VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

TRABAJO FIN DE GRADO

Facultad de Matemáticas

NOTAS EN TEORÍA DE SYLOW Y HALL

Autor: Raúl Sastriques Guardiola

Director: Dr. Alexander Moretó Quintana
Realizado en: Departamento de Álgebra

Valencia, 6 de julio de 2016

Contents

Introducción

En el presente documento nos introduciremos brevemente en el estudio de los grupos finitos, en particular, en el estudio de la Teoría de Hall y Teoría de Sylow. El documento se divide en cuatro partes:

La primera parte está dividida en tres capítulos. En el primer capítulo se exponen resultados básicos de carácter general de la teoría de grupos. Este capítulo está dividido en dos secciones, en la primera sección se encuentran los resultados vistos en la carrera mientras que en la segunda sección exponemos resultados algo más específicos los cuales requeriremos en capítulos posteriores. En los siguientes capítulos introducimos los resultados básicos más importantes de la teoría de Sylow, Capítulo 2, y de la teoría de Hall, Capítulo 3.

En la segunda parte empezamos a ver como la teoría de Hall puede ser utilizada para el estudio de los grupos finitos, en particular, de los grupos resolubles los cuales llegaremos a caracterizar en términos de la teoría de Hall de dos formas distintas. En el Capítulo 4 presentamos la caracterización de los grupos resolubles en base a la existencia p'-subgrupos de Hall viendo en ambas secciones de este capítulo una demostración diferente. En el Capítulo 5 vemos otra caracterización de la resolubilidad, basada en la anterior, la cual hace uso tanto de la teoría de Hall como de la teoría de Sylow.

Con esto, nos introducimos en la segunda mitad del documento en la cual presentamos resultados más modernos de la teoría de grupos. Mientras que en las dos primeras partes se encuentran resultados clásicos que pueden encontrarse con facilidad en casi cualquier libro de teoría de grupos, los resultados de los siguientes capítulos son artículos de investigación contemporáneos, o bien, resultados más específicos que suelen omitirse al hablar de la teoría de Hall y de Sylow en líneas generales.

En la tercera parte del documento ampliamos la teoría de Hall vista con anterioridad. En el Capítulo 6 vemos como la nilpotencia de un subgrupo de Hall nos permite concluir la conjugación de tales subgrupos. En el Capítulo 7 damos una caracterización de la existencia de subgrupos de Hall nilpotentes. Por otra parte, este resultado no solo está relacionado con el capítulo anterior, sino que resulta clave para el desarrollo de los dos últimos capítulos del presente documento.

Finalmente, en la cuarta parte nos centramos en una parte concreta de la teoría de Hall: el número de π-subgrupos de Hall de un grupo G, $\nu_\pi(G)$. En el Capítulo 8, estudiamos cual es la forma de $\nu_\pi(G)$ en grupos resolubles resultando ser producto de potencias de primos congruentes a 1 módulo un primo de π. Visto esto, ampliamos en el Capítulo 9 este resultado para el número de subgrupos de Sylow en grupos finitos. En el Capítulo 10, vemos una relación de divisibilidad del número de π-subgrupos de Hall de un grupo G π-separable y el número de π-subgrupos de Hall de un subgrupo H de G, i.e., $\nu_\pi(H)$ divide a $\nu_\pi(G)$. Finalmente, en los dos últimos capítulos vemos dos condiciones suficientes para la resolubilidad de un grupo basadas en el número de subgrupos de Sylow de un grupo dando a ver de nuevo la importancia de la Teoría de Sylow y de Hall aquí presentada.

Part 1

Prerrequisitos

Introducción a Parte 1

En esta parte recordamos algunos resultados que utilizaremos a lo largo de este trabajo y que en su mayor parte han sido vistos en el grado. En el Capítulo 1 enunciamos sin demostración resultados que no hacen referencia ni a la Teoría de Sylow, ni a la de Hall, siendo por tanto resultados generales de la teoría de grupos finitos. En la primera sección de este capítulo encontramos resultados sencillos vistos en el grado mientras que en la segunda sección exponemos resultados básicos, aunque algo más concretos, los cuales serán requeridos en capítulos posteriores.

En el Capítulo 2 vemos los resultados más simples acerca de la teoría de Sylow viendo dos pruebas diferentes de la existencia de subgrupos de Sylow. Al mismo tiempo que nos introducimos esta teoría, comentaremos como los resultados expuestos permiten determinar en qué casos es posible afirmar la existencia de un subgrupo con un orden dado, nos referiremos a este hecho como al recíproco de Teorema de Lagrange. Finalmente, veremos un caso en el que el recíproco del Teorema de Lagrange falla, dando a entender la importancia de la Teoría de Sylow. En el último capítulo, Capítulo 3, presentamos la teoría de Hall en el contexto de grupos resolubles, viendo dos demostraciones del teorema de Philip Hall acerca la existencia conjugación y dominancia de los π-subgrupos de Hall.

CHAPTER 1

Resultados básicos

1.1. Resultados generales

Empezaremos esta sección con algunas definiciones básicas la cuales nos permitirán más adelante definir los conceptos de subgrupo de Sylow y de Hall.

Definición: Dado un conjunto de primos $\pi = \{p_1, .., p_n\}$, decimos que un número natural es un π-número si todos los primos que lo dividen están en π. Decimos que un número natural es un π'-número si ninguno de sus divisores están en π. En el caso el que π consta de un único primo p, escribimos p-número y p'-número.

Por otra parte, dado un número natural n, designamos por n_π a la π-parte de n, esto es, al mayor π-número que divide a n. En el caso en el que $\pi = \{p\}$ escribimos n_p y claramente no es más que la máxima potencia de p que divide a n.

Definición: Se dice que un grupo G es un π-grupo si su orden es un π-número. En el caso en el que $\pi = \{p\}$ decimos que G es un p-grupo, en tal caso $|G| = p^a,\ a \geq 1$.

El primer resultado que presentamos resulta de gran utilidad por tal de manipular la expresión de un grupo, en particular, es frecuentemente usado junto a los teoremas de isomorfía por tal de probar relaciones entre grupos cocientes.

Teorema 1.1 (Identidad de Dedekind)**.** *Sean $H, K, L \leq G$ con $H \leq K$, entonces*

$$K \cap HL = H(K \cap L)$$

Remarcamos que el orden del producto de dos subgrupos, no es el producto de los órdenes, en general. En particular, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.2 (Fórmula del producto)**.** *Si H, K son dos conjuntos, entonces $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.*

Presentamos ahora una de las primeras herramientas, en sentido histórico, para el estudio de los grupos: Acciones de grupos sobre conjuntos.

Definición: Sea Ω un conjunto y G grupo, decimos que G actúa sobre Ω si para todo $g \in G,\ \alpha \in \Omega$ hay definida una operación $\alpha{\cdot}g \in \Omega$ tal que

(i) $\alpha{\cdot}1 = \alpha$
(ii) $(\alpha{\cdot}g){\cdot}h = \alpha{\cdot}(gh)$ para todo $g, h \in G$, $\alpha \in \Omega$

Notamos que esto es equivalente a que G se representa por permutaciones sobre Ω, i.e., la aplicación $\rho : G \to \Sigma_{|\Omega|}$ dada por $\rho(g) = \varrho_g : \Omega \to \Omega\ \varrho_g(\alpha) = \alpha{\cdot}g$ es homomorfismo de grupos. La terna (G, Ω, ρ) se le denomina acción y una vez definida la aplicación ρ, tenemos que G actúa sobre Ω mediante la ley establecida por dicha aplicación.

Abusando de notación a menudo omitiremos ϱ_g identificándola directamente con la operación $\cdot$ mediante el siguiente esquema

$$\begin{array}{rrl} \rho : & G \to & \Sigma_{|\Omega|} \\ & g \mapsto & \alpha{\cdot}g \end{array}$$

Definición: Dada la acción (G, Ω, ρ), se define el estabilizador de $\alpha \in \Omega$ como $G_\alpha = \{g \in G \mid \rho_g(\alpha) = \alpha{\cdot}g = \alpha\}$. Decimos que el conjunto $\mathcal{O}_\alpha = \{\beta \in \Omega \mid \text{existe } g \in G \text{ con } \alpha{\cdot}g = \beta\}$ es la órbita de α.

En cuanto a la teoría de representación por permutaciones, uno de los resultados más elementales es el conocido como principio fundamental del conteo, o también llamado Teorema de la órbita.

Teorema 1.3 (Teorema de la órbita)**.** *Si G actúa sobre Ω y $\alpha \in \Omega$, entonces G_α es un subgrupo de G tal que $[G : G_\alpha] = |\mathcal{O}_\alpha|$.*

Corolario 1.4 (Ecuación de Clases)**.** *Si G es un grupo finito y $\{C_1, C_2, ..., C_k\}$ es el conjunto de las clases de conjugación de G con más de un elemento, entonces, si $x_i \in C_i\ i = 1, ..., k$ se tiene*

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{k} |G : C_G(x_i)|.$$

Definición: Dado un grupo G, si $x, y \in G$ se define el conmutador entre x e y como $[x, y] = (yx)^{-1}(xy) = x^{-1}y^{-1}xy$; claramente $[x, y] = 1$ si y solamente si x e y conmutan. Así mismo, dado dos conjuntos H y K se define $[H, K]$ como el grupo generado por $\{h^{-1}k^{-1}hk \mid h \in H, k \in K\}$.

OBSERVACIÓN. Si X, Y son subgrupos normales de G con $X \cap Y = 1$, se tiene para todo $x \in X, y \in Y$ que el conmutador $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ pertenece a Y por ser $xyx^{-1}y^{-1} = (y)^{x^{-1}}y^{-1}$; análogamente $xyx^{-1}y^{-1} = x(x^{-1})^{y^{-1}}$ pertenece a X. Tenemos así que $xyx^{-1}y^{-1} \in X \cap Y = 1$, esto es, $xy = yx$. Así X centraliza a Y y recíprocamente.

Dado que x e y conmutan si y solamente si $[x, y] = 1$, podemos en cierta forma medir cuan abeliano es un grupo por medio de el conmutador de cada uno de los elementos del grupo. Esta idea motiva la siguiente definición.

Definición: Dado un grupo G, se define el grupo derivado de G como $G' := [G, G]$. Con esto, dado un número natural n, definimos $G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G]$. Remarcamos que de la definición G' es equivalente a ser el menor normal en G con la propiedad G/G' es abeliano.

Exponemos a continuación algunos resultados básicos acerca de grupos resolubles.

Definición: Se dice que un grupo G es resoluble si existe un número natural k tal que $G^{(k)} = 1$.

Con esto vemos que la resolubilidad mantiene de alguna forma las buenas características de los grupos abelianos. Si denotamos por $dl(G)$ al menor valor n para el cual $G^{(n)} = 1$, tenemos que $dl(G)$ es un indicador de cuan cerca está el grupo de ser abeliano, estando más cerca cuanto menor es el valor n.

El siguiente teorema nos permite concluir la resolubilidad de un grupo a partir de otros.

Teorema 1.5. *Se verifica:*

(i) *Si G es resoluble y $H \leq G$, entonces H es resoluble.*
(ii) *Si G es resoluble y $N \trianglelefteq G$, entonces G/N es resoluble.*
(iii) *Si N y G/N son resolubles, entonces G es resoluble.*

Definición: Se dice que $N \trianglelefteq G$ es normal minimal de G si no existe $1 \neq H < N$ tal que $H \trianglelefteq G$.

Dentro del estudio de los grupos resolubles la anterior definición resulta de gran importancia siendo tales subgrupos un recurso esencial en las demostraciones de resultados relacionados con la resolubilidad.

Teorema 1.6. *Si N es normal minimal de un grupo finito G, entonces $N \cong S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ con S_i grupos simples $i = 1, ..., n$.*

Definición: Se dice que un grupo G es p-elemental abeliano con p primo si G es abeliano y todo elemento es de orden p.

Uno de los recursos más usados en las demostraciones en grupos resolubles finitos consiste en considerar un subgrupo normal minimal. El siguiente corolario es así unos de los resultados más usados en este contexto.

Corolario 1.7. *Si G es un grupo resoluble y N es normal minimal de G, entonteces $N \cong C_p \times C_p \times ... \times C_p$ con p primo, asíN es p-elemental abeliano.*

Introducimos a continuación el concepto de grupo nilpotente. Definimos antes una familia de subgrupos de G la cual nos permitirá definir este concepto.

Definición: Dado un upo finito G, definimos $G^1 = G$ y recursivamente, $G^n = [G^{n-1}, G]$.

Definición: Se dice que un grupo G es nilpotente si existe un n tal que $G^n = 1$.

Notar que si G es nilpotente, entonces G es resoluble siendo falso el recíproco. Presentamos a continuación algunos resultados sobre nilpotencia en grupos finitos.

Teorema 1.8. *Si G es p-grupo entonces G es nilpotente.*

Anticipándonos al siguiente capítulo, introducimos ahora la definición de subgrupo de Sylow, dada la importancia de estos subgrupos para los grupos nilpotentes. Además, dichos subgrupos existen siempre en grupos finitos, como veremos en el siguiente capítulo.

Definición: Sea G grupo finito y p un primo divisor de su orden, decimos que un subgrupo P es un p-subgrupo de Sylow si el orden de P es p-número y $[G : P]$ es p'-número.

Teorema 1.9. *Sea G grupo finito. Son equivalentes:*

(i) *G es nilpotente.*
(ii) *Si $H < G$ entonces $H < N_G(H)$.*
(iii) *Si P es un p-subgrupo de Sylow de G, $P \trianglelefteq G$.*
(iv) *$G \cong P_1 \times P_2 \times ... \times P_k$ con P un p_i-subgrupo de Sylow de G.*

Cabe pensar que al estudiar un grupo a partir de sus subgrupos no todo subgrupo juega el mismo papel. Presentamos a continuación el concepto de subgrupo característico, los cuales son de gran relevancia para este fin.

Definición: Sea G un grupo, decimos que un subgrupo H característico de G, $H\, char\, G$, si $\alpha(H) = H$ para todo $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, i.e., H es fijado por todo automorfismo de G. En particular, si H es característico entonces $H \trianglelefteq G$.

Notamos que si $M \trianglelefteq N \trianglelefteq K$ no es cierto en general que $M \trianglelefteq K$. El siguiente resultado nos da una condición suficiente para lo anterior.

Teorema 1.10. *Si $H\, char\, K \trianglelefteq G$ entonces $H \trianglelefteq G$.*

Sin entrar en detalle observamos que el grupo derivado G' es característico de G.

Definición: Si G es grupo finito y p un primo, se define $O_p(G)$ como el mayor subgrupo normal de G de orden potencia p.

Definición: Sea G grupo finito, se define el subgrupo de Fitting de G como

$$F(G) = \prod_{p\,|\,|G|} O_p(G).$$

Algunas de las propiedades más destacables de este subgrupo son las siguientes.

Teorema 1.11. *Se verifica:*

(i) *$F(G)\, char\, G$.*
(ii) *$F(G)$ es nilpotente.*
(iii) *Si $N \trianglelefteq G$ es nilpotente, entonces $N \subseteq F(G)$.*

Definición: Se define el subgrupo de Frattini de G, $\Phi(G)$, como la intersección de todos los subgrupos maximales de G.

Teorema 1.12. *Se verifica:*

(i) $\Phi(G)\, char\, G$
(ii) $\Phi(G)$ *es nilpotente.*
(iii) *Si G es p-grupo,entonces $G/\Phi(G)$ es p-elemental abeliano.*

Introducimos ahora los conceptos de serie de composición y serie principal de un grupo.

Definición: Se dice que la familia $\{N_i\}_{i=0}^{k}$ es una *serie de composición para G* si verifican

$$1 = N_0 \lhd N_1 \lhd ... \lhd N_{k-1} \lhd N_k = G$$

y los *factores de composición* N_{i+1}/N_i son grupos simples $i = 0, ..., n-1$.

Teorema 1.13. *Si G es un grupo finito, G posee una serie de composición.*

Ahora, tenemos las siguiente caracterización de los grupos resolubles por medio de series de composición.

Lema 1.14. *Si G es un grupo finito y $\{N_i\}_{i=0}^{k}$ es una serie de composición de G, G es resoluble si y solo si los factores de composición N_{i+1}/N_i tienen orden primo, $i = 0, ..., n-1$.*

Definición: Se dice que una familia de subgrupos normales en G $\{N_i\}_{i=0}^{k}$, es una *serie principal de G* si verifican

$$1 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq ... \subseteq N_{k-1} \subseteq N_k = G$$

y cada *factor principal* N_{i+1}/N_i es normal minimal de G/N_i.

Corolario 1.15. *Los factores principales de un grupo resoluble G son todos p-elementales abelianos para diferentes primos divisores del orden de G.*

El siguiente resultado permite hablar de factores de composición sin necesidad de dar explícitamente una serie de composición.

Teorema 1.16 (Jordan-Hölder)**.** *Dadas dos series de composición para G, el multiconjunto formado por sus factores de composición para cada una de las series es el mismo salvo isomorfismo.*

Entendemos por multiconjunto a un conjunto que admite repetición en sus elementos, así por ejemplo, en el caso de ser dos factores de composición isomorfos a C_2 encontraríamos dos veces C_2 es nuestro multiconjunto.

Remarcamos que los dos siguientes teoremas son, posiblemente, los más avanzados de este capítulo. El primero de ellos es conocido como el Teorema $p^a q^b$ de Burnside, o simplemente, Teorema de Burnside.

Teorema 1.17 (Burnside)**.** *Si $|G| = p^a q^b$ con p, q primos distintos, entonces G es resoluble.*

El siguiente teorema es uno de los resultados más generales para la existencia de complementos en un grupo.

Definición: Si G es un grupo y N, H son subgrupos de G, decimos que H es complemento para N si $H = HN$ y $H \cap N = 1$.

Teorema 1.18 (Schur-Zassenhaus)**.** *Sea G un grupo finito y sea $N \trianglelefteq G$ tal que $(|N|, |G : N|) = 1$. Si N o G/N es resoluble, entonces N es complementado en G y si K es otro complemento para N, $K = H^g$ para cierto $g \in G$.*

Matizamos que la condición N o G/N es resoluble es un recurso habitual con tal de simplificar la demostración de este teorema. Si $|G|$ es impar, por el Teorema de Feit-Thompson G es resoluble y dado que $|N|$ y $[G : N]$ son coprimos tenemos siempre que N o G/N es resoluble pudiéndose eliminar esta condición.

