{cases}$$

Luego solo hay contribución si  $n_x + n'_x = 0$ .

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int_V d\vec{x} \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \int_V d\vec{x} \vec{B}^2 = V \sum_{\vec{k}} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}} \cdot \dot{\vec{A}}_{\vec{k}}^* + V \sum_{\vec{k}} (\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}) \cdot (\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}^*) = \\ &= \frac{V}{2} \sum_{\vec{k}} \left[ \dot{\vec{A}}_{\vec{k}} \cdot \dot{\vec{A}}_{\vec{k}}^* + (\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}) \cdot (\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}^*) \right] \end{aligned}$$

y sea  $(\vec{k} \times \vec{A}) \cdot (\vec{k} \times \vec{B}) = \vec{k}^2 \cdot \vec{A} \cdot \vec{B} - (\vec{k} \cdot \vec{A})(\vec{k} \cdot \vec{B})$ , y  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{A} = \vec{k} \cdot \vec{A}^* = 0$ .

$$H = \frac{V}{2} \sum_{\vec{k}} \left[ \dot{\vec{A}}_{\vec{k}} \cdot \dot{\vec{A}}_{\vec{k}}^* + \omega_k^2 \vec{A}_{\vec{k}} \cdot \vec{A}_{\vec{k}}^* \right]$$

Realizamos ahora un cambio de notación, reescribiendo  $\vec{A} = \sum_{\vec{k}} (\hat{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}})$ , de forma que la ecuación izquierda  $\ddot{\hat{a}}_{\vec{k}} + \omega_k^2 \hat{a}_{\vec{k}} = 0$ , donde ahora  $\hat{a}_{\vec{k}}$  depende del tiempo. Sus soluciones son  $\hat{a}_{\vec{k}} = \hat{c}_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t}$  que reintroduciendo en  $\vec{A}$  lleva a:  $\vec{A} = \sum_{\vec{k}} (\hat{c}_{\vec{k}} e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + \hat{c}_{\vec{k}}^* e^{i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})})$ .

Ahora de la condición  $\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$  tenemos entonces que  $\hat{a}_{\vec{k}}$  es ortogonal a  $\vec{k}$  y entonces podemos escribir  $\hat{c}_{\vec{k}} = \vec{\epsilon}_1 c_{k_1} + \vec{\epsilon}_2 c_{k_2}$ . Sean  $k^\mu = (\omega, \vec{k})$  y  $x^\mu = (t, \vec{x})$  finalmente:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}, \lambda} \left( \vec{\epsilon}_\lambda c_{\vec{k}, \lambda} e^{-ik \cdot x} + \vec{\epsilon}_\lambda^* c_{\vec{k}, \lambda}^* e^{ik \cdot x} \right)$$

*Ejercicio:*

Probar que  $H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \lambda} \left( P_{\vec{k}, \lambda}^2 + \omega_k^2 Q_{\vec{k}, \lambda}^2 \right)$ , con  $P_{\vec{k}, \lambda} = \sqrt{v}(a_{\vec{k}, \lambda} + a_{\vec{k}, \lambda}^*)$ ,  $Q_{\vec{k}, \lambda} = -i\omega_k \sqrt{v}(a_{\vec{k}, \lambda} - a_{\vec{k}, \lambda}^*)$  y verificándose  $P_{\vec{k}, \lambda} = Q_{\vec{k}, \lambda}$ .

Sabemos cuantizar ya un conjunto de osciladores armónicos desacoplados, luego la cuantización es inmediata.

### 3.3 Cuantización del campo EM.

Aplicamos la cuantización canónica:

$$\begin{aligned} Q_{\vec{k}, \lambda} &\rightarrow \hat{Q}_{\vec{k}, \lambda} \\ P_{\vec{k}, \lambda} &\rightarrow \hat{P}_{\vec{k}, \lambda} \end{aligned} \quad \text{e imponemos rel. canónicas} \quad [\hat{Q}_{\vec{k}, \lambda}, \hat{P}_{\vec{k}', \lambda'}] = i\delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}$$

El Hamiltoniano anterior  $H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \lambda} \left( P_{\vec{k}, \lambda}^2 + \omega_k^2 Q_{\vec{k}, \lambda}^2 \right) = \sum_{\vec{k}, \lambda} \hat{H}_{\vec{k}, \lambda}$  nos describe la radiación EM dentro de una cavidad, entonces su energía es  $E = \sum_{\vec{k}, \lambda} \left( N_{\vec{k}, \lambda} + \frac{1}{2} \right)$  con  $N_{\vec{k}, \lambda} = 0, 1, 2, 3, \dots$

Ahora hacemos un nuevo cambio de notación. Introducimos unos operadores  $\hat{a}'_{\vec{k},\lambda}$  (no son los de antes) asociados a  $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}\sqrt{2\omega_k V}$ , es decir, es un cambio de normalización de los operadores anteriores.

$$\hat{a}_{\vec{k},\lambda} = \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2}} \left( \hat{Q}_{\vec{k},\lambda} + \frac{i}{\omega_{\vec{k}}} \hat{P}_{\vec{k},\lambda} \right) \quad y \quad \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2}} \left( \hat{Q}_{\vec{k},\lambda} - \frac{i}{\omega_{\vec{k}}} \hat{P}_{\vec{k},\lambda} \right)$$

Donde  $\hat{P}_{\vec{k},\lambda}^\dagger = \hat{P}_{\vec{k},\lambda}$  y  $\hat{Q}_{\vec{k},\lambda}^\dagger = \hat{Q}_{\vec{k},\lambda}$ , ahora  $\hat{N}_{\vec{k},\lambda} = \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k},\lambda}$  con  $\hat{N}_{\vec{k},\lambda} = \hat{N}_{\vec{k},\lambda}^\dagger$

$$\omega_{\vec{k}} \hat{N}_{\vec{k},\lambda} = \omega_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k},\lambda} = \frac{1}{2} \left( \hat{P}_{\vec{k},\lambda}^2 + \omega_{\vec{k}}^2 \hat{Q}_{\vec{k},\lambda}^2 - \frac{1}{2} \omega_{\vec{k}} \right)$$

Que comparándola con la expresión de  $H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k},\lambda} \left( \hat{P}_{\vec{k},\lambda}^2 + \omega_{\vec{k}}^2 \hat{Q}_{\vec{k},\lambda}^2 \right) = \sum_{\vec{k},\lambda} \hat{H}_{\vec{k},\lambda}$ , reescribimos el hamiltoniano:

$$H = \sum_{\vec{k},\lambda} \omega_k \left( \hat{N}_{\vec{k},\lambda} - \frac{1}{2} \right)$$

Donde recordamos  $[\hat{a}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'}$  y también  $[\hat{a}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}_{\vec{k},\lambda}] = [\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger, \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger] = 0$ .

Entonces los autoestados de  $\hat{N}_{\vec{k},\lambda}$  y  $\hat{H}_{\vec{k},\lambda}$  son iguales con una diferencia en los autovalores de un término constante. A partir del autoestado vacío  $|0\rangle_{\vec{k},\lambda}$  podemos construir con los operadores  $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger$  los diferentes autoestados, de forma que el estado n-ésimo:

$$|n\rangle_{\vec{k},\lambda} = \frac{(\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger)^{n_{\vec{k},\lambda}}}{\sqrt{n_{\vec{k},\lambda}!}} |0\rangle_{\vec{k},\lambda}$$

Es decir, una excitación del estado  $\vec{k}, \lambda$  me hace pasar del estado n-ésimo al (n+1)-ésimo.  $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger$  aumenta energías y  $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}$  las disminuye. El fotón es un cuanto de excitación del campo EM cuantizado, con momento  $\vec{k}$  y polarización  $\lambda$  (y por tanto de energía  $\omega_k = |\vec{k}|$ ), es una excitación elemental del sistema.

$|n_{\vec{k}_1,\lambda_1}, n_{\vec{k}_2,\lambda_2}, n_{\vec{k}_3,\lambda_3}, \dots\rangle$  son los autoestados del Hamiltoniano, que podemos escribir como:

$$|n_{\vec{k}_1,\lambda_1}, n_{\vec{k}_2,\lambda_2}, n_{\vec{k}_3,\lambda_3}, \dots\rangle = \prod_i \frac{(\hat{a}_{\vec{k}_i,\lambda_i}^\dagger)^{n_{\vec{k}_i,\lambda_i}}}{\sqrt{n_{\vec{k}_i,\lambda_i}!}} |0\rangle$$

Y que constituye la base de números de ocupación del espacio de Hilbert del sistema. Donde  $|0\rangle = |0\rangle_{\vec{k}_1,\lambda_1} \otimes |0\rangle_{\vec{k}_2,\lambda_2} \otimes |0\rangle_{\vec{k}_3,\lambda_3} \otimes \dots$ , el número total de fotones  $\hat{N} = \sum_{\vec{k},\lambda} \hat{N}_{\vec{k},\lambda}$  y el espacio de estados total  $\varepsilon = \prod_{\vec{k},\lambda} \varepsilon_{\vec{k},\lambda}$ .

Pongamos que sabemos el número de fotones para un valor dado de momento  $\vec{k}$  y polarización  $\lambda$ :  $|n_{\vec{k}_1,\lambda_1}, n_{\vec{k}_2,\lambda_2}, n_{\vec{k}_3,\lambda_3}, \dots\rangle$  entonces excitamos o desexcitamos haciendo:

$$\hat{a}_{\vec{k}_i,\lambda_i}^\dagger |n_{\vec{k}_1,\lambda_1}, n_{\vec{k}_2,\lambda_2}, \dots, n_{\vec{k}_i,\lambda_i}, \dots\rangle = \sqrt{n_{\vec{k}_i,\lambda_i} + 1} |n_{\vec{k}_1,\lambda_1}, n_{\vec{k}_2,\lambda_2}, \dots, n_{\vec{k}_i,\lambda_i} + 1, \dots\rangle$$

$$\hat{a}_{\vec{k}_i, \lambda_i} |n_{\vec{k}_1, \lambda_1}, n_{\vec{k}_2, \lambda_2}, \dots, n_{\vec{k}_i, \lambda_i}, \dots\rangle = \sqrt{n_{\vec{k}_i, \lambda_i}} |n_{\vec{k}_1, \lambda_1}, n_{\vec{k}_2, \lambda_2}, \dots, n_{\vec{k}_i, \lambda_i} - 1, \dots\rangle \quad \forall n_{\vec{k}_i, \lambda_i} \neq 0$$

Siendo para  $n_{\vec{k}_i, \lambda_i} = 0 \rightarrow \hat{a}_{\vec{k}_i, \lambda_i} |n_{\vec{k}_1, \lambda_1}, n_{\vec{k}_2, \lambda_2}, \dots, n_{\vec{k}_i, \lambda_i} = 0, \dots\rangle = 0$ . Evidentemente es el estado de menor energía el estado con 0 fotones  $|0\rangle$ , que llamamos fundamental, estado de vacío o vacuum state.

La base de número de ocupación se puede normalizar:

$$\langle n_{\vec{k}_1, \lambda_1}, n_{\vec{k}_2, \lambda_2}, \dots | n_{\vec{k}_1, \lambda_1}, n_{\vec{k}_2, \lambda_2}, \dots \rangle = \delta_{n_{\vec{k}_1, \lambda_1}, n_{\vec{k}_1, \lambda_1}} \delta_{n_{\vec{k}_2, \lambda_2}, n_{\vec{k}_2, \lambda_2}} \dots$$

Los autoestados de  $\hat{N}_{\vec{k}_i, \lambda_i}$  se escriben:

$$\hat{N}_{\vec{k}_i, \lambda_i} |n_{\vec{k}_1, \lambda_1}, n_{\vec{k}_2, \lambda_2}, \dots, n_{\vec{k}_i, \lambda_i}, \dots\rangle = n_{\vec{k}_i, \lambda_i} |n_{\vec{k}_1, \lambda_1}, n_{\vec{k}_2, \lambda_2}, \dots, n_{\vec{k}_i, \lambda_i}, \dots\rangle$$

Con lo que sea  $\hat{N} = \sum_i \hat{N}_{\vec{k}_i, \lambda_i}$ :

$$\hat{N} |n_{\vec{k}_1, \lambda_1}, n_{\vec{k}_2, \lambda_2}, \dots\rangle = \left( \sum_i n_{\vec{k}_i, \lambda_i} \right) |n_{\vec{k}_1, \lambda_1}, n_{\vec{k}_2, \lambda_2}, \dots\rangle$$

Donde identificamos  $N = \sum_i n_{\vec{k}_i, \lambda_i}$ , que puede divergir, pero en la práctica será una suma finita.

$$\hat{H} |n_{\vec{k}_1, \lambda_1}, n_{\vec{k}_2, \lambda_2}, \dots\rangle = \left( \sum_i \omega_{\vec{k}_i, \lambda_i} (n_{\vec{k}_i, \lambda_i} + \frac{1}{2}) \right) |n_{\vec{k}_1, \lambda_1}, n_{\vec{k}_2, \lambda_2}, \dots\rangle$$

Pero surge un problema, ya que  $\hat{H} |0\rangle = E_0 |0\rangle$  con  $E_0 = \frac{1}{2} \sum_i \omega_{\vec{k}_i, \lambda_i} \rightarrow \infty$ , ya que la suma en  $i$  de las frecuencias  $\omega$  diverge. Esto se arregla introduciendo un nuevo Hamiltoniano  $\hat{H}' = \hat{H} - E_0$  que es nuestro antiguo hamiltoniano al que restamos la energía del vacío, de forma que ahora  $\hat{H}' |0\rangle = 0 |0\rangle = 0$ .

Estados coherentes.

Defino  $|\vec{E}(\vec{x}, t)\rangle$  tal que  $\langle \vec{E}(\vec{x}, t) | \hat{\vec{E}}(\vec{x}, t) | \vec{E}(\vec{x}, t) \rangle = \vec{E}(\vec{x}, t)$ .

¿Cuándo podemos utilizar la teoría clásica del campo EM en lugar de la cuántica? La respuesta es cuando los operadores conmutan, entonces son funciones y empleamos la teoría clásica. Dado que de la cuántica sabemos  $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$  (en unidades ordinarias) podemos tomar como límite de aproximación clásica cuando  $\hbar \rightarrow 0$ .

