

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

Estudo da turbulência bidimensional na instabilidade de Kelvin-Helmholtz: descrição fenomenológica

Vítor de Oliveira Sudbrack

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Física, sob a orientação da Prof.^a Dra. Rita M. C. de Almeida (UFRGS) e coorientação do Prof. Dr. Alexei A. Mailybaev (IMPA).

Porto Alegre - RS

2018

Agradecimentos

Começo agradecendo aos meus pais, Marta de Oliveira e Günter Sudbrack, por não medirem esforços no seu apoio para eu chegar aqui. Estendo meus agradecimentos a toda família, em especial para Marília, Grace e Nelly Sudbrack.

Meu obrigado ao CNPq pelo investimento financeiro neste projeto de iniciação científica que rendeu os frutos sobre os quais escrevo aqui.

Agradeço ao Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (IF-UFRGS) pelo ambiente criativo e amigável que me proporcionou. Aos seus docentes, por todas as lições. Em especial, aos professores Rita de Almeida, Leonardo Brunnet e Daniel Gamermann pelas suas orientações, seu apoio e sua confiança ao longo da minha história nesta Academia.

Agradeço também ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) pelos espaços que me dispuseram e pelos recursos que investiram em mim. Sobre tudo, ao professor Alexei Mailybaev por me introduzir e guiar no tópico deste Trabalho de Conclusão e ao pós-doutorando Simon Thalabard pelas horas de ensinamentos e discussão.

Reconheço também o apoio dos colegas de aula, dos colegas de laboratório e dos amigos, tanto os de longa data quanto os que fiz durante a graduação, dentro e fora da Universidade. Agradeço por ter contado com o apoio e a ajuda de cada um de vocês e as oportunidades que vocês me abriram.

Sou grato, por fim, a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação: o meu muito obrigado.

*Everything should be made as simple as possible, but
not simpler.*

-A. Einstein (paráfrase, 1977)

Resumo

Turbulência é um fenômeno comumente visto no dia-a-dia em que o campo de velocidades do escoamento de um fluido segue um comportamento altamente variável e difusivo. A instabilidade de Kelvin-Helmholtz (IKH) ocorre quando duas camadas de fluido que apresentam movimento relativo entre si são perturbadas, levando à turbulência. A descrição teórica da turbulência bidimensional ainda é um problema em aberto da física clássica, com grandes contribuições de Kolmogorov, e Kraichnan, Leith e Batchelor (KLB) para situações de forçamento localizado e isotropia. Não há descrição teórica na literatura sobre turbulência bidimensional com entrada de energia não-localizada espectralmente e anisotrópica, como o caso da turbulência gerada pela IKH. Neste trabalho, mostramos as características da turbulência bidimensional causada pela IKH através de diversas simulações numéricas. Descrevemos o comportamento do espectro e o fluxo de energia para IKH a partir de simulações em diferentes resoluções da equação de Navier-Stokes para um fluido viscido através do método espectral; e métodos de vórtices pontuais para o caso de fluidos invíscidos. Definimos escalas características de tempo e comprimento, invariantes frente à resolução ou método, o que permite comparar perfis, espectros e fluxos das diferentes simulações entre si. Derivamos analiticamente as leis de potência para a distribuição espectral inicial de energia, tanto da descontinuidade tangencial, quanto da perturbação, nos casos em que esta é equipartida em energia ou em enstrofia. Verificamos que a isotropia é progressivamente restaurada no problema, e que a distribuição espectral de energia para fluidos viscidos e invíscidos não parece seguir as mesmas leis de potência. Um fluxo de energia para grandes escalas é observado, assim como um fluxo de enstrofia crescente para as pequenas escalas. Damos evidências numéricas para a existência de um limite invíscido não-trivial para a Eq. de Navier-Stokes no caso da IKH. Esse estudo mostra que o mecanismo físico é complexo devido às transferências entre múltiplas escalas, o que não é descrito pelas teorias clássicas de cascatas de energia e de enstrofia. O mecanismo atuante em si precisa ser melhor elucidado teoricamente.

Palavras-chave: Turbulência bidimensional completamente desenvolvida. Instabilidade de Kelvin-Helmholtz. Fluidodinâmica computacional.

Abstract

Turbulence is an everyday phenomenon in which the velocity field of a fluid flow has a highly diffusive and varying behavior. Kelvin-Helmholtz instability (IKH) occurs when the interface of two fluid layers presenting relative motion is perturbed, generating turbulence. The theoretical description of bidimensional turbulence is an open problem in classical physics, with great contributions of Kolmogorov and Kraichnan, Leith and Batchelor (KLB) to local forcing and isotropic scenarios. There is no theoretical description in the literature of bidimensional turbulence with a spectrally non-localized input of energy and space anisotropy, which is the case of IKH generated turbulence. In this monograph, we show the characteristics of bidimensional turbulence caused by IKH via numerical simulations. We describe the behavior of energy spectra and flux through different resolutions of Navier-Stokes direct numerical simulation for a viscous fluid, using spectral methods; and Point Vortex methods for ideal fluids. We define time and length scales, invariant to resolution and method, which allow us to compare profiles, spectra, and fluxes from different simulations. The initial spectra power laws are derived analytically for the tangential discontinuity as well as the perturbation, in cases it is equally distributed in energy or enstrophy. We verify that the isotropy is progressively restored into the system, and the spectral distribution of energy does not seem to follow the same power laws. An energy flux towards greater scales is observed as well as a downward flux of enstrophy. We give numerical evidence to a non-trivial vanishing viscosity limit to Navier-Stokes Equation in IKH. This study shows that the physical mechanism is complex due to energy and enstrophy transfers between multiple scales, which is not described by classical cascade theories. The acting mechanism itself needs to be further elucidated.

Key-words: Fully developed bidimensional turbulence. Kelvin-Helmholtz instability. Computational fluid dynamics.

Sumário

1	Introdução	1
2	Mecânica dos fluidos em espaços bidimensionais	5
2.1	Equação da continuidade e condição de incompressibilidade	6
2.2	O fluido ideal (invíscido) e a Eq. de Euler	6
2.3	O fluido viscido e a Eq. de Navier-Stokes	8
3	Princípios de turbulência bidimensional	10
3.1	Leis de conservação	12
3.2	Transporte espectral de energia e enstrofia	14
3.3	Espectro de energia segundo teorias clássicas de turbulência	16
4	Instabilidade de Kelvin-Helmholtz	20
4.1	Campo de velocidades da IKH em 2D	20
4.1.1	Instabilidade de descontinuidades tangenciais no campo de velocidades	20
4.2	Campo de vorticidade da IKH	22
5	Metodologia	25
5.1	Método Espectral para a Eq. de Navier-Stokes (DNS)	25
5.1.1	A equação de movimento no espaço de Fourier	28
5.1.2	Processo de filtragem e atenuação do espectro	29
5.2	Método de Vórtices Pontuais (PV)	30
5.3	Método de Vórtices em caixas (ViC)	32
5.4	Método Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4)	33
6	Resultados e discussões	35
6.1	Comparação dos Métodos ViC e PV	36
6.2	Análise qualitativa da formação de estruturas	37
6.3	Escalas de comprimento	39
6.4	Perfis de vorticidade média	40
6.5	Espectros de energia e enstrofia e fluxos	41

Conclusão	47
Referências	49

Capítulo 1

Introdução

Turbulência está presente na natureza em todas as escalas espaciais ou temporais: ao derramar leite em uma xícara de café até a formação de galáxias no universo. Sua relevância tem dois aspectos fundamentais: i) é o ponto de partida para compreensão de inúmeros fenômenos, como o movimento de ciclones tropicais, a mistura de espécies químicas na atmosfera, alguns processos magnetodinâmicos e oceanográficos e a dinâmica de correntes no fundo dos oceanos; e ii) constitui um interessante problema físico e matemático com suas peculiaridades e estranhezas [1, 2].

Intuitivamente temos a noção de turbulência como uma situação de completo caos no movimento do fluido, como ilustrado na fotografia da Fig. 1.1. Historicamente, a palavra tem origem comum a "tumulto", i.e., movimentos bagunçados e dispersivos. Porém, na verdade, ao analisarmos de perto a figura, vemos que há padrões e formas. Isso porque, na turbulência, há dois aspectos fundamentais e essencialmente opostos: um ordenado e outro desordenado. A figura da turbulência não pode ser descrita como algo totalmente randômico, há um nível de padrões estruturais que segue um equação de movimento conhecida. Também seria exagerado afirmar que é possível descrever o movimento de cada parte do fluido com exatidão, há um nível de desordem que pode ser inserido no problema de forma estocástica.

Talvez a melhor analogia possa vir da meteorologia, afinal, a atmosfera é um fluido turbulento, caso contrário poderíamos prever o tempo com exatidão de meses! E aqui, a palavra "tempo" é chave, pois na verdade, o comportamento médio, designado clima (estação do ano, trópico, temperatura média, ...), é passível de previsões, em algum nível de precisão, para meses, anos, e até décadas. Este é o aspecto ordenado da turbulência, o padrão em grandes escalas. Por outro lado, o tempo é caótico e variável, podendo ser estimado por alguns dias. Ele é análogo ao aspecto desordenado da turbulência. Num cenário como o da Fig. 1.1, esses aspectos aparecem no espaço e, portanto, podem ser separados por uma transformada de Fourier, passando das variáveis de posição para variáveis de escala, $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{k}$. Assim, comportamentos que variam lentamente são observados nos pequenos valores de módulo k do vetor de onda, enquanto que os comportamentos oscilatórios são observados nos vetores de onda de grande módulo.

Um fluido confinado em um espaço tridimensional num estado de não-equilíbrio e na presença

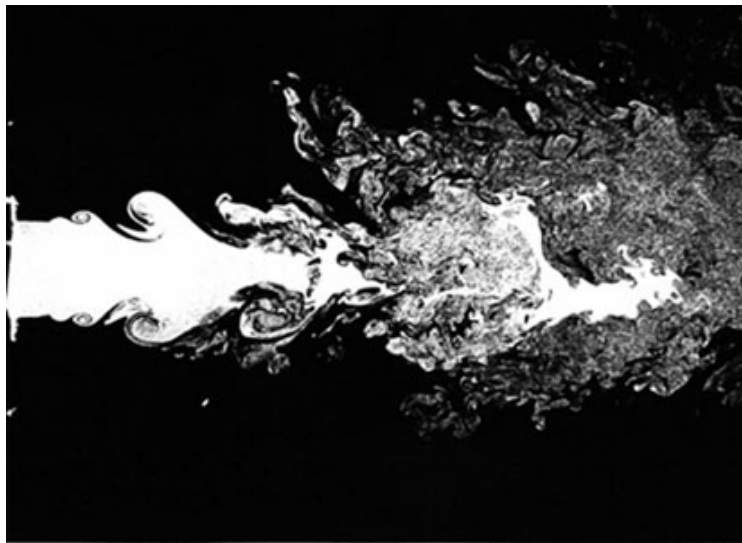


Figura 1.1: Um fluxo turbulento de um jato. Créditos pela fotografia: Turbulence Research Laboratory, Columbia University.

de viscosidade tem sua energia carregada para números de onda maiores (escalas espaciais menores) até atingir um número de onda grande o suficiente para que a dissipação viscosa domine, dizimando a energia até o fluido chegar ao repouso. Já no caso de um confinamento bidimensional, onde a vorticidade ao quadrado média, assim como a energia, são constantes do movimento invíscido, então o cenário é significativamente diferente, a ponto de não haver estado de equilíbrio. Excitações de modos de número de onda medianos no fluido geram um fluxo de energia para números de onda menores e de enstrofia para números de onda maiores. Esses fluxos de energia e enstrofia são chamadas de cascata inversa e cascata direta, respectivamente, e levam energia para escalas espaciais cada vez maiores no sistema. Assim, a turbulência em um fluido bidimensional tem o caráter incomum de se auto-organizar em estruturas, ditas coerentes, cada vez maiores à medida que o tempo passa [3].

Quase todos os estudos teóricos sobre turbulência têm sido limitados ao estudo do espectro de energia e enstrofia, ou equivalentemente, a funções de correlação, pois se tem enfrentado grande dificuldade em fazer mais do que isso. Felizmente, alguma informação sobre a forma espacial destes escoamentos turbulentos tem surgido a partir de experimentos computacionais e laboratoriais e a observação de escoamentos na natureza [3]. Ainda assim, a maior parte do conhecimento gerado se restringe à turbulência para condições iniciais suaves e excitações externas em janelas de números de onda não muito extensas. Neste trabalho, estaremos interessados em estudar a evolução temporal de um fluido bidimensional em que a condição inicial do campo de velocidades não é suave, o que faz com que tenhamos energia inicialmente armazenada em todos os números de onda.

Para tanto, estudaremos um cenário particular da turbulência bidimensional que foi descrito pela primeira vez por Lord Kelvin e Hermann von Helmholtz no meio do século XIX. A instabilidade de Kelvin-Helmholtz (IKH) ocorre quando duas camadas de um fluido deslizam uma sobre a outra

com movimento relativo entre si, i.e., há a presença de uma descontinuidade tangencial no campo de velocidades. Essa configuração é instável e pequenas perturbações periódicas na superfície de descontinuidade têm suas amplitudes aumentadas exponencialmente ao decorrer do tempo [4]. Por não existir a derivada primeira espacial em um ponto da condição inicial, a equação de movimento para um fluido invíscido (Equação de Euler) contém infinitas soluções, ditas soluções fracas [5]. Com o objetivo de buscar a solução do problema físico, recorreremos ao estudo de estocacidade em equações diferenciais, onde buscamos, então, uma distribuição de probabilidade para cada uma das possíveis soluções fracas do problema matemático.

A IKH está presente em vários cenários visto que ela se manifesta sempre que há duas correntes de matéria com movimento relativo entre si. Em astronomia, nas manchas solares e manchas nos gigantes gasosos, como Júpiter e Saturno, são exemplos da manifestação da IKH. Em meteorologia, quando camadas de ar na atmosfera apresentam movimento relativo, nuvens com um formato bem determinado pela dinâmica da instabilidade se formam. Em oceanografia, é um mecanismo de formação das ondas na superfície, quando há diferença entre a velocidade da água e do ar acima, e recentes estudos indicam a presença da dinâmica no fundo dos oceanos, através de uma rede de mapeamento de temperaturas [2]. Matematicamente, a IKH é uma fonte interessante para obtenção de informações sobre turbulência, que constitui um campo secular de intensa pesquisa e que contém uma gama de problemas e questionamentos em aberto.

Esse trabalho tem como objetivo discutir aspectos teóricos sobre turbulência bidimensional em fluidos, abordando tópicos relacionados, como mecânica dos fluidos, simetrias e leis de conservação, e também descrever métodos numéricos de integração para as equações de movimento descritas. Ao final, deseja-se comparar a integração numérica da equação de movimento contínuo (para um fluido viscoso) com o método discreto de vórtices pontuais (para um fluido invíscido), verificando o comportamento das distribuições espectral de energia e seu fluxo em diferentes cenários. O trabalho descrito nessa monografia, focado na parte de revisão de bibliografia e simulação computacional, integra o trabalho teórico realizado pelo laboratório de dinâmica dos fluidos do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Fluid - IMPA), que busca modelos teóricos que descrevem turbulência em cenários como o da IKH.

A seguir, apresentaremos uma breve revisão sobre mecânica de fluidos, apresentando conceitos e definições para as principais equações da fluidodinâmica, a equação de Euler e a equação de Navier-Stokes, que serão mencionadas ao decorrer de todo o trabalho. Discutiremos então alguns princípios de turbulência bidimensional, como sua definição, a quebra e a reposição de simetrias do sistema, as leis de conservação associadas e seus fluxos. Discutiremos algumas teorias clássicas de turbulência. Ainda nas fundamentações teóricas, abordaremos o problema da IKH em duas abordagens: teoria de perturbação sobre a equação de movimento de um fluido ideal e aproximação por vórtices pontuais. Então, na metodologia, apresentaremos os métodos numéricos robustos utilizados para simular as equações não-lineares descritas. Descreveremos o método espectral de integração numérica de equações diferenciais parciais (EDPs) e mostraremos algumas considerações

importantes a serem tomadas com respeito à condição inicial. Descreveremos também o método de vórtices pontuais utilizado e a sua otimização, chamado método de vórtice em caixas. Por fim, apresentamos e discutimos os principais resultados descritivos obtidos com este trabalho.

Capítulo 2

Mecânica dos fluidos em espaços bidimensionais

A fluidodinâmica se preocupa com o estudo do movimento de fluidos: líquidos ou gases. Como os fenômenos são estudados do ponto de vista macroscópico, assumimos que um fluido é um meio contínuo, no sentido de que cada elemento de volume, por menor que seja, contém uma quantidade de constituintes muito grande. Esta é a *hipótese do contínuo*. Desta ideia, caracterizamos o estado de movimento de um fluido bidimensional como um campo vetorial de velocidades $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, t) \in \mathbb{R}^2$ e o estado termodinâmico por dois campos escalares, por exemplo, pressão $p = p(x, y, t)$ e densidade $\rho = \rho(x, y, t)$. Esses quatro campos devem ser entendidos, sob a hipótese de contínuo, como o valor médio da respectiva grandeza em um elemento de volume do fluido ao redor da posição (x, y) no instante de tempo t e determinam um estado físico único ao fluido, no sentido de que qualquer outra grandeza pode ser obtida a partir da equação de estado do fluido.

A descrição acima, em que as grandezas são funções da posição (x, y) de um referencial fixo e do tempo, é dita uma visão, ou descrição, euleriana do fluido. Por outro lado, é possível escrever as grandezas, por exemplo velocidade, como $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{a}, t)$, onde \mathbf{a} é a posição do elemento de volume em algum instante prévio fixo. Esta seria a visão (ou descrição) lagrangiana do fluido, i.e., para um ponto \mathbf{a} fixo, as grandezas acompanham o movimento do fluido que estava nessa posição ao decorrer do tempo. Portanto, na visão euleriana, o valor das grandezas é obtido perguntando-se "Qual o valor da grandeza que está neste instante aqui?", enquanto que na visão lagrangiana nos perguntamos "Qual o valor da grandeza agora, na região do fluido que estava anteriormente neste ponto?".

O texto que segue apresenta os principais resultados em fluidodinâmica, cujas deduções e exemplificações detalhadas são apresentadas, por exemplo, nos primeiros capítulos do livro de Landau e Lifshitz [4]. Nos restringiremos ao estudo do caso específico deste trabalho, que são fluidos incompressíveis em duas dimensões. As equações mais usadas nos métodos numéricos utilizados aparecem emolduradas.