1.2. Otros resultados utilizados

En esta sección presentamos resultados que usaremos en el presente texto y que no han sido vistos en el grado. En el discurso de todo el documento, uno de los factores más determinantes del contenido que se expone es la clasificación de los grupos simples, la cual, debido a su complejidad, tratamos de evitar. Tenemos, pues, que todas las condiciones sobre G como resolubilidad son formas de estudiar propiedades de los grupos, evitando la clasificación de los grupos simples.

Presentamos ahora otro concepto con la misma finalidad y que es una generalización de la resolubilidad.

Definición: Se dice que un grupo finito G se dice π**-**separable si existe una serie de subgrupos normales $G_0, ..., G_n$, tales que

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq ... \subseteq G_{n-1} \subseteq G_n = G$$

y los factores G_{i+1}/G_i son π-grupo o π'-grupo.

Extendiendo la noción de $O_p(G)$, para un conjunto de primos π, tenemos que en la anterior definición podemos exigir a los grupos G_i ser característicos de G.

Definición: En el caso en el que π consta de un único primo p, decimos que el grupo es p-resoluble.

Teorema 1.19. *Un grupo finito es resoluble si y solo si es π-separable para todo conjunto de primos π, divisores del orden de G. En particular, si G es resoluble, G es p-resoluble para todo primo p divisor de su orden.*

Hemos visto ciertas propiedades de los subgrupos normales minimales, así como su importancia en grupos resolubles. De forma similar, o contraria, a estos subgrupos tenemos los subgrupos maximales y normales maximales. Damos a continuación algunos resultados sobre subgrupos tales subgrupos.

Corolario 1.20. *Si G un grupo finito p-resoluble, el índice de un subgrupo maximal es p-número o bien es p'-número.*

Lema 1.21. *Si G es un grupo finito resoluble, el índice de todo subgrupo maximal es potencia de primo.*

Definición: Decimos que X es normal maximal de G si no existe un subgrupo propio $Y \lhd G$ con $X \subset Y$, i.e., G/X es simple.

Si G es resoluble así lo es el cociente G/X lo que fuerza a que G/X sea abeliano. Dado que G/X es simple, deducimos que no puede tener subgrupos propios de donde G/X es cíclico de orden primo. Notamos que si G es finito existen siempre subgrupos maximales normales.

Lema 1.22. *Si G es un grupo finito resoluble, M es normal maximal si y solo si $[G : M]$ es primo y M es normal en G.*

Lema 1.23. *Si H es un subgrupo finito de un grupo G, entonces H^x es isomorfo con H para todo $x \in G$.*

PROOF. La aplicación $\rho : H \to H^x$ dada por $\rho(h) = h^x$ es homomorfismo de grupos suprayectivo. Además, $|H| = |H^x|$ es finito y, por tanto, la aplicación es inyectiva, luego ρ es isomorfismo de grupos. □

Pese a que trataremos de evitar los grupos simples, requeriremos más adelante hacer uso de ciertos resultados, los cuales expondremos sin demostración. Presentamos ahora un resultado elemental acerca del grupo simple $\mathrm{PSL}(2,q)$.

Lema 1.24. *El orden del grupo simple $PSL(2,q) = \frac{SL(2,q)}{Z(SL(2,q))}$ es $|\mathrm{PSL}(2,q)| = \frac{q(q^2-1)}{2}$.*

PROOF. En primer lugar, hallamos el cardinal de $GL(2,q)$, el conjunto de las aplicaciones lineales biyectivas entre $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q$ y $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q$. Dada una base de $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q$, $\{v_1, v_2\}$, tenemos como posible imagen de v_1 todos los elementos de $\mathbb{Z}_q^2$ excepto el cero, esto es, $(q^2 - 1)$. Por otro lado, las posibles imágenes de v_2 excluyen tanto el cero como combinaciones lineales de v_1, teniendo el cuenta que $\mathbb{Z}_q$ tiene $q - 1$ unidades obtenemos $q^2 - (1 + q - 1) = q^2 - q$ posibles imágenes para v_2. En total, $|GL(2,q)| = (q^2 - 1)(q^2 - q) = q(q - 1)(q^2 - 1)$.

Ahora, el especial lineal $SL(2,q)$ son las matrices con determinante 1; dado que la aplicación $det : GL(2,q) \to U(\mathbb{Z}_q)$ es un homomorfismo de grupos suprayectivo con $Ker(det) = SL(2,q)$, obtenemos $|SL(2,q)| = q(q^2 - 1)$.

Finalmente, el centro del especial lineal son las matrices diagonales 2 por 2 (con determinante 1) con sus entradas iguales; así solo hay dos posibles matrices, la identidad I, y su inversa $-I$. Concluimos que $|PSL(2,q)| = \frac{|SL(2,q)|}{|Z(SL(2,q))|} = q(\frac{q^2-1}{2})$.

□

Terminamos la sección introduciendo una notación para el grupo cociente, a la cual nos referiremos como notación o convenio barra. Si G es un grupo y N un subgrupo normal, escribimos $\bar{G} = G/N$ y consideramos el homomorfismo canónico de G en $\bar{G}$ el cual asocia al elemento $g \in G$ el elemento $\bar{g} = Ng \in G/N$; si $H \leq G$ denotamos por $\bar{H}$ a la imagen de H por este homomorfismo. Además, este homomorfismo establece una biyección entre los subgrupos de $\overline{G}$ y los subgrupos de G conteniendo a N.

CHAPTER 2

Resultados sobre Sylow

Posiblemente, la forma más simple de estudiar un grupo es por medio de sus subgrupos. Es por ello que estamos interesados en el estudio de los subgrupos de Sylow, así como de Hall.

Por un lado, tenemos el Teorema de Lagrange por el cual el orden de todo subgrupo es divisor del orden del grupo. Nuestro primer objetivo es tratar de probar el recíproco de este resultado. Para ello requerimos imponer condiciones sobre el orden, pues en otro caso fallaríamos en nuestro propósito. Con esto, puede entenderse el porque de la siguiente definición.

Definición: Sea G grupo finito y p un primo divisor de su orden, decimos que un subgrupo P es un p-subgrupo de Sylow si el orden de P es p-número y $[G : P]$ es p'-número.

Si escribimos $|G| = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_n^{e_n}$ con p_i todos primos distintos, un p_i-grupo de Sylow de G es un subgrupo de G de orden exactamente $p_i^{e_i}$.

Denotamos por $\mathrm{Syl}_p(G)$ al conjunto formado por todos los p-subgrupos de Sylow de G. Con esta notación un grupo P pertenece a $\mathrm{Syl}_p(G)$ equivale a P es p-subgrupo de Sylow.

Notamos que $\mathrm{Syl}_p(G)$ puede ser vacío, siendo nuestro propósito ver que si G es finito $\mathrm{Syl}_p(G)$. Para ello, probaremos antes el siguiente resultado.

Teorema 2.1 (Cauchy)**.** *Sea G finito. Si p es un primo divisor de su orden entonces G tiene un elemento de orden p.*

PROOF. La demostración se realiza por inducción sobre el orden de G, aunque primero remarcamos que es suficiente probarlo para el caso en el que G es abeliano.

Esto es consecuencia de la ecuación de clases, Corolario 1.4; notamos que recurriendo a inducción el teorema sería cierto de existir un subgrupo propio $H < G$ tal que p no divide a $[G : H]$. Así $[G :\subset [x_i]]$ es divisible por p (recordamos que $\subset [x_i]$ es un subgrupo propio pues $|\Omega_{x_i}| > 1$). Ahora, la ecuación de clases expresada módulo p nos da

$$0 \equiv |Z(G)| \pmod{p},$$

por lo que $Z(G)$ no puede ser un subgrupo propio concluyéndose $Z(G) = G$ y G es abeliano. Tomamos H un subgrupo propio de orden lo mayor posible; ahora $H \trianglelefteq G$ y por la maximalidad de H, G/H es simple, y abeliano. Además, de darse $p \mid |H|$ por inducción H tendría un elemento de orden p y así lo haría G. Supuesto que p no divide al cardinal de H p deberá dividir al indice de H en G y por tanto $G/H \cong C_p$. En tal caso existe $1 \neq x \in G$ tal que $G/H = \langle xH \rangle$, y dado que el orden de x es divisor del orden de xH, el cual es primo, tenemos que $o(x) = p$ pues $x \neq 1$. □

Notar que este resultado en sí ya es un resultado acerca de la existencia de subgrupos con un determinado orden ya que el grupo generado por x tiene orden el primo p. Veamos ahora como usar este resultado para probar la existencia de subgrupos de Sylow.

Dado un grupo finito G, expresamos su cardinal de la forma $|G| = p^a n$ con p primo y $(p, n) = 1$. Notamos que un subgrupo P de G es p-subgrupo de Sylow si y solo si $|P| = p^a$.

Abusando de notación diremos que P es un subgrupo de Sylow sin especificar el primo. Notamos además que todo grupo admite una expresión del tipo $|G| = p^a n$ con p primo y $(p, n) = 1$ debido al teorema de factorización en números primos.

Probaremos ahora tres resultados conocidos como Teoremas de Sylow, los cuales reciben los nombres de Existencia, Conjugación y Dominancia.

Teorema 2.2 (Existencia)**.** *Si G es un grupo finito y p un primo divisor de su orden,* $\mathrm{Syl}_p(G) \neq \varnothing$.

PIMERA DEMOSTRACIÓN. La demostración es similar a la del Teorema de Cauchy, el cual requerimos ahora. Procedemos por inducción y escribimos $|G| = p^a n$ con $(p, n) = 1$. Es claro que de existir un $H < G$ de forma que p no divida a $|H|$ tendríamos el resultado por hipótesis de inducción.

Tenemos así que p divide $[G : H]$ para todo $H < G$; además, p divide $|Z(G)|$ por la ecuación de clases. Por el Teorema de Cauchy existe $x \in Z(G)$ tal que $o(x) = p$ y si denotamos por $N = \langle x \rangle$, N está contenido en $Z(G)$, de donde N es normal en G. Aplicando la hipótesis de inducción en el grupo cociente G/N tenemos existe $P/N < G/N$ con $|P/N| = p^{a-1}$, así el subgrupo P verifica $|P| = |P/N||N| = p^{a-1}p = p^a$. □

Veremos a continuación otra demostración de este teorema debida a H. Wielandt, la cual no requiere del Teorema de Cauchy; como contrapartida, esta demostración requiere del siguiente lema.

Lema 2.3. *Sean p, a, m números naturales tal que p es primo $a \geq 0$ y $m \geq 1$. Entonces*

$$\binom{p^a m}{p^a} \equiv m \pmod{p}.$$

PROOF. Una demostración de este teorema puede encontrarse en [6], Lema 1. 8. □

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN (WIELANDT). Escribimos $|G| = p^a m$ con $(p, m) = 1$; claramente p, a, m verifican las condiciones del lema anterior. Sea Ω el conjunto de todos los subconjuntos de G de cardinal p^a. Sabemos que G actúa bajo multiplicación a derecha sobre Ω y que bajo esta acción el cardinal de Ω es la suma del cardinal de las órbitas. Por el lema anterior

$$|\Omega| = \binom{p^a m}{m} \equiv m \not\equiv 0 \pmod{p},$$

de donde se deduce que alguna de las órbitas no es divisible por p, sea $\mathcal{O}$ tal órbita.

Sea ahora $X \in \mathcal{O}$, tomamos el estabilizador G_X, el cual es un subgrupo de G, y nos proponemos ver que su cardinal es p^a, por tanto, es un p-subgrupo de Sylow de G. Por el teorema de la órbita, $|\mathcal{O}| = [G : G_X]$ y dado que p no divide $|\mathcal{O}|$ deberá ser p^a divide G_X.
Por otro lado, dado $x \in X$ por ser G_X el estabilizador de X en G tenemos que $G_X x \subseteq X$ y, por tanto, $|G_X| = |G_X x| \leq |X| = p^a$ por ser $X \in \Omega$. Concluimos así que $|G_X| = p^a$ como deseábamos. □

Antes de continuar con los teoremas de dominancia y conjugación de Sylow remarcamos que pese a que la anterior demostración omita el Teorema de Cauchy, la conexión entre la existencia p-subgrupos de Sylow y elementos de orden p es estrecha, tanto es así que el Teorema de Cauchy puede darse como corolario de la Existencia de Sylow, veámoslo:

Dado que el orden de un elemento x de un p-subgrupo de Sylow debe ser potencia de p, tenemos el grupo cíclico $\langle x \rangle$ tiene un único subgrupo para cada divisor de su orden, en particular tiene un subgrupo cíclico de orden p.

Teorema 2.4 (Dominancia)**.** *Sea G grupo finito y $L \leq G$ un p-subgrupo. Si $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ entonces existe $x \in G$ tal que*

$$L \subseteq P^x.$$

En particular, todo p-subgrupo está contenido en un p-subgrupo de Sylow de G.

PROOF. Sea Ω el conjunto de clases a derecha de P en G. Sabemos que G actúa sobre Ω y, en consecuencia, así lo hace L, además $|\Omega| = [G : P]$ y $|\Omega|$ no es divisible por p. Consideramos la acción (L, Ω, ρ) definida por multiplicación a derecha; tenemos que Ω se descompone como suma de órbitas bajo esta acción, y de lo anterior deducimos que existe una órbita $\mathcal{O}$ de cardinal no divisible por p. Por el Teorema de la órbita, $|\mathcal{O}| = [L : L_\alpha]$ con $\alpha \in \Omega$, luego $|\mathcal{O}|$ divide a $|L|$ el cual es potencia de p; concluimos así que $|\mathcal{O}| = 1$ y si denotamos por Pg al único elemento de dicha órbita tenemos que

$$Pgl = Pg \text{ para todo } l \in L,$$

equivalentemente

$$glg^{-1} \in P \text{ para todo } l \in L,$$

de donde $L \subseteq g^{-1}Pg = P^g$. Además, P^g es isomorfo con P por ser ambos finitos, así P^g es p-subgrupo de Sylow conteniendo a L. □

Corolario 2.5 (Conjugación)**.** *Si G es un grupo finito y $S, L \in \mathrm{Syl}_p(G)$, entonces existe $x \in G$ tal que $S^x = L$.*

Definición: Denotamos por $\nu_p(G)$ al número de p-subgrupos de Sylow de G para un primo p.

Consecuentemente el número de p-subgrupos de Sylow de un grupo finito G es $\nu_p(G) = [G : N_G(P)]$, dado que forman una única órbita bajo la acción de conjugación sobre el conjunto $\Omega = \mathrm{Syl}_p(G)$ y $N_G(P)$ es el estabilizador de $P \in \Omega$ bajo esta acción.

Con esto $\nu_p = |\,\mathrm{Syl}_p(G)| = [G : N_G(P)]$ es p'-numero. Además $\nu_p(G) = 1$ si y solo si tiene un único p-subgrupo de Sylow normal.

Teorema 2.6. *Si G es un grupo finito y p es un número primo, entonces $\nu_p(G) \equiv 1 \,(\text{mód}\, p)$.*

PROOF. Sea $\Omega = \mathrm{Syl}_p(G) = \{P_1, ..., P_{\nu_p}\}$. Consideramos la acción (P_1, Ω, ρ) donde $\rho_x(P_i) = P_i^x$, i.e., representamos por conjugación sobre $\mathrm{Syl}_p(G)$. La longitud de la órbita de un elemento $P_i \in \Omega$ es un divisor de $|P_1|$ por el Teorema de la órbita, así, la longitud de la órbita es potencia de p. Afirmamos que $\{P_1\}$ es la única órbita de longitud, con esto el resultado esta probado sin más que descomponer Ω como suma de órbitas.

De existir otra órbita $\{P_i\}$ de longitud uno distinta de $\{P_1\}$, tendríamos que $P_1 \leq N_G(P_i)$ y dado que P_i es normal en $N_G(P_i)$, $\nu_p(N_G(P_i)) = 1$, de donde $P_i = P_1$, contradicción. $\square$

Teorema 2.7 (Argumento de Frattini)**.** *Si $N \trianglelefteq G$, N finito y $P \in \mathrm{Syl}_p(N)$ entonces $G = NN_G(P)$.*

El resultado de existencia de Sylow nos garantiza la existencia de subgrupos con orden p^a con p^a la máxima potencia de un primo p dividiendo el orden del grupo. El siguiente resultado amplía lo anterior, teniéndose la existencia de p-subgrupos con orden cualquier potencia de primo dividiendo el orden del grupo.

Teorema 2.8. *Si p es primo y P es un p-grupo, entonces existen subgrupos para todo divisor de su orden, en particular, si $|P| = p^a, a \geq 1$, existe $H \leq P$ con $|H| = p^{a-1}$ y, por tanto, $H \trianglelefteq P$.*

Dado que no es cierto que para todo divisor del orden de un grupo existe un subgrupo de orden ese divisor, vemos si n es un número para el cual falla el recíproco del Teorema de Lagrange, debe haber dos primos dividiendo a n por el teorema anterior. Damos a continuación un ejemplo de este hecho.

Afirmamos que A_4 no tiene subgrupos de orden 6. Para ver esto usaremos que A_4 no posee elementos de orden 6; con esto, es suficiente ver que si $H \leq A_4$ tiene orden 6, entonces es cíclico llegando a una contradicción.

Dado que todo subgrupo con índice 2 es normal, si denotamos por C_3 al 3-subgrupo de Sylow de H, $C_3 \trianglelefteq H$. Sabemos que existe $x, y \in H$ tal que $C_3 = \langle x \rangle$, $o(y) = 2$. Será suficiente ver que x e y conmutan, en cuyo caso el orden de xy resultará ser $3{\cdot}2$ y $H = \langle xy \rangle$.

Por un lado, $[x, y] = x^{-1}x^y \in C_3$ ya que $x^{-1}, x^y \in C_3$, el segundo por ser $C_3 \trianglelefteq H$, así. Por otro lado, teniendo en cuenta que $A_4 = C_3V$ con V 2-subgrupo de Sylow normal, $[x, y] = (y^{-1})^x y \in V$ por la dominancia de Sylow y ser $V \trianglelefteq A_4$. Así $[x, y] \in V \cap C_3 = 1$ y x e y conmutan.

Por último, presentamos sin demostración otra versión de los Teoremas de Existencia, Conjugación y Dominancia de Sylow en el contexto de las acciones de grupos sobre grupos.

