Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa

Facultad de Ciencias Naturales y Formales

Escuela Profesional de Matemática

Último problema de Takens: abundancia de comportamiento histórico

Tesis presentada por el Bachiller:

Rodriguez Chavez Raul Steven, para optar el título profesional de Licenciado en Matemáticas.

Asesor:

Mg. Begazo Delgado, Roberto Carlos

Co-Asesor:

Dr. Gutierrez Barrientos, Pablo

Arequipa-Perú

2025

Agradecimientos

Deseo transmitir mi sincera gratitud a mis padres, Teresa y José, y a mis hermanos, Jan y Cristian, por sus palabras de apoyo y motivación durante todos los años de universidad.

Me gustaría expresar mi agradecimiento a mi asesor, Roberto Begazo, por su apoyo durante mis primeros años de carrera, los cuales fueron fundamentales para alcanzar cada uno de mis logros.

Agradezco a mi coasesor, Pablo G. Barrientos, por confiar y apostar por mí. Sus constantes llamados de atención y enseñanzas me hicieron un mejor matemático a lo largo de estos años.

A los miembos del jurado de tesis, por el tiempo y comentarios en mi trabajo.

A todos los profesores del Departamento de Matemática por sus enseñanzas, principalmente a la profesora María Torreblanca y al profesor Vladimir Rosas, quienes siempre confiaron en mí y me apoyaron a lo largo de los cinco años de estudio. A la secretaria de la escuela, Sra. Eleana Rodríguez, por ayudarme siempre en todos los trámites administrativos.

A mis compañeros de aula, con quienes siempre compartí buenos momentos, principalmente a mis amigos Arnold Cruz, Gabriel Pickmann, Alex Patiño y Ronald Roldán, por su amistad y apoyo durante todos estos años.

Al PRONABEC, por haberme ayudado con la Beca Permanencia. Al Seminario de Matemáticas Walter Torres Montes, donde pasé la mayor parte de mi tiempo universitario estudiando.

Índice general

Resumen

Estudiamos la abundancia del comportamiento histórico, refiriéndonos a la existencia de un conjunto grande de puntos cuyas órbitas no convergen. Este problema es conocido como el *Último problema de Takens*. Analizamos este problema en sistemas dinámicos desde diferentes perspectivas y en diversos contextos. Proporcionamos algunas condiciones que relacionan la densidad y la residualidad del conjunto de puntos con comportamiento histórico. También discutimos las diferentes aproximaciones encontradas en la literatura para abordar el Último problema de Takens. Finalmente, ofrecemos una comprensión más clara de las distintas respuestas parciales propuestas hasta el momento.

Abstract

We study the abundance of historical behavior, referring to the existence of a large set of points whose orbits do not converge. This problem is known as the *Last Takens Problem*. We analyze this problem in dynamical systems from different perspectives and in various settings. We provide some conditions relating the density and residuality of the set of points with historical behavior. We also discuss the different approaches found in the literature to address the Last Takens Problem. Finally, we offer a clearer understanding of the various partial answers proposed so far.

Introducción

La teoría de sistemas dinámicos estudia el comportamiento de las órbitas. Formalmente, un sistema dinámico consta de:

- un *espacio fase* con estructura adicional (métrica, topológica, medible o diferenciable),
- un *tiempo* (continuo o discreto), y
- una *dinámica temporal* que describe la evolución del sistema.

Consideremos $f : M \to M$ una función continua en un espacio métrico compacto (M, d). Nuestro objetivo es entender el comportamiento evolutivo de las órbitas de un punto bajo la dinámica f. Es decir, dado un punto $x \in M$, queremos entender ¿qué sucede con $f^n(x)$ cuando $n \to \infty$? Para poder dar una respuesta, analizamos el comportamiento de la *órbita futura*

$$\mathcal{O}^+(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}$$

de un punto $x \in M$. Por ejemplo, si existe un tiempo $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$, decimos que la órbita de x es periódica. Entonces, $\mathcal{O}^+(x)$ tendrá una cantidad finita de elementos. Al menor $n > 0$ con esta propiedad se llama *período* de la órbita periódica. Si el período es $n = 1$, la órbita periódica se dice simplemente punto fijo.

Existen dos perspectivas distintas para estudiar el comportamiento asintótico de las órbitas. *Topológicamente*, analizamos la existencia de puntos fijos o periódicos, la presencia de puntos de acumulación o si la órbita es densa en el espacio. *Estadísticamente*, estudiamos el promedio de los iterados de una dinámica y la frecuencia con la que una órbita visita subconjuntos medibles. La *Teoría Ergódica* es la subárea de los Sistemas Dinámicos que estudia el comportamiento estadístico de las órbitas usando teoría de la medida. Formalmente, la Teoría ergódica estudia sistemas dinámicos que dejan invariante una medida. Es decir, dada una función medible $f : M \to M$ en un espacio de medida $(M, \mathcal{B}, \mu)$ decimos que μ es una medida invariante por f sí $\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E)$ para todo conjunto Borel medible $E \in \mathcal{B}$.

Ambas perspectivas de estudiar los sistemas dinámicos están fuertemente relacionadas. Desde el punto de vista topológico, podemos encontrar puntos de acumulación de $f^n(x)$ en el espacio fase cuando $n \to \infty$. Estos puntos de acumulación se denominan atractores. Formalmente, decimos que la órbita periódica $\mathcal{O}^+(p)$ de un punto p es un atractor si existe una vecindad $V \subset M$ de $\mathcal{O}^+(p)$ tal que $d(f^n(x), \mathcal{O}^+(p)) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para todo $x \in V$. Por otro lado, desde la perspectiva de la Teoría Ergódica, a una órbita periódica se le puede asociar una medida invariante. Concretamente, la medida asociada a la órbita de un punto periódico p de periodo n se define como

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k(p)}$$

donde δ_y representa la medida de Dirac. La evolución de las órbitas se describe ahora en términos de una sucesión de *medidas empíricas* a lo largo de la órbita de x, es decir, por las medidas de probabilidad

$$\mu_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k(x)}. \tag{1}$$

Cuando la órbita de punto periódico p es un atractor de f tenemos que $\mu_n(x)$ converge para la medida invariante μ en la topología débil* para todo $x \in V$. Es decir, las medias de Birkhoff

$$\int \varphi \, d\mu_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) \tag{2}$$

convergen para el valor esperado

$$\int \varphi \, d\mu$$

para toda función continua, $\varphi : M \to \mathbb{R}$ la cual representa la distribución de densidad observable inicial. Concretamente, podemos entender que la medida μ es el atractor de una órbita de x sí, la sucesión de medidas μ_n converge a la medida invariante μ.

La existencia de punto de acumulación (atractor) para las medias empíricas μ_n es llamado de *comportamiento predecible* de la órbita de x. En situaciones generales, existen sistemas dinámicos no triviales en los que la situación es similar: el sistema presenta tan solo un número finito de atractores, y casi todas las órbitas tienden a uno de estos atractores. La abundancia de este comportamiento también es un foco importante en los sistemas dinámicos. Decimos que el comportamiento predecible es considerado abundante si el conjunto de puntos $x \in M$ para los cuales $\mu_n(x)$ converge tiene medida de Lebesgue positiva. Por el contrario, cuando la sucesión de medidas μ_n no converge, llamaremos a este tipo de evolución *comportamiento histórico* de la órbita de x, el cual es abundante si el conjunto de puntos para los cuales μ_n no converge tiene medida de Lebesgue positiva.

Otro problema de estudio en la teoría de sistemas dinámicos es la estabilidad de tales propiedades dinámicas. Es decir, dada una función $f : M \to M$, existe una vecindad V_f del conjunto de funciones tal que si $g \in V_f$, entonces existe un homeomorfismo $h : M \to M$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Esto se puede entender como un cambio de variables en el que las propiedades dinámicas de g son las mismas que las de f, lo que se conoce como persistencia bajo perturbaciones. Una subárea rica en ejemplos de este tipo de persistencia es la Dinámica Hiperbólica en sistemas dinámicos (ver Apéndice B.3).

Nuestro objetivo es analizar si los comportamientos predecible y histórico de un sistema dinámico son persistentes o no bajo perturbaciones. La estabilidad del comportamiento predecible fue estudiada ampliamente, a partir de los trabajos pioneros de Hadamard hasta Poincaré, así como en las escuelas rusa, liderada por Kolmogorov, Pontriaguin y Anosov, y brasileña, liderada por Palis, Smale y Takens, entre otros. Nosotros nos focaremos en analizar qué ocurre con el comportamiento histórico. Esta observación nos lleva a plantear la siguiente pregunta:

> *¿Existe alguna clase amplia de funciones $f : M \to M$ y un conjunto grande de puntos $x \in M$ donde las sucesiones de medidas en* (2) *no convergen cuando $n \to \infty$ para alguna función continua $\varphi : M \to \mathbb{R}$?*

Esta pregunta propuesta primeramente por Ruelle en [19] y posteriormente por Takens [22] en el que a la postre sería uno de sus últimos problemas propuestos. Es por eso que recibió el nombre en la literatura de “Último problema de Takens” como apodo bajo el cual es conocido hoy en día el problema.

La cuestión anterior ha sido abordada en la literatura de diferentes formas, de acuerdo con el entendimiento del significado de conjunto “grande” de órbitas con comportamiento histórico. Topológicamente, “grande” significa *residual* (en el sentido de Baire). Por otro lado, dinámicamente, “grande” puede entenderse en el sentido de tener *entropía topológica* positiva (la cual mide el caos dentro del sistema). O, desde una perspectiva estadística, “grande” significa *con medida de Lebesgue* positiva (o al menos con medida de Hausdorff igual a la medida ambiente). En los últimos 20 años, la lista de trabajos que dan respuesta en alguna de estas tres interpretaciones es bastante extensa. A modo de ejemplo, véanse los trabajos [22], [2] y [11]. El problema a ser trabajado en esta tesis va en la dirección de dar una respuesta afirmativa, sorprendentemente simple, al último problema de Takens en un contexto bastante general desde la perspectiva topológica, siguiendo los desenvolvimientos recientes de la teoría en [4, 15]. Como una continuación futura de este trabajo, será entender este comportamiento desde el punto de vista estadístico, el cual puede ser observado en [3].

Organizacion de la tesis: En el primer capítulo, presentamos los diferentes comportamientos de los sistemas dinámicos. Específicamente, mostramos ejemplos que ilustran estos comportamientos. Además, estudiamos la existencia de los conjuntos de puntos regulares e irregulares, donde las medidas empíricas convergen y no convergen, respectivamente. También analizamos la densidad y residualidad del conjunto de puntos irregulares. Por último, presentamos la relación entre la conjetura global de Palis y el último problema de Takens.

En el segundo capítulo, damos respuestas afirmativas al último problema de Takens. Primero, estudiamos la respuesta dada por Takens sobre la abundancia genérica en atractores hiperbólicos. Además, mostramos que, bajo ciertas condiciones, algunos sistemas dinámicos exhiben un comportamiento histórico abundante. Estas condiciones son de naturaleza topológica: atractores con órbitas densas, órbitas con variedades estables e inestables densas, y sistemas dinámicos con propiedades adicionales de transitividad.

En el primer apéndice, presentamos algunos conceptos útiles de topología. Estudiamos los espacios de Baire y algunas de sus caracterizaciones. En el segundo apéndice, incluimos definiciones y resultados de dinámica topológica, teoría ergódica y dinámica hiperbólica, con el objetivo de clarificar los diferentes conceptos abordados en este trabajo.

Capítulo 1

El último problema de Takens

En este capítulo introduciremos los tipos de comportamientos evolutivos que poseen las órbitas de un sistema. En la primera sección, damos la idea intuitiva de estos tipos de comportamiento a través de ejemplos. Para ello, analizamos la existencia o inexistencia de puntos atractores en los ejemplos. La existencia de atractores describirá el comportamiento predecible de una órbita. La inexistencia de atractores describirá el comportamiento histórico de una órbita. Para lograr este objetivo, describiremos los puntos atractores desde una perspectiva probabilística. Es decir, serán descritos como medidas invariantes del sistema. Esto nos permitirá ver la relación entre el comportamiento evolutivo de las órbitas de estos ejemplos y la Teoría Ergódica. En particular, estudiaremos un famoso atractor llamado *Ojo de Bowen*, el cual posee comportamiento histórico.

En la segunda sección, describiremos la grandeza (el tamaño) de los conjuntos de puntos con estos comportamientos evolutivos. Para ello, englobaremos en un conjunto a los puntos con comportamiento predecible. Llamaremos a este conjunto *regular*. De igual forma, agruparemos en el conjunto *irregular* a los puntos con comportamiento histórico. Nuestro propósito será estudiar la grandeza de estos conjuntos.

En la tercera sección, presentaremos el llamado *Último problema de Takens* y lo relacionaremos con la *Conjetura global de Palis*. Finalizaremos este capítulo presentando nuestra pequeña aportación a esta teoría, relacionando la densidad y la residualidad del comportamiento histórico.

1.1. Comportamiento histórico

Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo de una variedad M. Dado $x \in M$, nuestro objetivo es analizar el comportamiento que posee la órbita futura $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) : n \geq 0\}$ de x. Para ello, analizamos los dos siguientes ejemplos de difeomorfismos. El primero de ellos, se enmarca dentro de la clase de difeomorfismos conocida bajo el nombre de Morse-Smale. Concretamente, un difeomorfismo $f : M \to M$ es llamado *Morse-Smale* si el conjunto no errante $\Omega(f)$ es un conjunto finito de órbitas periódicas, todas ellas hiperbólicas y cuyas variedades invariantes, estables e inestables se interceptan transversalmente dos a dos. Recordamos que el no errante $\Omega(f)$ se define como el conjunto de puntos $x \in M$ tales que para toda vecindad U de x, $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Ver Apéndice B.1 para mayor detalles sobre las variedades invariantes de puntos hiperbólicos.

Ejemplo 1. Considere $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definimos el siguiente sistema

$$f(\theta) = \theta + \epsilon \sin(2\pi k\theta) \qquad \text{mód } 1$$

para $0 < 2\pi k < 1$. Observe que este sistema tiene $2k$ puntos fijos hiperbólicos, concretamente $x_j = j/2k$ para $j = 0, \ldots, 2k-1$. Los puntos x_{2j+1} y x_{2j} son atractores y repulsores respectivamente para todo $j = 0, \ldots, k-1$. Ver Figura 1.1. Observamos que $f^n(x)$ de todo punto $x \in \mathbb{S}^1$ que no sea un repulsor tiende cuando $n \to \infty$ hacía uno de los atractores. Este tipo de comportamiento de las órbitas del sistema se denomina *predecible* o *recurrente*.

Recordamos que una medida μ se dice invariante por f si $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \subset M$ Borel medible. Las órbitas periódicas de un difeomorfismo f puede ser vistas como medidas invariantes del sistema. Concretamente, la medida asociada a un punto periódico p de periodo $\pi(p)$ viene dada por la medida

$$\mu(p) = \frac{1}{\pi(p)} \sum_{k=0}^{\pi(p)-1} \delta_{f^k(p)} \tag{1.1}$$

donde δ_y es la medida de Dirac soportada en y. Observe que a medida μ en (1.1) es una

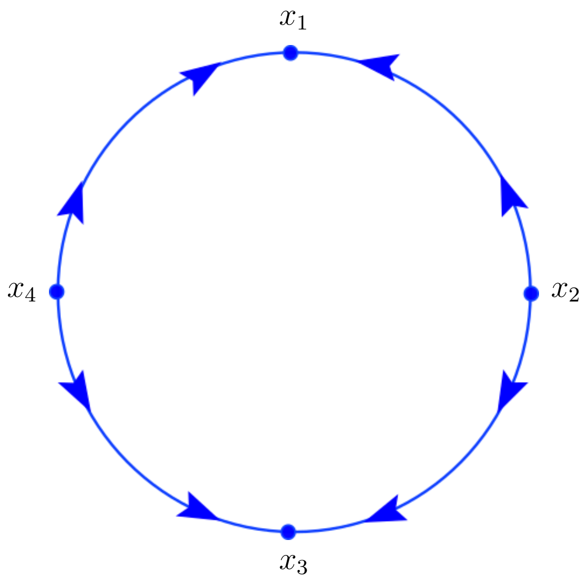

Figura 1.1: Sistema Morse-Smale con k=2.

medida invariante de f ya que en vista que $f^{\pi(p)}(p) = p = f^0(p)$ satisface

$$\begin{aligned}\mu(f^{-1}(A)) &= \frac{\sharp\{k \in \mathbb{Z} \cap [0, \pi(p) - 1] : f^k(p) \in f^{-1}(A)\}}{\pi(p)} \\ &= \frac{\sharp\{k \in \mathbb{Z} \cap [0, \pi(p) - 1] : f^{k+1}(p) \in A\}}{\pi(p)} \\ &= \frac{\sharp\{j \in \mathbb{Z} \cap [0, \pi(p) - 1] : f^j(p) \in A\}}{\pi(p)} = \mu(A)\end{aligned} \tag{1.2}$$

para todo $A \subset M$ Borel medible.