Pongamos tenemos  $|n_{\vec{k}, \lambda}\rangle$ , de forma que  $\langle n_{\vec{k}, \lambda} | \hat{N}_{\vec{k}, \lambda} | n_{\vec{k}, \lambda} \rangle = n_{\vec{k}, \lambda}$ , o de una forma más enredada:

$$\begin{aligned} \langle n_{\vec{k}, \lambda} | \hat{N}_{\vec{k}, \lambda} | n_{\vec{k}, \lambda} \rangle &= \langle n_{\vec{k}, \lambda} | \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}, \lambda} | n_{\vec{k}, \lambda} \rangle = \langle n_{\vec{k}, \lambda} | [\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}] | n_{\vec{k}, \lambda} \rangle + \langle n_{\vec{k}, \lambda} | \hat{a}_{\vec{k}, \lambda} \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^\dagger | n_{\vec{k}, \lambda} \rangle = \\ &= \langle n_{\vec{k}, \lambda} | -1 + \sqrt{\hat{n}_{\vec{k}, \lambda} + 1} \sqrt{\hat{n}_{\vec{k}, \lambda} + 1} | n_{\vec{k}, \lambda} \rangle = \langle n_{\vec{k}, \lambda} | -1 + \hat{n}_{\vec{k}, \lambda} + 1 | n_{\vec{k}, \lambda} \rangle \end{aligned}$$

En la aproximación clásica  $\hbar \rightarrow 0$  el  $-1$ , que viene del conmutador lo cambiamos por un cero. Por ello, en resumen:

$$\begin{array}{ll} \text{Cuántico} & \langle n_{\vec{k},\lambda} | \hat{N}_{\vec{k},\lambda} | n_{\vec{k},\lambda} \rangle = \langle n_{\vec{k},\lambda} | \hat{n}_{\vec{k},\lambda} | n_{\vec{k},\lambda} \rangle \\ \text{lim. Clásico} & \langle n_{\vec{k},\lambda} | \hat{N}_{\vec{k},\lambda} | n_{\vec{k},\lambda} \rangle = \langle n_{\vec{k},\lambda} | \hat{n}_{\vec{k},\lambda} + 1 | n_{\vec{k},\lambda} \rangle \end{array}$$

Que coinciden cuando  $n_{\vec{k},\lambda} \approx n_{\vec{k},\lambda} + 1$ , es decir, cuando  $n_{\vec{k},\lambda}$  es muy grande. Por tanto, la electrodinámica clásica nos sirve cuando el fenómeno tiene muchos fotones (configuraciones con número muy grande de fotones)

### 3.4 Emisión y absorción de fotones en átomos

Supongamos podemos escribir el hamiltoniano atómico como una suma de términos cinéticos  $T$  y resto de interacciones  $W$ , de forma que  $\hat{H}_{at} = \hat{T} + \hat{W}$  con  $\hat{T} = \sum_{i=1}^Z \frac{\hat{P}_i^2}{2m_e}$ . Supongamos además que podemos resolver el Hamiltoniano  $\hat{H}_{at}$  con autoestados  $|E_n, \alpha\rangle$ , de forma que  $\hat{H}_{at} |E_n, \alpha\rangle = E_n |E_n, \alpha\rangle$ , hacemos ahora un cambio de notación  $|E_n, \alpha\rangle = |\varepsilon_{n,\alpha}\rangle$ . Como estos estados son autoestados del hamiltoniano son estacionarios (de energía bien definida) y su evolución es:

$$|\varepsilon_{n,\alpha}(t)\rangle = e^{-iE_n t} |\varepsilon_{n,\alpha}\rangle \quad \text{con} \quad |\varepsilon_{n,\alpha}\rangle = |\varepsilon_{n,\alpha}(t=0)\rangle$$

Y  $\{|\varepsilon_{n,\alpha}\rangle\}$  forma una base de  $\varepsilon_{at}$ .  $|\varepsilon_0\rangle$  es el estado fundamental, de forma que  $\hat{H}_{at} |E_0\rangle = E_0 |E_0\rangle$  con  $E_0 \leq E_n \quad \forall n$ .

Sabemos que los  $|\varepsilon_{n,\alpha}\rangle$  son estacionarios pero también sabemos que emitiendo/absorbiendo fotones cambian. Un átomo no está solo sino que se encuentra acoplado con el sistema de campos EM.

El hamiltoniano  $\hat{H}_{rad} = \sum_{\vec{k},\lambda} \omega_k (\hat{N}_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2})$  tiene autoestados que pertenecen al espacio  $\varepsilon_{rad}$  con base  $\{|n_{\vec{k}_1,\lambda_1}, n_{\vec{k}_2,\lambda_2}, \dots\rangle\}$

Con la transformación  $\hat{P} \rightarrow \hat{P} - q\hat{A}$  el término cinético queda  $\hat{T} = \sum_{i=1}^Z \frac{1}{2m_e} (\hat{P}_i - q\hat{A})^2$  y entonces el Hamiltoniano total  $\hat{H} = \hat{H}_{at} + \hat{H}_{it} + \hat{H}_{rad}$  y el espacio de estados de este Hamiltoniano es  $\varepsilon = \varepsilon_{at} \otimes \varepsilon_{rad}$ . Por tanto, el espacio donde se producen los fenómenos del átomo no es  $\varepsilon_{at}$  sino  $\varepsilon_{at} \otimes \varepsilon_{rad}$ .

Hay un problema (ambigüedad) que surge al elevar  $(\hat{P}_i - q\hat{A})$  al cuadrado y que debemos resolver primero.

$$[\hat{\vec{P}}, \hat{\vec{A}}] \sim [\hat{\vec{\nabla}}, \hat{\vec{A}}] \quad ; \quad [\hat{\vec{\nabla}}, \hat{\vec{A}}]\Psi = \hat{\vec{\nabla}}(\hat{\vec{A}}\Psi) - \hat{\vec{A}}(\hat{\vec{\nabla}}\Psi) = \hat{\vec{\nabla}}\hat{\vec{A}}\Psi + \cancel{\hat{\vec{A}}\hat{\vec{\nabla}}\Psi} - \cancel{\hat{\vec{A}}\hat{\vec{\nabla}}\Psi} = 0$$

Ya que nuestra condición de fijación de Gauge era  $\hat{\vec{\nabla}}\hat{\vec{A}} = 0$ . Luego  $\hat{\vec{\nabla}}\hat{\vec{P}}$  y  $\hat{\vec{\nabla}}\hat{\vec{A}}$  conmutan y por ello no hay ambigüedad al elevar al cuadrado.



Por todo ello:

$$\hat{H}_{int} = \sum_{i=1}^Z \frac{e}{m_e} \hat{P}_i \vec{A}(\vec{x}_i, t) + \sum_{i=1}^Z \frac{e^2}{2m_e} \hat{A}(\vec{x}_i, t) \hat{A}(\vec{x}_i, t)$$

donde de ahora en adelante despreciaremos el segundo término para el nivel de nuestros cálculos.

Volviendo al espacio de estados  $\varepsilon = \varepsilon_{at} \otimes \varepsilon_{rad}$ , la base de este espacio será  $|\varepsilon_{n,\alpha}\rangle \otimes |n_{\vec{k}_1, \lambda_1}, n_{\vec{k}_2, \lambda_2}, \dots\rangle$ . Esta base son autoestados de  $\hat{H}_{at} + \hat{H}_{rad}$  pero no de  $\hat{H}_{int}$ , salvo uno de ellos, el  $|\varepsilon_0\rangle \otimes |n_{\vec{k}_1, \lambda_1}, n_{\vec{k}_2, \lambda_2}, \dots\rangle$ .

### 3.4.1 Absorción de un fotón.

Pongamos estamos en el átomo de hidrógeno, y llamemos  $|i\rangle = |A\rangle \otimes |n_{\vec{k}, \lambda}\rangle = |A, n_{\vec{k}, \lambda}\rangle$  y el estado final  $|f\rangle = |B\rangle \otimes |n_{\vec{k}, \lambda} - 1\rangle = |B, n_{\vec{k}, \lambda} - 1\rangle$ . Nuestro hamiltoniano lo escribimos  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}$  con  $\hat{H}_0 = \hat{H}_{at} + \hat{H}_{rad}$  y  $\hat{H}_{int} = \sum_{i=1}^Z \frac{e}{m_e} \hat{P}_i \vec{A}(\vec{x}_i, t)$ . Los estados inicial y final  $|i\rangle, |f\rangle$  son autoestados de  $\hat{H}_0$ .

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{H}_{int} | i \rangle &= \frac{e}{m_e} \langle B, n_{\vec{k}, \lambda} - 1 | \hat{P}_i \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_k}} \epsilon_{\vec{\lambda}} \hat{a}_{\vec{k}', \lambda'} e^{-ik'x} | A, n_{\vec{k}, \lambda} \rangle = \\ &= \frac{e}{m_e \sqrt{V}} \langle B, n_{\vec{k}, \lambda} - 1 | \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \hat{P}_i \sum_{\vec{k}, \lambda} \epsilon_{\vec{\lambda}} \hat{a}_{\vec{k}', \lambda'} e^{-ik'x} | A, n_{\vec{k}, \lambda} \rangle = \\ &= \frac{e}{m_e} \sqrt{\frac{n_{\vec{k}, \lambda}}{2\omega_k V}} \langle B | e^{ikx} \hat{\vec{P}} \cdot \epsilon_{\vec{\lambda}} | A \rangle e^{-i\omega_k t} \end{aligned}$$

En la aproximación clásica el campo EM tratado clásicamente da una expresión para  $\vec{A}$  en forma de onda plana  $\vec{A} = \vec{A}_0 e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$ . Para que el tratamiento cuántico y clásico casen se ha de verificar

$$\vec{A}_0 = \sqrt{\frac{n_{\vec{k}, \lambda}}{1\omega_k V}} \epsilon_{\vec{\lambda}} = \vec{A}_0^{abs}$$

### 3.4.2 Emisión de un fotón.

Procedemos de manera análoga, ahora para  $|i\rangle = |A\rangle \otimes |n_{\vec{k}, \lambda}\rangle = |A, n_{\vec{k}, \lambda}\rangle$  y el estado final  $|f\rangle = |B\rangle \otimes |n_{\vec{k}, \lambda} + 1\rangle = |B, n_{\vec{k}, \lambda} + 1\rangle$  de forma que el resultado es:

$$\langle f | \hat{H}_{int} | i \rangle = \frac{e}{m_e} \sqrt{\frac{n_{\vec{k}, \lambda} + 1}{2\omega_k V}} \langle B | e^{-ikx} \hat{\vec{P}} \cdot \epsilon_{\vec{\lambda}}^* | A \rangle e^{i\omega_k t}$$

Y de igual manera, para que case con la aproximación semi-clásica:

$$\vec{A}_0 = \sqrt{\frac{n_{\vec{k}, \lambda} + 1}{2\omega_k V}} \epsilon_{\vec{\lambda}}^* = \vec{A}_0^{emi}$$

Con una onda plana  $\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \vec{A}_0^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$  sería  $\vec{A}_0^{emi} = \left(\vec{A}_0^{abs}\right)^*$  que NO es verdad. La teoría semi-clásica no explica la emisión espontánea. La emisión y absorción inducida ocurre cuando  $n_{\vec{k},\lambda}$  es muy grande, mientras que la emisión espontánea ocurre si  $n_{\vec{k},\lambda} = 0$ .

El campo total debe ser suma de ambos,  $\vec{A} = \vec{A}_0^{emi} + \vec{A}_0^{abs}$ , lo que ocurre cuando  $n_{\vec{k},\lambda} \rightarrow \infty$ . Sin embargo cuando  $n_{\vec{k},\lambda} = 0$  existe un caso crítico:

$$\vec{A}_{emi} = \sqrt{\frac{1}{2\omega_k V}} \bar{\epsilon}_{\lambda}^* e^{ikx}$$

$$\vec{A}_{abs} = \sqrt{\frac{n_{\vec{k},\lambda}}{2\omega_k V}} \bar{\epsilon}_{\lambda} e^{-ikx}$$

Como decíamos esto es la emisión espontánea y no se explica con la teoría semi-clásica.

### 3.5 Teoría de perturbaciones dependientes del tiempo.

Descomponemos nuestro hamiltoniano  $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}'(t)$  con  $\hat{H}_0$  que sabemos resolver y  $\hat{H}'(t) = \lambda \hat{W}(t)$   $\lambda \in \mathbb{R}$  llevándose la dependencia temporal.

Como sabemos  $\hat{H}_0 |\varepsilon_n\rangle = E_n |\varepsilon_n\rangle$ , y ponemos como condiciones iniciales que en  $t = 0$ , el instante inicial, nuestro estado inicial es  $|\varepsilon_i\rangle$  que es autoestado de  $\hat{H}_0$  con autovalor  $E_i$ . Pasado un tiempo ¿Cual es la probabilidad de encontrar el estado final en tiempo  $t$  en  $|\varepsilon_f\rangle$ , con  $\hat{H}_0 |\varepsilon_f\rangle = E_f |\varepsilon_f\rangle$ ? Llamemos  $|\psi(t)\rangle$  el estado del sistema en  $t$ :

$$P_{if}(t) = |\langle \varepsilon_f | \psi(t) \rangle|^2 \quad ; \quad i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad \text{con} \quad |\psi(t=0)\rangle = |\varepsilon_i\rangle$$

Resolviendo la ec.Schrödinger:  $i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = (\hat{H}_0 + \lambda \hat{H}') |\psi(t)\rangle$ . Desarrollamos  $|\psi(t)\rangle$  en base de autoestado de  $\hat{H}_0$  de forma que  $|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\varepsilon_n\rangle$ , con  $c_n = \langle \varepsilon_n | \psi(t) \rangle$  por construcción.