Definición: Sean A y G grupos, decimos que A actúa sobre G por automorfismos si para todo $g \in G, a \in A$ tenemos definido $g^a \in G$ tal que

$g^1 = g$ para todo $g \in G$
$(g^a)^b = g^{ab}$ para todo $g \in G,\ a, b \in A$
$(gh)^a = g^a h^a$ para todo $g, h \in G,\ a \in A$

Teorema 2.9. *Sea G un grupo finito y suponer que A actúa coprimamente sobre G por automorfismos. Si p es un primo divisor del orden de G, entonces existe un $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ tal que*

(i) *P es A-invariante, $P^a = P$ para todo $a \in A$.*
(ii) *Si $Q \in \mathrm{Syl}_p(G)$ es A-invariante, existe $c \in C_G(A)$ tal que $P^c = Q$.*
(iii) *Si S en un p-subgrupo A-invariante de G existe $R \in \mathrm{Syl}_p(G)$ A-invariante tal que $S \subseteq R$.*

CHAPTER 3

Resultados sobre Hall

Si $|G| = n$ y denotamos por n_p a la p-parte de n, hemos visto que si G es finito entonces siempre existen subgrupos de orden n_p. Cabe ahora preguntarse si esto es cierto para n_π con π un conjunto de primos cualesquiera. La respuesta es negativa en general y a lo largo de este capítulo expondremos los principales resultados sobre la existencia de tales subgrupos en grupos finitos.

Definición: Sea G grupo finito y π un conjunto de primos, decimos que H es un π-subgrupo de Hall si el orden de H es π-número y $[G : P]$ es π'-número. Denotamos por $\nu_\pi(G)$ al número de π-subgrupos de Hall de un grupo G.

Teorema 3.1 (P. Hall, 1928)**.** *Sea G resoluble finito y sea π un conjunto de primos divisores del orden de G. Entonces*

(i) *G tiene π-subgrupos de Hall.*
(ii) *Dos subgrupos de Hall cualesquiera son conjugados en G.*
(iii) *Todo π-subgrupo está contenido en un π-subgrupo de Hall.*

PROOF. A lo largo de la demostración hacemos el convenio siguiente

(i) L denotará un π-subgrupo de G.
(ii) H denotará un π-subgrupo de Hall de G.
(iii) $|G| = mn$ con $m\,, n$ coprimos donde los primos que dividen a m son todos los del conjunto π, esto es, $|H| = m$.

Análogamente a las demostraciones de los Teoremas de Sylow, para probar la conjugación y la dominancia es suficiente ver que todo π-subgrupo está contenido en un conjugado de un π-subgrupo de Hall, i.e., $L \subseteq H^x$ con x un elemento de G (relación que definimos como $(ii)'$).
Es suficiente notar que la conjugación se daría por tener dos π-subgrupo de Hall el mismo orden, la dominancia viene de (ii) y $(ii)'$.

La demostración se desarrolla bajo el uso de inducción, tanto en la existencia como en el caso $(ii)'$. Como discurso de la demostración mantendremos en todos los casos a discutir el siguiente orden: primero probaremos (i) y a continuación el caso $(ii)'$.

Con tal de evitar los casos triviales suponemos $G > 1$ y $m > 1$.

Sea M normal minimal de G. Por el Corolario 1.7 M es p-elemental abeliano para cierto primo. La demostración prosigue distinguiendo según sea $p \in \pi$ o bien $p \notin \pi$.

Caso 1: M es p-elemental abeliano con $p \in \pi$. Escribimos $|M| = p^a$; así con la notación anterior

$$|G/M| = \frac{mn}{p^a} = m_1 n,$$

donde $m = m_1 p^a$. Por hipótesis de inducción G/M tiene un π-subgrupo de Hall, H/M, esto es, existe H subgrupo de G conteniendo a M tal que

$$|H/M| = m_1,$$

por tanto

$$|H| = m_1 |M| = m_1 p^a = m,$$

y H es un π-subgrupo de Hall de G.

Probada la existencia probamos ahora la relación $L \subseteq H^x$ para cierto $x \in G$. LM/M es de nuevo un π-subgrupo de G/M y aplicando la hipótesis de inducción

$$LM/M \subseteq H^x/M \ x \in G,$$

teniendo en cuenta que $L \subseteq LM$ se tiene el resultado.

Caso 2: Ahora $|M| = q^b$ con $q \notin \pi$. Escribimos

$$|G/M| = \frac{mn}{q^b} = mn_1,$$

con $n = n_1 q^b$. Requerimos distinguir ahora según sea n_1.

Caso 2A: $n_1 \neq 1$. Por inducción G/M tiene un π-subgrupo de Hall de la forma K/M con

$$|K/M| = m,$$

$$|K| = m|M| = mq^b = \frac{mn}{n_1} < mn.$$

Esto es, K contiene la π-parte de G y es de cardinal menor, por hipótesis de inducción K tiene un H π-subgrupo de Hall.
Con respecto a $(ii)'$ LM/M es π-subgrupo de G/M y por hipótesis inductiva está contenido en un conjugado de $H/M \subseteq K/M$, esto es

$$LM/M \subseteq K^x/M,$$

de donde $L^{x^{-1}} \subset K$; además, $L^{x^{-1}}$ es π-subgrupo de $K < G$, luego existe $y \in K$ tal que $(L^{x^{-1}})^y \subseteq H$, equivalentemente

$$L^z \subseteq H \text{ con } z = x^{-1}y \in G.$$

Caso 2B: $n_1 = 1$, $|G| = mq^b$. De la forma de G se deduce parte de la argumentación: escribir G como producto de dos grupos, $G = MH$, donde M es de orden q^b y H es de orden m y, por tanto, H será un π-subgrupo de Hall de G. Dado que $|G/M| = m > 1$ y N/M es normal minimal de G/M, resoluble, N/M es p-elemental abeliano con $p \in \pi$ por el Corolario 1.7. Además $|N/M| = p^a$ luego $|N| = p^a q^b$ y $N \trianglelefteq G$. Aplicando el argumento de Frattini con $P \in \mathrm{Syl}_p(N)$ se tiene

$$G = N_G(P)N.$$

Por otra parte queda claro que $N = PM$, luego $G = N_G(P)M$. Nuestra intención es ver que $N_G(P)$ es nuestro Hall. Veamos primero que es un producto directo. Sea $J = N_G(P) \cap M$, por ser M q-elemental abeliano $J \trianglelefteq M$. Además $J \trianglelefteq N_G(P)$ ya que $M \trianglelefteq G$ y $J = N_G(P) \cap M$, así

$$J \trianglelefteq N_G(P)M = G.$$

Dado que $J \subseteq M$ es normal minimal de G, tenemos que $J = 1$ o bien $J = M$; de darse el segundo caso se tendría $M \subset N_G(P)$ y $G = N_G(P)$. Dado que $P \trianglelefteq G$ existe un normal minimal S de G contenido en P de donde S es p-elemental abeliano pudiéndose aplicar el caso primero para obtener el resultado. Esto nos lleva al caso $J = 1$ y

$$mq^b = |G| = |N_G(P)M| = |N_G(P)|\,|M|,$$

teniendo en cuenta que $|M| = q^b$, $N_G(P)$ es π-subgrupo de Hall de G.

Vista la existencia veamos ahora $(ii)'$. Hemos probado que $G = HM$ con $H \cap M = 1$ y $H = N_G(P)$. Por otra parte, haciendo uso de la identidad de Dedekind

$$\begin{aligned} LM &= LM \cap G \\ &= LM \cap HM \\ &= (LM \cap H)M. \end{aligned}$$

Además, $LM \cap H$ es π-subgrupo de H y verifica

$$|LM| = |(LM \cap H)M| = \frac{|LM \cap H|\,|M|}{|LM \cap H \cap M|} = |LM \cap H|\,|M|.$$

Puesto que $H \cap M = 1$, $|LM : LM \cap H| = |M|$ y $LM \cap H$ es π-subgrupo de Hall de LM. De ser $LM < G$ terminaríamos la demostración aplicando la hipótesis de inducción. En caso de ser $LM = G$, por ser $L,\ M$ de orden coprimo $L \cap M = 1$ y

$$|G| = |L|\,|M|.$$

Dado que $|G| = mq^b$ y $|M| = q^b$ se concluye que $|L| = m$. Dado que $M \subset N$, $G = LN$ y

$$|G| = |LN| = \frac{|L||N|}{|L \cap N|},$$

$$|L \cap N| = \frac{|L|\,|N|}{|G|} = \frac{m\,p^a q^b}{mq^b} = p^a.$$

Así $L \cap N$ es un Sylow de N y por el Teorema de Conjugación de Sylow

$$L \cap N = P^x \ x \in N.$$

Dado que $N \trianglelefteq G$, $L \cap N \trianglelefteq L$ y

$$L \subseteq N_G(L \cap N) = N_G(P^x) = N_G(P^x) = N_G(P)^x = H^x.$$

$\square$

Una segunda demostración de este teorema hace uso del Teorema de Schur-Zassenhaus, Teorema 1.18. Este teorema permite simplificar la anterior demostración, en particular, la discusión realizada en el caso Caso 2 de la demostración.

Antes de probar la existencia en grupos resolubles mediante Schur-Zassenhaus hacemos un inciso sobre este teorema. Notamos que otra lectura de este teorema en términos de la teoría de Hall es la siguiente: Si G tiene un π-subgrupo de Hall normal entonces G tiene π'-subgrupos de Hall y todos estos son conjugados.

EXISTENCIA DE HALL. Procedemos por inducción y suponemos que $G > 1$. Sea M normal minimal de G y H/M un π-subgrupo de Hall de G/M, $[H : M]$ π-número y $[G : H] = [G/M : H/M]$ π'-número. Sabemos además M es p-elemental abeliano. Distinguimos casos de nuevo.

Caso 1: $p \in \pi$. Entonces

$$|H| = [G : M]|M|,$$

y H es π-subgrupo de Hall.

Caso 2: $p \notin \pi$. Así $|M|$ y $[H : M]$ son coprimos con $M \trianglelefteq H$, por el Teorema de Schur-Zassenhaus M es complementado en H por K con

$$|K| = [H : M],$$

$$[G : K] = [G : H]{\cdot}[H : K] = [G : H]|M|.$$

El primer término es π-número mientras que el segundo es π'-número ($p \notin \pi$ y $[G : H]$ es π'-número por ser H/M π-subgrupo de Hall de G/M) concluyéndose que K es π-subgrupo de Hall de G. $\square$

Tanto la conjugación como la dominancia son análogas mediante Schur-Zassenhaus y no se incluirán en el presente texto.

Si analizamos con detenimiento ambas demostraciones notamos cierta similitud, y es que en el segundo caso de ambas demostraciones se concluye la existencia de un subgrupo de G con el cardinal deseado. Así tiene sentido una tercera demostración del teorema el cual evita los principales inconvenientes de ambas: de la primera su extensión, y de la segunda, el hecho de hacer uso de Schur-Zassenhaus, el cual no es sencillo de probar. Esta tercera demostración parece innecesaria en este texto, damos sin embargo el enunciado del teorema que permite unificar, de alguna forma, ambas pruebas y que puede encontrarse en el Capítulo 8 de [5].

Teorema 3.2. *Sea* $M \trianglelefteq G$ *con* G *un grupo resoluble y suponer que* $(|M|, [G : M]) = 1$*, entonces existe* $H \subseteq G$ *tal que* $M \cap H = 1$ *y* $G = HM$*.*

Definición: Dado un conjunto de primos π, decimos que un grupo G verifica E_π si posee π-subgrupos de Hall. Decimos que G verifica C_π, si verifica E_π y todos los π-subgrupos de Hall de G son conjugados. Finalmente, decimos que G verifica D_π, si verifica C_π y todo π-subgrupo de G esta contenido en un π-subgrupo de Hall de G.

Con esta definición vemos que el resultado de Philip Hall es la demostración de D_π en grupos resolubles. Por otra parte, esto no solamente es cierto para grupos resolubles. En particular tenemos siguiente teorema.

Teorema 3.3. *Si* G *es* π*-separable,* G *verifica* D_π*.*

PROOF. Es posible seguir la argumentación las demostraciones anteriores, en particular la de Schur-Zassenhaus teniendo en cuenta que si M es normal minimal $|M|$ es π-número o π'-número. $\square$

Part 2

Caracterizaciones de Grupos resolubles

Introducción a Parte 2

En esta parte veremos como usar la teoría de Sylow y de Hall por tal de caracterizar los grupos resolubles. En el Capítulo 4 caracterizamos los grupos resolubles por medio de la teoría de Hall. Veremos en particular dos demostraciones distintas de este resultado, cada una de ellas, en una sección de este capítulo. Remarcamos que pese a ser ambas demostraciones distintas, son equivalentes, no siendo ninguna de ellas más general que la otra. Por un lado, la demostración dada en la segunda sección hace uso tanto de la teoría de Hall como de la teoría de Sylow mientras que la primera hace uso exclusivo de la teoría de Hall. En particular, ambas demostraciones hacen uso del Teorema de Burnside, pues como veremos, nuestro resultado generaliza a este teorema.

En al Capítulo 5 veremos otra caracterización de los grupos resolubles, la cual hace uso de la teoría de Hall y de Sylow vista en los anteriores capítulos. Además, esta caracterización pude verse como una generalización de la anterior, la cual requerimos ahora para su demostración. Por otra parte, la teoría de Hall y Sylow no solo nos es útil en tanto que permite probar estos resultados sino que además, tal y como veremos al final de este capítulo, nos introduce en el estudio de nuevos conceptos útiles para el estudio más general de la teoría de grupos.

CHAPTER 4

Caracterización de Philip Hall

Observamos que en ambas demostraciones del Teorema de Hall para grupos resolubles es clave el hecho de ser M normal minimal implica M es p-elemental abeliano a consecuencia de ser G *resoluble*; esto es más que anecdótico, tanto es así que se tiene la siguiente caracterización:

Teorema 4.1 (Caracterización de grupos resolubles, P. Hall 1937)**.** *Sea G finito, G es resoluble si y solamente si G tiene p'-subgrupos de Hall para todo primo p divisor del orden de G.*

Mientras que una implicación es clara, pues se trata del teorema de existencia de subgrupos de Hall, el recíproco requiere del Teorema de Burnside, Teorema 1.17.

Presentaremos dos pruebas diferentes del Teorema 4.1, la primera y más elegante presentada por M. Isaacs en [5], Capítulo 8, y debida a H. Wielandt. En segundo lugar veremos una demostración que podemos entender, de alguna forma, más representativa del álgebra, reducción al absurdo mediante contraejemplo minimal.

Antes de proceder a la demostración del teorema hacemos un inciso acerca de la importancia que tiene el resultado de Burnside con respecto a la caracterización de los grupos resolubles. Tratar de probar que si G tiene p'-subgrupos para todo primo p divisor del orden de G entonces G es resoluble, se trata en el caso en que el orden del grupo G solo tiene dos primos distintos involucrados, $|G| = p^a q^b$, en probar que G es resoluble a partir de la existencia de p-subgrupos de Hall y q-subgrupos de Hall, o lo que es lo mismo, la existencia de subgrupos de Sylow, la cual ya sabemos de antemano que está garantizada. Así nuestras hipótesis en el caso en el que $|G| = p^a q^b$ son exactamente las mismas que las de Burnside motivo por el que requerimos de dicho resultado. Remarcamos que nuestro resultado se trata de una generalización del Teorema de Burnside.

4.1. Demostración de Wielandt

Antes de la demostración de Wielandt, veremos dos resultados. Mientras que el segundo se trata de un paso previo a la demostración del teorema, el primero es de carácter mucho más general y será utilizado de nuevo más adelante.

Lema 4.2. *Sean $H, K \subseteq G$ con G grupo finito y suponer que* $([G : H], [G : K]) = 1$. *Entonces $G = HK$ y $[H : H \cap K] = [G : K]$.*

PROOF. Definimos $D = H \cap K$. Notamos que por ser $D \subseteq H$, $[G : H]$ divide a $[G : D]$, análogamente $[G : K]$ divide a $[G : D]$ y por ser $[G : H]$, $[G : K]$ coprimos deducimos que el producto $[G : H][G : K]$ divide a $[G : D]$.

Así $[G : H][G : K] \leq [G : D]$, equivalentemente

$$|G| \leq \frac{|H||K|}{|D|},$$

esto es, $G = HK$. La segunda afirmación es consecuencia de $[G : H][G : K] = [G : D]$ y es tanto valida para H como para K. □

Teorema 4.3. *Sea G un grupo finito y $H, K, L \subseteq G$. Si los indices $[G : H]$, $[G : K]$, $[G : L]$ son coprimos dos a dos y cada uno de los grupos H, K, L es resoluble, entonces G es resoluble.*

PROOF. Procedemos por inducción sobre $|G|$. Sea $N \trianglelefteq G$, consideramos H/N, K/N, L/N subgrupos de G/N los cuales son resolubles por el Teorema 1.5. Además dichos grupos siguen siendo coprimos dos a dos ya que $[G : H]$ divide a $[G/N : H/N]$, $[G : K]$ divide a $[G/N : K/N]$ y $[G : L]$ divide a $[G/N : L/N]$.

Si $N > 1$ concluimos que G/N es resoluble por hipótesis de inducción. Si además $|H| = 1$, por ser $([G : H], [G : K]) = 1$ llegamos a que $G = K$ y por tanto G resoluble.

Sin perdida de generalidad suponemos $H, K, L > 1$ y tomamos M normal minimal de H; puesto que H es resoluble, M es p-elemental abeliano para cierto primo p, y dado que $([G : K], [G : L]) = 1$, p no divide a uno de estos indices, suponemos p no divide a $[G : K]$. Con esto, K contiene un p-subgrupo de Sylow de G y por el el teorema de dominancia de Sylow existe $g \in G$ tal que $M \subseteq K^g$.

Por otra parte, tenemos que $([G : H], [G : K^g]) = 1$; aplicando el lema anterior llegamos a que $G = HK^g$. Si $x \in G$, existen $h \in H$, $k \in K^g$ tales que $x = hk$, así $M^x = (M^h)^k = M^k \subseteq K^g$ donde la inclusión se da por ser $k \in K^g$ y $M \subset K^g$. Concluimos por tanto que todos los conjugados de M están en K^g, donde ni K ni M son triviales; además M es resoluble por ser subgrupo de H.

Tenemos así que $M^G := \prod_{g \in G} M^g \subseteq K^g$ es un subgrupo normal en G y resoluble; aplicando hipótesis de inducción, G/M^G es resoluble de donde G es resoluble por el Teorema 1.5.

$\square$

PRIMERA DEMOSTRACIÓN TEOREMA 4.1. Procedemos por inducción sobre el número de primos distintos dividiendo el orden de G. Si $n = 1$, G es p-grupo y, por tanto, nilpotente, luego resoluble. Si $n = 2$, G es resoluble por el Teorema de Burnside. Así podemos asumir que G tiene al menos tres primos distintos p, q, r dividiendo su orden.