Análogamente con (1.1), introducimos para cualquier $x \in M$, la siguiente medida:

$$\mu_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k(x)}. \tag{1.3}$$

La siguiente proposición caracteriza en términos probabilísticos la convergencia topológica observada en Ejemplo 1. Para ello, recordamos que una sucesión de medidas de probabilidad $(\mu_n)_n$ converge para una probabilidad μ en la topología débil* si

$$\int \varphi \, d\mu_n \longrightarrow \int \varphi \, d\mu \quad \text{para toda función } \varphi : M \to \mathbb{R} \text{ continua.}$$

Para más detalles sobre la topología débil*, vea el Lema B.14 en Apéndice B.

Observación 1. A las funciones continuas $\varphi : M \to \mathbb{R}$ se les llama *observable* o *funciones de test* para la topología débil*. En el caso particular de las medias $\mu_n(x)$ dadas en (1.3), tenemos que

$$\int \varphi \, d\mu_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)). \tag{1.4}$$

A esta secuencia de número reales (1.4) se denominan *medias de Birkhoff* del observable φ a lo largo de la órbita de x.

Proposición 1.1. *Sea $p \in M$ un punto periódico de f y V una vecindad de p. Para todo punto $x \in V$, si $f^n(x)$ converge para la órbita de p, entonces $\mu_n(x)$ converge para $\mu(p)$ en la topología débil*.*

Demostración. Como antes, denotamos por $\pi(p)$ el periodo de p. Consideremos una función continua $\varphi : M \to \mathbb{R}$. Primeramente, note que, dado $x \in V$, $f^n(x)$ converge para la órbita de p sí existe $q \in \mathcal{O}^+(p) = \{f^i(p) : 0 \le i < \pi(p)\}$ tal que $f^{k\pi(p)+i}(x) \to f^i(q) = f^{k\pi(p)+i}(q)$ cuando $k \to \infty$ para todo $0 \le i < \pi(p)$. Esto implica que

$$\lim_{k\to\infty} |\varphi(f^{k\pi(p)+i}(x)) - \rho_k \cdot \varphi(f^{k\pi(p)+i}(q))| = 0 \tag{1.5}$$

para todo $0 \le i < \pi(p)$ y toda secuencia $(\rho_k)_k$ con $\rho_k \to 1$. Por otro lado, escribiendo $n = k\pi(p) + r$ tenemos que, para todo $x \in V$ vale

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{\pi(p)-1} \sum_{j=0}^{k-1} \varphi(f^{j\pi(p)+i}(x)) + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{r} \varphi(f^{k\pi(p)+i}(x)). \tag{1.6}$$

En particular, teniendo en cuenta que $f^{j\pi(p)+i}(q) = f^i(q)$ para todo j,

$$\int \varphi d\mu(q) = \frac{1}{\pi(p)} \sum_{i=0}^{\pi(p)-1} \varphi(f^i(q))$$

y que $\mu(q) = \mu(p)$, se sigue de (1.6) para $x = q$, que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(q)) = \frac{k\pi(p)}{n} \cdot \int \varphi \, d\mu(p) + O(1/n)$$

donde $O(1/n)$ denota una O-grande de la función $1/n$ cuando $n \to \infty$. [1] Entonces,

$$\begin{aligned}\left|\int \varphi\, d\mu_n(x) - \int \varphi\, d\mu(p)\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x)) - \frac{n}{k\pi(p)}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(q)) + O(1/n)\right)\right| \\ &= \left|\frac{1}{n}\left[\sum_{i=0}^{\pi(p)-1}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\varphi(f^{j\pi(p)+i}(x)) - \frac{n}{k\pi(p)}\varphi(f^{j\pi(p)+i}(q))\right) + \right.\right. \\ &\left.\left.\sum_{i=0}^{r}\left(\varphi(f^{k\pi(p)+i}(x)) - \frac{n}{k\pi(p)}\varphi(f^{j\pi(p)+i}(q))\right)\right] + \frac{n}{k\pi(p)}\cdot O(1/n)\right|\end{aligned}$$

Note que cuando $n \to \infty$ tenemos que $k \to \infty$ y $\rho_k = n/(k\pi(p)) \to 1$. Entonces, aplicando la desigualdad triangular en la expresión anterior y usando (1.5) concluimos que $|\int \varphi\, d\mu_n(x) - \int \varphi\, d\mu(p)| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Esto prueba que $\mu_n(x)$ converge para $\mu(p)$ en la topología débil*. ■

Desde el punto de vista probabilístico observado en la Proposición 1.1, introducimos formalmente el comportamiento predecible de las órbitas como sigue:

Definición 1.2. Decimos que un punto $x \in M$ tiene comportamiento predecible si las medidas invariantes $\mu_n(x)$ convergen para alguna medida μ en la topología débil*. Caso contrario, decimos que x tiene comportamiento histórico.

Observación 2. Si consideramos un observable $\varphi : M \to \mathbb{R}$, la convergencia de las medidas μ_n es equivalente a que las *medias de Birkhoff* definidas en la Observación 1 del observable a lo largo de la órbita converjan. Es decir, las medidas μ_n convergen para alguna medida μ si, solo si, las medias

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(f^k(x)) \to \int \varphi\, d\mu \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

para todo $\varphi : M \to \mathbb{R}$ continua.

Ejemplo 2. Sea $f : M \to M$ una función continua con la siguiente propiedad. Supongamos que existe un punto $x \in M$ tal que $f^n(x)$ oscila "*adecuadamente*" entre dos puntos fijos p y q de f con $p \neq q$. Observamos que la órbita futura de todo $x \in M$ no converge hacia

[1] Se escribe que $g(n) = O(h(n))$ cuando $n \to \infty$ si el valor absoluto de $g(n)$ es a lo sumo una constante positiva multiplicada por $h(n)$ para todo los valores de n suficientemente grandes

ningún punto atractor. En otras palabras, a medida que el tiempo $n \to \infty$ el punto $f^n(x)$ sigue brindando nueva información. Este tipo de comportamiento de las órbitas del sistema se denomina *histórico.*

La oscilación *adecuada* se define como la existencia de dos sucesiones estrictamente crecientes $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de enteros positivos (tiempos de iteración), números $\lambda_s, \lambda_t \in (0,1)$ con $\lambda_s \neq \lambda_t$ y dos vecindades disjuntas V_p y V_q de p y q respectivamente tal que verifican la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\tau_n} \sharp \left\{ k \in \mathbb{Z} \cap [0, \tau_n - 1] : \ f^k(x) \in V_p \right\} &= \lambda_\tau \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\tau_n} \sharp \left\{ k \in \mathbb{Z} \cap [0, \tau_n - 1] : \ f^k(x) \in V_q \right\} &= 1 - \lambda_\tau \end{aligned} \tag{1.7}$$

donde $\tau = t, s$.

Observación 3. Como las vecindades V_p y V_q son disjuntas tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_n}\Big(\sharp \left\{ k \in \mathbb{Z} \cap [0, \tau_n - 1] : f^k(x) \in V_p \right\} + \sharp \left\{ k \in \mathbb{Z} \cap [0, \tau_n - 1] : f^k(x) \in V_q \right\} \\ + \sharp \left\{ k \in \mathbb{Z} \cap [0, \tau_n - 1] : f^k(x) \in M \setminus (V_p \cup V_q) \right\} \Big) = 1 \end{aligned} \tag{1.8}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ donde $\tau = t, s$. Como $\lambda_\tau + (1 - \lambda_\tau) = 1$, la oscilación adecuada introducida en (1.7) indica que la órbita de $x \in M$ pasan todo el tiempo medio asintótico en las vecindades de los puntos p y q. Es decir, tomando límite en (1.8) y teniendo en cuenta (1.7), obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\tau_n} \sharp \left\{ k \in \mathbb{Z} \cap [0, \tau_n - 1] : \ f^k(x) \in M \setminus (V_p \cup V_q) \right\} = 0 \tag{1.9}$$

donde $\tau = t, s$.

Proposición 1.3. *Sea $f : M \to M$ una función continua y $x \in M$ un punto que oscila entre dos puntos fijos p y q de forma adecuada. Entonces existe un observable continuo $\varphi : M \to \mathbb{R}$ con $\varphi(p) \neq \varphi(q)$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\tau_n} \sum_{k=0}^{t_n - 1} \varphi(f^k(x)) = \lambda_\tau \varphi(p) + (1 - \lambda_\tau)\varphi(q) \qquad \tau = t, s.$$

En particular, las medidas $\mu_n(x)$ no converge en la topología débil y, por lo tanto, la órbita de x tiene comportamiento histórico.*

Demostración. Primero, calculemos la media de Birkhoff para la sucesión $t = \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Como las vecindades V_p y V_q son disjuntas, podemos introducir los siguientes conjuntos de indices

$$\begin{aligned} J_p &= \left\{k \in \mathbb{Z} \cap [0, \tau_n - 1] : \, f^k(x) \in V_p\right\}; \\ J_q &= \left\{k \in \mathbb{Z} \cap [0, \tau_n - 1] : \, f^k(x) \in V_q\right\}; \\ J_c &= \left\{k \in \mathbb{Z} \cap [0, \tau_n - 1] : \, f^k(x) \in (V_p \cup V_q)^C\right\}. \end{aligned}$$

Consideremos una función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi \geq 0$, $\varphi|_{V_p} = a$ y $\varphi|_{V_q} = b$ con $a \neq b$. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \sum_{k=0}^{t_n-1} \varphi(f^k(x)) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \left(\sum_{k\in J_p} \varphi(f^k(x)) + \sum_{k\in J_q} \varphi(f^k(x)) + \sum_{k\in J_c} \varphi(f^k(x)) \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{\sharp J_p}{t_n} + \lim_{n\to\infty} b \cdot \frac{\sharp J_q}{t_n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \sum_{k\in J_c} \varphi(f^k(x)). \end{aligned}$$

Como la oscilación es de manera adecuada, en vista de (1.7), tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \sum_{k=0}^{t_n-1} \varphi(f^k(x)) = a\lambda_t + b(1-\lambda_t) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \sum_{k\in J_c} \varphi(f^k(x)).$$

Como M es compacto se tiene que $|\varphi| \leq N$ con $N \in \mathbb{R}$ y por lo tanto en vista de (1.9),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \sum_{k\in J_c} \varphi(f^k(x)) \leq N \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sharp J_c}{t_n} = 0.$$

Como $\varphi \geq 0$, tenemos que $\frac{1}{t_n} \sum_{k\in J_c} \varphi(f^k(x))$ tiende a cero cuando $n \to \infty$. Consecuentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \sum_{k=0}^{t_n-1} \varphi(f^k(x)) = a\lambda_t + b(1-\lambda_t).$$

De igual forma, el límite de las medias de Birkhoff para la sucesión $s = \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, usando las proporciones en (1.7) y (1.9) es

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n}\sum_{k=0}^{s_n-1}\varphi(f^k(x)) = a\lambda_s + b(1-\lambda_s).$$

Como $a\lambda_t + b(1-\lambda_t) \neq a\lambda_s + b(1-\lambda_s)$ debido a que $\lambda_t \neq \lambda_\tau$ y $a \neq b$, las medias de Birkhoff en (1.4) para las sucesiones $t = \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $s = \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen para valores distintos. La no convergencia de las medias de Birkhoff por la Observación 2 implica que no existe convergencia en medidas de probabilidad, es decir, no existe una medida μ tal que $\mu_n \to \mu$. Entonces, por la Definición 1.2 la convergencia adecuada implica que la órbita tiene comportamiento histórico. ■

A continuación veremos un ejemplo específico como el descrito en Ejemplo 2 donde este comportamiento se traduce en la no convergencia de las medias μ_n en (1.3).

1.1.1. El atractor "Ojo de Bowen"

Presentamos un ejemplo cuyas órbitas futuras tiene comportamiento histórico. Este ejemplo fue atribuido a Bowen por Takens en [21] y es conocido bajo el nombre de *atractor "Ojo de Bowen"*.

Consiste en un flujo[2] $(f^t)_{t\in\mathbb{R}}$ diferenciable en $\mathbb{R}^2$ generado por un campo de vectorial $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con dos puntos de silla A y B que poseen un ciclo heteroclínico, es decir,

$$W^s(A) \cap W^u(B) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad W^u(A) \cap W^s(B) \neq \emptyset.$$

Ver Figura 1.2.

Linearizando el campo vectorial, obtenemos coordenadas (x_A, y_A) en una vecindad V_A del punto A. De igual forma se tendrán coordenadas (x_B, y_B) en la vecindad V_B del punto B para las cuales el campo vectorial V es lineal. Denotamos los valores propios de expansión y contracción del campo vectorial linealizado en A por α_+ y α_- y en B por β_+ y β_-. Observe que $\alpha_+, \beta_+ > 0$ y $\alpha_-, \beta_- < 0$. Con esta notación, la expresión del flujo en V_A es de la forma

$$f^t(x_A, y_A) = (x_A \exp(\alpha_+ t), y_A \exp(-\alpha_- t))$$

[2]Sistema dinámico continuo (ver Definición B.1)

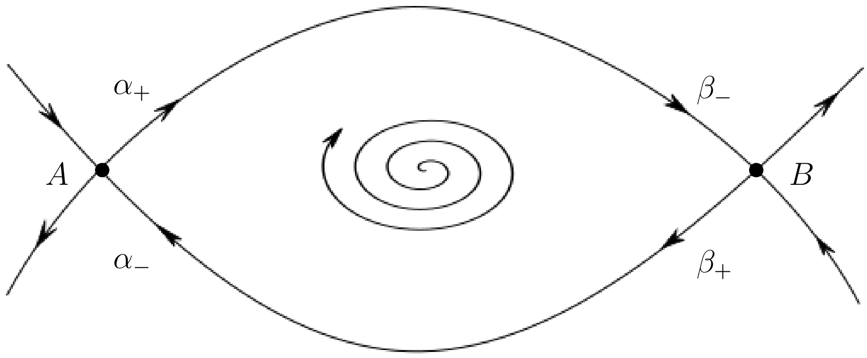

Figura 1.2: Ojo de Bowen

y en V_B

$$f^t(x_B, y_B) = (x_B \exp{(-\beta_- t)}, y_B \exp{(\beta_+ t)}).$$

Definimos

$$\lambda = \frac{|\alpha_-|}{|\beta_+|} \quad \text{y} \quad \sigma = \frac{|\beta_-|}{|\alpha_+|}$$

Observe que $\lambda > 0$, $\sigma > 0$. En [8], Gaunersdorf prueba que si $\lambda\sigma > 1$ el ciclo heteroclínico es un atractor. En lo que sigue asumiremos esta condición de ciclo heteroclínico atractor.

El siguiente resultado probado por Gaunersdorfer en [8] (véase también [21]), nos garantiza la no convergencia de las medias de Birkhoff de $(f^t)_{t\in\mathbb{R}}$.

Teorema 1.4. *Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua con $\varphi(A) > \varphi(B)$. Entonces toda órbita futura $\{f^s(x)\}_{s\geq 0}$ que converge al ciclo heteroclínico satisface que*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(f^s(x))ds = \frac{\sigma}{1+\sigma}\varphi(A) + \frac{1}{1+\sigma}\varphi(B)$$
$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(f^s(x))ds = \frac{\lambda}{1+\lambda}\varphi(B) + \frac{1}{1+\lambda}\varphi(A).$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que la función $\varphi(x) > 0$ para todo x y que $\varphi|_{V_A} = \varphi(A)$ y $\varphi|_{V_B} = \varphi(B)$. Consideremos una órbita que pasa primero por V_B y luego por V_A.Definimos las secciones transversales en las coordenadas linearizadas de V_A como (ver Figura 1.3):

$$\Sigma_A^{\text{in}} = \{(x_A, 1)\} \quad \Sigma_A^{\text{out}} = \{(1, y_A)\},$$

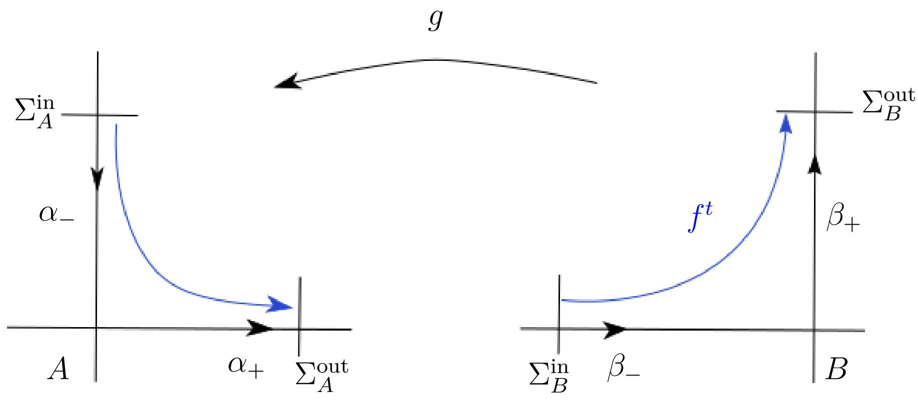

Figura 1.3: Tiempos de vuelo

y las secciones transversales en las coordenadas linearizadas de V_B como:

$$\Sigma_B^{\text{in}} = \{(1, y_B)\} \quad \Sigma_B^{\text{out}} = \{(x_B, 1)\}\,.$$

Dado un punto $x = (1, y_B) \in \Sigma_B^{\text{in}}$ con $y_B > 0$, calculamos el tiempo t_0 de vuelo necesario para pasar de a la sección transversal Σ_B^{out}(Ver Figura 1.3). Tenemos que

$$(x_B, 1) = f^{t_0}(1, y_B) = (\exp(-\beta_- t_0), y_B \exp(\beta_+ t_0)),$$

entonces

$$t_0 = \frac{-\log(y_B)}{\beta_+}. \tag{1.10}$$

Una vez que se ha calculado el tiempo de vuelo t_0 necesario para pasar de la sección transversal Σ_B^{in} a la sección transversal Σ_B^{out}, la órbita del flujo permanecerá en V_B durante este tiempo. La coordenada de salida x_B en la sección transversal Σ_B^{out} se obtiene reemplazando t_0, es decir,

$$x_B = \exp\left(-\beta_- \frac{-\log(y_B)}{\beta_+}\right) = y_B^{\beta}$$

donde $\beta = \beta_-/\beta_+$.

