TRABAJO DE GRÁFICOS POR ORDENADOR

Matemáticas para Gráficos por Ordenador.

Objetivo:
Con esta actividad se pretende interrelacionar algunos conceptos de matemáticas y álgebra lineal para Ingenieros Informáticos y la geometría y modelado geométrico utilizados en Gráficos por Ordenador (GPO), al darle un enfoque al Algebra Lineal desde un punto de vista geométrico y a la Geometría desde un punto de vista algorítmico.

Introducción
Los vectores ofrecen de forma conveniente diversas maneras de expresar muchas relaciones geométricas, y las operaciones de vectores son una potente herramienta para manipular los objetos algebraicamente. Muchos algoritmos utilizados en Gráficos por Ordenador (GPO) se simplifican y son más eficientes al utilizar los vectores. Debido a que muchas operaciones vectoriales se expresan igual, independientemente de la dimensión del espacio estudiado, es posible derivar resultados verdaderos en 2D y 3D.

El producto vectorial es fundamental para encontrar la longitud de un vector y el ángulo entre dos vectores. Asimismo se puede utilizar para determinar la proyección ortogonal de un vector sobre otro, localizar las coordenadas de un círculo definido por tres puntos y la dirección de un rayo reflejado. El producto escalar se utiliza también para verificar si dos vectores son ortogonales a un tercero, y comprobar cuando el ángulo de dos vectores es menor, igual o mayor de 90º. En 2D se utiliza para determinar vectores perpendiculares, y en general, para estudiar la posición relativa de dos vectores.

El producto vectorial también revela información sobre el ángulo entre dos vectores en 3D, y se utiliza con frecuencia para determinar el vector normal al plano.

En el desarrollo de algoritmos, es fundamental tener una representación concisa de los objetos gráficos estudiados. Las dos formas principales de realizar esto es mediante la representación explícita y paramétrica. Tienen relevancia las ecuaciones explícitas, implícitas y paramétricas de la recta y plano. La representación paramétrica de la recta (en general de una curva) permite estudiar los distintos puntos de ésta al variar el parámetro.

Es posible dar de forma arbitraria combinaciones lineales de vectores, pero no de puntos. Sin embargo sólo se permiten transformaciones afines para los puntos. En GPO son muy útiles las combinaciones afines de puntos y son la base para las animaciones y curvas de Bézier.

La ecuación paramétrica de la recta es muy útil para la calcular la intersección de un rayo con un polígono o poliedro.

Las herramientas vectoriales son muy útiles para resolver frecuentes problemas gráficos.

Estos requieren una programación para ser implementados.

Trabajos propuestos

A) ALGORITMOS PARA GENERACIÓN DE CÍRCULOS

1. Dibujar un círculo como polígono regular de n lados (n =100). Ventaja en inconvenientes de la representación del círculo en forma implícita y paramétrica.

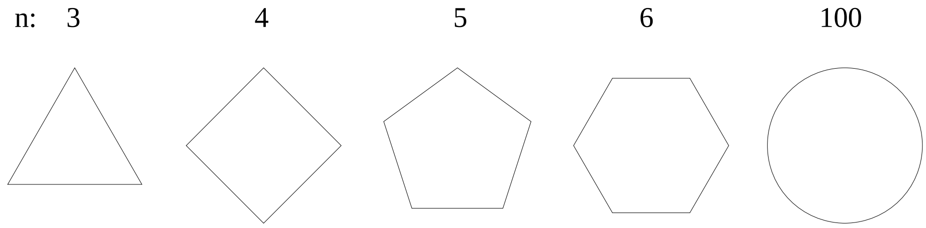


Figura 1 Ejemplos de polígonos regulares de n lados

2. Otra ecuación paramétrica, útiles para representar arcos de circunferencia.

$$x(t) = a\frac{1-t}{1+t}; \quad y(t) = 2a\frac{\sqrt{t}}{1+t}$$

Estudiar para diferentes valores de *t*.