Haciendo uso de nuestra única hipótesis, si $H,\ K,\ L$ son un p'-subgrupo, un q'-subgrupo y un r'-subgrupo de Hall de G respectivamente, entonces los índices de estos subgrupos son coprimos dos a dos en tanto que son, respectivamente, potencias de p, q y r; por tanto, es suficiente ver que dichos subgrupos son resolubles por tal de concluir el resultado por el teorema anterior.

Demostraremos que H es resoluble y de forma similar se tendrá para K, L. Dado que $|H|$ tiene la misma expresión que el cardinal de G salvo que en este no aparece el primo p, tenemos $n-1$ primos distintos dividiendo a $|H|$. Si s un primo divisor del orden de H y Q es s'-subgrupo de Hall G, los índices $[G : Q], [G : H]$ son coprimos y por el Teorema 4.2 tenemos que $[H : H \cap Q] = [G : Q] = s^c$ con s^c la máxima potencia de s dividiendo a $|G|$. Dado que s^c divide $|H|$, $H \cap Q$ es s'-subgrupo de Hall de H. Así, H tiene s'-subgrupos de Hall para cada uno de los $n-1$ primos divisores de su orden, concluimos por hipótesis de inducción que H es resoluble y por tanto G. $\square$

4.2. Segunda demostración

La siguiente demostración del Teorema 4.1, al contrario que la anterior, no requiere de un lema previo, aunque resulta interesante realizar dos pequeñas observaciones con tal de facilitar su entendimiento. Esta demostración puede encontrarse en [13], páginas 110-111.

OBSERVACIÓN. 1. Veamos otra consecuencia del Lema 4.2. Sabemos que si H, K son subgrupos de G con índices coprimos, $G = HK$ y $[H : H \cap K] = [G : K]$. Además, afirmamos ahora que $[G : H \cap K] = [G : K][G : H]$; sin más que recurrir a las expresiones anteriores, vemos que

$$\begin{aligned}[G:K][G:H] &= [H:H\cap K][K:H\cap K] = \frac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|^2} \\ &= \frac{|G|}{|H\cap K|} = [G:H\cap K].\end{aligned}$$

2. Si Q es un p-subgrupo normal de G grupo finito, entonces $Q \subseteq P$ para cierto $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, por la conjugación de Sylow, $Q = Q^x \subseteq P^x$ para todo $x \in G$, de donde $Q \subseteq \cap_{P\in \mathrm{Syl}_p(G)} P$; en particular Q está contenido en cada p-subgrupo de Sylow de G.

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN TEOREMA 4.1. Procedemos por inducción sobre $|G|$. Suponer que el resultado es falso y sea G contraejemplo minimal, i.e., G no resoluble grupo con menor cardinal entre todos los contraejemplos.

Si G es no simple, existe un subgrupo normal de G, N, no trivial. Si H es un p'-subgrupo de Hall de G con p primo, tenemos que $N \cap H$ es un p'-subgrupo de Hall de N; de igual forma HN/N es un p'-subgrupo de Hall de G/N; dado que en ambos casos N, G/N son de orden menor que G (contraejemplo minimal), tenemos que tanto N como G/N son resolubles, luego G es también resoluble, en contra de la hipótesis.

Tenemos así que G es simple. Escribimos $|G| = p_1^{a_1} p_2^{a2} \dots p_{n-1}^{a_{n-1}} p_n^{a_n}$ donde los p_i son todos primos distintos y $a_i > 0$ para todo i. Si denotamos por H_i a un p_i'-subgrupo de G y $D = H_3 \cap H_4 \cap \dots \cap H_n$, entonces $[G : H_i] = p_i^{a_i}$ y $[G : D] = \prod_{i=3}^n p_i^{a_i}$ por la observación primera. Así $|D| = p_1^{a_1} p_2^{a_2}$ y D será resoluble por el Teorema de Burnside. Tiene sentido así considerar N normal minimal de D, el cual será además p_i-elemental abeliano (tomamos $i = 1$).

De nuevo por la primera observación tenemos que $[G : D \cap H_2] = \prod_{i=2}^n p_i^{a_i}$, de donde $|D \cap H_2| = p_1^{a_1}$ y $D \cap H_2$ es un p_1-subgrupo de Sylow de D. Por la segunda observación $N \leq D \cap H_2$, en particular $N \leq H_2$. Realizando lo mismo con H_1 llegamos a que $|D \cap H_1| = p_2^{a_2}$ y la intersección $D \cap H_2 \cap H_1$ debe ser trivial ya que divide a p_1 y a p_2; con todo lo anterior llegamos a que $G = H_2(D \cap H_1)$. Haciendo uso de la nueva expresión de G, si $g \in G$ podemos encontrar $h \in H_2$ y $d \in D \cap H_1$ tales que $g = hd$. Si $x \in N$, usando su normalidad en $D \cap H_1$, $gxg^{-1} = hdxd^{-1}h = hxh^{-1}$ el cual sigue perteneciendo a H_2. Tenemos así que $N^G := \prod_{g\in G} N^g \subseteq H_2$ es un subgrupo normal de G no trivial, absurdo. □

CHAPTER 5

Caracterización mediante bases y sistemas de Sylow

En este capítulo veremos una segunda caracterización de los grupos resolubles finitos basada en la caracterización ya vista y que permite ver a los grupos resolubles y a sus subgrupos de Hall como producto de sus subgrupos de Sylow.

Definición: Sea G un grupo finito con $|G| = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$.

(i) Se dice que una colección $\{H_1, \ldots, H_n\}$ es un sistema de Sylow para G si cada H_i es un p_i'-subgrupo de Hall de G.

(ii) Se dice que una colección $\{P_1, \ldots, P_n\}$ es una base de Sylow de G si cada P_i es un p_i-subgrupo de Sylow de G y se tiene

$$P_i P_j = P_j P_i \text{ para todo } i, j \text{ con } i \neq j$$

La caracterización dada en el anterior capítulo puede ser enunciada ahora como: G es resoluble si y solo si G posee un sistema de Sylow. Ahora, caracterizaremos la resolubilidad mediante la existencia de bases de Sylow.

Teorema 5.1. *Sea G finito, G es resoluble si y solo si posee una base de Sylow.*

PROOF. Una implicación es clara, pues si G tiene una base de Sylow, $\{P_i\}_{i=1}^n$, el producto $H_j = \prod_{i \neq j} P_i$ es grupo y su cardinal es $|G|/|P_j|$, esto es, H_j es p_j'-subgrupo de Hall.

Si G es resoluble, consideramos el sistema de Sylow $\{H_j\}_{j=1}^n$, sabemos que $\cap_{i=1, i\neq r_1}^n H_i$ es un p_{r_1}'-subgrupo de Hall. Además, podemos generalizar este hecho de modo que

$$\cap_{i=1, i\neq \{r_1,\ldots,r_k\}}^n H_i \text{ es un } \pi\text{-subgrupo de Hall con } \pi = \{p_1, \ldots, p_n\} \backslash \{p_{r_1}, \ldots, p_{r_k}\}.$$

La demostración de este resultado, se sigue fácilmente por inducción, haciendo uso de la fórmula $[G : H \cap K] = [G : K][G : H]$ si $[G : K]$ y $[G : H]$ son coprimos.

Por otra parte, considerando $P_{r_1} = \cap_{i=1, i\neq r_1}^{n} H_i$, $1 \leq r_1 \leq n$ queda claro que P_{r_1} es un p_{r_1}-subgrupo de Sylow de G. Si $r_1 \neq r_2$ y consideramos el producto $|P_{r_1}P_{r_2}| = \frac{|P_{r_1}||P_{r_2}|}{|P_{r_1}\cap P_{r_2}|}$ tenemos que por ser p_{r_1}, p_{r_2} primos distintos su intersección es trivial, y dado que la fórmula es cierta aun no siendo el producto subgrupo de G podemos afirmar que $|P_{r_1}P_{r_2}|$ es un π-número con $\pi = \{p_{r_1}, p_{r_2}\}$. Además, dicho producto da lugar a un π-subgrupo de Hall. Observar que $X = \cap_{i=1, i\neq r_1, r_2}^{n} H_i$ es por la observación anterior un π-subgrupo de Hall con $\pi = \{p_{r_1}, p_{r_2}\}$. Dado que $P_{r_1},\ P_{r_2} \subseteq X$ y el producto debe estar contenido en X, ambos deben coincidir concluyéndose que $P_{r_1}P_{r_2}$ es grupo. $\square$

OBSERVACIÓN. Notamos que si H o K son subgrupos normales, entonces $HK = KH$ y el producto HK es grupo. Si G es un grupo nilpotente con $|G| = p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_n^{e_n}$ y $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ es una familia con $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$, entonces $G = P_1P_2...P_n$ ya que dicho producto es grupo y su orden es, por la fórmula del producto, el producto de los órdenes dado que $|P_i \cap P_j| = 1$ si $i \neq j$.

Ahora, en el caso de ser G resoluble tenemos que sigue siendo posible encontrar una familia de subgrupos de Sylow tal que el producto de ambos es grupo, dado que conmutan. Si G es un grupo resoluble, no es cierto que todo subgrupo sea normal de donde no es posible afirmar que producto de dos subgrupos de Sylow sea de nuevo subgrupo. Por otro lado, por el teorema anterior vemos que sigue siendo posible encontrar ciertos subgrupos de Sylow cuyo producto es subgrupo. Tenemos ahora el siguiente resultado.

Corolario 5.2. *Si G es un grupo finito resoluble, entonces existen $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ $i = 1, ..., n$ tal que $G = P_1...P_n$.*

En realidad es posible decir algo más: si G es un grupo con $|G| = p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_n^{e_n}$, entonces G es resoluble si y solamente si dada una familia $\{P_i\}_{i=1}^n$ con P_i un p_i-subgrupo de Sylow cualquiera, entonces $G = P_1P_2...P_n$. Este hecho puede encontrarse con más detalle en [7].

Si G es un grupo finito no resoluble cabe preguntarse si sigue siendo posible encontrar subgrupos de Sylow tal que su producto sea G, notar que no exigimos a dichos Sylows que conmuten. La respuesta es negativa, pese a que puede ampliarse este hecho a ciertos grupos no resolubles como $PGL(2, q), PGL(3, q)$ y $\mathrm{PSL}(2, q)$, no todo grupo finito puede expresarse como producto de sus subgrupos de Sylow, en particular, no es cierto para el grupo unitario $U_3(3)$ tal y como se demuestra en [4]. Por otra parte, podemos decir algo más sobre las bases de Sylow.

Definición: Decimos que dos bases $\{P_i\}_{i=1}^n, \{Q_i\}_{i=1}^n$ son conjugadas si existe $x \in G$ tal que $P_i^x = Q_i$, $i = 1, ..., n$.

Teorema 5.3. *Si G es resoluble dos bases de Sylow cualquiera son conjugadas.*

PROOF. Si $|G| = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_k^{e_k}$ denotamos por $\mathcal{P}_i$ al conjunto de p_i'-subgrupos de Hall de G, $i = 1, ..., k$, y por $\mathcal{P}$ al conjunto de todas las bases de Sylow, esto es, los elementos de $\mathcal{P}$ son secuencias $(P)_{i=1}^k$ con $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ y $P_i P_j = P_j P_i$.
La demostración se dividirá en seis pasos:

Paso 1. La aplicación $\alpha : \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \times ... \times \mathcal{P}_k \to \mathcal{P}$ dada por $\alpha(Q_1, Q_2, ..., Q_k) = (P_1, ..., P_k)$ con $P_i = \cap_{j \neq i} Q_j$ es una biyección entre el conjunto de los sistemas de Sylow y el conjunto de la bases de Sylow de G.

Paso 2. Fijado $Q_i \in \mathcal{P}_i$ se verifica $|\mathcal{P}_i| = [G : N_G(Q_i)]$, en particular el cardinal de $\mathcal{P}_i$ es potencia de p_i.

Paso 3. G actúa sobre $\mathcal{P}$ por conjugación.

Paso 4. El estabilizador de $(P_i)_{i=1}^k$ es la intersección $\cap_{j=1}^k N_G(P_j)$ la cual coincide con $\cap_{j=1}^k N_G(Q_j)$

Paso 5. $[G : \cap_{j=1}^k N_G(Q_j)] = \prod_{j=1}^k [G : N_G(Q_j)]$.

Paso 6. G actúa transitivamente sobre $\mathcal{P}$.

El Paso 6, constituye el final de la demostración, pues si G actúa transitivamente por conjugación sobre el conjunto de todas las bases de Sylow de G, $\mathcal{P}$, dos elementos cualesquiera de $\mathcal{P}$ están relacionados por medio de un cierto $g \in G$ por conjugación.

Paso 1. Probaremos que α es biyectiva construyendo su inversa.

Sabemos que si definimos $P_r = \cap_{j \neq r} Q_j$ donde Q_j son p_i'-subgrupos de Hall entonces $P_r \in \mathrm{Syl}_{p_r}(G)$ por lo que $(P_1, P_2, ..., P_k)$ forman una base de Sylow para G y α está bien definida.

Afirmamos que $P_{r_1} P_{r_2} ... P_{r_n}$ es un $\{p_{r_1}, p_{r_2}, ..., p_{r_s}\}$-subgrupo de Hall de G. Siendo claro para $n = 1$ procedemos por inducción supuesto válido para n.

Dado que $P_i P_j = P_j P_i$ para todo i, j, si denotamos por K al grupo formado por el producto $K = P_{r_1} P_{r_2} ... P_{r_n}$, aplicando la permutabilidad entre $P_{r_{r+1}}$ y cada uno de los factores de K obtenemos que $KP_{r_{n+1}} = P_{r_{n+1}} K$ de donde $P_{r_{n+1}} K$ grupo. Además, por ser $|K| = p_{r_1}^{e_{r_1}} p_{r_2}^{e_{r_2}} ... p_{r_n}^{e_{r_n}}$ coprimo con $|P_{r_{n+1}}| = p_{r_{n+1}}^{e_{r_{n+1}}}$ la intersección de ambos debe ser trivial de donde el cardinal del producto el producto de los cardinales concluyéndose el resultado.

Definimos $H_i = \prod_{j \neq i} P_j$, por lo anterior H_i es p_i'-subgrupo de Hall de G.

Definimos la aplicación $\beta : \mathcal{P} \to \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \times ... \times \mathcal{P}_k$ dada por $\beta(P_1, ..., P_k) = (H_1, ..., H_k)$ y robaremos que $\beta\alpha = 1$. Por ser $P_r = \cap_{j \neq r} Q_j, \quad P_1, ..., P_{k-1} \subseteq Q_k$ de donde $H_k = P_1 P_2 ... P_{k-1} \subseteq Q_k$; por ser Q_k, H_k p_k'-subgrupos de Hall se da la igualdad de ambos. Análogamente $H_i = Q_i$ para todo i. Así

$$\beta(P_1, ..., P_k) = (Q_1, ..., Q_k) \quad \text{con } P_i = \cap_{j \neq i} Q_j,$$

luego $\alpha\beta$ es la identidad de $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \times ... \times \mathcal{P}_k$ sobre si misma.

De forma similar, por ser $H_i = \prod_{j \neq i} P_j$ se tiene que $P_i \subseteq H_j$ para todo $j \neq i$. Así

$$P_i \subseteq \cap_{j \neq i} H_j,$$

y dado que la anterior intersección es un p_i-subgrupo de Sylow por ser H_j un p_j'-subgrupo de Hall tenemos que $P_i = \cap_{j \neq i} H_j$. Ahora

$$\beta\alpha(P_1, ..., P_k) = \alpha(H_1, ..., H_k) = (\cap_{j \neq 1} H_j, ..., \cap_{j \neq k} H_j) = (P_1, ..., P_k),$$

esto es, $\beta\alpha = 1$.

Paso 2. Si $Q_i \in \mathcal{P}_i$, por el Teorema 3.1, todos los elementos de $\mathcal{P}_i$ son de la forma Q_i^g para cierto $g \in G$. Teniendo en cuenta que el estabilizador de Q_i bajo esta acción es su normalizador, por el Teorema de la órbita tenemos

$$|\mathcal{P}_i| = [G : N_G(Q_i)] = \frac{[G : Q_i]}{|N_G(Q_i) : Q_i]},$$

de donde $\mathcal{P}_i$ es de orden potencia de p_i por la última igualdad.

Paso 3. Consideramos la acción (G, Ω, ρ) donde $\Omega = \mathcal{P}$ y ρ viene dada por $\rho(g) = \rho_g$ definida como $\rho_g(\,(P_i)_{i=1}^k\,) = (P_i^g)_{i=1}^k$. Veamos que en efecto es una acción. La aplicación está bien definida por ser $P_i^g \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ por la conjugación de Sylow. Además $\rho_1(\,(P_i)_{i=1}^k\,) = (P_i^1)_{i=1}^k = (P_i)_{i=1}^k$ de donde $\rho(1) = 1_{\Sigma_{|\Omega|}}$. Por otra parte

$$\begin{aligned}\rho_{gh}(\,(P_i)_{i=1}^k\,) &= (P_1,...,P_k)^{gh} = (P_1^{gh},...,P_k^{gh}) = ((P_1^g)^h,...,(P_k^g)^h)\\ &= \rho_h(\rho_g(\,(P_i)_{i=1}^k\,)) = (\rho_g\circ\rho_h)(\,(P_i)_{i=1}^k\,).\end{aligned}$$

luego $\rho_{gh} = \rho_g \circ \rho_h$, i.e., $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$.

Paso 4. Como anteriormente, escribimos $P_r = \cap_{j\neq r} Q_j$ donde Q_j es un p'_j-subgrupo de Hall de G. Con esto, $g \in G$ se encuentra en el estabilizador de $(P_i)_{i=1}^k$ si y solamente si normaliza a cada uno de los P_i, i.e., $g \in \cap_{i=1}^k N_G(P_i)$. Así

$$G_{(P_i)_{i=1}^k} = \cap_{i=1}^k N_G(P_i).$$

Por otra parte $Q_r = \prod_{i\neq r} P_i$; si $g \in \cap_{i=1}^k N_G(P_i)$ $P_i^g = P_i$ para todo i, luego $Q_r^g = \prod_{i\neq r} P_i^g = \prod_{i\neq r} P_j = Q_r$ y así $g \in \cap_{i=1}^k N_G(Q_i)$.