Introducimos  $\omega_{nk}(t) = \langle \varepsilon_n | \hat{W}(t) | \varepsilon_k \rangle$  y suponemos que la base de autoestados de  $\hat{H}_0$  es ortonormal y forman una base, ( $\langle \varepsilon_n | \varepsilon_k \rangle = \delta_{nk}$  y  $\sum_n |\varepsilon_n\rangle \langle \varepsilon_n| = 1$ ). Reescribimos ahora la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} c_n(t) = E_n c_n(t) + \lambda \sum_k \omega_{nk}(t) c_k(t)$$

(Que si tomamos  $\hat{W} = 0$ , entonces en aproximación de orden 0:  $c_n(t) = b_n e^{-iE_n t}$  con  $b_n = c_n(t=0)$ )

Como suponemos que la perturbación es pequeña,  $\lambda \ll 1$  entonces  $c_n(t) = b_n(t) e^{-iE_n t}$  donde  $b_n(t)$  varía poco con el tiempo. En función de  $b_n(t)$ , introduciéndola en ec. Schrödinger

$$ie^{-iE_n t} \dot{b}_n + E_n b_n e^{-iE_n t} = E_n b_n e^{-iE_n t} + \lambda \sum_k \omega_{nk}(t) b_k e^{-iE_k t}$$

que multiplicando por  $\cdot e^{iE_n t}$

$$i\dot{b}_n(t) + \cancel{E_n b_n} = \cancel{E_n b_n} + \lambda \sum_k \omega_{nk}(t) b_k e^{i\omega_{nk} t} \quad \text{con } \omega_{nk} = E_n - E_k$$

$$i\dot{b}_n(t) = \lambda \sum_k \omega_{nk}(t) b_k e^{i\omega_{nk} t}$$

Suponemos  $b_n(t) = b_n^{(0)}(t) + \lambda b_n^{(1)}(t) + \lambda^2 b_n^{(2)}(t) + \dots$  y si  $|\psi(0)\rangle = |\varepsilon_i\rangle$  entonces  $b_n^{(0)}(t) = \delta_{ni}$

$$i\dot{b}_n^{(1)}(t) = \sum_k e^{i\omega_{nk} t} W_{nk} = e^{i\omega_{ni} t} W_{ni}(t) \rightarrow b_n^{(1)}(t) = \frac{1}{i} \int_0^t dt' e^{i\omega_{nk} t'} W_{ni}(t')$$

$$P_{if}(t) = |\langle \varepsilon_f | \psi(t) \rangle|^2 = |c_f|^2 = |b_f(t)|^2 \approx \lambda^2 |b_f^{(1)}(t)|^2$$

con  $b_f^{(1)}(t) = \frac{1}{i} \int_0^t dt' e^{i\omega_{fi} t'} W_{fi}(t')$  finalmente:

$$P_{if}(t) = \left| \int_0^t dt' e^{i\omega_{fi} t'} \langle \varepsilon_f | \hat{W} | \varepsilon_i \rangle \right|^2$$

Que es el resultado en aproximación de teoría de perturbaciones a orden más bajo. Aproximación de Born.

Típicamente la descomposición del hamiltoniano será  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'(t)$  con  $\hat{H}_0$  controlado y el otro término siendo de interacción, de la forma  $\hat{H}' = \hat{H}_{int} = \hat{H}'_{int} e^{\pm i\omega t}$ , donde el signo más corresponde a una emisión y el menos a una absorción. Volviendo a la aproximación de Born para este Hamiltoniano de interacción:

$$\begin{aligned} P_{if}(t) &= \left| \int_0^t dt' e^{i\omega_{fi} t'} \langle \varepsilon_f | \hat{H}'_{int} e^{\pm i\omega t'} | \varepsilon_i \rangle \right|^2 = |\langle \varepsilon_f | \hat{H}'_{int} | \varepsilon_i \rangle|^2 \int_0^t dt' e^{i(\omega_{fi} \pm \omega) t'}|^2 = \\ &= \left| \frac{\langle \varepsilon_f | \hat{H}'_{int} | \varepsilon_i \rangle}{(\omega_{fi} \pm \omega)} (e^{i(\omega_{fi} \pm \omega)t} - 1) \right|^2 = \frac{|\langle \varepsilon_f | \hat{H}'_{int} | \varepsilon_i \rangle|^2}{(\omega_{fi} \pm \omega)^2} 2(1 - \cos((\omega_{fi} \pm \omega)t)) \end{aligned}$$

Y utilizando  $1 - \cos(y) = 2 \sin^2(\frac{y}{2})$  y que  $\delta_x = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2(\alpha x)}{\alpha x^2}$ , en el límite  $t \gg \omega_{fi}^{-1}$ ,  $\omega^{-1}$ :

$$P_{if}(t) = 2\pi |\langle \varepsilon_f | \hat{H}'_{int} | \varepsilon_i \rangle|^2 t \delta(E_f - E_i \pm \omega)$$

Que es la probabilidad de encontrar el sistema en  $|f\rangle$  en el instante  $t$  estando inicialmente el sistema en  $|i\rangle$ . La probabilidad de transición por unidad de tiempo es:

$$\omega_{if}(t) = 2\pi |\langle \varepsilon_f | \hat{H}'_{int} | \varepsilon_i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i \pm \omega)$$

Que también se le llama ritmo de transición.

### 3.6 Emisión espontánea

Pongamos tenemos un sistema que inicialmente se encuentra en  $|A\rangle$  sin fotones, pudiendo estar A excitado, y que llega a un estado final  $|B, \vec{k}\lambda\rangle$  con un fotón de momento  $\vec{k}$  y polarización  $\lambda$ .

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{V}{(2\pi)^3} \omega^2 d\Omega \rightarrow d\omega_{if}(t) = 2\pi |\langle \varepsilon_f | \hat{H}'_{int} | \varepsilon_i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i \pm \omega) \frac{V}{(2\pi)^3} \omega^2 d\omega d\Omega$$

con  $\hat{H}'_{int} = \frac{e}{m} \hat{\vec{P}} \cdot \hat{\vec{A}} = \hat{H}'_{int} e^{-i\omega t}$  y  $\hat{\vec{A}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \vec{\epsilon}_\lambda^* e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{x})}$  integrando en las frecuencias  $d\omega$ :

$$d\omega_{if}(t) = 2\pi \frac{e^2}{m^2} \frac{1}{2\omega_k V} |\langle B | e^{-i\vec{k}\vec{x}} \hat{\vec{P}} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda^* | A \rangle|^2 \frac{V}{(2\pi)^2} \omega^2 d\Omega = \frac{e^2 \omega}{8\pi^2 m^2} |\langle B | e^{-i\vec{k}\vec{x}} \hat{\vec{P}} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda^* | A \rangle|^2 d\Omega$$

Por suerte en física atómica la longitud de onda del fotón emitido es del orden  $\lambda_A \sim 10^3 \text{Å}$  y el tamaño típico del átomo es de  $d_A \sim \text{Å}$ , entonces  $\lambda_A = 1/\omega \gg d_A$ , podemos aproximar  $|x| \approx d_A$  y  $k \approx \lambda_A$  y esto permite aproximar la exponencial en sus primeros términos del desarrollo en serie:  $e^{-i\vec{k}\vec{x}} \approx 1 - i\vec{k}\vec{x} + \dots$

$$d\omega_{if} = \frac{e^2 \omega}{8\pi^2 m^2} |\langle B | \hat{\vec{P}} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda^* | A \rangle|^2 d\Omega$$

Que llamamos la aproximación dipolar, y es válida siempre que  $\hat{\vec{P}} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda^* \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \langle B | \hat{\vec{P}} | A \rangle &= im_e \langle B | [\hat{H}_{at}, \hat{\vec{X}}] | A \rangle = im_e \langle B | \hat{H}_{at} \hat{\vec{X}} - \hat{\vec{X}} \hat{H}_{at} | A \rangle = \\ &= im_e \langle B | \hat{H}_{at} \hat{\vec{X}} - \hat{\vec{X}} \hat{H}_{at} | A \rangle = im_e (E_B - E_A) \langle B | \hat{\vec{X}} | A \rangle = im_e \omega \langle B | \hat{\vec{X}} | A \rangle \end{aligned}$$

Donde se ha utilizado  $[\hat{H}_{at}, \hat{\vec{X}}] = -i \frac{\hat{\vec{P}}}{m_e}$  En la aproximación dipolar  $\hat{H}_{int} = \frac{e}{m_e} \hat{\vec{P}} \cdot \hat{\vec{A}} \rightarrow -e\vec{x} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ , con  $\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i\omega t}$  tal que  $\dot{\vec{A}} = \vec{A} i\omega$ . Escribimos  $-e\vec{x} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = e\vec{x} \cdot \vec{E} = -q\vec{x} \cdot \vec{E} = -\vec{D} \cdot \vec{E}$  donde llamamos a  $\vec{D} = -q\vec{x}$  el momento dipolar eléctrico del electrón. Trabajar en la aproximación dipolar es  $\hat{H}_{int} = -\vec{D} \cdot \vec{E}$ .

Utilizando la ecuación de la aproximación dipolar anterior, vamos a calcular el tiempo de vida media de un electrón en un estado, en el caso más simple. Veamos la transición  $2p \rightarrow 1s \gamma$  en el átomo de Hidrógeno.

### 3.7 Transición $2p \rightarrow 1s$ $\gamma$ en el átomo de Hidrógeno.

Supongamos partimos del estado  $|A\rangle = |2p\rangle$  y el estado final es  $|B\rangle = |1s, \gamma\rangle$ . En representación de posiciones los autoestados del Hamiltoniano de Hidrógeno se denotan  $\psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_m^l(\theta, \phi)$ . Recordamos la constante de estructura fina  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi} \text{ (unid. naturales)}$$

Y las energías, autovalores del Hamiltoniano dependen del número cuántico principal  $n$  de la forma:

$$E_n = -\frac{m_e\alpha^2}{2n^2}$$

Nuestro estado inicial y final se reescriben ahora como:  $\psi_{21m}(\vec{r}) = R_{21}(r)Y_m^1(\theta, \phi)$  y  $\psi_{100}(\vec{r}) = R_{10}(r)Y_0^0(\theta, \phi)$  respectivamente, donde:

$$R_{21}(r) = \frac{1}{a_0^{5/2}} \frac{1}{2\sqrt{6}} r e^{-\frac{r}{2a_0}} \quad ; \quad R_{10}(r) = \frac{1}{a_0^{3/2}} e^{-\frac{r}{a_0}} \quad ; \quad Y_0^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_m^1(\theta, \phi) = \begin{cases} m = +1 & -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi} \\ m = 0 & \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \\ m = -1 & \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\phi} \end{cases}$$

Donde hemos llamado  $a_0 = \frac{1}{m_e\alpha}$  al radio de Bohr, que nos da una idea del tamaño típico del átomo, del espacio donde las función de onda son apreciables. Entonces:

$$|\langle 1s | \hat{P} | 2p \rangle \bar{\epsilon}_\lambda^*|^2 = \left| \int d\vec{r} \psi_{100}^* \vec{\nabla} \psi_{21m} \bar{\epsilon}_\lambda^* \right|^2$$

Que integramos por partes pues es más sencillo hacer  $\vec{\nabla} \psi_{100}$  que  $\vec{\nabla} \psi_{21m}$ , y simplificando:

$$|\langle 1s | \hat{P} | 2p \rangle \bar{\epsilon}_\lambda^*|^2 = \left| \int d\vec{r} \psi_{100}^* \vec{\nabla} \psi_{21m} \bar{\epsilon}_\lambda^* \right|^2 = \left| \int d\vec{r} \vec{\nabla}(\psi_{100}^*) \psi_{21m} \bar{\epsilon}_\lambda^* \right|^2$$

Donde  $\vec{\nabla}(\psi_{100}^*) = Y_0^0 \vec{\nabla} R_{10} = Y_0^0 \left( -R_{10} \frac{\vec{r}}{ra_0} \right) = Y_0^0 R_{10} \frac{R_{10}}{a_0} \vec{u}_r$ , donde ahora introducimos coordenadas esféricas  $X_M = r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_M^1$  y entonces  $Y_M^1 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} X_M$ , y con relaciones entre coordenadas cartesianas y esféricas:

$$X_{\pm 1} = \frac{x \pm iy}{\sqrt{2}} \quad ; \quad X_0 = z$$

O, de forma más compacta  $X_M = \sum_j U_{Mj} x_j$ , con matriz  $U_{Mj}$  unitaria  $U^{-1} = U^\dagger$ , y por tanto  $x_j = \sum_j U_{jM}^\dagger X_M = \sum_j U_{Mj}^* X_M$  y escrita:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Y_M^1 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_j U_{Mj} x_j$$

Con todo lo anterior, volviendo al problema:

$$\begin{aligned}
|\langle 1s | \hat{P} | 2p \rangle \bar{\epsilon}_\lambda^*|^2 &= \left| \int d\vec{r} \psi_{100}^* \vec{\nabla} \psi_{21m} \bar{\epsilon}_\lambda^* \right|^2 = \left| \int d\vec{r} \vec{\nabla} (\psi_{100}^*) \psi_{21m} \bar{\epsilon}_\lambda^* \right|^2 = \\
&= \frac{1}{2(4\pi)a_0^{10}} \left| \int d\vec{x} e^{-\frac{r}{a_0}} \frac{\vec{r}}{r} \frac{1}{r} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} r e^{-\frac{r}{2a_0}} \sum_j U_{mj} x_j \bar{\epsilon}_\lambda^* \right|^2 = \frac{1}{2(4\pi)a_0^{10}} \left| \sum_{ji} U_{mj} \int d\Omega dr r^2 e^{-\frac{3r}{2a_0}} r \frac{x_i x_j}{r^2} \bar{\epsilon}_\lambda^* \right|^2
\end{aligned}$$

Donde, sea  $I_{ij} = \int d\Omega dr r x_i x_j e^{-\frac{3r}{2a_0}} = \frac{128}{81} a_0^4 \delta_{ij}$  entonces:

$$|\langle 1s | \hat{P} | 2p \rangle \bar{\epsilon}_\lambda^*|^2 = \frac{2^9}{3^8 a_0^2} \left| \sum_j U_{mj} \epsilon_\lambda^{*j} \right|^2$$

Como no conocemos el  $m$  desde el que se produce la transición promediamos para los  $m$  posibles:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_j U_{mj} \epsilon_\lambda^{*j} \right|^2 &\rightarrow \frac{1}{3} \sum_m \left| \sum_j U_{mj} \epsilon_\lambda^{*j} \right|^2 = \frac{1}{3} \sum_{jim} U_{mj} U_{mi}^* \epsilon_\lambda^{*j} \epsilon_\lambda^i = \\
&= \frac{1}{3} \sum_{ijm} (U_{jm}^\dagger)^* U_{mi}^* \epsilon_\lambda^{*j} \epsilon_\lambda^i = \frac{1}{3} \sum_{ijm} (U_{jm}^{-1})^* U_{mi}^* \epsilon_\lambda^{*j} \epsilon_\lambda^i = \frac{1}{3} \sum_{ij} \delta_{ij} \epsilon_\lambda^{*j} \epsilon_\lambda^i = \\
&= \frac{1}{3} \sum_i \epsilon_\lambda^{*i} \epsilon_\lambda^i = \frac{1}{3} \epsilon_\lambda^* \epsilon_\lambda = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Luego, lo que hemos calculado ahora realmente es:

$$|\langle 1s | \hat{P} | 2p \rangle \bar{\epsilon}_\lambda^*|^2 \rightarrow \frac{1}{3} \sum_m |\langle 1s | \hat{P} | 2pm \rangle \bar{\epsilon}_\lambda^*|^2 = \left( \frac{2}{3} \right)^9 m_e \alpha^2$$

entonces

$$d\omega = \frac{e^2 \omega}{8\pi^2 m_e^2} \left( \frac{1}{3} \sum_m |\langle 1s | \hat{P} | 2pm \rangle \bar{\epsilon}_\lambda^*|^2 \right) d\Omega$$

que integrando:

$$\omega = \int d\Omega \sum_\lambda \frac{d\omega}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega}{2\pi m_e} 2 \left( \frac{2}{3} \right)^9 m_e^2 \alpha^2$$

Donde el 2 extra viene de que existen dos polarizaciones de los fotones  $\gamma$ .

$$E_n = -\frac{m_e \alpha^2}{2n^2} \rightarrow \omega = E_2 - E_1 = \frac{m_e \alpha^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8} m_e \alpha^2$$

Y la probabilidad de transición por unidad de tiempo es:  $W = \left( \frac{2}{3} \right)^8 m_e \alpha^5$ , donde  $\alpha \approx 1/137$  entonces  $W \approx 6,2 \cdot 10^8 s^{-1}$  que también se llama a veces anchura. Podemos definir a partir de esto una cantidad  $\tau = \frac{\hbar}{T} = \frac{1}{T}$  (el último en unidades naturales),  $\tau \approx 1,59 \cdot 10^{-9} s$  vida media (experimentalmente este valor es de  $1,6 \cdot 10^9 s$ ).