$$t \in [0,1]; \; t \in [-1,1]$$

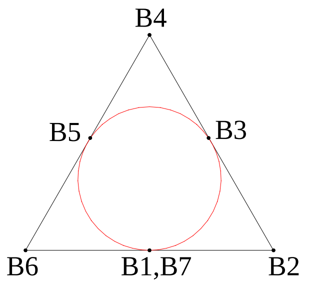
Ventajas e inconvenientes respecto a la forma paramétrica

$$x(t) = a\frac{2t}{1+t^2}; \quad y(t) = a\frac{(1-t^2)}{1+t^2}$$

$$t \in [0,1]$$

3. Algoritmo del punto medio para círculos.
4. Representar la circunferencia mediante esplines racionales (NURBS), para los dos casos siguientes:

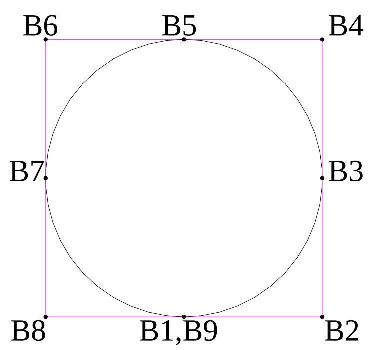
a)



Círculo Racional B-spline. Tres segmentos de 120°

	(x,y,z)	pesos
B1	(1.0, 0.0, 0.0)	1.0
B2	(2.0, 0.0, 0.0)	0.5
B3	(1.5, 0.866, 0.0)	1.0
B4	(1.0, 1.7321, 0.0)	0.5
B5	(0.5, 0.866, 0.0)	1.0
B6	(0.0, 0.0, 0.0)	0.5
B7	(1.0, 0.0, 0.0)	1.0

b)



Círculo Racional B-spline. Cuatro segmentos de 90°

	(x,y,z)	pesos
B1	(1.0, 0.0, 0.0)	1.0
B2	(2.0, 0.0, 0.0)	0.7071
B3	(2.0, 1.0, 0.0)	1.0
B4	(2.0, 2.0, 0.0)	0.7071
B5	(1.0, 2.0, 0.0)	1.0
B6	(0.0, 2.0, 0.0)	0.7071
B7	(0.0, 1.0, 0.0)	1.0
B8	(0.0, 0.0, 0.0)	0.7071
B9	(1.0, 0.0, 0.0)	1.0

Figura 2 Círculos mediante spline racionales

Nota: En el Moodle están las funciones `rbasis, knot` y `rbspline`

B) RECORTE DE UN PRISMA POR UN PLANO

1. Utilizando el algoritmo para determinar la posición de un punto respecto a un plano (intersección de una línea con un plano), desarrollar un programa que permita realizar un corte a un prisma por un plano dado. Aplicarlo para el caso particular de un cubo de lado 10 unidades y el plano de corte definido por los puntos A(0,0,5),B(0,5,10) y C(5,10,10) como se aprecia en la figura 3.

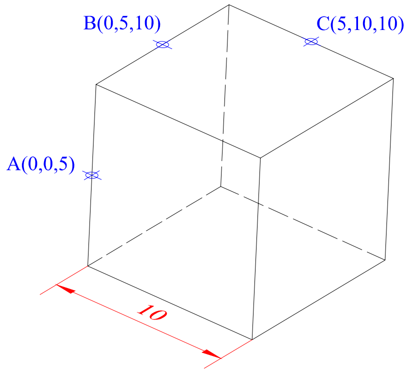


Figura 3. Datos de cubo a seccionar por un plano definido por los puntos A, B y C

2. Implementar el algoritmo para obtener la ecuación de un plano a partir de las coordenadas de tres puntos, método tradicional (vector normal al plano definido por los tres puntos) y mediante el método de Newell. Describir ventajas e inconvenientes. Ejemplo: usando el método de Newell, encontrar (n_x, n_y, n_z) para el polígono dado por los puntos (1,1,2), (2,0,5), (5,1,4), y (6,0,7). ¿Es un polígono plano? Es ese caso encontrar el vector normal, utilizando el producto vectorial y compararlo con el calculado por el método de Newell.