Recíprocamente si $g \in \cap_{i=1}^k N_G(Q_i)$ $Q_i^g = Q_i$ para todo i de donde $P_r^g = (\cap_{i\neq r} Q_i)^g = \cap_{i\neq r} Q_i^g = \cap_{i\neq r} Q_i = P_r$ y así $g \in \cap_{i=1}^k N_G(P_i)$. Concluimos así que $G_{(P_i)_{i=1}^k} = \cap_{i=1}^k N_G(P_i) = \cap_{i=1}^k N_G(Q_i)$.

Paso 5. Como consecuencia del Lema 4.2 vimos en una observación anterior que si H, K son subgrupos de G con indices coprimos se da la igualdad $[G : H \cap K] = [G : H][G : K]$. Nuestro apartado es ahora una simple prueba por inducción.

Supuesto cierto para n, veámoslo para $n + 1$. Si denotamos por $H = \cap_{i=1}^n N_G(Q_i)$ tenemos por hipótesis de inducción que $[G : H] = \prod_{i=1}^n [G : N_G(Q_i)]$; sabemos además que $[G : N_G(Q_i)]$ es potencia del primo p_i, de donde $[G : N_G(Q_{n+1})]$ es coprimo con $[G : H]$; aplicando la formula anterior con $K = N_G(Q_{n+1})$ llegamos a la identidad

$$[G : \cap_{i=1}^{n+1} N_G(Q_i)] = [G : H\cap K] = [G : H][G : K] = \prod_{i=1}^n [G : N_G(Q_i)][G : N_G(Q_{n+1})].$$

Paso 6. Sin más que juntar todo lo anterior

$$[G : G_{(P_i)_{i=1}^k}] = [G : \cap_{i=1}^k N_g(Q_i)] = \prod_{i=1}^k [G : N_g(Q_i)] = \prod_{i=1}^k |\mathcal{P}_i| = |\mathcal{P}_i \times ... \times \mathcal{P}_k| = |\mathcal{P}|,$$

con lo que G actúa transitivamente sobre $\mathcal{P}$. $\square$

La demostración anterior nos induce de forma natural la siguiente definición.

Definición: Sea $\{Q_1, ..., Q_k\}$ un sistema de Sylow de un grupo finito resoluble. Se define el normalizador del sistema de G como el subgrupo $N = \cap_{i=1}^k N_G(Q_i)$.

Dichos subgrupos poseen destacables propiedades en las cuales no entraremos en detalle. Presentamos sin embargo un breve resultado consecuencia de la segunda caracterización de los grupos resolubles.

Como vimos en el Paso 4 de la demostración del Teorema 5.3, si $\{P_1, ..., P_k\}$ es la base de Sylow correspondiente al sistema de Sylow $\{Q_1, ..., Q_k\}$, i.e., $P_i = \cap_{j\neq i} Q_j$, el normalizador del sistema N admite la expresión

$$N = \cap_{i=1}^k N_G(P_i).$$

Teorema 5.4. *Si G es un grupo finito y resoluble, todos los normalizadores del sistema son nilpotentes y conjugados.*

PROOF. Sea $\{P_1, ..., P_k\}$ una base de Sylow dando lugar al normalizador del sistema N.

Sabemos que N normaliza a P_i, luego $nP_i = P_i n$ para todo $n \in N$ y NP_i es grupo; además $P_i \trianglelefteq NP_i$ obteniendo

$$[N : N \cap P_i] = [NP_i : P_i] \text{ divide a } [G : P_i].$$

Con esto $N \cap P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(N)$. Además $N \cap P_i \trianglelefteq N$ concluyéndose que N es nilpotente por ser sus subgrupos de Sylow normales. Dado que las bases de Sylow de G son conjugadas, dado otro normalizador del sistema M, debe ser de la forma

$$M = \cap_{i=1}^k N_G(P_i^g),$$

dado que $N_G(P_i^g) = N_G(P_i)^g$ se concluye que $M = N^g$ como deseábamos. $\square$

Part 3

Subgrupos de Hall nilpotentes

Introducción a Parte 3

Dispuestos a ampliar nuestro conocimiento acerca de la teoría de Hall en grupos finitos, nos plantemos eliminar la condición de resolubilidad impuesta al grupo. Vemos que esto no es posible en general e introducimos la idea de ser nuestro subgrupo de estudio nilpotente. Es con esto que conseguimos probar la dominación de los π-subgrupos de Hall en el Capítulo 6 sin más que suponer la existencia de un π-subgrupo de Hall nilpotente. Posteriormente, vemos en el Capítulo 7 una caracterización de la existencia de π-subgrupos de Hall nilpotentes la cual puede aplicarse a casi cualquier grupo finito. Dado que la demostración de este resultado hace uso de la clasificación de los grupos simples, presentamos el enunciado sin demostración y a continuación adaptamos este resultado para el caso en el que el grupo es resoluble presentado una prueba de este caso.

CHAPTER 6

Teorema de Wielandt

Dado π un conjunto de primos cualquiera hemos visto que siempre se verifica D_π en grupos finitos resolubles o π-separables. Queda ahora plantearnos que sucede en el resto de casos. Como bien podemos pensar la resolubilidad es, sin ser necesaria, clave para tales hechos; así, por ejemplo, A_5 no verifica E_π para $\pi = \{2,5\}$ o $\pi = \{3,5\}$ mientras que $\mathrm{PSL}(2,11)$ verifica E_π pero no verifica C_π para $\pi = \{2,3\}$.

El caso de A_5 es sencillo. De tener un π-subgrupo de Hall, H, para $\pi = \{2,5\}$ o $\pi = \{3,5\}$, representando sobre $\Omega = \{Hx \mid x \in A_5\}$ tendríamos $A_5/\operatorname{Ker}\rho \cong \operatorname{Im}\rho \leq \Sigma_{|\Omega|}$, siendo $|\Omega| = 3$ o $|\Omega| = 2^2$ según sea π. En ambos casos debe ser $\operatorname{Ker}\rho > 1$ subgrupo propio normal. Contradicción.

El caso del grupo simple $\mathrm{PSL}(2,11)$ es más algo más complejo; una demostración de este hecho puede encontrarse en el Capítulo 3C de [6].

En el presente apartado introducimos una condición suficiente para la conjugación de los π-subgrupos de Hall en cualquier grupo finito. Evidentemente, perdiendo la condición de resolubilidad del grupo debemos imponer en nuestras hipótesis un hecho más fuerte; en este caso, basándonos en la teoría de Sylow pensamos en la nilpotencia del propio Hall. Este resultado es conocido como el Teorema de Wielandt; antes de proceder a su demostración probaremos un resultado previo.

Teorema 6.1. *Si G es un grupo finito no nilpotente tal que cada subgrupo maximal es nilpotente, entonces*

(i) *G es resoluble*
(ii) $|G| = p^m q^n$
(iii) *$G = PQ$ con $P \trianglelefteq G$ y Q cíclico.*

PROOF. (i) Sea G contraejemplo minimal. Si N es subgrupo normal propio, tanto N como G/N es resoluble por la minimalidad de G de donde G es resoluble, absurdo.

Así G es un grupo simple. Suponer que dados dos subgrupos maximales distintos de G su intersección es trivial. Si M es maximal de G, $M = N_G(M)$, y si escribimos $|G| = m$, $|M| = n$ entonces M tiene n/m conjugados, los cuales siguen siendo maximales e intersectan trivialmente. Con esto, el número de elementos no triviales proporcionados por los conjugados de M es

$$|M\backslash\{1\}|\cdot\frac{n}{m}=(m-1)\cdot\frac{n}{m}=n-\frac{n}{m}.$$

Si $m\geq 2$ tenemos que $n-\frac{n}{m}\geq\frac{n}{2}\geq\frac{n-1}{2}$; por otra parte $n-\frac{n}{m}\leq n-2<n-1$. Con todo esto llegamos a que

$$n-1>n-2\geq n-\frac{n}{m}>\frac{n}{2}\geq\frac{n-1}{m}.$$

Notar que la anterior expresión se trata de una cota del número de elementos no triviales proporcionados por la familia de maximales $\{M^g\}_{g\in G}$. Así, el número de elementos no triviales de G, $n-1$ puede escribirse como suma de las cantidades de elementos no triviales proporcionados por familias de la forma $\{M^g\}_{g\in G}$ donde M es maximal de G, ya que los elementos de la anterior familia intersectan trivialmente. Así $n-1$ es suma de ciertas cantidades estrictamente comprendidas entre $n-1$ y $\frac{n-1}{2}$, absurdo. Concluimos, por tanto, la existencia dos subgrupos maximales con intersección no trivial.

Sean $M_1\neq M_2$ maximales de G tal que su intersección es de orden lo más grande posible entre las intersecciones de todos los subgrupos maximales de G. Denotamos por $I:=M_1\cap M_2$ y por $N:=N_G(I)$. Haciendo uso de la nilpotencia de M, $I\neq N$ y $I<N\cap M_1$; por ser G simple, $N<G$ y $N\subseteq M$ para cierto maximal M de G, así

$$I\subset M\cap M_1,$$

contradiciendo la maximalidad de I.

(ii) Escribimos $|G|=p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_k^{e_k}$ y suponer $k\geq 3$. Notamos que todo subgrupo propio de G es nilpotente, ya que se encuentra conteniendo en algún maximal de G.

Por ser G resoluble, si M es subgrupo normal maximal su índice en G es primo, escribimos $[G:M]=p_i$ y sin perdida de generalidad tomamos $i=1$. Si denotamos por P_i a un p_i-subgrupo de Sylow de G y consideramos $i>1$, dado que $[G:M]=p_1$, M contiene a un $P_i\in\mathrm{Syl}_{p_i}(G)$. Por ser M nilpotente, dicho P_i es el único p_i-subgrupo de Sylow de M; por otro lado, $P_i^g\subseteq M^g=M$ para todo $g\in G$ de donde $\mathrm{Syl}_{p_i}(M)=\mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ y $P_i\trianglelefteq G$. De esta forma $H_i=P_1P_i$ es grupo y distinto de G por ser $k>3$; H_i es subgrupo propio, luego nilpotente de donde $P_1,P_i\trianglelefteq H_i$; además $P_1\cap P_i=1$, así $P_i\subseteq N_G(P_1)$ $i=1,...,k$ y $N_G(P_1)=G$ de donde todos los subgrupos de Sylow de G son normales, esto es, G nilpotente, contradicción.

(iii) Escribimos $|G| = p^a q^b$ y consideramos M normal maximal de G. Suponer que $[G : M] = q$, entonces existe un único $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $P \subseteq M$ y $P \trianglelefteq G$.

Si $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ tenemos que $G = QP$; si Q no es cíclico y $g \in Q$ tenemos que $\langle\langle g\rangle, P\rangle < G$ pues en otro caso $\langle g\rangle P = G = QP$ de donde $Q \cong \frac{\langle g\rangle P}{P} \cong \frac{\langle g\rangle}{\langle g\rangle \cap P} = \frac{\langle g\rangle}{1}$ y, por tanto, Q cíclico, absurdo. Tenemos que $\langle\langle g\rangle, P\rangle$ es un subgrupo nilpotente, pues es propio, y además $[g, x] = 1$ para todo $x \in P$ ya que $P, \langle g\rangle \trianglelefteq \langle\langle g\rangle, P\rangle$ con intersección trivial; así $[Q, P] = 1$ y $G = P \times Q$ es un grupo nilpotente, contradicción. $\square$

Teorema 6.2 (Wielandt)**.** *Si G es un grupo finito y H es un π-subgrupo de Hall nilpotente, entonces todo π-subgrupo de G está contenido en un conjugado de H, i. e, Si G tiene un π-subgrupo de Hall nilpotente entonces G verifica D_π.*

PROOF. Sea K un π-subgrupo de Hall de G distinto de H. Razonaremos por inducción sobre $|K| > 1$. La hipótesis de inducción sobre K nos dice que todo subgrupo maximal de K se encuentra contenido en algún conjugado de H, de donde obtenemos que dicho subgrupo es nilpotente.

Si K no es nilpotente, aplicando el teorema anterior obtenemos $Q \in \mathrm{Syl}_q(K)$ y $L \trianglelefteq K$ tales que $Q \cap L = 1$ y $K = QL$. En caso de ser K nilpotente vemos claramente que lo anterior sigue siendo cierto.

Escribimos $H = H_1 \times H_2$ donde H_1 es el único q-subgrupo de Sylow de H. La hipótesis de inducción nos dice ahora que $L \leq H^g = H_1^g \times H_2^g$ para cierto elemento $g \in G$. Dado que $H_1^g \cap H_2^g = 1$ debe ser $L < H_2^g$. Por la observación anterior H_1^g centraliza a $L \subseteq H_2$ de donde $\langle H_1^g, K\rangle \subseteq N_G(L)$. Dado que H_1^g es q-subgrupo de Sylow de G así como de $N_G(L)$ concluimos que existe un elemento $x \in N_G(L)$ tal que $Q \leq (H_1^g)^x$, de donde

$$K = QL = QL^x \subseteq H_1^{gx} H_2^{gx} = H^{gx}.$$

$\square$

CHAPTER 7

Caracterización en términos de los números de Sylow

Dada la importancia para un grupo finito de tener un subgrupo de Hall nilpotente, resulta interesante tratar de obtener bajo que circunstancias sucede esto. En el presente capítulo expondremos el resultado principal del articulo [10] el cual caracteriza la existencia de subgrupos de Hall nilpotentes en grupos finitos.

Si G posee un subgrupo de Hall nilpotente H, y p, q son primos distintos divisores del orden de H, existen $P \in \mathrm{Syl}_p(G), Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ tales que $P, Q \trianglelefteq H$, de donde P, Q se centralizan mutuamente. Así q no divide $\nu_p(G)$, y recíprocamente. El siguiente resultado afirma que el recíproco es también cierto para casi todo grupo finito G.

Teorema 7.1. *Si G es un grupo finito y π un conjunto de primos, entonces G posee un subgrupo de Hall nilpotente si y solamente si se verifican*

(i) *Dados $p, q \in \pi$ primos distintos, q no divide $\nu_p(G)$.*
(ii) *Si $\{2,3\} \subseteq \pi$, entonces G no posee ningún factor isomorfo con $PSL(2,q)$ con $(q^2-1)_{\{2,3\}} = 24$.*
(iii) *Si $\{2,7\} \subseteq \pi$, entonces G no posee factores de composición isomorfos con ${}^2G_2(3^{2n+1})$ con $n \not\equiv 1 (\text{mód}\, 7)$.*

La demostración del teorema anterior requiere de la clasificación de los grupos simples, motivo por el que no presentamos la demostración. El caso en el que G es resoluble el resultado anterior es sencillo.

Teorema 7.2. *Si G es un grupo resoluble y π es un conjunto de primos, G posee un π-subgrupo de Hall nilpotente si y solamente dados dos primos $p, q \in \pi$, p no divide $\nu_q(G)$.*

PROOF. Razonaremos por inducción. Si $\pi = \{p, q\}$ tomamos $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ y dado que q no divide $\nu_p(G) = [G : N_G(P)]$ debe existir $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ tal que normaliza a P. Así $H = PQ$ es un π-subgrupo de Hall con un p-subgrupo de Sylow normal. Repitiendo el procedimiento para q, obtenemos otro π-subgrupo de Hall, K, con un q-subgrupo de Sylow normal y dado que H, K son conjugados por ser G resoluble, son isomorfos y por tanto H, K tienen un p-subgrupo de Sylow y un q-subgrupo de Sylow normal, de donde H, K son nilpotentes.

Asumimos ahora que π tiene más de dos primos. Si H es un π-subgrupo de Hall de G, teniendo en cuenta que es resoluble, H tiene τ-subgrupos de Hall para todo $\tau \subset \pi$. Ahora, por hipótesis de inducción G tiene τ-subgrupos de Hall nilpotentes para todo $\tau \subset \pi$, y de nuevo por conjugación, H tiene τ-subgrupos de Hall nilpotentes para todo $\tau \subset \pi$. En particular, si tomamos $p \in \pi$ y $\tau = \{p, q\}$ con q un primo de π distinto de p, por la nilpotencia del τ-subgrupo de Hall de H, si $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ existe $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ tal que centraliza a P, así q no divide a $\nu_p(H)$; de la generalidad de q llegamos a que $\nu_p(H) = 1$ y por tanto $P \trianglelefteq H$. Ahora de la generalidad de p se tiene que todo Sylow de H es normal en este y así H es un π-subgrupo de Hall de G nilpotente. $\square$

Part 4

Números de Sylow y de Hall

Introducción a Parte 4

En esta parte nos centramos en el estudio del número de subgrupos de Hall y Sylow de un grupo finito. Empezamos en el Capítulo 8 estudiando el número de subgrupos de Hall en grupos resolubles ampliando el resultado $\nu_p(G) \equiv 1 \pmod{p}$ a la teoría de Hall. En el Capítulo 9 obtenemos un resultado similar al del capítulo anterior, ahora para la teoría de Sylow, sin exigir la resolubilidad del grupo. Tenemos así en este capítulo dos nuevos resultados los cuales amplían junto con el teorema del capítulo anterior nuestro conocimiento acerca de la forma del numero de subgrupos de Sylow. Además es posible concluir gracias a estos dos nuevos resultados que $\nu_p(G)$ no admite ciertos valores para ningún grupo finito G.

En el Capítulo 10 damos una relación de divisibilidad entre el número de π-subgrupos de Hall de un grupo G y el número de π-subgrupos de Hall de un subgrupo H de G. Para ello requerimos la condición de π-separabilidad del grupo G. En la primera sección de este capítulo vemos la demostración de este resultado para el caso en el que π consta de un único primo, esto es, en el contexto de la teoría de Sylow. En la segunda sección ampliamos este resultado a la teoría de Hall.

Finalmente, en los Capítulos 11 y 12 vemos dos condiciones suficientes para la resolubilidad basadas en el número de subgrupos de Sylow. En el Capítulo 11 vemos como la cantidad, en termino medio, del número de subgrupos de Sylow puede ser suficiente para determinar la resolubilidad de un grupo mientras que el último capítulo, Capítulo 12, vemos como las distintas cantidades de subgrupos de Sylow para cada primo, en tanto que varíen poco, pueden ser de nuevo suficientes para concluir que un grupo finito G sea resoluble.

CHAPTER 8

Número de subgrupos de Hall en grupos resolubles

El siguiente resultado es debido al propio Philip Hall y es una adaptación a la teoría de Hall en grupos resolubles del resultado de Sylow $\nu_p(G) \equiv 1 \ (\text{mód}\, p)$. Este resultado se encuentra como un apartado más del teorema acerca de la existencia conjugación y dominancia de subgrupos de Hall en grupos resolubles que puede encontrarse en [2], páginas 29-31. Siendo esta prueba algo confusa, la hemos sintetizado por tal adaptarla a nuestro interés. Remarcamos que pese haber simplificado al demostración sigue siendo posible siguiendo demostrar tales hechos siguiendo los pasos de nuestra demostración.

