Práctica 6

Ejercicio 1:
Consideremos la función $f(x) = 2 + \text{sen}(2\sqrt{x})$ y el intervalo de integración [1, 6]. Resolviendo la integral (no lo hagas ahora) podrías comprobar que el valor exacto es 8.18347920766278.

En este ejercicio queremos comprobar que la fórmula compuesta del trapecio es del orden $O(h^2)$. Eso quiere decir que si h se decrementa a la mitad, cabe esperar que el error se decremente a la cuarta parte. Vamos a utilizar como valores de n 10, 20, 40, 80 y 160 con lo que conseguimos que el valor de h se vaya decrementando justo a la mitad en cada paso. Entonces, teóricamente sabemos que el error en cada nueva estimación será la cuarta parte del error cometido por la estimación anterior, o lo que es lo mismo, que el cociente entre los dos errores es $\frac{1}{4} = 0.25$

Comprueba que se obtienen los resultados de la siguiente tabla:

i	n	| error |	$\frac{\lvert\text{error}_i\rvert}{\lvert\text{error}_{i-1}\rvert}$
1	10	0.0103754	-----------
2	20	0.00257006	0.247708
3	40	0.000640984	0.249405
4	80	0.00016015	0.24985
5	160	0.0000400314	0.249962

Ejercicio 2: Repetir el mismo enunciado anterior pero usando ahora la fórmula compuesta de Simpson. Como el orden es $O(h^4)$ cabe esperar que en cada nueva estimación el error se decremente en 1/16, o lo que es lo mismo, el cociente de errores será $\frac{1}{16} = 0.0625$. Comprueba que este resultado teórico se confirma comprobando que se obtienen los resultados de la siguiente tabla:

i	*n*	| error |	$\frac{\lvert\text{error}_i\rvert}{\lvert\text{error}_{i-1}\rvert}$
1	10	0.000463714	------------
2	20	0.000031711	0.0683849
3	40	0.00000203	0.0643267
4	80	0.000000128	0.062995
5	160	0.00000000804	0.0626267

Ejercicio 3: Se desea estimar $I = \int_2^5 \sqrt{x}\ln(x^2+1)\,dx$ de la siguiente forma: dividir el intervalo de integración en 10 partes iguales y aplicar la fórmula de Gauss de dos nodos en cada subintervalo.

Solución: $\hat{I}$ =14.445

Ejercicio 4: Un problema de contorno.

Consideremos el problema $y''-4y = x$ con $x\in[0,1]$ siendo $y(0)=1$ $\quad y(1)=e^2-\frac{1}{4}$.

Usando la fórmula de las diferencias finitas: $\hat{y}''(c) = \frac{y(c+h)-2y(c)+y(c-h)}{h^2}$

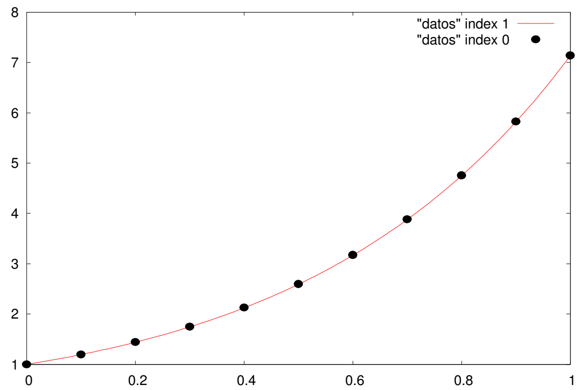
Se trata de obtener una estimación del valor de la función solución $y(x)$ en 9 puntos intermedios del intervalo $[0,1]$ dividiéndolo en 10 partes iguales, para ello hay que deducir cómo es el sistema tridiagonal resultante y resolverlo (ó bien con el método de triangulación de Gauss ó con el método iterativo de Gauss-Seidel, elige el método que más te guste).

Obtener también el error cometido por cada estimación, sabiendo que la solución exacta es:

$y(x) = -\frac{x}{4}+e^{2x}$

(Solución: por ejemplo $\hat{y}(0.5)$ =2.59672 mientras que $y(0.5)=2.59328$)

Nota: Completa el ejercicio obteniendo la representación gráfica de la solución exacta y la aproximada utilizando GNUPLOT. La curva en rojo es la solución exacta y los punto negros son las estimaciones obtenidas.