Consideremos una función $g : \Sigma_B^{\text{out}} \to \Sigma_A^{\text{in}}$ que describe la transición de las coordenadas linearizadas en V_B a las coordenadas linearizadas en V_A. Dado que el campo vectorial es suave, podemos asumir que g es de clase $C^{1+\varepsilon}$ con $\varepsilon > 0$. De hecho, como las secciones transversales solo dependen de una variable, consideramos g como una función de variable real tal que $x_A = g(x_B)$. Además, como $g(0) = 0$ y denotando $g'(0) = a \in \mathbb{R}$, podemos escribir

$$x_A = g(x_B) = ax_B + O(x_B^{1+\varepsilon}).$$

La órbita del flujo entrará en V_A en la coordenada $x_A = g(y_B^\beta) = ay_B^\beta + O(y_B^{\beta(1+\varepsilon)})$. Calculamos el tiempo t_1 que la órbita permanecerá en V_A. Iniciamos en el punto $(x_A, 1) \in \Sigma_A^{\text{in}}$ aplicamos el flujo

$$(1, y_A) = f^{t_1}(x_A, 1) = (x_A \exp{(\alpha_+ t)}, \exp{(-\alpha_- t)}),$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} t_1 &= -\frac{1}{\alpha_+} \log{(ay_B^\beta + O(y_B^{\beta(1+\varepsilon)}))} \\ &= -\frac{1}{\alpha_+} \log{\left(ay_B^\beta \left(1 + \frac{O(y_B^{\beta(1+\varepsilon)}))}{ay_B^\beta} \right) \right)} \\ &= -\frac{1}{\alpha_+} \left(\log(a) + \beta \log(y_B) + O(y_B^{\beta\varepsilon}) \right). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Queremos analizar el tiempo que la órbita trascurre asintóticamente en V_A y en V_B. Entonces, por (1.10) y (1.11) este tiempo es aproximado por

$$\begin{aligned} \lim_{y_B \to 0} \frac{t_1}{t_0} &= \lim_{y_B \to 0} \frac{-\frac{1}{\alpha_+} \left(\log(a) + \beta \log(y_B) + O(s^{\beta\varepsilon}) \right)}{-(1/\beta_+) \log(y_B)} \\ &= \lim_{y_B \to 0} \frac{\beta\beta_+ \log(y_B)}{\alpha_+ \log(y_B)} = \frac{\beta_+}{\alpha_+} \frac{\beta_-}{\beta_+} = \sigma. \end{aligned}$$

Podemos afirmar que, asintóticamente, t_1 es equivalente a $\sigma \cdot t_0$. Dividimos la órbita del flujo $f^t(x)$ en periodos, cada uno de los cuales comienza en las vecindades de los puntos A y B. Por lo tanto, tenemos tres conjuntos disjuntos: cuando la órbita está en V_A,

$$T_A = \{ s \in [0, t] \ : f^s(x) \in V_A \};$$

cuando la órbita está en V_B,

$$T_B = \{ s \in [0, t] \ : f^s(x) \in V_B \};$$

y cuando está en el complemento de las dos vecindades,

$$T_c = \{s \in [0,t] \, : f^s(x) \in (V_A \cup V_B)^c\}.$$

Observemos que el flujo visita la misma cantidad $n \in \mathbb{N}$ de veces las vecindades V_A y V_B. La medida de estos conjuntos está relacionada con los tiempos de vuelo. Consideremos Leb la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, entonces $\mathrm{Leb}(T_A) = nt_1$, $\mathrm{Leb}(T_B) = nt_0$ y $\mathrm{Leb}(T_c) = t_c$. Consecuentemente, tenemos que

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(f^s(x))ds &= \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left(\int_{T_A} \varphi(f^s(x))ds + \int_{T_B} \varphi(f^s(x))ds + \int_{T_c} \varphi(f^s(x))ds\right) \\
&= \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left(nt_1\varphi(A) + nt_0\varphi(B)\right) + \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{T_c} \varphi(f^s(x))ds \\
&= \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left(\sigma \cdot nt_0\varphi(A) + nt_0\varphi(B)\right) \\
&= \limsup_{t\to\infty} \frac{nt_0}{t}\left(\sigma\varphi(A) + \varphi(B)\right) \\
&= \left(\sigma\varphi(A) + \varphi(B)\right)\limsup_{t\to\infty} \frac{nt_0}{t},
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty} \frac{t}{nt_0} &= \limsup_{t\to\infty} \frac{nt_1 + nt_0 + t_c}{nt_0} \\
&= \limsup_{t\to\infty} \frac{\sigma \cdot nt_0 + nt_0}{nt_0} + \limsup_{t\to\infty} \frac{t_c}{nt_0} \\
&= \limsup_{t\to\infty} \frac{\sigma \cdot nt_0 + nt_0}{nt_0} = \sigma + 1.
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(f^s(x))ds = \frac{\sigma}{1+\sigma}\varphi(A) + \frac{1}{1+\sigma}\varphi(B)$$

De forma análoga, obtendremos que

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(f^s(x))ds = \frac{\lambda}{1+\lambda}\varphi(B) + \frac{1}{1+\lambda}\varphi(A). \qquad \blacksquare$$

Observación 4. Dado que los límites superior e inferior en el teorema anterior son distintos, se concluye que la secuencia de medias dadas por

$$\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(f^s(x))\,ds.$$

no converge. Esto puede ser visto como la versión continua de la no convergencia de las medias descritas en (1.4) para el caso continuo.

Consideremos el tiempo uno del flujo, es decir, consideraremos el difeomorfismo f^1. En [23] se demuestra que este difeomorfismo también presenta comportamiento histórico.

Corolario 1.4.1. *Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo con dos puntos de silla A y B que poseen un ciclo heteroclínico. Entonces, toda órbita futura convergente al ciclo heteroclínico tiene comportamiento histórico.*

Demostración. Dado un punto x_0 dentro del ciclo heteroclínico (ver Figura 1.2). Supongamos su órbita no tiene comportamiento histórico, es decir, existe una medida ν tal que la media

$$\mu_n(x_0) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{g^k(x_0)} \to \nu, \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Por definición de convergencia de medidas, para $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $\varphi(A) > \varphi(B)$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi(x)\,d\mu_n(x_0) = \int \varphi(x)\,d\nu \tag{1.12}$$

Como la órbita de x_0 en cada iteración gasta mayor tiempo cerca de las vecindades V_A y V_B. Entonces, por la Observación 3 la órbita tiene una oscilación adecuada. Luego, las medias temporales son iguales a las del sistema continuo. Por lo tanto, por el Teorema 1.4 tenemos que

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \int \varphi(x)\,d\mu_n(x_0) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(g^k(x)) \\
&= \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(f^s(x))ds \\
&= \frac{\sigma}{1+\sigma}\varphi(A) + \frac{1}{1+\sigma}\varphi(B)
\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \int \varphi(x)\, d\mu_n(x_0) &= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(g^k(x)) \\
&= \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(f^s(x))ds \\
&= \frac{\lambda}{1+\lambda}\varphi(B) + \frac{1}{1+\lambda}\varphi(A).
\end{aligned}
$$

lo cual es una contradicción a que $\mu_n(x_0)$ era convergente. Concluimos que la órbita de todo punto en el ciclo heteroclítico tiene comportamiento histórico. ■

1.2. Conjunto de puntos regulares e irregulares

En esta sección queremos clasificar los comportamientos descritos en la sección 1.1. Para ello construiremos un conjunto de puntos con comportamiento predecible y otro con puntos con comportamiento histórico.

Sean M un espacio métrico compacto, μ una medida de probabilidad definida en M y $f : M \to M$ una transformación medible que preserva la medida μ. Los puntos con comportamiento predecible son descritos por la convergencia de las medidas μ_n definidas en (1.3) o por la convergencia de las medias de Birkhoff definidas en (1.4). El Teorema Ergódico de Birkhoff (ver Teorema asegura la convergencia de las medidas μ_n y de las medias de Birkhoff (1.4). Infelizmente, esta convergencia depende del observable φ considerado. El siguiente resultado nos permite encontrar un conjunto R_f donde existe convergencia para cualquier observable φ considerado.

Teorema 1.5 (Birkhoff)**.** *Sea M un espacio métrico compacto, $f : M \to M$ una transformación medible y μ una medida de probabilidad invariante por f. Entonces existe un conjunto medible $R_f \subset M$ con $\mu(R_f) = 1$ tal que*

$$
\widetilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(f^k(x))
$$

existe para todo punto $x \in R_f$ y toda función continua $\varphi : M \to \mathbb{R}$. Además, $\widetilde{\varphi} \in L^1(M,\mu)$ y $\int \widetilde{\varphi}\, d\mu = \int \varphi\, d\mu$.

A la función $\widetilde{\varphi}$ se llama promedio orbital de φ y a la número $\int \varphi \, d\mu$ se le denomina promedio espacial de φ. Podemos definir la secuencia de medias de Birkhoff de φ a lo largo de la órbita futura de x como

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)).$$

Observe que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) = \int \varphi \, d\mu_n(x) \tag{1.13}$$

donde $\mu_n(x)$ es la medida introducida en (1.3). Al conjunto R_f dado en Teorema 1.5, se le llama conjunto de *puntos regulares de* μ.

Proposición 1.6. *Si para $x \in M$, existe el límite*

$$\widetilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) \quad \textit{para toda } \varphi : M \to \mathbb{R} \textit{ continua},$$

entonces hay una probabilidad μ_x en M tal que $\mu_n(x)$ converge para μ_x en la topología débil*. En particular, todo punto regular de una medida invariante por f, tiene comportamiento predecible.

Demostración. No es difícil de ver que el funcional $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}(x)$ es lineal, positivo y $1_M \mapsto 1$. Por lo tanto, como M es un espacio métrico compacto debido al Teorema de Representación de Riesz (ver Teorema A.16), existe una única medida de probabilidad μ_x tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) = \int \varphi \, d\mu_x. \tag{1.14}$$

Juntando (1.13), (1.14) obtenemos que $\mu_n(x)$ converge para μ_x en la topología débil*.

Finalmente, teniendo en cuenta Teorema 1.5 y la Definición 1.2, obtenemos que todo punto regular de una medida invariante por f tiene comportamiento predecible. ∎

Ahora consideremos los puntos con comportamiento histórico. Primeramente, consideramos donde no convergen las medias de Birkhoff. Entonces, para todo observable continuo $\varphi : M \to \mathbb{R}$ se define el conjunto φ-irregular por

$$I_f(\varphi) = \left\{ x \in M : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) \quad \text{no existe} \right\}. \tag{1.15}$$

Ahora consideramos los puntos donde las medias μ_n definidas en (1.3) no convergen. Entonces, se define el conjunto de puntos irregulares de la siguiente manera

$$I_f = \left\{ x \in M : \lim_{n\to+\infty} \mu_n(x) \quad \text{no existe en la topología débil}^* \right\}. \tag{1.16}$$

Proposición 1.7. *Vale que*

$$I_f = \bigcup_{\varphi \in C^0(M)} I_f(\varphi).$$

Demostración. Sea $x \in I_f$, entonces no existe ninguna medida μ en M tal que $\mu_n(x) \to \mu$. Por la Proposición 1.6 existe una función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{\varphi}(x)$ no existe. Es decir, el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) \quad \text{no existe.}$$

Por lo tanto, $x \in I_f(\varphi)$ y $I_f \subset I_f(\varphi)$.

Ahora, sea $x \in I_f(\varphi)$ para alguna una función continua $\varphi : M \to \mathbb{R}$. Supongamos que existe una medida μ en M tal que $\mu_n(x) \to \mu$ en la topología débil*. Entonces, por el Lema B.14 tenemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int \varphi \, d\mu_n(x) = \int \varphi \, d\mu.$$

Luego por la definición de $\mu_n(x)$ en (1.3) tenemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int \varphi \, d\mu_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x))$$

existe, lo que es una contradicción. Entonces no existe ninguna medida μ en M tal que $\mu_n(x) \to \mu$ en la topología débil*. Concluimos que $x \in I_f$ y $\bigcup_{\varphi \in C^0(M)} I_f(\varphi) \subset I_f$. ■

Las órbitas futuras de los puntos x en $I_f(\varphi)$ o en I_f poseen comportamiento histórico. Nuestro objetivo en las siguientes secciones será estudiar el tamaño de estos conjuntos desde diferentes perspectivas. Concretamente, analizaremos su tamaño desde dos puntos de vista: teoría de la medida (si estos conjuntos poseen medida de Lebesgue positiva cuando M es una variedad) y topológico (si estos conjuntos son residuales en M).

1.3. El último problema de Takens y la conjetura global de Palis

En las secciones anteriores, hemos definido los distintos tipos de comportamiento que pueden tener las órbitas futuras de un punto $x \in M$. Ahora, abordaremos la cuestión de cuán abundantes son estos comportamientos desde la perspectiva de la teoría de la medida. Además, analizaremos qué tan estables son estos comportamientos frente a pequeñas perturbaciones del sistema.

En el Ejemplo 1, hemos visto que el subconjunto de puntos con comportamiento predecible tiene medida de Lebesgue positiva. En virtud de los Morse-Smale difeomorfismos son uniformenente hiperbólicos y por lo tanto, estructuralmente estables (ver Apéndice B.3), se sigue que este comportamiento es persistente en una vecindad V del difeomorfismo f del Ejemplo 1. De este modo, podemos concluir que el comportamiento predecible puede ser abundante y persistente.

En el ejemplo 2 el conjunto de puntos con comportamiento histórico tiene medida de Lebesgue positiva. Sin embargo, este comportamiento no es persistente bajo perturbaciones del sistema. El análisis de estas propiedades dinámicas para el comportamiento histórico fue dado primeramente por Ruelle en [19]. Posteriormente, Takens en [22] en uno de sus últimos artículos presento la siguiente pregunta:

> ***El último problema de Takens:*** *¿Es posible encontrar alguna clase grande de funciones $f : M \to M$ y un conjunto grande de puntos $x \in M$ con comportamiento histórico?.*

Este problema está relacionado con la *Conjetura Global Palis*. Primeramente, daremos algunas definiciones para entender esta relación.

Definición 1.8. Sea $f : M \to M$ una aplicación medible y μ una medida invariante por f. Definimos la bacía de atracción de μ por

$$\beta_f(\mu) = \{x \in M : \mu_n \to \mu \quad \text{en la topología débil}^*\}$$

La bacía de atracción $\beta_f(\mu)$ de una medida μ es un conjunto de puntos que tienen comportamiento predecible y cuya órbita futura se distribuye asintóticamente en promedio como μ.

Definición 1.9. Una medida de probabilidad μ es llamada medida física si la medida de Lebesgue de $\beta_f(\mu)$ es positiva.

Ejemplo 3. Consideramos un difeomorfismo $f : M \to M$ y un punto fijo $y \in M$ atractor. Es decir, dada una vecindad $U \subset M$ de y se tiene que $f^k(x) \to y$ para todo $x \in U$. Luego, por la Proposición 1.1 tenemos que $\delta_{f^k(x)} \to \delta_y$ para todo $x \in U$. Obtenemos la siguiente sucesión de medidas

$$\mu_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k(x)} \to \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_y = \frac{1}{n} n\delta_y = \delta_y \quad \forall x \in U.$$

Entonces $\beta_f(\delta_y) \supset U$, entonces $m(\beta_f(\delta_y)) \geq m(U) > 0$ por lo tanto δ_y es una medida física en M.

El ejemplo anterior nos muestra un sistema dinámico que posee medida física. También existen muchos ejemplos que no tienen medidas físicas como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4. Consideremos la aplicación identidad $f(x) = x$ para todo $x \in M$. Evidentemente, las medidas $\mu_n(x) \to \delta_x$ para todo $x \in M$. Esto significa que las medidas de Dirac son las únicas con bacía de atracción. Entonces cada bacía de atracción consiste de un único punto. Por lo tanto, no existe bacías de atracción con medida positiva. Es decir, ninguna medida de Dirac es una medida física.

En el ejemplo anterior, hemos visto que el sistema no posee medidas físicas. Por otro lado, en el otro extremo, existen sistemas con infinitas medidas físicas, como aquellos con infinitas órbitas periódicas atractoras. En este sentido, es crucial comprender la estructura del conjunto de medidas físicas, lo que nos permitiría caracterizar la dinámica global del sistema y determinar cuáles comportamientos son más probables de ocurrir.