2.1 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE E CONDIÇÃO DE INCOMPRESSIBILIDADE

Primeiramente, a noção da taxa de variação no tempo de uma grandeza escalar no fluido deve ser repensada. Na visão euleriana, uma grandeza, além variar explicitamente no tempo, também é carregada pelo fluido, acompanhando o seu movimento dado pelo campo de velocidades, $\mathbf{v} = (u, v)$. Define-se então a *derivada material, substancial ou convectiva* de uma grandeza escalar genérica $Z(x, y, t)$ como

$$\frac{DZ}{Dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + u \frac{\partial Z}{\partial x} + v \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)Z.$$

A interpretação física da derivada material é a conexão entre as visões euleriana e lagrangiana, i.e., a derivada temporal do ponto de vista lagrangiano é a derivada material sobre o campo escalar do ponto de vista euleriano. Se Z obedece uma equação de transporte no fluido do tipo $DZ/Dt = 0$, Z é chamado de *marcador*. Grandezas como a temperatura, para as quais a equação de transporte é linear, são ditas *escalares passivos*.

A hipótese do contínuo nos permite definir um campo escalar de densidade $\rho = \rho(x, y, t)$. Pela conservação de massa imposta ao fluido, segue a equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.1)$$

onde $\rho \mathbf{v}$ é o fluxo de massa. Um fluido é dito homogêneo e incompressível quando sua densidade é constante. Sem perda de generalidade, assumimos $\rho = 1$ em todo espaço e para todo tempo. A Eq. (2.1) então se resume a $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ e é automaticamente satisfeita em duas dimensões escrevendo o vetor velocidade em termos de uma nova função suave ψ ,

$$\mathbf{v} = (u, v) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (2.2)$$

chamada *função de corrente*. Em um escoamento estacionário, as linhas de corrente do fluido que são definidas como as linhas tangentes ao campo de velocidade em todos os pontos, e que podem ser pensadas como as trajetórias dos elementos de volume do fluido. Essas linhas de corrente são os níveis equipotenciais da função de corrente, uma vez que $\mathbf{v} \cdot \nabla \psi = 0$. Para dois escoamentos incompressíveis, a soma das funções de corrente de cada um é igual à função de corrente obtida se os dois escoamentos fossem superpostos.

2.2 O FLUIDO IDEAL (INVÍSCIDO) E A EQ. DE EULER

Analisaremos agora o modelo de um fluido ideal, definido como um fluido (homogêneo e incompressível) cujos elementos de volume sofrem apenas forças normais à sua superfície. Portanto, um fluido ideal não é afetado por tensões cisalhantes e diz-se que é invíscido. Esse modelo foi proposto por Leonhard Euler em 1757, que entrou o balanço de momentum linear para tal sistema no trabalho

"Principes généraux du mouvement des fluides".

Considere que sobre a superfície de um elemento de volume qualquer desse fluido há uma força perpendicular causada pela pressão isotrópica, cuja densidade por área é $-p\hat{n}$. A força total sobre este elemento de volume é

$$-\oint_S p\hat{n}d\sigma = -\int_V \nabla p dV,$$

onde relacionamos a força por elemento de área ($d\sigma$) com o gradiente da pressão por elemento de volume (dV) através do teorema do gradiente.

Concluimos então pela II Lei de Newton que a variação material do momentum linear em um elemento de volume deve ser igual à força resultante por elemento de volume que atua sobre o fluido ideal, que é exclusivamente oriunda da pressão. Temos então a Equação de Euler para um fluido incompressível

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p, \quad (2.3)$$

que são duas equações diferenciais parciais não-lineares acopladas. O termo não-linear é dito advectivo.

Como o campo de velocidades está confinado a duas dimensões, seu rotacional é perpendicular ao plano do fluido. Definimos então o campo escalar de vorticidade a partir da componente do rotacional do campo de velocidades perpendicular ao movimento do fluido, i.e.,

$$\omega(x, y, t) = (\nabla \times \mathbf{v})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

A partir da substituição da identidade vetorial $\frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ no lado esquerdo da Equação de Euler, podemos igualar o rotacional dos dois lados da Eq. (2.3) e escrever

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega). \quad (2.4)$$

A grande vantagem dessa equação é que reduz a quantidade de variáveis indeterminadas, pois uma vez que o rotacional de um campo gradiente é identicamente nulo, a pressão não entra na Eq. (2.4). Ao abrirmos o lado direito da equação, é possível escrever a equação de movimento em termos da função de corrente e vorticidade, chamada *formulação vorticidade-função corrente*:

$$\boxed{\frac{\partial \omega}{\partial t} = -u \frac{\partial \omega}{\partial x} - v \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}} \quad (2.5)$$

O lado direito da Eq. (2.5) é dito operador advectivo $J(f, g) = \partial_x f \partial_y g - \partial_x g \partial_y f$. O nome faz referência ao fato dele carregar a não-linearidade do termo advectivo da equação de Euler para o campo de velocidades. A Eq. (2.5) se torna $\partial_t \omega = J(\psi, \omega)$. Ambos argumentos do operador advectivo estão diretamente relacionados, através do uso das definições de função de corrente e de vorticidade,

por uma equação de Poisson

$$\boxed{\nabla^2 \psi = -\omega} \quad (2.6)$$

Sobre a vorticidade em fluidos invíscidos, mencionamos ainda a definição de circulação sobre uma curva fechada \mathcal{C} no interior do fluido:

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \omega d\sigma ,$$

onde $d\mathbf{r}$ é um elemento de arco da curva fechada \mathcal{C} e S é a superfície que a curva delimita. A relação acima é obtida através do Teorema de Stokes. O Teorema de Kelvin (1869) afirma que a circulação em qualquer curva fechada do fluido ideal o acompanha e permanece constante. Em outras palavras, se uma massa de fluido apresenta circulação não-nula em um dado instante sobre uma curva, essa circulação se conserva à medida que a massa se desloca e a curva se deforma [6]. Fisicamente, é devido à conservação de momento angular para um elemento de volume, definido com respeito ao seu centro de massa [7]. Como consequência, a vorticidade é um marcador em um fluido ideal, $D\omega/Dt = 0$.

2.3 O FLUIDO VÍSCIDO E A EQ. DE NAVIER-STOKES

Um modelo para fluidos mais realístico deve comportar a viscosidade cinemática, ν , que fluidos apresentam, em especial quando aderem sobre uma superfície. A nova equação de movimento, agora chamada equação de Navier-Stokes, contém um novo termo viscoso relacionado às tensões tangenciais às superfícies do elemento de volume do fluido analisado:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} . \quad (2.7)$$

A proposta de adição de um termo dissipativo na equação de Euler foi feita pelo francês C.L. Navier em 1822, baseando-se em analogias com corpos elásticos. Uma justificativa correta baseada na manifestação do efeito viscoso em um meio contínuo foi elaborada pelo inglês G. G. Stokes em 1845.

Ainda, a partir de um reescalonamento das variáveis posição ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}/L$), velocidade ($\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}/V$), pressão ($p \rightarrow p/V^2$) e tempo ($t \rightarrow tL/V$) é possível escrever uma equação universal, definindo um número adimensional para caracterizar o escoamento: o número de Reynolds (Re), dado por $Re = LV/\nu$, onde L e V são distâncias e velocidades características do sistema. A equação de movimento nessas novas variáveis se torna

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} . \quad (2.8)$$

O *princípio da similaridade* para um escoamento incompressível garante que, para uma dada geometria da condição de contorno, o número de Reynolds é o único parâmetro de controle do escoamento. Ele se torna ainda mais fundamental no estudo da turbulência pois estima a razão entre

os termos advectivo e dissipativo, i.e.,

$$Re \sim \frac{[(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}]}{[\nu \nabla^2 \mathbf{v}]} \sim \frac{LV}{\nu}.$$

O número de Reynolds varia muito em aplicações. O escoamento de sangue nos órgãos apresenta número de Reynolds da ordem de 100. Escoamentos da rede hidráulica da ordem 10^4 , escoamentos atmosféricos na ordem de 10^7 , e um navio de grande porte no oceano da ordem de 10^9 [8].

Novamente, é possível encontrar uma equação de movimento em que a pressão não está presente tomando o rotacional da Eq. (2.7) e utilizando a mesma identidade vetorial anterior. Temos então que

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega) + \nu \nabla^2 \omega. \quad (2.9)$$

Onde a vorticidade é definida da mesma forma que no fluido ideal. Agora, o fluido não só transporta a vorticidade como a difunde, satisfazendo $D\omega/Dt = \nu \nabla^2 \omega$. No caso de um fluido incompressível em duas dimensões, é novamente possível escrever a equação de Navier-Stokes na formulação vorticidade-função corrente [9]:

$$\boxed{\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \omega - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}} \quad (2.10)$$

Ou simplesmente, $\partial_t \omega = \nu \nabla^2 \omega + J(\psi, \omega)$. A função de corrente e a vorticidade estão relacionadas pela mesma Eq. (2.6).

Capítulo 3

Princípios de turbulência bidimensional

A turbulência em um escoamento surge quando não há infinitésimo de volume do fluido pequeno o suficiente para que a média das grandezas esteja bem definida, i.e., a velocidade média varia conforme o tamanho do elemento de volume considerado, a ponto de não haver um limite. Isso gera um campo de velocidades altamente variável e anormalmente difusivo.

Escoamentos turbulentos podem surgir a partir de certas condições iniciais ou condições de contorno impostas sobre as equações de movimento. Essas perturbações num escoamento inicialmente laminar são amplificadas, em especial quando o termo dominante é o termo advectivo não-linear (i.e., $Re \rightarrow \infty$), conforme observado por Osborn Reynolds em 1883. Definições e classificações precisas de turbulência não são unívocas, porém descreveremos a turbulência completamente desenvolvida a partir de ideias de perda e restauração de simetrias em um exemplo concreto [1].

Para tanto, consideraremos experimentos onde fluidos escoam com diferentes números de Reynolds (Re) contornando um objeto cilíndrico imóvel. Nesse caso, o comprimento característico L é o diâmetro do cilindro e a velocidade característica é a velocidade V do fluido muito distante do cilindro paralela ao eixo horizontal, conforme o desenho esquemático da Fig. 3.1. No primeiro experimento com $Re = 0.16$, é possível observar as seguintes simetrias nas linhas de corrente:

(S1) Reflexão horizontal $((x, y) \rightarrow (-x, y), (u, v) \rightarrow (-u, v))$;

(S2) Reflexão vertical $((x, y) \rightarrow (x, -y), (u, v) \rightarrow (u, -v))$;

(S3) Inversão temporal $(t \rightarrow -t, (u, v) \rightarrow (-u, -v))$.

Onde as reflexões em (S1) e (S2) são tomadas em torno dos diâmetros vertical e horizontal do cilindro, respectivamente. É fácil verificar que a reflexão horizontal (S1) não é uma simetria intrínseca da Eq. (2.7), pois o termo não-linear não se transforma como os demais. De fato, uma inspeção cuidadosa do experimento mostra que a reflexão horizontal não é exata, o que fica mais evidente para $Re = 13$.

Ao aumentar o número de Reynolds, o efeito da falta de simetria do termo advectivo não-linear torna-se cada vez mais evidente. Por volta de $Re = 40$, indicado na Fig. 3.1, ocorre a primeira quebra

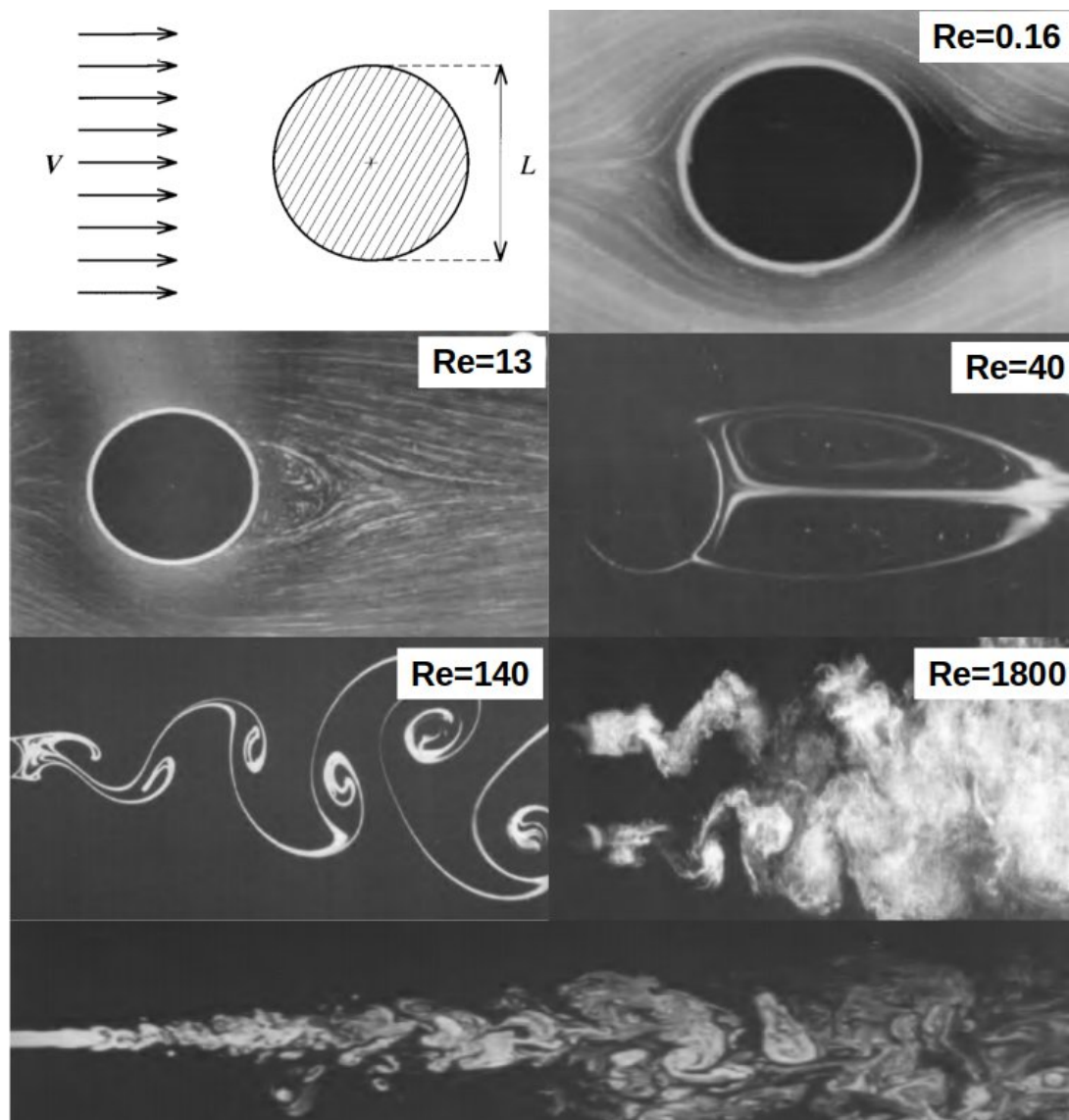


Figura 3.1: Experimento de um fluido contornando um objeto circular, conforme esquema do primeiro quadro. Fotografias do experimento para escoamentos com diferentes números de Reynolds (Re). É possível verificar perdas e restaurações de simetrias espaço-temporais. Ao final, um escoamento apresentando turbulência completamente desenvolvida. Figuras editadas a partir de imagens de Frisch, 1996; Fotografias de S. Taneda, R. Dumas e R. Lye.

de simetria espontânea, pela bifurcação de Andronov-Hopf, que faz com que o escoamento seja periódico no tempo, i.e., a translação temporal contínua passa a ser discreta com a formação do *Caminho de Von-Karman* de vórtices alternados. Uma quebra de simetria é dita ser espontânea, quando a simetria é consistente com a equação e as condições de contorno, porém não está presente na solução.

Quando $Re \approx 10^3$, agora com o fluido atravessando dois cilindros, vemos que há dois ou três redemoinhos distintos antes que os rastros se misturem, formando uma região de turbulência quase

uniforme. Essa é uma região de turbulência homogênea e isotrópica, visto que o aspecto não parece mudar sob rotações ou translações. Aqui, a simetria de translação temporal contínua ressurge longe dos cilindros.

Em resumo, ao aumentar o número de Reynolds, as várias simetrias do sistema foram sucessivamente quebradas. Entretanto, num número de Reynolds suficientemente grande, aparece a tendência da restauração de simetrias num sentido estatístico (e longe das bordas). Essa turbulência desenvolvida quando $Re \rightarrow \infty$, restaurando todas as simetrias em um sentido estatístico, é conhecida como *turbulência completamente desenvolvida*.

3.1 LEIS DE CONSERVAÇÃO

Passaremos a descrever agora leis de conservação das Equações de Euler e de Navier-Stokes. Para evitar efeitos de borda ou condições de contorno do domínio, tomaremos o fluido em um domínio infinito e periódico, considerando um quadrado de lado L . Ao tomarmos a média espacial de uma grandeza Z dentro do quadrado,

$$\langle Z \rangle(t) = \frac{1}{L^2} \int_{L \times L} Z(x, y, t) dx dy,$$

uma série de propriedades surgem como consequência da integração por partes [1]. Listadas para a variável x (e análogas para y), são elas

$$(P1) \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = 0;$$

$$(P2) \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} g \right\rangle = - \left\langle f \frac{\partial g}{\partial x} \right\rangle;$$

$$(P3) \quad \langle (\nabla^2 f) g \rangle = - \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} \right\rangle;$$

$$(P4) \quad \langle \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \rangle = \langle (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \rangle;$$

$$(P5) \quad \langle \mathbf{u} \cdot (\nabla^2 \mathbf{v}) \rangle = - \langle (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \rangle.$$

para funções f e g e campos vetoriais \mathbf{v} e \mathbf{u} diferenciáveis e derivada contínua.

No caso de um fluido incompressível ($\rho = 1$) em duas dimensões, é possível definir a sua energia (cinética) média¹ como a soma das contribuições de energia de cada elemento de volume do fluido

$$E = \frac{1}{2} \langle |\mathbf{v}|^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle u^2 + v^2 \rangle,$$

ou ainda, na formulação vorticidade-função corrente, a energia média pode ser escrita como $E = \frac{1}{2} \langle \psi \omega \rangle$, usando $f = g = \psi$ em (P3) [1, 9].

¹Em rigor, densidade de energia média, pois só faz sentido falarmos de energia média por janela $L \times L$ periódica do domínio. A mesma interpretação deve ser dada para as demais grandezas desta seção. Omitiremos o termo "densidade de".