Ejercicio 5:

Consideremos el siguiente problema de valor inicial: $y'=2x+y$ $\quad x\in[0,2]$ siendo $y(0)=3$ cuya solución exacta se puede comprobar fácilmente que es $y=-2+5e^x-2x$. Escribir un programa que implemente el método de Euler para $h=0.1$.

Solución:

x_i	$\hat{y}(x_i)$	$y(x_i)$	$\lvert error \rvert$
2	27.6375	30.9453	3.307

Ejercicio 6: **Convergencia del método de Euler.**

Consideremos el siguiente problema de valor inicial: $y' = x\,y + x \qquad x \in [0, 1] \qquad$ siendo $y(0) = 4$

cuya solución exacta se puede comprobar fácilmente que es $y = -1 + 5\,e^{\frac{x^2}{2}}$. Cabe esperar a priori que al utilizar el método de Euler con valores pequeños de h se obtendrán mejores resultados. Comprobar que la suposición anterior es correcta usando tres valores diferentes h y calculando en cada caso el error cometido al estimar $y(1)$.

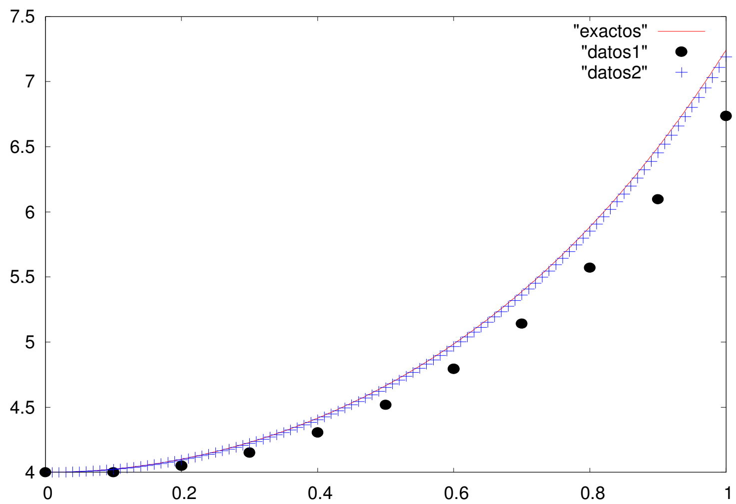
a) $h = 0.1$ b) $h = 0.01$ c) $h = 0.001$

De hecho, puede demostrarse que el error global del método de Euler es del orden O(h). Eso quiere decir que si el valor de h disminuye, también disminuye el error, concretamente, como el h del apartado b) es $\frac{1}{10}$ del h del apartado a), cabe esperar que el error que se cometa en b) sea $\frac{1}{10}$ del error cometido en a). Análogamente, el error de c) debe ser también $\frac{1}{10}$ del error del apartado b). Comprobar estas cuestiones teóricas.

(Solución: a) |error| = $|y(1) - y_{10}| = 0.508054$; b)|error|= $|y(1) - y_{100}|$ =0.0545041

c) |error|= $|y(1) - y_{1000}|$ =0.00549116 y efectivamente el error en cada nuevo apartado es aproximadamente $\frac{1}{10}$ del error anterior).

Nota: Puedes completar este ejercicio con una representación gráfica de los resultados con GNUPLOT. En la figura siguiente la solución exacta se ve como una línea continua roja, la primera estimación con puntos negros y la segunda (mucho mejor) con cruces azules. La tercera no se ha representado, porque, como podrás imaginar, prácticamente se superpone sobre la solución exacta y no se aprecia la diferencia.



Ejercicio 7: Método de Taylor.

Consideremos el siguiente problema de valor inicial: $y' = x\,y + x \qquad x \in [0, 1]$ siendo $y(0) = 4$ cuya solución exacta se puede comprobar fácilmente que es $y = -1 + 5\,e^{\frac{x^2}{2}}$.