Los sistemas hiperbólicos uniformes admiten una descripción topológica precisa de su comportamiento: existen un número finito de subconjuntos invariantes transitivos compactos, de manera que toda órbita futura del sistema se acumula en uno de ellos (ver Apéndice B.3). Inicialmente, se pensó que los sistemas hiperbólicos formaban un conjunto denso en el espacio de difeomorfismos de una variedad, pero rápidamente se observó que esto no era posible. Específicamente, existen conjuntos abiertos de difeomorfismos donde no es posible describir la dinámica de la mayoría de las órbitas, tal como ocurre en los sistemas hiperbólicos. Sin embargo, en la década de 1990, Jacob Palis presentó en una formulación más probabilística que muchas de las bonitas propiedades y paradigmas de los sistemas hiperbólicos uniformes deberían ser también ciertos para muchos sistemas dinámicos [14].

Conjetura Global de Palis: *La mayoría de los sistemas tienen un número finito de medidas físicas, tal que la unión de sus bacías tiene medida de Lebesgue positiva.*

Esta conjetura es de gran importancia en la teoría de Sistemas Dinámicos sugiriendo que la mayoría de los sistemas tienen un comportamiento predecible y que los sistemas hiperbólicos uniformes no son los únicos con estas propiedades interesantes. Curiosamente, ”El último problema de Takens” puede considerarse como la contrapositiva de la Conjetura de Palis: si existiera una clase abierta de funciones en la que el conjunto de puntos con comportamiento histórico tiene medida de Lebesgue positiva, entonces esto implicaría que la conjetura no es válida. En otras palabras, el problema de Takens se pregunta sobre la existencia de abundantes sistemas (dentro de alguna clase) con grande número de órbitas con comportamiento histórico mientras que la Conjetura de Palis sugiere que esto no debería ocurrir en la mayoría de los sistemas.

1.4. Densidad y residualidad del comportamiento histórico

La noción de densidad se refiere a la propiedad de que un subconjunto de un espacio topológico esté ”cerca” de otro en algún sentido. Por ejemplo, un subconjunto A de un espacio topológico X se dice que es *denso* en X si la clausura de A es igual a X. Esto significa que cualquier punto de X puede ser aproximado arbitrariamente cerca por elementos de A.

Por otro lado, la residualidad es una propiedad más fuerte que la densidad. Un subconjunto B de un espacio topológico X se dice que es *residual* en X si es la intersección de una colección de conjuntos abiertos y densos en X. Es decir, un subconjunto B es residual si contiene ”casi todo” los puntos de X en un sentido preciso. La idea intuitiva es que un conjunto residual es ”grueso” en algún sentido.

La noción de residualidad es importante en varias áreas de las matemáticas, como en análisis funcional, teoría de la medida, sistemas dinámicos, entre otras, donde se utiliza para establecer la existencia de propiedades genéricas. Por ejemplo, si una propiedad es verdadera para un conjunto residual de funciones en un espacio dado, entonces se dice que es una *propiedad genérica* en ese espacio. Para más información sobre densidad, residualidad y genericidad, véase el Apéndice A.

En esta sección estudiamos que tan grande es el conjunto de los puntos con comportamiento histórico y mostraremos la equivalencia entre la densidad y la residualidad en este contexto. Recordemos que M denota un espacio metrico compacto, $f : M \to M$ es una función medible y $\varphi : M \to \mathbb{R}$ un observable continuo. Se define el conjunto φ-irregular (para f) por

$$I_f(\varphi) = \left\{ x \in M : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) \quad \text{no existe} \right\}.$$

Similarmente, se introduce el conjunto de puntos irregulares (para f) de la siguiente manera:

$$I_f = \left\{ x \in M : \lim_{n\to+\infty} \mu_n \quad \text{no existe en la topología débil}^* \right\}.$$

De acuerdo a la Proposición 1.7 el conjunto I_f puede ser tambien introducido como la unión de los conjuntos $I_f(\varphi)$ sobre todas las funciones continuas $\varphi : M \to \mathbb{R}$.

Las órbitas futuras de los puntos x en $I_f(\varphi)$ o en I_f poseen comportamiento histórico. El primer resultado sobre el tamaño del conjunto de puntos irregulares fue dado por la profesora Yael Naim Dowker en [5]. Concretamente, en la siguiente proposición vemos que el conjunto $I_f(\varphi)$ es un conjunto residual en la órbita de x.

Proposición 1.10 (Dowker)**.** *Sea $\varphi : M \to \mathbb{R}$ un observable continuo. Si $x \in I_f(\varphi)$ entonces $I_f(\varphi)$ es un conjunto residual en la clausura de la órbita de x.*

Demostración. Sea $x \in I_f(\varphi)$ y denotamos por

$$\mu_{n,\varphi}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)).$$

Debido a la no convergencia de $\mu_{n,\varphi}(x)$ escogemos dos constantes α_x y β_x tal que

$$\liminf_{n\to+\infty} \mu_{n,\varphi}(x) < \alpha_x < \beta_x < \limsup_{n\to+\infty} \mu_{n,\varphi}(x).$$

Podremos definir el siguiente conjunto

$$E(x,\varphi) = \bigcap_n E_n(x,\varphi)$$

donde $E_n(x,\varphi) = \{z \in M : \exists m_1, m_2 > n \quad \text{tal que } \mu_{m_1,\varphi}(z) < \alpha_x \quad \text{y} \quad \mu_{m_2,\varphi}(z) > \beta_x\}$, y cada $E_n(x,\varphi)$ es un conjunto abierto. Entonces $E(x,\varphi)$ es un conjunto G_δ[3] en M y $\mathcal{O}^+(x) \subset E(x,\varphi) \subset I_f(\varphi)$. Por lo tanto, $E(x,\varphi)$ es un conjunto G_δ denso en $\overline{\mathcal{O}^+(x)}$, es decir, $E(x,\varphi)$ es un conjunto residual en $\overline{\mathcal{O}^+(x)}$ ■

Hasta donde hemos podido saber, aparentemente, el siguiente resultado parece que ha pasado desapercibido en la literatura precedente. Por lo tanto, se trata de una aportación de esta tesis al tópico.

Teorema 1.11. *Sea $f : M \to M$ una función continua definida en un espacio métrico compacto. Se cumple*

(a) *$I_f(\varphi)$ es un conjunto denso de M, si solo, si $I_f(\varphi)$ es un conjunto residual.*

(b) *I_f es un conjunto denso de M, si solo, si I_f es un conjunto residual.*

Demostración. (a) Como sabemos todo conjunto residual es denso (ver Proposición A.12). Restaría probar que si $I_f(\varphi)$ es denso entonces es residual. Para cada $x \in I_f(\varphi)$ se mantiene que $x \in E(x,\varphi) \subset I_f(\varphi)$ entonces

$$I_f(\varphi) = \bigcup_{x\in I_f(\varphi)} E(x,\varphi) = \bigcup_{x\in I_f(\varphi)} \bigcap_n E_n(x,\varphi) = \bigcap_n E_n(\varphi)$$

donde

$$E_n(\varphi) = \bigcup_{x\in I_f(\varphi)} E_n(x,\varphi).$$

Cada $E_n(\varphi)$ es un abierto de M. Entonces $I_f(\varphi)$ es un conjunto G_δ. Por la hipótesis de que $I_f(\varphi)$ es denso se concluye que es un conjunto residual (ver Proposición A.13).

[3]Ver Definición A.8

(b) De forma análoga que el ítem (a). Tenemos que probar que si I_f es denso entonces es residual. Dado un $x \in I_f$ entonces existe algún observable $\varphi_x : M \to \mathbb{R}$ continuo tal que $x \in I_f(\varphi)$. Por lo tanto, de forma análoga al ítem (a) se tiene que $x \in E(x, \varphi_x) \subset I_f(\varphi_x) \subset I_f$, y entonces

$$I_f = \bigcup_{x \in I_f} E(x, \varphi_x) = \bigcup_{x \in I_f(\varphi)} \bigcap_n E_n(x, \varphi_x) = \bigcap E_n$$

donde

$$E_n = \bigcup_{x \in I_f} E(x, \varphi_x).$$

Así I_f es un conjunto G_δ, como I_f es denso se concluye que es residual. ■

Capítulo 2

Comportamiento histórico genérico

En este capítulo, exploraremos las diversas formas de abordar la existencia del comportamiento histórico en sistemas dinámicos. En la primera sección, presentaremos una solución inicial al último problema de Takens desde una perspectiva topológica. Esta solución es aplicable a atractores hiperbólicos y se encuentra en el artículo en el que Takens plantea la pregunta. En la segunda sección, demostraremos que en realidad, en cualquier conjunto hiperbólico, existen numerosos puntos con comportamiento histórico. Para lograrlo, estudiaremos el comportamiento histórico en clases homoclínicas no triviales, lo que nos permitirá incluso escapar de la hiperbolicidad del sistema. En la tercera sección, analizaremos el concepto de primera integral y proporcionaremos condiciones suficientes para garantizar la existencia del comportamiento histórico de una aplicación continua. Finalmente, en la cuarta sección, estudiaremos la clase de sistemas dinámicos topológicamente transitivos, investigando la relación entre esta propiedad y el comportamiento histórico de las órbitas genéricas del sistema.

2.1. Modelo de Takens

Diremos que una propiedad $\mathscr{P}$ es genérica en $U \subset M$ si el conjunto de puntos $x \in U$ donde $\mathscr{P}$ es verdadera forma un conjunto residual. En este contexto, deseamos estudiar la genericidad del comportamiento histórico. Para hacerlo, es necesario demostrar la existencia de un conjunto residual de puntos cuyas órbitas presentan comportamiento histórico. Una primera respuesta a este problema fue proporcionada por Takens en [22], quien demostró

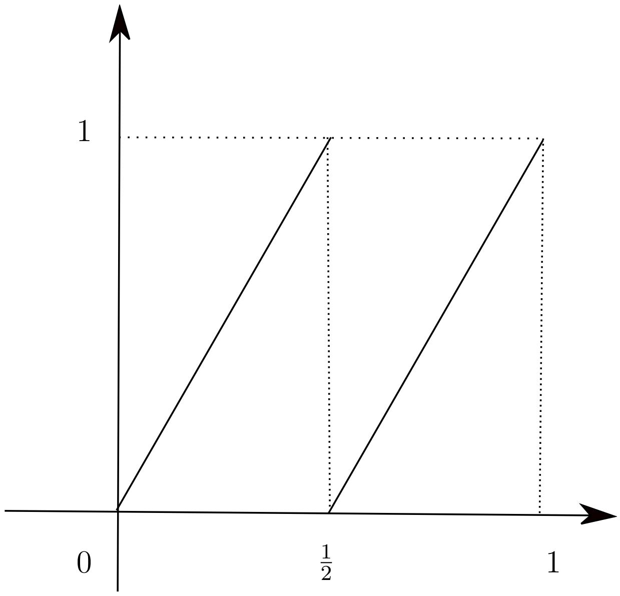

Figura 2.1: Aplicación duplicación

que los atractores hiperbólicos presentan comportamiento histórico genérico. Para ilustrar este punto, Takens consideró la siguiente aplicación de círculo, que sirve como modelo canónico de un atractor hiperbólico de dimensión uno.

Ejemplo 5. Consideraremos la aplicación duplicación definida en $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ por:

$$f(x) = 2x \mod 1.$$

En la Figura 2.1 se representa gráficamente esta aplicación. Esta aplicación posee órbitas densas, así como puntos periódicos de todos los períodos. Más aún, la medida de Lebesgue en $\mathbb{S}^1$ es una medida invariante del sistema.

Takens analizó el ejemplo anterior utilizando el resultado de Dowker, mencionado en la Proposición 1.10, y llegó a la siguiente conclusión, expresada en la siguiente proposición:

Proposición 2.1. *Considere f como en el Ejemplo 5. Sean x' y x'' dos puntos en $\mathbb{S}^1$ tal que la órbita de x' es periódica y la sucesión de medidas $\mu_n(x'')$ converge para la medida de Lebesgue en $\mathbb{S}^1$ cuando $n \to \infty$. Entonces, existe un punto x en $\mathbb{S}^1$ cuya órbita es densa en $\mathbb{S}^1$, acompaña por momentos arbitrariamente grandes de tiempo las órbitas de x' y x'' y tiene comportamiento histórico. En particular, el conjunto de los puntos irregulares I_f de la aplicación f es un conjunto residual de $\mathbb{S}^1$.*

Demostración. A cada punto $x \in [0,1]$, se le puede asociar una sucesión

$$s = \{s_i\}_{i \geq 0} \in \Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

del siguiente modo:

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_i}{2^{i+1}}.$$

Observe que los sucesivos valores de s_i en la sucesión, representan la posición del iterado $f^i(x)$ del siguiente modo:

$$\begin{cases} f^i(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right), & \text{si} \quad s_i = 0, \\ f^i(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], & \text{si} \quad s_i = 1. \end{cases}$$

Del mismo modo, a cada sucesión $s = \{s_i\}_{i \geq 0} \in \Sigma$ se le puede asociar un punto x cuya órbita futura describe el itinerario descrito por la secuencia. Con esta identificación, podemos ver los puntos x' y x'' mencionados en el enunciado de la proposición como dos secuencias $s' = \{s'_i\}_{i \geq 0}$ y $s'' = \{s''_i\}_{i \geq 0}$ en Σ. La órbitas de estas secuencias, bajo la aplicación de desplazamiento lateral $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ dada por $\sigma(\{s_i\}_{i \geq 0}) = \{s_{i+1}\}_{i \geq 0}$, son periódicas y densas, respectivamente. De ahora en adelante, por simplicidad en la notación, denotamos $\mu_n(s')$ y $\mu_n(s'')$ a las secuencias de medidas asociadas con los pontos x' y x'' respectivamente. Note que de acuerdo con Proposición 1.1 tenemos que $\mu_n(s')$ converge para la medida periódica $\mu' = \mu(x')$ dada por la correspondiente expresión en (1.1). Similarmente, por hipótesis, $\mu_n(s'')$ converge en la topología débil* para la medida de Lebesgue que denotamos por μ''.

Elegimos una métrica d en $\mathcal{M}_1(\mathbb{S}^1)$[1] compatible con la topología débil*. Sea $\{N_i\}_{i \geq 0}$ una secuencia de números naturales con $N_i \to \infty$ como explicaremos a continuación. Escogemos ahora una sucesión $s = \{s_i\}_{i \geq 0} \in \Sigma$ del siguiente modo: para cada $i \geq 0$ el segmento de la sucesión s dado por $\left\{s_{N_{2i}+1}, \ldots, s_{N_{2i+1}}\right\}$ consiste de un segmento inicial grande de la sucesión s' y $\left\{s_{N_{2i+1}+1}, \ldots, s_{N_{2i+2}}\right\}$ consiste de un segmento inicial grande de s''. La longitud de estos segmentos se elegirá de manera inductiva: una vez que hemos fijado s hasta s_{N_j}, hacemos que el siguiente segmento sea lo suficientemente largo para que, independientemente de cómo continúe la secuencia después, la medida $\mu_{N_{j+1}}(s)$ cumpla lo

[1]Espacio de medidas de probabilidad definidas en $\mathbb{S}^1$

siguiente:

$$\begin{cases} d(\mu_{N_{j+1}}(s), \mu') \leq 2^{-j}, & \text{si } j \text{ es par} \\ d(\mu_{N_{j+1}}(s), \mu'') \leq 2^{-j}, & \text{si } j \text{ es par} \end{cases}.$$

Esto significa que la medida $\mu_n(s)$ presenta dos puntos de acumulación, es decir, existe una subsecuencia de $\mu_n(s)$ que tiende a μ' y otra que a μ''. Por lo tanto, la órbita del punto x que se identifica con la secuencia s exhibe comportamiento histórico. Además, como μ'' corresponde a la medida de Lebesgue en $\mathbb{S}^1$ y $\mu_n(s)$ acumula en μ'', se deduce que la órbita de x es también densa. De acuerdo con la Proposición 1.10, concluimos que existe un conjunto residual en $\mathbb{S}^1$ de puntos iniciales con comportamiento histórico. ■

Los argumentos anteriores son aplicables a cualquier atractor hiperbólico no trivial, es decir, más complejo que una órbita periódica. El método de secuencias simbólicas utilizado en la prueba de la Proposición 2.1 se basa en la existencia de particiones de Markov para conjuntos hiperbólicos, lo que permite representar la dinámica sobre ellos a través de una dinámica simbólica. Además, el comportamiento histórico no se limita únicamente a puntos genéricos dentro del atractor. Dado que toda órbita en el dominio de atracción de un atractor hiperbólico es atraída por una órbita en el atractor, también en dicho dominio de atracción existe un subconjunto residual de puntos cuya órbita presenta un comportamiento histórico.

2.2. Clases homoclínicas no triviales

Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo en una variedad compacta. Consideramos un conjunto Λ compacto e hiperbólico (no necesariamente un atractor como los considerados en la sección anterior). Recordemos que un conjunto es hiperbólico si para cada $x \in \Lambda$ existen subespacios $E^s(x) \subset T_xM$ y $E^u(x) \subset T_xM$, constantes $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ que verifican:

(a) $T_xM = E^s \oplus E^u$.

(b) $Df_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$ y $Df_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$.

(c) $\|Df_x^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|$ para todo $v \in E^s$ y $n \geq 0$,

(d) $\|Df_x^{-n} v\| \leq C\lambda^n \|v\|$ para todo $v \in E^u$ y $n \geq 0$.

Adicionalmente, cuando este conjunto es transitivo y aislado, decimos que es un conjunto básico hiperbólico. Recordar que Λ es transitivo si contiene una órbita de f densa y aislado si existe un entorno compacto U de Λ tal que

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U).$$

Para más detalles de Dinámica Hiperbólica ver el Apéndice B.3.

