

**Vasile NEAMȚU**

# ELECTROTEHNICĂ

*Suport de curs*



**U.T.PRESS**  
**CLUJ-NAPOCA, 2013**



Editura U.T.PRESS  
Str. Observatorului nr. 34  
C.P. 42, O.P. 2, 400775 Cluj-Napoca  
Tel.:0264-401999; Fax: 0264 - 430408  
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro  
<http://www.utcluj.ro/editura>

Director: Prof.dr.ing. Daniela Manea  
Consilier editorial: Ing. Călin D. Câmpean

Recenzia: Prof.dr.ing. Eugeniu Man

Copyright © 2013 Editura U.T.PRESS  
Toate drepturile asupra versiunii în limba română aparțin Editurii U.T.PRESS.  
Reproducerea integrală sau parțială a textului sau ilustrațiilor din această carte este  
posibilă numai cu accordul prealabil scris al editurii U.T.PRESS.  
Multiplicarea executată la Editura U.T.PRESS.

**ISBN 978-973-662-838-2**

Tiraj: 100 exemplare

# ELECTROTEHNICĂ și MAȘINI ELECTRICE

(2 ore curs + 1 ore laborator / săptămînă)

- Responsabil disciplină: prof.dr.ing. Vasile NEAMȚU
  - departamentul: Electrotehnica și Măsurări
  - facultatea: Inginerie Electrică

[Vasile.Neamtu@et.utcluj.ro](mailto:Vasile.Neamtu@et.utcluj.ro)
- Bibliografie obligatorie pentru curs:

R. Morar și alții, *Electrotehnica și mașini electrice*,  
curs, vol. 1, Litografia UTC-N, 1989;

V. Neamțu, *Mașini electrice*,  
curs, editura MEDIAMIRA, Cluj-Napoca, 2007

## FIŞA DISCIPLINEI (extras)

Semestru	Tipul disciplinei	Curs	Aplicații	Curs	Aplicații	Studiu indiv.	TOTAL	Credite	Forma de verificare			
		[ore/săptămîna]		[ore/semestr]u								
		C	L		L							
<b>3</b>	Fundamentală	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>28</b>	<b>28</b>	<b>42</b>	<b>98</b>	<b>3</b>	<b>examen</b>			

### **Cunoștințe teoretrice, (ce trebuie să cunoască)**

Sa cunoasca problemele fundamentale ale electromagnetismului;

Sa cunoasca (la nivel de utilizator) principiile de functionare ale principalelor aplicatii in tehnica a fenomenelor electrice si magnetice; Sa stie sa calculeze valorile marimilor si parametrilor electrici pentru un circuit electric simplu.

### **Abilități dobândite: (ce știe să facă)**

Sa cunoasca principalele semne conventionale din schemele electrice si electronice;

Sa stie sa citeasca o schema electrica desfasurata;

Sa stie sa treaca o schema electrica din simbolizarea veche in simbolizarea noua (actuala);

Sa utilizeze indicatorul de tensiune si multimetrul (digital sau analogic) la masurarea marimilor si parametrilor electrici, precum si la depanare unui montaj electric simplu;

Sa cunoasca construcția și funcționarea principalelor aparate si mașini electrice;

Sa poata sa identifice caracteristicilor aparatelor si consumatorilor electrici dupa scala aparatului sau placuta sa indicatoare;

Sa-si creeze deprinderi practice de a deservi un montaj electric in deplina siguranta.

## A. Conținutul cursului

- C1, C2 - Marimi electrice și magnetice. (4 ore).  
C3 – C5 - Legile și teoremele electromagnetismului. (6 ore).  
C6 – C8 - Bazele teoriei circuitelor electrice (6 ore).  
C9 - Elemente de circuit electric în regim sinusoidal (2 ore).  
C10 – C12 - Rezolvarea circuitelor electrice liniare de c.a. monofazat (6 ore).  
C13, C14 - Circuite electrice trifazate (4 ore).

## B1. Conținutul aplicațiilor (lucrări de laborator):

vezi: Fișa activității de laborator

## B2. Sala laborator: C 202

## Modul de examinare și atribuire a notei

Modul de examinare	Prezența la examen este condiționată de obținerea notei <b>L ≥ 5</b> . Examen scris, <b>cu și fără</b> bibliografie la vedere (50'+50').
Componentele notei	Nota la examen <b>E</b> este suma punctelor alocate subiectelor de pe bilet. Nota la laborator <b>L</b> este media notelor testelor de laborator plus bonificația de activitate și susținere mapă.
Nota finală	Nota finală: <b>N = 0,5(E + L) + Bonificația de prezență la curs*</b>  <u>_____</u> <b>*Bonificatia (max. 1 punct) se acorda la o prezenta ≥ 7 cursuri.</b>

## Fișă activității de laborator

Sapt. nr. data	Denumirea lucrării de laborator	Bibliografie	Conspect prealabil	Tema de casa	Observatii
1	Aparate de masura analogice si numerice. Indicatoare de tensiune. Masurarea marimilor si parametrilor electrici cu un multimetru.	B1: p.18-36	NU	T1: Calculul unui aparat de masura	lucrare comună cu semigrupa
2	Norme privind securitatea muncii în laboratoarele de Electrotehnica. Masurarea rezistenței electrice a corpului uman.	B1: p.1-7	NU	T2: 5 concluzii justificate	
3	Reguli de întocmire și citire a schematicelor electrice: STAS 7070/78 și 1590.	B1: p.254-259	NU	T3: Puneti întrebări și răspundeti	
4	Principii de întocmire și citire a schematicelor electrice: SR EN 60.617 și SR EN 61.082 -1: 2007.	B3: p.5-28 / sau B2: p.7-30	NU	T4: Completati tab. 1.3 / B3: p.14-15	
5	Schematici comentate. Repartizarea temelor testului nr. 1. Fig. .... / B3. Detalii B1: p.....	B3: p.35 - 43	NU	NU	
6	L 2.1 Primul montaj practice cu un contactor. Aparate electrice de conectare, comutatie si protectie.	B1: p.37-46	NU	T5: Schema electrica transpusa	lucrare realizata la 3 standuri
7	L 2.5 Actionarea unui motor electric reversibil.	B1 p.58-62	XEROX B3: p.36	T6:Completare lista echipament	lucrare comună cu semigrupa
8	<b>Testul nr.1:</b> Citirea unei scheme electrice. Identificarea aparatelor unui montaj electric realizat în laborator.	Schema desenată de candidat, conform standardelor SR EN 60.617 și SR EN 61.082 -1: 2007 – vezi precizările atașate prezentei fise.			
9	L 2.6 Comanda unui motor electric cu două turării.	B1: p. 62-70	DA	Schema electrica in SR EN 60.617	ciclu de 4 lucrări, realizate pe grupe de 3 - 4 studenți, prin permutări, pe parcursul saptămînilor 9-12
10	L 2.7 Pornirea automată Y/Δ a motorului electric asincron trifazat.	B1: p.70-76	DA	Schema electrica in SR EN 60.617	
11	L 2.4 Studiul rezonanței electrice (L3).	B2: p.54-60	XEROX p.54-60	Diagrama fazorială (un regim de funcț.)	
12	L 3.4 Imbunatatirea factorului de putere la consumatori prin condensatoare.	B1: p.135-142	DA	Schema electrica in SR EN 60.617	
13 / 14	<b>Testul nr. 2:</b> Test teoretic și practic. Prezentarea mapei lucrarilor de laborator	Intrebări teoretice și test practic (verificarea, corectarea și experimentarea unui montaj): lucrările de laborator din ciclul de lucrări			

NOTA LA ACTIVITATEA DE LABORATOR: 0,5( nota testului 1 + nota testului 2) + bonificatia de activitate pe parcurs si sustinere mapa.

**Tematica activitatii de laborator**  
An universitar 2011/2012; semestrul 1

Nr. sedintei	Tematica lucrarii de laborator	Bibliografie*	Conspect prealabil	Tema de casa	Observatii
1	Aparate de masura analogice si numerice. Indicatoare de tensiune. Masurarea marimilor si parametrilor electrici.	B1 p.18-36;294	NU	DA	lucrare comună cu semigrupa
2	Norme privind sanatatea si securitatea muncii in laboratoarele de Electrotehnica. Masurarea rezistentei corpului uman.	B1 p.1-7	NU	DA	lucrare comună cu semigrupa
3	Principii de intocmire si citire a schemelor electrice: STAS 12120/83 si 11381. Scheme electrice comentate.	B3/B2 p.5 -43	NU	DA	lucrare comună cu semigrupa
4	L 2.1 Primul montaj practic cu un contactor. Aparate electrice de conectare si comutatie.	B1 p.37-46	NU	DA	lucrare realizata la 2 standuri
5	L 2.5 Actionarea unui motor electric reversibil. L 2.6 Comanda unui motor electric cu doua turatii.	B1 - p.58-62 B1 - p. 62-70	XEROX	NU	ciclu de 4 lucrari, realizate pe grupe de 2 - 3 studenti, prin permutari circulare
6	L 3.4 Imbunatatirea factorului de putere la consumatori. L 2.4 Studiul rezonantei electrice.	B1 - p.135-142 B2 - p.54-60	XEROX	NU	
7	<b>TEST</b> - citirea unei scheme electrice (intocmita de student) – <b>obligatoriu</b> si prezentarea mapei lucrarilor de laborator - <b>facultativ</b>				
<b>NOTA LA ACTIVITATEA DE LABORATOR:</b> <b>nota testului + bonificatia de teme si activitate</b> pe parcursul sedintelor de laborator					

**BIBLIOGRAFIE****B1:** R. Morar; Electrotehnica si masini electrice – lucrari practice, vol. 1; 621.3/M89.1**B2:** R. Morar; Electrotehnica si masini electrice – lucrari practice, vol. 2; 621.3/E35.ℓ**B3:** A. Iuga; Scheme electrice – principii de intocmire, seria M/E; 621.3/I62.s

Responsabil disciplina,

Prof.dr.ing. Vasile NEAMTU

R. MORAR

AL. IUGA

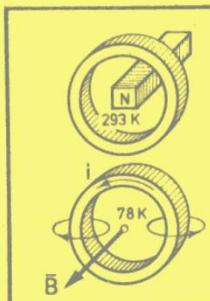
621.3 / E35c

E. MAN

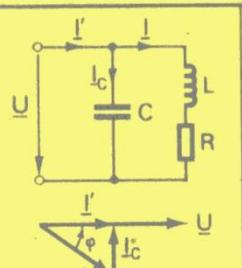
V. NEAMȚU

L. DĂSCĂLESCU

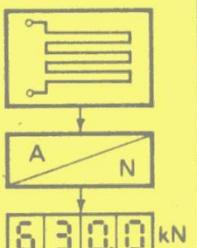
# ELECTROTEHNICĂ SÌ MAȘINI ELECTRICE



ELECTROMAGNETISM



CIRCUITE



MĂSURĂRI

C u  
INSTITUTUL POLITEHNIC CLUJ

γ s

MEDIAMIRA  
2007

521.097

VASILE NEAMȚU

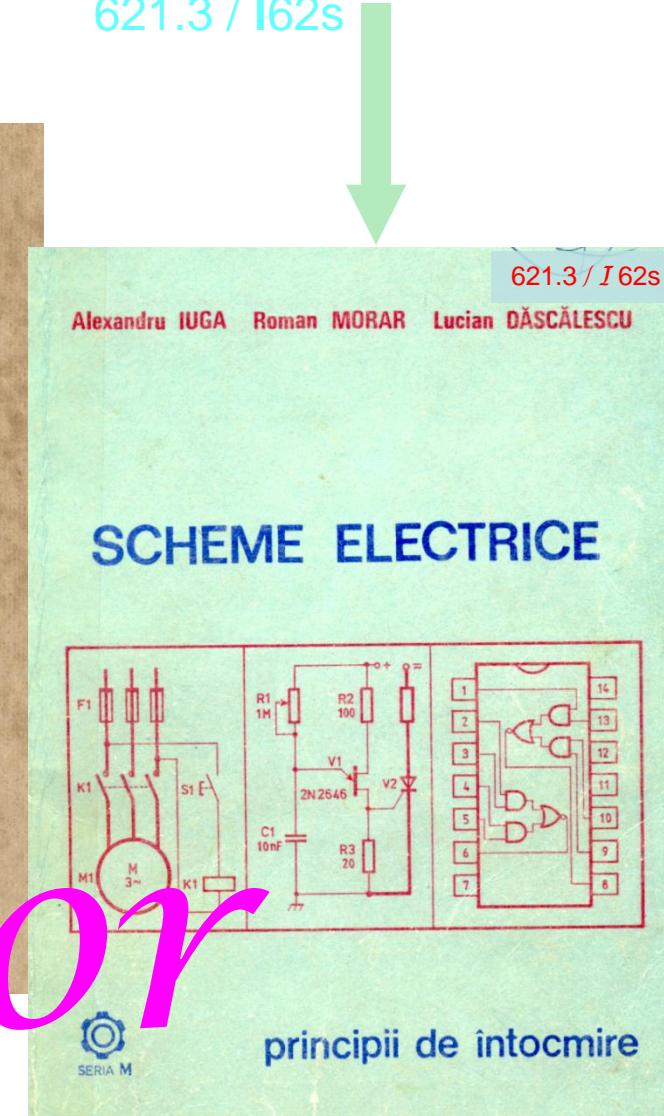
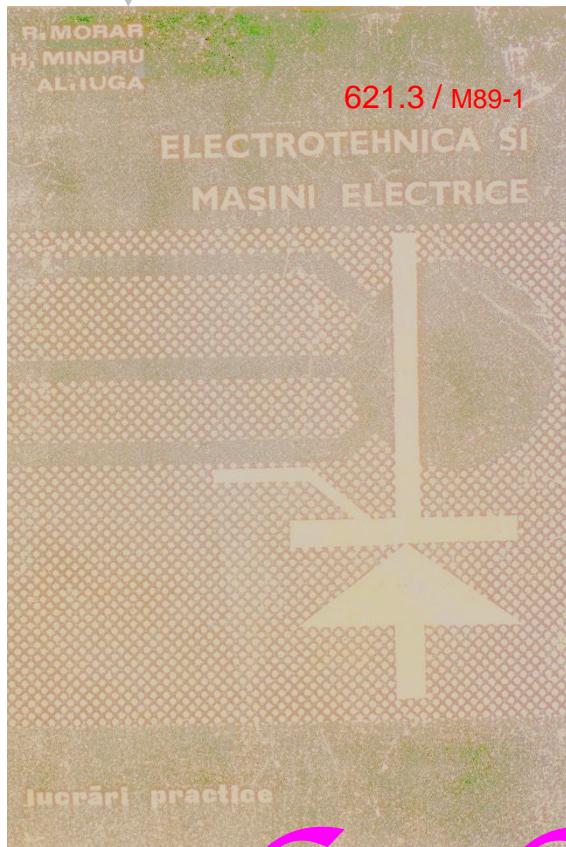
# MAȘINI ELECTRICE



**B1:** R. Morar, ş.a., *Electrotehnica și mașini electrice – lucrări practice*, vol. 1;  
621.3 / M89 -1

**B2:** R. Morar, ş.a., *Electrotehnica și mașini electrice – lucrări practice*, vol. 2  
621.3 / E35.Ł

**B3:** A. Iuga, ş.a., *Scheme electrice – principii de întocmire*, seria M/E  
621.3 / I62s



*laborator*

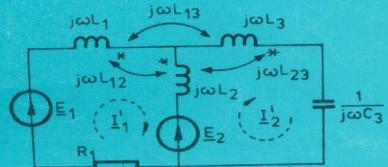
SERIA M

principii de întocmire

VASILE NEAMȚU

## BAZELE ELECTROTEHNICII

### Probleme



U.T.PRES

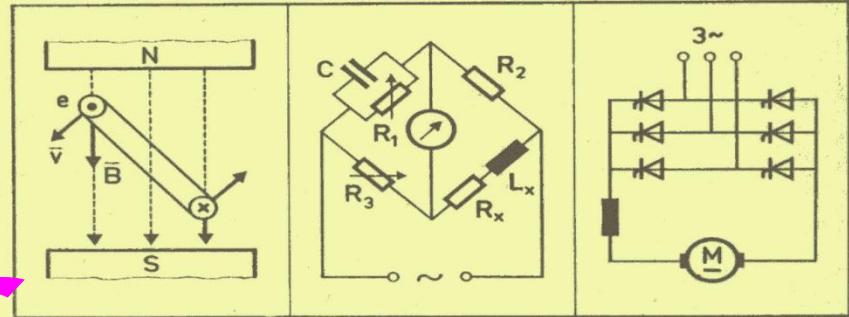
*probleme*

R. Morar, ş.a., *Electrotehnică și mașini electrice – probleme*; Lito UTC-N. 1990

R. MORAR  
E. MAN  
V. NEAMȚU  
L. DĂSCĂLESCU  
AL. IUGA

621.3 / E35s

## ELECTROTEHNICĂ ȘI MAȘINI ELECTRICE



Probleme

# Bibliografie completă și actualizată

621.3  
E 35

R. MORAR  
E. MAN  
V. NEAMȚU  
L. DĂSCĂLESCU  
AL. IUGA

621.3 / E35s

R. MORAR

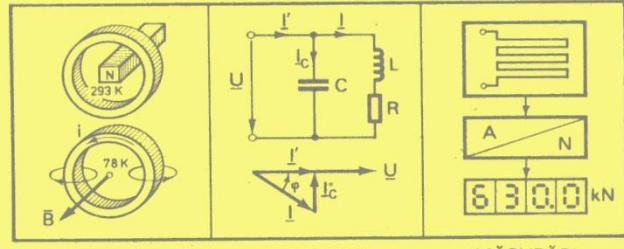
AL. IUGA

621.3 / E35c  
E. MAN

V. NEAMȚU

L. DĂSCĂLESCU

## ELECTROTEHNICĂ și MAȘINI ELECTRICE



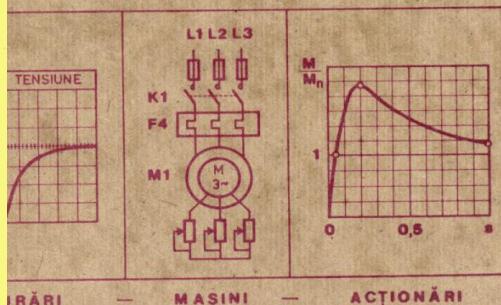
INSTITUTUL POLITEHNIC CLUJ

curs

R. MORAR  
L. DĂSCĂLESCU  
AL. IUGA  
V. NEAMȚU  
E. MAN

621.3 / E35t

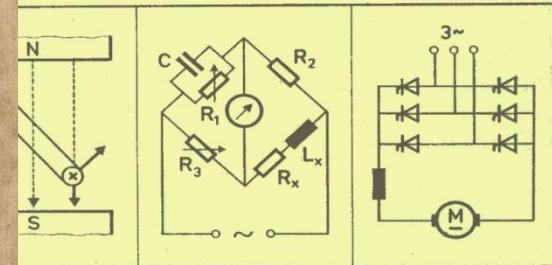
## ELECTROTEHNICĂ și MAȘINI ELECTRICE



Lucrări practice

Îndrumator de laborator

## ELECTROTEHNICĂ și MAȘINI ELECTRICE



Probleme

probleme

# SUPPORT de CURS

## INTRODUCERE

17 slides

## Cap.1 MARIMI ELECTRICE și MAGNETICE

34 slides

### 1.1 MARIMI PRIMITIVE

### 1.2 MARIMI DERIVATE

1 problema rezolvata + 4 probleme propuse

## Cap.2 LEGILE ELECTROMAGNETISMULUI

39 slides

### 2.1 LEGI de MATERIAL

### 2.2 LEGI GENERALE

9 probleme rezolvate + 10 probleme propuse

## Cap.3 BAZELE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

50 slides

### 3.1 TOPOLOGIE și MARIMI

### 3.2 ECUAȚIILE CIRCUITELOR ELECTRICE

### 3.3 ELEMENTE DIPOLARE

13 probleme rezolvate + 17 probleme propuse

## Cap.4 CIRCUITE ELECTRICE LINIARE IN REGIM PERMANENT

46 slides

### 4.1 CIRCUITE MONOFAZATE

### 4.2 CIRCUITE TRIFAZATE

11 probleme rezolvate + 13 probleme propuse

# ELECTROMAGNETISM

Studiul aplicațiilor în tehnică a fenomenelor electrice și magnetice se face în conformitate cu **teoria macroscopică**:

- se face abstracție de structura discontinuă a materiei;
- între corpurile electrizate și magnetizate se exercită interacțiuni electromagnetice (forțe și cupluri de forte) prin **cîmp electromagnetic\***;
- interacțiunile se transmit instantaneu (cu **viteza luminii\*\***) în timp și spațiu.

Fenomenele electromagnetice se pot desfăsura în 4 **regimuri**: static, staționar, cvasistaționar și nestaționar (variabil).

---

\* Cimpul electromagnetic este o formă de manifestare a materiei, diferita de substanța corpurilor, care poseda energie și impuls, există în interiorul corpurilor și în afara lor și constituie suportul fizic al interacțiunilor electromagnetice. Cimpul electric și magnetic sunt aspecte particulare ale cimpului electromagnetic.

\*\* viteza luminii  $c = 3 \cdot 10^8$  [m/s].

# Cap. 1 MĂRIMI ELECTRICE și MAGNETICE

pag. B1\*

## 1.1 MĂRIMI PRIMITIVE

1.1.1 Sarcina electrică și intensitatea cîmpului electric în vid	2
1.1.2 Momentul electric	5
1.1.3 Inductia magnetică	6
1.1.4 Intensitatea curentului electric de conducție	7
1.1.5 Momentul magnetic	8

## 1.2 MĂRIMI DERIVATE

1.2.1 Densități de sarcină electrică	11
1.2.2 Polarizația electrică și magnetizația	12
1.2.3 Densitatea curentului electric de conducție	13
1.2.4 Tensiune electrică, tensiune electromotoare și flux electric	14
1.2.5 Tensiune magnetică, solenăție și flux magnetic	19

1 problemă rezolvată + 4 probleme propuse

---

\* - R. Morar s.a.; *Electrotehnică și mașini electrice* – curs, vol. 1; Lito UTC-N; 621.3/E35c

# Cap. 2 LEGILE ELECTROMAGNETISMULUI

pag. B1\*

## 2.1 LEGI de MATERIAL

2.1.1 Legea conducedării electrice (Ohm)

24

2.1.2 Legea polarizației temporare

28

2.1.3 Legea magnetizației temporare

29

## 2.2 LEGI GENERALE

2.2.1 Legile de legătură (constitutive)

30

2.2.2 Legile fluxurilor

32

2.2.3 Legea inducției electromagnetice

34

2.2.4 Legea circuitului magnetic

46

2.2.5 Legea conservării sarcinii electrice

51

2.2.6 Legea efectului electrocaloric

54

9 probleme rezolvate + 10 probleme propuse

---

\* - R. Morar s.a.; *Electrotehnica și mașini electrice* – curs, vol.1; Lito UTC-N; 621.3/E35c

# Cap. 3 BAZELE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

pag. B1\*

## 3.1 TOPOLOGIE și MĂRIMI

3.1.1 Topologia circuitelor	152
3.1.2 Clasificarea circuitelor	153
3.1.3 Mărimi sinusoidate	155
3.1.4 Caracterizarea dipolului electric pasiv	159
3.1.5 Puteri electrice în regim permanent sinusoidal	162

## 3.2 ECUAȚIILE CIRCUITELOR ELECTRICE

3.2.1 Teorema lui Joubert	164
3.2.2 Teoremele lui Kirchhoff	166
3.2.3 Teorema conservării puterilor	167

## 3.3 ELEMENTE DIPOLARE

3.3.1 Elemente active (surse, generatoare)	170
3.3.2 Rezistoare electrice	172
3.3.3 Bobine electrice	174
3.3.4 Condensatoare electrice	177

13 probleme rezolvate + 17 probleme propuse

# Cap. 4 CIRCUITE ELECTRICE LINIARE ÎN REGIM PERMANENT

## 4.1 CIRCUITE MONOFAZATE

pag. B1\*

4.1.1 Metode de rezolvare	185
4.1.2 Metode de transfigurare	188
4.1.3 Rezonanță electrică	213
4.1.4 Imbunătățirea factorului de putere	219
4.1.5 Circuite electrice simple	216

## 4.2 CIRCUITE TRIFAZATE

4.2.1 Sisteme trifazate	201
4.2.2 Conexiunile circuitelor trifazate	203
4.2.3 Rezolvarea sistemelor trifazate conectate în stea	205
4.2.4 Rezolvarea sistemelor trifazate conectate în triunghi	206
4.2.5 Puteri electrice în rețele trifazate	207
4.2.6 Metoda componentelor simetrice	----

11 probleme rezolvate + 13 probleme propuse

## **PRECIZARI privind testele de laborator**

- Prezentarea: cu semigrupa, la data si ora programata, saptamnile 13-14;
- Materiale: fisa activitatii de laborator (obligatoriu), schema electrica repartizata (obligatoriu), mapa lucrarilor de laborator (facultativ);
- Fiecare student are alocate 10 minute: 7' la dispozitia studentului si 3' pentru raspuns la intrebari (daca e cazul);
- Studentul care a efectuat numai 9 lucrari, nu-si poate incheia activitatea de laborator si **nu se poate prezenta la lucrarea scrisa in sesiunea programata** – recupereaza cel putin 2 din lucrarile lipsa (**cu plata**) si se prezinta la examenul scris in sesiunea de restante;
- Studentul care are mai putin de 9 lucrari efectuate, **va contracta disciplina anul universitar viitor**;
- Schema electrica, poate fi sustinuta, dacă indeplineaste conditiile:
  - desenata pe format A4;
  - eventualele greseli, gasite in schema, corectate cu rosu;
  - lista de echipament (legenda), completata – din bibliografie – cu principalele caracteristici ale aparatelor, se trece pe verso-ul formatului;
  - deasupra schemei electrice se trec, cu pix sau cerneala, numele si semigrupa;
  - sub schema se trece denumirea acesteia.
- Programarea sustinerii mapei lucrarilor de laborator se face in data sustinerii testului; ordonarea lucrarilor in mapa se face conform fisei de laborator, iar localizarea (reperarea) tip repertoriu.