Pretendemos aplicar el método de Taylor de orden 2. Puede demostrarse que el error global de este método es del orden O(h^2), por lo tanto, si h se decrementa en un $\frac{1}{10}$ respecto al h anterior , el error cabe esperar que ahora se decremente en $\frac{1}{10^2}$ respecto del error anterior.

Comprobar que la suposición anterior es correcta usando tres valores diferentes h y calculando en cada caso el error cometido al estimar $y(1)$.

a) $h = 0.1$ b) $h = 0.01$ c) $h = 0.001$

(Solución: a) | error | = 0.02 b) | error | =0.0002 c) | error | =0.000002. Efectivamente el error en cada nuevo apartado es aproximadamente $\frac{1}{10^2}$ del error del apartado anterior)

Opcional (sólo para subir nota)

Ejercicio 1: Las fórmulas de integración pueden adaptarse para el cálculo de integrales múltiples. Por ejemplo, si queremos calcular una integral doble $I = \iint_R f(x, y)\,dxdy$ donde R es un rectángulo:

$R = \{(x, y) |\ a \le x \le b, c \le y \le d\}$; o sea $I = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy \right) dx$. Para averiguar la primera integral se puede, por ejemplo, aplicar la regla compuesta de Simpson dividiendo el intervalo $[c, d]$ en m partes. Si, por simplicidad, escogemos m=2, entonces:

$$\int_c^d f(x, y)\,dy \approx \frac{k}{3}\left(f(x, y_0) + 4f(x, y_1) + f(x, y_2) \right)$$

siendo k el tamaño del paso $k = \frac{d-c}{2}$, $y_0 = c$, $y_1 = c + k$, $y_2 = d$. Entonces, sustituyendo:

$$I \approx \int_a^b \frac{k}{3}\left(f(x, y_0) + 4\,f(x, y_1) + f(x, y_2) \right) =$$

$$= \frac{k}{3}\left(\int_a f(x, y_0)\,dx + 4\int_a^b f(x, y_1)\,dx + \int_a^b f(x, y_2)\,dx \right)$$

Cada una de estas integrales, se puede estimar también con la regla de Simpson dividiendo en n partes iguales el intervalo $[a, b]$. Así, si por ejemplo $n = 4$, la primera sería:

$\int_a^b f(x, y_0) \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0, y_0) + 4f(x_1, y_0) + 2f(x_2, y_0) + 4f(x_3, y_0) + f(x_4, y_0)\right)$ siendo h el tamaño del paso $h = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a,\ x_1 = a + h, \ldots, x_4 = b$. Esta idea se repite para los otras dos integrales.

Se pide en este ejercicio calcular una estimación de: $I = \int_{1.4}^{2}\int_{1}^{1.5} \ln(x + 2y)\,dy\,dx$ con la regla compuesta de Simpson con m=2 y n=4.

Solución: $\hat{I}$ =0.4295524. El resultado es bastante bueno ya que el verdadero valor de la integral es $I = 0.4295545$

Ejercicio 2:

Consideremos el problema de valor inicial:

$y' = 2xy - 2x^2 + 1$ en el intervalo [0, 1] siendo $y(0) = 2$.

Aplicar el método de Euler y el método de Euler modificado con h = 0.2 y comparar los resultados obtenidos con la solución exacta del problema $y = 2e^{x^2} + x$.

(Solución:

x_i	$y(x_i)$	$\hat{y}(x_i)$ (Euler)	$\hat{y}(x_i)$ (Euler modif.)
0.2	2.2816	2.2	2.28
0.4	2.7470	2.56	2.7429
0.6	3.4666	3.1056	3.4564
0.8	4.5929	3.9069	4.5659
1	6.4365	5.1011	6.3627

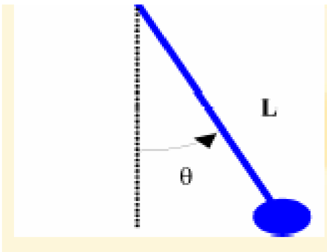
Nota: Si quieres, puedes completar el problema obteniendo la representación gráfica con GNUPLOT

Ejercicio 3:

El movimiento de un péndulo no amortiguado de longitud L está regido por la ecuación diferencial:

$$\theta''(t) + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta(t) = 0$$

siendo $\theta(t)$ el ángulo que forma con la línea vertical (con la posición de equilibrio) que es una función que depende de t y g la aceleración de la gravedad.