El siguiente lema tiene como objetivo demostrar que los puntos con comportamiento histórico en un conjunto hiperbólico son genéricos.

Lema 2.2. *Dado un difeomorfismo $f : M \to M$ con un conjunto Λ básico hiperbólico y no trivial. Entonces existe un conjunto residual de puntos irregulares en Λ.*

Demostración. Consideramos dos órbitas periódicas $\gamma_1, \gamma_2 \subset \Lambda$ de f. Sea $\varphi : M \to \mathbb{R}$ una aplicación continua tal que $\varphi|_{\gamma_1} = 0$ y $\varphi|_{\gamma_2} = 3$. Definimos el conjunto

$$O_n = \left\{ x \in \Lambda : \exists m_1 > n, \frac{1}{m_1} \sum_{k=0}^{m_1 - 1} \varphi(f^k(x)) < 1 \quad \text{y} \quad \exists m_2 > n, \frac{1}{m_2} \sum_{k=0}^{m_2 - 1} \varphi(f^k(x)) > 2 \right\}.$$

El conjunto O_n es un subconjunto abierto de Λ. Además, es fácil de verificar que O_n es denso de Λ. Para ello, consideramos una partición de Markov de Λ, un punto $z \in \Lambda$, y construimos un punto x siguiendo los itinerarios de z, γ_1 y γ_2 similarmente a como fue hecho en Proposición 2.1. Concretamente, tomamos un punto x cuyo itinerario coincide con el de z, un número arbitrariamente grande de iteraciones para que x esté arbitrariamente cerca de z. Luego, siguiendo el mismo procedimiento pero con el itinerario de γ_1 y un número mayor que n de iteraciones, el promedio temporal de φ a lo largo de la órbita de f se acerca a cero. Después, siguiendo el itinerario de γ_2 durante un tiempo suficientemente grande, el promedio temporal de φ a lo largo de la órbita de f se acerca a 3. Por lo tanto, $x \in O_n$, lo que demuestra que este conjunto es denso en Λ.

Como $R_0 = \bigcap_n O_n$ es la intersección numerable de conjuntos abiertos y densos, entonces R_0 es un conjunto residual de Λ. En particular, para todo $x \in R_0$ los promedios temporales de φ a lo largo de la órbita de f no convergen y, por lo tanto, x es un punto irregular. ∎

Dado p un punto periódico hiperbólico de un difeomorfismo f (de periodo n). La clase homoclínica de p se define como

$$H(p) = \overline{W^s(\mathcal{O}(p)) \pitchfork W^u(\mathcal{O}(p))}$$

donde $\mathcal{O}^+(p) = \{p, f(p), \ldots, f^{n-1}(p)\}$, y

$$W^s(\mathcal{O}(p)) = \bigcup_{q\in\mathcal{O}(p)} W^s(q) \quad \text{y} \quad W^u(\mathcal{O}(p)) = \bigcup_{q\in\mathcal{O}(p)} W^u(q)$$

Para obtener más información, consulte la Definición B.27. Aunque todo conjunto hiperbólico está dentro de una clase homoclínica, no necesariamente todas las clases homoclínicas son conjuntos hiperbólicos. A continuación, demostraremos que toda clase homoclínica no trivial contiene un conjunto residual de puntos irregulares. Para ello, adaptaremos el argumento presentado por Abdenur, Bonatti y Crovisier en [1, Proposición 9.1] para demostrar que los puntos genéricos en $W^s(\mathcal{O}(p))$ tienen comportamiento histórico.

Proposición 2.3. *Sea p un punto periódico de silla hiperbólico de un difeomorfismo f, cuya clase homoclínica no se reduce a la órbita de p. Es decir, p tiene puntos homoclínicos transversales. Entonces los puntos genéricos en $H(p)$ son irregulares.*

Demostración. Como la clase homoclínica de p es no trivial, podemos considerar dos órbitas distintas γ_1 e γ_2 homoclínicamente relacionadas con la órbita de p (ver Definición **??** e Corolario **??**). Para ser, más precisos, tomamos $\gamma_1 = \mathcal{O}(p)$ e $\gamma_2 = \mathcal{O}(q) \neq \mathcal{O}(p)$. Fijamos una función continua $\varphi : M \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi|_{\gamma_1} = 0$ y $\varphi|_{\gamma_2} = 3$. Ahora definimos el siguiente conjunto

$$W_n = \left\{ x \in H(p) : \exists m_1 > n, \frac{1}{m_1}\sum_{k=0}^{m_1-1} \varphi(f^k(x)) < 1 \quad \text{y} \quad \exists m_2 > n, \frac{1}{m_2}\sum_{k=0}^{m_2-1} \varphi(f^k(x)) > 2 \right\}.$$

Este conjunto es un abierto de $H(p)$ y los puntos en $G_0 = \bigcap_n W_n$ son irregulares. Ahora tenemos que mostrar que W_n es denso en $H(p)$ para concluir que G_0 es residual.

Consideremos Λ un conjunto básico hiperbólico en $H(p)$ conteniendo a γ_1 e γ_2. Como Λ es un conjunto básico hiperbólico por el Lema 2.2 existe un R_0 residual en Λ de puntos irregulares. Sea $x \in R_0$. Observe $W^s(f^i(x)) \cap H(p)$ está contenido en W_n para todo $n > 0$

and $i \in \mathbb{Z}$. Por el Lema B.36, existe $k > 0$ tal que

$$\overline{W^s(x) \cup \cdots \cup W^s(f^k(x))} = \overline{W^s(\Lambda)} \supset \overline{W^s(\gamma_1)}.$$

Por lo tanto, el conjunto

$$(W^s(x) \cup \cdots \cup W^s(f^k(x))) \cap H(p) \subset W_n \subset H(p)$$

es denso en $\overline{W^s(\gamma_1)} \cap H(p) = \overline{W^s(\mathcal{O}(p))} \cap H(p) = H(p)$. Consecuentemente, W_n es denso en $H(p)$ como queríamos mostrar. ■

2.3. Método de la primera integral

En lo que sigue, M denota un espacio métrico compacto M. A continuación introducimos concepto de primera integral. Para más detalles ver [9].

Definición 2.4 (Primera integral)**.** Una función $g : M \to \mathbb{R}$ se le denomina primera integral de una aplicación $f : M \to M$ si g es constante a lo largo de las órbitas de f. Es decir,

$$g(f(x)) = g(x) \quad \text{para todo} \ \ x \in M.$$

Dados una función continua $\varphi : M \to \mathbb{R}$ y una aplicación $f : M \to M$, definimos la función $L_\varphi : M \to \mathbb{R}$ del siguiente modo:

$$L_\varphi(x) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)). \tag{2.1}$$

Teniendo en cuenta que φ es una función acotada por ser continua y M compacto, se sigue que

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n}(\varphi(f^n(x)) - \varphi(x)) = 0,$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} L_\varphi(f(x)) &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(f^{k+1}(x)) = \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(f^j(x)) \\ &= \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x)) + \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(\varphi(f^n(x))-\varphi(x)) = L_\varphi(x). \end{aligned}$$

Consecuentemente L_φ es una primera integral de la función f.

El siguiente teorema, demostrado por Maria Carvalho y Paulo Varandas en [4, Teorema A], establece que si la primera integral L_φ es suficientemente no trivial, el conjunto de los puntos irregulares de f es topológicamente grande (residual). En otras palabras, este teorema nos brinda un nuevo criterio para la genericidad de los conjuntos irregulares.

Teorema 2.5. *Sea M un espacio métrico compacto, $f : M \to M$ una aplicación continua y $\varphi : M \to \mathbb{R}$ una función continua. Suponga que existe dos subconjuntos densos A y B de M, tales que las restricciones de L_φ a A y B son constantes distintas. Entonces, $I_f(\varphi)$ es un subconjunto residual de M.*

Demostración. Asumamos que los valores de las constantes son $L_\varphi|_A = \alpha$ y que $L_\varphi|_B = \beta$ con $\alpha \neq \beta$. Fijamos $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}|\alpha-\beta|$. Para cada $N \in \mathbb{N}$, definimos el siguiente conjunto:

$$\Lambda_N = \{x \in M : |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq N\}$$

donde

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(f^k(x)).$$

Como los promedios φ_n son funciones continuas para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces Λ_N es un conjunto cerrado para todo $N \in \mathbb{N}$.

Lema 2.6. *Para todo $N \in \mathbb{N}$, si una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de Λ_N converge, entonces*

$$\left|\limsup_{k\to+\infty} L_\varphi(x_k) - L_\varphi(\lim_{k\to+\infty} x_k)\right| \leq 3\varepsilon$$

Demostración. Dado $N \in \mathbb{N}$, sea una sucesión convergente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ contenida en Λ_N y sea

$\lim_{k\to\infty} x_k = h$, $h \in \Lambda_N$. Por definición de Λ_N tenemos

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x_k) - \varphi_m(x_k)| \leq \varepsilon \quad \forall m, n \geq N \quad \text{y} \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ |\varphi_n(h) - \varphi_m(h)| \leq \varepsilon \quad \forall m, n \geq N. \end{aligned}$$

Fijamos $m = N$, aplicando límite superior para $n \to \infty$ tenemos que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |L_\varphi(x_k) - \varphi_N(x_k)| \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad |L_\varphi(h) - \varphi_N(h)| \leq \varepsilon.$$

Gracias a la continuidad de φ_n, elegimos un $\delta_N > 0$ tal que

$$|x - h| < \delta_N \quad \Rightarrow \quad |\varphi_N(x) - \varphi_N(h)| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $|x_k - h| < \delta_N$, se tiene

$$\begin{aligned} |L_\varphi(x_k) - L_\varphi(h)| &= |L_\varphi(x_k) - \varphi_N(x_k) + \varphi_N(x_k) - \varphi_N(h) + \varphi_N(h) - L_\varphi(h)| \\ &\leq |L_\varphi(x_k) - \varphi_N(x_k)| + |\varphi_N(x_k) - \varphi_N(h)| + |\varphi_N(h) - L_\varphi(h)| \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

En particular,

$$\left| \limsup_{k\to+\infty} L_\varphi(x_k) - L_\varphi(h) \right| \leq 3\varepsilon$$

como se quería demostrar. ■

Ahora probemos que el conjunto Λ_N tiene interior vacío para todo $N \in \mathbb{N}$. Supongamos lo contrario, sea $\lambda \in \mathrm{Int}(\Lambda_N)$, como A y B son densos en M, podemos tomar dos sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n, b_n \in \mathrm{Int}(\Lambda_N) \quad \text{se tiene} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lambda = \lim_{n\to\infty} b_n \tag{2.2}$$

Como $L_\varphi(a_n) = \alpha$ y $L_\varphi(b_n) = \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por (2.2) y el Lema 2.6 tenemos que

$$|\alpha - L_\varphi(\lambda)| \leq 3\varepsilon \quad \text{y} \quad |\beta - L_\varphi(\lambda)| \leq 3\varepsilon.$$

Entonces $|\alpha - \beta| \leq |\alpha - L_\varphi(\lambda)| + |\beta - L_\varphi(\lambda)| \leq 6\varepsilon$, contradiciendo la elección de ε. Por lo tanto, Λ_N tiene interior vacío.

Para finalizar, observe que consecuentemente, el conjunto de puntos $x \in M$ donde la sucesión $(\varphi_n(x))$ converge es exactamente la unión $R_f(\varphi) = \bigcup_{N\geq 1} \Lambda_N$. Como Λ_N son conjuntos cerrados con interior vacío entonces $R_f(\varphi)$ es un conjunto de primera categoría (ver Definición A.1). Por lo tanto, el complemento de $R_f(\varphi)$, es decir, el conjunto de los puntos φ-irregulares $I_f(\varphi)$, es un conjunto residual (ver Definición A.9). ■

En el siguiente resultado mostramos que si existen dos bacías de atracción densas en M, entonces el conjunto de puntos irregulares es residual. Recordemos que, según la Definición 1.8, se define la bacía de atracción de μ como el conjunto

$$\beta_f(\mu) = \left\{ x \in M : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k(x)} = \mu \quad \text{en la topología débil}^* \right\} \tag{2.3}$$

Corolario 2.6.1. *Sea M un espacio métrico compacto y $f : M \to M$ una aplicación que preserva dos medidas distintas de probabilidad ambas con bacía de atracción densa en M. Entonces I_f es un subconjunto residual de M.*

Demostración. Sean $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_f(M)$[2] las dos medidas distintas con bacías de atracción $\beta(\mu_1)$ y $\beta(\mu_2)$ densas en M que existen por hipótesis. Consideremos $A = \beta(\mu_1)$ y $B = \beta(\mu_2)$. Ya que $\mu_1 \neq \mu_2$, existe una aplicación continua $\varphi : M \to \mathbb{R}$ tal que $\int \varphi d\mu_1 \neq \int \varphi d\mu_2$. Observe que si x pertenece a A (resp. B), entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x))$ coincide con $\int \varphi d\mu_1$ (resp. $\int \varphi d\mu_2$). Consecuentemente, la aplicación primera integral L_φ es constante en A y B. Más precisamente se tendrá

$$L_\varphi(A) = \int \varphi d\mu_1 \quad \text{y} \quad L_\varphi(B) = \int \varphi d\mu_2.$$

Entonces, por el Teorema 2.5 se sigue que $I_f(\varphi)$ es un subconjunto residual en M. En particular, I_f también es residual. ■

A continuación, analizamos la relación entre la existencia de dos puntos periódicos cuyas variedades estables son densas en un espacio métrico compacto M y la genericidad

[2]Espacio de medidas de probabilidad invariantes por f (ver (B.5))

del conjunto de puntos irregulares I_f. Para ello, definimos, respectivamente, la variedad estable e inestable de un punto x en un espacio métrico M de la siguiente manera:[3]

$$W^s(x) = \left\{ y \in M : d(f^n(y), f^n(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right\}$$

y

$$W^u(x) = \left\{ y \in M : d(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right\}.$$

Cuando consideramos una órbita periódica $\mathcal{O}(p)$, denotamos por $W^s(\mathcal{O}(p))$ (resp. $W^u(\mathcal{O}(p))$) a la unión de las variedades estables $W^s(x)$ (resp. inestables $W^u(x)$) donde $x \in \mathcal{O}(p)$.

Corolario 2.6.2. *Sea M un espacio métrico compacto y $f : M \to M$ un homeomorfismo con dos órbitas periódicas $\mathcal{O}(p)$ y $\mathcal{O}(q)$ distintas cuyas variedades estables $W^s(\mathcal{O}(p))$ y $W^s(\mathcal{O}(q))$ son densas en M. Entonces I_f es un conjunto residual de M.*

Demostración. Por simplicidad, supongamos que p, q son puntos fijos de f. Escogemos $\varphi : M \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\varphi(p) \neq \varphi(q)$. Ahora definimos al conjunto $A = W^s(\mathcal{O}(p))$ y a $B = W^s(\mathcal{O}(q))$. Como las variedades estables son invariantes por f, los conjuntos A y B son invariantes por f y densos por hipótesis del corolario. La función primera integral L_φ es constante en A y B. Más precisamente se tiene

$$L_\varphi(A) = \varphi(p) \quad \text{y} \quad L_\varphi(B) = \varphi(q).$$

Se concluye por el Teorema 2.5 que I_f es un subconjunto residual de M. ■

Como consecuencia del corolario anterior reencontramos que en las clases homoclínica $H(p)$ los puntos irregulares son residuales como fue visto en la Proposición 2.3.

Corolario 2.6.3. *Sea M una variedad compacta. Dado $f : M \to M$ un difeomorfismo y un punto de silla hiperbólico p por f. Entonces el conjunto $H(p) = \mathcal{O}(p)$ o el conjunto $I_f \cap H(p)$ es un subconjunto residual de $H(p)$.*

Demostración. Supongamos que $H(p) \neq \mathcal{O}(p)$. Entonces existen una órbita $\mathcal{O}(q)$ diferente de $\mathcal{O}(p)$ tal que q es homoclínicamente relacionado con p (ver Corolario B.32.1). Por la

[3] En la sección B.3 se define variedad estable e inestable para difeomorfimos en variedades.

Definición B.32 se tiene que

$$W^s(\mathcal{O}(p)) \pitchfork W^u(\mathcal{O}(q)) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad W^s(\mathcal{O}(p)) \pitchfork W^u(\mathcal{O}(q)) \neq \emptyset.$$

Como $W^s(\mathcal{O}(p))$ e a $W^u(\mathcal{O}(p))$ son ambas densas en $H(p)$, el lema de inclinación (ver Teorema B.26) garantiza que $W^s(\mathcal{O}(q))$ es también densa en $H(p)$. Por el Corolario 2.6.2 se concluye que $I_f \cap H(p)$ es un subconjunto residual de $H(p)$. ■

2.4. Abundancia de comportamiento histórico

En esta sección, presentamos sistemas dinámicos con propiedades topológicas adicionales. En particular, nos centraremos en el estudio de sistemas fuertemente transitivos y fuertemente u-transitivos. Posteriormente, analizamos el comportamiento histórico de las órbitas genéricas de estas aplicaciones, mostrando la relación entre el comportamiento estadístico y el conjunto de medidas de probabilidad invariantes.