OBSERVACIÓN. Con respecto a esta demostración resulta práctico cambiar la notación del número $\nu_\pi(G)$ de π-subgrupos de Hall de G, por h_m donde entendemos que m es el orden de los π-subgrupos de Hall de G. Así mismo, si m es un número entero escribimos $\pi(m)$, con tal de denotar al conjunto de primos divisores de m. Con esto un $\pi(m)$-subgrupo de Hall de G es de orden m.

Teorema 8.1. *G finito resoluble, $|G| = mn$, si h_m es el número de subgrupos de G de orden m y $h_m = f_1 f_2 ... f_n$, entonces cada factor f_i verifica las dos condiciones siguientes*

(i) *f_i es congruente con 1 módulo algún primo de m.*

(ii) *Cada factor f_i es una potencia de primo que divide a uno de los factores principales de G.*

PROOF. Probamos el resultado por inducción sobre $|G|$. Suponer que G posee un subgrupo propio $H \trianglelefteq G$. Escribimos $H = m_1 n_1$, $[G : H] = m_2 n_2$, $m = m_1 m_2$, $n = n_1 n_2$ y suponer además que $n_1 < n$.

Sea $\mathscr{H}$ el conjunto de todos los $\pi(m)$-subgrupos de Hall de G. Podemos dividir el conjunto anterior en clases por medio del convenio barra, esto es, dados $K, L \in H$, $K \sim L$ si y solamente si $\bar{K} = \bar{L}$. Ahora, dado que M es $\pi(m)$-subgrupo de Hall de G si y solamente si $\bar{M}$ es un $\pi(m_2)$-subgrupo de Hall de $\bar{G}$, tenemos que el número de clases de equivalencia de $\mathscr{H}$ coincide con el número h'_{m_2} de $\pi(m_2)$-subgrupos de Hall de $\bar{G}$. Ahora, siendo los elementos de $\mathscr{H}$ conjugados y $H \trianglelefteq G$, si K, L son dos representantes de distintas clases, los grupos finitos KH, LH son isomorfos por ser conjugados. Con esto, el número h'_m de $\pi(m)$-subgrupos de Hall de KH es el mismo, independientemente del representante y de la clase. Tenemos así que hay h'_{m_2} clases de equivalencia, cada una de las cuales aporta h'_m $\pi(m)$-subgrupos de Hall distintos, concluyéndose que $h_m = h'_m h'_{m_2}$. Sin más que aplicar la hipótesis de inducción a h'_m, h'_{m_2} obtenemos el primer resultado.

Consideramos ahora $D \leq G$ tal que $\bar{D}$ es un $\pi(m_2)$-subgrupo de Hall del cociente G/H, $|D| = mn_1$; tenemos que los factores principales de D coprimos con m dividen algún factor principal de G; para ver esto es suficiente construir una serie principal para D a partir de la de G, i.e., tomamos $\{\mathcal{N}_i\}_{i=0}^{k}$ con $\mathcal{N}_i = N_i \cap D$ como serie principal para D; si $H \subseteq \mathcal{N}_i \subseteq \mathcal{N}_{i+1} \subseteq D$, dado que $|D/H| = m_2$, el cociente $\mathcal{N}_{i+1}/\mathcal{N}_i$ divide a m por lo que los factores que dan cociente primo con m deben estar contenidos en H; ahora haciendo uso de los teoremas de isomorfía y la identidad de Dedekind es rutinario comprobar que el factor $\mathcal{N}_{i+1}/\mathcal{N}_i$ divide al factor N_{i+1}/N_i. Finalmente teniendo en cuenta que los factores principales de G/H son todos factores principales de G y dado que tanto el orden de D como el de G/H es menor que el orden de G, concluimos la segunda afirmación por hipótesis de inducción.

Tenemos ahora que todo subgrupo normal de G tiene a n como divisor de su orden ($n_1 = n$). Si K es normal minimal de G, n debe dividir a $|K|$ el cual es potencia de primo al ser K p-elemental abeliano; además $n = |K|$ ya que si escribimos $|K| = p^a$ y $n < p^a$, p sería divisor común de m y n.

Sea ahora $L \trianglelefteq G$ tal que L/K es normal minimal de G/K, $|L/K| = q^b$ con $q \neq p$ pues q divide a m. Sea $L_1 \in \mathrm{Syl}_q(L)$, $|L_1| = q^b$, y $N_1 = N_G(L_1)$. Si $N := N_1 \cap K$ se tiene que tanto L_1 como N son subgrupos normales de N_1; dado que $N \cap L_1 = \{1\}$ tenemos que $nl = ln$ para todo $l \in L_1, n \in N$. Teniendo en cuenta que K es abeliano y $N \leq K$, $N \subseteq Z(L) char\, L \trianglelefteq G$ luego $N \subseteq Z(L) \trianglelefteq G$. Si suponemos $N > 1$, p divide a N que divide a $Z(L)$ de donde $Z(L) \cap K > 1$ y por ser Knormal minimal de G, $K \subseteq Z(L)$. Ahora, dado que $L = L_1K$, si $x \in L$ podemos escribir $x = lz$ con $l \in L_1, z \in Z(L)$ y así $L_1^x = L_1$, por tanto L_1 es q-subgrupo de Sylow normal de L, equivalentemente, $L_1 char\, L \trianglelefteq G$ de donde $L_1 \trianglelefteq G$, contradicción con el hecho de no dividir n el orden de L_1. Concluimos que $N = 1$. Con esto $N_L(L_1)$ no es divisible por p de donde $[L : N_L(L_1)] = p^a$. Así, por un lado, p^a es un factor principal de G dado que es el orden de K normal minimal, por otro lado es el número de q-subgrupos de Sylow de L y, por tanto, es congruente con $1\ (m\acute{o}d\, q)$ teniéndose el resultado. □

CHAPTER 9

Número de subgrupos de Sylow en grupos finitos

Dado que la teoría de Sylow no es más que un caso particular de la teoría de Hall, el resultado anterior de P. Hall sigue siendo cierto para el caso de un único primo. Los siguientes resultados, Teorema 9.1 y 9.2, son una ampliación del Teorema 8.1 en el contexto de la teoría de Sylow en grupos finitos (no necesariamente resolubles).

Teorema 9.1. *Sea G un grupo finito y K un subgrupo normal. Si $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ y denotamos por $\nu_p(G)$ al número de p-subgrupos de Sylow de G, entonces $\nu_p(G) = a_p b_p c_p$ donde a_p es el número de p-subgrupos de Sylow de G/K, b_p es el número de p-subgrupos de Sylow de K y c_p es el número de p-subgrupos de Sylow de $N_{PK}(P \cap K)/(P \cap K)$.*

PROOF. Sabemos que $\nu_p(G) = [G : N_G(P)] = [G : N_G(PK)][N_G(PK) : N_G(P)]$. Haciendo uso de la notación barra, $\overline{G} = G/K$, $\overline{P} = PK/K$, tenemos que el número de p-subgrupos de Sylow, a_p, de $\overline{G}$

$$a_p \;=\; [\overline{G} : N_{\overline{G}}(\overline{P})] = [G : N_G(PK)],$$

de donde

$$\nu_p(G) = a_p[N_G(PK) : N_G(P)].$$

Ahora, teniendo en cuenta que P es un p-subgrupo de Sylow de PK y $PK \trianglelefteq N_G(PK)$, el número de p-subgrupos de Sylow de PK coincide con el de $N_G(PK)$ y $[N_G(PK) : N_G(P)] = [PK : N_{PK}(P)]$. Notar que $N_G(P) = N_{N_G(PK)}(P)$ ya que si $x \in G$ es tal que $P^x = P$, $(PK)^x = PK$. Con esto

$$\nu_p(G) = a_p[PK : N_{PK}(P)].$$

Ahora, por ser $P \subseteq N_{PK}(P)$, tenemos las identidades

$$P(N_{PK}(P) \cap K) = N_{PK}(P) \cap PK = N_{PK}(P),$$

$$P \cap (N_{PK}(P) \cap K) = P \cap K,$$

donde la primera de ellas debida a la identidad de Dedekind. Considerando el producto $P(N_{PK}(P) \cap K)$, el cual es grupo ya que $N_{PK}(P) \cap K \trianglelefteq N_{PK}(P)$, obtenemos a partir de la formula del producto $[N_{PK}(P) : K \cap K] = [P : P \cap K]$. Ahora, utilizando las identidades anteriores tenemos

$$[N_{PK}(P) : P] = [N_{PK}(P) \cap K : P \cap K].$$

Por otra parte, tenemos que $[PK : P] = [K : P \cap K]$ y $[PK : N_{PK}(P)] = [K : K \cap N_{PK}(P)]$ nuevamente por la formula del producto. Queda claro que si $y \in K \subseteq PK$ es tal que $P^y = P$, entonces $y \in N_{PK}(P \cap K)$ de donde

$$N_K(P \cap K) \quad = \quad K \cap N_{PK}(P \cap K) \geq K \cap N_{PK}(P),$$

luego

$$[K : K \cap N_{PK}(P)] \quad = \quad [K : N_K(P \cap K)][K \cap N_{PK}(P \cap K) : K \cap N_{PK}(P)].$$

Notar que $[K : N_K(P \cap K)] = b_p$ es el número de p-subgrupos de Sylow de K. Con esto

$$\nu_p(G) = a_p b_p [K \cap N_{PK}(P \cap K) : K \cap N_{PK}(P)] = a_p b_p c_p.$$

Resta ver que c_p es el número de p-subgrupos de Sylow de $N_{PK}(P \cap K)/(P \cap K)$. Si escribimos $H = N_{PK}(P \cap K)$, observamos que $H = N_{PK}(P \cap K) \geq N_{PK}(P) \geq P$, de donde $HK \geq N_{PK}(P)K \geq PK$ y $HK = PK$. Ahora, de la formula del producto

$$[PK : K] = [H : H \cap K] = [N_{PK}(P) : N_{PK}(P) \cap K] = [P : P \cap K].$$

Con esto queda probado que

$$\begin{gathered}
[PK : H] = [K : H \cap K], \\
[H : N_{PK}(P)] = [H \cap K : N_{PK}(P) \cap K], \\
[N_{PK}(P) : P] = [N_{PK}(P) \cap K : P \cap K].
\end{gathered}$$

Así

$$\begin{aligned} c_p &= [K \cap N_{PK}(P \cap K) : K \cap N_{PK}(P)] = [H \cap K : N_{PK}(P \cap K)] \\ &= [H : N_{PK}(P)] = [H : N_H(P)], \end{aligned}$$

donde $N_{PK}(P) = N_H(P)$ ya que $N_{PK}(P) \subseteq H = N_{PK}(P \cap K)$. Concluimos que c_p es el número de p-subgrupos de Sylow de H y dado que $P \cap K \trianglelefteq H = N_{PK}(P \cap K)$, $P \cap K$ esta contenido en todo p-subgrupo de Sylow de H; así, c_p es el número de p-subgrupos de Sylow de $H/(P \cap K) = N_{PK}(P \cap K)/(P \cap K)$ concluyéndose el resultado. $\square$

Teorema 9.2. *Si G es un grupo finito y expresamos $\nu_p(G) = f_1 f_2 ... f_n$. Entonces cada factor f_i verifica una de las siguientes condiciones*

(i) *f_i es el número de p-subgrupos de Sylow de un grupo simple.*

(ii) *f_i es una potencia de primo, q^a, con $q^a \equiv 1 \,(\text{mód}\, p)$.*

PROOF. Procederemos por inducción sobre el orden de G. Notamos que el resultado es trivial si G es un p-grupo o un grupo simple.

Si $1 \neq K \lhd G$, sabemos por el teorema anterior que $\nu_p(G) = a_p b_p c_p$ con a_p, b_p, c_p el número de p-subgrupos de Sylow de G/K, K y $N_{PK}(P \cap K)/P \cap K$ respectivamente. Si estos tres subgrupos fuesen de orden menor, tendríamos el resultado por hipótesis de inducción. Así debemos suponer que alguno de ellos no lo es y dado que K y G/K los son, debe ser $|G| = |N_{PK}(P \cap K)/P \cap K|$ de donde $P \cap K = 1$ y $G = PK$. Ahora, por ser $K \trianglelefteq G$ tenemos que $G/K \cong P$ y si denotamos por $|P| = p^r$ con $r \geq 2$, tenemos existe $P_1 \trianglelefteq P$ tal que $|P_1| = p^{r-1} > 1$. Así, tomando $K_1 = KP_1 < G$, obtenemos otro subgrupo propio normal de G ahora, con $1 < P \cap K_1$ el cual nos permite concluir el resultado por hipótesis de inducción.

Consideramos ahora el caso en el que $|P| = p$, esto es, $P = \langle a \rangle$ es cíclico de orden p. Dado que K es normal en G, la aplicación $\alpha : K \to K$ dada por $\alpha(x) = x^a$ está bien definida y $\alpha \in Aut(K)$. Ahora, si $x \in N_{PK}(P) \cap K$ se tiene que $[x, a] = x^{-1}a^{-1}xa$ pertenece a $P \cap K = 1$ ya que $(x^{-1}a^{-1}x)a \in P$ por definición de x y $x^{-1}(a^{-1}xa) \in K$ por la normalidad de este. Así, denotando por $F = N_{PK}(P) \cap K$ tenemos que $F \subseteq C_G(P)$ y $G = PF$ de donde concluimos que el número de p-subgrupos de Sylow de $G = PK$ es $\nu_p(G) = [PK : PF] = [K : F]$. Si $K = q_1^{e_1} q_2^{e_2} ... q_r^{e_r}$ y $F = q_1^{f_1} q_2^{f_2} ... q_r^{f_r}$, tenemos

$$\nu_p(G) = q_1^{e_1-f_1} q_2^{e_2-f_2} ... q_r^{e_r-f_r},$$

quedando probar que $q^{e_i-f_i} \equiv 1(m\acute{o}d\, p)$ $i = 1, ..., r$ con tal de concluir la demostración.

Tomamos Q_1 un q_i-subgrupo de Sylow de F; si Q_i es un q_i-subgrupo de Sylow de P, $q^{e_i-f_i} = 1 \equiv 1(m\acute{o}d\, p)$ y el resultado quedaría probado. Si Q_1 es subgrupo propio de algún q_i-subgrupo de Sylow de K, existe $Q^* \leq K$ tal que $[Q^* : Q_1] = q_i$ de donde $Q_1 \trianglelefteq Q^*$ y $[N_K(Q_1) : Q_1] \equiv 0\, (m\acute{o}d\, q_i)$. Además, puesto que $Q_1^a = Q_1$, $N_K(Q_1)^a = N_K(Q_1)$ y si consideramos otro subgrupo $H \trianglelefteq K$, el número de q_i-subgrupos de Sylow de H, $\nu_{q_i}(H)$, es un divisor del orden de K de donde $\nu_{q_i}(H)$ es coprimo con p. Con esto, podemos formar una cadena de q_i-subgrupos, $Q_1 \subset Q_2 \subset ... \subset Q_s$ tales que Q_j es un q_i-subgrupo de Sylow de $N_K(Q_{j-1})$ y cada Q_j es fijado por α. Tomamos s tal que $Q_s = Q$ es q_i-subgrupo de Sylow de K; dado que $Q_1 \subset Q$ es un q_i-subgrupo de Sylow de F, no puede existir un q_i-subgrupo de Q mayor que Q_1 el cual sea fijado por α. Concluimos que los $q_i^{e_i} - q_i^{f_i}$ elementos de $Q \backslash Q_1$ son todos permutados, y en particular, son permutados en ciclos de longitud p de donde obtenemos $q_i^{e_i} - q^{f_i} \equiv 0\, (m\acute{o}d\, p)$, luego $q_i^{e_i-f_i} \equiv 1(m\acute{o}d\, p)$, como deseábamos.

$\square$

Haciendo uso de este resultado es posible probar si $p = 2$, dado que todo número impar q satisface $q \equiv 1(m\acute{o}d\, p)$ existe un grupo finito G tal que $\nu_p(G) = q$.

Por otro lado no todo número natural puede ser el número de p-subgrupos de Sylow de un grupo finito si $p > 2$. Una demostración de este hecho se encuentra en **[3]**. En particular, puede probarse que no existe un grupo finito G con $\nu_p(G) = 1 + rp$ con $1 < r < (p+3)/2$ a menos que $\nu_p(G) = q^t$ con q primo o bien $r = (p-3)/2$ y $p > 3$ es un primo de Fermat. Con esto no existe un grupo finito G con $\nu_3(G) = 22$, $\nu_5(G) = 21$ o $\nu_p(G) = 1 + 3p$ con $p \geq 7$.

CHAPTER 10

Relación con subgrupos

10.1. Número de p-Sylows en grupos p-resolubles

Sabemos que si H es subgrupo de G, $\nu_\pi(H) \leq \nu_\pi(G)$. Probaremos además que bajo ciertas condiciones sobre G se da la divisibilidad entre ambos números. En esta sección probaremos los resultados para el caso de un único primo $\pi = \{p\}$ y G un grupo p-resoluble la cual puede encontrarse en [12].

Lema 10.1. *Si A es un grupo finito actuando coprimamente sobre G, $C := C_G(A)$ y $H \leq G$ es un subgrupo propio A-invariante, entonces el índice $[C : C \cap H]$ divide a $[G : H]$.*

PROOF. Sabemos que por ser la acción coprima, si p es un primo cualquiera divisor del orden de G entonces todo q-subgrupo A-invariante esta contenido en un p-subgrupo de Sylow de G A-invariante. Además, dos p-subgrupos de Sylow A-invariantes deben ser C-conjugados y si $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ es A-invariante, $P \cap C \in \mathrm{Syl}_p(C)$.