Supongamos que L= 0.5 m., g = 9.8 m/s^2 y que parte de una posición inicial $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, es decir $\theta(0) = \frac{\pi}{4}$ y además suponemos que la velocidad $= \frac{d\theta}{dt}$ es cero en el instante inicial (t = 0).

Haciendo el cambio de variables:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \theta(t) \\ y(t) &= \frac{d\theta(t)}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -\left(\frac{g}{L}\right)\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

el problema original se transforma en un p.v.i. para un sistema diferencial de primer orden con las condiciones iniciales: $x(0) = \frac{\pi}{4}$; $y(0) = 0$.

Aplicar el método de Euler y el método de Euler modificado para $h = 0.001$ en el intervalo $[0, 2]$.

Solución: Por ejemplo, para $t = 2$, la estimación de θ es –0.490862 para Euler y -0.485598 para Euler modificado.

Nota: Obtener la gráfica de $\theta(t)$ para $t \in [0, 2]$ aprovechando el programa anterior usando las estimaciones obtenidas por el método de Euler modificado y usando GNUPLOT.

Ejercicio 4:

Consideremos el problema de valor inicial:

$y' = x + y$ en el intervalo [1, 1.3] siendo $y(1) = 1$.

Aplicar el método de Runge-Kutta de orden 4 con $h = 0.1$ y comparar los resultados obtenidos con la solución exacta del problema $y = 3e^{x-1} - x - 1$.

(Solución:

x_i	$y(x_i)$	$\hat{y}(x_i)$ (R-K 4)
1.1	1.215512	1.215512
1.2	1.464208	1.464207
1.3	1.749576	1.749575

<u>Ejercicio 5:</u> Modelo depredador-presa (Volterra-Lotka)

El estudio de la dinámica de una población con dos especies en competencia tiene su origen en los trabajos desarrollados a principios del siglo XX por Lotka (biólogo) y Volterra (matemático). La primera especie es el depredador (lobos, por ejemplo) y la segunda especie la presa (conejos). Teóricamente, el depredador puede destruir todas las presas de modo que esta última especie llegue a extinguirse. Sin embargo, si el número de presas disminuye, también disminuye el número de depredadores al escasear su alimento. Se desarrolla así un ciclo en la naturaleza donde en algún momento la presa puede ser abundante y los depredadores pocos, aumentando el número de depredadores al tener mucho alimento, reduciéndose la población de presas y al revés. Vamos a ver un modelo simplificado.

Supongamos que la población en el instante *t* del depredador viene dada por $x_2(t)$, alimentándose de la población de presas indicada por $x_1(t)$. Supondremos que la presa tiene un suministro constante de alimento y que su razón de natalidad es proporcional al número de presas en ese instante, es decir, la razón de natalidad de la presa es $k_1\, x_1(t)$ (cuantas más hayan, más nacen). La razón de mortalidad de la presa depende del número de presas (cuantas más hayan, más se mueren) y del número de depredadores (más depredadores, más presas comen). La razón de mortalidad de la presa es $k_2\, x_1(t)\, x_2(t)$.

La razón de natalidad del depredador depende de la cantidad de alimento, es decir de $x_1(t)$, y también del número de depredadores, supondremos por lo tanto que es $k_3\, x_1(t)\, x_2(t)$. La razón de mortalidad del depredador se tomará simplemente como proporcional al número de depredadores en ese momento, es decir, $k_4 x_1(t)$.