A variação temporal da energia média pode ser computada fazendo o produto interno euclidiano da Eq. de Navier-Stokes pela própria velocidade \mathbf{v} ,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u^2 + v^2) = -\frac{\partial}{\partial x} (u^3 + uv^2) - \frac{\partial}{\partial y} (v^3 + vu^2) - u \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial p}{\partial y} + \nu u \nabla^2 u + \nu v \nabla^2 v.$$

Agora, tomando a média dos dois lados da equação, segue que pela propriedade (P1) os dois primeiros termos se anulam, utilizando a propriedade (P2) e a incompressibilidade os dois termos seguintes se anulam. Aplicando (P5) nos termos restantes, concluímos que

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle u^2 + v^2 \rangle = \nu \langle u \nabla^2 u + v \nabla^2 v \rangle = -\nu \langle \omega^2 \rangle.$$

É possível definir $\Omega = \frac{1}{2} \langle \omega^2 \rangle$ como a enstrofia média do fluido, que pode ser interpretada como uma quantificação da rotação total do fluido. Porque a vorticidade é um ingrediente fundamental da turbulência, a enstrofia tem papel de destaque em suas teorias. Relacionamos então os efeitos dissipativos de energia com a enstrofia

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial t} = -2\nu\Omega} \quad (3.1)$$

A variação temporal da enstrofia média também pode ser calculada, por sua vez, usando a Eq. (2.10). A propriedade (P4) faz com que o primeiro termo do lado direito do resultado se anule:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \left\langle \omega \frac{\partial \omega}{\partial t} \right\rangle = \langle \omega \cdot [\nabla \times (\mathbf{v} \times \omega)] + \nu \nabla^2 \omega \rangle = \nu \langle \omega \cdot \nabla^2 \omega \rangle$$

Novamente, definimos uma quantidade chamada palinstrofia média como $P = \frac{1}{2} \langle |\nabla \times \omega|^2 \rangle$, ou seja, a média do módulo do rotacional do campo de vorticidade, chamado divorticidade, para quantificar a dissipação de enstrofia:

$$\boxed{\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -2\nu P} \quad (3.2)$$

Concluímos a partir dos balanços das Eqs. (3.1) e (3.2), que a energia e a enstrofia são invariantes do movimento de um fluido invíscido ($\nu = 0$). Pelo Teorema de Noether (1918), sabemos que invariantes do movimento estão relacionados com simetrias do sistema. A conservação de energia está relacionada com a simetria de inversão temporal da equação de Euler, enquanto que a conservação de enstrofia está relacionada com a simetria de remarcação (*relabeling*) da formulação lagrangiana do fluido, i.e., o mapa lagrangiano $a \mapsto x(a, t)$ é invariante frente a mudanças em a , que atua como um marcador no fluido. Em um fluido incompressível, o mapa lagrangiano é sempre invertível e é um resultado equivalente ao teorema de Kelvin na formulação euleriana.

Já para um fluido viscoso ($\nu \rightarrow 0$) em duas dimensões, energia e enstrofia não são constantes do movimento, mas sim são dissipadas ao longo do tempo. Ainda, a Eq. (3.2) mostra que a enstrofia é

limitada superiormente por seu valor inicial, $\Omega(t = 0)$. Sendo assim, a Eq. (3.1) então implica que $\partial E / \partial t \rightarrow 0$ no limite em que $\nu \rightarrow 0$, em duas dimensões. Portanto, energia e enstrofia são ditas invariantes fracas do movimento viscido, no sentido de que são apenas invariantes de fato no limite $\nu \rightarrow 0$.

Em três dimensões, a energia e a enstrofia não são invariantes fracos do movimento de um fluido. Isso se deve aos mecanismos de amplificação de vorticidade que não permitem chegar à mesma conclusão, adicionando um termo extra $\omega \cdot \nabla \mathbf{v}$ no equação de movimento, que é identicamente nulo em duas dimensões. Mesmo que $\nu \rightarrow 0$, pode ocorrer que $\Omega \rightarrow \infty$, de modo que a taxa de dissipação de energia tenha um limite finito, $\partial E / \partial t \rightarrow -\varepsilon$. Essa ideia é uma das hipóteses por trás da celebrada teoria de turbulência de Kolmogorov, que comentaremos mais a frente. Este fato faz com que a turbulência seja fundamentalmente diferente em duas e três dimensões.

Na turbulência bidimensional completamente desenvolvida ($Re \rightarrow \infty$ ou $\nu \rightarrow 0$), a energia não é dissipada pela viscosidade, mas sim dinamicamente transferida para as grandes escalas espaciais, o chamado efeito de cascata inversa [9]. O nome aponta para o fato de que, em três dimensões, as estruturas maiores cedem energia para as estruturas menores, que a perdem por efeitos viscosos. Os resultados obtidos aqui serão fundamentais na Seção 3.3, onde discutiremos as teorias para turbulência bidimensional completamente desenvolvida.

É possível notar que a derivação das propriedades iniciais (P1)-(P5) utilizadas nos cálculos da variação da energia e enstrofia, supõe campos de pressão e velocidade suficientemente suaves para permitir manipulações como a integração por partes e regra do produto. Essa suavidade é geralmente conjecturada no caso de fluidos viscosos, pois poucos resultados analíticos fornecem resultados precisos sobre a regularidade das equações de Euler ou Navier-Stokes ao longo do tempo [1].

3.2 TRANSPORTE ESPECTRAL DE ENERGIA E ENSTROFIA

Nos balanços de energia e de enstrofia, Eqs. (3.1) e (3.2), não há a presença do termo não-linear da Equação de Navier-Stokes. As dissipações encontradas são puramente oriundas do termo viscoso. Mostraremos agora que o papel do termo advectivo é redistribuir as quantidades entre as escalas espaciais sem afetar a quantidade média total. Para entendermos rigorosamente como a energia de cada escala é alterada e interage com as demais, calcularemos o fluxo de energia pelo espectro, i.e., em função do vetor de onda \mathbf{k} .

Seja K um número de onda arbitrário para então dividirmos a transformada de Fourier da velocidade como a soma de duas componentes: uma com os vetores de onda de módulo menor que K ; e outra com vetores de onda cujo módulo é maior que K [1]. Sabemos que a transformada de Fourier do campo de velocidades é discreta devido à periodicidade do domínio.

Tomando a transformada inversa de cada intervalo de soma descrito, tem-se que $\mathbf{v}_K^<(\mathbf{x}, t)$ possui portanto as oscilações menores que $2\pi/K$ da função $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, enquanto a função $\mathbf{v}_K^>(\mathbf{x}, t)$ possui as

maiores. Ou seja, a decomposição

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k \leq K} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \sum_{k > K} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \mathbf{v}_K^<(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}_K^>(\mathbf{x}, t)$$

atua fisicamente como um processo de filtragem, com um filtro passa-alta e um filtro passa-baixa, sendo o ponto de divisão o círculo de raio K no espaço de Fourier. Omitiremos o ponto de corte K subscrito. A decomposição realizada em uma função f qualquer pode ser vista no exemplo na Fig. 3.2 [1].

Inserindo essa decomposição dentro da equação de Navier-Stokes, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}^< + \mathbf{v}^>) + [(\mathbf{v}^< + \mathbf{v}^>) \cdot \nabla](\mathbf{v}^< + \mathbf{v}^>) = -\nabla p + \nu \nabla^2(\mathbf{v}^< + \mathbf{v}^>) .$$

Fazendo uma série de manipulações, aproveitando a linearidade dos operadores diferenciais, tomando o produto interno euclidiano por $\mathbf{v}^<(\mathbf{x}, t)$ em ambos os lados e igualando a média espacial, concluímos que

$$\left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{v}^<|^2 \right\rangle + \langle \mathbf{v}^< \cdot ([\mathbf{v}^< \cdot \nabla] \mathbf{v}^>) \rangle + \langle \mathbf{v}^< \cdot ([\mathbf{v}^> \cdot \nabla] \mathbf{v}^>) \rangle = \nu \langle \mathbf{v}^< \cdot \nabla^2 \mathbf{v}^< \rangle .$$

Usamos o fato que de, devido às escalas espaciais serem diferentes, as correlações do tipo $\langle \mathbf{v}^<(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}^>(\mathbf{x}, t) \rangle$ se anulam. Por fim, pelas propriedades (P1) e (P2) das condições de contorno, o termo de pressão se anulou.

É possível verificar a influência do termo viscoso que atua sobre cada setor independentemente e,

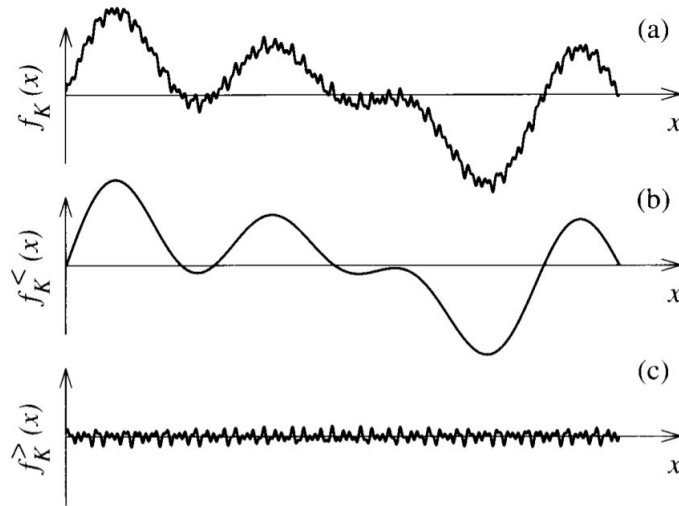


Figura 3.2: Uma função exemplo, $f(x)$, onde se aplicou um filtro que seleciona os modos de número de onda menores que K , $f_K^<(x)$; e a mesma função aplicando um filtro que seleciona os números de onda maiores que K , $f_K^>(x)$. Fonte: Frisch, 1996.

desta vez, o termo não-linear está presente, acoplando as variações temporais de $\mathbf{v}^<$ e $\mathbf{v}^>$. Definindo esse termo como o fluxo de energia entre as regiões do espectro maiores e menores que K , $\Pi_K = \langle \mathbf{v}^< \cdot ([\mathbf{v}^< \cdot \nabla] \mathbf{v}^>) \rangle + \langle \mathbf{v}^> \cdot ([\mathbf{v}^> \cdot \nabla] \mathbf{v}^<) \rangle$, e escrevemos

$$\frac{\partial E_K}{\partial t} = -\Pi_K - 2\nu\Omega_K. \quad (3.3)$$

Essa é a chamada *Equação de balanço de energia por escala*. E_K é chamada energia acumulada, uma vez que é a soma das energias por escala $E(k)$ de 0 até K , $E_K = \frac{1}{2} \sum_{k \leq K} |\tilde{v}^<(\mathbf{k}, t)|^2$.

Importante ressaltar a diferença na notação para energia acumulada, E_K , e para a energia em função do número de onda,

$$E(k) = \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{v}(\mathbf{k})|^2 = \frac{1}{k^2} \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{\omega}(\mathbf{k})|^2,$$

onde a soma é tomada sobre todo o anel de vetores de onda \mathbf{k} cujo módulo é k . A energia por escala $E(k)$ é a grandeza com a qual realmente trabalharemos ao decorrer deste trabalho. Diferenciando a Eq. (3.3) com respeito ao número de onda de corte é possível obter uma relação entre a energia por ela e o fluxo de energia a partir do Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\boxed{\frac{\partial E(k)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi}{\partial k} - 2\nu\Omega(k)} \quad (3.4)$$

Usaremos o resultado da Eq. (3.4) para normalizar o fluxo de energia em termos da dissipação viscosa. A enstrofia em função do número de onda, dada por $\Omega(k) = \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{\omega}(\mathbf{k})|^2$, pode ser relacionada com a energia por $\Omega(k) = k^2 E(k)$.

A interpretação física do fluxo calculado pode ser colocada da seguinte maneira: a transformada de Fourier de um produto de funções, é a convolução dessas funções, e em particular

$$\mathcal{F}\{f^2\}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}: \mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \mathcal{F}\{f\}(\mathbf{p}) \mathcal{F}\{f\}(\mathbf{q}),$$

e portanto, a equação acima explicita a interação de todos os trios de modos de oscilação com vetores de onda \mathbf{p} e \mathbf{q} tal que $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{k}$. Esse produto entre os modos causa a interação entre as escalas p e q e, consequentemente, um fluxo. De uma forma mais geral, o fluxo Π_K apresenta o produto da função f $(n+1)$ -vezes para uma equação diferencial com não-linearidade f^n .

Outra abordagem, ainda mais genérica para o estudo do fluxo de energia e enstrofia a partir de propriedades do tensor de fluxo, pode ser encontrada em [3].

3.3 ESPECTRO DE ENERGIA SEGUNDO TEORIAS CLÁSSICAS DE TURBULÊNCIA

O matemático russo Andrey Kolmogorov propôs a primeira teoria estatística de turbulência tridimensional completamente desenvolvida em 1941, baseado-se nas ideias de transferência de energia entre as diferentes escalas espaciais e no conceito de autossimilaridade, i.e., um escoamento

que apresenta as mesmas propriedades estatísticas em várias escalas.

A descrição teórica de Kolmogorov, Teoria K41, é até hoje muito celebrada, cunhando muitos termos vastamente usados e tendo resultados consistentes aos dados experimentais encontrados em escoamentos que seguem suas premissas. Kolmogorov postulou três hipóteses para escoamentos no limite de um número de Reynolds infinito [1]:

- (H1) Todas as possíveis simetrias da equação de Navier-Stokes, geralmente quebradas pelos mecanismos turbulentos, são reestabelecidas no sentido estatístico nas pequenas escalas e longe das bordas;
- (H2) O escoamento turbulento é autossimilar nas pequenas escalas, e portanto, possui um único expoente de escala h tal que a distribuição estatística das grandezas nas escalas $\lambda\ell$ e ℓ satisfazem $f(\lambda\ell) \stackrel{law}{=} \lambda^h f(\ell)$;
- (H3) O escoamento possui uma taxa finita e não-nula ε de dissipação de energia por unidade de massa, i.e., $-dE/dt \rightarrow \varepsilon$ quando $Re \rightarrow \infty$.

As ideias de Kolmogorov sobre universalidade assumiam que um escoamento é caracterizado unicamente pelos seus valores de ε e ν em uma escala ℓ . Com os parâmetros de suas hipóteses sobre o escoamento, o único comprimento característico que pode ser formado por análise dimensional é

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4},$$

que é conhecido como *Escala de dissipação de Kolmogorov*. Para escalas da ordem de η , os efeitos viscosos não podem ser negligenciados dentro do limite de $Re \rightarrow \infty$, e portanto os resultados da K41 necessitam correções [3, 1].

O comportamento do fluxo de energia depende da escala em que se observa. Em comprimentos menores ou próximos à escala de Kolmogorov η , temos a dissipação viscosa de energia. Em grandes escalas (i.e., comprimentos característicos das condições de contorno impostas, L) tem-se os mecanismos de entrada de energia. Essas duas escalas extremas, η e L , podem diferir por muitas ordens de magnitude, especialmente para números de Reynolds grandes.

Os fenômenos turbulentos encontram-se na região intermediária, $L \gg r \gg \eta$, conhecida por *região ou domínio inercial*, uma vez que o termo predominante na equação de movimento é o inercial (ou advectivo). O processo de entrada de energia em grandes escalas, transferência pela região inercial até as pequenas escalas, onde sofre dissipação viscosa, é a chamada cascata direta de energia [3, 1]. Na ausência de confinamento ou cortes em número de onda grandes, as cascatas podem se desenvolver livremente na dinâmica.

Para encontrar como a energia está distribuída entre os diferentes modos de oscilação, recorreremos novamente para análise dimensional, concluindo que

$$E(k) = F(\eta k) \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (3.5)$$

onde F é uma função universal e adimensional. Para um número de onda no domínio inercial, tem-se que $\eta k \ll 1$ e $F(\eta k) \rightarrow C$, a chamada *constante de Kolmogorov*. Esse é um dos resultados mais famosos da teoria de Kolmogorov e é verificado experimentalmente. No domínio inercial, portanto, os espectros de energia e enstrofia seguem uma lei de potência com k .

Inúmeras tentativas de se encontrar uma expressão para a função F foram feitas desde então. Sua universalidade frente a diferentes escoamentos também foi questionado por grandes nomes, como Landau (1944). Talvez, a observação mais interessante sobre a função F tenha sido feita por von Neumann (1949), que notou que uma função analítica tem uma transformada de Fourier cujo módulo cai exponencialmente rápido para grandes números de onda. Portanto, no domínio viscoso, a qualidade de energia armazenada em cada número de onda diminui exponencialmente.

Kraichnan (1967), Leith (1968) e Batchelor (1969) adaptaram a teoria de Kolmogorov para turbulência bidimensional em que o fornecimento de energia a uma taxa constante é numa escala intermediária bem localizada, k_F [3]. Eles notaram que quando a dinâmica é restrita a duas dimensões, a enstrofia não pode aumentar pelos efeitos do termo advectivo (conf. Eq. (3.2)), e, portanto, a hipótese (H3) nunca é satisfeita.

Nesse caso, Kraichnan sugeriu que a energia fornecida pelo forçamento vai para as grandes escalas espaciais, fenômeno conhecido como cascata inversa de energia. Essa cascata inversa da turbulência bidimensional deve ter a mesma lei de potência no espectro que a cascata direta tridimensional, $E(k) \propto k^{-5/3}$, entre as escalas do confinamento L e do forçamento $2\pi/k_F$.

Ao injetarmos um fluxo Φ_E de energia em um número de onda k_F , injetamos também um fluxo de enstrofia, $\Phi_\Omega = k_F^2 \Phi_E$, no mesmo número de onda. É esperado então uma cascata de enstrofia direta, i.e., para os grandes números de onda. A energia nos grandes números de onda se comporta como k^{-3} , para $k > k_F$, supondo um fluxo estacionário [1, 7]. Essas cascatas são mutuamente excludentes, ou seja, na região de $k < k_F$ há presença apenas da cascata inversa de energia, e na região $k > k_F$ há presença apenas da cascata direta de enstrofia [7]. Um gráfico esquemático do comportamento do espectro previsto pela teoria de KLB pode ser visto na Fig. 3.3. Ambas cascatas são verificadas experimentalmente e numericamente, em simulações com resoluções espaciais de centenas de números de onda em cada intervalo de comportamento.

Batchelor trabalhou sobre turbulência bidimensional em evolução livre, sem forças externas. Um espectro de energia próximo à $E(k) \propto k^{-3}$ é obtido tanto em simulações numéricas quanto em experimentos. Nas simulações começando com um campo aleatório em um número de onda localizado k_I , nota-se o surgimento de um comportamento inversamente cúbico, enquanto a dissipação de enstrofia é máxima. Ao longo do tempo, o espectro começa a ficar cada vez mais íngreme a medida em que vórtices isolados se formam [7].