¿Por qué le llamamos vida media? Sea  $N_0$  el número de átomos de Hidrógeno en estado  $2p$ , llamemos  $N(t)$  al número de átomos que siguen en  $2p$  en un instante  $t$ , de forma que la condición inicial es  $N(t=0) = N_0$ .

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = -T \rightarrow \frac{dN}{dt} = -TN$$

Integrando esta ecuación diferencial, junto con la condición inicial anterior, la solución es una exponencial:

$$N(t) = N_0 e^{-Tt} = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

De donde vemos que  $\tau$  es un factor que nos da la escala temporal en la exponencial, tiene una definición de naturaleza estadística, para una población de átomos muy grande.

### 3.8 Distribución de Planck.

Tengo un sistema donde existe un estado A y un estado B,  $\gamma$  y en el que se producen emisiones y absorciones de fotones, pasando de uno a otro,  $A \leftrightarrow B, \gamma$ . La relación de balance detallado, que tiene su origen en  $\hat{H}_{int} = \hat{H}_{int}^\dagger$ :

$$\frac{\omega_{emi}}{\omega_{abs}} = \frac{n+1}{n} = \frac{|\langle B | e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \hat{P} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda^* | A \rangle|^2}{|\langle A | e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \hat{P} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda | B \rangle|^2} \Rightarrow \text{para } n \gg 1 \quad \frac{\omega_{emi}}{\omega_{abs}} = 1$$

Lo que implica a su vez, para  $n \gg 1$   $\langle B | e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \hat{P} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda^* | A \rangle = \langle A | e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \hat{P} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda | B \rangle^*$ .

$$\frac{\omega_{emi}}{\omega_{abs}} = \frac{n+1}{n} = \frac{N(B)}{N(A)} = e^{\frac{\omega}{kT}} \rightarrow \frac{n+1-n}{n} = \frac{1}{n} = e^{\frac{\omega}{kT}} - 1$$

Que finalmente nos lleva, invirtiendo las fracciones:

$$n = \frac{1}{e^{\omega/kT} - 1} \quad \text{Einstein (1916)}$$

Veamos ahora un cuerpo negro. Fotones en una caja de volumen V. Un gas de fotones a una cierta temperatura  $T$ , de cualquier frecuencia con la condición de que haya muchos fotones de cada frecuencia ( $n_\omega \gg 1$ ).

Si tomamos los fotones de frecuencia  $\omega$ , tenemos  $\epsilon(\omega)$  que es la densidad de energía, la energía que tienen los fotones de frecuencia  $\omega$  por unidad de volumen.

$$\epsilon(\omega) d\omega = \frac{1}{V} \frac{\omega}{e^{\omega/kT} - 1} 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{\omega}{4\pi} \omega^2 d\omega =$$

Donde vemos aparece un "2" debido a que  $n$  no es el número de fotones totales que estamos considerando de frecuencia dada  $\omega$  sino que son el número de fotones de frecuencia  $\omega$  y  $\vec{k}, \lambda$  dados. Pero como  $\lambda$  puede tomar dos valores diferentes debemos multiplicar por dos.

$$= \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^4 \frac{1}{e^{\omega/kT} - 1} d\omega$$

Donde introduciendo  $\omega = 2\pi\nu$  y  $k = h/2\pi$  tenemos finalmente:

$$\epsilon(\omega) d\omega = 2\pi\nu^4 \frac{1}{e^{h\nu/k^2T} - 1} d\nu$$

Que es la que llamábamos distribución de Planck. Distribución de las frecuencias para un gas de fotones en equilibrio termodinámico con temperatura  $T$  constante.

## 4 Tema 3. Cuantización canónica covariante de un campo escalar.

Anteriormente poníamos la condición  $A^0 = \phi = 0$ , pero ya no nos vale como condición covariante porque no se cumple para todos los observadores en general. Por ello la sustituimos por  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . El formalismo debe ser covariante, igual en todos los sistemas de referencia.

### 4.1 Teoría clásica de campos relativista.

En una teoría relativista tenemos un sistema inercial  $\mathcal{R}$  y un suceso  $x \in \mathcal{M}$  en un espacio Minkowski con signos<sup>13</sup> (+—). Un elemento de volumen en el espacio  $\mathcal{M}$  lo definimos como:

$$\int d^4x = \int dx \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx^1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx^3$$

Un campo relativista es una aplicación  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ , el valor que toma un campo en un punto es un número complejo.

$$\begin{array}{llll} \phi : \mathcal{M} & \rightarrow & \mathbb{C} & \\ x & \rightarrow & \phi(x) = \phi(t, \vec{x}) & \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{llll} S : \mathcal{F} & \rightarrow & \mathbb{R} & \\ \phi & \rightarrow & S[\phi] & (funcional) \end{array}$$

Sea  $\mathcal{L}$  la densidad lagrangiana, pongamos que esta depende únicamente de los campos y sus derivadas covariantes,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ , pues hay dependencias más complicadas, pero las que estudiaremos serán de este tipo. Entonces definimos la acción en un campo:

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \int dt \int d\vec{x} \mathcal{L} = \int dt L$$

Donde hemos recordado  $L = \int d\vec{x} \mathcal{L}$ . En mecánica clásica las coordenadas generalizadas eran  $q^i$  con  $i = 1, \dots, n$  y el sistema tenía  $n$  grados de libertad, ahora para campos tenemos un grado de libertad por punto del espacio, luego tenemos  $\infty$  grados de libertad. La dinámica del campo está controlada por el funcional  $S$  y el principio de mínima acción. Veamos como es esto para campos.

Al igual que en mec. clásica el principio de mínima acción nos lleva a  $\delta S = 0$ , nuestra acción ahora es un funcional así que escribimos  $\left. \frac{\delta S}{\delta \phi} \right|_{\phi_{cl}} = 0$  donde  $\phi_{cl}$  es la trayectoria clásica.

---

<sup>13</sup>Otras referencias utilizan notación con signos (-+++).



Damos una serie de condiciones de contorno a nuestro espacio  $\Omega$  en su frontera, que denotamos  $\partial\Omega$  y representamos a continuación.

(incluir figura)

En resumen lo que quieren decir estas condiciones de contorno es que en el infinito espacial el campo y sus derivadas se anulan y que el diferencial del campo en  $t \rightarrow -\infty, \infty$  se anula,  $\delta\phi$ , es decir, el campo es constante en los infinitos temporales.

Tratemos ahora de llegar a las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$S[\phi] \rightarrow S[\phi + \delta\phi] = S[\phi] \Rightarrow \delta S = 0$$

$$\delta S = \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right) = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi \right]$$

Donde para hacer el último paso hemos supuesto que el campo es "smooth enough" para poder hacer  $\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \delta\phi$ . Si nos fijamos en el segundo término vemos la cuatridivergencia de un cuatrivector, que gracias al teorema de la divergencia

$$\int dV \vec{\nabla} \vec{K} = \int d\vec{S} \cdot \vec{K} \rightarrow \int_\Omega d^4x \partial_\mu K^\mu = \int_{\partial\Omega} d^3 \Sigma^\mu K_\mu \text{ (en 4 dim)}$$

Donde  $\Sigma^\mu$  es el cuatrivector normal a la superficie de  $\Omega$ . Las condiciones de contorno  $\phi = 0$ ,  $\partial_\mu \phi = 0$  hacen que  $K^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}$  sea nulo en la frontera  $\partial\Omega$  luego todo el término es nulo, y volviendo a el desarrollo de  $\delta S$ :

$$= \int_\Omega d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \cancel{\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right)} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi \right] = \int_\Omega d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta\phi = 0$$

Que tiene que verificarse  $\forall \delta\phi$  por lo que, por fuerza debe verificarse

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0$$

Que son, las ecuaciones de Euler-Lagrange. Si además  $\mathcal{L}$  es un escalar (invariante Lorentz) entonces las ecuaciones E-L son invariantes relativistas.

*Ejemplo 1: Campo real escalar,  $\phi \in \mathbb{R}$ :*

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi)$  Donde el término  $\frac{1}{2} m^2 \phi^2$  le llamamos término de masas.  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi$  y con  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi - \frac{dV}{d\phi}$  nos lleva a la ecuación de KG:  $(\square + m^2)\phi = -V'(\phi)$ .

*Ejemplo 2: Campo escalar complejo,  $\phi \in \mathbb{C}$ :*

Podemos escribir  $\phi = \phi_1 + i\phi_2$  con  $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$  o tratar  $\phi, \phi^*$  como grados de libertad independientes, que suele ser mejor.

$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 - V(|\phi|)$  (Como ejercicio tratar de obtener esto mismo con  $\phi_1, \phi_2$ ).

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi^* \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \square \phi^*$  y con  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi^* - \frac{dV}{d|\phi|} \phi^*$  nos llevan a las ecuaciones de

$$KG: (\square + m^2)\phi^* = -\frac{dV}{d|\phi|}\phi^* \quad ; \quad (\square + m^2)\phi = -\frac{dV}{d|\phi|}\phi$$

*Ejemplo 3: Campo electromagnético:*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu \text{ con } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

*Solución:  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$  (Ecuación de Maxwell), invariante relativista.*

*Ejemplo 4: Campo EM acoplado a un campo escalar  $\mathbb{C}$ :*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D_\mu\phi) - m^2|\phi|^2 \text{ donde } D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2|\phi|^2 - J_\mu A^\mu$$

$J^\mu = iq(\phi^*D^\mu\phi - \phi(D^\mu\phi)^*)$  Cuadrivector densidad de corriente eléctrica asociada a  $\phi$

*Ejemplo 5: (de teoría de campos clásica)  $\psi$  cuadriespinor de Dirac:*

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi \text{ con } \bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$$

*Conviene tratar  $\bar{\psi}, \psi$  como independientes.*

$\mathcal{L}$  se puede simplificar integrando por partes y teniendo en cuenta que en el infinito los campos se anulan y entonces se reescribe  $\mathcal{L}$  como:

$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$  que no es igual a otro que nos da la misma dinámica  $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$  con  $\not{\partial} = \gamma_\mu\partial^\mu$

*Ejemplo 6:*

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \text{ con } D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

reescribimos  $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$  con  $J^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$

$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$  (E. Maxwell), junto con  $(i\not{\partial} - m)\psi = 0$  (E. Dirac)  $\Rightarrow \partial_\mu J^\mu = 0$

## 4.2 Cuantización canónica covariante de un campo escalar real

$$\phi \in \mathbb{R}$$

Antes teníamos de la mecánica clásica las coordenadas generalizadas  $q^i$  que evolucionaban  $q^i(t)$  en el espacio de configuración. Nuestros grados de libertad ahora serán el valor del campo en cada punto del espacio, luego tenemos un infinito no numerable de grados de libertad en todo el espacio. Un campo es un sistema mecánico en que cada punto del espacio es un g.d.l, tenemos un infinito continuo de g.d.l.

Pongamos un campo escalar sin interacción:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad \text{con} \quad \partial_0\phi = \dot{\phi}$$

y definimos su momento canónicamente conjugado  $\Pi_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_i} = \dot{\phi}$ , con lo que pasamos al formalismo Hamiltoniano definiendo una densidad Hamiltoniana:  $\mathcal{H} = \Pi\dot{\phi} - \mathcal{L}$ , de la que podemos calcular el hamiltoniano usual  $H = \int d^3x \mathcal{H}$ .