# Precizări privind examenul scris

- un singur bilet, cu punctajul afișat;
- 50' - fără bibliografie – se predă lucrarea (rămîne biletul);
- 50' - cu bibliografie:
  - cărti, notițe, suport de curs etc.;
  - fără PC, notebook sau laptop;
  - cu calculator profesional de birou – pentru calcule.
- prezentarea cu grupa, la ora și sala din planificare;
- fără telefoane active;
- cu un act de identitate;
- nu se împrumută bibliografia (se poate calculatorul);
- frauda sau încercarea de fraudă atrage exmatricularea;
- rezultatele pe SIMAC sau la secretariat (pentru restantieri).

Bine omule ca-i venit in viata,  
Bine omule ca-i venit in viata,  
sa traiesti, un timp, printre muritori.  
sa traiesti, un timp, printre muritori.

# Cap. 1 MĂRIMI ELECTRICE și MAGNETICE

pag. B1\*

## 1.1 MĂRIMI PRIMITIVE

1.1.1 Sarcina electrică și intensitatea cîmpului electric în vid	2
1.1.2 Momentul electric	5
1.1.3 Inductia magnetică	6
1.1.4 Intensitatea curentului electric de conducție	7
1.1.5 Momentul magnetic	8

## 1.2 MĂRIMI DERIVATE

1.2.1 Densități de sarcină electrică	11
1.2.2 Polarizația electrică și magnetizația	12
1.2.3 Densitatea curentului electric de conducție	13
1.2.4 Tensiune electrică, tensiune electromotoare și flux electric	14
1.2.5 Tensiune magnetică, solenătie și flux magnetic	19

1 problemă rezolvată + 4 probleme propuse

---

\* - R. Morar s.a.; *Electrotehnică și mașini electrice* – curs, vol. 1; Lito UTC-N; 621.3/E35c

# Cap. 1. MĂRIMI ELECTRICE și MAGNETICE

MĂRIMI PRIMITIVE	MĂRIMI DERIVATE
Se introduc pe baza experienței	Se definesc cu ajutorul mărimilor primitive, prin operații matematice

- fenomen;
- relație de definiție;
- unitate de măsură (**UM**).

derivare, sau integrare

mărimile electrice și magnetice **caracterizează** atât cîmpul electromagnetic cît și corpurile (substanța)

componenta electrică -

componenta magnetică -



- local: la nivelul unui punct

- global: pe o curbă, arie sau volum

# 1.1. MĂRIMI PRIMITIVE

Mărimile primitive se introduc direct, pe cale experimentală, cu ajutorul forțelor și cuplurilor de forțe (acțiuni ponderomotoare)

Se introduc pe baza experienței	Caracterizează <b>global</b> CORPURILE	Caracterizează <b>local</b> CÎMPUL
stare ELECTRICĂ	sarcina electrică $q$ [C]	intensitatea cîmpului electric în vid $\underline{E}_v$ [V/m]
	momentul electric $\bar{p}$ [C·m]	
stare MAGNETICĂ	intensitatea curentului electric $i$ [A]	inducția magnetică în vid $\underline{B}_v$ [T]
	momentul magnetic $\bar{m}$ [A·m <sup>2</sup> ]	

[C] – Coulomb; [m] – metru; [V] – Volt; [A] – Amper; [T] - Tesla

## 1.1.1. SARCINA ELECTRICĂ și INTENSITATEA CÎMPULUI ELECTRIC în vid

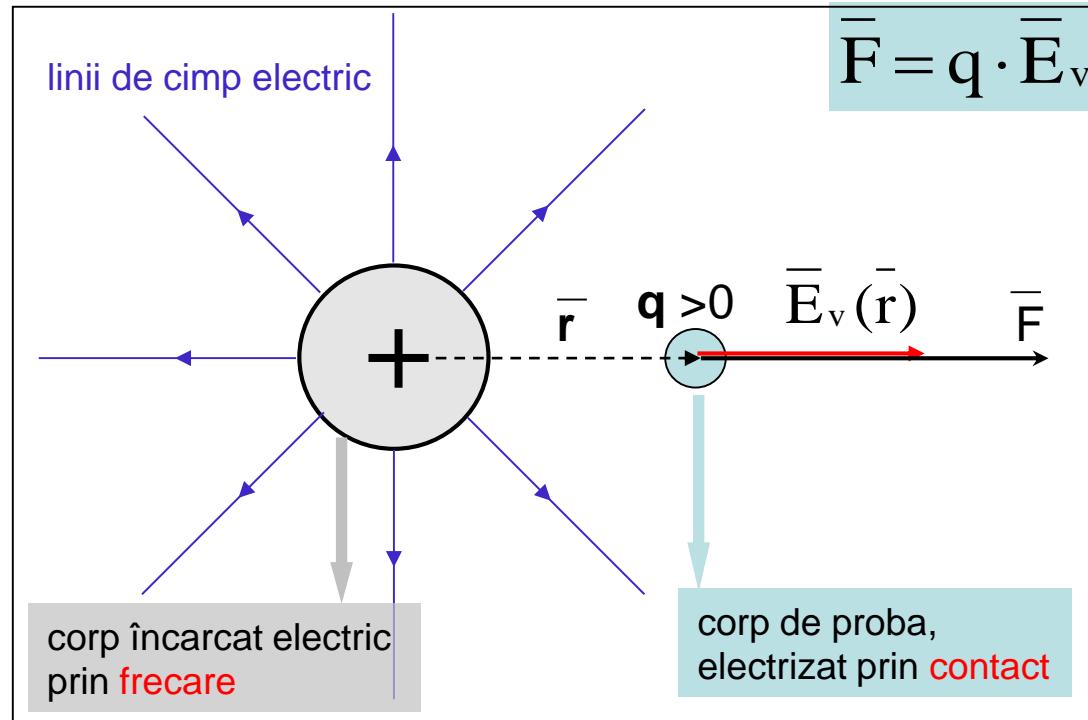


Fig. 1.1 Forța exercitată de câmpul electric asupra corpului electrizat

$\bar{E}_v$  - intensitatea câmpului electric în vid

- caracterizează local câmpul electric;
- $[\bar{E}_v]_{SI} = [\bar{E}_v] = V/m$ ;
- $E_{corona} = 31 \text{ [kV/cm]} = 31 \cdot 10^3 / 10^{-2} \text{ [V/m]}$   
 $= 31 \cdot 10^5 \text{ [V/m]} = 3,1 \text{ [MV/m]} .$

$q$  - sarcina electrică

- characterizează global **starea de încărcare electrică** a corpurilor;
- $[q]_{SI} = [q] = C$ ;
- $q_{electron} = -1,6 \cdot 10^{-19} [C]$ .

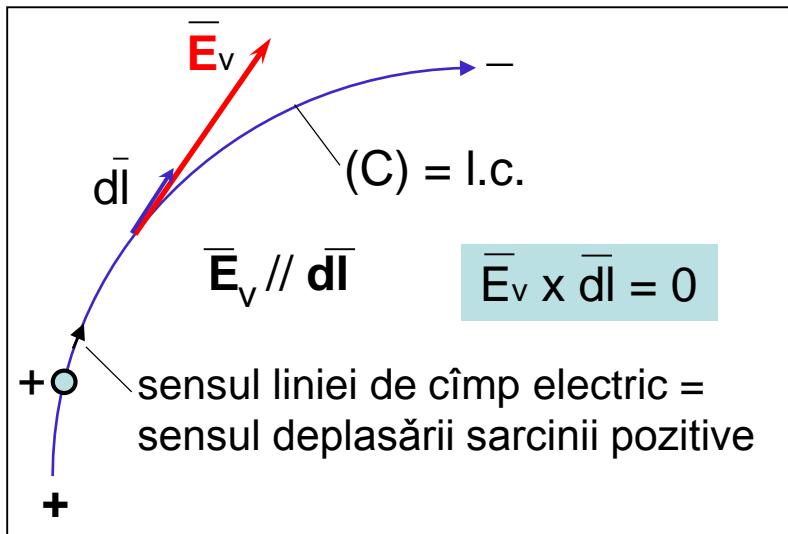


Fig. 1.2 Linie de câmp electric

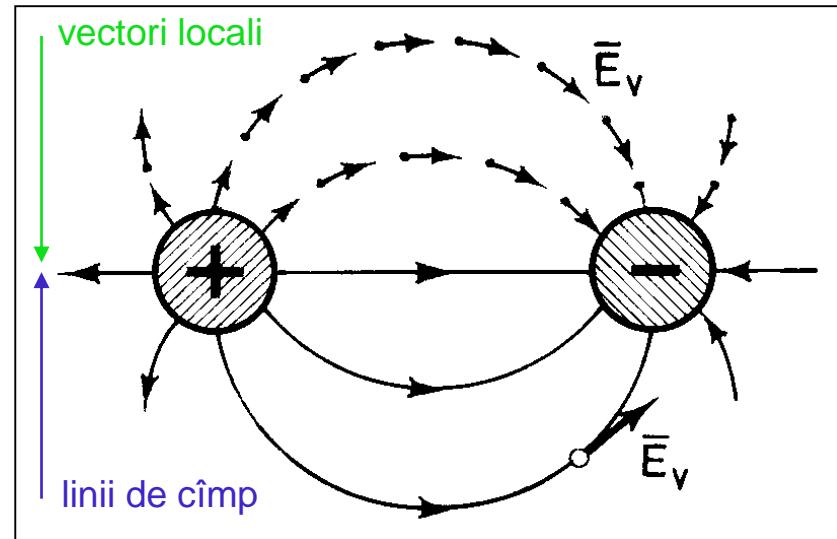


Fig. 1.3 Reprezentarea câmpului electric prin **vectori locali** și **linii de câmp**

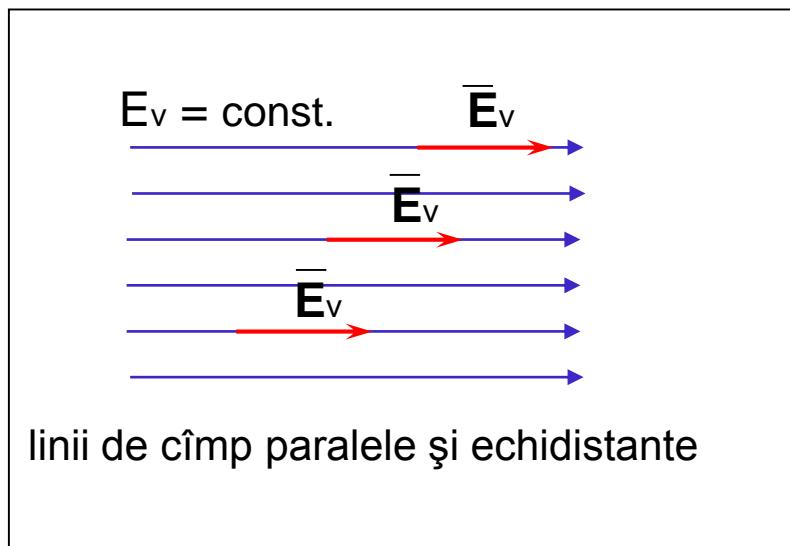


Fig. 1.4 Câmp electric omogen

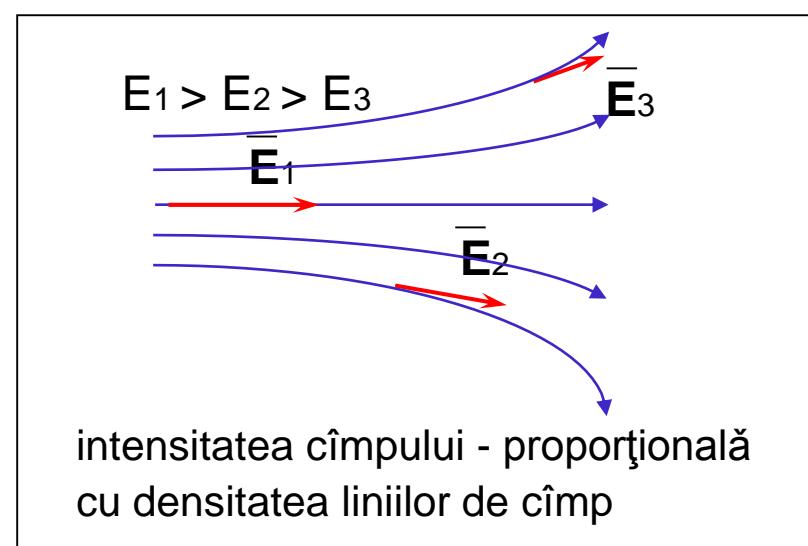


Fig. 1.5 Câmp electric neomogen

## Problema 1.1

Calculați forța exercitată între sarcini electrice punctiforme (forță Coulomb).

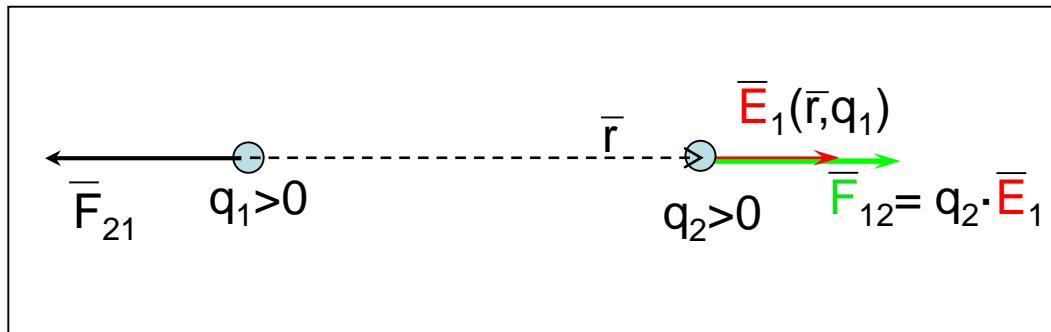


Fig. 1.6. Forță coulombiană

Rezolvare:

Cîmpul electric produs, la distanța  $r$ , de sarcina unui corp punctiform:

$$\bar{E}_1(\bar{r}, q_1) = \frac{q_1 \cdot \bar{r}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3}; \quad (\text{vezi problema 2.3})$$

Forța lui Coulomb:  $\bar{F}_{12} = q_2 \cdot \bar{E}_1 = \frac{q_1 \cdot q_2 \cdot \bar{r}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3} = -\bar{F}_{21}$

$$F_{12} = F_{21} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$$

Tema 1.1

Utilizînd principiul superpoziției spectrelor liniilor de cîmp electric, demonstrați existența cîmpului electric numai în spațiu dintre armăturile condensatorului electric plan.

## Încărcare electrică prin:

- frecare (triboelectrizare);
- contact electric; timp de transfer
- iradiere;
- efect corona; descărcare corona
- încălzire.

corpuri { conductoare;  
semiconductoare;  
izolatoare.

## ELECTROTEHNOLOGII

(tehnologii bazate pe cîmpuri electrice intese)

- xerocopiere;
- filtrarea electrostatică;
- vopsire electrostatică;
- electroseparare etc

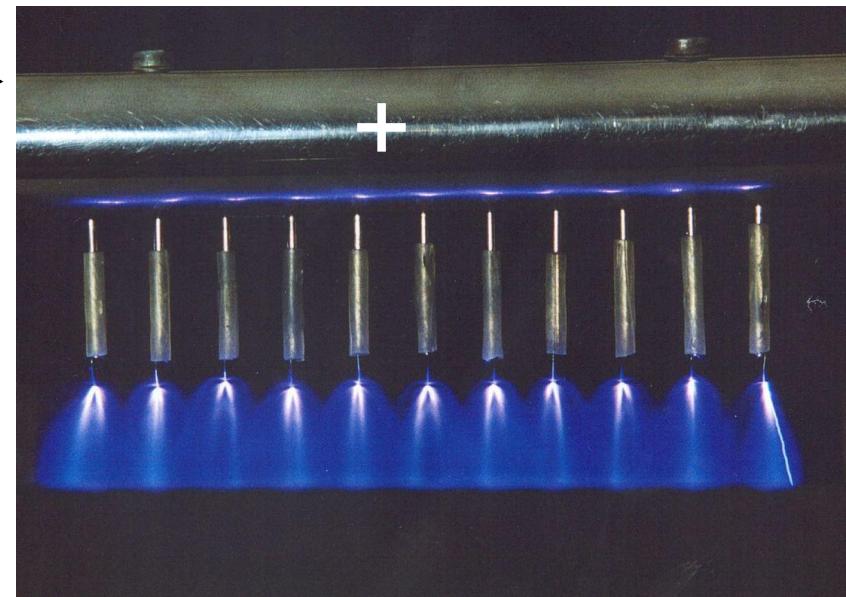
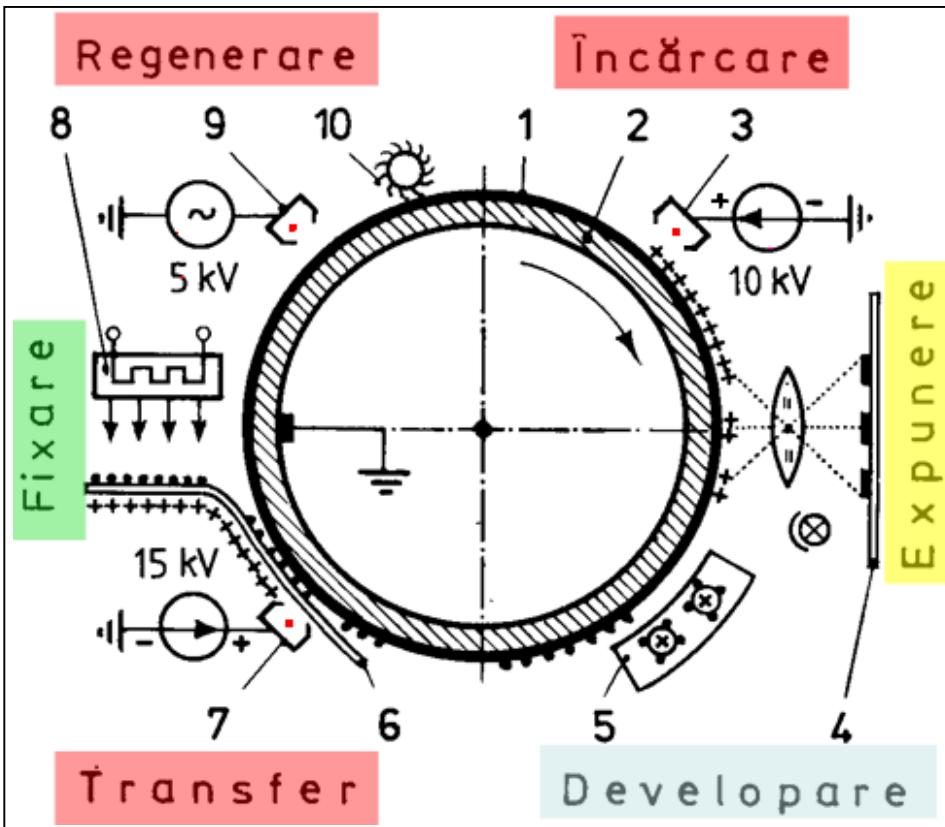


Fig. 1.7 Descărcarea corona pozitivă  
vîrfuri - plan

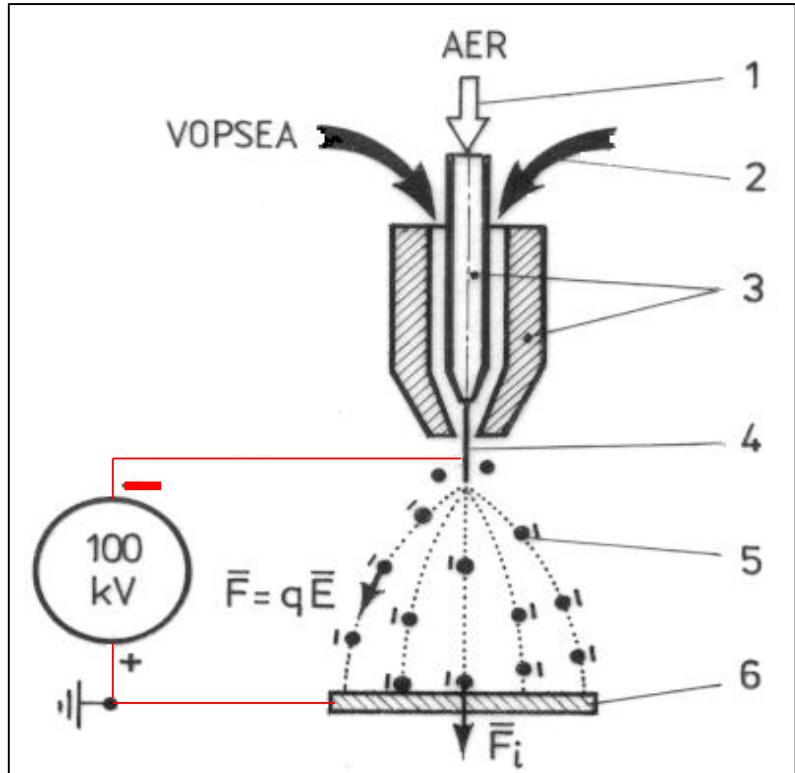


## Xerocopierea

**Fig. 1.8 Fazele xerocopierii pe strat cilindric fotoconductor**

- 1 – strat de seleniu (semiconductor);
- 2 – cilindru metalic de aluminiu;
- 3 – electrod corona de incarcare;
- 4 – original destinat copierii;
- 5 – cartus de toner - developer
- 6 – coala de hirtie pentru xerocacie;
- 7 – electrod corona de transfer;
- 8 – incalzitor pentru fixare;
- 9 – electrod corona de neutralizare;
- 10 – perie de stergere.

- ◆ Stratul de seleniu 1 se **incarca** uniform cu sarcina pozitiva, in cimp corona 3; prin inductie conductiva, suportul de aluminiu 2 obtine sarcina negativa.
- ◆ Prin-tr-un sistem optic, originalul 4 se **expune** pe suprafata fotoconductoare electrizata; prin fotoconductie se obtine imaginea latenta prin reducerea sarcinii electrice din zonele expuse;
- ◆ Particulele **developer - toner** 5, incarcate negativ, refac imaginea vizibila a originalului;
- ◆ **Transferul** imaginii se efectueaza incarcind uniform cu sarcina pozitiva acea fata a hirtiei 6 care nu intra in contact cu cilindru;
- ◆ Imaginea se **fixeaza** termic 8 (tonerul fiind termoplastice) pe hirtie;
- ◆ Dupa fiecare copiere, suprafata cilindrului rotativ se **regenereaza** prin neutralizarea sarcinii reziduale in c.a. 9 si stergerea tonerului cu peria 10.



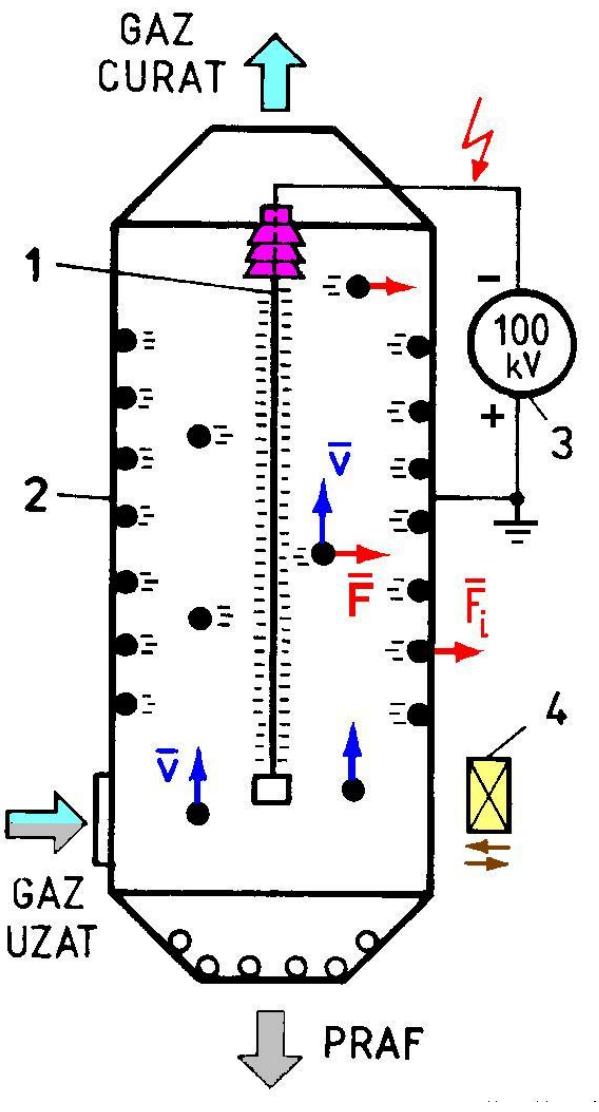
## Vopsirea electrostatică

**Fig. 1.9** Principiul vopsirii în cimp electric intens

- 1 – aer comprimat;
- 2 – vopsea (lac, email);
- 3 – ajutaje coaxiale;
- 4 – electrod corona;
- 5 – particule de vopsea, electrizate;
- 6 – piesa de vopsit.