O comportamento do espectro de energia no regime de ocorrência de vórtices pontuais é um problema em aberto. Assumindo que os vórtices são aleatórios, i.e., suas posições não são correlacionadas, então é possível obter uma resposta analítica: $E(k) \propto k^{-1}$ para $k > 1/l$, onde l é uma distância típica desses vórtices. Isso porque a transformada de Fourier de uma distribuição de Dirac é constante,

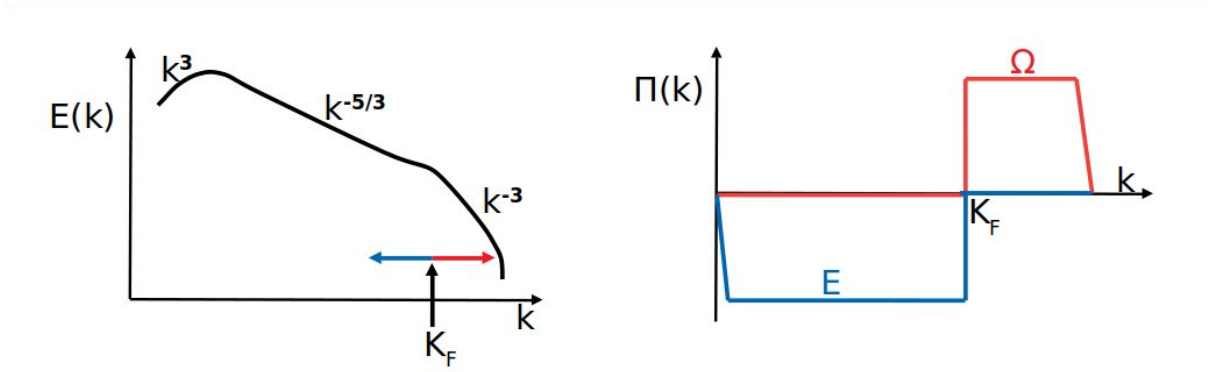


Figura 3.3: Modelo esquemático de espectro de energia, $E(k)$, na esquerda; e fluxos de energia (azul) e enstrofia (vermelho), na direita, segundo teorias de Kraichnan, Leith e Batchelor (KLB). A seta preta em k_F indica o número de onda de forçamento. A seta em azul indica o sentido do fluxo de energia, e a seta em vermelho o sentido do fluxo de enstrofia.

fazendo com que a enstrofia em um número de onda se comporte como $\Omega \propto k$, refletindo o aumento linear no número de vetores de onda \mathbf{k} de módulo entre k e $k + dk$. Portanto, a energia se comporta como $E(k) \propto k^{-1}$. Assim, alguma correlação entre as posições dos vórtices deve ocorrer para que o resultado descrito não seja observado [7].

Capítulo 4

Instabilidade de Kelvin-Helmholtz

A *Instabilidade de Kelvin-Helmholtz* (IKH) é uma classe de problemas de condição inicial com as equações diferenciais de movimento dos fluidos. Passaremos a descrever aqui o problema da IKH para o caso bidimensional livre de fronteiras e forças externas sobre dois fluidos incompressíveis tanto viscosos, quanto invíscidos.

4.1 CAMPO DE VELOCIDADES DA IKH EM 2D

Inicialmente, duas camadas semi-infinitas de fluidos incompressíveis apresentam movimento cisalhante relativo entre si, deslizando uma sobre a outra. A superfície de separação entre elas é chamada *superfície de descontinuidade tangencial* já que a componente tangencial à superfície da velocidade dos fluidos é descontínua.

Sem perda de generalidade, considera-se o referencial inercial em que ambos fluidos têm velocidades de mesmo módulo e sentidos contrários. O fluido inferior está com velocidade $-u_0/2$ e o fluido superior com velocidade $u_0/2$, tomando esta direção de movimento como o eixo x . A direção normal da superfície será dada pelo eixo y e não contribui na velocidade de nenhum fluido. Sobre esta superfície perturba-se a velocidade com um ruído de amplitude δ_0 relativa à energia cinética inicial ($\propto u_0^2$). A perturbação aleatória pode ser feita seguindo diferentes distribuições estatísticas.

4.1.1 Instabilidade de descontinuidades tangenciais no campo de velocidades

Para verificar a estabilidade desse sistema físico adiciona-se uma perturbação pequena, tal que termos de ordem maiores que a linear possam ser desprezados nas equações de movimento. Consideraremos exclusivamente nesta seção o referencial inercial em que o fluido inferior está parado. O fluido superior move-se em nosso referencial, com uma velocidade inicial $\mathbf{v} = (u_0, 0)$. Consideraremos as perturbações nas quantidades físicas da superfície de descontinuidade tangencial, pressão e velocidade dos fluidos, dadas de forma periódica na direção da superfície e no tempo, i.e., serão proporcionais a $e^{i(kx - \lambda t)}$. Para uma perturbação \mathbf{v}' na velocidade e p' na pressão, as equações de

movimento de Euler tornam-se

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \nabla p' \quad (4.1)$$

tomando apenas os termos de ordem linear em \mathbf{v}' . Da equação da continuidade, tem-se que $\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0$.

Aplicando o divergente em ambos os lados da Eq. (4.1), se conclui então que a perturbação na pressão da superfície deve satisfazer a Eq. de Laplace: $\nabla^2 p' = 0$. Uma perturbação periódica na pressão pode ser escrita por $p'(x, y, t) = f(y) e^{i(kx - \lambda t)}$. A equação de Laplace se torna

$$\frac{d^2 f}{dy^2} - k^2 f = 0 ,$$

cujas soluções são proporcionais à $e^{\pm ky}$. Considerando o fluido superior, as perturbações devem diminuir à medida que se afasta da superfície de descontinuidade ($y \rightarrow +\infty$), e portanto, $p' = e^{-ky} e^{i(kx - \lambda t)}$. Supondo $\mathbf{v}' = (u', v')$ então a Eq. (4.1) para a componente v' satisfaz (o subíndice 1 denota o fluido superior)

$$v' = \frac{-ik}{\rho_1(ku_0 - \lambda)} p'_1. \quad (4.2)$$

Definindo $\zeta(x, t)$ como o deslocamento da posição y da superfície de descontinuidade tangencial devido à perturbação, temos que

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = v'. \quad (4.3)$$

Supondo ζ uma perturbação periódica, a Eq. (4.3) fornece $v' = i(ku_0 - \lambda)\zeta$. Isso permite reescrever a Eq. (4.2) em termos de ζ como

$$p'_1 = -\zeta \rho_1 \frac{(ku_0 - \lambda)^2}{k}.$$

As mesmas equações escritas para o fluido 1 móvel podem ser reescritas para o fluido 2, em repouso, onde se considera a pressão $p_2 = e^{ky} e^{i(kx - \lambda t)}$ e u_0 nulo. Temos que $p'_2 = \zeta \rho_2 \lambda^2 / k$.

Por fim, segue que para haver equilíbrio mecânico sobre a superfície, as pressões em ambos os

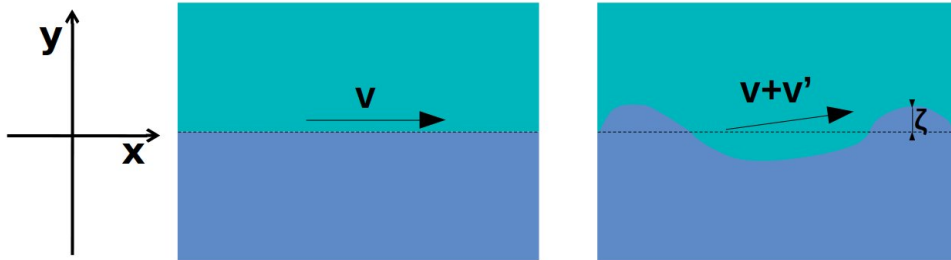


Figura 4.1: Representação gráfica da perturbação feita na condição inicial. Na primeira figura, a configuração do sistema não perturbado com $\mathbf{v} = (u_0, 0)$. Na figura a direita, o sistema foi perturbado adicionando-se uma velocidade \mathbf{v}' sobre a superfície de descontinuidade tangencial.

lados devem ser iguais, o que leva à condição $\rho_1(k\nu - \lambda)^2 = -\rho_2\lambda^2$ que é satisfeita por

$$\lambda = ku_0 \frac{\rho_1 \pm i\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (4.4)$$

Conclui-se então que a frequência temporal λ apresenta sempre uma componente positiva imaginária, que faz com que qualquer perturbação, tão pequena quanto se queira, cresça ao longo da evolução temporal, caracterizando uma situação de instabilidade. A velocidade de crescimento exponencial das perturbações cresce sem limite quando menor o comprimento espacial, e, portanto, maior k .

Nessa demonstração, em nenhum momento se supôs que $\rho_1 \neq \rho_2$. Logo, o resultado é válido não só para a interface física entre dois fluidos imiscíveis, como para a superfície imaginária dentro de um mesmo fluido que separa correntezas de velocidades diferentes.

Esses resultados demonstrados para um fluido ideal podem ser aproximados para fluidos com viscosidades muito baixas. Ao aumentar a viscosidade, a descontinuidade não mais tem o formato de uma superfície, mas sim de uma camada de transição, de largura finita. Ainda assim, os resultados numéricos e experimentais indicam que essa instabilidade se manifesta muito rapidamente e está, talvez, sempre presente [4].

4.2 CAMPO DE VORTICIDADE DA IKH

O mesmo campo de velocidades descrito anteriormente pode ser caracterizado por um campo de vorticidade. Para tanto, utiliza-se o limite de vórtices pontuais distribuídos uniformemente na direção horizontal, conforme a Fig. 4.2 que mostra as linhas de corrente nos fluidos em situações onde a densidade de vórtices por comprimento aumenta, até atingir um limite contínuo, chamada *linha de vorticidade*.

Vamos nos concentrar no intervalo em $x \in (0, 2\pi]$, uma vez que logo usaremos condições de contorno periódicas. O campo de vorticidade para N vórtices pontuais distribuídos uniformemente num intervalo 2π na direção x e sobre a linha $y = 0$ pode ser escrito a partir de distribuições δ de Dirac,

$$\omega_N(\mathbf{x}, 0) = \frac{2\pi\omega_0}{N} \sum_{n=1}^N \delta\left(x - n\frac{2\pi}{N}\right) \delta(y).$$

A relação entre w_0 e u_0 pode ser obtida calculando uma circulação não-nula entre os dois fluidos: $2\pi\omega_0 = u_0$. A divisão por N normaliza a integral sobre todo espaço, fixando a vorticidade total dos vórtices. No limite em que há infinitos vórtices, conclui-se que o campo de vorticidade para a descontinuidade no campo de velocidades pode ser descrito como

$$\omega_d(\mathbf{x}, 0) = \lim_{N \rightarrow \infty} w_0 \left[\frac{2\pi}{N} \sum_{n=1}^N \delta\left(x - n\frac{2\pi}{N}\right) \right] \delta(y) = w_0 \delta(y) \quad (4.5)$$

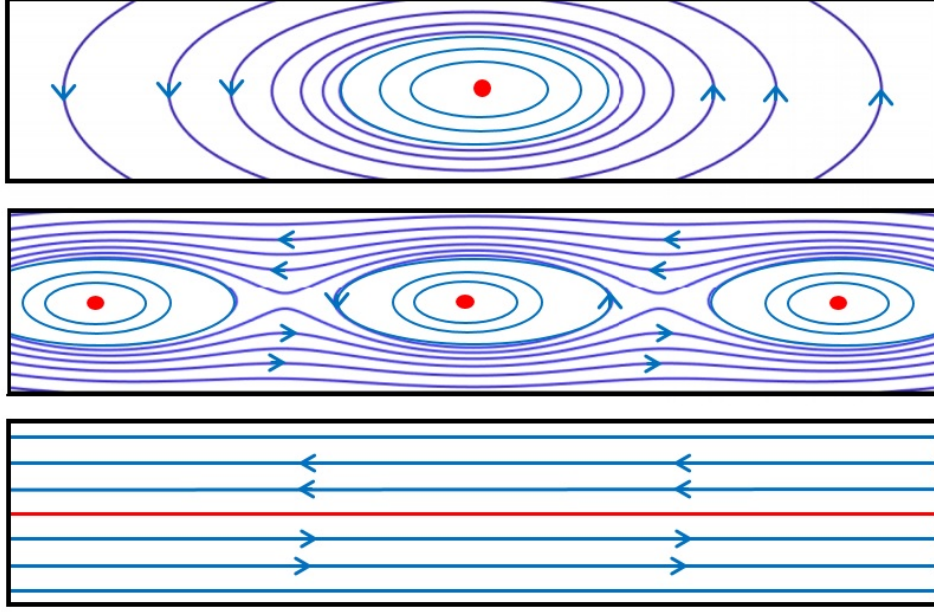


Figura 4.2: Visão qualitativa de campos de vorticidade com 1 e 3 vórtices idênticos por intervalo de tamanho 2π , igualmente espaçados e alinhados sobre uma mesma linha horizontal. As linhas de corrente apresentadas mostram que, no limite de uma linha contínua de vorticidade, como na figura inferior, temos linhas de corrente horizontais de sentidos opostos, gerando o campo de velocidades da IKH.

na representação de vorticidade. Sobre essa linha de vorticidade, é possível adicionar um ruído aleatório.

A Eq. (4.5) pode ser escrita em um domínio 2π -periódico em ambas direções, formando, portanto, um toróide, com duas linhas de descontinuidade de sinais opostos, i.e.,

$$\omega_d(\mathbf{r}, 0) = w_0 \left[+\delta\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - \delta\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

na janela $[-\pi, \pi) \times [-\pi, \pi)$. Essa condição inicial é exibida na imagem esquerda da Fig. 4.3. Em um domínio periódico é possível levar a condição inicial para o espaço de Fourier, que é discreto, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$.

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_d(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w_0 \left[+\delta\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - \delta\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dx dy \\ &= \frac{\omega_0}{2\pi} \left[i^{k_y} - (-i)^{k_y} \right] \delta(k_x) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Sobre o espectro do campo de vorticidade gerado pela descontinuidade adiciona-se um ruído. Esse ruído pode ser localizado, i.e., as perturbações são adicionadas sobre os valores não-nulos de $\tilde{\omega}_d$, ou não-localizado, adicionando valores aleatórios sobre todo os vetores de onda do espectro.

$$\tilde{\omega}(\mathbf{k}, t = 0) = \tilde{\omega}_d(\mathbf{k}) + \xi_{\mathbf{k}} \quad (4.7)$$

Na Fig. 4.3 é possível observar uma representação gráfica da Eq. (4.7). Para estudar o comportamento da descontinuidade ($\bar{\omega}_d(\mathbf{k})$) e do ruído ($\xi_{\mathbf{k}}$) separadamente, dividimos o espectro em duas regiões qualitativamente distintas: o espectro perpendicular, que contém todos os vetores de onda tais que $|k_y/k_x| > \sqrt{3}$; e o espectro paralelo, que contém os demais vetores.

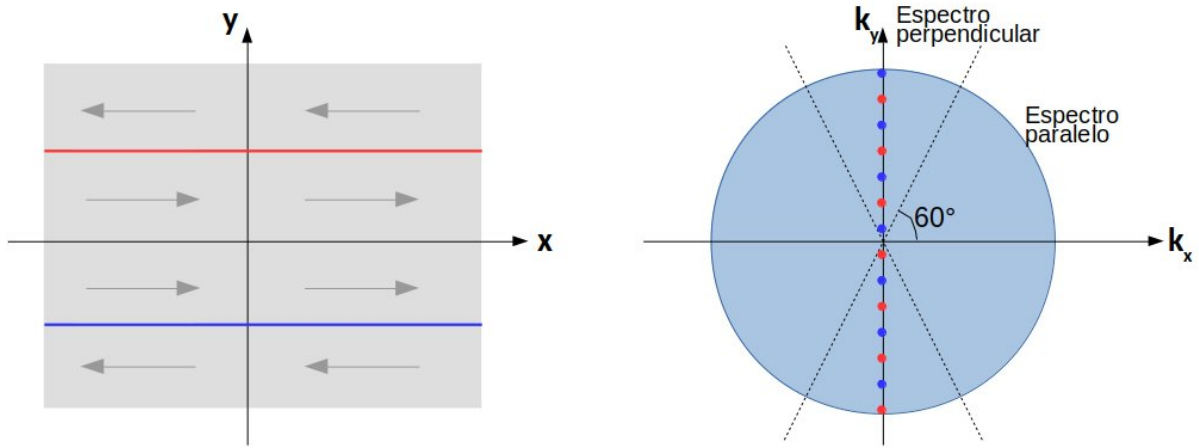


Figura 4.3: Na esquerda, a representação gráfica da condição inicial no espaço real, com duas linhas de vorticidade de sinais opostos, e as setas indicam a velocidade do fluido nas duas camadas com condições de contorno duplamente periódicas. A linha em vermelho é negativa, e em azul positiva. Na direita, a mesma descrição no espaço de Fourier de vetores de onda discreto, Eq. (4.7), onde sobre o eixo k_y temos valores alternados, porém de módulo constante. No resto do espectro, representando por azul claro, o ruído adicionado sobre todos os vetores de onda (não-localizado).

Capítulo 5

Metodologia

Neste seção passaremos a descrever os métodos numéricos utilizados para simular a situação da Instabilidade de Kelvin-Helmholtz. Primeiramente, descreveremos o Método Espectral utilizado para resolver a Eq. (2.10) com a condição inicial da Eq. (4.7), uma simulação numérica direta (DNS) da equação de movimento. Esse método é instável para $\nu = 0$. Para então simular um fluido ideal, recorreremos a uma simulação de N corpos aplicada a fluidos, chamado Método dos Vórtices Pontuais (PV), e sua otimização para aumentar o número de vórtices, o método de Vórtice em Caixa (ViC). Por fim, para todos os métodos, a evolução temporal segue o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), descrito por último.

5.1 METÓDO ESPECTRAL PARA A EQ. DE NAVIER-STOKES (DNS)

O Método Espectral é uma classe de métodos numéricos para resolução de certas equações diferenciais parciais em que o conceito base é expressar as soluções da EDP no espaço de Fourier, onde os operadores de diferenciação são algébricos e, portanto, muito mais simples de se resolver. Esse método é especialmente usado quando esperamos soluções periódicas (ou forçamos as soluções a serem periódicas pelas condições de contorno). Essa classe de métodos numéricos foi desenvolvida numa série de artigos por Steven Orszag a partir de 1969, e está relacionado com o método de Green para soluções analíticas de equações diferenciais e o método numérico de diferenças finitas.

Métodos Espectrais tem uma série de aplicações além de resolução numérica de EDPs. Citamos, por exemplo, métodos de séries de Fourier para problemas em geometrias periódicas, problemas de autovalor e autofunção de operadores e métodos espectrais polinomiais para domínios ilimitados [10]. Em especial, usaremos um método pseudo-espectral aplicado a EDP não-lineares. Um fluxograma de funcionamento do Método Espectral para diferenciação é mostrado na Fig. 5.1, que passaremos a detalhar.