Como $\dfrac{dx_1}{dt}$ y $\dfrac{dx_2}{dt}$ representan el cambio en ambas especies con respecto al tiempo, el problema se puede formular de modo matemático a través del sistema de ecuaciones diferenciales siguiente:

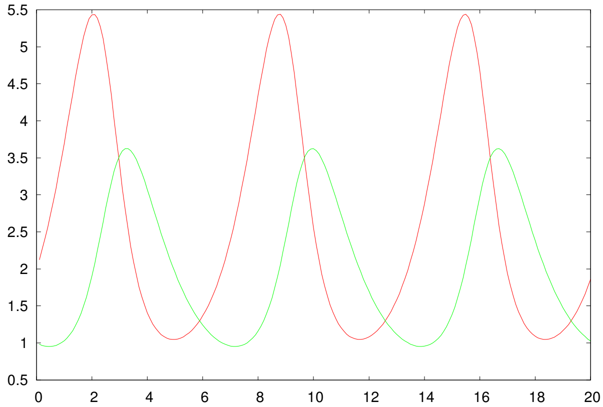
$$\frac{dx_1}{dt} = k_1\, x_1(t) - k_2\, x_1(t)\, x_2(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = k_3\, x_1(t)\, x_2(t) - k_4 x_2(t)$$

donde $x_1(0)$ y $x_2(0)$ son el número de individuos de cada especie en el instante inicial.

Obtener una solución aproximada de este problema usando el método de Runge-Kutta de 4º orden para ver cómo evoluciona la población en los próximos 20 años (*t* se mide en años), suponiendo: $k_1 = 1.2$, $k_2 = 0.6$, $k_3 = 0.3$, $k_4 = 0.8$, $h = 0.1$ y que $x_1(0) = 2$ y que $x_2(0) = 1$ (la población inicial medida en miles de individuos).

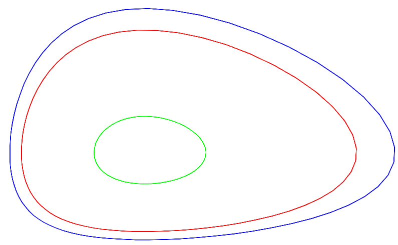
Solución: $x1(20) = 1.85991$, $x2(20) = 1.02752$

Nota: completa el ejercicio con GNUPLOT representando en una misma gráfica la evolución de ambas especies en el tiempo. Observa un comportamiento cíclico de ambas poblaciones.



Como se puede ver, al principio la población de depredador es pequeña y crece la población de presa. En cierto momento, las presas son tan numerosas que la población de depredador empieza a crecer (abundancia de alimento). El aumento de depredador causa que la presa disminuya. Esta disminución de la presa causa a su vez una disminución de los depredadores (falta de alimento). Con el tiempo, el proceso se repite.

Este tipo de sistemas diferenciales, donde no aparece explícitamente la variable *t*, porque se escriben como: $\left.\begin{array}{l} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) \end{array}\right\}$ se llaman sistemas autónomos. Una representación gráfica habitual para este tipo de sistemas consiste en dibujar en un plano, llamado plano fase, las coordenadas de los puntos $(x_1(t), x_2(t))$. La gráfica obtenida se llama trayectoria o también órbita. A continuación se representan tres trayectorias de este sistema diferencial, variando las condiciones iniciales.



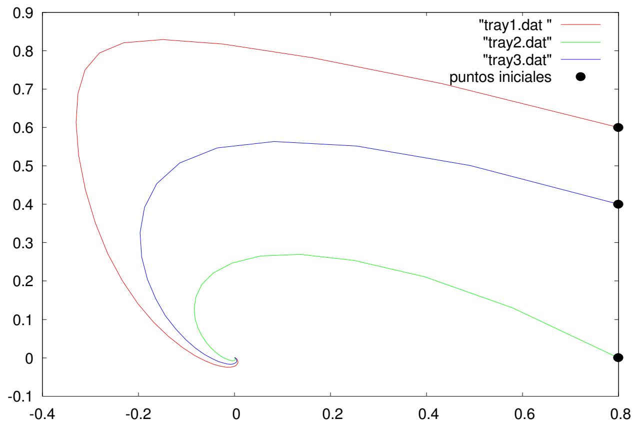
La interacción entre el depredador y la presa define una órbita o trayectoria cerrada en este caso. Usa GNUPLOT para obtener la órbita o trayectoria de este problema.