- ◆ Cimpul electric de descarcare corona, dintre pistolul de vopsit și piesa, încarcă cu sarcina negativă particulele de vopsea;
- ◆ Pulverizarea se face pneumatic prin frecarea între aer și vopsea; viteza fluxului de aer controlează dimensiunile particulelor de vopsea;
- ◆ Traiectoriile particulelor electrizate urmează liniile cimpului electric;

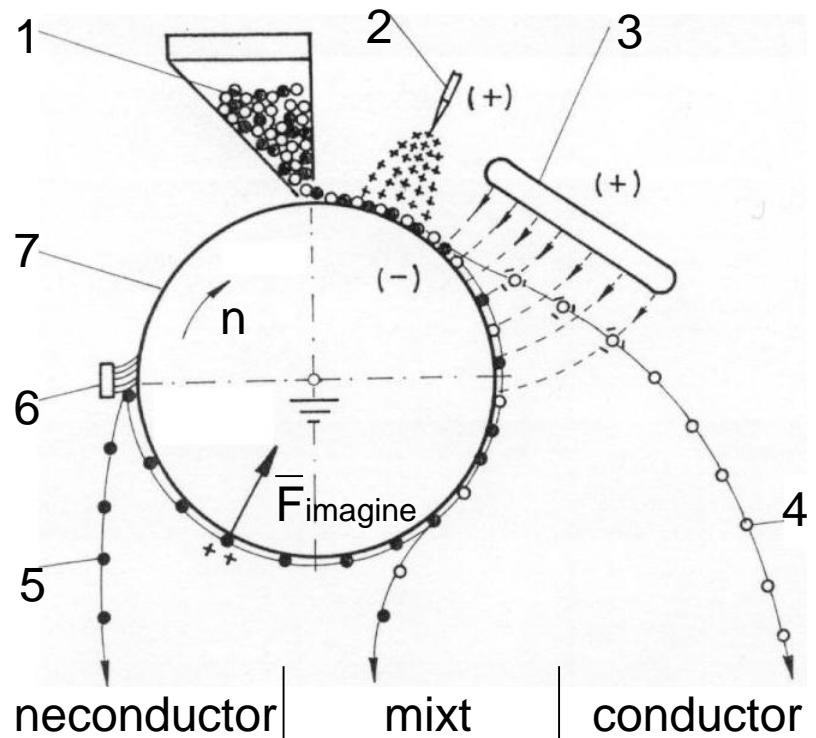
# Curațirea gazelor prin electrofiltrare



- ◆ Gazele uzate strabat vertical zona de cimp electric intens produsa intre electrozii 1 si 2, alimentati cu inalta tensiune (mentinuta la nivelul valorii de strapungere) de la sursa 3;
- ◆ Prin bombardament cu electronii generati de firul corona 1, particulele de praf in suspensie se incarca cu sarcina negativa;
- ◆ Sub actiunea fortei electrostatice  $\bar{F} = q \cdot \bar{E}$ , praful se depune pe electrodul de colectare;
- ◆ Prin scuturare mecanica, praful fixat pe electrodul tubular (de forta imagine  $\bar{F}_i$ ), praful cade in buncarul de colectare;
- ◆ Comanda prin  $\mu P$  a inaltei tensiuni, permite obtinerea unui efect maxim de electrizare a particulelor si de limitare a descarcarilor in scintei.

Fig. 1.10 Filtru vertical cu scuturare: 1 – electrod corona (de emisie); 2 – electrod de depunere (colectare); 3 – sursa de inalta tensiune (IT); 4 – dispozitiv de scuturare

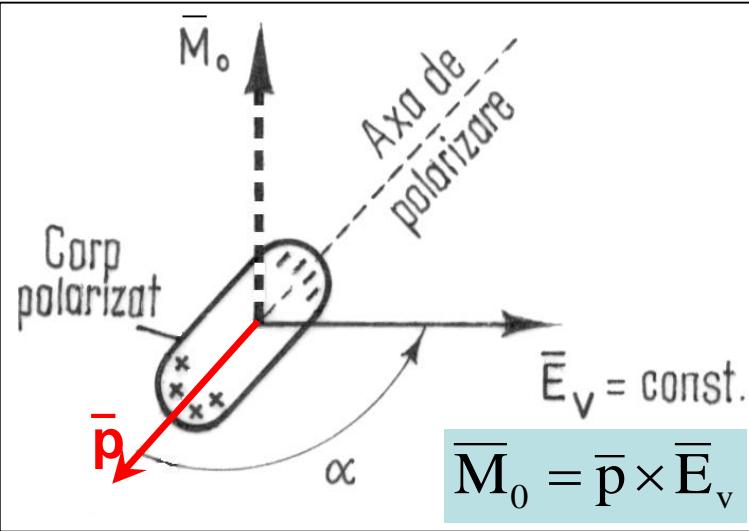
## Electrosepararea



**Fig. 1.11 Principiul electrosepararii materialelor granulare:** 1 – alimentator; 2 – electrod corona cu ace; 3 – electrod electrostatic; 4 – particule conductoare; 5 – particule neconductoare; 6 – perie de stergere; 7 – cilindru purtator.

- În zona cimpului electric intens, generat cu electrodul corona 2, particulele amestecului granular se încarcă cu sarcina electrică pozitivă, prin bombardament ionic (în cimp electric cu descărcare corona).
- La ieșirea din zona de cimp, particulele conductoare 4 se descarcă (cedind sarcina) în contact cu cilindrul metalic legat la pamant 7 și sunt deviate de forța centrifugă și forța cimpului electrostatic 3.
- Particulele neconductoare 5 (care se descarcă lent) rămân fixate, prin forța imagine, pe suprafața cilindrului rotitor, fiind desprinse de peria de stergere 6.

## 1.1.2. MOMENTUL ELECTRIC



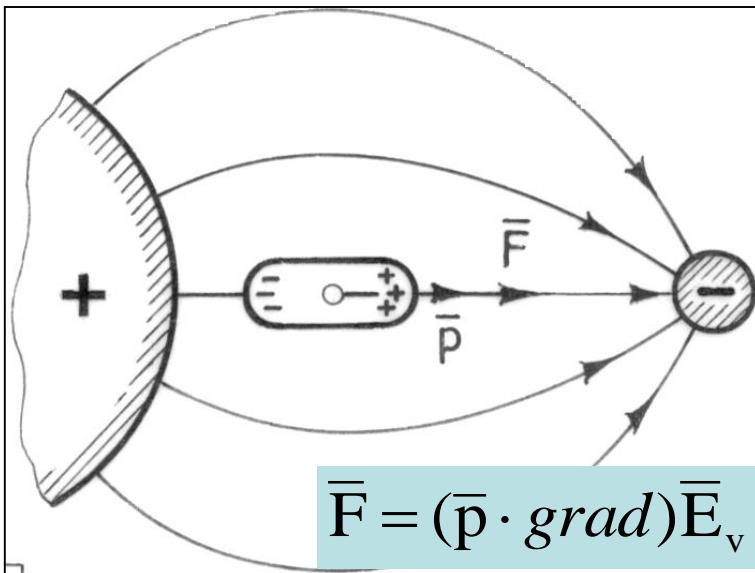
**Fig. 1.12** Cuplul exercitat de cîmpul electric omogen asupra corpului polarizat electric

- mărime vectorială ce caracterizează global **starea de polarizare electrică** a corpurilor;
- $[\bar{p}] = C \cdot m$ ;
- polarizare electrică:  $\begin{cases} - \text{temporară} \\ - \text{permanentă;} \end{cases}$

$$\bar{p} = \bar{p}_t(\bar{E}) + \bar{p}_p$$



- deformare mecanică – efect **piezoelectric**
- încălzire – efect **piroelectric**;
- solidificare în cîmp electric – efect de **electret**



**Fig. 1.13** Forța cîmpului electric neomogen

### 1.1.3. INDUȚIA MAGNETICĂ în vid

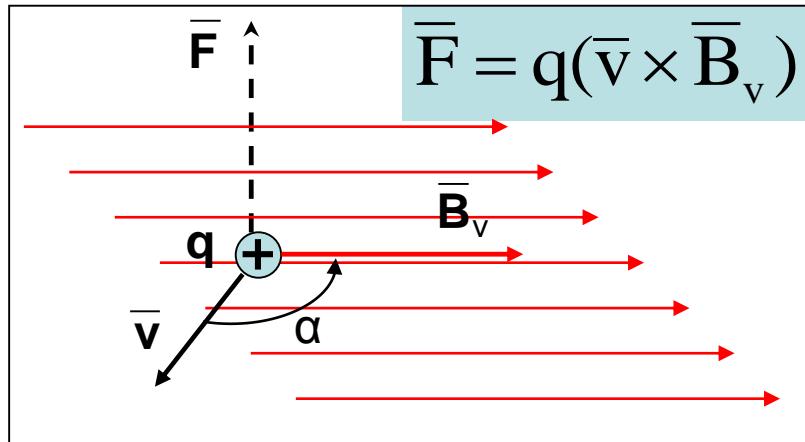


Fig. 1.14 Forța Lorentz

- mărime vectorială ce caracterizează local **cîmpul magnetic**;
- $[\vec{B}_v] = T$ ; produs de

- magneți permanenți;
- bobine electrice parcuse de curenți electrici.

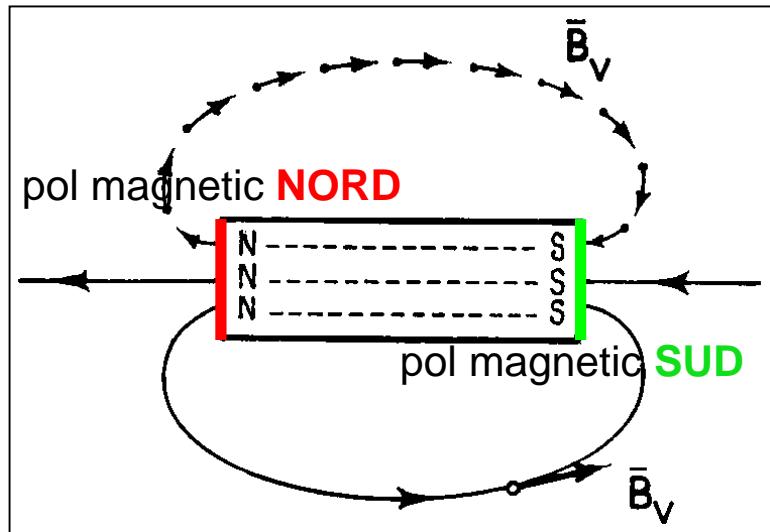


Fig. 1.15 Reprezentarea câmpului magnetic prin vectori locali și linii de câmp

Aplicațiile forței Lorentz generalizată:  $\bar{F}_L = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})$

- comanda fluxurilor de electroni prin cîmp **electromagnetic**: osciloscop, microscop electronic, accelerator de particule, **display**;
- **sonda Hall.**

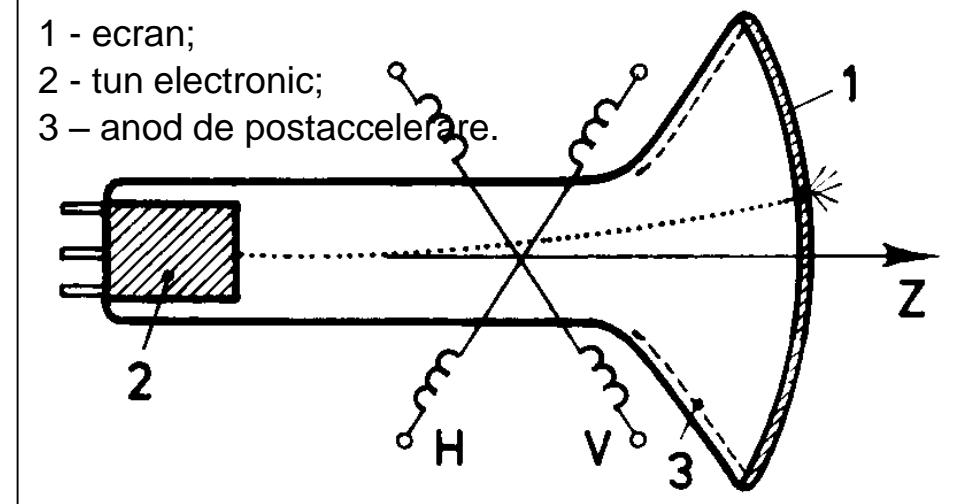
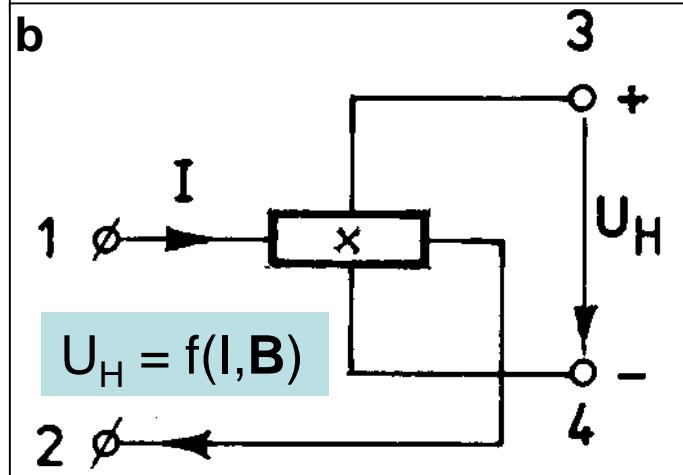
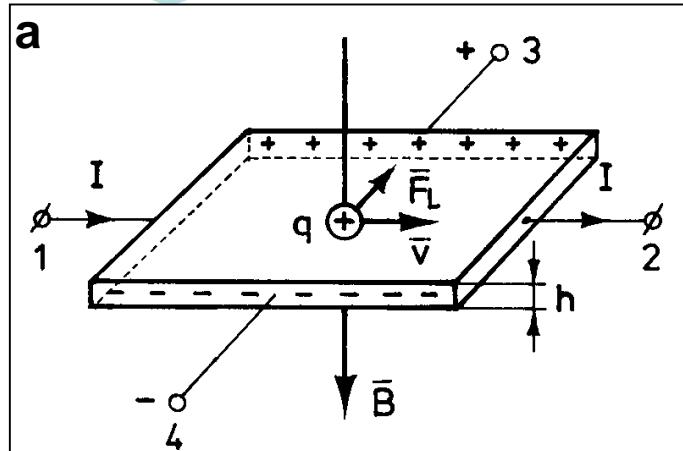


Fig. 1.16 Tub cinescop pentru display și TV cu deflexie magnetica (CRT- Cathode Ray Tube)

Fig. 1.17 Efectul Hall (a) și simbolul sondei Hall (b).  
1, 2 – electrozi de comandă; 3, 4 – electrozi Hall;  
 $U_h$  – tensiune Hall.

## 1.1.4. INTENSITATEA CURENTULUI ELECTRIC de CONDUCȚIE

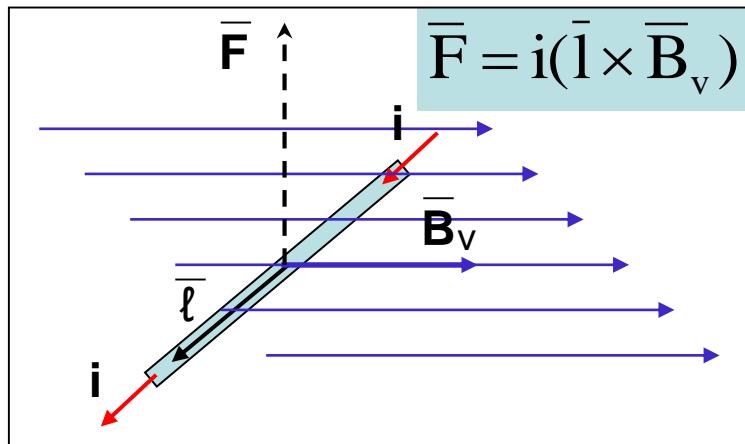


Fig. 1.18 Forța Laplace

- mărime scalară ce caracterizează global **starea electrocinetică** a conductoarelor;
- $[i] = A$ .

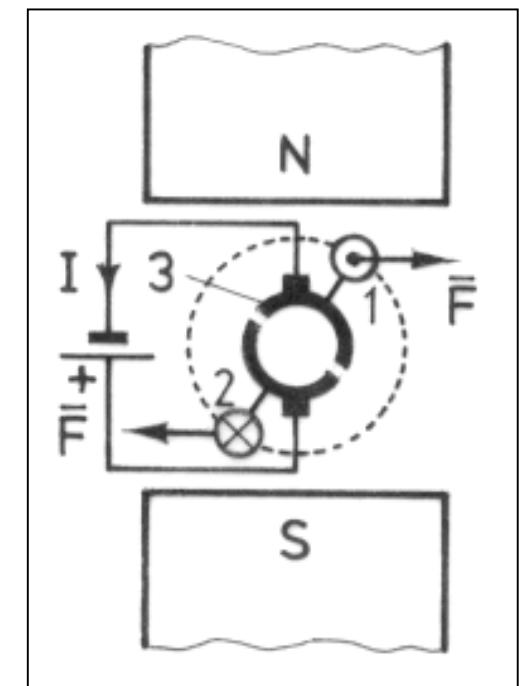


Fig. 1.19 Prinzipiul motorului c.c.

Forța electromagnetică (Laplace): interacțiunea cîmpului magnetic asupra curenților electrici

- aplicații:
  - mașini electrice  
(generatoare, motoare, frine),
  - difuzeoare,
  - pompe electomagneticice;
  - etc.

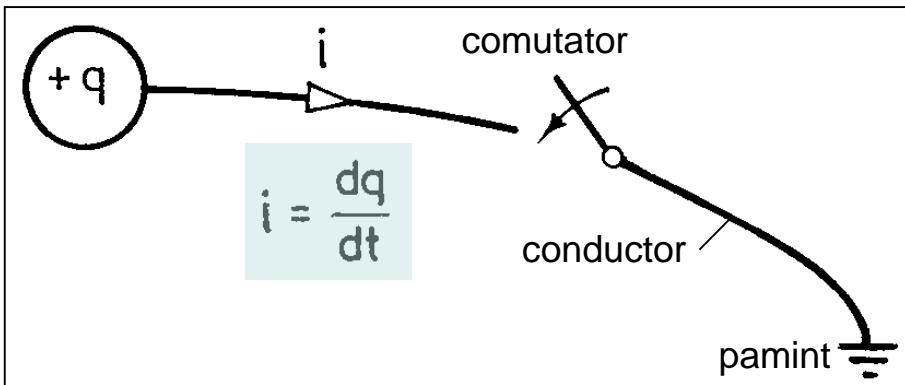


Fig. 1.20 Currentul electric de conducție interpretat ca viteza de transmitere a sarcinii electrice prin conductoare

$$[i] = \frac{[dq]}{[dt]} = \frac{1\text{C}}{1\text{s}} = 1\text{A}$$

## Efectele stării electrocinetice:

- *mecanic* – forțe și cupluri de forte (acțiuni ponderomotoare) asupra corpurilor aflate în stare electrocinetică;
- *magnetic* – cîmp magnetic propriu în jurul conductoarelor parcuse de curent electric;
- *termic* – dezvoltare de căldură la trecerea curentului electric prin conductoare;
- *optic* – emisia de lumină prin incandescență sau descărcare în gaze;
- *chimic* – separarea purtătorilor de sarcină electrică.

## 1.1.5. MOMENTUL MAGNETIC

- mărime vectorială ce characterizează global **starea de magnetizare** a corpurilor;
- $[\bar{m}] = A \cdot m^2$ ;

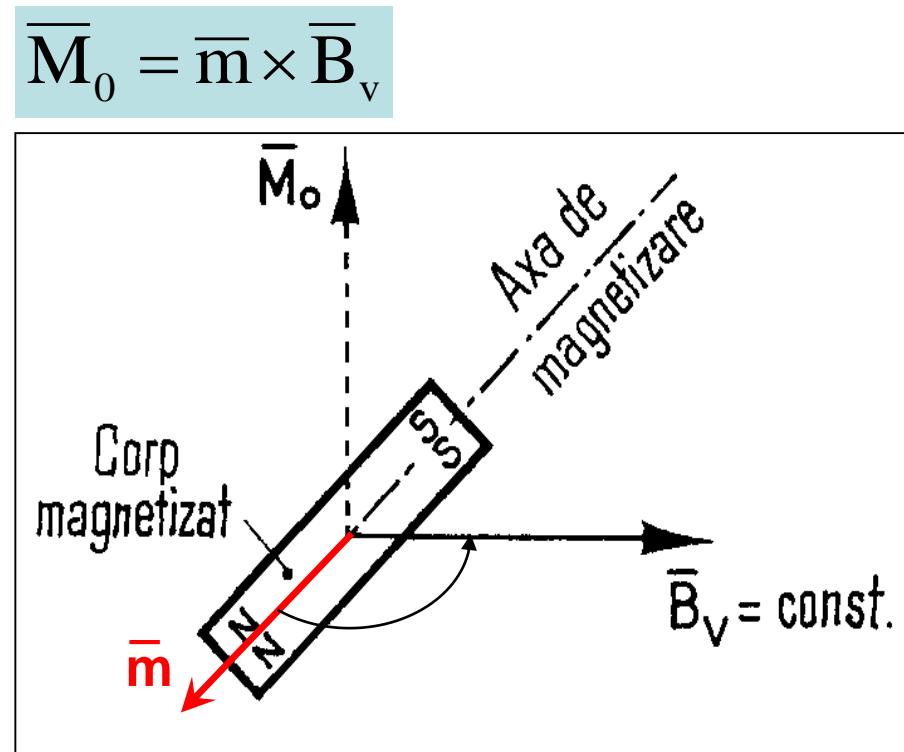


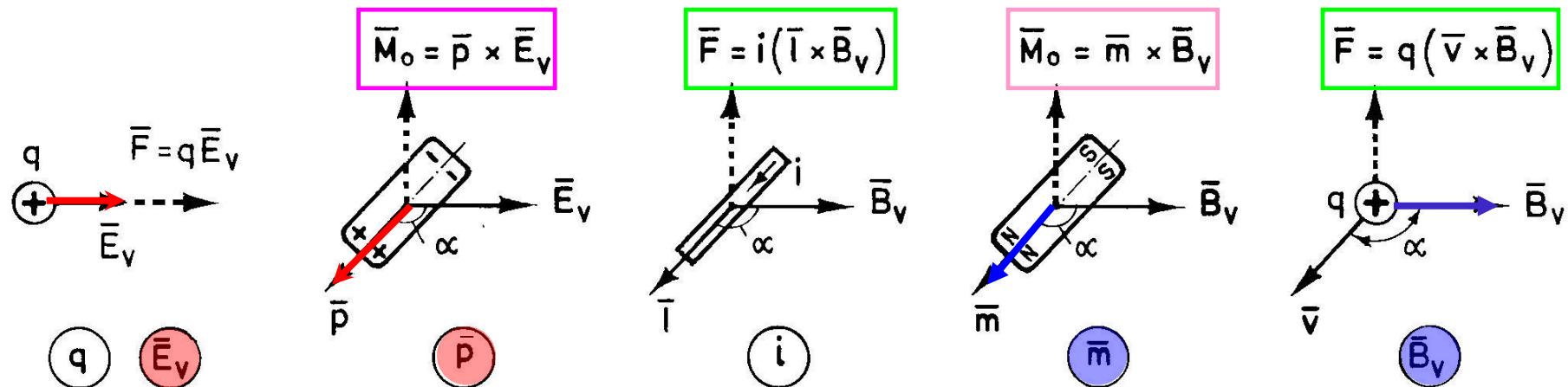
Fig. 1.21 Cuplul de orientare a corpului magnetizat

Stare de magnetizare: { - temporară (electromagneti);  
- permanentă (magneți permanenți).

$$\bar{m} = \bar{m}_t(\bar{B}) + \bar{m}_p$$

# CONCLUZII asupra mărimilor primitive

- Cele 6 mărimi primitive se introduc experimental cu ajutorul acțiunilor ponderomotoare (forțe și cupluri de forțe).



- Corpurile se pot afla în 4 stări electromagneticice:
  - { - încarcare electrică; - electrocinetică;
  - { - polarizare electrică; - magnetizare.
- Mărimile  $q$ ,  $\bar{p}$ ,  $i$ ,  $\bar{m}$  descriu global (la nivelul întregului corp) starea corpurilor.
- Mărimile  $\bar{E}$ ,  $\bar{B}$  descriu local (în fiecare punct) starea cîmpului electromagnetic.

Tema 1.2.

Utilizînd expresia unei acțiuni ponderomotoare (forță sau cuplu de forțe) să se arate că, dimensional,  $[T] = [N / A \cdot m]$ .