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\Pi^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \rightarrow \mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\left(\Pi^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2\right)$$

$$H_0 = \int d\vec{x} \mathcal{H} = \int d\vec{x} \frac{1}{2} \left( \Pi^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2 \right)$$

Realizamos la cuantización canónica:

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \hat{\phi}(x) \\ \Pi(x) &\rightarrow \hat{\Pi}(x) \end{aligned}$$

E imponemos las relaciones canónicas  $[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}(\vec{x}', t)] = [\hat{\phi}(\vec{x}, t), \dot{\hat{\phi}}(\vec{x}', t)] = i\hbar\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ , y  $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] = [\hat{\Pi}, \hat{\Pi}] = 0$ . Con todo esto reescribimos el operador Hamiltoniano

$$\hat{H}_0 = \int d\vec{x} \frac{1}{2} \left( \hat{\Pi}^2 + (\vec{\nabla}\hat{\phi})^2 + m^2\hat{\phi}^2 \right)$$

Consideremos el operador del campo en el tiempo cero,  $\hat{\phi}_S(\vec{x}, 0)$  es un operador en representación de Schrödinger. Un operador que evoluciona con el tiempo se encuentra en representación de Heisenberg,  $\hat{\phi}_H(\vec{x}, t)$ , y la evolución del operador en la imagen de Heisenberg me la da la ecuación de Heisenberg:

$$i\partial_0\hat{\phi}(\vec{x}, t) = [\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{H}_0] \Rightarrow \hat{\phi}(\vec{x}, t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{\phi}(\vec{x}, 0) e^{-i\hat{H}_0 t}$$

Comprobamos esa solución satisface la ec. Heisenberg:

$$\begin{aligned} i\partial_0\hat{\phi}(\vec{x}, t) &= ie^{i\hat{H}_0 t} (i\hat{H}_0) \hat{\phi}(\vec{x}, 0) e^{-i\hat{H}_0 t} + ie^{i\hat{H}_0 t} \hat{\phi}(\vec{x}, 0) e^{-i\hat{H}_0 t} (-i\hat{H}_0) = \\ &= i^2 e^{i\hat{H}_0 t} \left( \hat{H}_0 \hat{\phi}(\vec{x}, 0) - \hat{\phi}(\vec{x}, 0) \hat{H}_0 \right) e^{-i\hat{H}_0 t} = e^{i\hat{H}_0 t} [\hat{\phi}(\vec{x}, 0), \hat{H}_0] e^{-i\hat{H}_0 t} = \\ &= [e^{i\hat{H}_0 t} \hat{\phi}(\vec{x}, 0) e^{-i\hat{H}_0 t}, \hat{H}_0] = [\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{H}_0] \end{aligned}$$

Donde hemos utilizado que el Hamiltoniano conmuta con la exponencial del Hamiltoniano<sup>14</sup>. Y luego hemos utilizado que dado que el Hamiltoniano no evoluciona en el tiempo<sup>15</sup> la evolución del operador solo se aplica al operador de campo.

También se puede demostrar<sup>16</sup> que el operador campo satisface la ecuación KG  $(\square + m^2)\hat{\phi}(\vec{x}, t) = 0$ . La solución más sencilla a KG es una onda plana  $e^{-ikx}$ , con  $x^\mu = (t, \vec{x})$  y  $K^\mu = (K^0, \vec{K})$ :

$$(\square + m^2)e^{-ikx} = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)e^{-ikx} = (-K^2 + m^2)e^{-ikx} = 0$$

De donde entonces  $K^2 = (K^0)^2 - \vec{K}^2 = m^2$ , definiendo  $E_k = \sqrt{\vec{K}^2 + m^2}$  entonces  $K^0 = \pm E_k$ . Ahora podemos buscar soluciones de una manera más formal haciendo

$$\int \frac{d^4 K}{(2\pi)^3} \delta(K^2 - m^2) \Theta(K^0) \alpha_K e^{-ikx}$$

<sup>14</sup>Esto es evidente, pues si podemos escribir la exponencial como desarrollo en serie de potencias del Hamiltoniano y el Hamiltoniano conmuta con cualquier potencia de sí mismo.

<sup>15</sup>De nuevo como hamiltoniano conmuta con las exponenciales del hamiltoniano y son de signo contrario se cancelan.

<sup>16</sup>Hecho en el Pesquil, Bibliografía capitulo 2 ó 3

Donde la delta nos obliga a que se satisfaga  $K^2 = m^2$ , la función de paso de Heavyside denotada por  $\Theta$  obliga a que las soluciones sean de energía positiva y  $\alpha_{\vec{k}}$  son funciones arbitrarias de  $\vec{K}$ .

Se puede reescribir como integral en  $\vec{K}$  gracias a la delta, sin embargo, si quiero integrar en  $K^0$  utilizo:  $\delta(f(x)) = \sum_{x_i/f(x_i)=0} \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$  donde la suma en  $x_i/f(x_i) = 0$  es la suma en los ceros de  $f(x)$  y esta expresión es válida solo si  $f'(x_i) \neq 0$ , para nuestro caso:

$$\delta(K^2 - m^2) = \frac{1}{2K^0} \delta(K^0 - E_k) + \frac{1}{2K^0} \delta(K^0 + E_k)$$

Pero gracias a la función de paso de Heavyside filtramos las soluciones de energía y solo nos quedan las de energía positiva, lo que hace que el segundo término  $\frac{1}{2K^0} \delta(K^0 + E_k)$  se cancele en la integral, con todo esto reescribimos la integral anterior como:

$$\int \frac{d^4 K}{(2\pi)^3} \delta(K^2 - m^2) \Theta(K^0) \alpha_{\vec{K}} e^{-ikx} = \int \frac{d\vec{K}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \alpha_{\vec{K}} e^{-ikx}$$

Que es la solución más general a la ec. KG. Si además exigimos que la solución sea real entonces:

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d\vec{K}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} (\alpha_{\vec{K}} e^{-ikx} + \alpha_{\vec{K}}^* e^{ikx}) \quad \in \mathbb{R}$$

Donde la cantidad  $\frac{d\vec{K}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k}$  es un invariante relativista, el Lorentz Invariant Phase Space (LIPS) de una partícula. Como  $\hat{\phi}$  es un operador también lo son  $\hat{\alpha} \vec{k}$  y  $\hat{\alpha} \vec{k}^*$ .

Además  $\hat{\phi}$  debe ser autoadjunto y satisfacer la ecuación de KG, luego:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d\vec{K}}{(2\pi)^3 2E_k} (\hat{a}_{\vec{K}} e^{-ikx} + \hat{a}_{\vec{K}}^\dagger e^{ikx}) \quad ; \quad \hat{\phi}^\dagger(x) = \hat{\phi}(x)$$

Cogiendo las reglas de conmutación anteriores y poniéndolas en términos de  $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$  obtenemos las relaciones de conmutación para estos operadores: (Ejercicio, demostrar utilizando  $\hat{\phi}$  y derivando la expresión)

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger] = 2E_k (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad ; \quad [\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger] = [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}}] = 0$$

Y se puede entonces comprobar fácilmente (ejercicio)

$$\hat{H}_0 = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} E_k \left( \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \right)$$

Tengamos el estado fundamental, o estado vacío (cero partículas)  $|0\rangle \in \varepsilon$  tal que  $\hat{a}_{\vec{k}} |0\rangle = 0$  con  $\langle 0 | 0 \rangle = 1$ , construimos un estado  $|\vec{k}\rangle = \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle$ , utilizando esto:

$$\langle \vec{K} | \vec{K}' \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\vec{K}} \hat{a}_{\vec{K}'}^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | [\hat{a}_{\vec{K}}, \hat{a}_{\vec{K}'}^\dagger] | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{a}_{\vec{K}}^\dagger \hat{a}_{\vec{K}'} | 0 \rangle = 2E_k (2\pi)^3 \delta(\vec{K} - \vec{K}')$$

Luego  $\langle \vec{K} | \vec{K}' \rangle = 2E_k(2\pi)^3 \delta(\vec{K} - \vec{K}')$ , que tiene problemas de normalización, veamos como podemos solucionarlo:

Sea  $\delta(\vec{K}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{x} e^{i\vec{k}\vec{x}}$  y nuestro espacio  $\Omega$  la delta  $\delta\vec{K}$  no se hace a todo el espacio sino solo a nuestro espacio  $\Omega$ , pues fuera de él los campos se van a cero.

$$\delta(0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega} d\vec{x} e^{i\vec{0}\vec{x}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega} d\vec{x} = \frac{V}{(2\pi)^3}$$

Y con esta interpretación la norma de  $K$  es  $\langle \vec{K} | \vec{K} \rangle = 2E_k(2\pi)^3 \delta(\vec{0}) = 2E_k V$ .

El espacio de estados  $\varepsilon = \varepsilon_0 \oplus \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2 \oplus \varepsilon_3 \oplus \dots$ , y  $|\vec{K}\rangle$  forma base del espacio  $\varepsilon_1$  con relaciones de ortonormalidad y completitud respectivamente:

$$\langle \vec{K} | \vec{K}' \rangle = 2E_k(2\pi)^3 \delta(\vec{K} - \vec{K}') \quad ; \quad \int \frac{d\vec{K}}{(2\pi)^3 2E_k} E_k |\vec{K}\rangle \langle \vec{K}| = \mathbb{1}$$

$\varepsilon_0$  solo tiene a  $|0\rangle$  como elemento de su base,  $\varepsilon_1$  tiene base  $\{|\vec{K}\rangle\}$ ,  $\varepsilon_2$  tiene elementos de la forma  $(|\vec{K}\rangle \otimes |\vec{K}'\rangle)_s$ , de forma que  $\varepsilon_2 = (|\varepsilon_1\rangle \otimes |\varepsilon_1\rangle)_s$ , donde el subíndice  $s$  quiere decir que la base está simetrizada,  $\varepsilon_3$  tendrá elementos de la forma  $(|\vec{K}\rangle \otimes |\vec{K}'\rangle \otimes |\vec{K}''\rangle)_s$  y así sigue para  $\varepsilon_n$  con  $n > 3$ .

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_k^\dagger \right) \quad ; \quad \hat{n}_{\vec{k}} = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}$$

Calculando el valor esperado de la energía en el estado vacío:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{H}_0 | 0 \rangle &= \frac{1}{2} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \left( \langle 0 | \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_k^\dagger | 0 \rangle \right) = \frac{1}{2} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \langle \vec{K} | \vec{K} \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} 2E_k V = \frac{1}{2} V \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} 2E_k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Vemos que diverge, lo que supone un problema. Para solucionarlo redefinimos un Hamiltoniano  $\hat{H}'_0 = \hat{H}_0 - \langle 0 | \hat{H}_0 | 0 \rangle$  t de esta forma  $\langle 0 | \hat{H}'_0 | 0 \rangle = 0$ , quitándonos la energía del vacío del medio.

$$\hat{H}'_0 = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} E_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} \quad ; \quad \hat{n}_{\vec{k}} = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}$$

## Orden normal de un Operador

Cualquier operador se puede escribir como suma de operadores creación destrucción con diferentes coeficientes. Llamamos orden normal de un operador  $\hat{A}$ , denotado :  $\hat{A}$  : a una aplicación lineal, que por tanto verifica:

$$\begin{aligned} \text{i.) } : \hat{A} + \hat{B} : &= : \hat{A} : + : \hat{B} : \\ \text{ii.) } : \lambda \hat{A} : &= \lambda : \hat{A} : \end{aligned}$$

que lo que hace es ordenar la suma de operadores creación y destrucción en que se descompone un operador  $\hat{A}$  de forma que pasa todos los destrucción a la derecha, quedando primero los operadores creación. La ventaja del orden normal es que casi siempre  $\langle 0 | : \hat{A} : | 0 \rangle = 0$  debido a que basta que la descomposición del operador contenga un solo destrucción para que haciendo el orden normal este pase a la derecha y destruye el estado vacío. Es un método conveniente. Así, nuestro Hamiltoniano en orden normal

$$: \hat{H}_0 := \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} E_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} \quad ; \quad \hat{n}_{\vec{k}} = \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}$$

## Producto cronológico

Pongamos tenemos un producto de campos  $\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\dots\hat{\phi}(x_n)$ , donde recordamos que  $x_i = (t_i, \vec{x}_i)$ . El producto cronológico es una operación lineal representada por  $\mathcal{T}(\cdot)$  que los ordena temporalmente  $\mathcal{T}(\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\dots\hat{\phi}(x_n))$ .

Pongamos tenemos dos campos  $\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)$  con  $x = (x^0, \vec{x})$  e  $y = (y^0, \vec{y})$ , entonces:

$$\mathcal{T}(\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)) = \begin{cases} \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) & \text{si } x^0 > y^0 \\ \hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x) & \text{si } x^0 < y^0 \end{cases}$$

Donde evidentemente  $\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) \neq \hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x)$ . Los ordena de forma que el 2º tiempo siempre es menor que el otro. Podemos escribir este producto cronológico con una sola expresión utilizando Heavyside:

$$\mathcal{T}(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)) = \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\Theta(x^0 - y^0) + \hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x)\Theta(y^0 - x^0)$$

## Propagador (o función de Green)

Es una función que depende de dos sucesos  $x, y$ , dados dos sucesos  $x, y$  y un campo  $\mathcal{G}_0^{(2)}(x, y) = \langle 0 | \mathcal{T}(\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)) | 0 \rangle$  donde el superíndice (2) indica que son dos sucesos, y el subíndice 0 indica que es una teoría libre. Tenemos dos casos:

a.)  $x^0 > y^0$ , tal que  $\mathcal{G}_0^{(2)}(x, y) = \langle 0 | \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) | 0 \rangle$ . Entonces, sea  $\hat{\phi}(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} (\hat{a}_{\vec{k}} e^{-ikx} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx})$ , con  $K = (K^0, \vec{K})$  y  $x = (t, \vec{x})$

$$\mathcal{G}_0^{(2)}(x, y) = \langle 0 | \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) | 0 \rangle = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} e^{-ikx} \int \frac{d\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_k} e^{iky} \langle \vec{k} | | \vec{k}' \rangle = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} e^{-ik(x-y)}$$

b.)  $x^0 < y^0$ , tal que, procediendo de manera análoga:

$$\mathcal{G}_0^{(2)}(x, y) = \langle 0 | \hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x) | 0 \rangle = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} e^{-iky} \int \frac{d\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_k} e^{ikx} \langle \vec{k} | | \vec{k}' \rangle = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} e^{ik(x-y)}$$

A continuación demostraremos un teorema que nos permite escribir  $\mathcal{G}_0^{(2)}(x, y)$  con una única expresión.

Teorema: La función de Green de dos puntos la podemos escribir como:

$$\mathcal{G}_0^{(2)}(x, y) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4K \frac{e^{-ik(x-y)}}{K^2 - m^2 + i\epsilon} f(K)$$

Donde después hacemos  $\epsilon \rightarrow 0$ . Esto es una distribución, no una función.

demostración: Pongamos tenemos un objeto de la forma siguiente, y veamos que es igual a  $\mathcal{G}_0^{(2)}(x, y)$ .