A transformada de Fourier contínua de uma função real de uma variável real, $u(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, é a

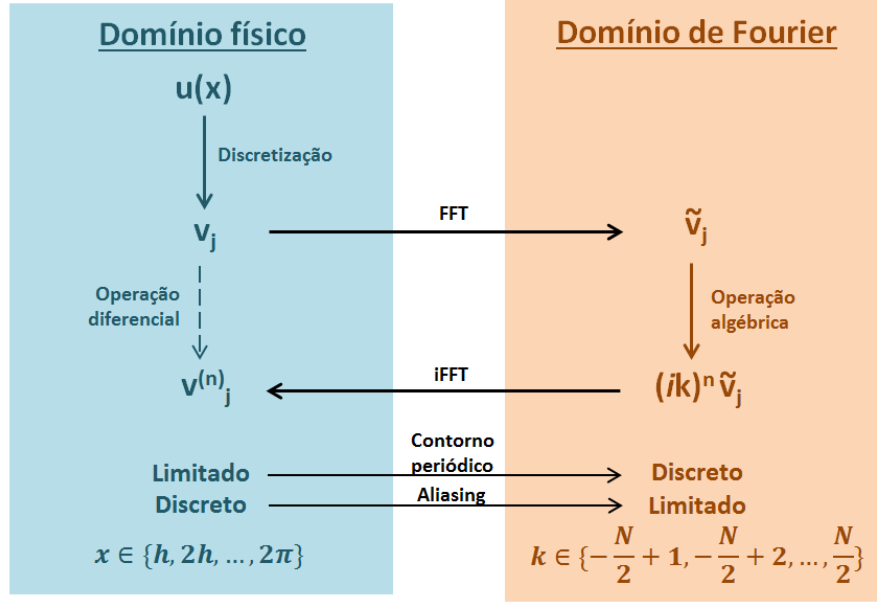


Figura 5.1: Fluxograma do método espectral e caracterização dos domínios. No infográfico, N é o número de pontos amostrados de x no intervalo $[0, 2\pi)$ e h é a distância entre esses ponto, portanto $h = 2\pi / N$.

função complexa de variável real $\tilde{u}(k) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por [11]

$$\tilde{u}(k) = \mathcal{F}\{u(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-ikx} dx. \quad (5.1)$$

O variável k é dita número de onda, e dizemos que $\tilde{u}(k)$ é a função u no espaço de Fourier. Denotaremos os possíveis valores de x por "domínio físico", enquanto que os possíveis valores de k compõe o chamado "domínio de Fourier". Agimos analogamente para uma função de duas variáveis, como o campo de vorticidade $\omega(\mathbf{x})$ mencionado neste trabalho, onde $\mathcal{F}\{\omega(\mathbf{x})\} = \tilde{\omega}(\mathbf{k})$, e agora \mathbf{k} é o vetor de onda.

Algumas propriedades da transformada de Fourier para uma função diferenciável, e de derivada quadrado-integrável, devem ser destacadas e serão utilizadas ao longo do texto e do método numérico [10],

(PTF1) Lineariedade, $\mathcal{F}\{u + v\}(k) = \mathcal{F}\{u\}(k) + \mathcal{F}\{v\}(k)$;

(PTF2) Translação, $\mathcal{F}\{u(x + x_0)\}(k) = e^{ikx_0} \mathcal{F}\{u(x)\}$, $x_0 \in \mathbb{R}$;

(PTF3) Modulação, $\mathcal{F}\{e^{ik_0x} u(x)\}(k) = \mathcal{F}\{u(x)\}(k - k_0)$, $k_0 \in \mathbb{R}$;

(PTF4) Dilatação, $\mathcal{F}\{u(cx)\}(k) = \frac{1}{|c|} \mathcal{F}\{u(x)\}(\frac{k}{c})$, $c \in \mathbb{R}^*$;

(PTF5) Conjugação, $\mathcal{F}\{\overline{u}\}(k) = \overline{\mathcal{F}\{u\}(-k)}$;

(PTF6) Diferenciação, $\mathcal{F}\left\{\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right\} = ik \mathcal{F}\{u(x)\}$;

(PTF7) Inversão, $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{u(x)\}(-k)\} = 2\pi u(x)$.

As demonstrações dessas propriedades seguem rapidamente da definição da Eq. (5.1), e as propriedades de linearidade da integração e da integração por partes. O último item, em especial, permite definir a transformada inversa de Fourier, e o sexto item pode ser induzido para diferentes ordens de diferenciação (com condições de suavidade extras para a função) e mostra a importância da transformada de Fourier para a construção deste método.

Nos concentraremos agora numa função periódica, na janela $x \in (0, 2\pi]$, e além disso, o domínio neste intervalo é discreto, o que numericamente temos de fato. Seja então, $v_j = v(j) : \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}$, onde N é um número par dito resolução do domínio. Denotaremos o ponto x_j para $x = jh$, onde $h = 2\pi/N$ é o espaçamento do domínio discreto $\{h, 2h, \dots, 2\pi\}$.

A transformada de Fourier é também dita discreta (DFT), dada por

$$\mathcal{F}\{v_j\}(k) = h \sum_{j=1}^N v_j e^{-ikx_j} \quad (5.2)$$

onde o fato do domínio físico da função ser discreta resulta que a DFT da função tem domínio de Fourier limitado por um fenômeno conhecido por *aliasing*, que decorre do fato de que k e $k + 2\pi/h$ terem exatamente a mesma expressão na soma da Eq. (5.2). Portanto, qualquer intervalo de tamanho $2\pi/h$ contém todos os modos necessários para compor a função. Sem perda de generalidade, escolhemos $k \in (-\pi/h, \pi/h]$. Já o fato da condição de contorno periódica, $v_N = v_0$ faz com que k seja discreto dentro deste intervalo limitado. Portanto, os números de onda admitidos são

$$k \in \left\{ \frac{-N}{2} + 1, \frac{-N}{2} + 2, \dots, \frac{N}{2} \right\}.$$

Admite-se também uma transformada de Fourier discreta inversa como no caso contínuo. Numericamente, computamos a DFT através do algoritmo da Transformada Rápida de Fourier (FFT) e sua inversa (iFFT), naturais a muitos programas científicos, em especial o *MATLAB*, que inclui inclusive opções de cálculo na placa gráfica do computador, fisicamente otimizada para realizar estas operações.

Quanto às condições que garantem estabilidade para o método espectral, não existem na literatura. Para uma discussão sobre regiões onde estabilidade é esperada (i.e., regiões onde não é instável) recomenda-se o Capítulo 10 de [10]. Quanto à acurácia da derivada produzida pelo método espectral, a taxa de convergência típica em função da resolução N é $O(N^{-m})$, para todo $m > 0$ para funções suficientemente suaves. Isso representa uma taxa muito rápida comparada com os métodos convencionais [10].

Agora que a base teórica e generalidades do método foram descritas, voltemos a nossa atenção para a equação de movimento que resolveremos neste trabalho.

5.1.1 A equação de movimento no espaço de Fourier

Os operadores de diferenciação espaciais se relacionam com os operadores algébricos no espaço de Fourier, conforme relações oriundas da propriedade de diferenciação, (FTP6), da transformada de Fourier discutida na sessão anterior:

$$\begin{aligned}\nabla &\longleftrightarrow i\mathbf{k} \text{ e} \\ \nabla^2 &\longleftrightarrow -k^2.\end{aligned}$$

Partindo da equação de movimento para o campo de vorticidade (Eq. (2.10)), tomaremos a transformada de Fourier para então escrever a evolução temporal para cada modo de Fourier em que o campo de vorticidade é composto,

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} = -\nu k^2 \tilde{\omega} + \tilde{J}(\psi, \omega). \quad (5.3)$$

As função ω e ψ se relacionam por $\nabla^2 \psi = -\omega$ e, portanto, suas transformadas de Fourier se relacionam por

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{k^2} \tilde{\omega}$$

para $\mathbf{k} \neq (0, 0)$, quando $\tilde{\omega}(0, 0) = \tilde{\psi}(0, 0) = 0$.

O termo $\tilde{J}(\psi, \omega)$ é a transformada de Fourier do operador advectivo $J(\psi, \omega) = \partial_x \psi \partial_y \omega - \partial_x \omega \partial_y \psi$. Como o operador J tem o produto de funções no espaço real, terá uma convolução no espaço de Fourier. Para evitar esse processo computacionalmente custoso, utilizaremos um método pseudo-espectral, em que o produto é feito no espaço real, e então levado para o espaço de Fourier. Assim,

$$\tilde{J}(\psi, \omega) = \mathcal{F} \left\{ \mathcal{F}^{-1} \{ i k_x \tilde{\psi} \} \mathcal{F}^{-1} \{ i k_y \tilde{\omega} \} - \mathcal{F}^{-1} \{ i k_y \tilde{\psi} \} \mathcal{F}^{-1} \{ i k_x \tilde{\omega} \} \right\}$$

É possível através de uma troca de variáveis fornecer uma solução analítica para o termo viscoso $-\nu k^2 \tilde{\omega}$, escrevendo a equação para vorticidade no espaço de Fourier (Eq. (5.3)) multiplicada por $e^{\nu k^2 t}$, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\tilde{\omega} e^{\nu k^2 t} \right) = e^{\nu k^2 t} \tilde{J}(\omega, \psi) \quad (5.4)$$

e assim, escrevemos $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}' e^{-\nu k^2 t}$ e resolvemos a integração numérica para $\tilde{\omega}'$. A evolução temporal desta equação foi realizada com o Método Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4).

Em nossas simulações, pela condição de contorno periódica, simulamos duas linhas de vorticidade, conforme Eq. (4.7). A condição inicial da descontinuidade, $\omega_d(x, y, 0) = -\delta(y + \pi/2) + \delta(y - \pi/2)$, foi discretizada em uma grade $N \times N$ representando a janela $[0, 2\pi)^2$ e para otimizar as funções FFT e iFFT do *MATLAB*, utilizamos grades cuja resolução é uma potência de 2, $N = 2^n$. O campo discreto inicial assume os valores $\pm N/4\pi^2$ nos pontos sobre as linhas $y = \mp \pi/2$ (linhas $N/4$ e $3N/4$), de modo que a soma da vorticidade sobre todos os pontos das linhas dê -1 na linha superior e $+1$ na linha

inferior. A vorticidade total é nula, e isso é importante para manter o método estável, pois caso contrário não é possível calcular a $\tilde{\psi}$. Como a evolução temporal se dá no espaço espectral, utilizamos como condição inicial $\tilde{\omega}(\mathbf{k}, 0) = \mathcal{F}\{\omega_d\}$.

Uma pequena perturbação isotrópica ainda é adicionada sobre a condição inicial com distribuição preestabelecida por uma condição física e o desvio-padrão é medido em termos relativos à própria quantidade física inicial. A média do ruído é, sobre cada linha, nula. Neste trabalho simulamos com ruídos equipartidos em energia e enstrofia. O ruído pode ser não-localizado, sendo adicionado sobre toda a grade espectral inicial; ou localizado, onde é colocado apenas sobre os vetores de onda com $k_x = 0$, que já contêm contribuições da descontinuidade.

A viscosidade é mantida no menor valor possível, i.e., o menor valor tal que o domínio viscoso ainda esteja dentro dos modos de onda simulados, i.e., a escala de dissipação de Kolmogorov satisfaz $\eta \gtrsim 2\pi/N$. As variáveis são todas escalas em termos da viscosidade em função da resolução $\nu(N)$, na chamada regularização viscosa. Como $\eta = 0$ para $\nu = 0$, o método é sempre instável para simular um fluido ideal através da Equação de Euler.

5.1.2 Processo de filtragem e atenuação do espectro

Tipicamente, ruídos e erros numéricos oriundos de truncamento e arredondamentos da máquina, ocorrem em valores altos de número de onda, próximos a $N/2$, que correspondem às menores escalas da grade simulada. Ademais, os vetores de onda de módulo maior que $N/2$ não têm correspondentes em todas as direções, gerando uma simulação anisotrópica.

O efeito de serrilhamento também pode comprometer a simulação numérica com um termo não-linear quadrático, atrapalhando a interação entre trios de vetores de onda, distribuindo energia para vetores de onda que não estão sendo incluídos na simulação, conforme discutido por Orszag em [12]. É necessário, portanto, eliminar as contribuições de vetores de onda com módulo maior que $N/3$ na condição inicial.

Utilizaremos então um filtro atenuador para os números de onda altos vastamente utilizado na literatura de fluidodinâmica computacional, que reduz em 20% a amplitudes dos vetores de onda de grande módulo, denominado *filtro de Hou*, dado por

$$\rho(\mathbf{k}) = \exp \left(-36 \left[\left(\frac{2k_x}{N} \right)^{36} + \left(\frac{2k_y}{N} \right)^{36} \right] \right),$$

que é aplicado a cada passo de tempo [13]. A atenuação desses grandes modos não é fisicamente relevante para a solução numérica, uma vez que o efeito da viscosidade diminui a amplitude desses modos exponencialmente rápido.

5.2 MÉTODO DE VÓRTICES PONTUAIS (PV)

O Método de Vórtices Pontuais (*Point Vortex Method*, PV) é um sistema de equações diferenciais ordinárias para a dinâmica de vórtices pontuais imersos em um fluido ideal outrora irrotacional. Por vórtice entendemos uma região de vorticidade não-nula no domínio do fluido, e por vórtice pontual entendemos que esta região é um único ponto do espaço. Esse modelo constitui um método para estudar escoamentos de fluidos ideais em duas dimensões¹ [14]. Como em um fluido ideal a vorticidade acompanha as partículas do fluido pelo Teorema de Kelvin, os vórtices funcionam como marcadores lagrangianos de posições no fluido.

Demonstraremos agora as equações de movimento para um conjunto de N vórtices em um plano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Representaremos esse plano físico, por conveniência, com um mapeamento sobre o plano de Argand-Gauss dos números complexos, definindo $z = x + iy$ [3, 14]. Suponha um campo de vorticidade como a superposição dos campos formados por cada vórtice pontual de intensidade Γ_α na posição z_α , i.e.,

$$\omega(z) = \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha \delta(z - z_\alpha). \quad (5.5)$$

O movimento de cada ponto do fluido segue o seu campo de velocidade. Em particular o movimento de vórtices pontuais se dá pelo vetor do campo de velocidade em sua posição, ou seja, segue equação de movimento dada por

$$\frac{dz_\alpha}{dt} = u(z_\alpha, t) + i v(z_\alpha, t). \quad (5.6)$$

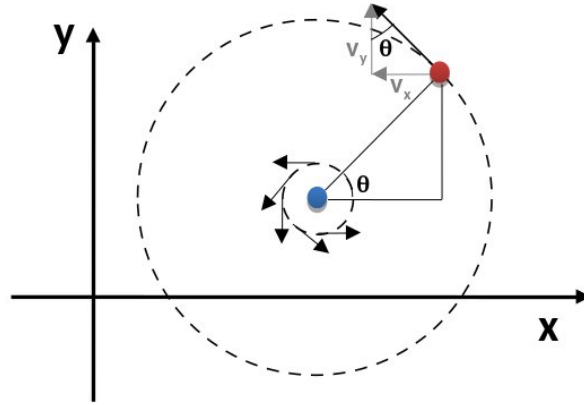


Figura 5.2: Um vórtice pontual (azul) gera uma vorticidade singular, cujo campo de velocidade é tangencial ao círculo centrado no vórtice e a circulação total é constante. Outro vórtice (vermelho) experimenta a velocidade dada pelo campo na sua posição.

¹Não há como ter vórtices pontuais em três dimensões devido às condições de continuidade do fluido.

A partir da Fig. 5.2, escrevemos a contribuição da velocidade entre dois vórtices como

$$\frac{\Gamma}{2\pi r} (-\sin(\theta) + i \cos(\theta)),$$

uma vez que cada vórtice (denotado α) experimenta com uma velocidade inversamente proporcional à distância, pela conservação de circulação Γ sobre um círculo, e que esta é tangente a um círculo centrado no vórtice fonte (denotado β).

$$\begin{aligned} \frac{dx_\alpha}{dt} &= -\frac{\Gamma_\beta}{2\pi r} \sin(\theta) = -\frac{\Gamma_\beta}{2\pi r} \frac{(y_\alpha - y_\beta)}{r}; \\ \frac{dy_\alpha}{dt} &= \frac{\Gamma_\beta}{2\pi r} \cos(\theta) = \frac{\Gamma_\beta}{2\pi r} \frac{(x_\alpha - x_\beta)}{r}. \end{aligned}$$

Então, utilizando o princípio da superposição das velocidades em cada ponto para todos os N vórtices e escrevendo em termos dos números complexos z_α , temos

$$\frac{dz_\alpha}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^N \frac{\Gamma_\beta}{z_\alpha - z_\beta}.$$

Essa equação de movimento para vórtices pontuais pode ser pensada como um mapa lagrangiano para a equação de Euler dos fluidos invíscidos e é muito útil para aproximações e estudos numéricos. O modelo por trás desse método também é base para a Mecânica Estatística de Vórtices [14].

A equação de movimento demonstrada se aplica para um plano infinito. Vamos agora impor a condição de fronteira L -periódica na direção x , isto é, obter a geometria de um cilindro de altura infinita e circunferência L . Como a posição x é a parte real de z , vamos considerar que cada vórtice β contém cópias nas posições $z_\beta + nL$, $n \in \mathbb{Z}$. Importante ressaltar que a soma das contribuições de velocidade das imagens replicadas do vórtice não contribui sobre si mesmo, pois as imagens à direita e à esquerda se cancelam duas a duas, não tendo portanto nenhuma inconsistência física. A equação de movimento se torna

$$\frac{dz_\alpha}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^N \left[\frac{\Gamma_\beta}{z_\alpha - z_\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_\beta}{z_\alpha - (z_\beta + nL)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_\beta}{z_\alpha - (z_\beta - nL)} \right].$$

Ao trabalhar os somatórios no membro direito da equação (a partir da decomposição em frações parciais da função cotangente - ver [14], página 48), obtemos a equação de movimento para N vórtices em uma faixa periódica de largura L dada por

$$\boxed{\frac{dz_\alpha}{dt} = \frac{-i}{2L} \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^N \Gamma_\beta \cot \left[\frac{\pi(z_\alpha - z_\beta)}{L} \right]} \quad (5.7)$$

Para simular a condição inicial da IKH, tomaremos todos os vórtices idênticos centrados sobre a linha $y = 0$, acrescidos de um pequeno ruído branco ξ_β vertical, numa janela periódica de tamanho

$L = 2\pi$ em x . A posição inicial dos vórtices é então dada por

$$z_\beta = \frac{2\pi\beta}{N} + i\xi_\beta, \quad \beta = 1, 2, \dots, N \quad (5.8)$$

A fim de normalizar a vorticidade total, tomamos $\Gamma_\beta = 1/N$ para todos os vórtices, ou seja, a vorticidade total da linha é unitária.

A evolução temporal da Eq. (5.7) foi realizada com o Método Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4).

5.3 MÉTODO DE VÓRTICES EM CAIXAS (VIC)

O Método de Vórtices em Caixas (*Vortex-in-Cell Method*, ViC) não constitui por si só um método novo, mas sim uma otimização do método de Vórtices Pontuais, que visa diminuir o tempo de simulação, que escala de modo quadrático com o número de vórtices. Melhoraremos o tempo de simulação aplicando algumas propriedades da fluidodinâmica no método anterior, que consistia basicamente em um método de N -corpos. A abordagem do método ViC permite também a simulação de fluidos de baixa viscosidade.