# 1.2. MĂRIMI DERIVATE

derivare sau  
integrare



MĂRIMI PRIMITIVE	Caracterizează <b>global</b> CORPURILE	Caracterizează <b>local</b> CÎMPUL
stare ELECTRICĂ	sarcina electrică $q$	intensitatea cîmpului electric în vid $\bar{E}_v$
	momentul electric $\bar{p}$	
stare MAGNETICĂ	intensitatea curentului $i$	inducția magnetică în vid $\bar{B}_v$
	momentul magnetic $\bar{m}$	

MĂRIMI DERivate	Caracterizează <b>local</b> CORPURILE	Caracterizează <b>global</b> CÎMPUL
stare ELECTRICĂ	densități de sarcină electrică $\rho_v$ [C/m <sup>3</sup> ], $\rho_A$ [C/m <sup>2</sup> ], $\rho_L$ [C/m]	tensiunea electrică $u_{12}$ [V] t.e.m. $e_T$ [V]
	polarizația electrică $\bar{P}$ [C/m <sup>2</sup> ]	fluxul electric $\Psi_A$ [C]
stare MAGNETICĂ	densitatea curentului electric de conduction $\bar{j}$ [A/m <sup>2</sup> ]	tensiunea magnetică $u_{m12}$ [A] t.m.m. $u_{mm}$ [A]
	magnetizația $\bar{M}$ [A.m]	fluxul magnetic $\Phi_A$ [Wb]

## 1.2.1. DENSITĂȚI de SARCINĂ ELECTRICĂ

- densitatea *volumetrică* (*de volum*):

$$\rho_V = dq/dV \text{ [C/m}^3\text{]} - \text{caracterizează gazele;}$$

- densitatea *superficială* (*de suprafață*):

$$\rho_A = dq/dA \text{ [C/m}^2\text{]} - \text{caracterizează suprafetele;}$$

- densitatea *liniara* (*lineică*):

$$\rho_L = dq/dl \text{ [C/m]} - \text{caracterizează firele subțiri;}$$

$$q = \iiint_V \rho_V \cdot dV + \iint_A \rho_A \cdot dA + \int_C \rho_L \cdot dl + \sum_{k=1}^n q_k$$

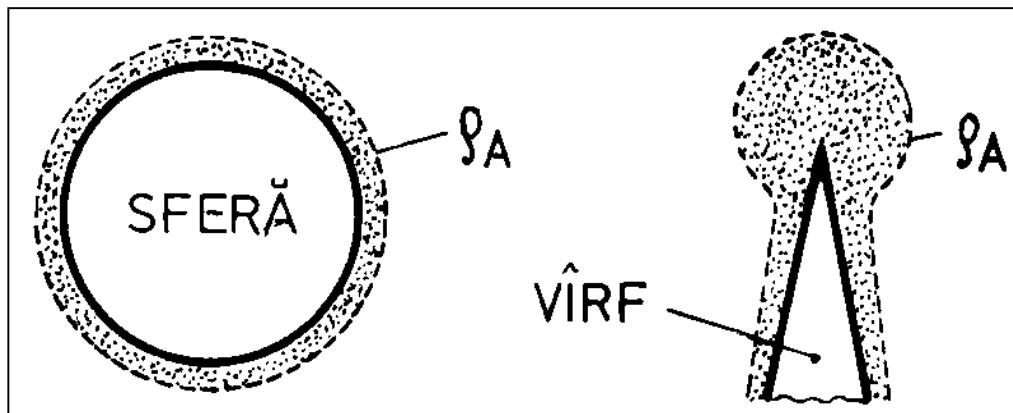


Fig. 1.22 Repartizarea densitații de sarcină electrică pe suprafața corpurilor conductoare.

## 1.2.2. POLARIZAȚIA ELECTRICĂ și MAGNETIZAȚIA

$\bar{P}$ - Polarizația electrică

$$\bar{P} = \frac{d\bar{p}}{dV} \left[ \frac{C \cdot m}{m^3} = \frac{C}{m^2} \right]$$

- descrie starea de **polarizare** locală (într-un punct) din interiorul corpului polarizat electric;

$$\bar{P} = \bar{P}_t(\bar{E}) + \bar{P}_p$$

$\bar{M}$ - Magnetizația

$$\bar{M} = \frac{d\bar{m}}{dV} \left[ \frac{A \cdot m^2}{m^3} = \frac{A}{m} \right]$$

- descrie starea de **magnetizare** locală (într-un punct) din interiorul corpului magnetizat;

$$\bar{M} = \bar{M}_t(\bar{B}) + \bar{M}_p$$

## 1.2.3. DENSITATEA CURENTULUI ELECTRIC de CONDUCȚIE

$$\bar{j} = \bar{u}_j \frac{di}{dA} [A/m^2]$$

- descrie local **starea electrocinetică** a corpurilor conductoare;
- dacă:  $j = i/A = \text{constant}$ , conductorul se consideră *filiform*;
- mărime importantă în activitatea de proiectare.

$$i = \iint_A \bar{j} \cdot d\bar{A}$$

{ intensitatea curentului = fluxul densității de curent prin  
sectiunea transversală a conductorului

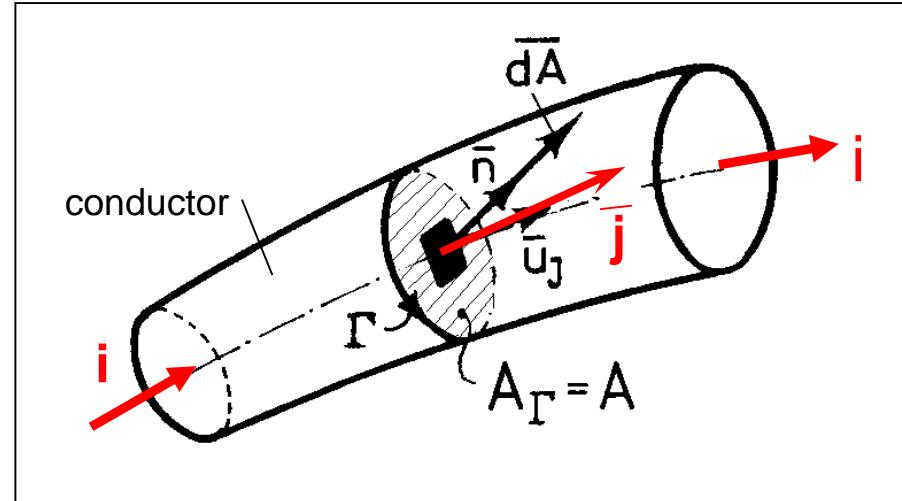


Fig. 1.23 Densitatea curentului electric de conducție

$\bar{u}_j$  – versorul densității curentului electric

**Tab. 2.1 Conductoare de cupru cu izolatie de PVC**

Sectiune <b>standardizată</b> <b>A[mm<sup>2</sup>]</b>	0,50	0,75	1,00	1,50	2,50	4,00	6,00	10,0	
Diametru <b>d[mm]</b>		1,00	1,13	1,40	1,80	2,25	2,75	3,57	
Curenti maximi admisibili în regim permanent:[A]									
Conductoare <b>FY</b> in tub	2 conductoare	-	-	14	17	24	31	40	55
	3 conductoare	-	-	12	14	20	26	36	49
Cablu <b>CYY</b> cu	2 conductoare	12	16	18	23	33	43	55	75
	3 conductoare	-	14	16	20	28	36	45	60

## 1.2.4. MĂRIMI DERIVATE ale CÎMPULUI ELECTRIC

- În vid, câmpul electric este descris, la nivel local, de  $\bar{E}_v$  ;
- În corpuri, starea câmpului electric este descrisă de 2 vectori:

$\bar{D}[\text{C/m}^2]$  - inducția electrică;

$\bar{E}[\text{V/m}]$  - intensitatea câmpului electric:  $\bar{E} = \bar{E}_c(q) + \bar{E}_s$ ;

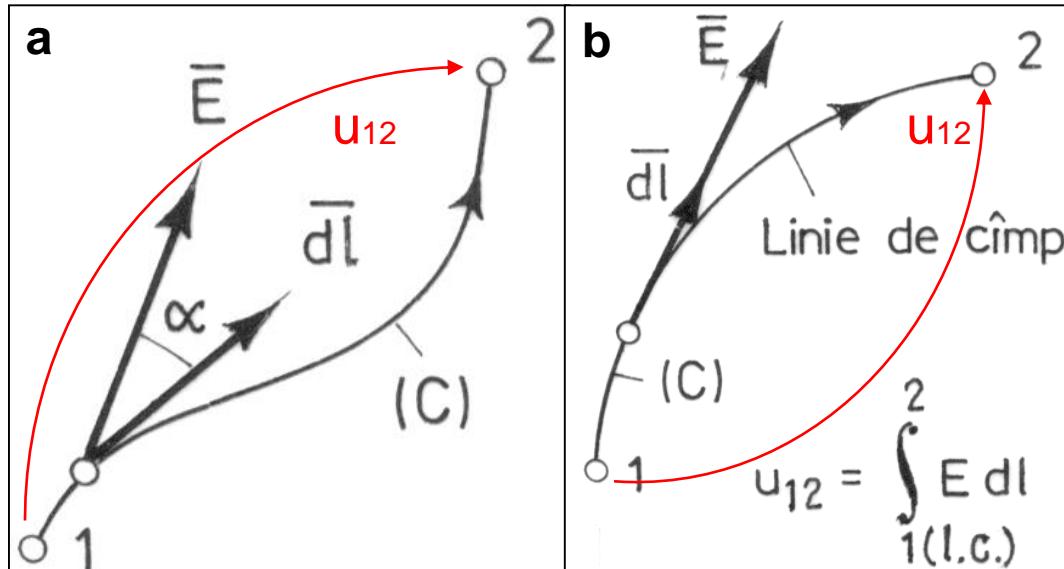
- În materiale cu neomogenități fizico-chimice apare și *câmp electric imprimat*, descris local de intensitatea  $\bar{E}_i[\text{V/m}]$

în vid (aer):  $\bar{D}_v = \epsilon_0 \cdot \bar{E}_v$ , unde:  $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} [\text{F/m}]$ ;

**Tab. 2.2 Cîmpuri electrice imprimate**

Tip	Denumire	Cauza fizica de aparitie
Cîmpuri imprimate de volum	de concentrație (de difuzie)	Neomogenitatea concentrației electrolitului
	termoelectric	Incălzirea neuniformă a unui corp metalic
Cîmpuri imprimate de contact	voltaic	Contactul a două metale diferite
	termoelectric	Diferența de temperatură la capete sudate a două metale diferite (efect Seebeck)
	galvanic	Diferența dintre presiunile osmotice și de dizolvare la contactul metal - electrolit
	fotovoltaic	Conductibilitatea diferită a contactului metal – semiconductor iluminat

## 1.2.4 a) TENSIUNEA ELECTRICĂ



$$u_{12} = \int_{1(C)}^2 \bar{E} \cdot \bar{dl} = \int_1^2 E \cdot dl \cdot \cos \alpha;$$

$$U_{12} = - U_{21}; [U_{12}] = V$$

**Fig. 1.24** Definiția tensiunii electrice: a) - în cazul general; b) – pentru o linie de cîmp electric

- interpretare energetică:  $u_{12} = L_{12}/q$ ;  $L_{12} = \int_{1(C)}^2 \bar{F} \cdot \bar{dl} = q \int_{1(C)}^2 \bar{E} \cdot \bar{dl} = q \cdot u_{12}$
- valorile tensiunii electrice: milioane V ( $10^{+6}$  V) → microV ( $\mu V = 10^{-6}$  V)
- tensiunea = diferență de potențial:  $u_{12} = V_1 - V_2$

## 1.2.4 b) POTENȚIALUL ELECTRIC

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E} = - \text{grad}V \\ \text{grad}V = dV/dl \end{array} \right. \rightarrow dV = - \bar{E} \cdot \bar{dl} \text{ - ecuația diferențială a potențialului}$$

$$\int_{P_0}^P dV = - \int_{P_0}^P \bar{E} \cdot \bar{dl} \Rightarrow V(P) - V(P_0) = - \int_{P_0}^P \bar{E} \cdot \bar{dl} \Rightarrow V(P) = V(P_0) - \int_{P_0}^P \bar{E} \cdot \bar{dl}.$$

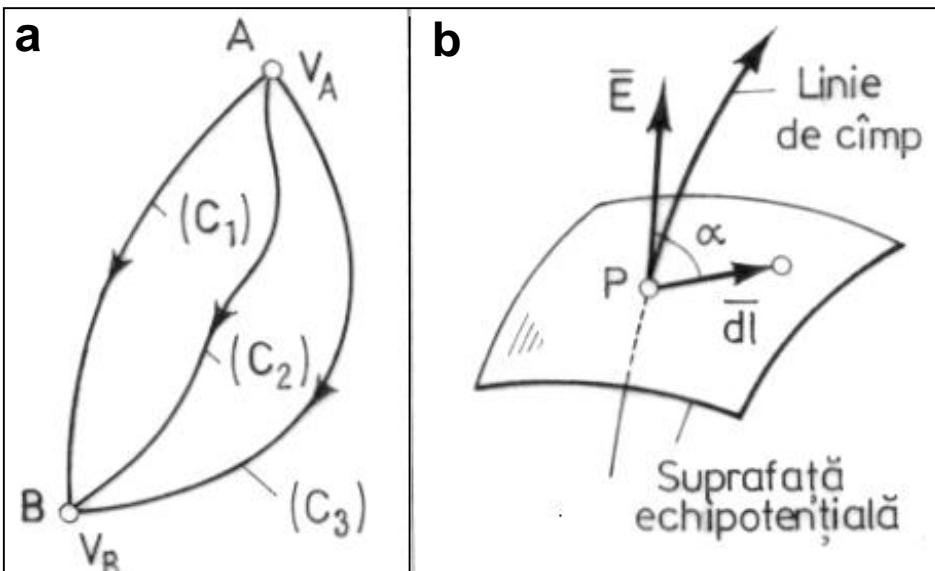


Fig. 1.25 Tensiunea ca diferență de potențial (a) și suprafața echipotențială (b).

$V(P_0)$  – potențial de referință

$$u_{AB} = \int_A^B \bar{E} \cdot \bar{dl} = - \int_A^B dV = V_A - V_B$$

Ecuația diferențială a suprafeței echipotentiale:

$$\left\{ \begin{array}{l} V(x,y,z) = \text{const.} \\ dV = - \bar{E} \cdot \bar{dl} \end{array} \right. \rightarrow \bar{E} \cdot \bar{dl} = 0$$

$\alpha = 90^\circ$  - liniile de cîmp sint normale la suprafața echipotențială

## Alegerea originii de potențial electric

Potențialul de referință, de obicei, se consideră nul  $V(P_0) = 0$ , iar punctul  $P_0$  devine origine de potențial.

Pozitia originii de potențial se alege convenabil aplicației tehnice:

- electrostatică (sarcini pe domenii limitate):  $P_0 = \infty$ ;  $\rightarrow V(\infty) = 0$ ;
- tractiune electrică:  $P_0 = \text{calea de rulare}$  (șina);  $\rightarrow V(\text{șina}) = 0$ ;
- energetică:  $P_0 = \text{pămîntul}$  ( $\perp\!\!\!\perp$ );  $\rightarrow V(\perp\!\!\!\perp) = 0$ ;
- electronică:  $P_0 = \text{punctul de masă}$  ( $\top\!\!\!\top$ );  $\rightarrow V(\top\!\!\!\top) = 0$ .

Tema 1.3

Pornind de la interpretarea energetică a tensiunii electrice, calculați cîți  $W \cdot s = J$  reprezintă eV.

Tema 1.4

Arătați că dimensional  $[B \cdot H] = J/m^3$ .

## 1.2.4 c) TENSIUNEA ELECTROMOTOARE - t.e.m.

- stabilește și menține curentul electric într-un circuit închis;
- caracterizează sursele de energie electrică;
- definiție:  $e_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} (\bar{E} + \bar{E}_i) \cdot \bar{dl}$  ;
- unitate de masură:  $[e_{\Gamma}] = V$ ;
- interpretare energetică:

$$L_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} (\bar{F}_{el} + \bar{F}_{neel}) \cdot \bar{dl} = q \oint_{\Gamma} (\bar{E} + \bar{E}_i) \cdot \bar{dl} = q \cdot e_{\Gamma}; \quad e_{\Gamma} = L_{\Gamma} / q.$$

## 1.2.4 d) FLUXUL ELECTRIC

- caracterizează comportarea câmpului electric pe o suprafață;
- definiție:  $\Psi_A = \iint_A \bar{D} \cdot \bar{dA} = \iint_A D \cdot dA \cdot \cos \alpha,$
- unitate de măsură:  $[\Psi] = C;$

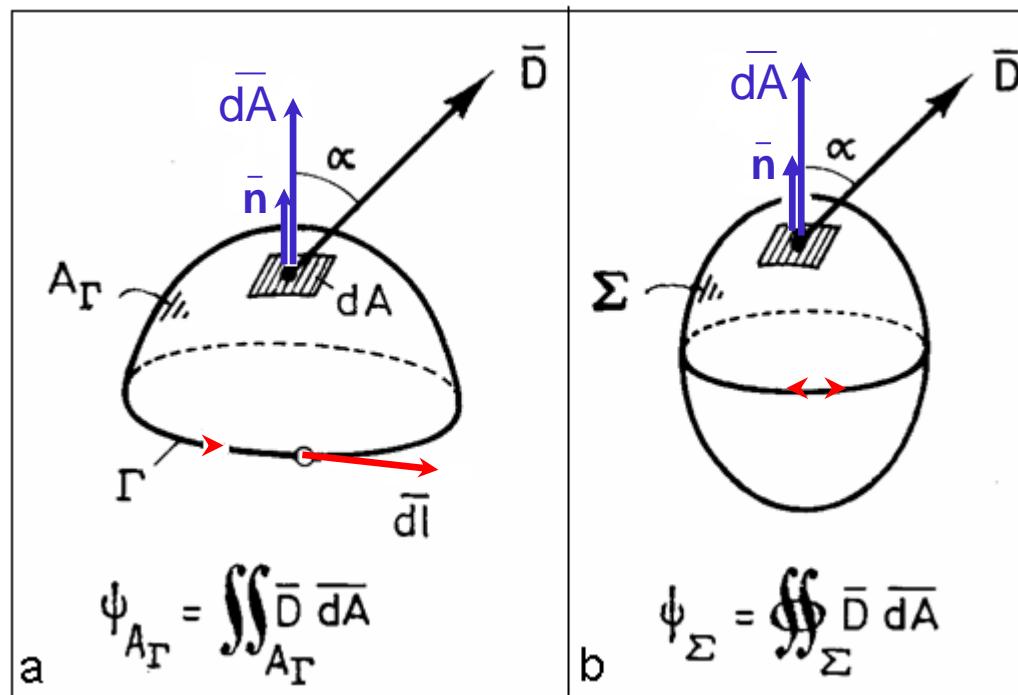


Fig. 1.26 Fluxul electric pentru suprafață deschisă  $A_\Gamma$  și pentru suprafață închisă  $\Sigma$

$$\bar{dA} = \bar{n} \cdot dA \longleftrightarrow \bar{dl}$$

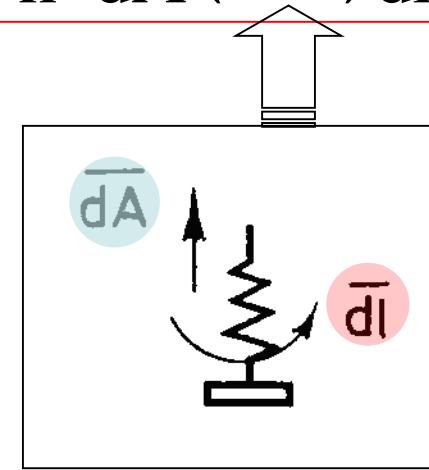


Fig. 1.27 Regula burghiuilui drept (RBD)

## 1.2.5. MĂRIMI DERIVATE ale CÎMPULUI MAGNETIC

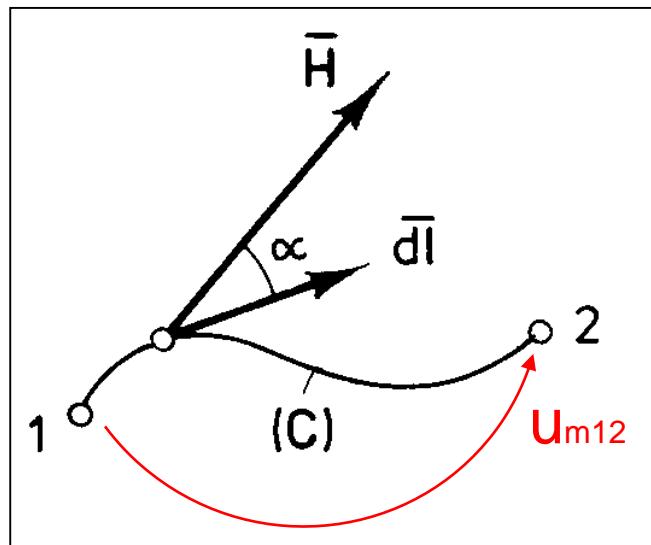
- În vid, câmpul magnetic este descris local de vectorul  $\overline{B}_v$ ;
- În corpuri, starea câmpului magnetic trebuie descrisă de 2 vectori:  $\overline{B}[T]$  - inducția magnetică;  
 $\overline{H}[A/m]$  - intensitatea cimpului magnetic;
- În vid (aer)  $\overline{H}_v = \frac{\overline{B}_v}{\mu_0}$ , unde:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} [H/m]$

## 1.2.5 a) TENSIUNEA MAGNETICĂ și TENSIUNEA MAGNETOMOTOARE (t.m.m.)

### Tensiunea magnetică

- mărime scalară ce caracterizează global, starea cîmpului magnetic, în lungul unei curbe;

$$u_{m12} = \int_{1(C)}^2 \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_{1(C)}^2 H \cdot dl \cdot \cos\alpha.$$



### Tensiunea magnetomotoare

- circulația vectorului intensitate cîmp magnetic în lungul unei curbe închise  $\Gamma$ ;

$$u_{mm} = \oint_{\Gamma} \bar{H} \cdot d\bar{l}$$

- caracterizează sursele de cîmp magnetic – bobinele electrice;
- $[u_{m12}] = [u_{mm}] = A$

Fig. 1.28 Definirea tensiunii magnetice

## 1.2.5b) FLUXUL MAGNETIC

- characterizează comportarea câmpului magnetic pe o suprafață;
- definiție:  $\Phi = \iint \bar{B} \cdot d\bar{A} = \iint B \cdot dA \cdot \cos \alpha$
- unitatea de măsură a fluxului magnetic este weberul:  $[\Phi] = \text{Wb}$ ;
- cînd inducția este **normală**, în fiecare punct, la suprafață  $\bar{B} \perp d\bar{l}$ :

$$\Phi = \iint B \cdot dA$$

- dacă inducția  $\bar{B}$  este **constantă** (câmp omogen)  $\bar{B} = \text{const}$ :  
$$\Phi = \bar{B} \cdot \bar{A}$$
- dacă inducția  $\bar{B}$  este **constantă și normală** la suprafața  $\bar{A}$ :  
$$\Phi = B \cdot A \quad [\text{T} \cdot \text{m}^2 = \text{Wb}]$$

# CONCLUZII

## asupra mărimilor derivate

MĂRIMI DERIVATE	Caracterizează local CORPURILE	Caracterizează global CÎMPUL
stare ELECTRICĂ	densități de sarcină electrică $\rho_v$ [C/m <sup>3</sup> ], $\rho_A$ [C/m <sup>2</sup> ], $\rho_L$ [C/m]	potențialul electric $V$ [V] tensiunea electrică $u_{12}$ [V]
	polarizația electrică $\bar{P}$ [C/m <sup>2</sup> ]	t.e.m. fluxul electric $\Psi_A$ [C]
stare MAGNETICĂ	densitatea curentului electric de conducție $j$ [A/m <sup>2</sup> ]	tensiunea magnetică $u_{m12}$ [A] t.m.m. $u_{mm}$ [A]
	magnetizația $\bar{M}$ [A·m]	fluxul magnetic $\Phi_A$ [Wb]

- Cele 4 stări electromagnetice ale corpurilor (încărcare electrică, electrocinetică, polarizare electrică, magnetizare) săn căracterizate **local** prin mărimi derivate.
- Cîmpul electromagnetic, cu cele două componente: electric și magnetic, este caracterizat **global** de mărimi derivate: tensiuni – în lungul curbelor și flux – pe suprafețe.

Niciodată nu le vom putea știi pe toate;  
Niciodată nu le vom putea știi pe toate;  
important este să înțelegem ceva din viața asta.

# Cap. 2 LEGILE ELECTROMAGNETISMULUI

pag. B1\*

## 2.1 LEGI de MATERIAL

2.1.1 Legea conducedorii electrice (Ohm)

24

2.1.2 Legea polarizării temporare

28

2.1.3 Legea magnetizării temporare

29

## 2.2 LEGI GENERALE

2.2.1 Legile de legătură (constitutive)

30

2.2.2 Legile fluxurilor

32

2.2.3 Legea inducției electromagnetice

34

2.2.4 Legea circuitului magnetic

46

2.2.5 Legea conservării sarcinii electrice

51

2.2.6 Legea efectului electrocaloric

54

9 probleme rezolvate + 10 probleme propuse

---

\* - R. Morar s.a.; *Electrotehnica și mașini electrice* – curs, vol.1; Lito UTC-N; 621.3/E35c

# Cap.2. LEGILE ELECTROMAGNETISMULUI

- legile electromagnetismului se introduc **axiomatice** (nu se demonstrează);
- teoria macroscopică\* are la bază un sistem de două categorii de legi: legi **generale** și legi **de material**;
- legile de material au în expresia lor constante (parametri) de material;
- legile generale sunt valabile în orice regim\*\* electromagnetic și în orice material;
- **Teoremele** - cazuri particulare ale legilor, constituie baza teoretică și de calcul a aplicațiilor în tehnica a fenomenelor electrice și magnetice.