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4K \frac{e^{-iK(x-y)}}{K^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{i}{(4\pi)^4} \int d\vec{K} e^{-i\vec{K}(\vec{x}-\vec{y})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iK^0(x^0-y^0)}}{K^2 - m^2 + i\epsilon} dK^0 \\ K^2 - m^2 + i\epsilon &= (K^0 - E_k + i\epsilon')(K^0 + E_k - i\epsilon') = (K^0)^2 - (E_k - i\epsilon')^2 \approx \\ &\approx (K^0)^2 - E_k^2 + 2i\epsilon'E_k = (K^0)^2 - |\vec{K}|^2 - m^2 + i\epsilon = K^2 - m^2 + i\epsilon \end{aligned}$$

Donde hemos introducido  $\epsilon = 2\epsilon'E_k$ . Entonces calculamos la siguiente integral con el teorema de los residuos, obteniendo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iK^0(x^0-y^0)}}{(K^0 - E_k + i\epsilon')(K^0 + E_k - i\epsilon')} dK^0 = \begin{cases} -2\pi i \frac{e^{-iE_k(x^0-y^0)}}{2E_k} & \text{si } x^0 > y^0 \\ -2\pi i \frac{e^{iE_k(x^0-y^0)}}{2E_k} & \text{si } x^0 < y^0 \end{cases}$$

Con lo que finalmente:

$$K(x, y) = \begin{cases} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} e^{-ik(x-y)} & \text{si } x^0 > y^0 \\ \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} e^{ik(x-y)} & \text{si } x^0 < y^0 \end{cases}$$

Que es justamente  $\mathcal{G}_0^{(2)}(x, y)$

□

Sabemos ya entonces como  $\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}^\dagger(x)$  y cómo actúan los operadores campo sobre los estados:

$$\hat{\phi}^\dagger(x) |0\rangle = \int \frac{d\vec{K}}{(2\pi)^3 2E'_k} e^{ik'x} |\vec{K}'\rangle \quad ; \quad \hat{\phi}^\dagger(\vec{x}, t) |0\rangle = \int \frac{d\vec{K}}{(2\pi)^3 2E'_k} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} |\vec{K}'\rangle$$

$\langle \vec{K} | \hat{\phi}^\dagger(\vec{x}, 0) |0\rangle = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ , en mecánica cuántica ordinaria  $\langle \vec{K} | |\vec{x}\rangle = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ , luego  $\forall K$ ,  $\hat{\phi}^\dagger(\vec{x}, 0) |0\rangle = |\vec{x}\rangle$ . Los operadores de campo lo que hacen es crear partículas en un punto del espacio.

Vamos a estudiar ahora la cuantización del campo escalar complejo, que nos permite introducir el concepto de antipartícula de forma rigurosa.

### 4.3 Cuantización del campo escalar complejo. $\psi \in \mathbb{C}$

$\hat{\psi} \in \mathbb{C}$ , que podemos escribir como  $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + i\xi_2)$  con  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ , aunque es más útil expresarlo en términos de  $\psi$  y  $\psi^*$ .

$$\mathcal{L}_0 = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - M^2 |\psi|^2$$

Introducimos los momentos canónicamente conjugados  $\Pi$  y  $\Pi^*$  respectivamente de  $\psi$ ,  $\psi^*$  :

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = \partial_0 \psi^* \quad ; \quad \Pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)} = \partial_0 \psi$$

Y entonces ya sabemos escribir la densidad hamiltoniana con  $\mathcal{H}_0 = \partial_0 \psi \Pi + \partial_0 \psi^* \Pi^* - \mathcal{L}$ :

$$\mathcal{H}_0 = \partial_0 \psi^* \partial_0 \psi + \vec{\nabla} \psi^* \cdot \vec{\nabla} \psi + M^2 |\psi|^2 = \Pi \Pi^* + \vec{\nabla} \psi^* \cdot \vec{\nabla} \psi + M^2 - |\psi|^2$$

Que tiene dos grados de libertad. A partir de  $\mathcal{H}_0$  obtenemos las ecuaciones del movimiento, que son las ecuaciones de KG para  $\psi$  y  $\psi^*$ :

$$(\square + m^2)\psi = 0 \quad ; \quad (\square + m^2)\psi^* = 0$$

Introducimos ahora el campo EM:  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$  y el resultado que obtenemos de esto se escribe:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - M^2 |\psi|^2 - J_\mu A^\mu \quad ; \quad J_\mu = iq(\psi^* D_\mu \psi - \psi (D_\mu \psi)^*)$$

A partir de lo que obtenemos unas nuevas ecuaciones del movimiento

$$(\square + m^2)\psi = -2iq\partial^\mu \psi A_\mu + q^2 A_\mu A^\mu \psi \quad ; \quad (\square + m^2)\psi^* = 2iq\partial^\mu \psi^* A_\mu + q^2 A_\mu A^\mu \psi^*$$

Con lo que vemos que  $\psi$  se asocia a una carga  $q$  y  $\psi^*$  se asocia a una carga  $-q$ . Podemos volver a la teoría libre haciendo  $A_\mu = 0$ , con lo que volvemos a las ecuaciones de KG originales. Las soluciones generales se pueden escribir

$$\psi(x) = \int \frac{d\vec{K}}{(2\pi)^3 2E_k} (\alpha_{\vec{k}} e^{-ikx} + \beta_{\vec{k}}^* e^{ikx}) \quad ; \quad \psi^*(x) = \int \frac{d\vec{K}}{(2\pi)^3 2E_k} (\alpha_{\vec{k}}^* e^{ikx} + \beta_{\vec{k}} e^{-ikx})$$

Y ahora, igual que hacíamos con el campo escalar real, introducimos los operadores de campo.

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \hat{\psi}(x) & \Pi(x) &\rightarrow \hat{\Pi}(x) \\ \psi^*(x) &\rightarrow \hat{\psi}^\dagger(x) & \Pi^*(x) &\rightarrow \hat{\Pi}^\dagger(x) \end{aligned} \quad ;$$

Y las relaciones canónicas de conmutación  $[\hat{\psi}(x), \hat{\Pi}(x)] = [\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x)] i\delta(\vec{x} - \vec{x}')$

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d\vec{K}}{(2\pi)^3 2E_k} (\hat{a}_{\vec{k}} e^{-ikx} + \hat{b}_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx}) \quad ; \quad \hat{\psi}^\dagger(x) = \int \frac{d\vec{K}}{(2\pi)^3 2E_k} (\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx} + \hat{b}_{\vec{k}} e^{-ikx})$$

Con  $[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] = [\hat{b}_{\vec{k}}, \hat{b}_{\vec{k}}^\dagger] = 2E_k (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}')$  y  $[\hat{a}_{\vec{k}}^{(\dagger)}, \hat{b}_{\vec{k}}^{(\dagger)}] = 0$ . Entonces, el vacío de la teoría es el que es aniquilado por operadores  $\hat{a}_{\vec{k}} |0\rangle = \hat{b}_{\vec{k}} |0\rangle = 0$  y los operadores  $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle = |\vec{K}\rangle$  y  $\hat{b}_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle = |\underline{\vec{K}}\rangle$ .

$$: \hat{\mathcal{H}}_0 := \int \frac{d\vec{K}}{(2\pi)^3 2E_k} E_k (\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{b}_{\vec{k}}^\dagger \hat{b}_{\vec{k}})$$

Y al igual que hacíamos para el campo escalar real, restamos a nuestro hamiltoniano la energía del vacío para evitar la divergencia a infinito.  $\hat{\mathcal{H}}_0 \rightarrow : \hat{\mathcal{H}}_0 := \hat{\mathcal{H}}_0 - \langle 0 | \hat{\mathcal{H}}_0 | 0 \rangle$  tal que



$$\langle 0 | : \hat{\mathcal{H}}_0 : | 0 \rangle = 0.$$

De la expresión de  $: \hat{\mathcal{H}}_0 :$  identificamos dos nuevos operadores que llamaremos operadores densidad, que son  $\hat{n}_{\vec{k}} = \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}$  operador densidad de la partícula y  $\hat{n}_{\vec{k}} = \hat{b}_{\vec{k}}^\dagger \hat{b}_{\vec{k}}$  operador densidad de la antipartícula.

$$: \hat{\mathcal{H}}_0 := \int \frac{d\vec{K}}{(2\pi)^3 2E_k} E_k (\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{b}_{\vec{k}}^\dagger \hat{b}_{\vec{k}}) = \int \frac{d\vec{K}}{(2\pi)^3 2E_k} E_k (\hat{n}_{\vec{k}} + \hat{n}_{\vec{k}})$$

Volviendo al campo EM,  $J^\mu$  tenía una  $J^0$  que integrada a todo el espacio da la carga  $Q = \int d\vec{x} J^0 = iq \int d\vec{x} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi} \psi^*)$  que al cuantizar se convierte en el operador  $\hat{Q} = iq \int d\vec{x} : (\hat{\psi}^* \hat{\Pi}^\dagger - \hat{\Pi} \hat{\psi})$

(Ejercicio: Demostrar que la expresión anterior se puede reescribir de la forma  $\hat{Q} = q \int \frac{d\vec{K}}{(2\pi)^3 2E_k} (\hat{n}_{\vec{k}} - \hat{n}_{\vec{k}})$ )

Las partículas contribuyen con carga  $q$  y las antipartículas contribuyen con una carga  $-q$

$$\hat{a}^\dagger |0\rangle = |\vec{k}, q\rangle \quad ; \quad \hat{b}^\dagger |0\rangle = |\vec{k}, -q\rangle$$

Todo campo complejo cuando lo cuantizas da lugar a dos tipos de excitaciones relacionadas entre sí con misma masa y carga opuesta. La teoría de campos relativista predice la existencia de antipartículas. Si el campo que cuantizamos es escalar real las partículas coinciden con sus antipartículas y la carga es neutra, carga nula, luego un campo escalar real no puede tener carga eléctrica.

Un resultado fundamental para la expresión del Hamiltoniano es que este conmuta con la carga, luego podemos encontrar estados de carga y momento o carga y posición bien definidos.  $[\hat{H}_0, \hat{Q}] = 0$ .  $|\vec{K}, E_k, q\rangle$ , o dicho de otra manera, la carga se conserva.

Si consideramos el operador de campo  $\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}, 0)$  actuando sobre el vacío  $\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}, 0) |0\rangle$  crea una partícula en  $\vec{x}$ . Si consideramos el operador de campo  $\hat{\psi}(\vec{x}, 0)$  actuando sobre el vacío  $\hat{\psi}(\vec{x}, 0) |0\rangle$  crea una antipartícula en  $\vec{x}$ .

## 4.4 Imágenes o representaciones de la Mec. Cuántica

Existen infinitas representaciones pero las más utilizadas son la de Schrödinger, Heisenberg y la representación de Interacción también llamada representación de Dirac.

### 4.4.1 Representación de Schrödinger

Son los estados  $|\psi(t)\rangle \in \varepsilon$  los que evolucionan y no los operadores, su evolución viene dada por la ec. de Schrödinger  $i\partial_t |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$ , de forma que  $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$  con  $U(t, t_0)$  operador unitario que recibe el nombre de operador evolución. A partir de sus propiedades es inmediato derivar sus propiedades:

- i  $U(t, t_0) = \mathbb{1}$
- ii  $U(t, t_0) = U^{-1}(t, t_0)$ , de forma que  $U(t, t_0)U(t, t_0)^\dagger = \mathbb{1}$ , unitario.
- iii Sea  $t'$  tal que  $t_0 < t' < t$ ,  $U(t, t_0) = U(t, t')U(t', t_0)$
- iv  $U(t_0, t) = U(t, t_0)^{-1}$

Si el Hamiltoniano no depende del tiempo la ecuación se puede integrar fácilmente y la solución es entonces  $U(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)}$ . Si el hamiltoniano depende del tiempo la expresión es más complicada.

#### 4.4.2 Representación de Heisenberg

Suponemos el estado del sistema  $|\psi\rangle_H = |\psi(t_0)\rangle_H \in \varepsilon$  está congelado. Los operadores, que en principio no dependen del tiempo en la rep. Schrödinger en la de Heisenberg son los que llevan la evolución temporal.

$$\hat{A}_S \rightarrow \hat{A}_H(t) = e^{i\hat{H}(t-t_0)} \hat{A}_S e^{-i\hat{H}(t-t_0)} = U(t, t_0)^{-1} \hat{A}_S U(t, t_0)$$

La ecuación que nos da la evolución del operador es la ecuación de Heisenberg  $i\partial_t \hat{A}_H(t) = [\hat{A}_H(t), \hat{H}]$ , donde  $\hat{H}$  es igual en ambas representaciones. Los resultados en ambas representaciones son iguales.

Se trata de dos extremos del punto de vista de la representaciones, o los estados están congelados o los operadores lo están. Existen representaciones intermedias, como la representación de interacción que se ve a continuación.

#### 4.4.3 Representación de interacción (o de Dirac)

El caso típico de utilización de esta representación es cuando  $\hat{H}$  se puede descomponer en dos piezas  $\hat{H}_0$  y  $\hat{H}'$  ambas independientes del tiempo, de forma que  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$ .

$\hat{H}_0$  es un hamiltoniano que sabemos resolver y  $\hat{H}'$  representa las interacciones.  $\hat{H}'$  representa las interacciones. En otras palabras  $\hat{H}_0$  es el problema libre y  $\hat{H}'$  no puede resolverse exactamente.

Dado  $\hat{H}_0$  definimos el operador evolución  $\hat{U}_0(t, t_0) = e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}$  (op. evolución asociado a  $\hat{H}_0$ , y a partir de esto definimos el operador en representación de interacción, que sí depende del tiempo pero que evoluciona según el operador de evolución asociado a  $\hat{H}_0$ ,  $\hat{U}_0(t, t_0)$ .

$$\hat{A}_I(t) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{A}_S e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)} = \hat{U}_0(t, t_0)^{-1} \hat{A}_S \hat{U}_0(t, t_0) \quad ; \quad \hat{A}_I(t_0) = \hat{A}_S$$

Donde  $\hat{A}_I(t_0) = \hat{A}_S$  es fácil de comprobar puesto que

$$\hat{A}_I(t_0) = \hat{U}_0(t_0, t_0)^{-1} \hat{A}_S \hat{U}_0(t_0, t_0) = \mathbb{1} \hat{A}_S \mathbb{1} = \hat{A}_S$$

Introducimos ahora otro operador evolución  $\hat{U}'(t, t_0)$  como  $\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}_0(t, t_0) \hat{U}'(t, t_0)$  con  $\hat{U}(t, t_0)$  el operador evolución asociado al hamiltoniano completo  $\hat{H}$ , así  $\hat{U}'(t, t_0) = \hat{U}_0^{-1}(t, t_0) \hat{U}(t, t_0)$

que como producto de dos operadores unitarios es evidentemente también unitario. Y tenemos además la condición inicial  $\hat{U}'(t_0, t_0) = \mathbb{1}$ . Ahora los estados evolucionan con  $\hat{U}'$  y los operadores evolucionan con  $\hat{U}_0$ , una especie de representación mixta.

$$|\psi(t)\rangle_I = \hat{U}'(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

Juntando  $i\partial_t \hat{U} = \hat{H}U$ , con  $\hat{U} = \hat{U}_0 \hat{U}'$  y  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$  obtenemos  $i\partial_t \hat{U}'(t, t_0) = \hat{H}'_I(t) \hat{U}'(t, t_0)$  con  $\hat{H}'_I(t) = \hat{U}_0^{-1}(t, t_0) \hat{H}' \hat{U}_0(t, t_0)$  y  $[\hat{H}_0, \hat{H}'] \neq 0$ :

$$i \frac{d|\psi(t)\rangle_I}{dt} = \hat{H}'_I(t) |\psi(t)\rangle_I$$

Que van con un  $\hat{H}'_I$  que depende del tiempo, ese es el problema que resolvemos ahora, la solución formal para ecuación de Schrödinger para un Hamiltoniano dependiente del tiempo.