Si $Q \in \mathrm{Syl}_p(H)$ es A-invariante, tenemos que $Q \cap C \cap H = Q \cap C$ es un p-subgrupo de Sylow de $C \cap H$. Por otro lado Q está contenido en algún p-subgrupo de Sylow de G, P, A-invariante. Además, $P \cap C \in \mathrm{Syl}_p(C)$, y $[C \cap P : C \cap Q]$ divide a $[P : Q]$ ya que

$$|Q(P \cap C)| = \frac{|Q||P \cap C|}{|Q \cap C|} \leq |P|,$$

y de aquí

$$\frac{|P \cap C|}{|Q \cap C|} \leq \frac{|P|}{|Q|},$$

de donde concluimos la divisibilidad entre ambos indices por ser ambos potencia de p. Ahora, teniendo en cuenta que $|P \cap C|$ es la p-parte de $|C|$, $|Q \cap C|$ es la p-parte de $|C \cap H|$, $|P|$ la p-parte de $|G|$ y $|Q|$ la de $|H|$, la anterior relación se ve ahora como

$$\frac{|C|_p}{|C \cap H|_p} \text{ divide a } \frac{|G|_p}{|H|_p}.$$

De la arbitrariedad de p se sigue ahora el resultado. $\square$

Lema 10.2. *Si G es un grupo p-resoluble y $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ con $P \subseteq M \subseteq G$ entonces $[N_G(P) : N_M(P)]$ divide a $[G : M]$.*

PROOF. Razonamos por inducción sobre $|G|$. Dado que G es p-resoluble, existe una familia de subgrupos $\{H_i\}_{i=1}^n$ tal que $1 = H_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G$ y el cociente H_{i+1}/H_i es p-grupo o p'-grupo. Escribimos $N = H_{n-1}$ el cual es un subgrupo propio tal que $N \trianglelefteq G$ y G/N es p-grupo o p'-grupo.

Si G/N es p'-grupo, entonces $|N|_p = |G|_p$ y N contiene un p-subgrupo de Sylow de G, P. Además, de la normalidad de N y la conjugación de los subgrupos de Sylow se tiene que $\mathrm{Syl}_p(N) = \mathrm{Syl}_p(G)$. Si $V := M \cap N$, aplicando la hipótesis de inducción a N tenemos que

$$[N_G(P) : N_V(P)] \text{ divide a } [N : V].$$

Haciendo uso del argumento de Frattini $G = NN_G(P)$; escribimos ahora $G = (MN)N_G(P)$ y despejando en $|G| = \frac{|MN||N_G(P)|}{|MN \cap N_G(P)|}$ obtenemos

$$[G : NM] = [N_G(P) : N_{NM}(P)].$$

Afirmamos que $N_{NM}(P) = N_M(P)N_N(P)$. Por el argumento de Frattini tenemos que $M = (M \cap N)N_M(P)$, luego $NM = NN_M(P)$ y

$$N_{NM}(P) = N_{NM}(P) \cap N_M(P)N = \{xy \mid x \in N_M(P),\ y \in N \text{ tal que } P^{xy} = P\}.$$

de donde $N_{NM}(P) = N_M(P)N_N(P)$. Además, por la formula del producto

$$\frac{|N_{MN}(P)|}{|N_M(P)|} = \frac{|N_N(P)|}{|N_V(P)|}.$$

Ahora

$$\begin{aligned} [N_G(P) : N_M(P)] &= [N_G(P) : N_{NM}(P)][N_{NM}(P) : N_M(P)] \\ &= [G : NM][N_N(P) : N_V(P)], \end{aligned}$$

el cual divide a $[G : NM] = [N : V]$ y teniendo en cuenta que $[N : V] = [NM : M]$, tenemos que $NM = NN_M(P)$.

Si G/N es p-grupo, dado que $P \subseteq M$ debe ser $G = MN$; tomamos $H := N \cap M$, por hipótesis de inducción $[N_N(P \cap N) : N_H(P \cap N)]$ divide a $[N : H] = [G : M]$. Denotamos por $G_0 = N_G(P \cap N)$ y $M_0 := G_0 \cap M$, con esto $N_G(P) \subseteq G_0$.

Si G_0 es un subgrupo propio de G, haciendo uso de la forma del producto teniendo en cuenta que $N_G(P) \cap G_0 = N_{G_0}(P)$ y $N_G(P) \subseteq G_0$ tenemos que $[N_{G_0}(P) : N_{M_0}(P)] = [N_G(P) : N_M(P)]$ el cual divide a $[G_0 : M_0]$ por hipótesis de inducción al ser $G_0 < G$. Ahora, $P \subseteq N_M(P \cap N)$ y $G = PN$ luego $M = M \cap PN$ con $P \subseteq M$ y por la identidad de Dedekind, $M = P(M \cap N) = PH$. Así,

$$\begin{aligned} N_G(P \cap N) &= \{pn \in PN \mid P^{pn} \cap N = P \cap N\} = \{n \in N \mid (P \cap N)^n = P \cap N\} \\ &= N_N(P \cap N), \end{aligned}$$

$$N_M(P \cap N) = \{ph \in PH \mid (P \cap N)^h = P \cap N\} = N_H(P \cap N).$$

Sin más que juntar lo anterior

$$[G_0 : M_0] = [N_G(P \cap N) : N_M(P \cap N)] = [N_N(P \cap N) : N_H(P \cap N)],$$

por lo que $[G_0 : M_0]$ divide a $[N : H] = [G : M]$ teniéndose de nuevo el resultado.

Podemos, por tanto, asumir que $G_0 = N_G(P \cap N)$ no es propio. Haciendo uso de la notación barra para el cociente por $P \cap N$, $\bar{N} = N/P \cap N$, tenemos que P actúa coprimamente por automorfismos sobre $\bar{N}$. Si denotamos por $C := N_G(P) \cap N = N_N(P)$, $\bar{C} = C_{\bar{N}}(\bar{P})$, y dado que $P \subseteq M$ y G/N es p-grupo, llegamos a

$$[N_G(P) : N_M(P)] = [\bar{C} : \bar{C} \cap \bar{H}] \text{ y } [G : M] = [\bar{N} : \bar{H}],$$

concluyéndose el resultado por el lema anterior. □

Teorema 10.3. *Si G es finito p-resoluble y $H \leq G$, entonces $\nu_p(H)$ divide a $\nu_p(G)$.*

PROOF. Argumentamos por inducción sobre $[G : H]$. De existir un subgrupo de G, K, tal que $H < K < G$, tenemos por hipótesis de inducción que $\nu_p(H)$ divide a $\nu_p(K)$ el cual a su vez divide a $\nu_p(G)$ siguiéndose el resultado. Así H es maximal de

G y $[G:H]$ es p-número o p'-número por el Lema 1.20.

Si $[G:H]$ es potencia de p, tomamos $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$; tenemos que $G = HP$ y $P \cap H \in \mathrm{Syl}_p(H)$. Además $G = HN_G(P)$ y $[G : N_G(P)] = [H : N_H(P)]$ por la formula del producto; ahora es suficiente que $N_H(P) \subseteq N_H(P \cap H)$ y de donde $\nu_p(H) = [H : N_H(P \cap H)]$ divide a $[H : N_H(P)] = \nu_p(G)$.

Consideramos ahora el caso $[G:H]$ no es divisible por p; con esto, si $P \in \mathrm{Syl}_p(H) \subseteq \mathrm{Syl}_p(G)$, por el teorema anterior tenemos que $[N_G(P) : N_H(P)]$ divide a $[G:H]$ de donde $[H : N_H(P)] = \nu_p(H)$ divide a $[G : N_G(P)] = \nu_p(G)$. □

Remarcamos que el anterior resultado no es cierto si el grupo no es p-resoluble; así, por ejemplo, si $G = A_5$ y $H = A_4$, tenemos para el primo $p = 3$, $\nu_p(H) = 4$ mientras que $\nu_p(G) = 10$.

Como consecuencia de este teorema tenemos otra forma de demostrar el Teorema 7.2. Veámoslo:

Sea H un π-subgrupo de Hall de G. Si $\nu_p(H) > 1$ existe $q \in \pi$ tal que q divide a $\nu_p(H)$. Si G es resoluble, G es p-resoluble y $\nu_p(H)$ divide $\nu_p(G)$, de donde q divide a $\nu_p(G)$ contradicción.

10.2. Número de π-subgrupos de Hall en grupos π-separables

Procedemos ahora a generalizar el teorema anterior para un conjunto de primos π y G un grupo π-separable, reproduciendo la demostración que puede encontrarse [14]. Notamos en primer lugar que la demostración de la sección anterior o no puede ser aplicada directamente para grupos π-separables. En particular, el Teorema 10.1 hace uso de la generalización de teoría de Sylow mediante la acción de grupos sobre grupos, de la cual no se tiene una versión para Hall; así pese a que el número de subgrupos de Hall puede ser computada como el índice en G del normalizador de un π-subgrupo de Hall, al igual que los subgrupos de Sylow, requerimos de otra formula para el número de π-subgrupos de Hall de un grupo.

Vemos ahora un lema previo a los resultados del artículo.

Lema 10.4. *Sea G grupo finito de la forma $G = HN$ con $N \trianglelefteq G$ y $(|H|, |N|) = 1$. Entonces $N_N(H) = C_N(H)$.*

PROOF. Denotando por $K = N_N(H)$, si $h \in H$ y $k \in K$

$$[h,k] = h^{-1}h^k \in H,$$

$$[h, k] = (k^{-1})^h k \in N,$$

de donde $[h, k] = 1$ por ser $(|H|, |N|) = 1$ y así $N_N(H) \subseteq C_N(H)$. □

Teorema 10.5. *Sea G un grupo finito π-separable y sea H un π-subgrupo de Hall de G. Si $\{N_i\}_{i=0}^{\ell}$ es la familia de subgrupos normales de G tales que N_{i+1}/N_i es π-grupo o π'-grupo y denotamos por $\mathscr{F}$ al conjunto de factores que son π'-grupos, entonces*

$$\nu_\pi(G) = \prod_{F \in \mathscr{F}} [F : C_F(H)].$$

PROOF. Sea G un contraejemplo con ℓ mínimo. Claramente el resultado es cierto para $\ell = 0, 1$; si $\ell = 2$ tenemos $1 \lhd N \lhd G$ con N π-grupo o π'-grupo.

Si N es π-grupo, tenemos que $\nu_\pi(G) = [G : N_G(N)] = 1$; siendo $N = H$, el estabilizador de la acción $C_{G/N}(H) = G/N$ y nuestra formula queda como

$$\nu_\pi(G) = [G/N : C_{G/N}(H)] = 1.$$

Si N es π'-grupo, $G = HN$ con $N \trianglelefteq G$ y $(|H|, |N|) = 1$ de donde $N_N(H) = C_N(H)$ y haciendo uso de la descomposición de G, $N_G(H)g = N_G(H)n$ con $n \in N$. Así $[G : N_G(H)] = [N : N_N(H)]$ y el resultado es cierto para $\ell = 2$.

Dado que G es un contraejemplo, $\ell > 2$, pudiéndose tomar $N = N_1$ subgrupos propios de G. Si denotamos por $\mathscr{H}$ al conjunto de π-subgrupos de Hall de G, argumentando como en el Teorema 8.1 vemos que el numero de elementos de $\mathscr{H}$ es

$$\nu_\pi(G) = \nu_\pi(G/N)\nu_\pi(HN) \text{ con } H \in \mathscr{H}.$$

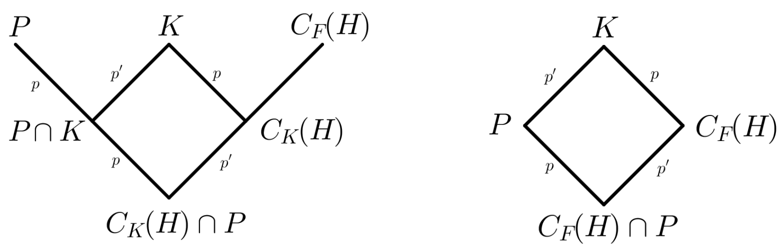
Además, G/N y HN son subgrupos de orden menor que G concluyéndose el resultado para ambos subgrupos. Dado que los factores de G/N son isomorfos a los de G, $\nu_\pi(G/N) = \prod_{F \in \bar{\mathscr{F}}} [F : C_F(H)]$ donde $\bar{\mathscr{F}}$ está compuesto por todos los factores de G que son π'-grupos a excepción de $N_1/N_0 = N$. Si N es π-grupo, así lo es HN y $\nu_\pi(N) = 1$. Si N es π'-grupo $\nu_\pi(HN) = [N : C_G(H)]$.

Sin más que juntar lo anterior vemos que el resultado es cierto para G, contradicción. □

Lema 10.6. *Sean H, F grupos finitos tal que H actúa coprimamente sobre F. Si K es un subgrupo de F H-invariante, $[K : C_K(H)]$ divide a $[F : C_F(H)]$.*

PROOF. Suponemos que el resultado es falso y tomamos F contraejemplo con $|F|$ mínimo y $[F : K]$ lo menor posible.

Siendo la acción coprima sabemos que F posee p-subgrupos de Sylow H-invariantes y dos cualquiera de ellos son $C_F(H)$-conjugados. Para cada primo p tomamos $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ H-invariante tal que P contiene un p-subgrupo de Sylow H-invariante de K. Además, podemos tomar P tal que contenga a un Sylow H-invariante de $C_F(H)$ y otro de $C_K(H)$. Con esto $P, P \cap K, C_P(H), K \cap C_P(H)$ son p-subgrupos de Sylow de $F, K, C_F(H)$ y $C_K(H)$ respectivamente. Las relaciones entre los subgrupos anteriores quedan ahora recogidas mediante los siguientes diagramas



A partir de estas ilustraciones vemos que $[K : C_K(H)]_p = [P \cap K : P \cap C_K(H)]$ y $[F : C_F(H)]_p = [P : P \cap C_F(H)]$, de donde se deduce por ser F contraejemplo que $[P \cap K : P \cap C_K(H)]$ no divide a $[P : P \cap C_F(H)]$ para algún primo p. Ahora, dado que $|F|$ mínimo debe ser F un p-grupo.

Siendo $[F : K]$ minimal, K es de orden máximo entre todos los subgrupos H-invariantes de F. Si K es subgrupo propio y $\Phi(F)$ el Frattini de F, $K\Phi(F)$ es un subgrupo propio de F y además H-invariante por ser $\Phi(F)$ característico. Así, $\Phi(F) \subseteq K$ y $K \trianglelefteq F$ pues $F/\Phi(F)$ es p-elemental abeliano por el Teorema 1.12. Con esto H actúa sobre F/K y $C_F(H)/C_K(H)$ es isomorfo al centralizador de la acción. Así $[C_F(H) : C_K(H)]$ divide $[F : K]$, contradicción. □

Corolario 10.7. *Sea π un conjunto de primos y G un grupo finito π-separable. Si $K \leq G$ entonces $\nu_\pi(K)$ divide a $\nu_\pi(G)$.*

PROOF. Sea H un π-subgrupo de Hall de G que contiene a un π-subgrupo de Hall de K y sea $\{N_i\}_{i=0}^{\ell}$ una familia de subgrupos normales en G tal que

$$1 = N_0 \subseteq N \subseteq ... \subseteq N_{\ell-1} \subseteq N_\ell = G,$$

y el cociente N_{i+1}/N_i es un π-grupo para $i = 0, ..., l-1$.

Ahora, por el teorema anterior

$$\nu_\pi(G) = \prod_{F \in \mathscr{F}} [F :\subset [H][F]].$$

Calculamos ahora $\nu_\pi(K)$ por medio de la acción de $H \cap K$ sobre el conjunto de factores que son π'-grupos, $\mathscr{H} = \{N_{i+1} \cap K/N_i \cap K$ tal que es π'-grupo$\}$. Claramente $N_{i+1} \cap K/N_i \cap K$ es isomorfo con $(N_i \cap K)N_{i+1}/N_i$ el cual es un subgrupo $(H \cap K)$-invariante de N_{i+1}/N_i. Así, si para cada $H \in \mathscr{H}$, si denotamos por $K(F) := (N_i \cap K)N_{i+1}/N_i$, tenemos que

$$\nu_\pi(K) = \prod_{H \in \mathscr{H}} [K(F) :\subset [H \cap K][K(F)]].$$

Por el lema anterior, $\nu_\pi(K)$ divide al número

$$\prod_{F \in \mathscr{F}} [F :\subset [H \cap K][F]],$$

el cual claramente divide a $\nu_\pi(G)$. $\square$

CHAPTER 11

Número medio de Sylows en grupos finitos

Presentamos en este capítulo una condición suficiente para la resolubilidad, la cual puede encontrarse en [11], y que se caracteriza por hacer uso de la cantidad "media" de subgrupos de Sylow de un grupo.
La idea intuitiva en la que se basa este resultado consiste en que si dos grupos son "parecidos", tendrán una cantidad similar de subgrupos de Sylow. La noción de ser parecidos puede entenderse, por ejemplo, como ser ambos grupos resolubles. La idea de tener una cantidad similar de subgrupos de Sylow es más compleja en tanto que los primos divisores de ambos grupos pueden ser distintos y por tanto no ser posible comparar la cantidad de p-subgrupos de Sylow para cada primo p. Damos ahora una definición que permite aclarar este último hecho.

Definición: Sea G un grupo finito y sea $S(G) = \{p\,\text{primo} \mid \nu_p(G) > 1\}$. Se define el número medio de Sylows de G como

$$asn(G) = \frac{\left(\sum_{p\in S(G)} \nu_p(G)\right)}{|S(G)|}.$$

Antes de probar el resultado principal requerimos de un lema.

Lema 11.1. *Si S es un factor de composición de grupo finito G, entonces $\nu_p(S) \leq \upsilon_p(G)$.*

PROOF. Si S es factor de composición, existen $N_1 \triangleleft N_2$ subgrupos de G tal que $S = N_2/N_1$. Sabemos por el Teorema 9.1 que si $K \trianglelefteq G$, $\nu_p(K) \leq \nu_p(G)$ de donde $\nu_p(N_1), \nu_p(N_2) \leq \nu_p(G)$. Además, por el mismo teorema, $\nu_p(N_2/N_1) \leq \nu_p(N_2)$ concluyéndose el resultado. $\square$

Teorema 11.2. *Si G es un grupo finito tal que $\operatorname{asn}(G) < 7$, entonces G es resoluble.*

PROOF. Sea G contraejemplo minimal y sea S un factor de composición no abeliano (S simple no abeliano, en otro caso $S \cong C_p$ y $\nu_p(S) = 1$).

Si $\nu_p(S) < 7$ para algún primo p, entonces S tiene un subgrupo propio de indice menor que 7, de donde S es isomorfo a un subgrupo de A_6. Así $S = A_5$ o bien $S = A_6$. En ambos casos se tiene $\nu_2(S) \geq 5$, $\nu_3(S) \geq 10$ y $\nu_5(S) \geq 6$. Ahora, por el lema anterior, debe ser $\nu_2(G) \geq 5$, $\nu_3(G) \geq 10$ y $\nu_5(G) \geq 6$ y dado que $\nu_q(G) = 1 + kq$, si q es un primo mayor que 5, $\nu_q(G) \geq 8$. Con esto $\operatorname{asn}(G) \geq 7$, hecho contradictorio.