C) CÍRCULO QUE PASA POR TRES PUNTOS

1. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos. Representación paramétrica, para los casos $0 \le t \le 1$; $0 \le t \le \infty$; $-\infty \le t \le \infty$;
2. Recta perpendicular a otra que pasa por un punto.
3. Intersección de rectas.
4. Aplicación de la intersección de rectas a círculo que pasa por tres puntos.
5. Determinar el círculo inscrito por esos tres puntos, así como los puntos de tangencia.

D) REPRESENTACIÓN DE CURVAS

1. Explícita.

a) $f(x)=\dfrac{(2x-5)}{(x-1)}$; b) $f(x)=2x^3-3x^2-12x$; c) $f(x)=3x^4-4x^3$

2. Paramétrica plana (cicloide) $\begin{cases} x = a\theta - a sen\theta \\ y = a - a\cos\theta \end{cases}$

3. Paramétrica 3D. Representar gráficamente las seis superficies cuádricas.

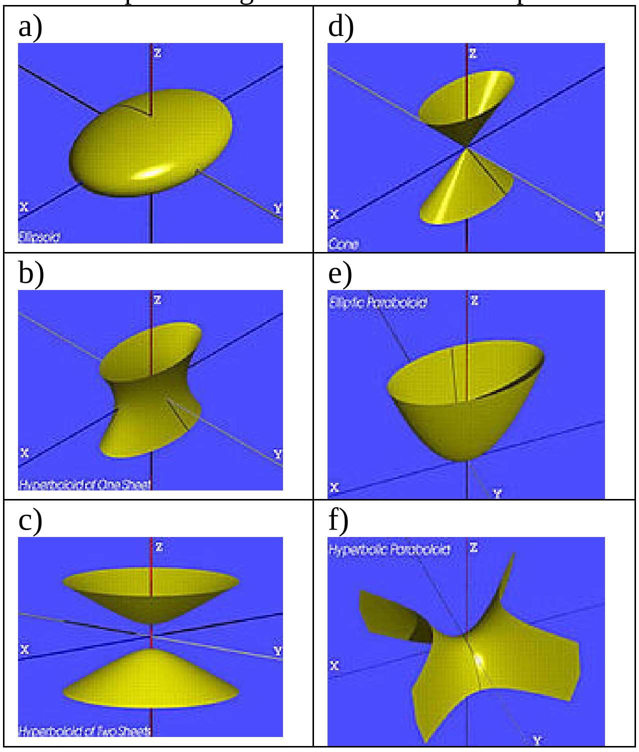


Figura 4 Superficies cuádricas: a) Elipsoide, b) Hiperboloide de una hoja, c) Hiperboloide de dos hojas, d) Cono elíptico, e) Paraboloide elíptico, f) Paraboloide hiperbólico

Nombre de la cuádrica	*Forma implícita*	*Forma paramétrica*	*rango v, rango u*
Elipsoide	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$	$(a\cos(v)\cos(u), b\cos(v)sen(u), csen(v))$	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),(-\pi,\pi)$
Hiperboloide de una hoja	$ax^2+by^2-cz^2-1=0$	$(a\cos(v)\cosh(u), b\sin(v)\cosh(u), c\sinh(u))$	$(0,2\pi),(-2,2)$
Hiperboloide de dos hojas	$ax^2-by^2-cz^2-1=0$	$(a\cos(v)\sinh(u), b\sin(v)\sinh(u), c\cosh(u)$ $(a\cos(v)\sinh(u), b\sin(v)\sinh(u), -c\cosh(u)$	$(0,2\pi),(0,2)$ $(0,2\pi),(-2,0)$
Cono elíptico	$ax^2+by^2-cz^2=0$	$(av\cos(u), bvsen(u), cv)$	γ *real* $(-\pi,\pi)$
Paraboloide elíptico	$ax^2+by^2-cz=0$	$(av\cos(u), bvsen(u), cv^2)$	$v\geq 0,(-\pi,\pi)$
Paraboloide hiperbólico	$-ax^2+by^2-cz=0$	$(av\tan(u), bv\sec(u), cv^2)$	$v\geq 0,(-\pi,\pi)$