---

\* Teoria macroscopică (fenomenologică) face abstractie de structura atomică, discontinuă a materiei și consideră că între corpurile electrizate și magnetizate se exercită interacțiuni electromagnetice (forțe și cupluri de forțe).

\*\* Regimurile de desfăsurare a fenomenelor electromagnetice sunt: static, stationar, cuasistationar și nestationar (variabil).

**Tab.2.1** Principalele legi ale electromagnetismului

LEGEA	conducției electrice (Ohm)	$\bar{E} + \bar{E}_i = \rho \cdot \bar{j}$	Legi de material
	polarizației temporare	$\bar{P}_t = \epsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \bar{E}$	
	magnetizației temporare	$\bar{M}_t = \chi_m \cdot \bar{H}$	
	legaturii în cîmp electric	$\bar{D} = \epsilon_0 \cdot \bar{E} + \bar{P}$	
		$\bar{B} = \mu_0 \cdot \bar{H} + \mu_0 \cdot \bar{M}$	
	fluxului	$\iint_{\Sigma} \bar{D} \cdot dA = q_{\Sigma}$	Legi generale
		$\iint_{\Sigma} \bar{B} \cdot dA = 0$	
	inducției electromagnetice	$e_{\Gamma} = - \frac{d\Phi_{A\Gamma}}{dt}$	
	circuitului magnetic	$u_{mm\Gamma} = \Theta_{A\Gamma} + \frac{d\Psi_{A\Gamma}}{dt}$	
	conservării sarcinii electrice	$i_{\Sigma} = - \frac{dq_{\Sigma}}{dt}$	
	transformării energetice în conductoare (Joule-Lenz)	$p = \bar{E} \cdot \bar{j}$	

## 2.1 LEGI de MATERIAL

### 2.1.1 LEGEA CONDUCTIEI ELECTRICE (Ohm)

a) forma locală

- conductor liniar, izotrop, **neomogen**:  $\bar{E} + \bar{E}_i = \rho \cdot \bar{j}$
- conductor liniar, izotrop, omogen ( $\bar{E}_i = 0$ ):  $\bar{E} = \rho \cdot \bar{j}; \bar{j} = \sigma \cdot \bar{E}$

$\bar{E}$  și  $\bar{E}_i$  – cîmp electric = **cauza** stării electrocinetice a corpurilor conductoare;



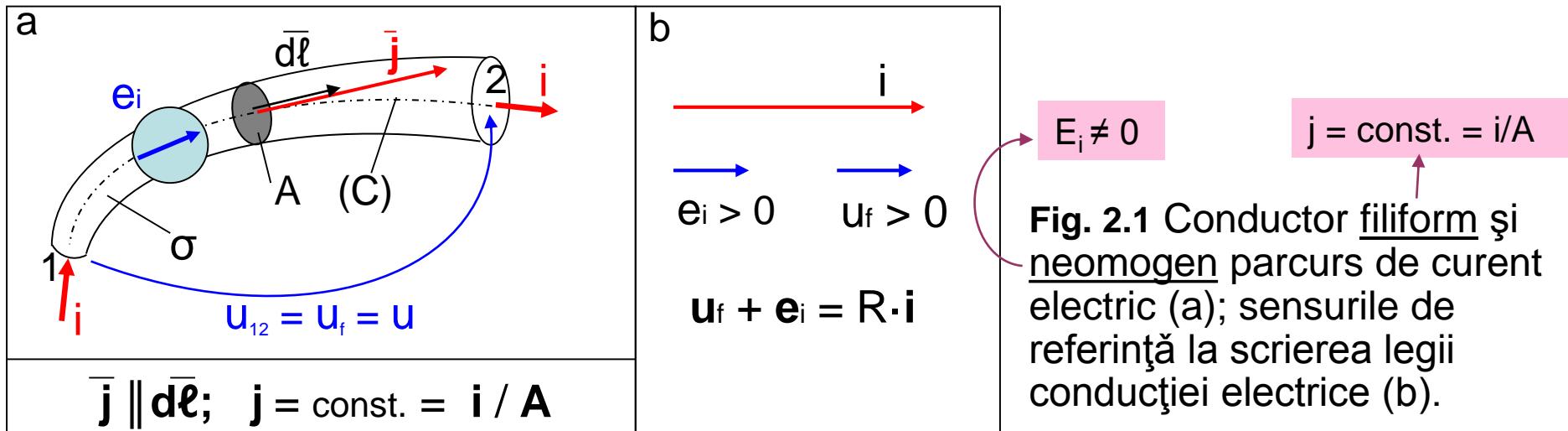
**lege** = legătura dintre cauză și efect;

$\bar{j}$  – curent electric = **efectul** stării electrocinetice.

- **parametri de material:**  $\left\{ \begin{array}{l} \rho[\Omega \cdot m] - rezistivitate electrică; \\ 1/\rho = \sigma[S/m] - conductivitate electrică \end{array} \right.$
- unități de măsură (U.M.):  $[\Omega] = [V]/[A]$ ;  $[S] = 1/[\Omega] = [\Omega^{-1}]$ ;
- **valori:**  $\left\{ \begin{array}{l} \rho_{\text{metal pur}} = 10^{-12} [\Omega \cdot m] \rightarrow \rho_{\text{izolator bun}} = 10^{+20} [\Omega \cdot m]. \\ \sigma_{Cu} = 56 \cdot 10^6 [S/m]; \sigma_{Al} = 34 \cdot 10^6 [S/m]; \end{array} \right.$

**Ω** – Ohm; **S** – Siemens.

## b) forma globală (integrală)

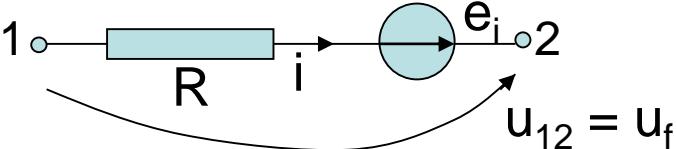


$$\int_{1(C)}^2 (\bar{E} + \bar{E}_i) \cdot \bar{dl} = \int_{1(C)}^2 \rho \bar{j} \cdot \bar{dl}; \quad \int_{1(C)}^2 \bar{E} \cdot \bar{dl} = u_f = u_{12} = u; \quad \int_{1(C)}^2 \bar{E}_i \cdot \bar{dl} = e_i;$$

- pentru conductorul filiform:  $\int_{1(C)}^2 \rho \bar{j} \cdot \bar{dl} = \int_{1(C)}^2 \rho \cdot j \cdot dl = i \int_{1(C)}^2 \frac{\rho \cdot dl}{A} = i \cdot R$

$$u_f + e_i = R \cdot i$$

$$\uparrow u_{12} = \uparrow i; \uparrow e_i = \uparrow i$$



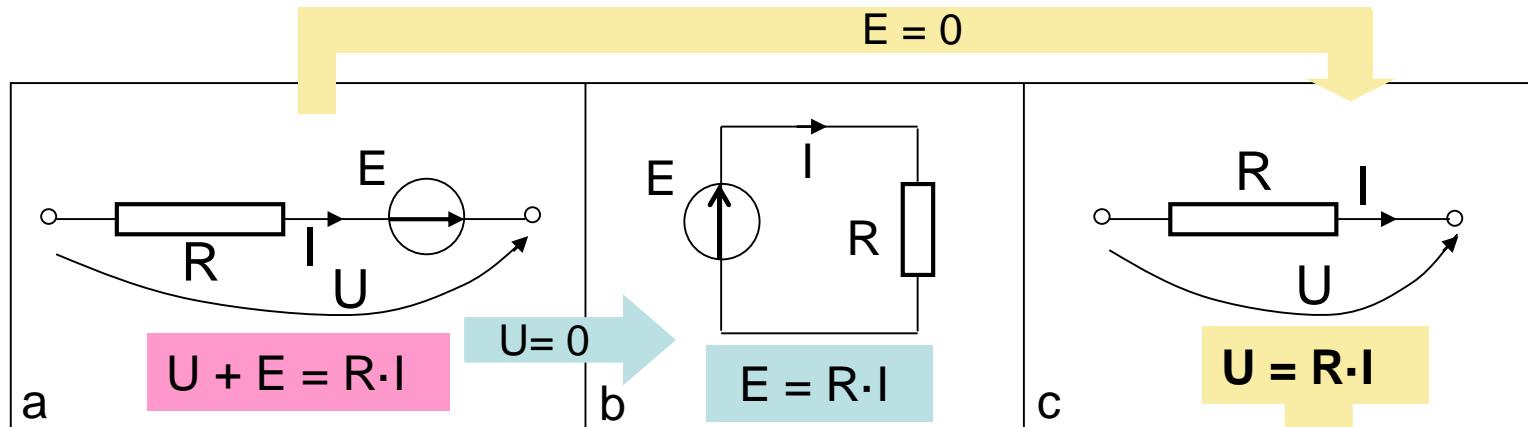
$R[\Omega]$  – rezistență electrică



parametru de circuit electric

## Precizări:

- mărimi variabile în timp (mărimi instantanee):  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $e(t)$ ,  $p(t)$ ;
- mărimi constante în timp (current continuu = c.c.):  $U$ ,  $I$ ,  $E$ ,  $P$ .



**Fig. 2.2** Forme particulare ale legii lui Ohm în c. c.

( $u \rightarrow U$ ;  $e_i \rightarrow E$ ;  $i \rightarrow I$ ): a - latură activă;  
b - circuit închis; c – latură pasivă

Legea lui Ohm pentru o latură pasivă de circuit electric în c.c.

## Problema 2.1

Să se calculeze lungimea conductorului filiform, din cupru, cu secțiunea  $1\text{mm}^2$  care are rezistență electrică de  $1\Omega$ .

Rezolvare:

- conductor de cupru omogen:  $\sigma_{\text{Cu}} = 56 \cdot 10^6 [\text{S/m}]$ ;
- secțiune constantă:  $A = 1[\text{mm}^2]$ ;

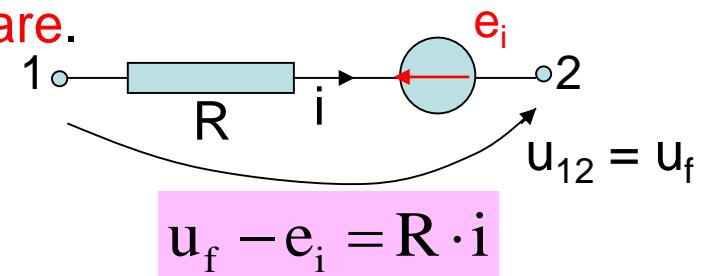
$$R = \int_{1(C)}^2 \frac{\rho \cdot dl}{A} = \frac{\rho \cdot l}{A} = \frac{1}{\sigma A}; \quad \rightarrow 1 = \sigma \cdot A \cdot R = 56 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 1 = 56[\text{m}]$$

## Problema 2.2

Să se deducă forma globală a legii conductiei electrice (legea lui Ohm) pentru o latură receptoare cu tensiune **conraelectromotoare**.

Rezolvare:

- latură receptoare:  $\uparrow u_{12} = \uparrow i$  ;
- tensiune conraelectromotoare (tcem):  $\uparrow e_i \neq \uparrow i$ ;



## Tema 2.1:

Un conductor de lungime  $\ell$  și secțiune constantă  $A$  are, între capete, rezistență electrică  $R$ . Ce valoare are rezistența electrică a ansamblului dacă firul se îndoiește prin înjumătățirea lungimii acestuia? Justificați răspunsul ales.

0,25·R; 0,5·R; 2·R; 4·R

## 2.1.2 LEGEA POLARIZAȚIEI TEMPORARE

- material dielectric izotrop:  $\bar{P}_t = \epsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \bar{E}$

$\chi_e$  - *susceptivitate electrică*: parametru de material:

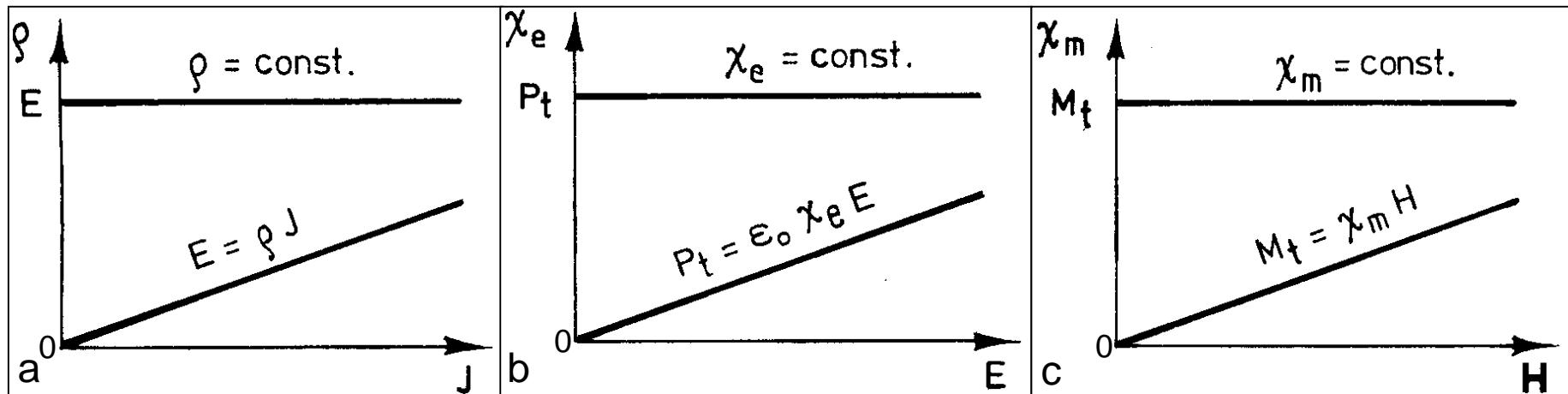
{  
- dielectric liniar:  $\chi_e = \text{constant}$ ;  
- dielectric neliniar:  $\chi_e(\bar{E})$ .

## 2.1.3 LEGEA MAGNETIZAȚIEI TEMPORARE

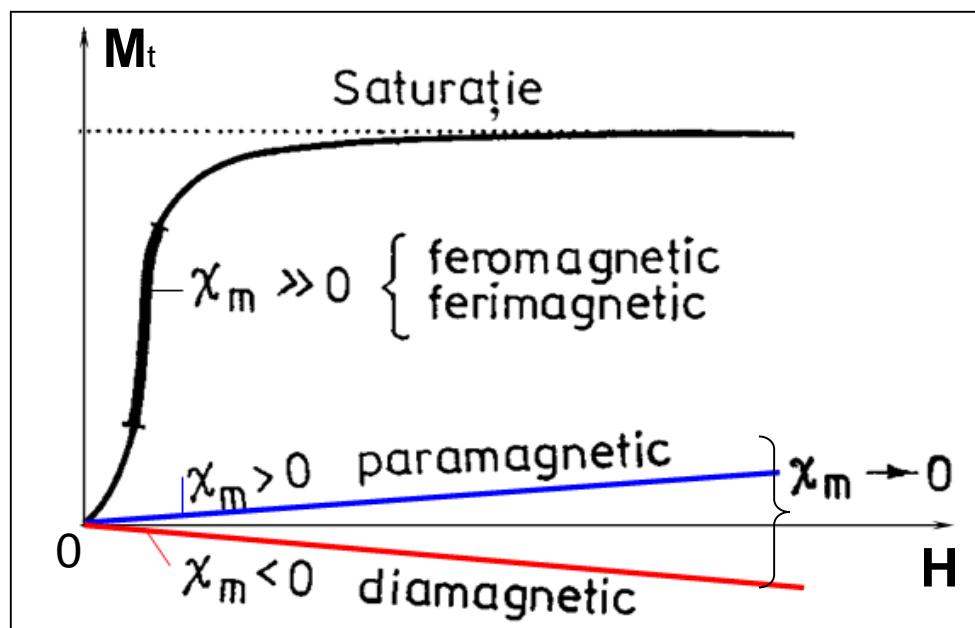
- material magnetic izotrop:  $\bar{M}_t = \chi_m \cdot \bar{H}$

$\chi_m$  - *susceptivitate magnetică* – parametru de material

{  
- **diagnetice**:  $\chi_m \leq 0$ ;  $\bar{M}_t \uparrow\downarrow \bar{H}$ ; Cu:  $\chi_m = -10 \cdot 10^{-6}$ ;  
- **paramagnetice**:  $\chi_m \geq 0$ ;  $\bar{M}_t \uparrow\uparrow \bar{H}$ ; Al:  $\chi_m = 22 \cdot 10^{-6}$ ;  
- **feromagnetice și ferimagnetice**:  $\chi_m(\bar{H})$ .



**Fig. 2.3 Legile de material pentru medii liniare:** a) - conducedie electrica, b) - polarizatia temporara; c) - magnetizatia temporara.



**Fig. 2.4 Clasificarea materialelor după susceptivitatea magnetică**

## 2.2.1 LEGILE de LEGATURĂ (CONSTITUTIVE)

a) legea legăturii în câmp electric:  $\bar{D} = \epsilon_0 \cdot \bar{E} + \bar{P}$

- pentru materiale fără polarizație permanentă ( $\bar{P}_p = 0$ ):

$$\bar{D} = \epsilon_0 \cdot \bar{E} + (\bar{P}_t + \bar{P}_p) = \epsilon_0 \cdot \bar{E} + \bar{P}_t = \epsilon_0 \cdot \bar{E} + \epsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \bar{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \bar{E} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \bar{E}$$

$\epsilon_r = 1 + \chi_e$  - *permittivitate relativă [-];*

$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$  - *permittivitate absolută a materialului dielectric [F/m];*

- pentru vid (aer):  $\epsilon_r = 1$ ;  $\bar{D}_v = \epsilon_r \epsilon_0 \bar{E}_v = \epsilon_0 \bar{E}_v$ .

**Tab.2.2** Caracteristici electrice ale materialelor electroizolante

Materialul dielectric	$\rho$ [ $\Omega \cdot m$ ]	$\epsilon_r$ [-]	$E_{str}^*$ [MV/m]
Ulei de transformator	$10^{12} \dots 10^{13}$	2,1 ... 2,4	15 ... 30
Textolit	$10^8 \dots 10^{10}$	6 ... 8	6 ... 16
Policlorură de vinil (PVC)	$10^{10} \dots 10^{12}$	6 ... 8	6 ... 15
Polietilenă (PE)	$10^{13} \dots 10^{15}$	2,2 ... 2,4	35 ... 60
Aer (vid)	$10^8 \dots 10^{10}$	1	3,1

\*  $E_{str}$  – rigiditate dielectrică = valoarea câmpului electric la care materialul își pierde calitatea de izolant

a) legea legăturii în cîmp magnetic:  $\overline{\mathbf{B}} = \mu_0 \cdot \overline{\mathbf{H}} + \mu_0 \cdot \overline{\mathbf{M}}$

- pentru materiale fără magnetizație permanentă ( $\overline{\mathbf{M}}_p = 0$ ):

$$\overline{\mathbf{B}} = \mu_0 \cdot \overline{\mathbf{H}} + \mu_0 (\overline{\mathbf{M}}_p + \overline{\mathbf{M}}_t) = \mu_0 \cdot \overline{\mathbf{H}} + \mu_0 \cdot \chi_m \overline{\mathbf{H}} = \mu_0 (1 + \chi_m) \overline{\mathbf{H}} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \overline{\mathbf{H}}.$$

$\mu_r = 1 + \chi_m$  - permeabilitate magnetică relativă [-];

$\mu_0 \cdot \mu_r = \mu$  - permeabilitate magnetică absolută a materialului [H/m];

- valori:  $\mu_r \approx 1$  pentru aer, materiale dia- și para-magneticice;

$\mu_r = 100 - 10^4 = f(\overline{H})$  pentru materiale fero- și feri-magneticice

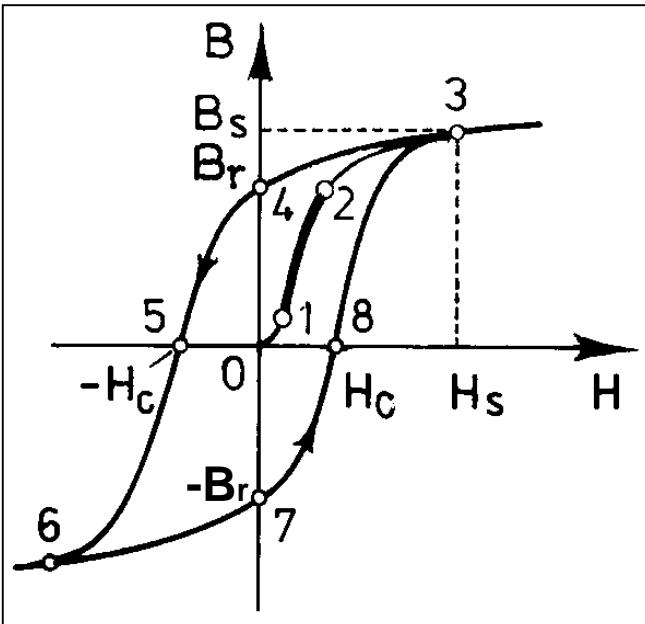


Fig. 2.5 Caracteristica de magnetizare a materialelor feromagnetice

$B_s$  - inducție magnetică de saturatie;

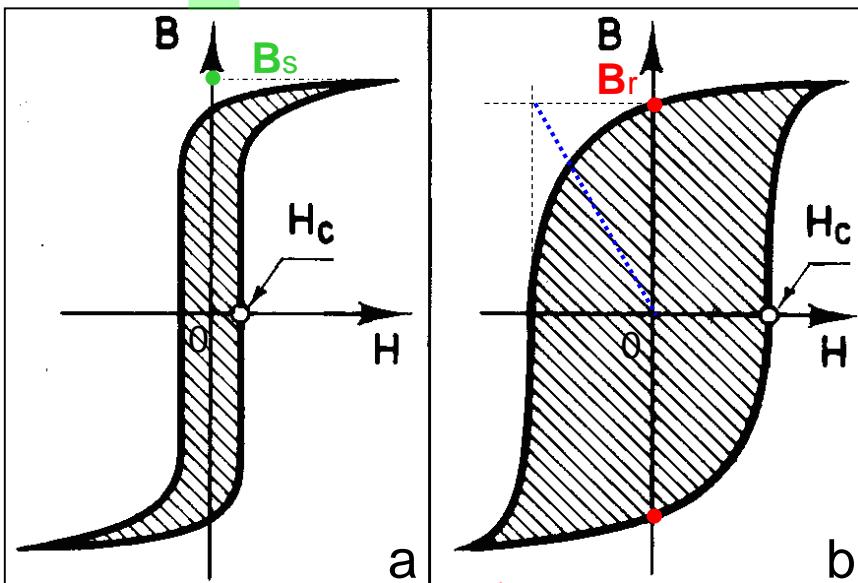
$B_r$  – inducție magnetică remanentă;

$H_c$  – cîmp magnetic coercitiv;

0-1-2-3: curbă de primă magnetizare;

3-4-5-6-7-8-3: ciclu de histerezis magnetic.