## 4.5 Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

La ecuación diferencial

$$i \frac{d\hat{U}(t, t_0)}{dt} = \hat{H}(t_0) \hat{U}(t, t_0) \quad \text{con} \quad \hat{U}(t, t_0) = \mathbb{1}$$

Se puede escribir como ecuación integral

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t') \hat{U}(t', t_0) \quad \text{con} \quad \hat{U}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)}$$

Que resolvemos utilizando el método de Von-Neumann, un método iterativo. En primera aproximación hacemos  $\hat{U} \approx \hat{U}(t, t_0) = \mathbb{1}$

$$\hat{U}_1(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t') \hat{U}_0(t', t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t')$$

Que utilizamos como siguiente iteración, haciendo entonces

$$\hat{U}_2(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}(t_1) + (-1)^2 \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1)$$

Y tenemos que tener cuidado con el orden de los Hamiltonianos ya que no conmutan en tiempos distintos,  $[\hat{H}(t_2), \hat{H}(t_1)] \neq 0$ . De esta forma la solución  $\hat{U}(t, t_0)$  es

$$\hat{U}(t, t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{U}_n(t, t_0)$$

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_{n-2} \dots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}(t_n) \dots \hat{H}(t_1)$$

Hacemos una inversión de las variables, cambiamos el orden y pasamos  $t_n$  al final, no pasa nada porque son variables mudas.

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}(t_1) \dots \hat{H}(t_n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}^{(n)}(t, t_0)$$

Existe una dificultad al integrar esto debido a que tiene diferentes límites de integración  $t_1, t_2, t_3, \dots$ , para agruparlos todos con un mismo límite de integración superior utilizamos la función de paso de Heavyside.

$$\hat{U}^{(n)}(t, t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \Theta(t_1 - t_2) \dots \Theta(t_{n-1} - t_n) \hat{H}(t_1) \dots \hat{H}(t_n)$$

Con lo que unificamos los límites de integración, pero sigue siendo una expresión confusa y por ello introducimos ahora el producto ordenamiento temporal. Pero antes hemos de recordar del álgebra:  $\pi$ : es una permutación arbitraria de  $n$  elementos  $(1, 2, \dots, n)$ ,  $\pi(k)$  se denota al elemento  $k$ -ésimo de la permutación, de forma que, veamos en un ejemplo:

*Ejemplo:*  $n = 5$  :  $\pi = (1, 3, 5, 4, 2)$  de forma que  $\pi(1) = 1$ ,  $\pi(2) = 3$ ,  $\pi(3) = 5$ ,  $\pi(4) = 4$ ,  $\pi(5) = 2$ .

Podemos hacer cualquier permutación arbitraria de variables mudas y no cambia la integral, tal y como hemos hecho antes al cambiar la ordenación de los  $t_i$ . Consideremos la suma de todas las permutaciones posibles, el resultado es  $n!$  veces la integral, teniendo esto en cuenta podemos reescribir

$$\hat{U}^{(n)}(t, t_0) = \frac{(-i)^n}{n!} \sum_{\pi} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \Theta(t_{\pi(1)} - t_{\pi(2)}) \dots \Theta(t_{\pi(n-1)} - t_{\pi(n)}) \hat{H}(\pi(t_1)) \dots \hat{H}(\pi(t_n))$$

Introducimos ahora el operador ordenación temporal, también llamado producto cronológico u operador de Dyson.

$$\mathcal{T} \left( \hat{H}(t_1), \dots, \hat{H}(t_n) \right) = \sum_{\pi} \Theta(t_{\pi(1)} - t_{\pi(2)}) \Theta(t_{\pi(2)} - t_{\pi(3)}) \dots \Theta(t_{\pi(n-1)} - t_{\pi(n)}) \hat{H}(t_{\pi(1)}) \dots \hat{H}(t_{\pi(n)})$$

Y de esto solo se salva una permutación, aquella que tiene las  $\hat{H}$  ordenados de tiempo mayor a la izquierda a tiempo menor a la derecha.

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}^{(n)}(t, t_0) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_m \mathcal{T} \left( \hat{H}(t_1) \dots \hat{H}(t_m) \right) = \\ &= \mathcal{T} \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_m \hat{H}(t_1) \dots \hat{H}(t_m) \right) = \mathcal{T} \left( e^{-i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t')} \right) \end{aligned}$$

Ya que  $\int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n \hat{H}(t_1) \dots \hat{H}(t_n) = \left( \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t') \dots \hat{H}(t_n) \right)^n$ . Luego cuando el hamiltoniano no depende del tiempo el op. evolución se escribe  $\hat{U}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t, t_0)}$  y cuando sí que depende del tiempo entonces  $\hat{U}(t, t_0) = \mathcal{T} \left( e^{-i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t')} \right)$ . Todo esto viene a cuenta de que el hamiltoniano de interacción en la representación de Dirac  $\hat{H}_{int} = \hat{H}_{int}(t)$  depende del tiempo y por tanto necesita este tratamiento.

## 4.6 Teoría cuántica de campos en interacción

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}'$$

Por ejemplo  $\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$  en teoría libre. Ahora introducimos un potencial de interacción de forma que  $\mathcal{L}_0 = -V(\phi)$ . Si la interacción no tiene derivadas en los campos entonces  $H' = -\int d\vec{x}\mathcal{L}'$ , puesto que  $\mathcal{H}' = -\mathcal{L}'$ .

Luego los campos quedan:

$$\hat{\phi}_H(\vec{x}, t) = e^{i\hat{H}t}\hat{\phi}_H(\vec{x}, 0)e^{-i\hat{H}t} \quad ; \quad \hat{\phi}_I(\vec{x}, t) = e^{i\hat{H}_0t}\hat{\phi}(\vec{x}, 0)e^{-i\hat{H}_0t} \quad \text{con} \quad \hat{\phi}(\vec{x}, 0) = \hat{\phi}_S(\vec{x})$$

Luego los campos que no evolucionan son  $\hat{\phi}_S(\vec{x})$ . Los campos que evolucionan con  $\hat{H}_0$  son  $\hat{\phi}_I(\vec{x}, t)$  y los campos que evolucionan con  $\hat{H}$  son  $\hat{\phi}_H(\vec{x}, t)$ . Estos últimos no sabemos resolverlos con interacción pues no sabemos resolver la ecuación  $(\square + m^2)\hat{\phi}_H = -V'(\hat{\phi}_H)$ .

Los autoestados de  $\hat{H}_0$ , de la teoría sin interacción serían de la forma  $|\vec{K}_1, \dots, \vec{K}_n\rangle$ . En lo sucesivo trabajaremos con ellos.  $|\vec{K}_1, \dots, \vec{K}_n\rangle$  evolucionan con  $U'(t, t_0)$  que recordamos se definía a partir de  $U = U_0U'$ . Para calcular  $U'$  volvemos a nuestro hamiltoniano de interacción en representación de Dirac  $\hat{H}'_{int}$

$$\hat{H}'_I(t) = e^{i\hat{H}_0t}\hat{H}'_Se^{-i\hat{H}_0t} = \hat{H}'_I(\hat{\phi}_I) = \hat{H}'(\hat{\phi}(t))$$

$$\hat{U}'(t, t_0) = \mathcal{T}e^{-i\int_{t_0}^t dt' \hat{H}'_I(t')} = \mathcal{T}e^{-i\int_{t_0}^t dt' \hat{H}'(\hat{\phi})} = \mathcal{T}e^{i\int_{t_0}^t dt' \int d\vec{x} \mathcal{L}'(\hat{\phi})}$$

Finalmente, definimos

$$S = \lim_{t_0 \rightarrow \pm\infty} U'(t, t_0) = \mathcal{T}e^{i\int d^4x \mathcal{L}'(\hat{\phi})}$$

## 5 Tema 4. Matriz S, secciones eficaces y anchuras de desintegración.

Ya habíamos visto que el operador S lo escribíamos como  $S = \mathcal{T}e^{i\int d^4x \mathcal{L}'(\hat{\phi})}$ . Ahora vamos a considerar que en un tiempo  $t \rightarrow -\infty$  tenemos un estado inicial  $|i\rangle = |\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_m\rangle$  de  $m$  partículas libres, ya que están muy separadas. Y consideramos un estado final en  $t \rightarrow +\infty$  de la forma  $|f\rangle = |\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n\rangle$  de  $n$  partículas de nuevo libres.

(insertar imagen)

Lo que queremos saber es cual es la probabilidad  $P_{if}$  de encontrar el estado final  $|f\rangle$  en  $t \rightarrow +\infty$  sabiendo que partíamos de  $|i\rangle$  en  $t \rightarrow -\infty$ .  $|i\rangle \rightarrow S|f\rangle$ . Llamaremos amplitud de probabilidad a el sandwich  $\langle f|S|i\rangle$ , y su módulo cuadrado,  $P_{if} = |\langle f|S|i\rangle|^2$  será la densidad de probabilidad.

La matriz S tiene por componentes las amplitudes de probabilidad,  $S_{ij} = \langle f|S|i\rangle$ , y nos da la probabilidad de encontrar  $|f\rangle$  en  $t \rightarrow +\infty$  sabiendo que partíamos de  $|i\rangle$  en  $t \rightarrow -\infty$ .

S es unitaria, esto es  $S^\dagger S = \mathbb{1}$ , y podemos escribirla de una forma muy concreta:

$$S_{if} = \delta_{if} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f) T_{if}$$

De forma que, el primer término es nulo si  $|i\rangle = |f\rangle$ , es decir, cuando no hay interacción. La delta 4-dimensional de los 4-vectores  $P_i, P_f$  energía-impulso obliga a que, para que exista interacción deben conservarse los 4-vectores energía-impulso,  $P_i = P_f$ . y por último  $T_{if}$  es la matriz de reacción, con amplitud invariante.

(falta)

$$dW_{i \rightarrow f} = \left( \prod_{j=1}^m \left( \frac{1}{2V E_{k_j}} \right) \right) V (2\pi)^4 \delta^{(n)}(P_i - P_f) |T_{if}|^2 \prod_{i=1}^n \frac{d\vec{k}_i}{(2\pi)^3 2E_{k_i}}$$

Donde llamamos elemento espacio invariante Lorentz del sistema de partículas:

$$d^{(N)}LIPS = (2\pi)^4 \delta^{(n)}(P_i - P_f) \prod_{i=1}^n \frac{d\vec{k}_i}{(2\pi)^3 2E_{k_i}}$$

y entonces reescribimos la expresión anterior como:

$$dW_{i \rightarrow f} = \left( \prod_{j=1}^m \left( \frac{1}{2V E_{k_j}} \right) \right) V |T_{if}|^2 d^{(N)}LIPS$$

Con la que vamos a estudiar diferentes procesos físicos.

## 5.1 Desintegración de partículas.

En este caso nos centramos en el caso de una sola partícula (m=1). Entonces el factor de normalización es  $(2E_p V)^{-1}$ .

(insertar imagen)

Hay sistema de referencia más sencillos que otros aunque todos deben valer, el mejor en este caso es el sistema de referencia en que la partícula que se desintegra permanece en reposo ( $\vec{p} = 0$ ). Escribimos la expresión para calcular la anchura de desintegración:

$$dW_{i \rightarrow f} = d \left( \prod_{j=1}^m \left( \frac{1}{2V E_{k_j}} \right) \right) V (2\pi) \Gamma = \frac{1}{2M} (2\pi)^4 \delta^{(n)}(P_i - P_f) |T_{if}|^2 \prod_{i=1}^n \frac{d\vec{k}_i}{(2\pi)^3 2E_{k_i}}$$

Si tenemos la anchura total  $\Gamma = \int d\Gamma$ , sabiendo que su inversa es la vida media,  $\tau = (\Gamma)^{-1}$ , que viene de la ecuación  $N(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} N_0$ , que regía también los decaimientos en transiciones atómicas.

Una partícula puede desintegrarse de diferentes maneras, (decimos que puede desintegrarse en diferentes canales o que tiene diferentes canales de desintegración). Por ejemplo

una partícula  $\omega$  puede desintegrarse a  $\omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0, \pi^0\gamma, \dots$  cada una con sus correspondientes anchuras parciales de su canal  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$  y se define por anchura total la suma de las anchuras parciales de todos los canales posibles,  $\Gamma = \sum_i \Gamma_i$ .

Pongamos que tenemos un partícula con dos canales de desintegración con anchuras parciales  $\Gamma_1, \Gamma_2$  tal que  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , entonces podemos definir la fracción de desintegración (branching ratio):

$$\beta_i = \frac{\Gamma_i}{\Gamma} \in [0, 1] \quad \sum_i \beta_i = 1$$

Pongamos tenemos  $N_1$  número de estados finales en el canal 1 y  $N_2$  en el canal 2. Llamamos  $N_i(t)$  a la población del canal i en el instante t, entonces:

$$\frac{dN_i}{dt} = \Gamma_i N$$

Con N el número de partículas en el estado inicial. La probabilidad de desintegración me la da entonces la anchura parcial. Juntando la ecuación diferencial anterior con la ya conocida  $N(t) = N_0 e^{-\Gamma t}$  y la condición inicial  $N_i(0) = 0$ , esto es, que el canal i esté inicialmente vacío:

$$N_i(t) = N_0 B_i (1 - e^{-\Gamma t})$$

(insertar gráfica)

Al final, la distribución de partícula en diferentes canales es  $N_0 B_i$ , luego a mayor  $B_i$  mayor tendencia tiene el estado inicial a desintegrarse siguiendo ese canal i. Si a la vez resulta que un estado final no es estable el proceso se complica y surgen cadenas de desintegración.