Tenemos que $\nu_p(S) \geq 7$ para cada primo divisor del orden de G; además, de la simplicidad de S, el orden de S debe tener al menos tres primos distintos dividiendo su orden por el Teorema de Burnside, Teorema 1.17.

Caso 1: 5 divide el orden de S. En tal caso $7 \leq \nu_5(S) \leq 1 + 5k$ de donde $\nu_5(G) \geq \nu_5(S) \geq 11$.

Si 2 divide el orden de S, tenemos $\nu_2(G) \geq \nu_2(S) \geq 7$. Dado que $\operatorname{asn}(G) \leq 7$, debe existir un primo p tal que $1 < \nu_p(G) < 7$, pero el único primo posible es $p = 3$, para el cual $\nu_3(G) = 4$ de donde $\operatorname{asn}(G) \geq \frac{(11+7+4)}{3} \geq 7$, contradicción.

Si 3 divide el orden de S, $\nu_3(G) \geq \nu_3(S) \geq 7$ y el único primo p para el cual tiene sentido $\nu_p(G) < 7$ es $p = 2$, siendo $\nu_2(G) \geq 3$ y por tanto $\operatorname{asn}(G) \geq \frac{(11+7+3)}{3} = 7$, absurdo.

Con esto, si q, r son primos distintos de 5 divisores del orden de S, deben ser $q, r \geq 7$. En tal caso

$$\nu_5(G) + \nu_q(G) + \nu_r(G) \geq 11 + (1 + 7) + (1 + 11) = 31.$$

Dado que $\operatorname{asn}(G) < 7$, debe existir algún primo p tal que $\nu_p(G) < 7$. Siendo $p = 2$ y $p = 3$ los únicos valores posibles para p obtenemos

$$\nu_2(G) + \nu_3(G) + \nu_5(G) + \nu_q(G) + \nu_r(G) \geq 3 + 4 + 31 = 38,$$

de donde $\operatorname{asn}(G) \geq \frac{38}{5} > 7$, de nuevo contradicción.

Caso 2: 5 no divide el orden de S. Si 2 y 3 dividen a $|S|$, $\nu_2(G)$ y $\nu_3(G) \geq 7$ y existe otro primo $s \geq 7$ tal que $\nu_s(G) \geq 8$. El único primo p que puede hacer $\operatorname{asn}(G) < 7$ es $p = 5$; en tal caso $\nu_5(G) = 6$ y $\operatorname{asn}(G) \geq \frac{7+7+8+6}{4}$ =7, absurdo.

Finalmente, suponemos que 2 o 3 no divide el orden de S, de donde deben existir primos $u, v \geq 7$ divisores del orden de S. Además, si un primo r mayor que 11 es divisor de S, de tener un subgrupo propio con indice $g \leq 8$ representado sobre $\sum_g$ obtenemos que r divide $Ker\rho < S$ y S es no simple; con esto 8 no puede el ser el número de 7-subgrupos de Sylow de G de donde $asn(G) \geq 7$; tenemos así que $u, v \geq 11$ y $\nu_u(G) + \nu_v(G) \geq (1 + 11) + (1 + 13) = 26$. Ahora, los únicos primos capaces de hacer que $\operatorname{asn}(G) < 7$ son $2, 3$ y 5; con esto

$$\nu_2(G) + \nu_3(G) + \nu_5(G) + \nu_u(G) + \nu_v(G) \geq 3 + 4 + 6 + 26 = 39,$$

de donde $\operatorname{asn}(G) \geq \frac{39}{5} > 7$, absurdo. $\square$

En realidad, podemos decir algo más sobre la relación entre el número $\operatorname{asn}(G)$ y lo cerca que está el grupo G de ser nilpotente.

Teorema 11.3. *Existe una función de variable real f tal que $[G : F(G)] \leq f(\operatorname{asn}(G))$ en donde G es un grupo finito.*

PROOF. Sea n un número real positivo y G un grupo finito tal que $\operatorname{asn}(G) = n$. Debemos probar que $[G : F(G)]$ está acotado en términos de n, siendo $n = \operatorname{asn}(G) = \frac{(\nu_{p_1} + ... + \nu_{p_k})}{k}$.

Paso 1. Probamos que el número k de sumandos que aparece en $\operatorname{asn}(G)$ está acotado en términos de n.

Si fuera falso, $k > n$ y existen primos $p_1, ..., p_n, ..., p_k$ con $\nu_{p_i}(G) > 1$, $i = 1, ..., n$. Además, si $i > n$, $\nu_{p_i} \geq 1 + p_i > 1 + n$ y por tanto

$$n = \frac{\nu_{p_1} + ... + \nu_{p_n} + \nu_{p_{n+1}} + ... + \nu_{p_k}}{k} \geq \frac{n + (1 + n)(k - n)}{k} = n + 1 - \frac{n^2}{k},$$

de donde $k \leq n^2$, contradicción.

Paso 2. Existe una función de variable real g, tal que $\nu_p(G) \leq g(n)$ para todo primo p.

Esto es consecuencia de ser cada $\nu_{p_i}(G) \leq nk$ y ser k acotado en términos de n por el paso anterior.

Paso 3. Si $P \in \operatorname{Syl}_p(G)$, $G/\operatorname{core}(N_G(P))$ es un subgrupo de $\sum_{g(n)}$.

Considerando la acción de G sobre $\Omega = \operatorname{Syl}_p(G)$ por conjugación y teniendo en cuenta que $|\Omega| = \nu_p(G) \leq g(n)$ por el apartado anterior, tenemos el resultado sin más que observar que el núcleo de la acción es $\operatorname{core}(N_G(P))$.

Paso 4. Si $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ y denotamos por $N_p = \mathrm{core}_G(N_G(P))$, entonces $G/\bigcap N_p$ es isomorfo con un subgrupo de un producto directo de k copias de $\sum_{g(n)}$ con k acotado en términos de n.

Si $H, K \trianglelefteq G$, $\rho : G \to G/H \times G/K$ dada por $\rho(\,(H \cap K)g\,) = (Hg, Kg)$ es homomorfismo de grupos con $Ker\rho = H \cap K$ de donde se tiene el isomorfismo entre $G/H \cap K \cong G/H \times G/K$. Ahora es suficiente aplicar el Paso 3 junto con el Paso 1.

Paso 5. $\bigcap N_p(G)$ está contenido en el Fitting de G, $F(G)$.

Claramente, $\bigcap N_p(G)$ es normal en G y además es nilpotente pues es la intercesión de subgrupos con un p-subgrupo de Sylow normal, así $\bigcap N_p \subseteq F(G)$.

Paso 6. Paso final. Por el Paso 5, $[G : F(G)] \leq [G : \bigcap N_p]$ y $[G/\bigcap N_p]$ está acotado en términos de $n = \mathrm{asn}(G)$ por el Paso 4. $\square$

CHAPTER 12

Grupos con dos números de Sylow

Presentamos ahora otra condición suficiente para la resolubilidad de un grupo.

Si G es un grupo nilpotente todo subgrupo de Sylow es normal, de donde solo tiene un subgrupo de Sylow para cada primo divisor de su orden. La condición suficiente para la resolubilidad dada en el anterior capítulo puede verse motivada por la idea de que si G es resoluble entonces $\operatorname{asn}(G)$ es pequeño en tanto que $\operatorname{asn}(G) = 1$ para grupos nilpotentes. Por otro lado, la condición suficiente presentada en este capítulo se vasa en que la cantidad de p-subgrupos de Sylow de un grupo resoluble varía poco al cambiar el primo p, pues si G es nilpotente tiene un único p-subgrupo de Sylow con p un primo cualquiera. Con este objetivo damos la siguiente definición.

Definición: Dado G grupo finito, denotamos por $sn(G) = \{\nu_p(G) \mid p \in \pi(G)\}$ donde $\pi(G)$ denota al conjunto de primos divisores del orden de G.

Teorema 12.1. *Si G es un grupo finito y $sn(G)$ consta de dos únicos números, entonces G es producto de dos Halls nilpotentes, en particular G es resoluble.*

Este teorema fue conjeturado por J. Zhang en [15] y probado por F. Luca en [8]. Sin embargo, la prueba de Luca hace uso de un resultado de Zhang el cual es falso según demuestra N. Chiguira en [1]; la demostración aquí presentada ha sido extraída del articulo [9] y hace uso de la caracterización de subgrupos de Hall nilpotentes vista en el Capítulo 7.

La demostración del teorema requiere ciertos resultados acerca de grupos simples, es por ello por lo que los enunciaremos sin dar su demostración.

Lema 12.2. *Sea G un grupo finito. Si $sn(G) = \{1, b\}$ entonces G tiene un $\pi(b)$-subgrupo de Hall nilpotente normal N tal que G/N es nilpotente.*

Lema 12.3. *Sea q un primo tal que $(q^2 - 1)_{\{2,3\}} = 24$ y sea $G = PSL(2, q)$. Entonces $|G|_{\{2,3\}} = 12$ y el normalizador de un 2-subgrupo de Sylow de G es isomorfo a A_4. Además, el índice de dicho normalizador es $q + 1$.*

Lema 12.4. *Sea $G =^2 G_2(q)$ con $q = 3^{2n+1}$. Entonces*

(i) *El orden de G es $q^3(q-1)(q^3+1)$.*
(ii) *El orden del normalizador de un 2-subgrupo de Sylow es 168.*
(iii) *El indice de el normalizador de un 3-subgrupo de Sylow es q^3+1.*

Lema 12.5. *Sea p un primo y H un factor de composición de un grupo finito G. Entonces $\nu_p(H)$ divide $\nu_p(G)$.*

Teorema 12.6 (Wielandt-Kegel)**.** *Si G es un grupo finito producto de dos subgrupos nilpotentes, entonces G es resoluble.*

Probamos a continuación el resultado principal del articulo.

Teorema 12.7. *Sea G un grupo finito con $sn(G) = \{a, b\}$. Suponer que $a, b > 1$. Entonces $(a, b) = 1$ y G es producto de dos subgrupos de Hall nilpotentes, uno para el conjunto de primos p tal que $\nu_p(G) = a$ y otro para el conjunto de primos q tal que $\nu_q(G) = b$. En particular, G es resoluble.*

PROOF. Sean $\tau = \{p_1, ..., p_r\}$ el conjunto de primos divisores del orden de G tal que $\nu_{p_i}(G) = a$ y $\rho = \{q_1, ..., q_s\}$ el conjunto de primos tal que $\nu_{q_i}(G) = b$. Tenemos que $\pi(G) = \tau \cup \rho$ donde la unión es disjunta. Sabemos que p_i no divide a a, así como ningún q_i divide a b. Así $\pi(a) \subseteq \tau$, $\pi(b) \subseteq \rho$ de donde a, b son coprimos. Veamos ahora que G tiene un τ-Hall nilpotente. Hemos de probar

(i) Dados $p, q \in \pi$ primos distintos, q no divide $\nu_p(G)$.
(ii) Si $\{2,3\} \subseteq \pi$, entonces G no posee ningún factor isomorfo con $PSL(2, q)$ con $(q^2-1)_{\{2,3\}} = 24$.
(iii) Si $\{2, 7\} \subseteq \pi$, entonces G no posee factores de composición isomorfos con ${}^2G_2(3^{2n+1})$ con $n \not\equiv 1 (\text{mód}\, 7)$.

Sabemos que (i) es cierto, veamos los otros casos.

Probaremos primero el caso (ii). Suponemos que $\{2, 3\} \subseteq \pi$ y razonamos por reducción al absurdo si G tiene algún factor de composición isomorfo a $H = PSL(2, q)$ con $(q^2-1)_{\{2,3\}} = 24$. Por el Lema 12.3, el normalizador de un 2-subgrupo de Sylow de G tiene orden 12, al igual que $|H|_{\{2,3\}}$, de donde $|H|_{\{2,3\}'} = \nu_2(H)$, el cual divide por el Lema 12.5 a $\nu_2(G) = a$; así a es impar.

Análogamente, por los lemas 12.3 y 12.5 obtenemos que $\nu_q(H) = q + 1$ divide a $\nu_q(G)$. Dado que $q + 1$ es par y $(a, b) = 1$, $q + 1$ debe dividir a b, el cual resulta ser par; además, dado que $\nu_2(G)$ es la $\{2, 3\}'$ parte de H, y $(a, b) = 1$ deducimos que b es un $\{2, 3\}$-número. Así

$$24 = (q^2 - 1)_{\{2,3\}} = (q - 1)_{\{2,3\}}(q + 1),$$

deduciéndose que $q = 5$, o bien $q = 11$.

En el caso $q = 5$, tenemos $PSL(2, 5) = 60 = 2^2{\cdot}3{\cdot}5$. Aplicando resultados básicos de Sylow obtenemos que $\nu_3(H) = 2{\cdot}5$ ya que $5, 2^2{\cdot}5 \not\equiv 1 (\textit{mód}\, 3)$ y 5 debe dividir pues en otro caso representado sobre $\Omega = \mathrm{Syl}_3(H)$ el Ker de la acción es no trivial; ahora $\nu_3(H)$ divide a b por ser par, mientras que, $\nu_2(H) = 5$ divide a $\nu_2(G) = a$, lo cual es contradictorio con ser 5 divisor común de a, b, coprimos.

Consideramos ahora el caso $q = 11$, $\mathrm{PSL}(2, 11) = 2^4{\cdot}3{\cdot}5^2{\cdot}11$. De forma similar a la anterior, $\nu_5(H) = 2{\cdot}3{\cdot}11$ y 11 divide a b. Por otro lado, $\nu_2(H) = 5{\cdot}11$ divide a $\nu_2(G) = a$, contradicción.

Probaremos ahora (iii). Suponemos que $\{2, 7\} subseteq \tau$ y razonamos por reducción al absurdo si G tiene un factor de composición isomorfo a $H =^2 G_2(3^{2n+1})$ con $n \geq 1$ y $n \not\equiv 3 (\textit{mód}\, 7)$. Por el Lema 12.4 tenemos que $\nu_2(H) = |H|_{\{2,7\}'}/3$ (notar que $|H|_{\{2,7\}} = 56$). Usando el Lema 12.5 tenemos que $|H|_{\{2,7\}'}/3$ divide a $\nu_2(G) = a$, el cual es de nuevo impar.

Usando los lemas 12.4 y 12.5 tenemos que $\nu_3(H) = q^3+1$ divide $\nu_3(G) = b$ (notar que $q^3 + 1$ es par). Con todo lo anterior $(q^3 + 1, |H|_{\{2,7\}'}/3) = 1$ y $q^3 + 1$ es un $\{2, 7\}$-número que divide a $|H|$, y por tanto $q^3 + 1$ divide a 56, absurdo ($q = 3^{2n+1} \geq 9$).

Concluimos así la existencia de un τ-Hall nilpotente H_τ, y dada la similitud en la construcción de τ y ρ, concluimos la existencia de un ρ-Hall nilpotente H_ρ de forma que $G = H_\tau H_\rho$ y por Teorema de Wielandt-Kegel G es resoluble.

$\square$

Observamos que si G es un grupo finito con $|G| = p^a q^b$ entonces G tiene, a lo sumo, dos números de Sylow, de donde G es resoluble por el teorema anterior. Tenemos así que este resultado es una generalización del Teorema de Burnside.

Bibliography

[1] N. Chigira. Number of Sylow subgroups and p-nilpotence of finite groups. In: *J. Algebra* 201 (1998), pp. 71–85. URL: https://doi.org/10.1006/jabr.1997.7268 (ver p. 79).

[2] K. Gruenberg and J. Roseblade. *The collected works of Philip Hall*. Oxford University Press, USA, 1988. ISBN: 0198532547. URL: https://isbnsearch.org/isbn/0198532547 (ver p. 61).

[3] M. Hall. On the number of Sylow subgroups in a finite group. In: *Journal of Algebra* 7.3 (1967), pp. 363–371. URL: https://doi.org/10.1016/0021-8693(67)90076-2 (ver p. 66).

[4] D. Holt and P. Rowley. On products of Sylow subgroups in finite groups. In: *Archiv der Mathematik* 60.2 (1993), pp. 105–107. URL: https://doi.org/10.1007/BF01199094 (ver p. 42).

[5] I. M. Isaacs. *Algebra: A Graduate Course*. Amer. Math. Soc., 1994. ISBN: ISBN-13: 978-0-8218-4799-2. URL: https://bookstore.ams.org/gsm-100/ (ver pp. 32, 37).

[6] I. M. Isaacs. *Finite Group Theory*. Vol. 92. Amer. Math. Soc., 2008. URL: https://www.ams.org/books/gsm/092/gsm092-endmatter.pdf (ver pp. 23, 51).

[7] G. Kaplan and D. Levy. Sylow products and the solvable radical. In: *Archiv der Mathematik* 85.4 (2005), pp. 304–312. URL: https://doi.org/10.1007/s00013-005-1366-2 (ver p. 42).

[8] F. Luca. Groups with two Sylow numbers are solvable. In: *Arch. Math.* 71 (1998), pp. 95–96. URL: https://doi.org/10.1007/s000130050238 (ver p. 79).

[9] A. Moreto. Groups with two Sylow numbers are the product of two nilpotent Hall subgroups. In: *Arch. Math.* 301-304 (2012). URL: https://doi.org/10.1007/s00013-012-0429-4 (ver p. 79).

[10] A. Moreto. Sylow numbers and nilpotent Hall subgroups. In: *J. Algebra* 379 (2013), pp. 80–84. URL: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.12.030 (ver p. 55).

[11] A. Moreto. The average number of Sylow subgroups of a finite group. In: *Mathematische Nachrichten* 287.10 (2014), pp. 1183–1185. URL: http://dx.doi.org/10.1002/mana.201300064 (ver p. 75).

[12] G. Navarro. Number of Sylow subgroups in p-solvable groups. In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 131.10 (2002), pp. 3019–3020. URL: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-03-06884-9 (ver p. 67).

[13] J. Rotman. *An Introduction to Theory of Goups*. Springer, 1999. URL: doi.org/10.1007/978-1-4612-4176-8 (ver p. 39).

[14] A. Turull. The number of Hall π-subfroups in π-separable groups. In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 132.9 (2003), pp. 2563–2565. URL: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-04-07412-X (ver p. 70).

[15] J. Zhang. Sylow numbers of finite groups. In: *J. Algebra* 176 (1995), pp. 111–123. URL: https://doi.org/10.1006/jabr.1995.1235 (ver p. 79).