Materiale feromagnetice <b>moi</b>	Permeabilitate relativă $\mu_r$	Inducție de saturatie $B_s$	Cîmp coercitiv $H_c$	Destinație
	5.000 ÷ 50.000	1,9 ÷ 2,2 [T]	<100 [A/m]	circuite magnetice



**Fig. 2.6** Bucla de histerezis pentru materialele magnetice **moi** (a) și magnetice **dure** (b).

Materiale feromagnetice <b>dure</b>	Indice de calitate $(BH)_{max}$	Inducție remanenta $B_r$	Cîmp coercitiv $H_c$	Destinație
	> 2500 [J/m <sup>3</sup> ]	0,7 ÷ 1,1 [T]	> 400 [A/m]	magneți permanenti

## 2.2.2 LEGILE FLUXURILOR

### a) Legea fluxului electric

$$\oint_{\Sigma} \bar{D} \cdot d\bar{A} = q_{\Sigma} \quad \text{- forma integrală (globală);}$$

$$\oint_{\Sigma} \bar{D} \cdot d\bar{A} = \iiint_{V\Sigma} \operatorname{div} \bar{D} \cdot dV \quad \downarrow \quad \downarrow \quad q_{\Sigma} = \iiint_{V\Sigma} \rho_v \cdot dV$$

$$\iiint_{V\Sigma} \operatorname{div} \bar{D} \cdot dV = \iiint_{V\Sigma} \rho_v \cdot dV; \xrightarrow{\text{orice } \Sigma} \operatorname{div} \bar{D} = \rho_v \quad \text{- forma locală}$$

### b) Legea fluxului magnetic

$$\oint_{\Sigma} \bar{B} \cdot d\bar{A} = 0 \quad \text{- forma integrală (globală);}$$

$\downarrow$  orice  $\Sigma$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0 \quad \text{- forma locală.}$$

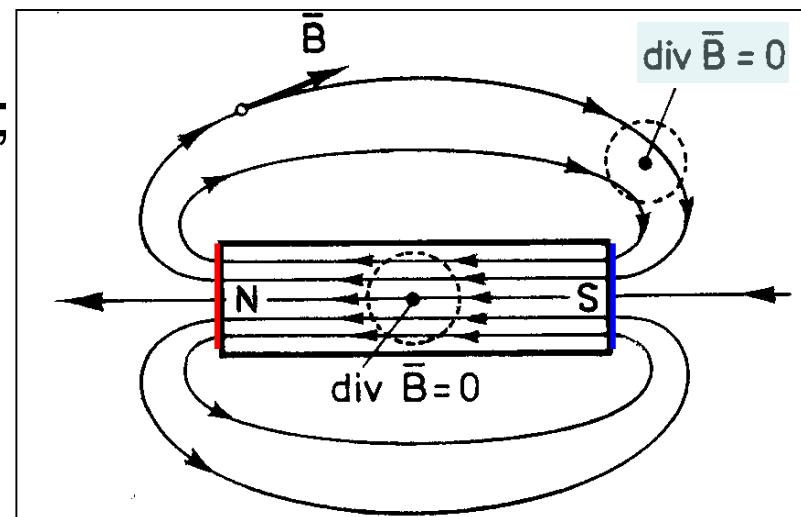
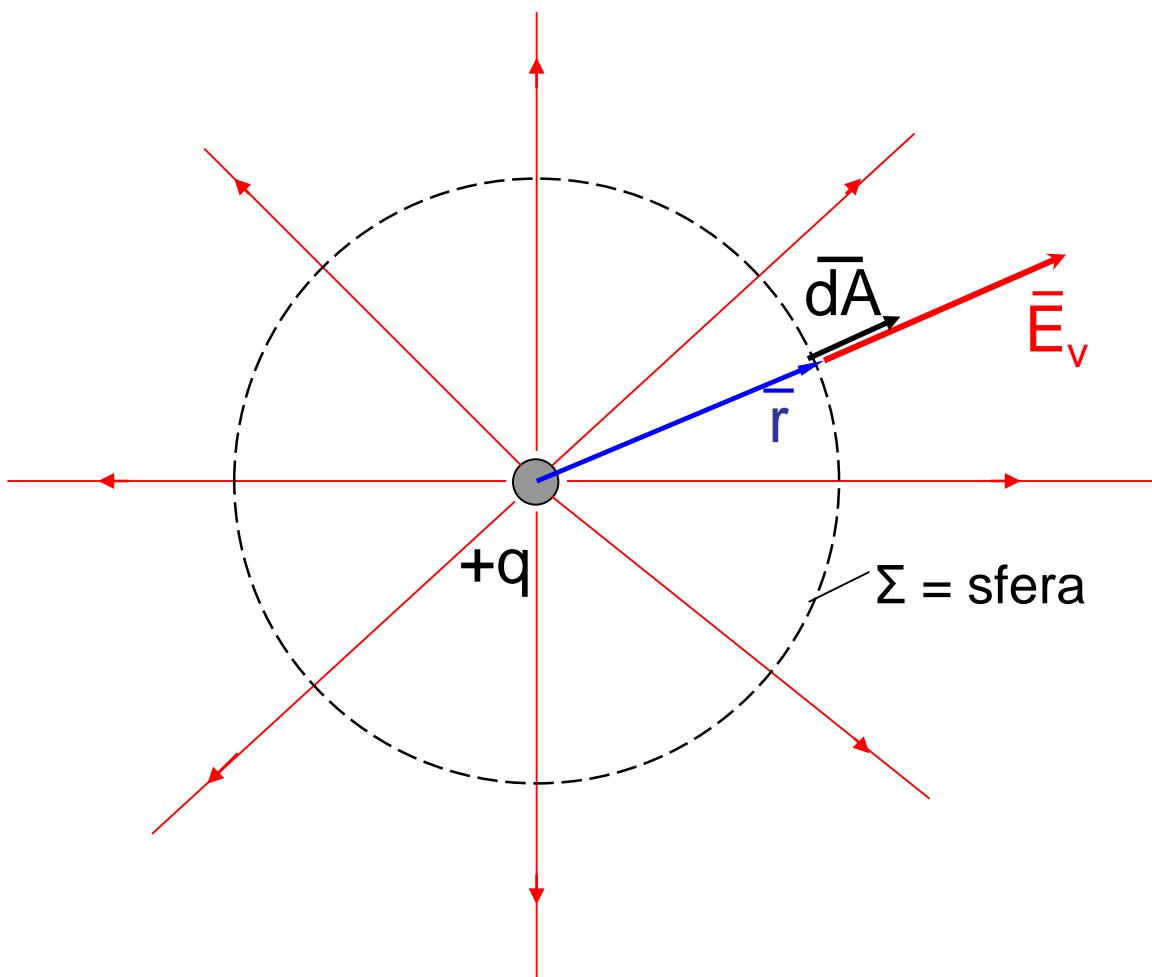


Fig. 2.7 Liniile cîmpului magnetic sînt liniî încise

### Problema 2.3

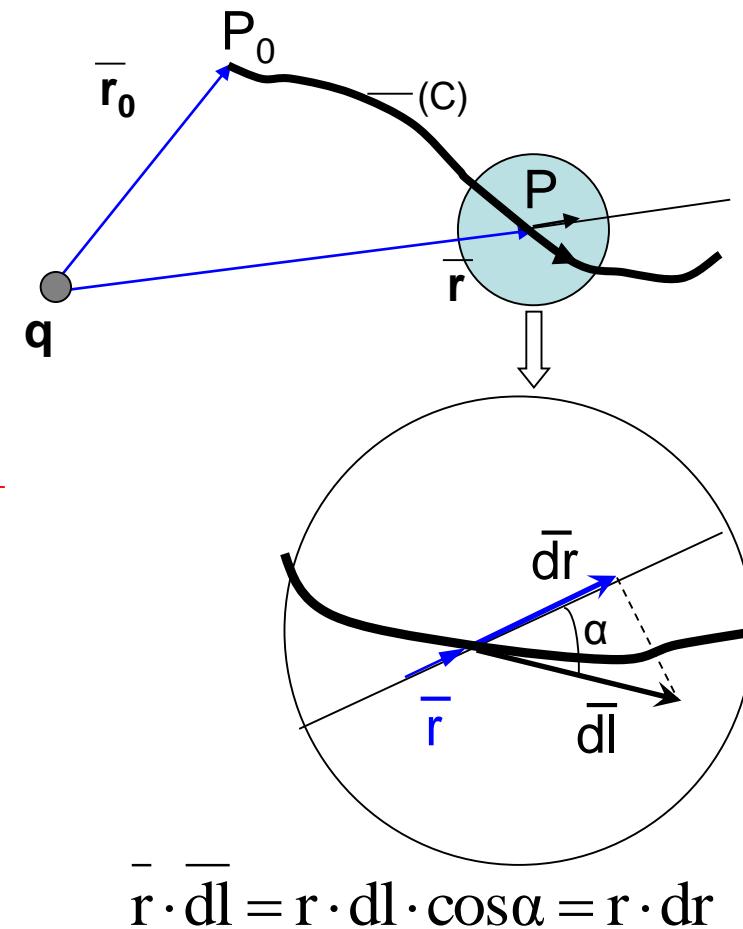
Să se caracterizeze local câmpul electric coulombian, produs în vid, de un corp punctiform, încărcat cu sarcina electrică  $+q$ .



$$E_v(r) = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$$

$$\bar{E}_v(r) = \frac{q \cdot \bar{r}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3}$$

$$V(r) = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$



## Problema 2.4. Calculul capacității condensatorului electric plan

Legea fluxului electric → D



Legea de legătură în câmp electric → E



Definiția tensiunii electrice →  $U_{12}$

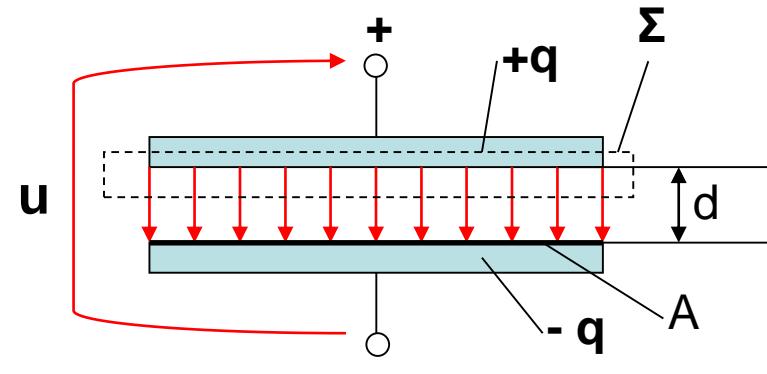


Definiția capacității electrice → C

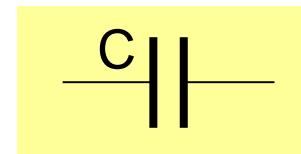
Element de circuit electric: condensator

caracterizat de

Parametru de circuit electric: capacitate



$$C = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

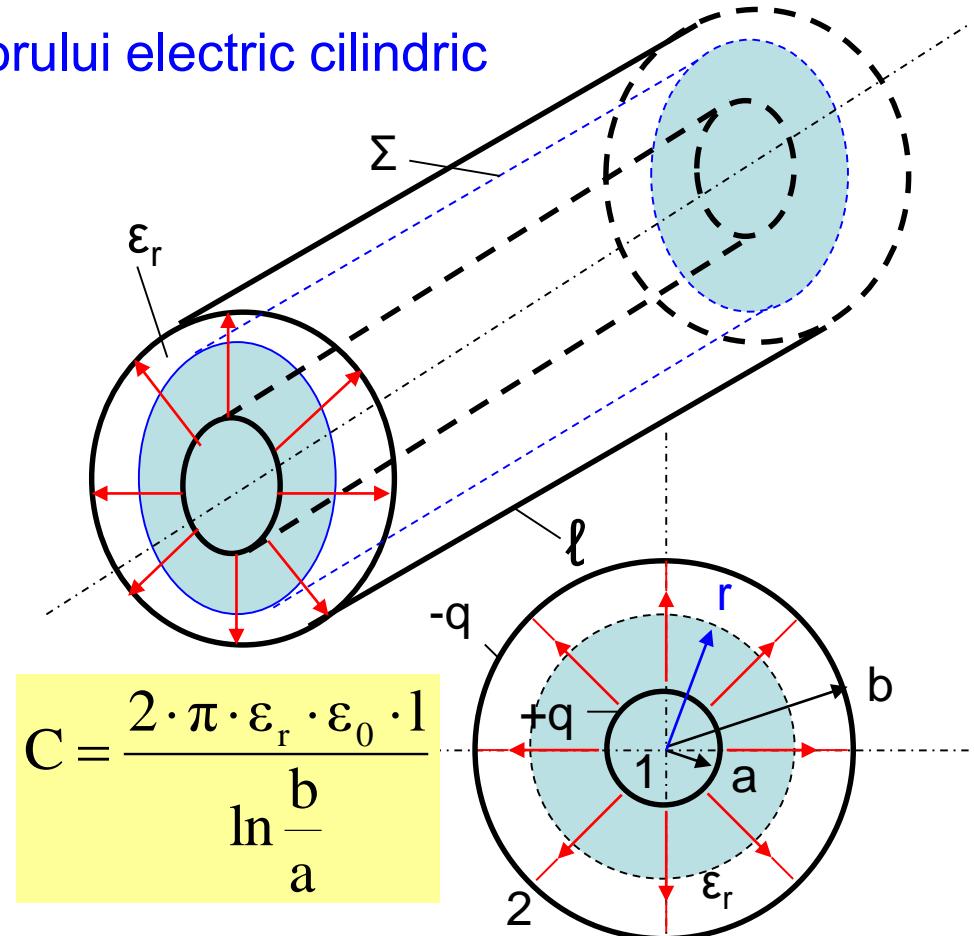


- proprietățile dielectricului:  $\epsilon_r$ ;
- dimensiunile geometrice: d, A.
- C[F]

Tema 2.2: Verificați dimensional expresia capacității condensatorului plan.

## Tema 2.3. Calculul capacității condensatorului electric cilindric (cablu electric coaxial).

- armături: 2 cilindri coaxiali de lungime  $\ell$  și raze  $a$ , respectiv  $b$ ;
- dielectric omogen și liniar, de permisivitate relativă  $\epsilon_r$ ;
- suprafața închisă  $\Sigma$  este cilindrică, de raza  $r$  ( $a < r < b$ );
- tensiunea dintre armături  $u_{12}$ , calculată în lungul unei linii de cîmp electric (neomogen).



$$C = \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \ell}{\ln \frac{b}{a}}$$

Tema 2.4 Calculați valoarea fluxului electric prin suprafața unei sfere cu  $r = 1[\text{cm}]$ , dacă în centrul sferei se află sarcina punctiformă  $q = 10[\text{mC}]$ . Cît devine fluxul dacă sarcina electrică se înlocuiește cu un mic corp polarizat, cu  $p = 1[\text{Cm}]$  ?

Tema 2.5 Ce valoarea are fluxul magnetic, produs de un cîmp magnetic omogen, de inducție  $B = 10^{-2}[\text{T}]$ , prin suprafața sferei cu raza  $r = 1[\text{cm}]$  ?

Tema 2.6 Se pot separa polii magnetici prin sectionarea unui magnet permanent?

## 2.2.3 LEGEA INDUCȚIEI ELECTROMAGNETICE

### a) Baza experimentală

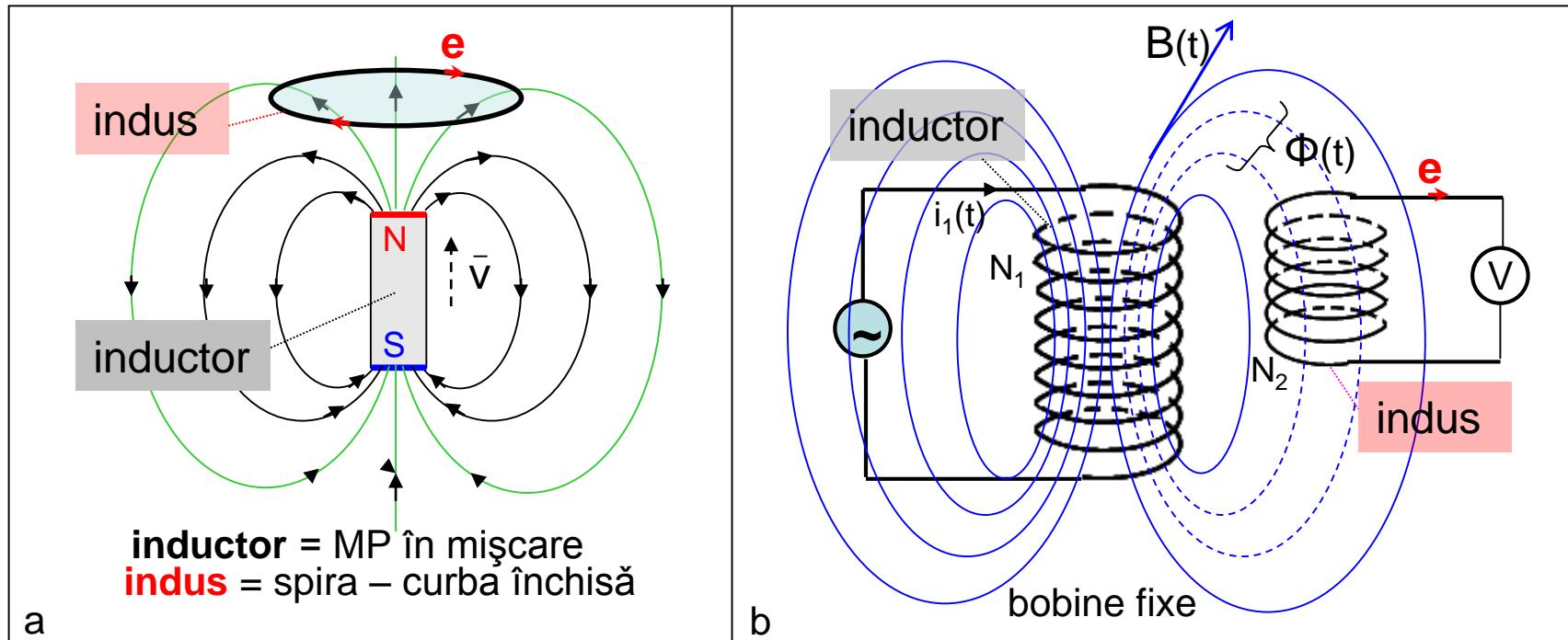


Fig. 2.8 Inducția electromagnetică de mișcare (a) și de transformare (b).

- inductor = sursa de cîmp magnetic variabil in timp;
- indus = traseul închis în care apare t.e.m indusă;
- mișcare: viteză relativă  $v \neq 0$   $\rightarrow$  translație, rotație, deformare;
- transformare:  $\rightarrow$   $B(t)$ , respectiv  $\Phi(t)$ .

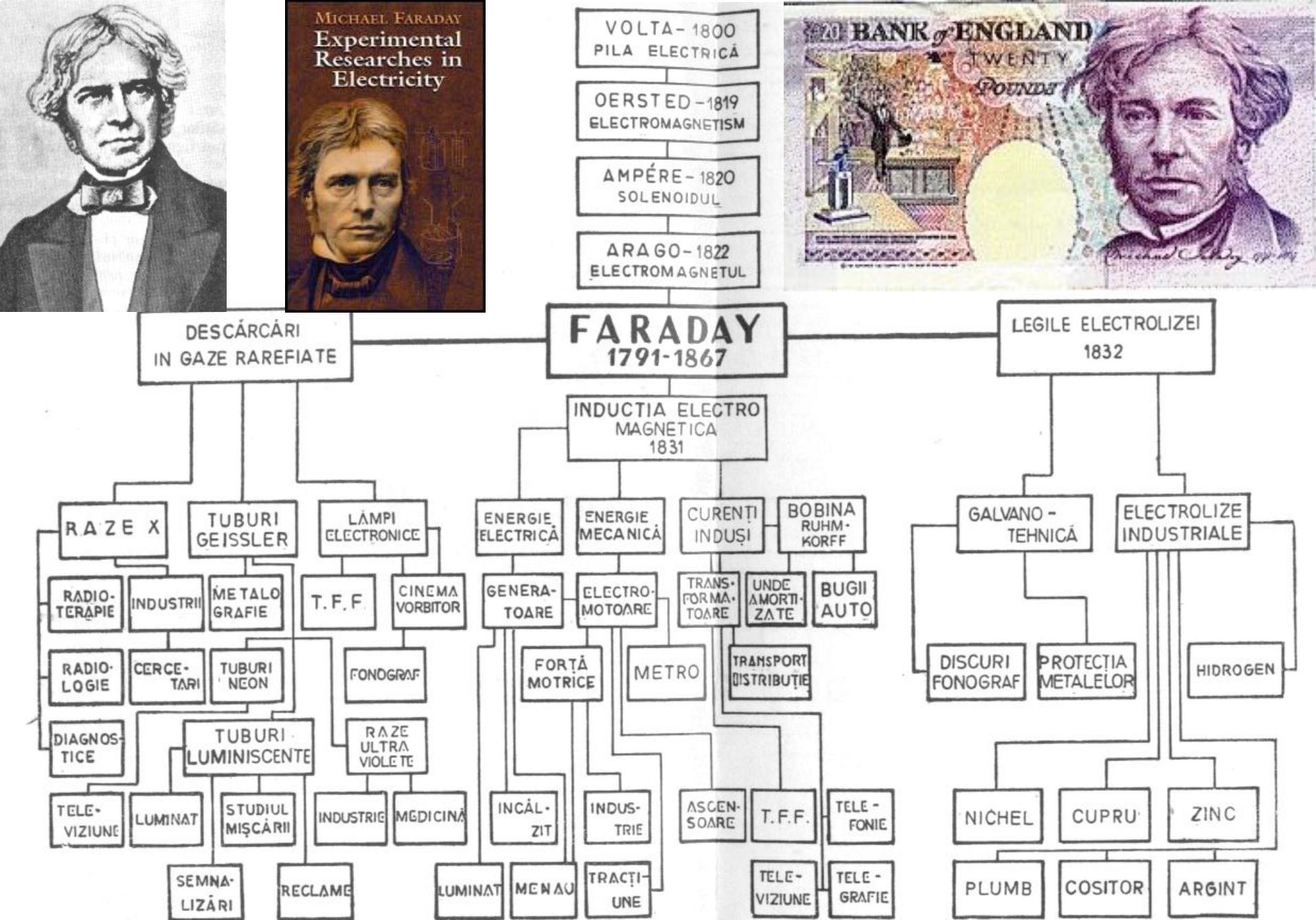


Fig. 337. Faraday și tehnica modernă  
(După Vinogradov. «La Science et la Vie», dec. 1931.)

D. Leonida, Michael Faraday; Ed. Tehnica, 1959

“Iata cine a fost parintele Electrotehnicii: cel mai mare experimentator pe care la avut vreodata omenirea” Tyndall

- fiul unui potcovar;
- a invatat la, o scoala elementara, numai sa citeasca, sa scrie si sa faca socoteli simple;
- ctea noaptea toate cartile aduse la legatoria unde era ucenic;
- in primul sau laborator (din podul unui grajd) si-a construit singur aparate simple pentru experiente de chimie si electricitate;
- niciodata nu a folosit calcule matematice;
- nu a vrut sa patenteze nicio descoperire sau inventie, pentru a putea fi folosite de toata lumea;
- nu a acceptat nici o distinctie, voind sa ramina mereu “*simplul Michael Faraday*”;
- a murit sarac.

## b) Forma integrală nedezvoltată

$$e_{\Gamma} = - \frac{d\Phi_{A\Gamma}}{dt}$$

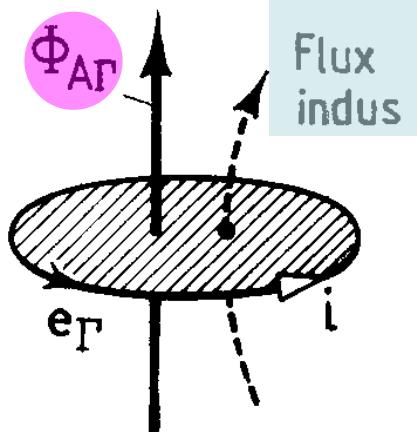
{   
 e<sub>Γ</sub> - t.e.m. indușă pe conturul închis Γ;   
 Φ<sub>AΓ</sub> – flux magnetic inductor



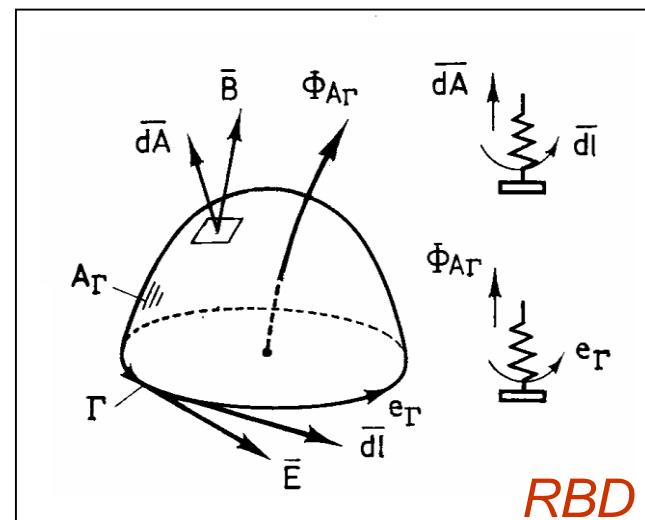
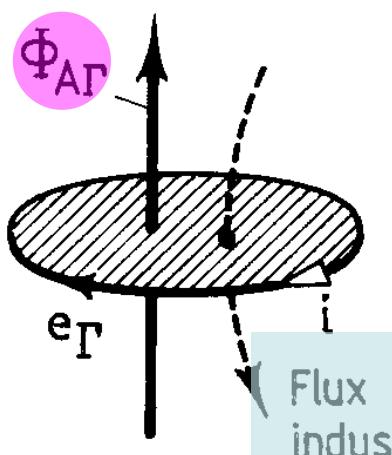
$$\oint_{\Gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} = - \frac{d}{dt} \iint_{A\Gamma} \bar{B} \cdot d\bar{A}$$

## c) Regula lui Lenz

$$d\Phi_{A\Gamma} < 0$$



$$d\Phi_{A\Gamma} > 0$$



**RBD**

Fig. 2.10 Regula burghiuilui drept

Fig. 2.9 Efectele inducției electromagnetice ( $e_{\Gamma} \rightarrow i_{\Gamma} \rightarrow$  flux induș) se opun cauzei care a produs-o (variația în timp a fluxului inductor  $\Phi_{A\Gamma}$ ).