<u>Ejercicio 6:</u> Consideremos el sistema diferencial autónomo siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x' &= -3x - 2y - 2xy^2 \\ y' &= 2x - y + 2y^3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} t &\in [0,4] \\ x(0) = 0.8 \;\; & y(0) = 0.6 \end{aligned}$$

Modificar el programa anterior y obtener la trayectoria. Debes comprobar cómo la trayectoria se acerca al punto (0,0). Dibuja la trayectoria del problema planteado y, en el mismo gráfico, las trayectorias para las condiciones iniciales: $x(0) = 0.8 \;\; y(0) = 0$ y $x(0) = 0.8 \;\; y(0) = 0.4$.

<u>Solución:</u> por ejemplo, para las condiciones iniciales $x(0) = 0.8; y(0) = 0.6$ se obtienen como estimaciones $x(4) = 0.000803255; y(4) = 0.000575454$. Las tres órbitas o trayectorias se presentan a continuación, ahora son curvas que terminan en (0,0).



<u>Ejercicio 7:</u> Trayectorias caóticas: las ecuaciones de Lorenz.

En 1963 el meteorólogo E. N. Lorenz estudiaba la predicción del tiempo a través de la resolución de un sistema diferencial, que en su modelo más simplificado tenía el siguiente aspecto:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ax + ay \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= -bz + xy \end{aligned}\right\}$$

también es un sistema diferencial autónomo, porque los segundos miembros de las ecuaciones no dependen explícitamente de *t*.

a) usando $a=10$, $b=8/3$, $r=15$ y las condiciones iniciales $x(0)=2$, $y(0)=1$ y $z(0)=1$, hallar estimaciones de $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ en el intervalo [0, 40], usando el método de Runge-Kutta de 4º orden con $h=0.1$.

b) repetir el apartado anterior cambiando sólo $r=28$ y ampliar el intervalo a [0, 80].

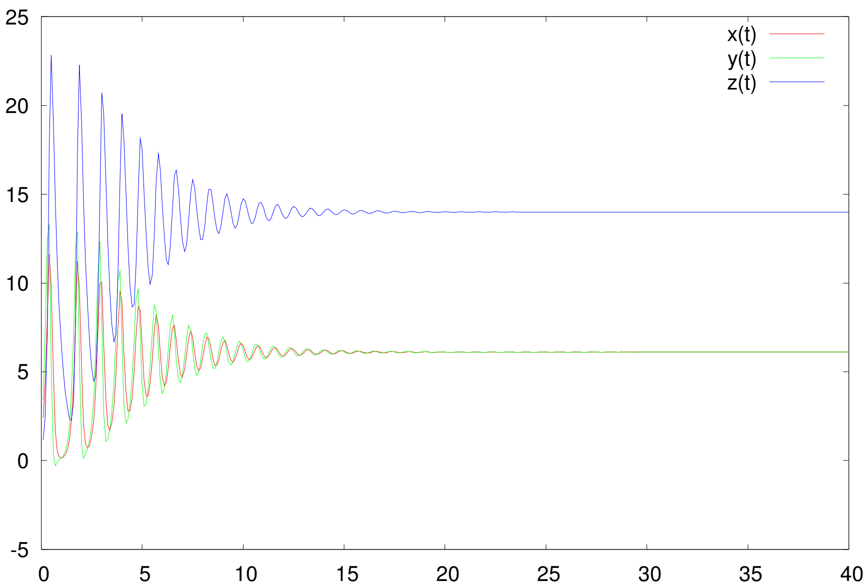
c) Los valores de los parámetros del sistema de Lorenz utilizados en el apartado a) no son "sensibles" a las condiciones iniciales. Así que comprueba que si se toma como condiciones iniciales otros ligeramente modificados: $x(0)=2.0001$, $y(0)=1$ y $z(0)=1$, se obtienen los mismos resultados a largo plazo que en a). Concretamente comprueba que $x(40)$, $y(40)$ y $z(40)$ son iguales que los obtenidos en el apartado a).

d) Por el contrario, los valores de los parámetros utilizados en el apartado b) sí son "sensibles" a las condiciones iniciales. Comprueba que si: $x(0)=2.0001$, $y(0)=1$ y $z(0)=1$, se obtienen resultados muy diferentes a largo plazo. Comprueba que $x(40)$, $y(40)$ y $z(40)$ son muy diferentes de los obtenidos en el apartado b).