Definición 2.7. Sea M un espacio métrico y $f : M \to M$ una aplicación continua. Decimos que f es:

(a) Transitiva, si $\bigcup_{n\geq 0} f^n(V)$ es densa en M, para cada conjunto abierto $V \subset M$;

(b) Fuertemente transitiva, si $\bigcup_{n\geq 0} f^n(V) = M$, para cada conjunto abierto $V \subset M$;

(c) Minimal si para todo $x \in M$, la órbita $\mathcal{O}^+(x)$ es densa en M.

Observación 5. Evidentemente, una aplicación fuertemente transitiva es transitiva por definición. Del mismo modo, una aplicación minimal es transitiva. Por otro lado, si f es minimal entonces $M = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(V)$ para todo conjunto abierto $V \subset M$.

Ejemplo 6. La rotación irracional $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definida por

$$R_\alpha(x) = x + \alpha \qquad \text{mód } 1$$

con α un número irracional es un homeomorfismo minimal. Más aún, su inversa es

$$R_{-\alpha}(x) = x - \alpha \qquad \text{mód } 1$$

la cual también es mininal. Por la observación anterior aplicada a $R_{-\alpha}$ obtenemos que R_α es fuertemente transitiva (y en particular transitiva).

La transitividad topológica es una caracterización global del sistema. Observe, por ejemplo, que un sistema transitivo no puede poseer conjuntos atractores invariantes diferentes de M. Muchas veces se usa una definición alternativa del concepto de transitividad a priori diferente, la cual se puede encontrar por ejemplo en [18]. Llaman a f topológicamente transitivo si existe un punto $x \in M$ cuya órbita es densa en M. Ambas definiciones sean equivalentes bajo ciertas condiciones sobre el espacio de fase descritas a continuación:

Teorema 2.8. *Sea M es un espacio métrico separable*[4]*, de Baire*[5] *y sin puntos aislados. Entonces transitividad topológica es equivalente a la existencia de órbitas densas.*

A continuación estudiaremos el comportamiento histórico de las órbitas genéricas de aplicaciones transitivas. En primer lugar, mostramos la relación entre el comportamiento estadístico de las órbitas genéricas y el conjunto de medidas de probabilidad invariantes. Para ello, recordemos que el espacio de medidas de probabilidad es un espacio métrico compacto en la topología débil*. Consideremos el conjunto $\mathbb{K}(\mathcal{M}_1(M))$ de todos los subconjuntos compactos no vacíos de $\mathcal{M}_1(M)$. Unido con la métrica de *Hausdorff* tendremos que $(\mathbb{K}(\mathcal{M}_1(M)), d_{\mathbb{H}})$ ser un espacio métrico compacto. Para más información, ver B.2 (Proposición B.15).

Ahora consideremos la aplicación $\mathcal{V}_f : M' \to \mathbb{K}(\mathcal{M}_1(M))$ donde $M' = \bigcap_{k\geq 0} f^{-k}(M)$, definida por

$$\mathcal{V}_f(x) = \left\{ \mu \in \mathcal{M}_1(M) : d\left(\frac{1}{n_k}\sum_{k=0}^{n_k-1} \delta_{f^k(x)}, \mu\right) \to 0 \quad \text{para} \quad n_k \to +\infty \right\}.$$

Al conjunto $\mathcal{V}_f(x)$ se le denomina espectro estadístico de $x \in M$. Los siguientes resultados muestran la fuerte relación entre el comportamiento estadístico de órbitas genéricas y el conjunto de medidas de probabilidad. Recordemos que $\mathcal{M}_f(M)$ representa el conjunto de medidas de probabilidad invariantes por f y $\mathcal{M}_e(M)$ representa el conjunto de medidas ergódicas.

[4] Un espacio métrico M es separable si existe un subconjunto $D \subset M$ denso y numerable.
[5] Un espacio métrico M es de Baire si la intersección numerable de conjuntos densos en M es un conjunto denso en M.

Lema 2.9. *Sea M un espacio métrico compacto separable y $f : M \to M$ una aplicación continua. Si $p \in \beta_f(\mu)$ y $\overline{W^s(p)} = M$, entonces $\beta_f(\mu)$ es densa en M.*

Demostración. En primer lugar, notemos que $\overline{\beta_f(\mu)} \subset M$. Ahora debemos demostrar que $M \subset \overline{\beta_f(\mu)}$. Sea $x \in M$ arbitrario. Nuestro objetivo es mostrar que $\mu_n(x) \to \mu$ para todo $x \in M$. Esto implica que, para todo función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ continua se tiene

$$\begin{aligned}
\left| \lim_{n\to\infty} \int \varphi \, d\mu_n(x) - \int \varphi \, d\mu \right| &= \left| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) - \int \varphi \, d\mu \right| \\
&= \left| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(p)) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(p)) \Big) - \int \varphi \, d\mu \right| \\
&\leq \left| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(p)) - \int \varphi \, d\mu \right| + \left| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(p)) \Big) \right|.
\end{aligned}$$

Dado que $p \in \beta_f(\mu)$, podemos afirmar que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple

$$\left| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(p)) - \int \varphi \, d\mu \right| < \varepsilon.$$

Claim. $\left| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(p)) \right| < \varepsilon$

Demostración del Claim. Dado que $x \in W^s(p)$, para todo $\delta > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq n_0$ se cumple $d(f^k(x), f^k(p)) < \delta$. Debido a la continuidad de la función φ, para todo $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$\Big| \varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(p)) \Big| < \varepsilon \quad \text{para todo } k \geq n_0.$$

De esta forma, para todo $k \geq n_0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\left| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(p)) \right| &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Big| \varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(p)) \Big| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n-1} \Big| \varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(p)) \Big| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n_0-1} \Big| \varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(p)) \Big| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} n\varepsilon + O\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

■

Retomando la prueba del lema, tenemos que

$$\left|\lim_{n\to\infty}\int\varphi\,d\mu_n(x))-\int\varphi\,d\mu\right|\leq\left|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(f^k(p))-\int\varphi\,d\mu\right|$$
$$+\left|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(f^k(x))-\varphi(f^k(p))\right|<2\varepsilon.$$

Por lo tanto, $\mu_n(x)\to\mu$ cuando $n\to\infty$, lo que significa que $x\in\beta_f(\mu)$. Así, hemos demostrado que $M\subset\beta_f(\mu)$. Al tomar la clausura, concluimos que $M\subset\overline{\beta_f(\mu)}$. Esto finaliza la prueba del lema. ■

Observación 6. Dado que M es un espacio métrico compacto, por el Teorema Ergódico de Birkhoff (ver Teorema 1.5), tenemos que si la medida $\mu\in\mathcal{M}_e(M)$, entonces $\beta_f(\mu)\neq\emptyset$ y $\mu(\beta_f(\mu))=1$.

Proposición 2.10. *Sea M un espacio métrico compacto separable y $f:M\to M$ una aplicación continua. Sí $M_0=\{p\in M:\overline{W^s(p)}=M\}$, entonces existe un conjunto residual $R\subset M$ tal que*

$$\mathcal{V}_f(x)\supset\{\mu\in\mathcal{M}_1(M):\beta_f(\mu)\cap M_0\neq\emptyset\}\supset\{\mu\in\mathcal{M}_e(M):\mu(M_0)>0\}$$

para todo $x\in R$.

Demostración. Primero mostremos la primera inclusión. Sea $\mu\in\mathcal{M}_1(M)$ tal que $\beta_f(\mu)\cap M_0\neq\emptyset$. Dado $r>0$ y $n\in\mathbb{N}$, definimos

$$V(r,n)=\{x\in\beta_f(\mu):\quad d(\mu_m(x),\mu)<r\quad\text{para todo}\quad m>n\}.$$

Luego, tenemos una sucesión creciente de conjuntos $V(r,1)\subset V(r,2)\subset V(r,3)\subset\ldots$, y además

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V(r,n)=\beta_f(\mu).$$

Dado que $\beta_f(\mu)\cap M_0\neq\emptyset$, por el Lema 2.9 tenemos que $\beta_f(\mu)$ es densa en M.

Claim. *Dado $t\in\mathbb{N}$, existe un $n(t)\geq t$ tal que $V(r,n(t))$ es un conjunto $1/t$-denso.*

Demostración. Dado que M es compacto, existe una subcobertura finita de bolas tal que

$$M = \bigcup_{i=0}^{k} B_{1/2t}(x_i).$$

Entonces para todo $z \in M$ existe i tal que $d(z, x_i) < 1/2t$. Luego, como $\beta_f(\mu)$ es densa en M tenemos que $B_{1/2t}(x_i) \cap \beta_f(\mu) \neq \emptyset$. Es decir, existe un $y \in B_{1/2t}(x_i) \cap \beta_f(\mu)$ tal que

$$d(y_{x_i}, x_i) < \frac{1}{2t} \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, k. \tag{2.4}$$

Ahora, como $y_{x_i} \in \beta_f(\mu)$ existe un $n_i(t)$ tal que $y_{x_i} \in V(r, n_i(t))$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Definimos $n(t) = \text{máx}_i(n_i(t))$. Entonces $y_{x_i} \in V(r, n(t))$. Por lo tanto, para todo $z \in M$ tenemos que

$$d(z, y_{x_i}) < d(z, x_i) + d(y_{x_i}, x_i) < 2\frac{1}{2t} = \frac{1}{t}.$$

Esto implica que existe una bola de radio $1/t$ del conjunto $V(r, n(t))$ que cubre todo el espacio M, es decir,

$$B_{1/t}(V(r, n(t))) = \bigcup_{y \in V(r,n(t))} B_{1/t}(y) = M. \qquad \blacksquare$$

Como M es separable y $V(r, n(t))$ es denso, entonces $V(r, n(t))$ también es separable. Esto implica que $V(r, n(t))$ admite un subconjunto $1/t$-denso numerable

$$V'(r, n(t)) \subset V(r, n(t)) \quad \text{tal que} \quad B_{1/t}\Big(V'(r, n(t))\Big) = M.$$

En otras palabras, el conjunto $V'(r, n(t))$ es un subconjunto numerable y denso de $V(r, n(t))$, y cubre todo el espacio métrico M con bolas abiertas de radio $1/t$ alrededor de sus elementos. Dado un punto $y \in V'(r, n(t))$, como f es continua, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $d(\mu_n(x), \mu) < r$ para todo $x \in B_\varepsilon(y)$. Definamos

$$R_r(m) = \bigcup_{t \geq m} \bigcup_{y \in V'(r,n(t))} B_\varepsilon(y).$$

Observamos que $R_r(m)$ es abierto y denso, dado que $V'(r, n(t))$ es abierto y $1/t$-denso. Luego, para todo $x \in R_r(m)$, se tiene que $d(\mu_n(x), \mu) < r$. Como $R_r(m)$ es abierto y denso, el conjunto

$$R_r = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} R_r(m) \tag{2.5}$$

es residual y para todo $x \in R_r$ existe una sucesión $l_j \to \infty$ tal que $d(\mu_{l_j}(x), \mu) < r$. Tomando $r = 1/n$ definimos $R(\mu) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_{1/n}$. Luego, $R(\mu)$ es residual y $\mu \in \mathcal{V}_f(x)$ para todo $x \in R(\mu)$.

Ahora refinemos el conjunto residual para que no dependa de ninguna medida. Tomamos un subconjunto numerable denso

$$\{\mu^1, \mu^2 \dots\} \subset \{\mu \in \mathcal{M}_1(M) : \beta_f(\mu) \cap M_0 \neq \emptyset\}$$

y definimos $R = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R(\mu^n)$. Por lo tanto, R es un conjunto residual. Entonces para todo $x \in R$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu^n \in \mathcal{V}_f(x)$.

A continuación, demostraremos la segunda inclusión. Supongamos que μ es un elemento de $\mathcal{M}_e(M)$ con $\mu(M_0) > 0$. Dado que μ es ergódica, por la Observación 6 se cumple que $\mu(\beta_f(\mu)) = 1$. De este modo, tenemos que que $\mu(M_0 \cap \beta_f(\mu)) > 0$, lo cual implica que $M_0 \cap \beta_f(\mu) \neq \emptyset$. Con esto, culminamos la demostración. ■

En Teoría Ergódica (ver Apéndice B.2), una aplicación $f : M \to M$ es denominada únicamente ergódica si existe una única medida de probabilidad invariante por f. En este contexto, el siguiente teorema establece una relación entre la transitividad y la unicidad ergódica de f para mostrar que existen puntos con comportamiento histórico.

Teorema 2.11. *Sea M un espacio métrico compacto y $f : M \to M$ una aplicación continua. Si f es fuertemente transitiva, entonces f es únicamente ergódica o los puntos genéricos de M tienen un comportamiento histórico.*

Demostración. Como f es fuertemente transitivo por la Observación 5 y la Proposición 2.8 implica que para todo $x \in M$ se tiene que $\overline{\mathcal{O}(x)} = M$. Luego, se tiene que $\overline{W^s(x)} = M$ para todo $x \in M$. Ahora en la Proposición 2.10 tenemos que $M_0 = M$.

Dado que M es un conjunto compacto y f es continua, existe por lo menos una medida invariante por f (Teorema B.16). Si el sistema es únicamente ergódico, es decir, solo existe una medida μ invariante, tendremos que $\mathcal{V}_f(x) = \{\mu\}$. Por otro lado, sí existen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in \mathcal{M}_1(M)$ medidas invariantes tal que $\mathcal{V}_f(x) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\}$. Por la Proposición 2.10 tendremos que

$$\beta_f(\mu_i) \cap M \neq \emptyset \quad \text{para todo i=1,\ldots k.}$$

Por lo tanto, la media $\mu_n(x)$ apoyada en la órbita $\mathcal{O}(x)$ definida en (1.3) tiene k puntos de acumulación. Esto implica que los puntos genéricos tienen comportamiento histórico. ■

El siguiente ejemplo fue dado por Furstemberg en [7]. En este ejemplo analizamos un difeomorfismo fuertemente transitivo, el cual no es únicamente ergódico. Por lo tanto, podemos afirmar gracias al Teorema 2.11 que posee comportamiento histórico.

Ejemplo 7. Sea $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ un difeomorfismo minimal en el toro $\mathbb{T}^2$, con una medida de Lebesgue invariante pero no ergódica. Como f es minimal f^{-1} también lo es, luego $\omega_f(x) = \omega_{f^{-1}}(x) = \mathbb{T}^2$. Entonces f es fuertemente transitivo y no es únicamente ergódico. Luego, por el Teorema 2.11 tenemos que las órbitas tienen comportamiento histórico. Es decir, para todo punto $x \in \mathbb{T}^2$ si consideramos un observable, $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ tendremos

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) = \max \left\{ \int \varphi d\mu; \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{T}^2) \right\}$$

genéricamente en $\mathbb{T}^2$.

El siguiente resultado muestra que existen otros tipos de sistemas dinámicos, los cuales también presentan comportamiento histórico genéricamente.

Definición 2.12. Sea M un espacio métrico compacto y $f : M \to M$. Decimos que f es fuertemente u-transitiva en un abierto $U \subset M$, si

$$W^s\left(\mathcal{O}^-(x)\right) \supset U \quad \text{para todo ponto } x \in U$$

Proposición 2.13. *Toda aplicación $f : M \to M$ fuertemente transitiva es fuertemente u-transitiva*

Demostración. Como f es fuertemente transitiva en $U \subset M$, tenemos que $\overline{\mathcal{O}^-(x)} \supset U$ para todo $x \in U$. Luego

$$\mathcal{O}^-(x) \subset \mathcal{O}^-(W^s(x)) = W^s(\mathcal{O}^-(x)).$$

Considerando la clausura, tenemos que $U \subset \overline{\mathcal{O}^-(x)} \subset \overline{W^s(\mathcal{O}^-(x))}$ para todo $x \in U$. Por lo tanto f es fuertemente u-transitiva en U. ■

Teorema 2.14. *Sea M un espacio métrico compacto y $f : M \to M$ una función continua. Si f es fuertemente u-transitiva, entonces f es únicamente ergódica o los puntos genéricos de M tienen un comportamiento histórico.*

Demostración. Como f es fuertemente u-transitiva se tiene que $\overline{W^s(x)} = M$ para todo $x \in M$. Ahora en la Proposición 2.10 tenemos que $M_0 = M$.