## d) Forma integrală dezvoltată

$$\frac{d}{dt} \iint_{A\Gamma} \bar{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{A} = \iint_{A\Gamma} \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \operatorname{div} \bar{\mathbf{B}} + \operatorname{rot}(\bar{\mathbf{B}} \times \bar{\mathbf{v}}) \right] d\mathbf{A}$$

$\uparrow$        $\downarrow$  Teorema rotorului  
 $\operatorname{div} \bar{\mathbf{B}} = 0$        $\iint_{A\Gamma} \operatorname{rot}(\bar{\mathbf{B}} \times \bar{\mathbf{v}}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_{\Gamma} (\bar{\mathbf{B}} \times \bar{\mathbf{v}}) \cdot d\mathbf{l}$

$$\oint_{\Gamma} \bar{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_{A\Gamma} \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} + \oint_{\Gamma} (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}) \cdot d\mathbf{l} \quad - \text{ forma integrală}$$

$$e_t = - \iint_{A\Gamma} \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A};$$

t.e.m. de transformare:  $\mathbf{B}(t)$

$$e_m = \oint_{\Gamma} (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}) \cdot d\mathbf{l}$$

t.e.m. de mișcare:  $\mathbf{v} \neq 0$



### APLICAȚII

Transformatoare electrice



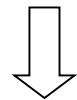
Mașini electrice

## e) Forma locală (diferențială)

$$\oint_{\Gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} = - \iint_{A\Gamma} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{A} + \oint_{\Gamma} (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} : - \text{ forma integrală}$$

$$\oint_{\Gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \iint_{A\Gamma} \text{rot} \bar{E} \cdot d\bar{l} \quad \text{Teorema rotorului} \quad \downarrow \quad \oint_{\Gamma} (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} = \iint_{A\Gamma} \text{rot}(\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{A}$$

$$\iint_{A\Gamma} \text{rot} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \iint_{A\Gamma} \left[ -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \text{rot}(\bar{v} \times \bar{B}) \right] d\bar{A}$$



$$\text{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \text{rot}(\bar{v} \times \bar{B}). \quad - \text{ forma diferențială}$$

Cazuri particulare:

- medii imobile ( $v=0$ ):  $\text{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$  - a doua ecuația a lui Maxwell;

- cîmp constant ( $B = \text{const.}$ ):  $\text{rot} \bar{E} = \text{rot}(\bar{v} \times \bar{B})$ ;  $\bar{E} = (\bar{v} \times \bar{B})$ .

# MAŞINI ELECTRICE

- Maşină electrică = maşină rotativă ce transformă puterea electrică în putere mecanică sau invers (convertor de energie electrică).

- Funcționează pe baza fenomenului de inducție electromagnetică.

- Parți componente:

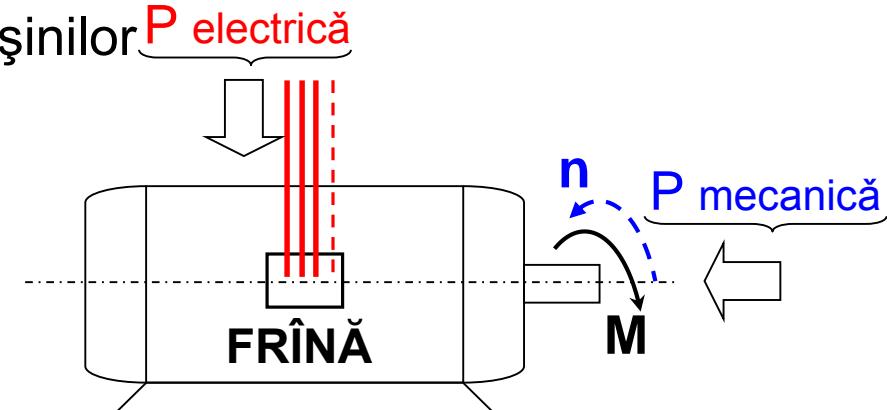
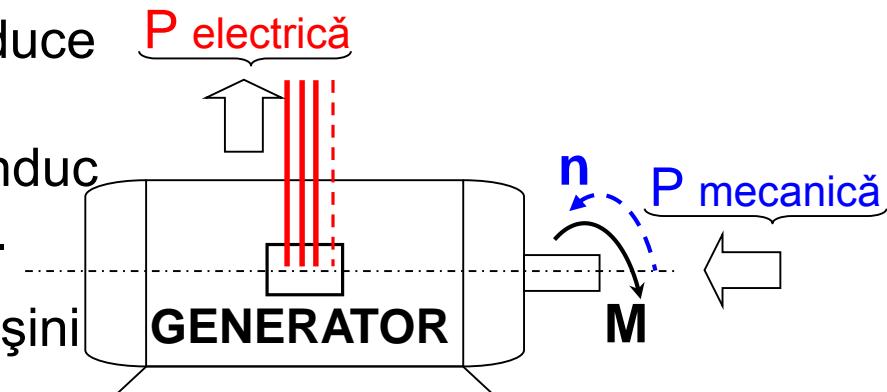
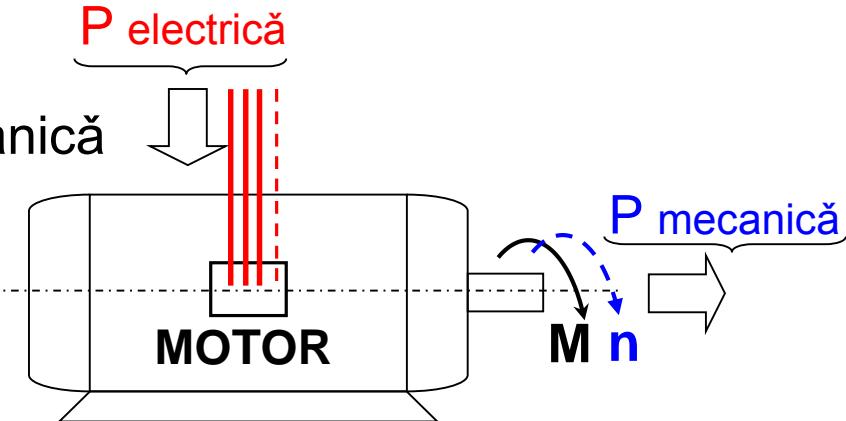
- **inductor** – partea mașinii care produce fluxul magnetic inductor;

- **indus** – partea mașinii în care se induc tensiuni electromotoare și curenți electrici.

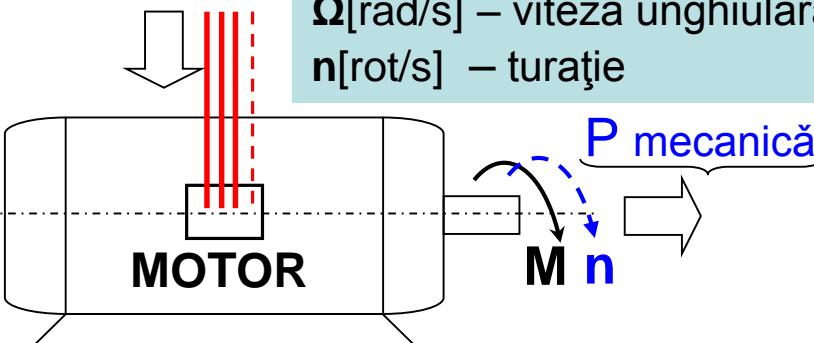
- Regimurile de funcționare ale unei mașini electrice sunt: motor, generator și frână.

- Clasificarea (după felul curentului) mașinilor electrice :

- mașini de c.c.;
- mașini asincrone;
- mașini sincrone.



**P electrică**

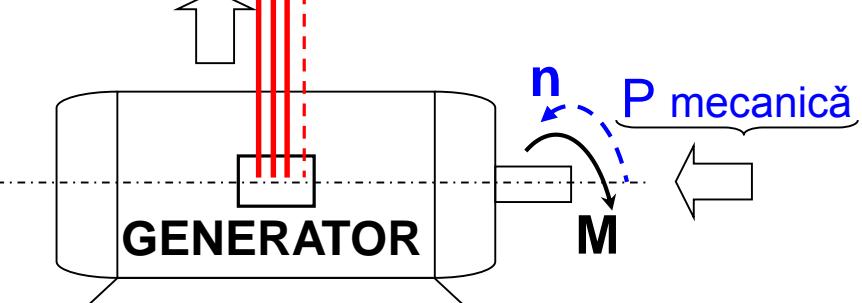


**M[N·m]** – cuplu la arbore  
**Ω[rad/s]** – viteză unghiulară  
**n[rot/s]** – turație

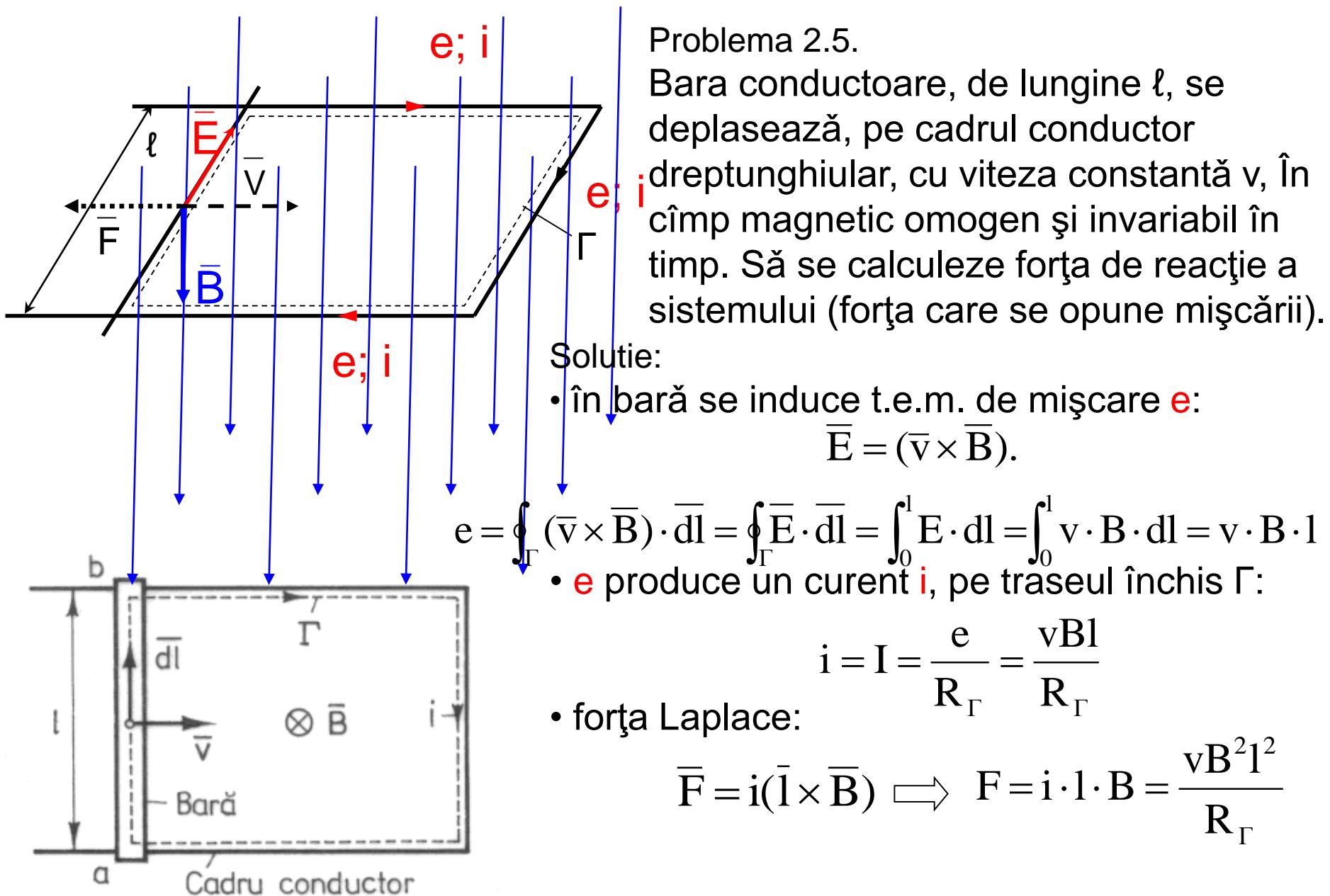
- Motorul electric convertește puterea electrică, primită pe la bornele de alimentare, în putere mecanică la arbore. În rețele trifazate puterea electrică absorbită de motor este  $P_e = 3U \cdot I \cdot \cos\varphi$ , iar puterea mecanică debitată  $P_m = M \cdot \Omega = M \cdot 2\pi \cdot n$ .

- Generatorul electric transformă puterea mecanică (primită pe la arbore) în putere electrică (debitată la borne).

**P electrică**



- În cazul mașinii ideale puterea absorbită este egală cu puterea debitată; în masina reală au loc pierderi electrice (în înfășurări și în miezul feromagnetic) și mecanice (prin frecare și ventilație). Pierderile în mașină sunt egale cu diferența dintre puterea absorbită (primită, consumată) și puterea debitată (produsă, utilă). Raportul dintre puterea debitată și puterea primită reprezintă randamentul mașinii electrice.
- Majoritatea mașinilor electrice sunt reversibile; aceeași mașină poate funcționa atât ca motor cât și ca generator



**Tema 2.7 Utilizînd expresia matematică a unei legi a electromagnetismului să se arate că dimenziional  $[V] = [Wb] / [s]$ .**

## f) Curenți turbionari (Foucault)

conductor masiv

în

cîmp magnetic variabil:  $B(t)$

$$\bar{j} = \sigma \cdot \bar{E}$$

legea conducei

$\bar{E}$  cîmp electric

inducție electromagnetică

$$\text{rot} \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

Efectele curenților turbionari:

- încălzirea conductorului masiv;
- forțe Laplace, datorate interacțiunii acestor curenți electrici cu cîmpul magnetic inductor.

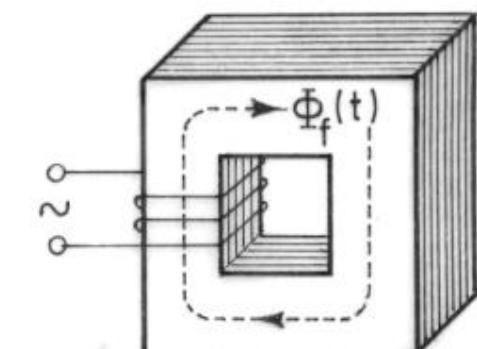
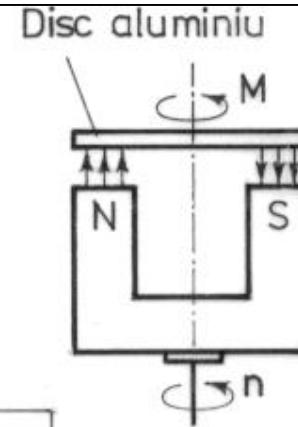
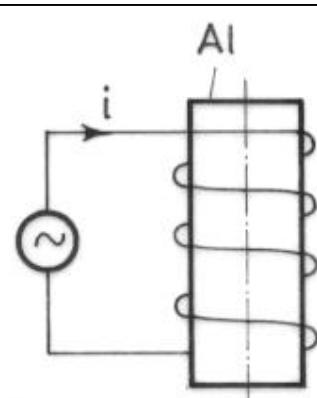
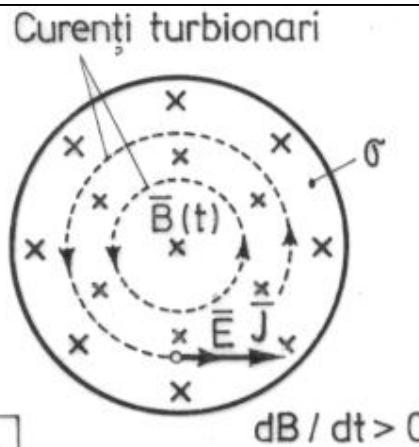


Fig. 2.11 a) conductor masiv în cîmp magnetic variabil; b) corp conductor încălzit prin inducție; c) tachimetru cu inducție; d) transformator cu miez feromagnetic din tole.

# CĂLIREA PRIN INDUCȚIE

- ÎNCĂLZIREA PRIN INDUCȚIE - încălzirea în volum a materialelor electroconductorice, prin curenți turbionari;
- CĂLIREA - tratament termic prin încălzire superficială a pieselor feromagnetice;
- PRINCIPIUL CĂLIRII: piesa se introduce în cîmpul magnetic al inductorului.

$$P \text{ [W/kg]} = k_T \cdot f^2 \cdot B^2$$

adîncime de pătrundere:

$$\delta \text{ [mm]} = \frac{0,503}{\sqrt{f \cdot \sigma \cdot \mu_r}}$$

$$f = 500 \text{ Hz} \div 1 \text{ MHz}$$

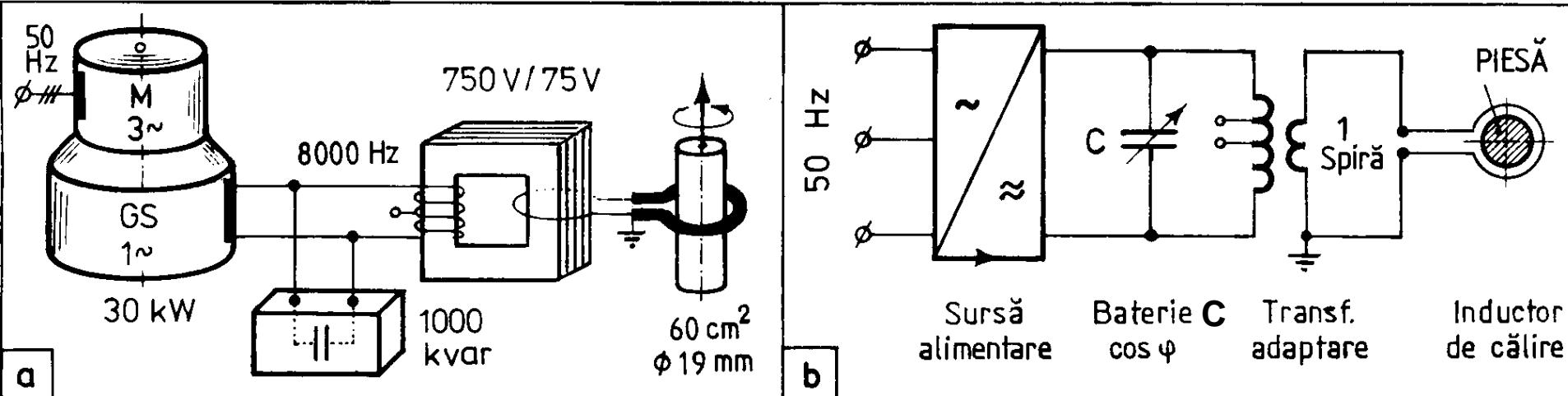


Fig. 2.12 Instalație de călire prin inducție: a) – părți componente; b) – schema electrică.

# TRANSFORMATORUL ELECTRIC

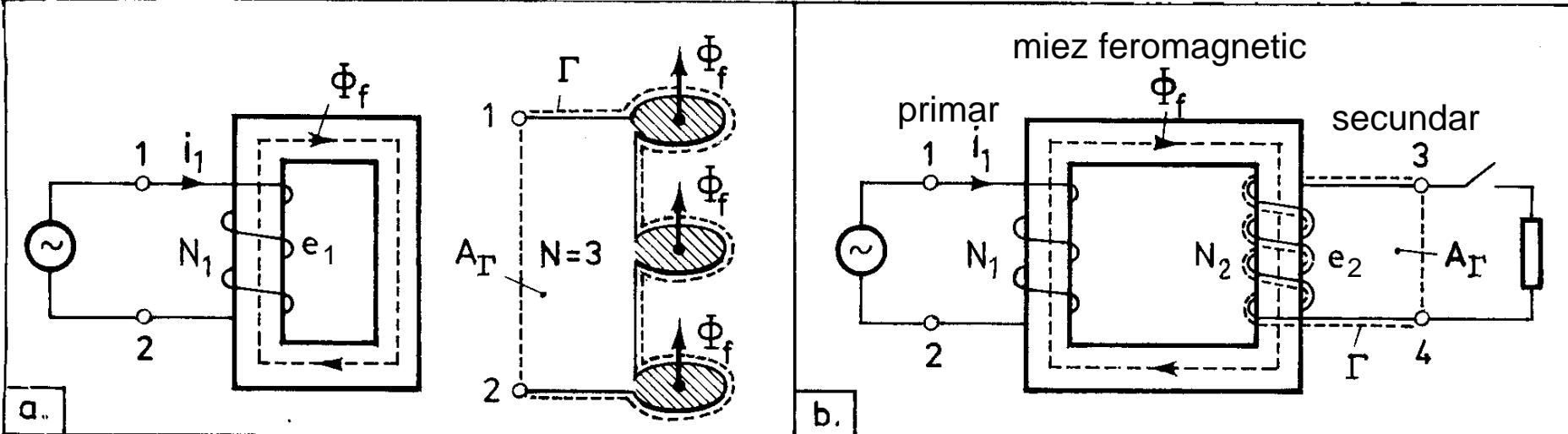
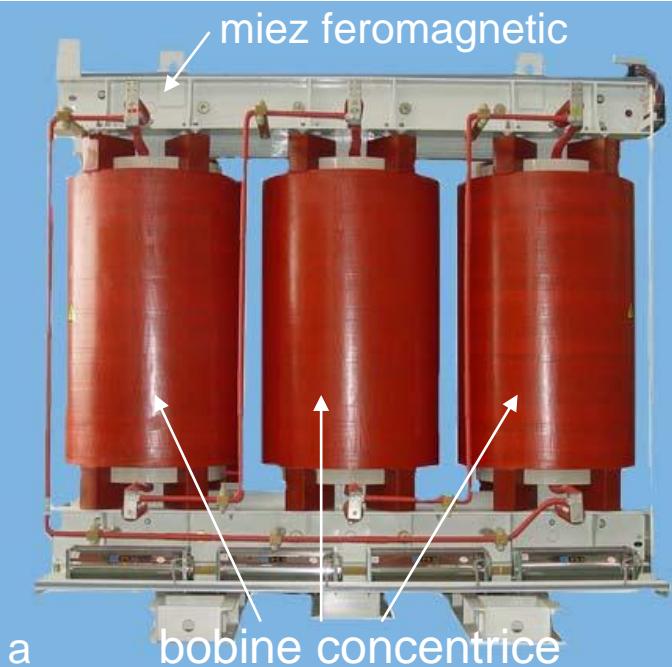


Fig. 2.13 Inductie proprie și mutuală în primarul, respectiv în secundarul transformatorului

- Flux magnetic total:  $\Phi = \Phi_{A\text{-bobina}}$ ;  $\left. \begin{array}{l} \Phi_{A\Gamma} = \Phi = N \cdot \Phi_f; \\ e_\Gamma = -\frac{d(N\Phi_f)}{dt} = -N \frac{d\Phi_f}{dt}. \end{array} \right\}$
- Flux magnetic fascicular:  $\Phi_f = \Phi_{A\text{-spira}}$
- Tensiune electromotoare de inducție proprie (autoinducție):  $e_{\Gamma 1} = e_1 = -N_1 \frac{d\Phi_f(i_1)}{dt};$
- Tensiune electromotoare de inducție mutuală (inducție reciprocă):  $e_{\Gamma 2} = e_2 = -N_2 \frac{d\Phi_f(i_1)}{dt};$



**Fig. 2.13** Părțile electromagnetice (a) și anexe (b) transformatorului electric de putere

Tema 2.8 Cînd t.e.m. de contur  $e_{\Gamma} = e_m + e_t$  este nenulă:

- $B = \text{constant și } v = 0;$
- $B = \text{constant și } v \neq 0;$
- $B = B(t) \text{ și } v = 0;$
- $B = B(t) \text{ și } v \neq 0;$
- $B = 0 \text{ și } v \neq 0.$  Justificați alegerea făcută.

## 2.2.4 LEGEA CIRCUITULUI MAGNETIC

### a) Forma globală (integrală)

$$u_{mm\Gamma} = \Theta_{A\Gamma} + \frac{d\Psi_{A\Gamma}}{dt} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{mm\Gamma} = \oint_{\Gamma} \bar{H} \cdot \bar{dl}; \quad \Theta_{A\Gamma} = \iint_{A\Gamma} \bar{j} \cdot \bar{dA}; \quad \Psi_{A\Gamma} = \iint_{A\Gamma} \bar{D} \cdot \bar{dA}. \end{array} \right.$$



$$\oint_{\Gamma} \bar{H} \cdot \bar{dl} = \iint_{A\Gamma} \bar{j} \cdot \bar{dA} + \frac{d}{dt} \iint_{A\Gamma} \bar{D} \cdot \bar{dA}$$

- pentru corpuri în repaus ( $v = 0$ ):

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} \cdot \bar{dl} = \iint_{A\Gamma} \bar{j} \cdot \bar{dA} + \iint_{A\Gamma} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot \bar{dA}$$

$\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \bar{j}_D$  - densitatea curentului electric de deplasare;

$i_D = \iint_{A\Gamma} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot \bar{dA} = \iint_{A\Gamma} \bar{j}_D \cdot \bar{dA}$  - intensitatea curentului de deplasare.

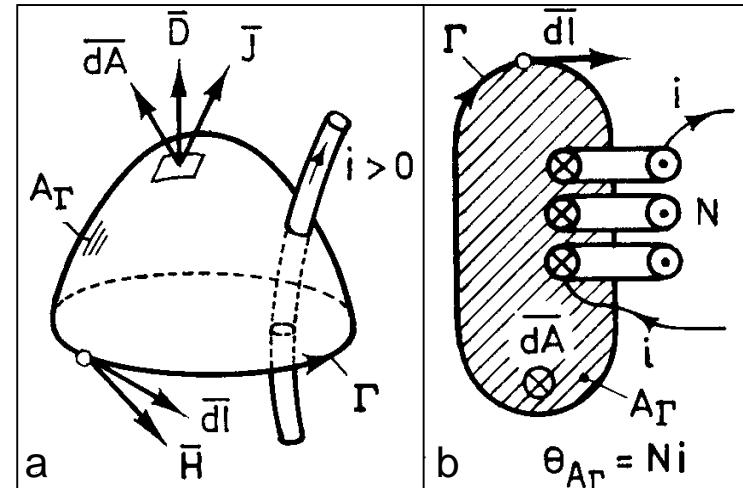


Fig. 2.14 Sensuri de referință (a) și solenația unei bobine electrice (b).

