Práctica 1

1) Método de la bisección

Se desea resolver una ecuación $f(x)=0$ en un intervalo [a, b]. Suponemos que en dicho intervalo hay una única solución. Se trata de averiguar dicha solución usando el método de la bisección.

¿Qué criterio de parada vamos a adoptar?: fijaremos una constante de tolerancia (tol) suficientemente pequeña, concretamente tol=10^{-11}, e iteraremos hasta que el error sea inferior a esta constante prefijada. El esquema a seguir sería el siguiente:

- En la *k*-ésima iteración del proceso se dispondrá de un subintervalo $[a_k, b_k]$ y se calculará la solución aproximada $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ como el punto medio de este subintervalo. Si paramos en esta iteración, proporcionando x_k como solución aproximada del problema planteado, el error cometido (en valor absoluto) será menor o igual a $(b_k - a_k)/2$.
- El programa debe seguir iterando mientras el error anteriormente citado sea mayor que la constante de tolerancia prefijada.

Se pregunta: ¿Cuántas iteraciones hacen falta para conseguir el objetivo previsto? ¿cuál es la estimación de la solución?.

Aplicarlo para encontrar la solución de la ecuación $x\,\mathrm{sen}(x) - 1 = 0$ en el intervalo [0, 2]

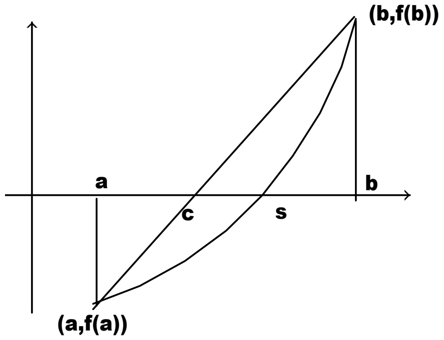
(Solución: 38 iteraciones y la solución aproximada es: 1.114157140873431)

NOTA: La función seno en C es sin(x) y x debe ser declarada double.

2) Variación del método de la bisección: método de la regula falsi.

Se quiere resolver una ecuación $f(x)=0$ en un intervalo $[a,b]$. En el método de la bisección, en cada iteración se calcula *c* el punto medio del intervalo, y nos quedamos con el subintervalo $[a,c]$ o $[c,b]$ para la siguiente iteración (con el subintervalo donde la función cambia de signos en los extremos).

Vamos a hacer una variante de este método que se conoce con el nombre de método de la regula falsi. Es idéntico al de la bisección sólo que *c* en lugar de ser el punto medio del intervalo, es el punto de corte de la recta que une los dos puntos extremos de la gráfica con el eje de abscisas, como se indica en la siguiente figura:



Se quiere comparar el comportamiento del método de la bisección y del método de la regula falsi en la resolución de la ecuación $x^4 - x^3 - 20 = 0$ en el intervalo $[2,3]$. Sabiendo que la verdadera solución es: $s = 2.41679918$, averiguar cuántas iteraciones requiere cada método hasta conseguir que el error: $|x_n - s| < 10^{-7}$ utilizando el valor de *s* anterior.

(Solución: el método de la bisección necesita 23 iteraciones, $x_{23} = 2.416799187$. El método de la regula falsi necesita 14 iteraciones , $x_{14} = 2.416799085$)

3) Método de Newton-Raphson

Sabiendo que se puede aplicar la regla de Fourier para hallar la solución de la ecuación $x^3 - 6x + 2 = 0$ en el intervalo [2, 3] con $x_0 = 3$.

a) Hallar una estimación de la solución efectuando 100 iteraciones del método de Newton-Raphson.

b) Calcular el error que comete la estimación $\hat{s} = x_{100}$ con la fórmula: $|error| = |s - \hat{s}| \leq \dfrac{|f(\hat{s})|}{\min\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|}$

(Solución: $x_{100} = 2.2618$ $|\text{error}| \leq 8.6\times10^{-17}$ en los ordenadores del laboratorio y 0 en Lucano)

4) Método de la secante

Es una variación del método de Newton-Raphson, que se utiliza cuando la derivada de la función es difícil de calcular. Si en el método de Newton-Raphson: $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$, en el método de la secante se sustituye la derivada por una aproximación suya: $f'(x_{n-1}) \approx \dfrac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}$.

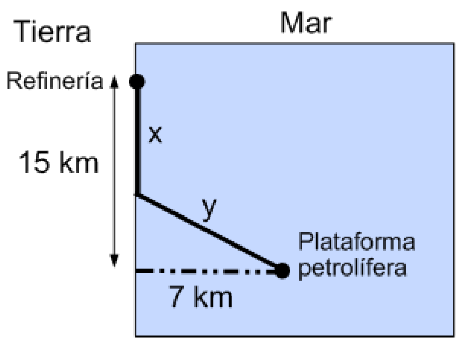
El método de la secante consiste en partir de dos valores iniciales x_0 y x_1 y generar una sucesión de la forma:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{\dfrac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}} \quad \text{para } n \geq 2.$$

Consideremos la ecuación $\cos x - x = 0$ que admite una solución en [0, 1]. Partiendo de $x_0 = 0.5$ y $x_1 = 0.9$. Efectuar 5 iteraciones del método de la secante y hallar el error cometido por dicha estimación usando la fórmula: $|error| = |s - \hat{s}| \leq \dfrac{|f(\hat{s})|}{\min\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|}$.

(Solución: $x_5 = 0.739085133$ $|error| \leq 5.1\times10^{-17}$ en los ordenadores del laboratorio y 0 en Lucano)

5) **Resolución de un problema de optimización**



Una plataforma petrolífera situada en el mar dista 7 km de la costa, siendo necesario construir un oleoducto hasta una refinería situada en la línea de costa. El coste de construcción, en millones de euros, de x km. de oleoducto en tierra es $1900\,x^{1.3}$, mientras que y km. de oleoducto en el mar cuesta $3150\,y^{1.5}$. Averiguar cómo ha de construirse para que el gasto sea lo menor posible.

Nota: Un mínimo ó un máximo local de una función $f(x)$ es un valor de x que anula la primera derivada. Por lo tanto, los extremos locales de una función resultan de resolver la ecuación $f'(x) = 0$.

(Solución: x=11.959)

6) <u>Plantear y resolver el siguiente problema:</u> La suma de dos números es 20. Si a cada número se le añade su raíz cuadrada, el producto de las dos sumas es igual a 155.55. Obtener ambos números .

<u>Ayuda:</u> Puedes resolverlo con cualquier método, planteando previamente la ecuación adecuada.

(Solución 6.5128 y 13.4871)