Dado que M es un conjunto compacto y f es continua, existe por lo menos una medida invariante por f (Teorema B.16). Si el sistema es únicamente ergódico, es decir, solo existe una medida μ invariante, tendremos que $\mathcal{V}_f(x) = \{\mu\}$. Por otro lado, sí existen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in \mathcal{M}_1(M)$ medidas invariantes tal que $\mathcal{V}_f(x) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\}$. Por la Proposición 2.10 tendremos que

$$\beta_f(\mu_i) \cap M \neq \emptyset \quad \text{para todo i=1,\dots k.}$$

Por lo tanto, la media $\mu_n(x)$ apoyada en la órbita $\mathcal{O}(x)$ definida en (1.3) tiene k puntos de acumulación. Esto implica que los puntos genéricos tienen comportamiento histórico. ■

Lema 2.15. *Sea M un espacio de Baire y $f : M \to M$ medible. Se $\overline{W^s(x)} = M$ para todo $x \in M$, entonces $W^s(U) = M$ para todo conjunto medible $U \subset M$. Además, f es fuertemente u-transitivo*

Demostración. Sea U un conjunto medible, entonces es residual en algún conjunto abierto $A \subset M$. Es decir,

$$U \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

donde A_n son abiertos densos de A. Dado $x \in M$ tenemos que $\overline{W^s(x)} = M$, entonces $W^s(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in A_n \cap W^s(x)$ tal que $W^s(x) = W^s(a_n) \subset W^s(A_n)$ para todo $x \in M$. Por lo tanto, $W^s(A_n) = M$. Luego,

$$W^s(U) \supset W^s\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W^s(A_n) = M.$$

Así, tenemos que $W^s(U) = M$. Luego f es fuertemente u-transitiva en todo M ■

Corolario 2.15.1. *Sea M un espacio métrico compacto y $f : M \to M$ una función continua. Si $\overline{W^s(x)} = M$ para cada $x \in M$ entonces f es únicamente ergódica o los puntos genéricos de M tienen comportamiento histórico.*

Demostración. Tenemos que $\overline{W^s(x)} = M$ para todo punto $x \in M$. Entonces por el Lema 2.15 f es fuertemente u-transitiva. Por el Teorema 2.14 se concluye que los puntos genéricos de M tienen comportamiento histórico. ∎

Conclusiones

1. El comportamiento predecible de las órbitas es estable respecto a perturbaciones. La propiedad de estabilidad se pierde el comportamiento histórico. Esto fue estudiado por Ruelle y Takens, este último formuló el problema de estabilidad. A la postre fue llamado "Último problema de Takens"sobre la existencia de clases de funciones y conjuntos grandes de puntos con comportamiento histórico.

2. Establecimos una relación fundamental entre la densidad y la residualidad del comportamiento histórico. Mostramos que el conjunto de puntos con comportamiento histórico, ya sea para un observable específico o en general, es denso en el espacio si y solo si es residual. Esto significa que si un conjunto de puntos con comportamiento histórico es lo suficientemente grande como para ser denso, entonces también es lo suficientemente grande como para ser residual.

3. El comportamiento histórico es una propiedad genérica en sistemas dinámicos. Mostramos que en diversos casos, como atractores hiperbólicos y conjuntos hiperbólicos, existen puntos con comportamiento histórico en un conjunto residual.

4. Mostramos que las clases homoclínicas de puntos homoclínicos transversales contienen un conjunto residual de puntos irregulares. Esto extiende la noción de comportamiento histórico más allá de atractores y conjuntos hiperbólicos.

5. La abundancia de comportamiento histórico, también se presenta en la dinámica topológica. Esto se refiere a que ciertas aplicaciones con propiedades exclusivamente topológicas, como la transitividad, transitividad fuerte y la u-transitividad, presentan comportamiento histórico. En estas, podemos caracterizar el comportamiento histórico de las órbitas genéricas a través de medidas de probabilidad invariantes.

Mostrando que una de estas aplicaciones o es únicamente ergódica o tiene comportamiento histórico genérico.

Apéndice A

Topología

En este apéndice daremos algunos resultados de topología, los cuales son útiles para el entendimiento de los resultados presentados en los capítulos anteriores. Será de vital importancia la definición de conjunto residual. Este resultado nos brindará ver que los puntos con comportamientos históricos son grandes topológicamente. La mayoría de resultados presentados solo serán enunciados, las demostraciones pueden ser encontradas en [13][6]

A.1. Espacios de Baire

Definición A.1. Dado un subconjunto A de un espacio topológico M, se define:

- El interior de A, $\text{Int}(A)$ como la unión de todos los subconjuntos abiertos contenidos en A.
- La clausura de A, $\overline{A}$ como la intersección de todos los subconjuntos cerrados que contienen a A.

Definición A.2. Un subconjunto A de un espacio M se dice que es denso en M si $\overline{A} = M$.

Definición A.3. Un conjunto $A \subset M$ tiene interior vació cuando A no contiene a ningún subconjunto abierto distinto del vacío.

Observación 7. Equivalentemente, podemos decir que A tiene interior vació si todo punto de A es un punto límite de $\overline{A}$. Es decir, A tiene interior vació si $\overline{A}$ es denso en M

Definición A.4. Sean M un espacio topológico y $A \subset M$. Entonces se dice que:

- A es un conjunto de *primera categoría*, si existe una familia numerable $\{A_n\}$ de subconjuntos de M tal que $A = \bigcup_n A_n$ donde cada A_n tiene interior vació.

- A es un conjunto de *segunda categoría*, si A no es la unión numerable de conjuntos con interior vació.

Definición A.5 (Baire)**.** Un conjunto M se dice que es un espacio de Baire si dada una familia numerable de conjuntos cerrados $\{F_n\}$ de M con interior vació en M. Su unión también tiene interior vació.

El siguiente lema muestra una manera alternativa de describir los espacios de Baire.

Lema A.6. *El conjunto M es un espacio de Baire si, solo si, dada una familia numerable de abiertos $\{A_n\}$ cada uno de ellos densos en M, su intersección $\bigcap A_n$ es también un conjunto denso en M.*

Teorema A.7 (Teorema de categoría de Baire)**.** *Si M es un espacio de Hausdorff compacto o un espacio métrico completo. Entonces M es un espacio de Baire.*

A.1.1. Conjuntos F_σ y G_δ

Definición A.8. Sean M un espacio topológico y $A \subset M$ no vació. Se dirá que:

- A es un conjunto F_σ en M, si existe una familia numerable $\{F_n\}$ de conjuntos cerrados en M tal que $A = \bigcup_n F_n$.

- A es un conjunto G_δ en M, si existe una familia numerable $\{A_n\}$ de conjuntos abiertos en M tal que $A = \bigcap_n A_n$.

Los conjuntos que se puedan representar como un conjunto F_σ y G_δ al mismo tiempo se les denomina ambiguos.

Ejemplo 8. Los conjuntos de números racionales e irracionales son respectivamente conjuntos F_σ y G_δ en $\mathbb{R}$

Definición A.9. Sea M un espacio topológico y $A \subset M$. Diremos que A es residual en M, si $M \setminus A$ es un conjunto de primera categoría en M.

El siguiente resultado ofrece una caracterización de los conjuntos residuales.

Proposición A.10. *Sea M un espacio topológico y $A \subset M$. El conjunto A es residual en M si y solo si existe una familia numerable $\{A_n\}$ de subconjuntos abiertos y densos en M, tal que $\bigcap_n A_n \subset A$.*

Observación 8. Todo conjunto residual en un espacio métrico completo es de segunda categoría.

A.1.2. Propiedades y equivalencias

Teorema A.11. *Sea M un espacio de Baire y $\{G_n\}$ una familia de subconjuntos G_δ-densos en M. Entonces $\bigcap_n G_n$ es un conjunto G_δ-denso en M.*

Proposición A.12. *Sea M un espacio topológico de Hausdorff. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) *M es un espacio de Baire.*

(b) *Todo conjunto de primera categoría en M tiene interior vació.*

(c) *Todo subconjunto abierto no vació en M, es de segunda categoría en M.*

(d) *Todo subconjunto residual en M, es denso en M.*

Proposición A.13. *Sea M un espacio de Baire y $A \subset M$ un subconjunto no vació. Entonces A es un conjunto residual en M sí, solo si A contiene un conjunto G_δ-denso en M.*

A.1.3. Medidas en espacios métricos

Definición A.14. Una medida boreliana μ en un espacio topológico es regular si para todo subconjunto medible B y todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto cerrado F y un abierto A tal que $F \subset B \subset A$ y $\mu(A - F) < \varepsilon$.

Proposición A.15. *Toda medida de probabilidad en un espacio métrico es regular.*

Teorema A.16 (Representación de Riesz). *Sea M un espacio métrico compacto y un funcional lineal $\Phi : C^0(M) \to \mathbb{R}$ positivo. Entonces existe una medida boreliana finita μ de M tal que*

$$\Phi(\varphi) = \int \varphi d\mu$$

para toda $\varphi \in C(M)$.Adicionalmente si $\Phi(1) = 1$, entonces μ es una medida de probabilidad.

Teorema A.17. *Si M es un espacio métrico compacto, entonces $C^0(M)$ es separable.*

Apéndice B

Sistemas Dinámicos

En este apéndice daremos algunos resultados de la teoría de sistemas dinámicos. Estos son útiles para el entendimiento de la mayoría de resultados presentados anteriormente. En la primera sección daremos algunos resultados elementales de la dinámica. Definiremos propiedades importantes de los sistemas dinámicos, las cuales nos brindan una base necesaria para las próximas secciones del apéndice. En la segunda sección veremos resultados importantes de la Teoría Ergódica. Será de gran importancia entender el teorema dado por Birkhoff. Este tiene una gran relación con el problema estudiado en la tesis. En la tercera sección veremos resultados importantes de la Dinámica Hiperbólica, los cuales son de gran relevancia para entender algunas de las respuestas afirmativas al problema planteado en la tesis. Todos los resultados serán solamente enunciados, las demostraciones pueden ser encontrados en [18][24][10]

B.1. Dinámica

Definición B.1 (Sistema dinámico)**.** Sea $\mathbb{K} = \{\mathbb{R} o \mathbb{Z}\}$ y M un espacio métrico. Un sistema dinámico es una función continua $f : M \to M$ con las siguientes propiedades:

1. Condición de valor inicial: $f^0 = Id$.

2. Propiedad de grupo: $f^{s+t} = f^s \circ f^t$ para todo $t, s \in \mathbb{K}$.

Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces el sistema dinámico es llamado continuo o flujo, en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ es un sistema dinámico discreto. Cuando la propiedad de grupo se reemplaza la propiedad de semigrupo nos conduce a la siguiente definición.

Definición B.2 (Semi-sistema dinámico)**.** Sea M un espacio métrico. Un semi-sistema dinámico es una función continua $f : M \to M$ con la propiedad de valor inicial (a) y la propiedad de semigrupo

$$f^{s+t} = f^s \circ f^t \quad \text{para todo} \quad s, t \in \mathbb{K}_0^+.$$

Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces el semi-sistema dinámico es llamado continuo o semi-flujo, en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ es un semi-sistema dinámico discreto.

Definición B.3. Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo, dado un punto $x \in M$ la órbita de x es $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{K}\}$. Podemos definir las órbitas pasadas y futuras de la siguiente manera:

- La órbita futura de x es $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) : n \geq 0\}$.
- La órbita pasada de x es $\mathcal{O}^-(x) = \{f^n(x) : n \leq 0\}$.

Definición B.4. Sea $f : M \to M$ un sistema dinámico decimos que:

- Un punto $p \in M$ se dice fijo si $f(p) = p$.
- Un punto $p \in M$ se dice periódico si existe un $k \geq 1$ tal que $f^k(p) = p$. Se llama periodo de p al $\min\left\{k \geq 1 : f^k(p) = p\right\}$.

Definición B.5. Si $f : M \to M$ es un sistema dinámico y $x \in M$, definimos el ω-límite de x como

$$\omega(x, f) = \{y \in M : \text{existe } n_k \to +\infty \text{ tal que } f^{n_k}(x) \to y\}.$$

Análogamente, se define el α-límite de x como

$$\alpha(x, f) = \{y \in M : \text{existe } n_k \to -\infty \text{ tal que } f^{n_k}(x) \to y\}$$

de ambas definiciones, podemos decir que, $\alpha(x, f) = \omega(x, f^{-1})$.

Definición B.6. Dada una transformación $f : M \to M$ se tiene que:

1. Un conjunto $A \subset M$ es invariante por f si $f^{-1}(A) = A$.

2. Una función $\phi : M \to \mathbb{R}$ es invariante por f si $\phi(f(x)) = \phi(x) \quad \forall, x \in M$

cuando f sea invertible, el conjunto $A \subset M$ será invariante si solo sí $f(A) = A$.

Proposición B.7. *Los conjuntos $\omega(x, f)$ y $\alpha(x, f)$ son conjuntos cerrados e invariantes.*

Proposición B.8. *Si $f : M \to M$ con M compacto. Entonces $\omega(x)$ no se puede descomponer en dos subconjuntos cerrados, no vacíos, disjuntos e invariantes. Es decir, si $\omega(x, f) = A \cup B$, con A y B cerrados e invariantes y $A \cap B = \emptyset$, entonces $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.*

Definición B.9. Sea $f : M \to M$ un sistema dinámico. Un punto $x \in M$ es no-errante si $\forall U$ vecindad de x, se tiene que existe $n \geq 1$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Denotamos por $\Omega(f) = \{x \in M : x \text{ es no-errante}\}$ este conjunto es llamado conjunto no errante.

Observación 9. El conjunto $\Omega(f)$ cumple las siguientes propiedades:

- $\Omega(f)$ es cerrado e invariante.
- Si p es periódico, entonces $p \in \Omega(f)$.
- Si $x \in M$, entonces $\omega(x, f) \subset \Omega(f)$ y $\alpha(x, f) \subset \Omega(f)$.

Definición B.10 (Tipos de Recurrencia)**.** Dado $f : M \to M$ un sistema dinámico se definen los siguientes conjuntos:

- El conjunto de puntos periódicos como $\text{Per}(f) = \left\{p \in M : f^k(p) = p, k \geq 1\right\}$.
- El conjunto límite de f como

$$L(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} (\omega(x, f) \cup \alpha(x, f))}.$$

Observación 10. Se satisface la siguiente relación: $\text{Per}(f) \subset L(f) \subset \Omega(f)$.

Definición B.11. Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo. Decimos que f es topológicamente mixing si dados U, V abiertos cualesquiera, existe $m > 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq m$.

B.2. Teoría Ergódica

B.2.1. Espacio de medidas invariantes

Definición B.12. Sean $(M, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. Una transformación $f : M \to M$ preserva medida si f es medible y

$$\mu(f^{-1}(B)) = \mu(B) \quad \text{para todo} \quad B \in \mathcal{B}. \tag{B.1}$$

Podemos generalizar esta idea para sistemas dinámicos continuos más conocidos como flujos (ver la Definición B.1). Consideremos $(M, \mathcal{B}, \mu)$ y un flujo $f^t : M \to M$ donde $t \in \mathbb{R}$. Una medida μ es invariante por el flujo $(f^t)_{t\in\mathbb{R}}$ si es invariante por cada una de las transformaciones f^t, es decir

$$\mu(E) = \mu(f^{-t}(E)) \quad \text{para todo conjunto } E \in M \text{ y todo } t \in \mathbb{R}. \tag{B.2}$$

La siguiente proposición muestra una manera equivalente de ver medidas invariantes usando funciones integrables.

Proposición B.13. *Sea $f : M \to M$ una transformación medible y μ una medida en M. Entonces f preserva la medida μ si, solo si para cada función $\varphi \in L^1(M, \mu)$ se tiene que $\varphi \circ f \in L^1(M, \mu)$ y*

$$\int (\varphi \circ f) d\mu = \int \varphi d\mu.$$

Daremos las siguientes notaciones

- El espacio de medidas definidas en M por

$$\mathcal{M}(M) = \{\text{medidas definidas en } M\}. \tag{B.3}$$

- El espacio de medidas de probabilidad definidas en M por

$$\mathcal{M}_1(M) = \{\mu \in \mathcal{M}(M) : \mu(M) = 1\}. \tag{B.4}$$

- El espacio de medidas invariantes por $f : M \to M$ definidas en M por

$$\mathcal{M}_f(M) = \{\mu \in \mathcal{M}_1(M) : \mu \quad \text{es invariante por } f\}. \tag{B.5}$$

En el espacio $\mathcal{M}_1(M)$ tiene propiedades topológicas, la topología definida en este espacio se denomina topología débil*. Dada una medida $\mu \in \mathcal{M}(M)$ y un conjunto de funciones continuas limitadas $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$ con $\phi_i : M \to \mathbb{R}, \forall i = 1, \ldots, N$ y $\varepsilon > 0$ se define

$$V(\mu, \Phi, \varepsilon) = \left\{ v \in \mathcal{M}(M) : \left| \int \phi_i dv - \int \phi_i d\mu \right| < \varepsilon, \forall i \right\} \tag{B.6}$$

un elemento de una base para una topología. Entonces la familia $\{V(\mu, \Phi, \epsilon), \Phi, \varepsilon\}$ es una base de vecindades de cada $\mu \in \mathcal{M}(M)$, la topología genera por esta base es la topología débil*.

Lema B.14. *Una sucesión $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\mu \in \mathcal{M}(M)$ en la topología débil* si y solo si*

$$\int \phi d\mu_n \to \int \phi d\mu \text{ para toda función continua limitada } \phi : M \to \mathbb{R}.$$

Proposición B.15. *Sea M un espacio métrico compacto, entonces el espacio $\mathcal{M}(M)$ unido a la topología débil* es compacto.*

Teorema B.16 (Krylov-Bogolubov)**.** *Sea M un espacio métrico compacto. Si la aplicación $f : M \to M$ es continua. Entonces existe por lo menos una medida de probabilidad invariante por f.*

B.2.2. Teoremas ergódicos y ergodicidad

Teorema B.17 (Ergódico de Birkhoff)**.** *Sea $f : M \to M$ una transformación medible y μ una medida finita e invariante por f. Sí $\varphi \in L^1(M, \mu)$, el limite*

$$\widetilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x))$$

existe para μ-c.t.p[1] $x \in M$. Además, $\widetilde{\varphi}$ cumple las siguientes propiedades.

[1] μ-casi todo punto.