Pongamos ahora que ahora las partículas tienen otra característica más  $\sigma$ , que podría ser el espín u otra, y pongamos que esta característica puede tomar n valores diferentes.

(insertar imagen)

Si no sabemos cuanto es  $\sigma$  en el estado inicial podemos calcular un valor promediado, es decir, calcular para todos los valores posibles de  $\sigma$  y dividir por n. Suponiendo un único canal:

$$\Gamma = \frac{1}{n} \sum_{\sigma} \Gamma_{\sigma\sigma_1}$$

Cuando no medimos  $\sigma$  ni en el estado inicial ni en el final (ante total desconocimiento), promediamos para el estado inicial y sumamos para el final.

Si un solo canal se desintegra entonces  $\Gamma = \frac{1}{2M} \int |T|^2 d^{(n)} LIPS$ , en los sucesivos utilizaremos la notación para la matriz de reacción  $|\bar{\Gamma}| = \frac{1}{n} \sum_{\sigma}$ , que representa el promedio mencionado anteriormente.

Otro proceso importante es el de colisión de partículas, donde lo importante no es la anchura sino el concepto de sección eficaz. Nos sirve para determinar intensidad de interacción entre partículas y las distribuciones de momentos resultado de la colisión.

## 5.2 Colisión de partículas. Sección eficaz.

Empezamos estudiando el caso estático con  $m=2$ . Suponemos que estamos en el sistema de centro de masas por simplicidad.

(insertar imagen)

Queremos ver cual es la probabilidad de que las partículas salgan dentro de un cono que sustenta un ángulo sólido. Pongamos en lugar de dos partículas dos haces de partículas, entonces introducimos la cantidad:

$$\frac{dN(\theta, \varphi)}{dt} = F_i \frac{d\sigma(\theta, \varphi)}{d\Omega}$$

Que quiere decir, que el número de partículas dispersadas por unidad de tiempo y unidad de ángulo sólido es proporcional al número de partículas incidentes por unidad de tiempo y superficie  $F_i$  (flujo), siendo la constante de proporcionalidad la sección eficaz diferencial por diferencial de ángulo sólido. Esta sección eficaz diferencial es la que nos determina la intensidad relativa de la difracción en los ángulos.

Definimos una cantidad  $\sigma$  que no depende de los ángulos  $(\theta, \varphi)$ , la sección eficaz total:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

Con unidades  $[\sigma] = L^2$ , y no distingue direcciones. La sección total eficaz mide algo así como la superficie de colisión de las partículas desde el punto de vista clásico, qué porcentaje de las partículas que se cruzan colisionará.

(insertar imagen)

No tenemos por qué hablar de secciones eficaces de procesos elásticos, ahora podemos, aplicando la fórmula general

$$d\sigma = \frac{1}{4P_1^0 P_2^0 V^2} \frac{W_{i \rightarrow f}}{F_i} \prod_{i=1}^n \frac{d\vec{k}_i}{(2\pi)^3 2E_i} = \frac{dW_{if}}{F_i}$$

Donde el primer término es la constante de normalización.

(insertar imagen)

Aquí, sea  $|i\rangle = |\vec{P}_1, \vec{P}_2\rangle$  y  $|f\rangle = |\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\rangle$  (Sin considerar espines y demás) en el sistema de referencia de laboratorio, en que la partícula 2 se encuentra en reposo y la partícula 1



incide sobre ella.

(insertar imagen)

Podemos suponer un haz monocromático. Sea  $n$  el número de partícula incidentes, por unidad de volumen y normalizando con  $n = 1/V$  entonces  $F_i = \frac{1}{V}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$  y escribimos la sección eficaz diferencial:

$$d\sigma = \frac{|T_{if}|^2}{4P_1^0 P_2^0 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} d^{(n)} LIPS$$

Pongamos tenemos  $k$  partículas idénticas, entonces al intercambiarlas la situación física debe ser la misma, no podemos distinguirlas. Si integro a todos los valores de  $k$  estoy integrando considerando dos situaciones diferentes cuando en realidad son la misma, esto se generaliza de la siguiente forma, si tenemos  $k$  partículas idénticas:

$$\sigma_{tot} \rightarrow \sigma_{tot} = \frac{1}{k!} \int \frac{|T_{if}|^2}{4P_1^0 P_2^0 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} d^{(n)} LIPS$$

Si además están polarizadas pero no sabemos como, entonces cambiamos:

$$|T|^2 \rightarrow |\bar{T}|^2 = \frac{1}{N_i} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} |\bar{T}_{\sigma_1 \sigma_2, S_1 \dots S_n}|^2$$

Donde  $N_i$  es el número de estados de espín del estado inicial.

### 5.3 Colisiones y desintegraciones a dos cuerpos.

Ahora entonces  $n=2$ , y  $d^{(n)} LIPS = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f) \prod_{i=1}^n \frac{d\vec{k}_i}{(2\pi)^3 2E_i}$ , que son  $(3n-4)$  integrales, con  $n=2$  son entonces  $6-4=2$  integrales.

$$d^{(2)} LIPS = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f) \frac{d\vec{k}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d\vec{k}_2}{(2\pi)^3 2E_2}$$

Sistema de referencia CM:

Aquí  $k_1 = (E_1, \vec{k})$  y  $k_2 = (E_2, -\vec{k})$ . Introducimos  $E_f = E_1 + E_2$  y  $S = E_f^2 = (k_1 + k_2)^2$ . ahora reescribo:

$$d^{(2)} LIPS = \frac{1}{4(2\pi)^2} \delta^{(4)}(E_i - E_1 - E_2) \frac{d\vec{k}}{E_1 E_2} = \frac{1}{(4\pi)^2} \delta^{(4)}(E_i - E_1 - E_2) \frac{|\vec{k}|}{E_1 E_2} d|\vec{k}| d\Omega$$

Donde en el último paso se ha pasado a coordenadas polares. Aquí además  $E_j = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m_j^2}$  luego  $E_j dE_j = |\vec{k}| d|\vec{k}|$  y entonces  $dE_j = \frac{|\vec{k}| d|\vec{k}|}{E_j}$  para  $j=1,2$  y defino  $|\vec{k}| = k_f$ .

Con las relaciones que ya teníamos lo que queremos hacer es la integral:

$$dE_f = dE_1 + dE_2 = \frac{k_f dk_f}{E_1} + \frac{k_f dk_f}{E_2} = k_f dk_f \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} k_f dk_f = \frac{E_f}{E_1 E_2} k_f dk_f$$

Comparando  $dE_f$  de la expresión anterior con  $d^{(2)}LIPS$ :

$$d^{(2)}LIPS = \frac{1}{(4\pi)^2} \delta^{(4)}(E_i - E_f) \frac{k_f}{E_f} dE_f d\Omega = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{k_f}{E_i} d\Omega$$

Esta última expresión es con la que trabajaremos en este curso. Solo es válida para el sistema de centro de masas.

## 5.4 Anchura a dos cuerpos (en CM)

(insertar figura)

Como ya vimos, para este caso tenemos  $d\Gamma = \frac{1}{2M} \bar{T}^2 d^{(n)}LIPS$  es la expresión general, particularizando:

$$d\Gamma = \frac{1}{2M} |\bar{T}|^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{k_f}{E_f} d\Omega = \frac{1}{2M} |\bar{T}|^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{k_f}{M} d\Omega = \frac{1}{32\pi^2 M^2} |\bar{T}|^2 k_f d\Omega$$

Donde en el último paso lo que hacemos es que, como en el sistema de centro de masas  $E_f = E_i$  y este a su vez es igual a la masa en reposo de la partícula entonces la sustituimos por ella.

## 5.5 Secciones eficaces 2 a 2. (en CM)

(Insertar figura)

Aquí  $k_1 = (E_1, \vec{k})$ ,  $k_2 = (E_2, -\vec{k})$ ,  $k_3 = (E_3, \vec{k}')$  y  $k_4 = (E_4, -\vec{k}')$  y llamaremos  $k_i = |\vec{k}|$  y  $k_f = |\vec{k}_f|$ .

Definimos nuestro  $S = (k_1 + k_2)^2$  y la por la conservación de energía-impulso entonces  $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$  que implica  $S = (k_1 + k_2)^2 = (k_3 + k_4)^2$ :

$$S = (k_1 + k_2)^2 = (k_3 + k_4)^2 = (E_1 + E_2)^2 = (E_3 + E_4)^2 = E_i^2 = E_f^2$$

Ahora utilizando que estamos en el sistema de referencia del centro de masas de las partículas podemos escribir las  $k_i$  en término de las masas de las partículas en reposo, así  $S = (k_1 + k_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2k_1 \cdot k_2$ , que podemos introducir en la expresión de la sección eficaz:

$$d\sigma = \frac{|\bar{T}|^2}{4\sqrt{(k_1 \cdot k_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} d^{(2)}LIPS = \frac{|\bar{T}|^2}{2\sqrt{(S - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2}} d^{(2)}LIPS$$

finalmente ¿?¿como?¿? llegamos a la expresión de la sección eficaz diferencial siguiente:

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2 S} |\bar{T}|^2 \frac{k_f}{k_i} d\Omega$$

Que es válida solo para el sistema de referencia de CM y para cualquier interacción de dos partículas.

En el caso de una colisión elástica tenemos  $m_1 = m_3$  y  $m_2 = m_4$  ya que las partículas no se desintegran ni mergen a una sola sino que en el estado final tenemos las mismas, aunque con diferente momento. Esto implica que  $k_i = k_f$ , y entonces (en CM):

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2 S} |\bar{T}|^2 d\Omega$$

La matriz de reacción  $|\bar{T}|^2$  la podemos calcular por perturbaciones, esto es lo que veremos ahora y es lo que nos permite volver a los experimentos y así conectar la teoría con el experimento.

## 5.6 Amplitud de dispersión y teoría de perturbaciones

La ilustramos para un caso concreto. La teoría de interacción más simple es la de un campo escalar complejo (para  $e^-$ ,  $e^+$ ) y un campo escalar real para fotones, que serán ya suficientemente complicados como para ver las dificultades que saldrán.

Sea  $\psi$  el campo escalar complejo de espín cero y  $\phi$  el campo escalar real escribimos la densidad lagrangiana del sistema:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \psi)^* (\partial_\mu \psi) - M^2 \psi^* \psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \alpha v \phi \psi^* \psi$$

Que lo podemos escribir como  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}'$  identificando:

$$\mathcal{L}' = -\alpha v \phi \psi^* \psi = -\alpha v \phi |\psi|^2$$

Donde escribimos las componentes de la matriz de Scattering S, como:

$$S_{if} = \langle f | S | i \rangle = \langle f | \mathcal{T} e^{i \int d^4 x \mathcal{L}'(\hat{\phi}, \hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger)} | i \rangle$$

Donde la exponencial se interpreta como la suma infinita  $1 + iS + \frac{1}{2!} S^2 + \dots$  del desarrollo en serie de Taylor, que si el término  $\alpha$ , que me da idea de la influencia del término perturbativo en el sistema completo, es pequeño, entonces puedo cortar la serie, aproximándola a la primera contribución no trivial.

Consideremos un proceso en que dos partículas  $\psi\psi$  interaccionan para dar lugar a otras  $\psi\psi$ , esto es  $\psi\psi \rightarrow \psi\psi$ :

(insertar figura)

Aquí  $|i\rangle = |\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle$  y  $|f\rangle = |\vec{k}_3, \vec{k}_4\rangle$  con  $\vec{k}_i \neq \vec{k}_j$  si  $i \neq j$ , es decir, las 4 k's son diferentes.

Los campos libres se ponen en términos de operadores creación y destrucción, de forma que cuando multiplique los campos queden términos del tipo  $ab^\dagger \dots ba^\dagger \dots$  es decir, una sucesión de operadores creación y destrucción de partículas y antipartículas. Yo tengo que destruir dos partículas, y el primer operador que me hace eso es<sup>17</sup>  $S^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= -\frac{1}{2!} \mathcal{T} \left( \int dx \int dx' \hat{\mathcal{L}}'(x) \hat{\mathcal{L}}'(y) \right) = -\frac{\alpha^2}{2!} v^2 \mathcal{T} \left( \int dx \int dy \hat{\phi}_x \hat{\psi}_x^\dagger \hat{\psi}_x \hat{\phi}_{x'} \hat{\psi}_{x'}^\dagger \hat{\psi}_{x'} \right) = \\ &= -\frac{\alpha^2}{2!} v^2 \int dx \int dx' \mathcal{T}(\hat{\phi}_x \hat{\phi}_{x'}) \mathcal{T}(\hat{\psi}_x^\dagger \hat{\psi}_x \hat{\psi}_{x'}^\dagger \hat{\psi}_{x'}) \end{aligned}$$

Vamos a escribir ahora la expresión de los campos, pero antes introducimos:

$$d\tilde{k} = \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k}$$

para poder escribirlos más cómodamente, como sigue:

$$\hat{\psi}_x = \int d\tilde{k} \left( \hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{b}_k^\dagger e^{ikx} \right) \quad \hat{\psi}_x^\dagger = \int d\tilde{k} \left( \hat{a}_k^\dagger e^{ikx} + \hat{b}_k e^{-ikx} \right)$$

Pero realmente, para lo que nos importa, como la parte de las b's nos da contribución nula, los escribimos:

$$\hat{\psi}_x = \int d\tilde{k} \hat{a}_k e^{-ikx} \quad \hat{\psi}_x^\dagger = \int d\tilde{k} \hat{a}_k^\dagger e^{ikx}$$

Introducimos a continuación el concepto de contracción: Pongamos que quiero calcular  $\langle 0 | \hat{\psi}_x | \vec{k} \rangle$ , lo que quiero que haga es destruir el estado  $|\vec{k}\rangle$ :

$$\langle 0 | \hat{\psi}_x | \vec{k} \rangle = \langle 0 | \hat{\psi}_x \hat{a}_k^\dagger | 0 \rangle = \int d\tilde{k} e^{-ik'x} \langle 0 | \hat{a}_{\vec{k}'} \hat{a}_k^\dagger | 0 \rangle$$

---

<sup>17</sup>Aquí hacemos un cambio de notación, llamamos de ahora en adelante a  $\int d^4x$  como  $\int dx$ .