A otimização ao método dos vórtices pontuais consiste em considerar um campo de vorticidade euleriana no domínio onde os vórtices pontuais se encontram, fixo no tempo, através da Eq. (5.5). Então, ao invés de se considerar a interação de cada par de vórtices, como feito no método anterior, considera-se a ação do campo de velocidades extraído a partir do campo de vorticidade interpolado pelos vórtices pontuais.

Numericamente, o campo de vorticidade é formado sobre uma grade espacial $N \times N$ discreta, e portanto é necessário discretizar a Eq. (5.5). A interpolação da posição lagrangiana dos vórtices em um campo de vorticidade discreto euleriano é feita em duas etapas: um operador núcleo e um operador projetor [15]. Os efeitos dos operadores sobre os vórtices pontuais são exemplificados na Fig. 5.3.

O operador núcleo (*kernel*) suaviza os vórtices, distribuindo sua vorticidade por uma região e permitindo trabalhar com vórtices não-pontuais. Para fluidos viscosos sabemos que a vorticidade não só é transportada, como em um fluido ideal, mas também é difundida. O núcleo permite, então, colocar o fenômeno da difusão de forma artificial, espalhando a vorticidade numa região do espaço que cresce com o tempo, centrada em z_β . Essa descrição não leva em conta fenômenos não-lineares, portanto vale apenas para fluidos fracamente viscosos. Como neste trabalho queremos simular fluidos ideais, nosso núcleo é a própria função δ de Dirac, formando vórtices pontuais para todo tempo.

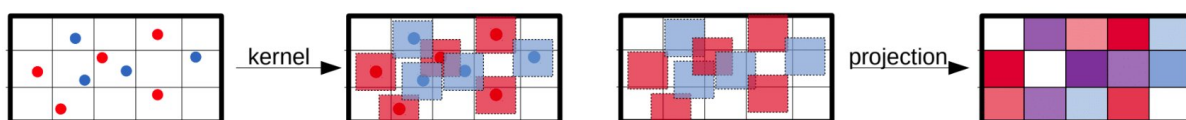


Figura 5.3: Efeito do operador núcleo (*kernel*) e do operador projeção (*projection*) sobre vórtices pontuais (primeiro quadro), gerando um campo de vorticidade euleriano (último quadro).

O operador projetor, a partir das distribuições de vorticidade geradas pelo operador núcleo, descritas na formulação lagrangiana, interpola uma grade euleriana fixa de vorticidade $\omega(\mathbf{x})$. No caso deste trabalho, o projetor é simplesmente um histograma com as posições dos vórtices pontuais em N intervalos em cada direção. Esse processo de projeção em retângulos do espaço dá o nome "caixa" ao método.

Para se calcular o campo de velocidade a partir do campo de vorticidade é possível utilizar as técnicas espectrais, invertendo operadores diferenciais. Para tanto leva-se ω para o espaço de Fourier, $\tilde{\omega}$. Para utilizarmos a transformada rápida de Fourier, assumimos um campo de vorticidade duplamente periódico na janela $[0, 2\pi)^2$. Por consistência, é necessário então simular duas linhas de vorticidade, de forma análoga ao descrito no método espectral. A função corrente é obtida através da relação $\tilde{\psi} = k^{-2}\tilde{\omega}$. Essa equação é então derivada em relação às variáveis de posição, ainda no espaço de Fourier, para se obter o campo de velocidades em cada ponto da grade euleriana:

$$(u, v) = (\mathcal{F}^{-1}\{ik_y\tilde{\psi}\}, \mathcal{F}^{-1}\{-ik_x\tilde{\psi}\}) \quad (5.9)$$

A velocidade com que a posição do vórtice pontual é atualizada é uma interpolação linear da sua posição sobre a grade euleriana.

A grande vantagem desse método é que ele permite aumentar a ordem de grandeza da quantidade de vórtices nas simulações numéricas, sem aumentar drasticamente o tempo computacional. A relação entre número de vórtices e tempo computacional passa a ser linear. O tempo computacional varia quadraticamente com a resolução da grade euleriana.

5.4 MÉTODO RUNGE-KUTTA DE 4ª ORDEM (RK4)

O método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4) é um método numérico para solucionar problemas de valor inicial desenvolvido por Martin W. Kutta dentro de sua tese de doutorado em 1901, baseado em um artigo com estudos teóricos sobre equação diferenciais de Carl Runge.

Como a partir do método espectral gerou-se uma equação diferencial ordinária no tempo para cada modo de Fourier no espaço, Eq. (5.4), agora é possível aplicar o método RK4 para resolvê-la, pois não se espera uma solução periódica no tempo e portanto o método espectral não é ideal. Idem para os métodos de vórtices pontuais, as equações que estamos interessados em resolver são Eq. (5.7) para PV e Eq. (5.6) com o campo de velocidades dado por Eq. (5.9) para o método ViC.

O método RK4 consiste em considerar o seguinte problema de valor inicial para a função $y(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= f(y, t) \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

Ao discretizar a evolução temporal em intervalos de tamanho h , vamos assumir que o próximo valor da função $y_{n+1} = y(t = (n+1)h)$, pode ser bem estimado pela média ponderada da derivada

em quatro pontos dentro do intervalo, $y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4)$. As derivadas dentro do intervalo dependem do valor da função, e portanto também precisam ser estimadas usando as inclinações já conhecidas, conforme o esquema:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_n, t_n) \\ k_2 &= f(y_n + c_2(k_1)h, t_n + c_2 h) \\ k_3 &= f(y_n + c_3(p_{31}k_1 + p_{32}k_2)h, t_n + c_3 h) \\ k_4 &= f(y_n + c_4(p_{41}k_1 + p_{42}k_2 + p_{43}k_3)h, t_n + c_4 h), \end{aligned}$$

onde a soma dos pesos satisfaz $\sum_i p_{ni} = 1$.

Usando expansão em série de Taylor até quarta ordem para escrever $y_{n+1} = y(t_n + h)$ e a regra da cadeia $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial y}$, assim como a expansão em série das $f(y + \Delta y, t + h)$ para os coeficientes k_i é possível chegar nas relações otimizadas

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_n, t_n) \\ k_2 &= f(y_n + \frac{1}{2}k_1 h, t_n + \frac{1}{2}h) \\ k_3 &= f(y_n + \frac{1}{2}k_2 h, t_n + \frac{1}{2}h) \\ k_4 &= f(y_n + k_3 h, t_n + h) \end{aligned}$$

e também na média ponderada,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h,$$

que descrevem o algoritmo do RK4. O erro de truncamento local da série de Taylor é proporcional a h^5 . A soma dos erros locais, entre passos consecutivos, gera um erro de truncamento global que é, portanto, proporcional a h^4 .

Uma condição para a estabilidade que relaciona a discretização espacial e a discretização temporal dos métodos RK4 e Espectral é o chamado *critério Courant–Friedrichs–Lewy (CFL)* para métodos de diferenças finitas. A condição consiste na desigualdade

$$\frac{U_{max}}{\Delta x / \Delta t} < 1,$$

i.e., a rapidez de propagação numérica da informação pelo sistema $\Delta x / \Delta t$ tem que ser superior à maior velocidade do sistema por um simples argumento de causalidade. Aqui, $\Delta x = 2\pi / N$ é o tamanho da grade espacial do método espectral e Δt é o tamanho dos passos temporais do RK4.

Capítulo 6

Resultados e discussões

Desenvolvemos um programa computacional que calcula o campo de vorticidade de um fluido bidimensional, $\omega(x, y, t)$, em um tempo qualquer $t > 0$, com condição inicial qualquer, evoluindo conforme dinâmica descrita pela Eq. (2.10) através do Método Espectral em resoluções espaciais de até 4096^2 . O programa foi escrito e executado no software *MatLab R2017a*.

O tempo de execução do programa aumenta cubicamente com a resolução N : um fator quadrático na computação da transformada rápida de Fourier e outro fator linear na redução do passo temporal pelo critério CFL. Com resolução de 2048^2 , o programa demora 6 horas para executar 20000 iterações. Para aumentar a resolução ou o tempo simulado é possível utilizar métodos hiperviscosos e programas em linguagens mais rápidas e altamente paralelizados. Utilizamos então o pacote numérico *GHOST*, descrito em [16, 17], escrito em *Fortran 90* e altamente paralelizado. Para uma resolução de 4096^2 em 8 processadores é necessário 6 horas para 20000 iterações. Para resolução 8192^2 , é necessário 25 horas em 8 processadores, e 14 horas em 16 processadores. O laboratório de dinâmica de fluidos do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, *Fluid - IMPA*, conta com 100 processadores, o que permite múltiplas simulações para se tomar médias estatísticas das grandezas estudadas.

Elaboramos também um programa para a evolução temporal de um conjunto de vórtices pontuais embebidos em um fluido ideal através do Método PV e do Método ViC. Com o primeiro, se aproximou uma linha de vorticidade por 8000 vórtices por janela de tamanho 2π . Verificamos a relação de equivalência entre os métodos, em diferentes resoluções, através do cálculo da energia em ambos sistemas. Após, com o Método ViC, simulamos a linha de vorticidade com um milhão de vórtices por janela, utilizando uma grade euleriana de resolução 2048^2 .

A análise fenomenológica descrita neste trabalho consiste em analisar qualitativamente as estruturas formadas pelo fluido nos diferentes métodos. Contém também uma análise quantitativa de comprimento e intervalos de tempo característicos, independentes da resolução, e que permitirão comparar as diferentes simulações. Verificamos também o comportamento dos perfis de vorticidade, do espectro e do fluxo de energia e enstrofia em diferentes setores do espaço de Fourier para perturbações com distribuições espectrais diferentes, em diferentes instantes das simulações.

Um tempo característico pode ser descrito por

$$t_L = \frac{2\pi}{\sqrt{2E}},$$

ou seja, o tempo para uma partícula com energia cinética total do fluido atravessar a janela de tamanho 2π . Esse tempo característico é invariante frente à resolução temporal e espacial, e até mesmo o método utilizado, e, portanto, permite compará-los. O tempo em todas as análises será dado em relação a t_L .

6.1 COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS ViC E PV

Sabemos que para um fluido ideal tanto a energia quanto a enstrofia são constantes do sistema. Para então ajustar um passo temporal aos métodos numéricos PV e ViC, verificamos se a energia e enstrofia totais do sistema são conservadas. Ao adicionar a viscosidade no método DNS, que atua dissipando a energia dos grandes modos, espera-se que o sistema seja estável para um mesmo passo de tempo.

Para um passo de tamanho $\Delta t = 10^{-4} t_L$, verificamos a variância no tempo da energia e da enstrofia calculadas com diferentes resoluções no método PV, para 5000 vórtices. Para resolução $N = 1024^2$, a variância de energia foi $5 \cdot 10^{-4}\%$ e de enstrofia 0,17% na série temporal de 0 a $3t_L$. Dobrando a resolução, a variância da energia foi $3 \cdot 10^{-4}\%$ e da enstrofia 0,11% para um mesmo intervalo de tempo. Alguma diferença nessas constantes de movimento, em especial da enstrofia, é esperada do fato de que ao se discretizar os vórtices numa grade euleriana, vórtices de sinal oposto podem eventualmente vir a se anularem num ponto da grade.

Dado um passo pequeno o suficiente então para a dinâmica dos vórtices pontuais conservar as quantidades esperadas, estudaremos agora se os métodos são equivalentes, i.e., se o Método de ViC, de custo computacional mais barato, tem um comportamento equivalente com o Método PV. A diferença de energia entre os métodos em função do tempo é mostrada na Fig. 6.1 para uma simulação com 5000 vórtices pontuais por janela $[0, 2\pi)$, onde se variou a resolução da grade do campo de vorticidade euleriano da dinâmica ViC.

É possível observar que para um tempo não maior que $0.1 t_L$, a diferença entre as energias dos sistemas nos métodos é menor que 10^{-4} , para grades eulerianas de tamanho 1024 e 2048 no método ViC que tem tempos de simulação significativamente menores para grandes quantidades de vórtices pontuais.

Para tempos grandes, onde as estruturas ocupam toda a janela de simulação, é esperada a divergência devido às diferentes condições de contorno: no Método PV apenas a direção x é periódica, enquanto que no Método ViC ambas direções são periódicas. Isso se reflete no fato de que para tempos grandes a diferença é independente da escolha da grade euleriana na dinâmica.

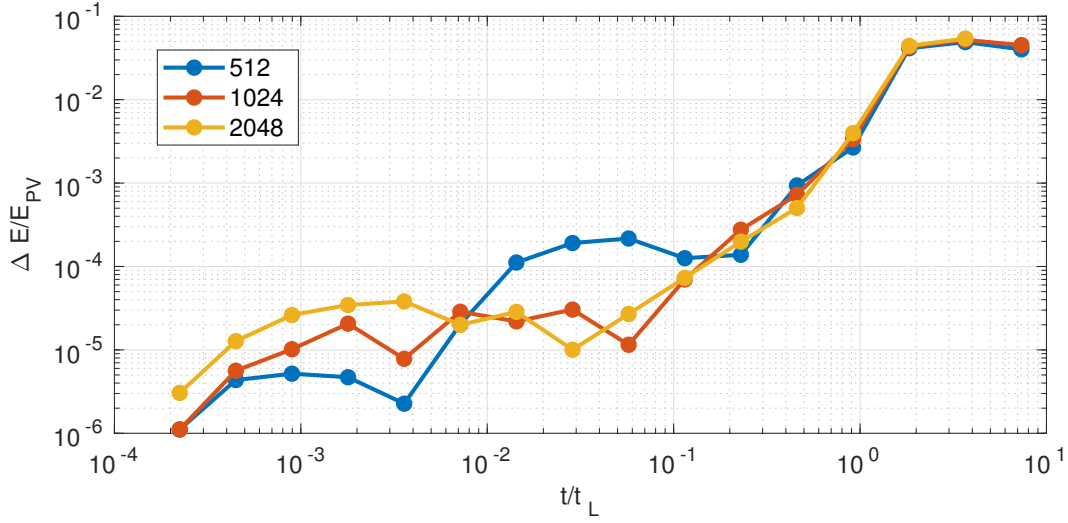


Figura 6.1: Comparação da energia do sistema de vórtices pontuais com duas dinâmicas diferentes: método de vórtices pontuais (PV) e método de vórtices em células (ViC) em diferentes resoluções, conforme legenda.

6.2 ANÁLISE QUALITATIVA DA FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS

Apresentamos imagens do campo de vorticidade na Fig. 6.2 de uma simulação com grade de resolução de 2048^2 pontos, uma vez que resoluções maiores não são visualmente melhores. Um vídeo com a nossa dinâmica completa do campo de vorticidade pode ser visto na plataforma Youtube no endereço <https://youtu.be/SJYyEOP0KVE>.

A condição inicial utilizada foi $\omega(x, y, t = 0) = \delta(y + \pi/2) - \delta(y - \pi/2)$ perturbada com um ruído de amplitude 1% equipartido em enstrofia sobre todos os vetores de onda. Na imagem, a cor verde significa ausência de vorticidade, o vermelho representa vorticidade máxima positiva, e a azul a vorticidade máxima negativa. A escala de cores não é linear para possibilitar observar detalhes maiores no campo.

Exibimos também a simulação de um milhão de vórtices pontuais por linha evoluídos a partir do Método ViC na Fig. 6.3. Perturbado com ruído gaussiano de desvio-padrão 0.01. Novamente, um vídeo da nossa dinâmica completa de vórtices pontuais pode ser vista na plataforma Youtube no endereço <https://youtu.be/fUS3b70AdtM>, com uma linha de vorticidade composta por 8 mil vórtices pontuais, simulados a partir do Método PV.

Nas figuras em diferentes instantes, é possível observar qualitativamente a formação de estruturas de tamanho espacial cada vez maiores a medida em que o tempo passa, e observamos a equivalência da escala t_L entre os métodos. Na figura produzida pelo Método ViC, é possível ver com mais detalhe na formulação lagrangiana a estrutura progressiva de pares de vórtices, pares de pares de vórtices, e assim por diante, rodando entre si, formando estruturas cada vez maiores, sem perder as estruturas menores.

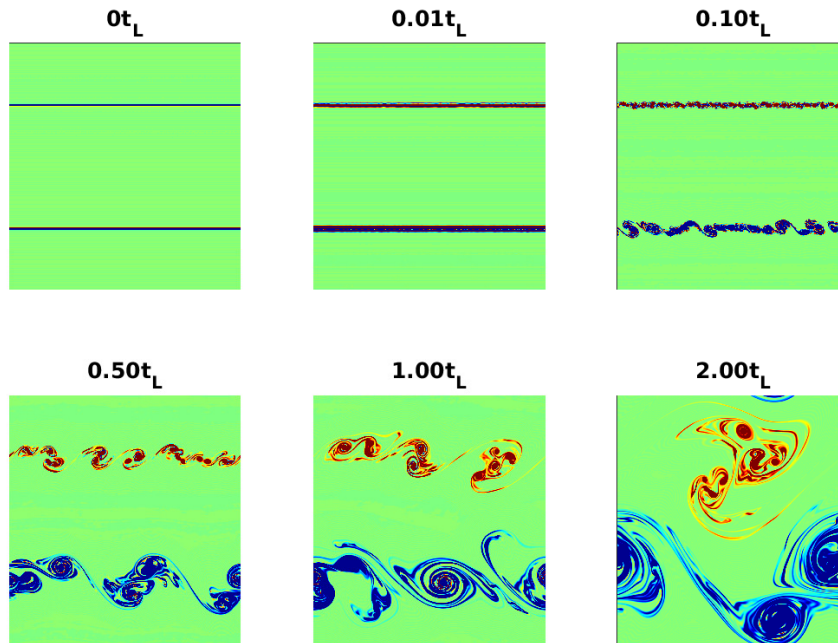


Figura 6.2: Formação de estruturas de escalas cada vez maiores no campo de vorticidade para a condição inicial $\omega(x, y, t = 0) = \delta(y + \pi/2) - \delta(y - \pi/2)$ perturbada com um ruído de amplitude 1%, equipartido em enstrofia. A escala de cores apresentada é não-linear e saturada, a fim de se observar a forma das estruturas. Verde significa ausência de vorticidade, vermelho vorticidade máxima positiva, e azul a vorticidade máxima negativa.