(a) $\widetilde{\varphi}$ *es invariante por* f *en casi cualquier parte.*

(b) $\widetilde{\varphi} \in L^1(M.\mu)$ *y*

$$\int \widetilde{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu$$

Corolario B.17.1. *Si* $f : M \to M$ *es invertible, entonces las medidas temporales de cualquier función* $\varphi \in L^2(M,\mu)$ *para* f *y para* f^{-1} *coinciden en* μ*-c.t.p :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^{-1}(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f(x)) \quad \textit{en } \mu\textit{-c.t.p}$$

Definición B.18. Sea $(M, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida de probabilidad y $f : M \to M$ una transformación medible que preserva medida. Se dice que f es ergódica respecto a la medida μ, o que μ es una medida ergódica para f,si todo conjunto medible A invariante por f posee medida 0 o 1.

Los siguientes teoremas ayudan a conocer diversas maneras de definir ergodicidad.

Teorema B.19. *Sea* μ *una medida de probabilidad invariante por una transformación* $f : M \to M$ *medible. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) μ *es ergódica para* f*.*

(b) *Toda función* $\varphi : M \to \mathbb{R}$ *que sea medible e invariante por* f*, es constante en* μ*-c.t.p.*

(c) *Para toda función medible y acotada* $\varphi : M \to \mathbb{R}$ *existe el siguiente límite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) = \int \varphi d\mu \quad \mu\textit{-c.t.p } x \in M$$

Teorema B.20. *Sea* $f : M \to M$ *medible que preserva medida. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(a) f *es ergódica respecto a* μ*.*

(b) *Para todo función* $\varphi \in L^1(M,\mu)$ *se cumple que*

$$\widetilde{\varphi} = \int \varphi d\mu \quad \textit{para } \mu\textit{-c.t.p.}$$

(c) *Para toda pareja de conjuntos medibles A y B se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu(f^{-k}(A)\cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Teorema B.21. *Sea $f : M \to M$ medible que preserva una medida de probabilidad. Entonces μ es ergódica para f sí y solo si para cada conjunto medible E el tiempo medio de estadía $\tau(E,x)$ es constante en μ-c.t.p. Además en se cumple que $\tau(E,x) = \mu(E)$ en μ-c.t.p.*

Definición B.22. La transformación $f : M \to M$ es llamada únicamente ergódica si existe una única medida de probabilidad invariante por f.

Observación 11. Las medidas invariantes son extrémales por lo tanto esta medida invariante es ergódica.

Teorema B.23. *La transformación $f : M \to M$ continua en un espacio métrico compacto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) *f es únicamente ergódica.*

(b) *Para toda $\varphi \in C(M)$ y todo $x \in M$ existe el siguiente límite y es igual a una constante.*

$$\widetilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x))$$

(c) *Para toda $\varphi \in C(M)$, la sucesión de funciones continuas $\{\varphi_n\}$ definidas por*

$$\varphi_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^k(x))$$

converge uniformemente a una constante cuando $n \to \infty$

B.3. Dinámica Hiperbólica

B.3.1. Conjunto hiperbólico

En lo que sigue del capítulo M denotara una variedad. Comencemos dando la definición formal de conjunto hiperbólico.

Definición B.24. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo. Un conjunto compacto e invariante Λ se dice que es hiperbólico si para cada $x \in \Lambda$ existen subespacios $E^s(x) \subset T_xM$ y $E^u(x) \subset T_xM$ que verifican:

(a) $T_xM = E^s \oplus E^u$.

(b) $Df_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$ y $Df_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$.

(c) Existen constantes $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que

- $\|Df_x^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|$ para todo $v \in E^s$ y $n \geq 0$.
- $\|Df_x^{-n} v\| \leq C\lambda^n \|v\|$ para todo $v \in E^u$ y $n \geq 0$.

Observación 12. Si m es un entero positivo tal que $\rho = C\lambda^m < 1$, entonces la condición (b) aseguran que $Df_x|_{E^s}$ es una contracción y que $Df_x|_{E^u}$ es una expansión. La constante C toma un rol importante, ya que esta determina el número de iteradas de f que son necesarias antes de que los vectores de E^s y E^u empiece a contraerse y expandirse respectivamente.

B.3.2. Condiciones dinámicas

Teorema B.25 (Teorema de la Variedad Estable)**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo de clase C^r y Λ un conjunto hiperbólico de f. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $x \in \Lambda$ se verifica que:*

(a) $W^s_\varepsilon(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon, n \geq 0\}$ *es una subvariedad encajada C^r tal que $T_xW^s_\varepsilon(x) = E^s(x)$.*

(b) $W^s_\varepsilon(x) \subset W^s(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \to 0, n \to \infty\}$.

(c) $W^s(x) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(W^s_\varepsilon(f^n(x)))$ *es una subvariedad inmersa de clase C^r y varía continuamente con x.*

De forma análoga se tienen propiedades similares a las anteriores para $W^u(x)$ e $W^u_\varepsilon(x)$.

Teorema B.26 (Lema de inclinación o λ-lema)**.** *Sea p un punto periódico de $f : M \to M$. Sea D^u un disco compacto en $W^u(p)$. Consideremos un punto $x \in W^s(p)$ y D un disco de igual dimensión que $W^u(p)$ tal que $x \in D$ y D es transversal a $W^s(p)$ en x. Entonces,* *dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ existe $D_n \subset D$ tal que $f^n(D_n)$ es un disco $\varepsilon - C^1$ cerca de D^u.*

Definición B.27. Sea p un punto periódico hiperbólico de f (de periodo n). La clase homoclínica de p se define como

$$H(p) = \overline{W^s(\mathcal{O}(p)) \pitchfork W^u(\mathcal{O}(p))}$$

donde $\mathcal{O}(p)$ denota la órbita de p, es decir $\mathcal{O}(p) = \{p, f(p), \dots f^{n-1}(p)\}$, y

$$W^s(\mathcal{O}(p)) = \bigcup_{q \in \mathcal{O}(p)} W^s(q) \quad \text{y} \quad W^u(\mathcal{O}(p)) = \bigcup_{q \in \mathcal{O}(p)} W^u(q)$$

Aquí el símbolo $\pitchfork$ representa intersección transversal. Es decir, la clase homoclínica de p es la clausura de los puntos homoclínicos transversales (recordar Definición **??**).

Proposición B.28. *Sea p un punto periódico hiperbólico de f y $H(p)$ su clase homoclínica. Entonces $H(p) \subset \Omega(f)$ es un conjunto compacto f-invariante y transitivo.*

Definición B.29. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y $\varepsilon > 0$. Decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una $\varepsilon-$pseudo órbita para f sí

$$d(f(x_n), x_{n+1}) \leq \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Teorema B.30 (Lema de sombreado)**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y sea Λ un conjunto compacto hiperbólico. Entonces, dado $\alpha > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $\varepsilon-$pseudo órbita en Λ es α sombreada por una órbita (no necesariamente en Λ). Es decir, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \Lambda$ es una $\varepsilon-$pseudo órbita, entonces existe $y \in M$ tal que*

$$d(f^n(y), x_n) \leq \alpha \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Además, si la pseudo órbita $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es periódica, entonces la órbita de y también es periódica.

Definición B.31. Un conjunto Λ invariante para f se dice maximal invariante (o aislado) si existe un entorno compacto U de Λ tal que

$$\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U).$$

Observación 13. En las condiciones del teorema anterior, si adicionalmente Λ es un conjunto hiperbólico maximal invariante, entonces $y \in \Lambda$.

A continuación veremos algunas consecuencias interesantes de la propiedad de sombreamiento. En primer lugar, veremos que las variedades estables e inestables de un conjunto hiperbólico aislado Λ pueden ser escritas como unión de las variedades invariantes de los puntos en Λ.

Corolario B.31.1 (En fase)**.** *Sea Λ un conjunto hiperbólico maximal invariante de un difeomorfismo $f : M \to M$. Sí $x \in M$ verifica que $\omega(x) \subset \Lambda$ entonces $x \in W^s(y)$ para algún $y \in \Lambda$. Es decir,*

$$W^s(\Lambda) := \{x \in M : \omega(x) \subset \Lambda\} = \bigcup_{y\in\Lambda} W^s(y).$$

De forma análoga se tiene propiedades similares para $W^u(\Lambda) := \{x \in M : \alpha(x) \subset \Lambda\}$.

Por último, la siguiente consecuencia permite dar una definición alternativa de clase homoclínica (ver Definición B.27).

Definición B.32. Sea p un periódico hiperbólico. Decimos que un punto periódico hiperbólico q esta homoclínicamente relacionado con p y escribimos $q \sim p$ si y solamente si,

$$W^s(\mathcal{O}(p)) \pitchfork W^u(\mathcal{O}(q)) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad W^s(\mathcal{O}(p)) \pitchfork W^u(\mathcal{O}(q)) \neq \emptyset.$$

Corolario B.32.1. *Si p es un punto periódico hiperbólico entonces vale que*

$$H(p) = \overline{\{q \in \operatorname{Per}(f) : q \sim p\}}.$$

Teorema B.33. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y sea Λ un conjunto hiperbólico. Entonces f es expansivo en Λ. Más aún existe una vecindad compacta U de Λ, un entorno $\mathcal{V}$ de f y $\alpha > 0$ tal que si $g \in \mathcal{V}$ entonces g es expansivo con constante de expansividad α en el maximal invariante de g en U.*

B.3.3. Descomposición espectral y estabilidad

En esta sección introducimos las siguientes clases de difeomorfismos:

Definición B.34. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo. Decimos que f es:

- Difeomorfismo de Anosov o globalmente hiperbólico si M es un conjunto hiperbólico.
- Axioma A si el conjunto no errante $\Omega(f)$ es hiperbólico y además $\Omega(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$.

Estudiaremos una descripción de la dinámica bajo condiciones de hiperbolicidad. Esta descripción fue dada por Smale en [20].

Teorema B.35 (Descomposición espectral)**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo Axioma A. Entonces existe conjuntos compactos $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$, f-invariantes, dos a dos disjuntos y transitivos, llamados piezas básicas, tal que*

$$\Omega(f) = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_k.$$

Demostración. Como $f : M \to M$ es un difeomorfismo Axioma A, entonces $\Omega(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$. Para $p \in \mathrm{Per}(f)$ consideramos su clase homoclínica

$$H(p) = \overline{\{q \in \mathrm{Per}(f) : q \sim p\}}.$$

Ahora dados dos puntos p y q periódicos. Dado un $z \in H(p) \cap H(q)$, existen $p_n \sim p$ y $q_n \sim q$ tal que $p_n \to z$, $q_n \to z$. Luego para un n suficientemente grande se tendrá que $p_n \sim q_n$ de donde podemos deducir que $H(p) = H(q)$. Por lo tanto, dados dos puntos p, q periódicos $H(p) = H(q)$ o $H(p) \cap H(q) = \emptyset$.

Supongamos que existe una sucesión de puntos $\{p_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ periódicos tales que $H(p_n)$ son disjuntos dos a dos. Sea z un punto de acumulación de p_n, entonces para n, m suficientemente grandes tendremos que $p_n \sim p_m$, lo cual es un absurdo, pues pertenecen a clases disjuntas. Por lo tanto, existen $p_1, \ldots, p_k$ puntos periódicos tal que

$$\Omega(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)} = H(p_1) \cup \cdots \cup H(p_k), \quad H(p_i) \cap H(p_j) = \emptyset \quad \text{si } i \neq j.$$

Es decir que hay a lo sumo una cantidad finita de clases homoclínicas disjuntas. Por la Proposición B.28, se tiene que la descomposición buscada $\Lambda_i = H(p_i)$ en conjuntos compactos, f-invariantes y transitivos. ■

Lema B.36. *Sea Λ un conjunto básico hiperbólico. Entonces existe $k > 0$ tal que para cualquier punto $z \in \Lambda$ se tiene que*

$$\overline{W^s(z) \cup \cdots \cup W^s(f^k(z))} = \overline{W^s(\Lambda)} \supset \Lambda.$$

Definición B.37. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo. Decimos que f es C^r-estructuralmente estable si existe un entorno $\mathcal{V}(f) \subset \mathrm{Diff}^r(M)$ tal que si $g \in \mathcal{V}(f)$ entonces existe un homeomorfismo $h : M \to M$ tal que $h \circ f = g \circ h$.

Teorema B.38. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y Λ un conjunto hiperbólico aislado. Entonces, existe una vecindad compacta U de Λ (así que Λ es el conjunto maximal invariante de f en U) y un entorno $\mathcal{V}$ de f tal que para todo $g \in \mathcal{V}$ existe un homeomorfismo $h : \Lambda_g \to \Lambda_f$ tal que $h \circ g = f \circ h$ donde Λ_g denota el conjunto maximal invariante de g en U. En particular, si f es un difeomorfismo de Anosov obtenemos que es C^1-estructuralmente estable.*

El resultado anterior de C^1-estabilidad también es cierto para difeomorfismos Axioma A con la propiedad de *transversalidad fuerte*. Esto es, así que las variedades invariantes de cualquier par de puntos distintos $x, y \in \Omega(f)$ se interceptan transversalmente. Observe que trivialmente los difeomorfismos de Anosov son difeomorfismos Axioma A con la propiedad de transversalidad fuerte. Este resultado generalizando el teorema anterior para difeomorfismos Axioma A con la propiedad de transversalidad fuerte fue probado por Robinson en [16, 17]. También vale el siguiente recíproco probado por Mañe en [12]. Concretamente, Mañe mostró que todo difeomorfismo de una variedad compacta C^1-estructuralmente estable es un difeomorfismo Axioma A (y satisface la propiedad de transversalidad fuerte). Juntando ambos resultados probados por Robinson y Mañe obtenemos la siguiente caracterización:

Teorema B.39. *Un difeomorfismo $f : M \to M$ es C^1 estructuralmente estable si y solamente si f es Axioma A y satisface la propiedad de transversalidad fuerte.*

Bibliografía

[1] Flavio Abdenur, Christian Bonatti y Sylvain Crovisier. “Nonuniform hyperbolicity for C 1-generic diffeomorphisms”. En: *Israel J. Math.* 183.1 (2011), pág. 1.

[2] Luis Barreira y Jörg Schmeling. “Sets of “non-typical” points have full topological entropy and full Hausdorff dimension”. En: *Israel J. Math.* 116 (2000), págs. 29-70. ISSN: 0021-2172.

[3] Pablo G. Barrientos y Raul R. Chavez. *Historical behavior of skew products and arcsine laws.* Preprint, arXiv:2501.00266 [math.DS] (2024). 2024. URL: `https://arxiv.org/abs/2501.00266`.

[4] Maria Carvalho y Paulo Varandas. “Genericity of historic behavior for maps and flows”. En: *Nonlinearity* 34.10 (2021), pág. 7030.

[5] Yael Naim Dowker. “The mean and transitive points of homeomorphisms”. En: *Annals of Mathematics* (1953), págs. 123-133.

[6] Zdeneěk Froliıék. “Generalizations of the G_δ-property of complete metric spaces”. En: *Czechoslovak Mathematical Journal* 10.3 (1960), págs. 359-379.

[7] Hillel Furstenberg. “Strict ergodicity and transformation of the torus”. En: *American Journal of Mathematics* 83.4 (1961), págs. 573-601.

[8] Andrea Gaunersdorfer. “Time averages for heteroclinic attractors”. En: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 52.5 (1992), págs. 1476-1489.

[9] Mike Hurley. “On the generic nonexistence of first integrals”. En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 98.1 (1986), págs. 142-144.

[10] Anatole Katok y Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. 54. Cambridge university press, 1997.

[11] S. Kiriki y T. Soma. “Takens’ last problem and existence of non-trivial wandering domains”. En: *Adv. Math.* 306 (2017), págs. 524-588. ISSN: 0001-8708.

[12] Ricardo Mañé. “A proof of the C 1 stability conjecture”. En: *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques* 66.1 (1987), págs. 161-210.

[13] James R Munkres. *Topology.* Vol. 2. Prentice hall Upper Saddle River, 2000.

[14] Jacob Palis. “A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors”. En: *Astérisque* 261.xiiixiv (2000), págs. 335-347.

[15] Vilton Pinheiro. *Ergodic Formalism for topological Attractors and historic behavior.* 2022. arXiv: `2107.12498 [math.DS]`.

[16] Joel W Robbin. “A structural stability theorem”. En: *Annals of Mathematics* 94.3 (1971), págs. 447-493.

[17] Clark Robinson. “Structural stability of C1 diffeomorphisms”. En: *Journal of differential equations* 22.1 (1976), págs. 28-73.

[18] Clark Robinson. *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos.* CRC press, 1998.

[19] David Ruelle. “Historical behaviour in smooth dynamical systems”. En: *Global analysis of dynamical systems.* Inst. Phys., Bristol, 2001, págs. 63-66.

[20] Stephen Smale. “Differentiable dynamical systems. Bull. Amer. Math. Soc., v. 73, No 6”. En: (1967).

[21] Floris Takens. “Heteroclinic attractors: time averages and moduli of topological conjugacy”. En: *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society* 25.1 (1994), págs. 107-120.

[22] Floris Takens. “Orbits with historic behaviour, or non-existence of averages”. En: *Nonlinearity* 21.3 (2008), T33.

[23] Amin Talebi. *Statistical instability and non-statistical dynamics.* 2023. arXiv: `2012.14462 [math.DS]`.

[24] Marcelo Viana y Krerley Oliveira. *Foundations of ergodic theory.* 151. Cambridge University Press, 2016.