E) CURVAS SPLINES, BÉZIER Y HERMITE

1. Representar mediante curvas de Bézier la letra de la figura. Aplicarle una deformación a los puntos de control para obtener la letra similar a la mostrada en la figura 5. (Nota: el fichero de las coordenadas de los puntos de control se encuentra en el Moodle)

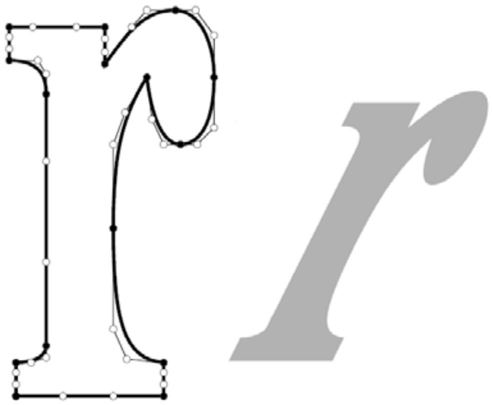
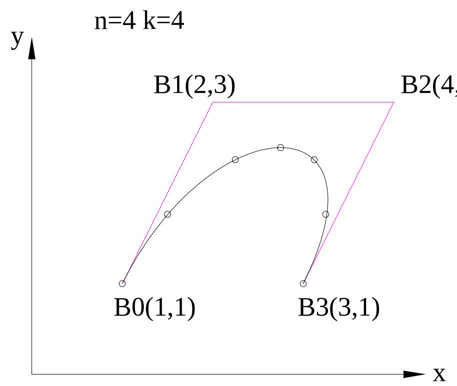
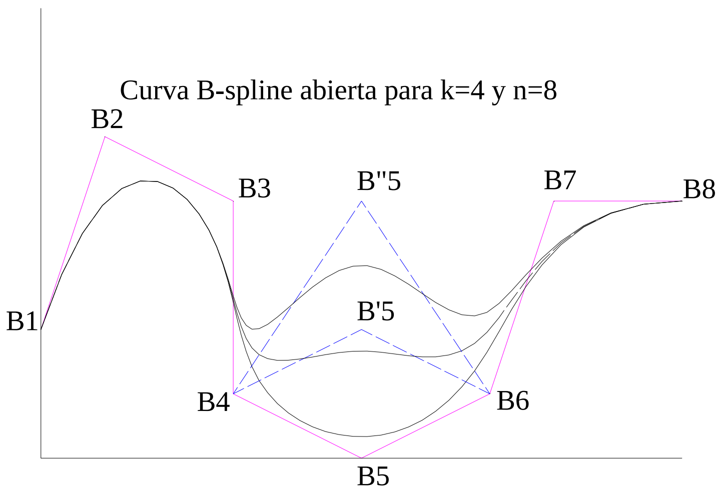


Figura 5. Puntos de control de la letra r.

2. B-spline con un vector de nodos abierto y uniforme. Para los casos:



Curva de Bézier.



	x	y	z
B_1	0	2	0
B_2	1	0.5	0
B_3	3	4	0
B_4	3	1	0
B_5	5	0	0
B_6	7	1	0
B_7	8	4	0
B_8	10	4	0
B'_5	5	2	0
B''_5	5	4	0

Control local de una curva B-spline

Figura 6. Spline Uniformes

Nota: En el Moodle están las funciones `bspline, basis` y `knot`

3. Represente la curva definida por la función $y = 3x^3 + 2x^2 - x + 2\,;\quad 0 \le x \le 1$. Superponer en otro color la curva correspondiente a la interpolación de Hermite.