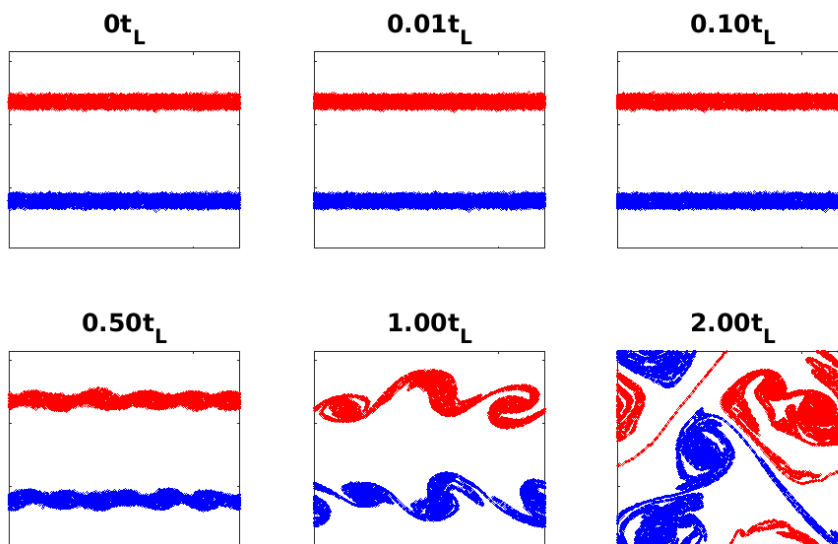


Figura 6.3: Formação de estruturas de escalas cada vez maiores a partir de 10^6 vórtices pontuais para a condição inicial de linhas de vorticidade de sinais opostos, distinguíveis por cor, distribuídos inicialmente sobre as retas $y = -\pi/2$ e $y = \pi/2$, perturbada com um ruído branco na posição vertical de desvio-padrão 0.01.

6.3 ESCALAS DE COMPRIMENTO

Definimos como comprimento de mistura (*mixing length*) o parâmetro quantitativo de comprimento característico, dado pelo tamanho vertical da dispersão da linha inicial de vorticidade, definido como

$$L(t) = \left(\frac{\int (y - y_0)^2 \omega^2 dx dy}{\int \omega^2 dx dy} \right)^{1/2}, \quad (6.1)$$

para cada uma das linhas inicialmente centrada em y_0 . A posição y da grade é fixa no tempo, já o campo ω varia. A integral é aproximada pela soma sobre metade da grade no DNS (medindo sobre a linha inferior, por exemplo)

$$L(t) = \left(\frac{2\pi}{N} \right) \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N/2} \left(y_j + \frac{\pi}{2} \right)^2 \omega_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

E para o caso das simulações de vórtices pontuais, definimos

$$L(t) = \frac{1}{N} \left(\sum_{\alpha=1}^N (y_\alpha - y_0)^2 \right)^{1/2},$$

onde a soma é tomada sobre os vórtices, e a distância vertical y_0 é o centro da linha de vorticidade inicial. A Fig. 6.4 apresenta, em escalas logarítmicas, o comprimento de mistura L como função do tempo nos dois métodos DNS e ViC.

Para tempos pequenos é possível observar uma inércia no movimento do campo de vorticidade. Esse efeito advém do tamanho finito de nossa simulação de um campo de velocidades e se reduz com o aumento da resolução espacial. A largura da linha de vorticidade dos vórtices pontuais também permanece constante por um pequeno intervalo de tempo, no tamanho do ruído colocado inicialmente. Podemos corrigir estes efeitos inerciais de tamanho finito considerando uma translação temporal $t \rightarrow t - t_0$ em ajustes quantitativos dos dados.

Para tempos intermediários, podemos idealizar nosso estudo sobre um plano infinito, i.e., podemos desconsiderar efeitos de borda e interação das imagens causados pelo fato do domínio ser periódico, por argumentos dimensionais, esperamos o comportamento

$$L \propto t. \quad (6.2)$$

Essa tendência foi observada tanto na simulação do campo contínuo de vorticidade quanto na dinâmica de vórtices pontuais, conforme as linhas tracejadas da Fig. 6.4. Por fim, na ausência de espaço para aumentar livremente, o crescimento do comprimento de mistura cessa, na ordem de 10^0 .

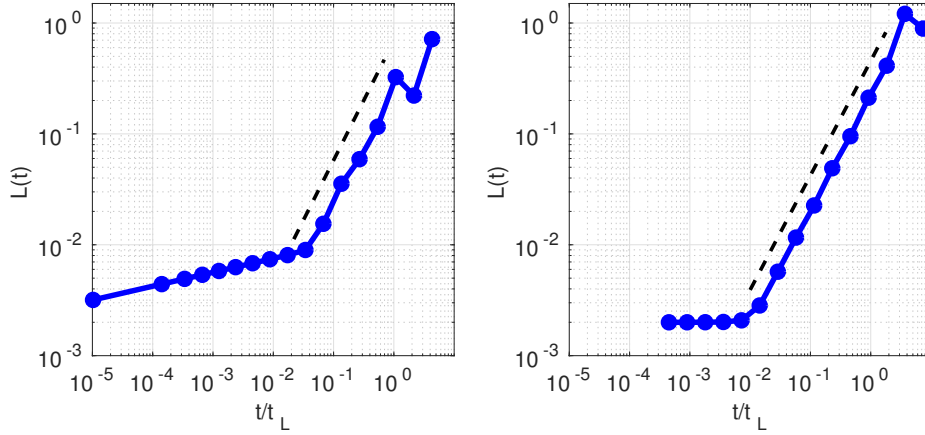


Figura 6.4: O comprimento de mistura L em função do tempo para DNS com resolução de $N = 2048$ na esquerda e com a simulação 10^6 vórtices pontuais via método de ViC na direita. Nota-se um intervalo de tempo inercial entre o início da dinâmica e o começo do aumento de L . As linhas tracejada representa a relação $L \propto t$ esperada. Para um comprimento da ordem de 10^0 , o espaço está preenchido de vórtices e não há mais para onde crescer.

6.4 PERFIS DE VORTICIDADE MÉDIA

O perfil vertical de vorticidade média é dado por $\langle \omega \rangle_x(y, t)$, onde o subíndice dos parênteses indica a variável pela qual foi tomada a média, i.e.,

$$\langle \omega \rangle_x(y, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \omega(x, y, t) dx, \quad (6.3)$$

onde a integral considera apenas a linha inferior de vorticidade. De forma análoga à anterior, a integral é discretizada em uma soma sobre a grade no caso da DNS. Para o caso da dinâmica de vórtices pontuais, o perfil vertical de vorticidade média é apenas o histograma da posição vertical y dos vórtices. O perfil horizontal de vorticidade não faz sentido físico, pois não esperamos um comportamento invariante sobre cada altura.

O perfil de vorticidade para ambos os métodos em tempos distintos é apresentado na Fig. 6.5, onde se observa que ambos evoluem no tempo como uma curva próxima à gaussiana cuja largura à meia altura (FWHM) aumenta, até que os efeitos das condições de contorno periódicas fazem com que a vorticidade se espalhe homogeneamente na direção y . A FWHM está relacionada com o comprimento de mistura característico analisado anteriormente.

Para pequenos tempos, anteriores ao início da formação de estruturas, esperamos invariância frente a translações contínuas de x . À medida que as estruturas crescem de escala espacial, a invariância em x começa a se tornar discreta, $x \rightarrow x + \Delta x$, onde Δx é a largura média das estruturas. A média na coordenada x , portanto, passa a englobar menos estruturas completas, tornando mais ruidosa a curva para tempos maiores.

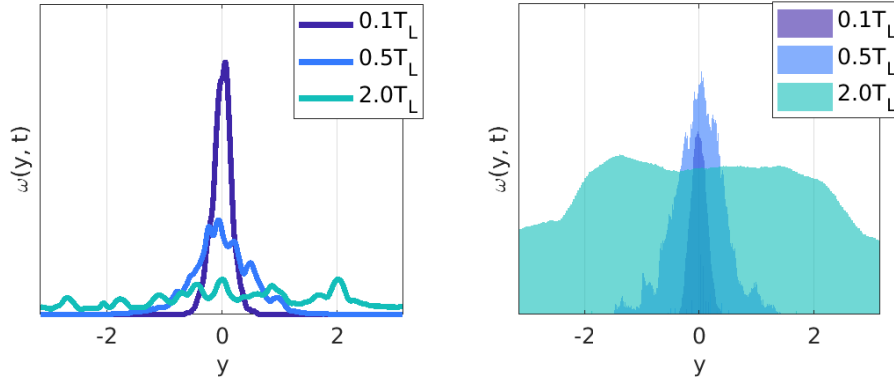


Figura 6.5: Perfil vertical de vorticidade média. Na esquerda, DNS com média sobre 4 realizações (8 linhas de vorticidade) com resolução $N = 2048$. Na direita, o método ViC com 1 milhão de vórtices em grade euleriana de tamanho 2048^2 . As escalas do eixo vertical entre os histogramas dos métodos não são comparáveis devido a diferentes normalizações.

É possível definir de forma análoga o perfil vertical de velocidade média na direção x , i.e., $\langle u \rangle_x(y, t)$,

$$\langle u \rangle_x(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x, y, t) dx,$$

ou seja, na direção paralela à descontinuidade, onde a velocidade é dada inicialmente como uma função degrau de salto 2π .

Os perfis de velocidade média e vorticidade média estão diretamente relacionados por

$$\langle \omega \rangle_x = \left\langle \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle_x = -\frac{\partial}{\partial y} \langle u \rangle_x$$

onde usamos a propriedade (P1) do domínio periódico.

Portanto, com o tempo, o salto inicial do perfil de velocidades, cuja derivada é a função δ inicial, é suavizado, próximo a uma função erro $\pi \text{erf}(y/y_L)$ em que $y_L(t)$ cresce com o tempo e está relacionado com o comprimento característico de mistura. Por fim, a velocidade média é nula em todos os pontos do fluido quando o perfil de vorticidade atinge seu estado homogêneo.

6.5 ESPECTROS DE ENERGIA E ENSTROFIA E FLUXOS

Primeiro, ressaltamos a relação entre os espectros de energia e enstrofia $\Omega(k) = E(k)k^2$. Portanto, analisaremos apenas o comportamento dos espectros de energia, e as mesmas tendências teremos para os espectros de enstrofia.

Para a condição inicial não perturbada $\omega_d(\mathbf{x}, t=0) = \omega_0(\delta(y - \pi/2) - \delta(y + \pi/2))$ é possível obter uma expressão exata para o espectro de energia. Lembrando sua transformada de Fourier dada pela Eq. (4.6). Para os vetores de onda $(0, k_y)$ na região perpendicular, e k_y ímpar, $|\tilde{\omega}_d| = \omega_0/\pi$ é constante,

e nos demais vetores de onda \tilde{u}_d é nula. Portanto, a única parcela da soma abaixo é $k_y = \pm k$:

$$E(k) = \frac{1}{k^2} \sum_{k_y = \pm k} |\tilde{\omega}(0, k_y, 0)|^2 \propto k^{-2}. \quad (6.4)$$

Como a amplitude da perturbação é muito menor que a condição inicial, verificamos no espectro perpendicular, na direita das Fig. 6.6 e Fig. 6.7, o comportamento esperado para a condição inicial no domínio inercial.

A perturbação pode ser distribuída tanto equipartida em enstrofia quanto equipartida em energia. Cada um destes casos é representado pelas Fig. 6.6 e Fig. 6.7, respectivamente.

No caso de uma perturbação não-localizada equipartida em enstrofia para cada vetor de onda adiciona-se um ruído de variância constante sobre $\tilde{\omega}$. Neste caso, o espectro esperado reflete apenas o aumento linear do número de vetores de onda com número de onda k , i.e.,

$$E(k) = \frac{\Omega(k)}{k^2} \propto k^{-1},$$

e as excitações são maiores quanto maior a escala de comprimento. O espectro para este caso está na Fig. 6.6, em que no espectro paralelo (esquerda) é possível enxergar essa lei de potência no instante inicial sobre o domínio inercial.

A perturbação pode também ser não-localizada e equipartida em energia. Nessa caso, cada ruído adicionado sobre as amplitudes de $\tilde{\omega}$ deve ser dividido pelo módulo ao quadrado do vetor de onda da componente. Nesse caso, o espectro esperado é um simples reflexo do elemento de área aumentar linearmente com o módulo,

$$E(k) \propto k,$$

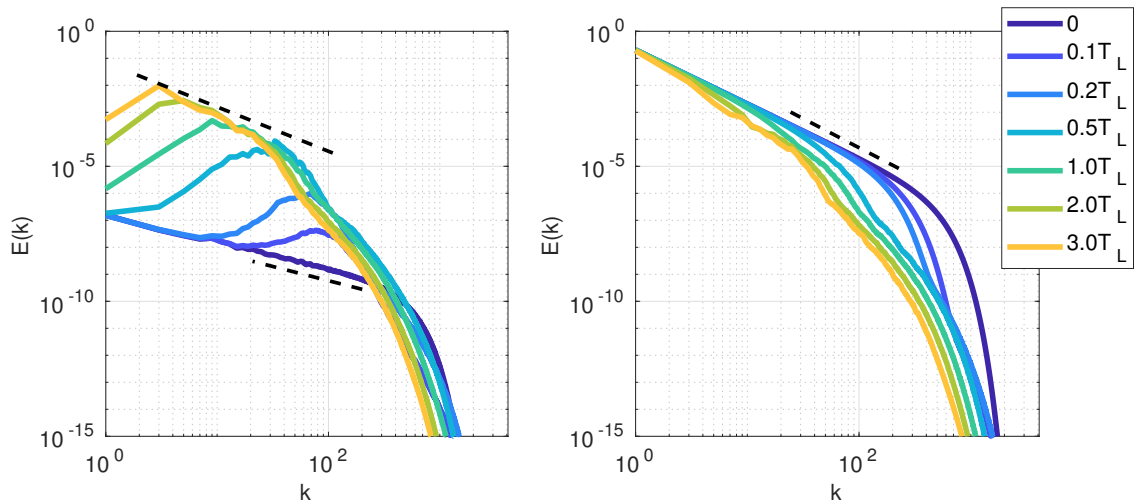


Figura 6.6: Espectros paralelo (esquerda) e perpendicular (direita) de energia $E(k)$ para DNS com resolução $N = 8196$ em diferentes instantes. O ruído inicial é equipartido em enstrofia. Média sobre 9 realizações. A lei de potência na linha tracejada superior esquerda é $k^{-5/3}$, inferior esquerda k^{-1} e superior direita k^{-2} .

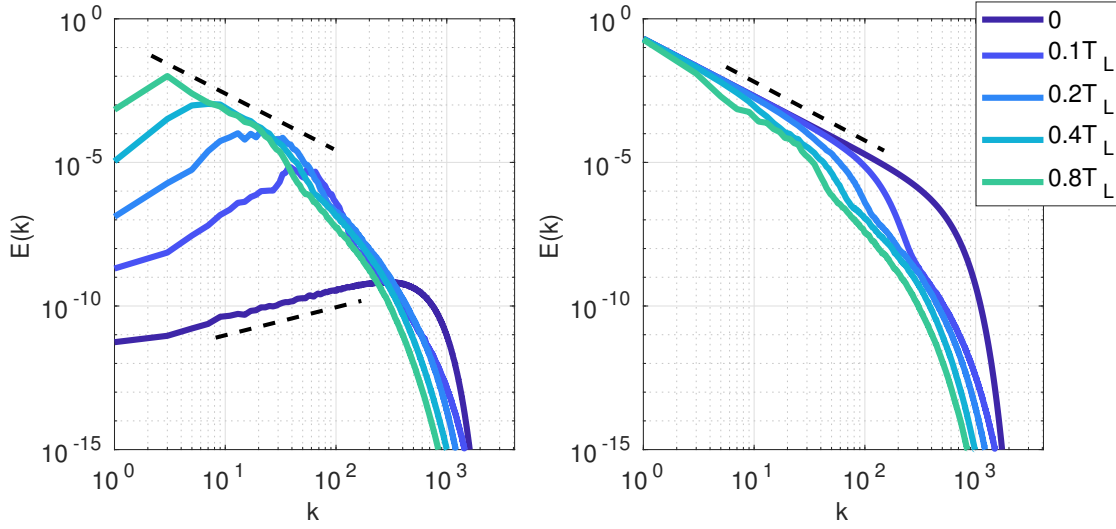


Figura 6.7: Espectros paralelo (esquerda) e perpendicular (direita) de energia $E(k)$ para DNS com resolução $N = 8196$ em diferentes instantes. O ruído inicial é equipartido em energia. Média sobre 9 realizações. A lei de potência na linha tracejada superior esquerda é $k^{-5/3}$, inferior esquerda k^1 e superior direita k^{-2} .

e as maiores excitações ocorrem em escalas de comprimento pequenas. O espectro para essa situação está na Fig. 6.7, onde o espectro paralelo (esquerda) se comporta conforme esperado no instante inicial sobre a região inercial.

Em ambos os casos é possível observar que a energia inicial depositada sobre a descontinuidade e a energia inicial depositada sobre as perturbações diferem por ordens de magnitude. Ambos os gráficos estão normalizados sobre a energia total do sistema. Não há forçamento externo e toda a energia do sistema provém da condição inicial, depositada em todos os números de onda, conforme Eq. (6.4).

Em duas dimensões, as cascatas de energia e enstrofia oriundas das teorias de turbulência de Kolmogorov e Kraichnan dependem das hipóteses de fluxo estacionário gerado pelo conjunto de forçamento e dissipação bem localizados em um número de onda, além da homogeneidade e isotropia estatísticas, conforme discutido em Sec. 3.3. Nenhuma dessas hipóteses é satisfeita no caso da instabilidade de Kelvin-Helmholtz e portanto não é claro o que se deveria observar durante a evolução temporal do sistema.

Em ambas situações é claro um aumento de energia nos números de onda pequenos (escalas grandes) com o tempo, sendo este aumento muito mais acentuado na região do espectro paralelo. De fato, o espectro paralelo que mostra o comportamento da perturbação é mais próximo dos espectros esperados pela teoria de KLB, talvez refletindo a isotropia do ruído. A transferência de energia para as grandes escalas pode ser justificada com o aumento das estruturas visto qualitativamente, armazenando energia em escalas cada vez maiores.

Para $k \approx 20$, o espectro segue uma lei de potência próxima de $k^{-5/3}$ ou k^{-2} . Parece, na verdade, que a parte paralela está mais próxima de $-5/3$ enquanto a parte perpendicular está mais próxima

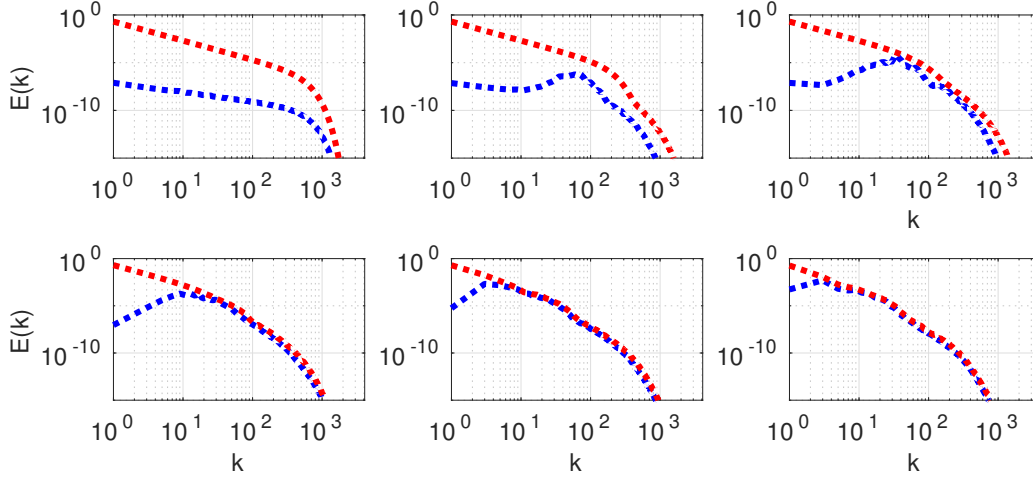


Figura 6.8: Comparação entre o espectro paralelo (azul) e o espectro perpendicular (vermelho) em diferentes tempos (da esquerda para direita, cima para baixo): 0, 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0 (em fração de t_L). O espectro apresentado corresponde à DNS com resolução $N = 8196$ e perturbação equipartida em energia, da Fig. 6.6.

de k^{-2} . Conforme é possível comparar nos gráficos dos setores paralelo e perpendicular do espectro em um mesmo instante na Fig. 6.8, o problema também não é isotrópico do princípio. A isotropia aparece das menores escalas para as maiores à medida que o tempo passa e os espectros paralelo e perpendicular se aproximam.