<u>Observación</u>: La sensibilidad a las condiciones iniciales es una característica muy importante de los procesos caóticos, por eso Lorenz admitía que era muy difícil prevenir el tiempo porque, en teoría, como dijo el propio Lorenz en un artículo, el simple aleteo de una mariposa podría provocar un tornado en el polo opuesto del mundo. Por eso, a la sensibilidad a las condiciones iniciales se le llama "efecto mariposa".

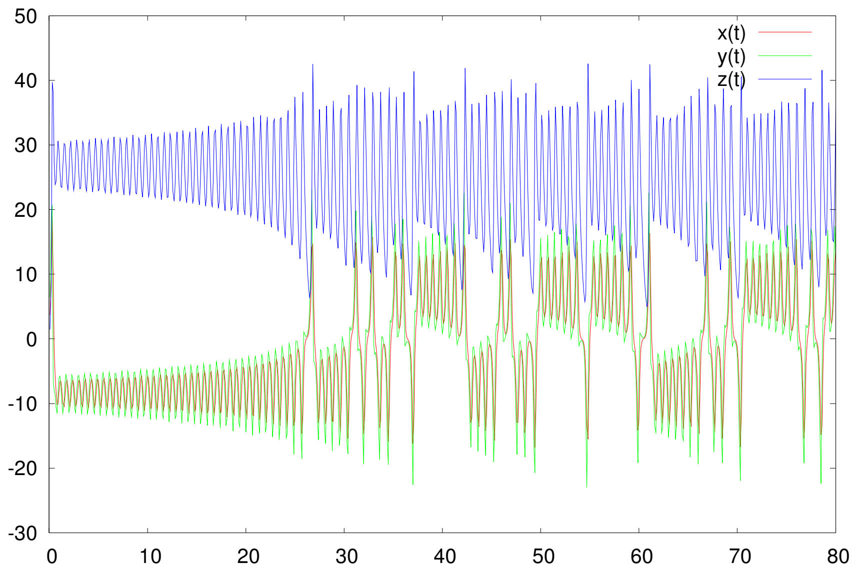
<u>Solución</u>: a) se obtiene $x(40)=6.1101$, $y(40)=6.1101$ y $z(40)=14$

Los valores de $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ van variando inicialmente pero terminan acercándose al punto anterior, para ello basta observar las gráficas de las tres funciones:



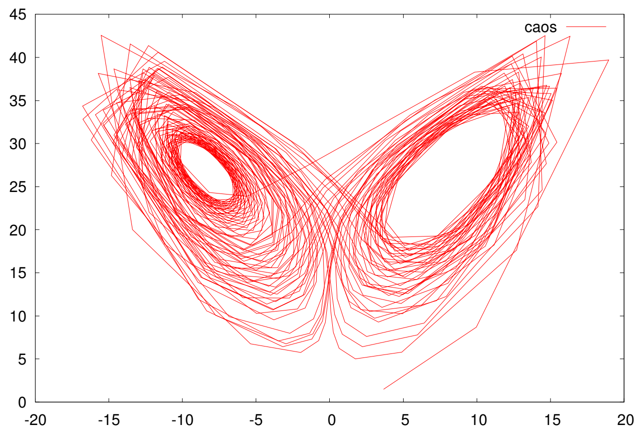
La trayectoria sería 3D. Por simplicidad, si sólo nos fijamos en $x(t)$ y $z(t)$, la trayectoria representada en el plano xz será una curva que se acerca al punto (6.1101, 14).

b) En este caso se observa un comportamiento extraño en los valores de $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ como se observa a continuación:



Los resultados son: $x(40) = 3.92958; y(40) = 0.863806; z(40) = 26.541$

Concretamente la trayectoria en el plano xz tiene ahora forma de alas de mariposa:



c) Efectivamente son iguales.

d) $x(0) = 2.0001, y(0) = 1, z(0) = 1 \Rightarrow x(40) = 12.9112, y(40) = 16.8457, z(40) = 28.1337$

$x(0) = 2, y(0) = 1, z(0) = 1 \Rightarrow x(40) = 3.92958, y(40) = 0.86386, z(40) = 26.541$