4. Superficie NURBS. Representar una superficie B-S Racional producto Cartesiano, vectores uniformes abiertos. Para el caso de la figura 7. (Nota: el fichero de las coordenadas de los puntos de control, dibujado en rojo y valor de los pesos, se encuentra en el Moodle)

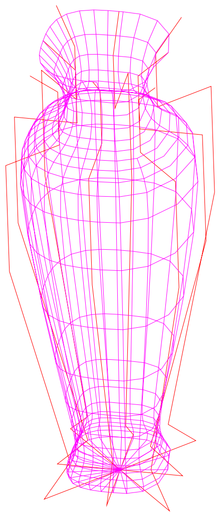
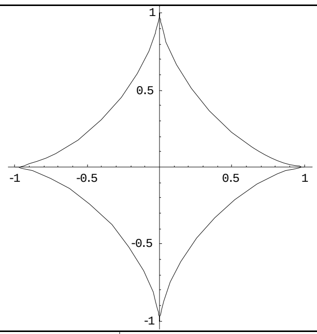
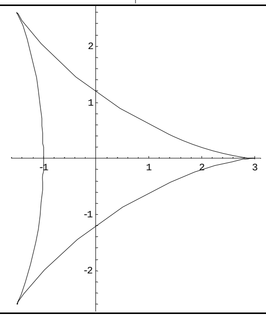
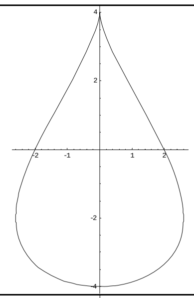
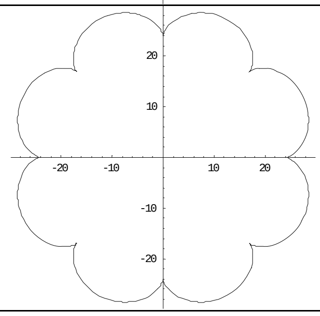


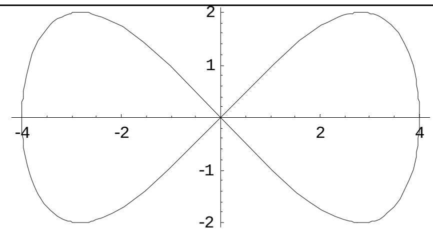
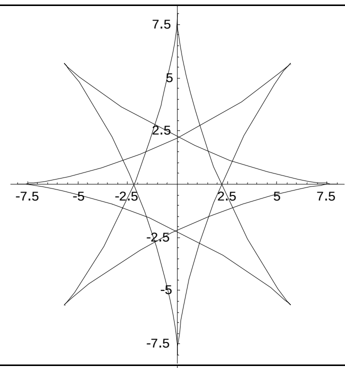
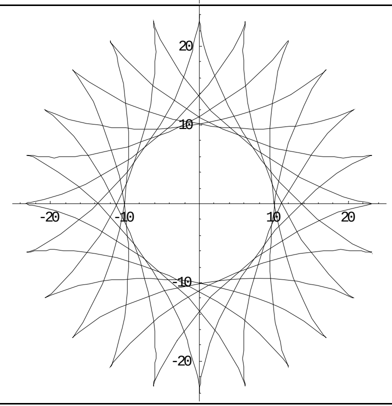
Figura 7. Superficie NURBS de revolución.

Nota: En el Moodle están las funciones `knot, basis, sumrbas` y `rbspsurf`

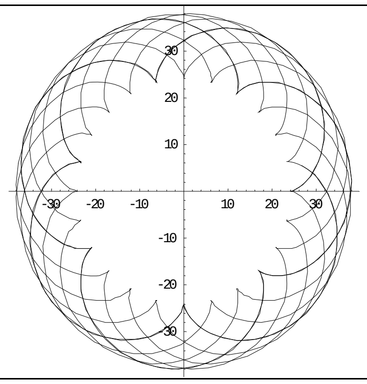
F) CURVAS PARAMÉTRICAS

<table>
<tr><td>$x = \cos^3 t$
$y = sen^3 t$
$t \in [0,2\pi]$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$x = 2\cos t + \cos 2t$
$y = 2sent - sen2t$
$t \in [0,2\pi]$</td><td>
</td></tr>
</table>

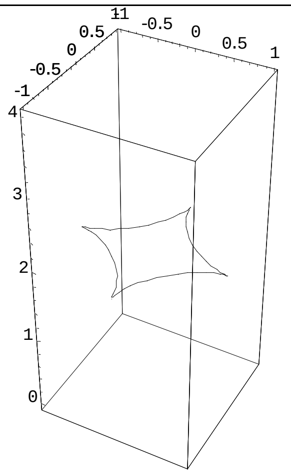
$x = 2\cos t - sen2t$ $y = 4sent$ $t \in [0, 2\pi]$	
$x = 27\cos t - 3\cos 9t$ $y = 27sent - 3sen9t$ $t \in [0,2\pi]$ ([1])	