Para $k \simeq 200$, os espectros decrescem rapidamente, parecendo uma lei de potência, porém com inclinação muito maior do que o expoente -3 que as teorias clássicas para cascatas de energia predizem. Por fim, a dissipação viscosa ocorre para grandes números de onda, que correspondem às escalas pequenas e formam o domínio viscoso que pode ser visto em ambos espectros para $k > 200$, onde essencialmente o espectro decai exponencialmente.

Por fim, a descrição do espectro parece ser robusta frente à variação da resolução numérica da grade, que muda apenas o tamanho relativo das regiões de número de onda em que cada comportamento se manifesta. A descrição é robusta também frente a mudanças no tipo de perturbação, sua equidistribuição e localização. Avaliou-se também mudanças na equação de movimento, onde se substituiu o termo viscoso por um termo hiperviscoso (potências mais altas do laplaciano), e o comportamento dos espectros também não se alterou.

Os fluxos de energia e enstrofia em diferentes instantes da dinâmica são apresentados na Fig. 6.9 e na Fig. 6.10 para condições iniciais com perturbação equipartida em enstrofia e energia, respectivamente. Os fluxos foram normalizados pela intensidade da dissipação viscosa, conforme os termos do lado direito da Eq. (3.4).

Nas figuras é possível notar que o fluxo de energia ocorre nas grandes escalas ($k < 10^2$) em ambas situações, enquanto que o fluxo de enstrofia se dá por todo o domínio inercial. No domínio viscoso, a dissipação viscosa suprime o fluxo devido a não-linearidades. Conclui-se ainda que fluxo é robusto frente à mudança da distribuição inicial da perturbação.

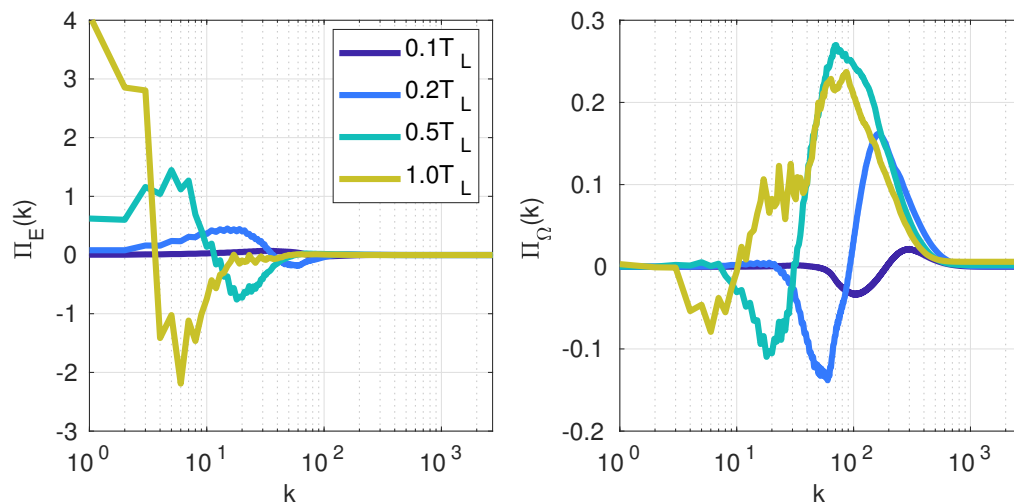


Figura 6.9: Fluxo de energia (esquerda) e enstrofia (direita) para DNS com resolução $N = 8196$ em diferentes instantes. O ruído inicial é não-localizado e equipartido em enstrofia. Média sobre 9 realizações. Fluxo correspondente ao espectro da Fig. 6.6.

Nos instante iniciais é possível perceber que os fluxos não-nulos de energia e enstrofia não se sobrepõem, conforme esperado pela teoria de KLB. Ambos fluxos não são constantes nem estacionários, e sim aumentam com o tempo. Há uma transferência de energia da grande escala para as menores escalas. Isso é remanescente das cascata inversa de energia de Kraichnan, apesar da fonte de energia ser a condição inicial, não localizada em número de onda.

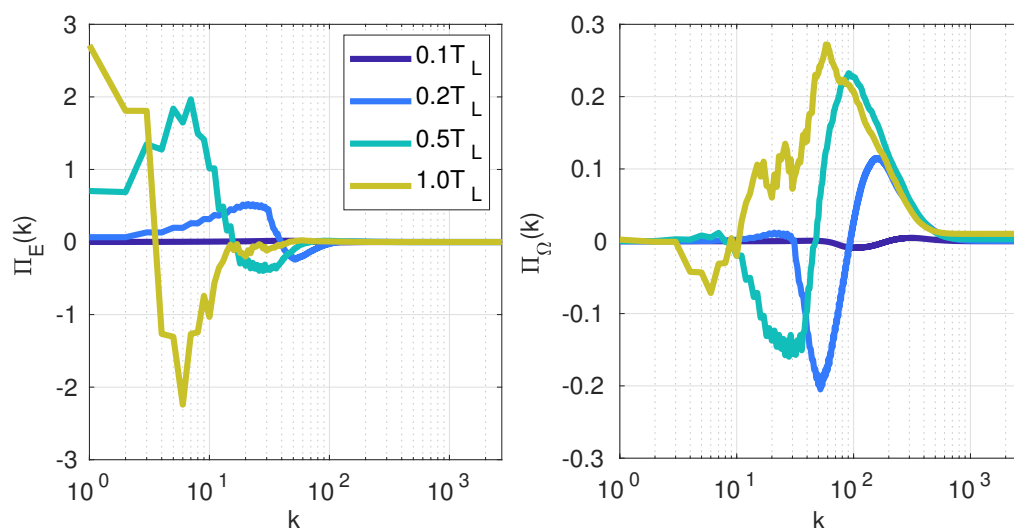


Figura 6.10: Fluxo de energia (esquerda) e enstrofia (direita) para DNS com resolução $N = 8196$ em diferentes instantes. O ruído inicial é não-localizado e equipartido em energia. Média sobre 9 realizações. Fluxo correspondente ao espectro da Fig. 6.7.

Finalmente, o gráfico do espectro de energia para 1 milhão de vórtices pontuais simulados com o método ViC, com resolução de 2048^2 durante a dinâmica, está na Fig. 6.11. Para compor o espectro, projetamos a posição dos vórtices pontuais em um campo de vorticidade de resolução 4096^2 . É possível observar claramente na figura a ausência de um domínio viscoso para grandes números de onda, comprovando o caráter invíscido do fluido simulado pelo método ViC.

A condição inicial apresenta um comportamento diferente para números de onda menores e maiores que aproximadamente 10^2 . Isso é devido aos números de onda menores refletirem a função $\delta(y)$ e portanto, $E(k) \propto k^{-2}$ no setor perpendicular do espectro, como discutido no caso da DNS, Eq. (6.4). Já os números de onda maiores correspondem à perturbação adicionada sobre a linha de vorticidade. O ponto de troca do comportamento é aproximadamente $2\pi/\delta_0 \approx 10^2$, em que $\delta_0 = 0.06$ é o desvio-padrão do ruído branco depositado sobre a posição vertical.

Na dinâmica para um fluido ideal ainda verificamos que a isotropia é progressivamente restaurada e existe uma transferência de energia das menores para as grandes escalas no espectro paralelo, similar às conclusões para um fluido viscoso. Na região de grandes escalas, $k \leq 10$, é possível observar a constância da tendência do espectro inicial, k^{-2} , no setor perpendicular. Já no setor paralelo, a curva é muito mais acentuada que $k^{-5/3}$ observada no caso do fluido viscido. Para efeitos de comparação, traçamos ao lado a lei de potência k^{-4} .

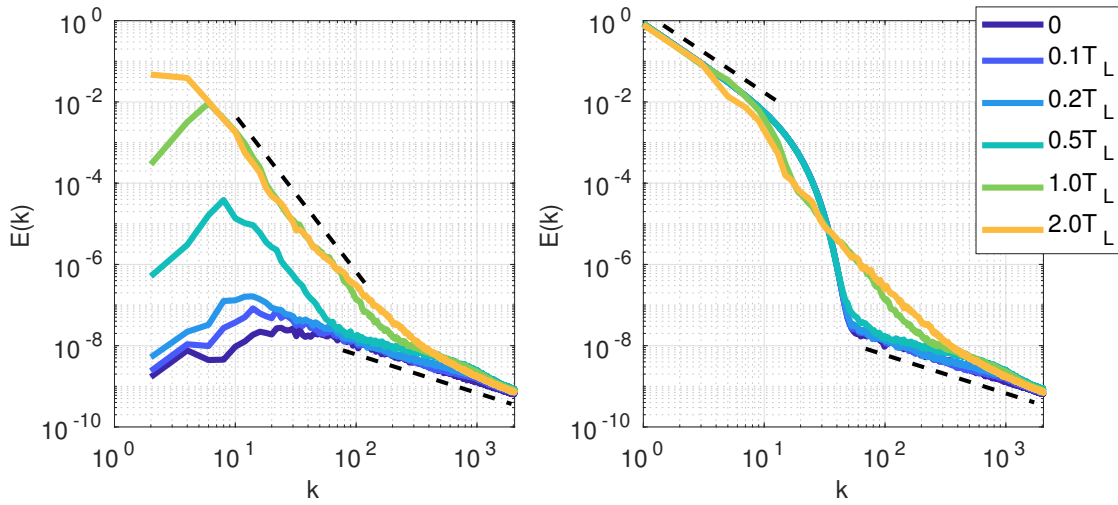


Figura 6.11: Espectros paralelo (esquerda) e perpendicular (direita) de energia $E(k)$ para simulação de 1 milhão de vórtices pontuais pelo método ViC, com 2048^2 células durante a dinâmica, em diferentes instantes. O ruído inicial na posição vertical dos vórtices tem desvio-padrão de 0.06 e é normalmente distribuído. A lei de potência na linha tracejada superior esquerda é k^{-4} , inferior esquerda k^{-1} , superior direita k^{-2} e inferior direita k^{-1} .

Conclusão

Discutimos as principais equações sobre mecânica de fluidos incompressíveis em domínios bidimensionais, os princípios e as teorias clássicas da turbulência, e leis de simetria e quantidades conservadas do escoamento turbulento. Descrevemos também a instabilidade de Kelvin-Helmholtz (IKH) em 2D e diferentes métodos numéricos para a sua simulação computacional em fluidos viscosos e ideais. Pela primeira vez na literatura são comparados de forma sistemática a turbulência gerada pela IKH a partir da Eq. de Navier-Stokes (DNS) e de Euler (PV e ViC).

Comparamos as dinâmicas regidas pelos métodos de vórtices pontuais (PV) e de vórtices em células (ViC) em diferentes resoluções, onde se verificou concordância entre a evolução temporal da energia do sistema para os instantes de tempo em que ambos têm as mesmas condições de contorno, sendo o passo temporal da dinâmica ajustado para que a variância da energia e enstrofia no tempo sejam quase nulas.

Um tempo característico baseado na energia armazenada inicialmente no sistema se mostrou um bom parâmetro para comparação sistemática de diferentes simulações a partir de diferentes métodos. A partir de simulações feitas com programas próprios, comparamos qualitativamente a formação de estruturas de vorticidade de tamanhos espaciais crescentes no tempo, propriedade esta que se refletiu no comprimento de mistura e nos perfis de vorticidade de cada escoamento. Notamos também um comportamento inercial do campo de vorticidade no começo da simulação oriundo de efeitos de resolução espacial finita, e que podem ser corrigidos com uma translação temporal.

Com programas de DNS computacionalmente sofisticados, investigamos as leis de potência na distribuição espectral de energia para um fluido viscido, no limite $\nu \rightarrow 0$. Ratificamos a anisotropia da condição inicial em todas as escalas quando separamos o espaço dos vetores de onda em setores, algo raro na literatura especialmente na resolução espacial estado-da-arte utilizada nesse trabalho de conclusão. Observamos que a isotropia é progressivamente restaurada pelo sistema, das pequenas para as grandes escalas.

Para um fluido viscoso, algumas características das teorias clássicas de turbulência de Kolmogorov e KLB foram observadas no espectro paralelo, apesar das hipóteses destas teorias não se aplicarem. De fato, falta na literatura uma descrição de turbulência em que a energia do sistema é dada pela condição inicial, é não-localizada em número de onda e inicialmente anisotrópica. A descrição qualitativa do espectro parece ser robusta frente à variação da resolução espacial, que muda apenas o tamanho relativo das regiões de número de onda em que cada comportamento se manifesta; também

robusta frente a mudanças na distribuição do tipo de perturbação aplicado sobre o espectro da descontinuidade tangencial, assim como na sua localização sobre o espaço dos vetores de onda.

Referente ao fluxo de energia e enstrofia entre os vetores de onda, verificamos que ele não é constante nem estacionário, e portanto não caracteriza as famosas cascatas previstas em teorias clássicas de turbulência. Há uma transferência de energia das pequenas para as maiores escalas, remanescente da cascata inversa de energia de KLB. Observamos também um fluxo de enstrofia crescente no tempo sobre todo o domínio inercial, em especial em direção às pequenas escalas.

Teorias estatísticas de turbulência em fluidos invíscidos são algo raro na literatura científica. Os mesmos espectros de energia e enstrofia foram reobtidos a partir de uma dinâmica de vórtices pontuais para um fluido ideal. O comportamento do espectro oriundo da descontinuidade tangencial é similar àquele do fluido viscoso. Por outro lado, o comportamento do espectro paralelo que reflete os efeitos da perturbação não segue as mesmas leis de potência. Nossos resultados, portanto, dão evidência numérica para existência de um comportamento não-trivial para a turbulência gerada pela IKH no limite de viscosidade nula, não reportado na literatura científica.

Mostramos ainda que o mecanismo físico associado às dinâmicas não-lineares da IKH é complexo devido às transferências de energia e enstrofia entre escalas múltiplas não descritas pelas teorias clássicas de cascatas que dependem de uma turbulência isotrópica nas pequenas escalas e injeção de energia localizada em número de onda. Ao contrário do bem descrito estágio linear da dinâmica, onde ocorre um crescimento exponencial da instabilidade, a dinâmica completa não-linear é raramente documentada. O mecanismo atuante em si precisa ser melhor elucidado e, para tanto, pesquisadores do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) trabalham em modelos simplificados que contenham a essência da equação de Navier-Stokes e que possam elucidar de forma teórica a estrutura da dinâmica, para que possamos descrever os espectros e fluxos expostos nessa monografia [18].

As perspectivas de continuação da descrição fenomenológica da IKH contemplam a definição de fluxo espectral na dinâmica de vórtices pontuais, o cálculo das funções de correlação e de estrutura das posições dos vórtices e suas relações com o espectro e o fluxo de energia. A dispersão de um escalar passivo pode ser calculada na DNS e pode corroborar com os resultados do comprimento de mistura. A DNS pode ser facilmente concebida para simulações em espaços tridimensionais da IKH, enquanto que a aplicação dos métodos de vórtices pontuais precisa ser repensada para este espaço.

Referências Bibliográficas

- [1] U. Frisch. *Turbulence*. Cambridge University Press, 1996.
- [2] H. van Haren e L. Gostiaux. A deep-ocean kelvin-helmholtz billow train. *Geophysical Research Letters*, 37(3), 2010.
- [3] R.H. Kraichnan e D. Montgomery. Two-dimensional turbulence. *Reports on Progress in Physics*, 43(5):547, 1980.
- [4] L.D. Landau e E.M. Lifshitz. *Fluid Mechanics (Second Edition)*, volume 6 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon, second edition edition, 1987.
- [5] L. Székelyhidi Jr. Weak solutions to the incompressible euler equations with vortex sheet initial data. *Comptes Rendus Mathématique*, 349(19-20):1063–1066, 2011.
- [6] N. Mangiavacchi e G.R. dos Anjos J.R.M. Pontes. *Introdução aos escoamentos compressíveis*. Publicações matemáticas do IMPA, 2017.
- [7] A. Yaglom e F. David M. Lesieur. *New trends in turbulence. Turbulence : nouveaux aspect*. Springer / Les Houches, 2000.
- [8] W. Rodi e G. Scheuerer V.C. Patel. Turbulence models for near-wall and low reynolds number flows - a review. 23(9):1308–1319, 1985.
- [9] G. Boffetta e R.E. Ecke. Two-dimensional turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 44(1):427–451, 2012.
- [10] L.N. Trefethen. *Spectral Methods in Matlab*. SIAM, 2000.
- [11] D.H. Bailey e P.N. Swarztrauber. A fast method for the numerical evaluation of continuous fourier and laplace transforms. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 15(5):1105–1110, 1994.
- [12] S. Orszag. On the elimination of aliasing in finite-difference schemes by filtering high-wavenumber componentes. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 28, 1971.
- [13] E.A. Kuznetsov e A.A. Mailybaev D.S. Agafontsev. Development of high vorticity structures in incompressible 3d euler equations. *Physics of Fluids*, 27(8):085102, 2015.

- [14] A. Hassan. Point vortex dynamics: A classical mathematics playground. *Journal of Mathematical Physics*, 48(6):065401, 2007.
- [15] V.A. Vshivkov e M.P. Fedoruk Yu.N. Grigoryev. *Numerical 'Particle-in-cell' Methods: Theory and applications*. De Gruyter, 2002.
- [16] P.D. Mininni e P. Dmitruk D.O. Gomez. Parallel simulations in turbulent mhd. *Phys. Scripta*, T116, 2005.
- [17] R. Reddy e A. Pouquet P.D. Mininni, D.L. Rosenberg. A hybrid mpi-openmp scheme for scalable parallel pseudospectral computations for fluid turbulence. *arXiv:1003.4322*, 2010.
- [18] A.A. Mailybaev. Toward analytic theory of the rayleigh–taylor instability: lessons from a toy model. *Nonlinearity*, 30(6):2466, 2017.