$x = 4\cos t$ $y = 2sen2t$ $t \in [0,2\pi]$	
$x = 5\cos t + 3\cos(5/3)t$ $y = 5sent - 3sen(5/3)t$ $t \in [0,6\pi]$ ([1])	
$x = 17\cos t + 7\cos(17/7)t$ $y = 17sent - 7sen(17/7)t$ $t \in [0,14\pi]$ ([1])	

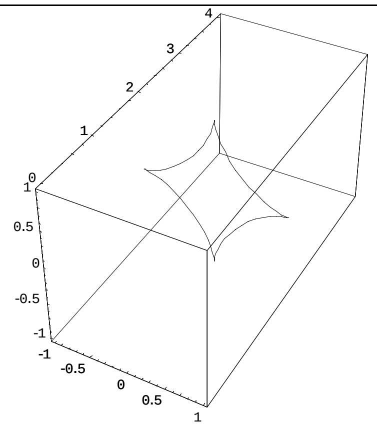
$$x = 31\cos t - 7\cos(31/7)t$$
$$y = 31 sent - 7 sen(31/7)t$$
$$t \in [0, 18\pi]$$
[1]



$$x = \cos^3 t$$
$$y = sen^3 t$$
$$z = 2$$
$$t \in [0, 2\pi]$$



$$x = \cos^3 t$$
$$y = 2$$
$$z = sen^3 t$$
$$t \in [0, 2\pi]$$



$$x = 2sen(2t)$$
$$y = 2\cos t$$
$$z = 4sen^2(2t)$$
$$t \in [0, 2\pi]$$

[1] *"Mathematical Discovery via Computer Graphics: Hypocycloids and Epicycloids", de Florence S. Gordon y Sheldon P. Gordon, College Mathematics Journal, noviembre de 1984, p.441*

BIBLIGRAFÍA

- Gutiérrez de Ravé, Eduardo. “Gráficos por Ordenador.” 2007.
- Hearn, D. Baker, M.P. “Gráficas por computadora”. Pretice-Hall. 1988.
- Foley, J.D., A. van Dam, A. and S.K. Feiner, “Computer Graphics : Priciples and Practice (2nd Edición),” Addison-Wesley, 1990.
- Hill F.S. Jr. "Computer Graphics" Macmillan Publishing Company. 1990
- Richard S. Wright Jr. y Michael Sweet. “OpenGL. Una guía de referencia completa de OpenGL” Anaya. 1996.
- Wright Jr. y Michael Sweet. “ OpenGL SuperBible. 2ª Ed. Waite Group Press. 2000.
- Herber Schiltd. “C++ Manual de Referencia”. Mc Graw Hill. Madrid 2000.
- Samul R. Buss. “3-D Computer Graphics. A Mathematic Introduction with OpenGL”. Cambridge University Press. 2003.
- David F. Rogers. An Introduction to NURBS. Morgan Kaufmann. Londres. 2000.
- Mathematical Elements for Compuer Graphics. 2ª Ed. David F. Rogers; J. Alan Adams. McGraw-Hill. 1990.
- Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design. A practical Guide. 4ª Ed. Academia Press. 1997.
- LARSON R., HOSTETLER R.P., EDWARDS B.H., Cálculo, 8ª Edición. McGraw-Hill.

MATERIAL A PRESENTAR

1.- El grupo presentará un informe detallado del trabajo propuesto.
2.- Póster (A1) en formato pdf, de la actividad desarrollada con la siguiente estructura:

- Estudio y análisis de las posibles soluciones.
- Definición formal y desarrollo matemático de soluciones.
- Algoritmos propuestos e implementación (código o pseudocódigo).
- Salida numérica y gráfica de los ejercicios propuestos.
- Referencias bibliografías.

3.- Se expondrá por el grupo o representante del grupo.