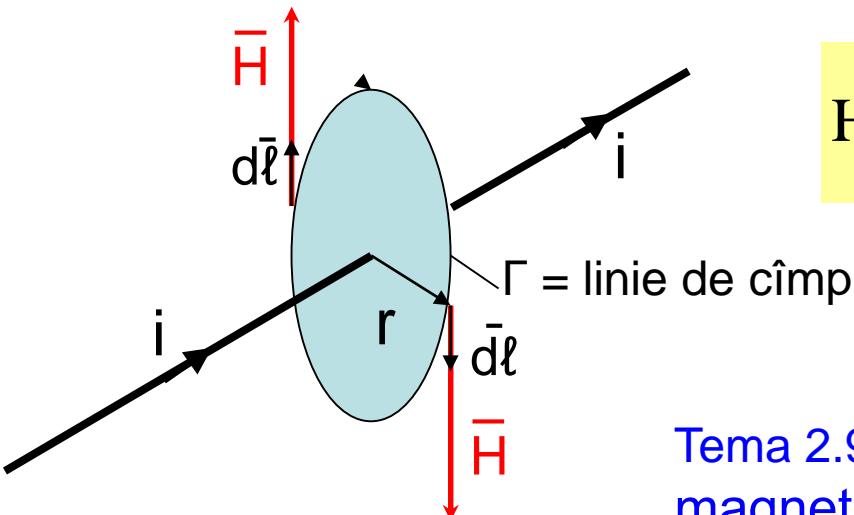
Teorema lui Ampère – legea circuitului magnetic, pentru medii imobile ( $v=0$ ), în regim **cuasistaționar** ( $j_D \ll j$ ):

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} \cdot d\bar{l} = \iint_{A\Gamma} \bar{j} \cdot d\bar{A} + \iint_{A\Gamma} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{A}; \quad \rightarrow \quad \oint_{\Gamma} \bar{H} \cdot d\bar{l} = \iint_{A\Gamma} \bar{j} \cdot d\bar{A}$$

Aplicații ale teoremei lui Ampère: calculul cîmpului magnetic

Problema 2.6.

Să se calculeze cîmpul magnetic, produs în aer, de un conductor filiform, liniar, în regim electrocinetic (parcurs de curentul electric de intensitate  $i$ ).



$$H(r) = \frac{i}{2\pi \cdot r};$$

$$B(r) = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot H = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi \cdot r}$$

Tema 2.9 Să se calculeze valoarea inducției magnetice în aer, la distanța  $d = 1\text{cm}$  față de conductorul liniar și filiform, parcurs de  $1[\text{kA}]$ .

**Regim cuasistăționar** = regimul în care densitatea curentului de deplasare se poate neglijă, în întreg volumul, cu excepția dielectricilor condensatoarelor, din acel volum

## Problema 2.7.

Să se calculeze intensitatea câmpului magnetic în interiorul și în exteriorul:

- a) unui conductor masiv, parcurs de curentul electric  $i$ ;
- b) unei bobine electrice, cu miez feromagnetic toroidal.

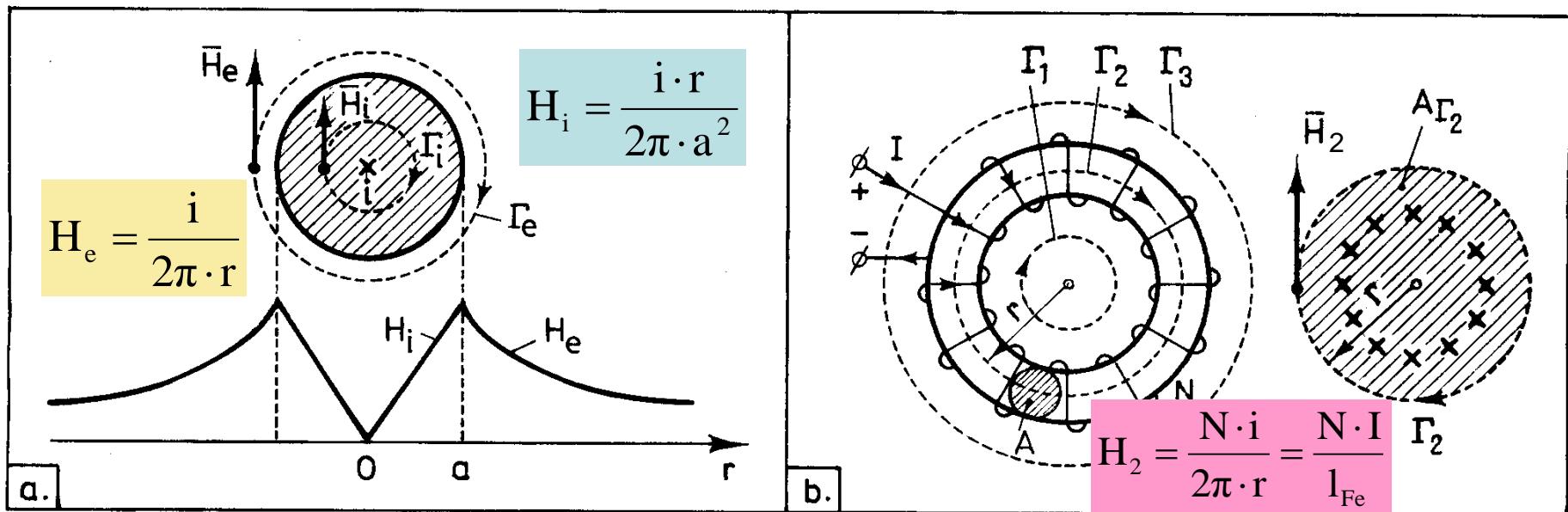


Fig. 2.15 Câmpul magnetic pentru conductorul masiv (a) și pentru bobina toroidală (b)

## Tema 2.10

La ce distanță de suprafața conductorului masiv, cu secțiunea circulară, inducția magnetică are valoarea jumătate din valoarea maximă. Se dă:  $r = 5[\text{mm}]$ ;  $I = 10[\text{A}]$ ;  $\mu_r = 1$ .

## Problema 2.8.

Calculul inductivității unei bobine electrice, cu miez feromagnetic toroidal.

$$H = H_{Fe} = H_2 = \frac{N \cdot i}{2\pi \cdot r} = \frac{N \cdot I}{l_{Fe}}$$

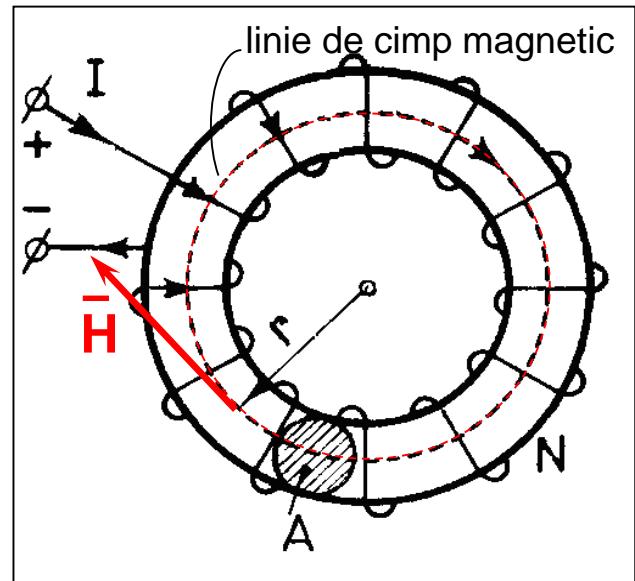
$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_r = \text{const.} \\ \bar{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \bar{H}. \end{array} \right.$$

$$B = \mu \cdot H = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot H = \mu_r \cdot \mu_0 \frac{N \cdot I}{l_{Fe}};$$

$$\Phi_f = \iint_{\text{spira}} \bar{B} \cdot d\bar{A} = \iint_A B \cdot dA = B \cdot A$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{N \cdot \Phi_f}{I} = \mu_r \cdot \mu_0 \frac{N^2 \cdot A}{l_{Fe}}$$

- proprietățile miezului feromagnetic:  $\mu_r$ ;
- numărul de spire: N;
- dimensiunile geometrice:  $l$ , A.



## b) Forma locală (diferențială)

- pentru corpuri în repaus:

$$\left. \int_{\Gamma} \bar{H} \cdot d\bar{l} = \iint_{A\Gamma} \bar{j} \cdot \bar{dA} \right\} \text{teorema rotorului}$$

$$\int_{\Gamma} \bar{H} \cdot d\bar{l} = \iint_{A\Gamma} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot \bar{dA}$$

$$\iint_{A\Gamma} \text{rot} \bar{H} \cdot \bar{dA} = \iint_{A\Gamma} \left( \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) \cdot \bar{dA}$$

orice  $\Gamma \rightarrow$  orice  $A_{\Gamma}$

$$\text{rot} \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad - \text{forma locală}$$

prima ecuație a lui Maxwell

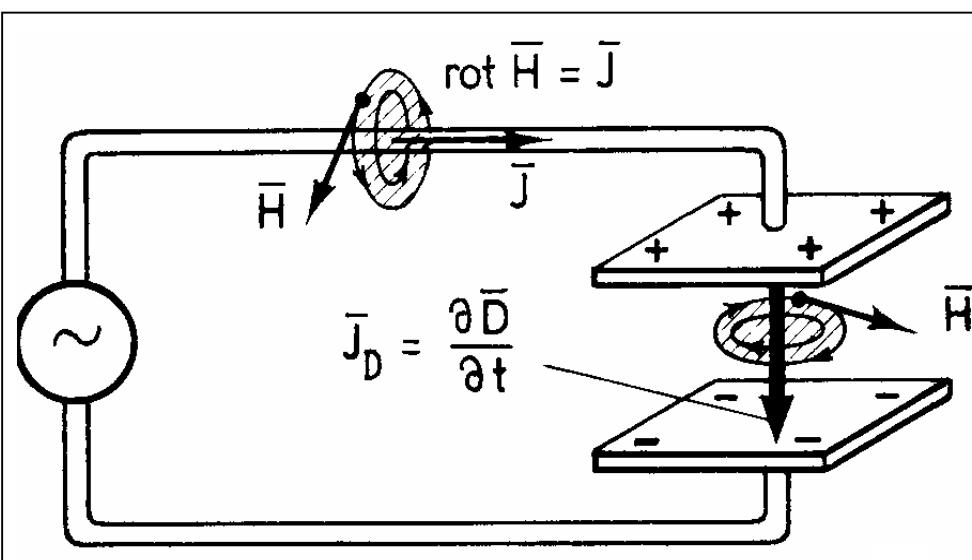


Fig. 2.16 Condensator electric în c.a.  
(regim cuasistationar).

- regim cuasistationar ( $j_D \ll j$ ):

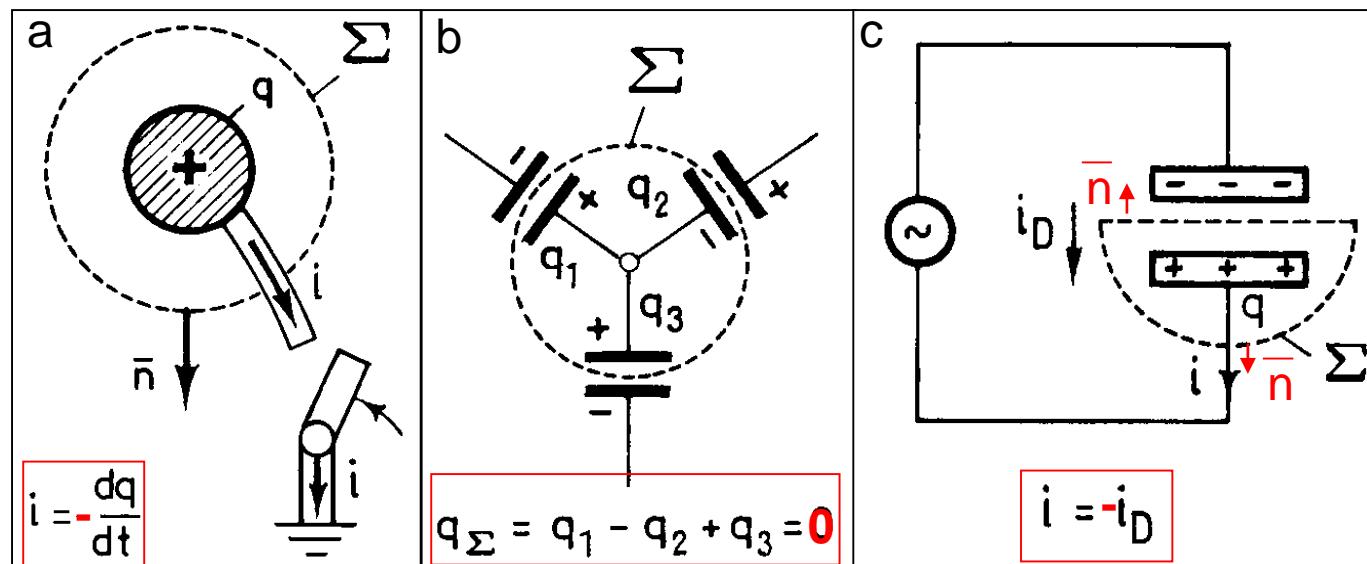
$$\text{rot} \bar{H} = \bar{j}$$

## 2.2.5 LEGEA CONSERVĂRII SARCINII ELECTRICE

a) Forma integrală:  $i_{\Sigma} = -\frac{dq_{\Sigma}}{dt}$      $\left\{ \begin{array}{l} i_{\Sigma} = \oint_{\Sigma} \bar{j} \cdot d\bar{A}; \quad \oint_{\Sigma} \bar{D} \cdot d\bar{A} = q_{\Sigma}. \end{array} \right.$

- $\Sigma$  intersectează numai izolatori:  $i_{\Sigma} = 0 \rightarrow \frac{dq_{\Sigma}}{dt} = 0$ ; sau  $q_{\Sigma} = \text{const.}$
- $\Sigma$  intersectează izolatori și conductori:  $\oint_{\Sigma} \bar{j} \cdot d\bar{A} = -\oint_{\Sigma} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{A}$  sau

$$i_{\Sigma} = -i_{D\Sigma}.$$



**Fig. 2.17** a) – curent de neutralizare; b) - nod electrostatic;  
c) - curent de deplasare prin dielectricul condensatorului.

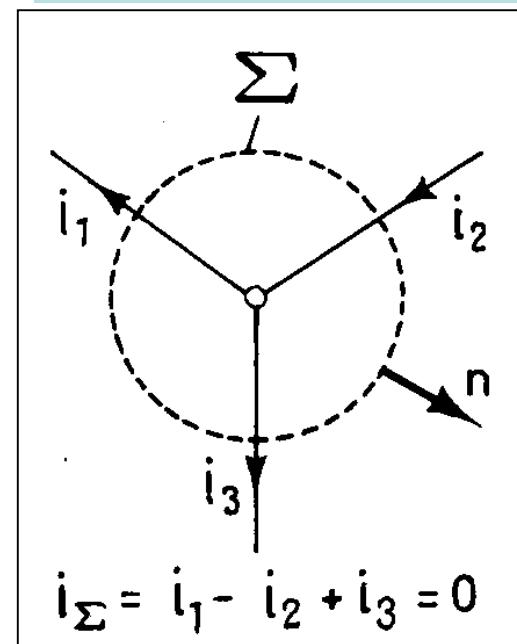
- regim cuasistăționar ( $j_D \ll j$ ):  $\oint_{\Sigma} \bar{j} \cdot d\bar{A} = 0$ , sau  $i_{\Sigma} = 0$ ;



*teorema continuității linilor de curent*

&  
nod de circuit

*prima teorema  
a lui Kirchhoff*

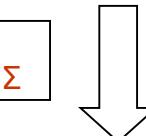


## b) Forma locală (diferențială)

- în regim cuasistăționar:

$$\oint_{\Sigma} \bar{j} \cdot d\bar{A} = 0 \quad \xrightarrow{\text{teorema divergeniei}} \quad \iiint_{V\Sigma} \operatorname{div} \bar{j} \cdot dV = 0$$

orice  $\Sigma \rightarrow$  orice  $V_{\Sigma}$



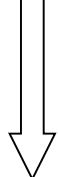
$$\operatorname{div} \bar{j} = 0$$

Fig. 2.18 Nod electrocinetic

## 2.2.6 LEGEA EFECTULUI ELECTROCALORIC

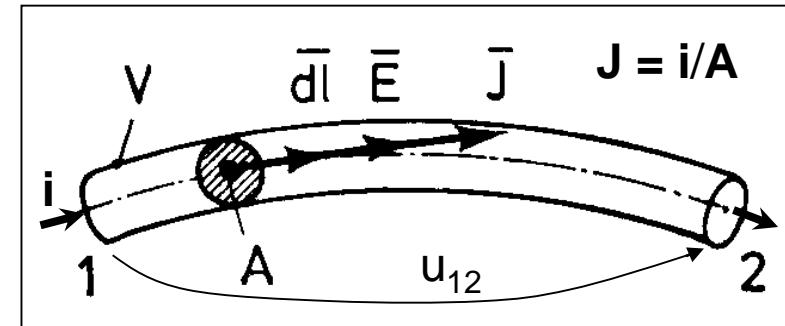
a) Forma locală:  $p = \frac{dP}{dV} = \bar{E} \cdot \bar{j}$ ;  $[p] = [E] \cdot [j] = V/m \cdot A/m^2 = W/m^3$ .

**conductor omogen**  
 $\bar{E}_i = 0$



$$\bar{E} + \bar{E}_i = \rho \cdot \bar{j}$$

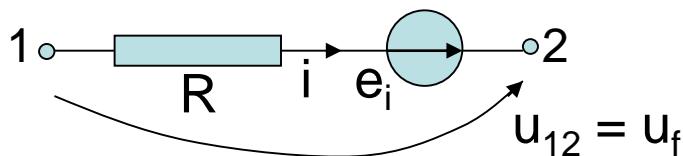
$$p = \rho \cdot j^2 = \sigma \cdot E^2$$



b) Forma integrală:

$$\iiint_V p \cdot dV = \iiint_V \bar{E} \cdot \bar{j} \cdot dV;$$

$$P = \iiint_V E \cdot j \cdot dV = \int_{1(\text{fir})}^2 E \cdot j \cdot A \cdot dl = i \int_{1(\text{fir})}^2 E \cdot dl = u_f \cdot i \quad \left. \begin{array}{l} P = R \cdot i^2 - i \cdot e_i \\ u_f + e_i = R \cdot i \end{array} \right\}$$



$$u_f \cdot i = R \cdot i^2 - i \cdot e_i \quad \left. \begin{array}{l} P = R \cdot i^2 - i \cdot e_i \\ u_f + e_i = R \cdot i \end{array} \right\}$$

$P = u_f \cdot i$  – putere primită de conductor din exterior, de la cîmpul electric;

$P_R = R \cdot i^2$  – putere transformată ireversibil în căldură;

$P_G = i \cdot e_i$  – putere schimbată de sursa de energie cu cîmpul electric exterior.

## Problema 2.9

Rezistență unui conductor filiform este  $R = 20[\Omega]$ , iar curentul care îl parcurge  $i=5[A]$ . Să se calculeze puterea dezvoltată în conductor, precum și cantitatea de căldură produsă în timp de o oră (în joule<sup>1</sup>, kilowatt-oră<sup>2</sup> și kilocalorii<sup>3</sup>).

Rezolvare:

$$P_R = R \cdot i^2 = 20 \cdot 5^2 = 500 [W];$$

 **energie = putere x timp**

$$W_a = P_R \cdot t = 500 \cdot 3600 [W \cdot s] = 18 \cdot 10^5 [J];$$

$$W_a = P_R \cdot t = 500 \cdot 1 [W \cdot h] = 0,5 [kWh];$$

$$W_a = P_R \cdot t = 0,24 \cdot 500 \cdot 3600 [cal] = 432\,000 [cal] = 432 [kcal].$$

---

<sup>1</sup>  $J = Joule; [J] = [W \cdot s]$

<sup>2</sup>  $kW \cdot h = 10^3 W \cdot 3600 s = 3,6 \cdot 10^6 J$

<sup>3</sup>  $kcal = 10^3 \cdot cal; cal = 0,24 \cdot Ws = 0,24 J$

# Concluzii

Ecuatiile lui Maxwell = forma locală, pentru medii imobile ( $v=0$ ), a legilor:

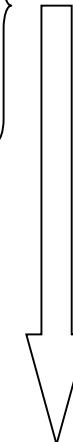
- circuitului magnetic:

- inducției electromagnetice:

- fluxului electric:

- fluxului magnetic:

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot} \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ \text{rot} \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \text{div} \bar{D} = \rho_v \\ \text{div} \bar{B} = 0 \end{array} \right\}$$



Unde electromagnetice = cîmp electromagnetic, “desprins de corpuri”, produs prin interacțiunea dintre cîmpul electric variabil în timp și cîmpul magnetic variabil în timp, ce se propagă cu viteza:  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}}$ , unde  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 [\text{m/s}]$ .

Undele electromagnetice stau la baza telecomunicațiilor, radiolocației, radionavigației, radiogeodeziei, radioastrologiei etc

# Cap. 3 BAZELE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

pag. B1\*

## 3.1 TOPOLOGIE și MĂRIMI

3.1.1 Topologia circuitelor	152
3.1.2 Clasificarea circuitelor	153
3.1.3 Mărimi sinusoidate	155
3.1.4 Caracterizarea dipolului electric pasiv	159
3.1.5 Puteri electrice în regim permanent sinusoidal	162

## 3.2 ECUAȚIILE CIRCUITELOR ELECTRICE

3.2.1 Teorema lui Joubert	164
3.2.2 Teoremele lui Kirchhoff	166
3.2.3 Teorema conservării puterilor	167

## 3.3 ELEMENTE DIPOLARE

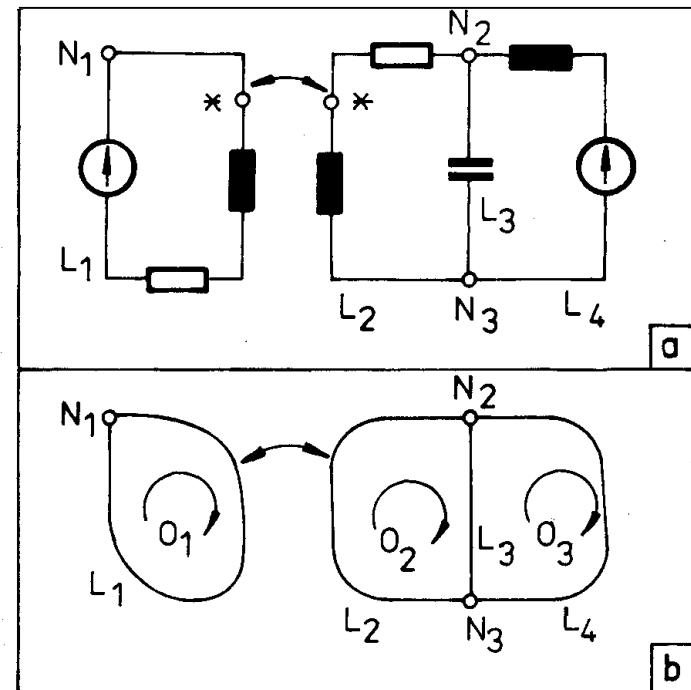
3.3.1 Elemente active (surse, generatoare)	170
3.3.2 Rezistoare electrice	172
3.3.3 Bobine electrice	174
3.3.4 Condensatoare electrice	177

13 probleme rezolvate + 17 probleme propuse

# 3.1 TOPOLOGIE și MĂRIMI

## 3.1.1 TOPOLOGIA CIRCUITELOR

- latură – porțiune neramificată de circuit, pe care curentul rămîne constant;
- nod – punct de intersecție a cel puțin trei laturi, sau punctul în care se unesc extremitățile unei laturi închise cu ea însăși;
- ochi (buclă, ciclu) – o succesiune de laturi formînd o curbă închisă;



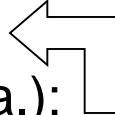
- pentru orice rețea conexă (oricare două noduri pot fi unite printr-o curbă care trece numai prin laturi), numărul de ochiuri independente:  
$$o = l - n + 1;$$
- față de un sistem dat de ochiuri, un ochi este independent dacă conține cel puțin o latură ne comună la acel sistem.

Fig. 3.1 Rețea electrică (a) și schema sa topologică (b)

b

### 3.1.2 CLASIFICAREA CIRCUITELOR

a) natura elementelor de circuit:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{- liniare;} \\ \text{- neliniare.} \end{array} \right.$

b) regimul de funcționare:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{- staționar (c.c.);} \\ \text{- cuasistaționar (c.a.);} \\ \text{- nestaționar (variabil).} \end{array} \right.$   frecvență  $f = 0$

c) legătura cu exteriorul:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{- izolate;} \\ \text{- neizolate: } \left\{ \begin{array}{l} \text{- dipol (latură);} \\ \text{- cuadripol;} \\ \text{- multipol.} \end{array} \right. \end{array} \right.$



 regimul permanent sinusoidal al circuitelor liniare de c.a.



fenomene stabilizate

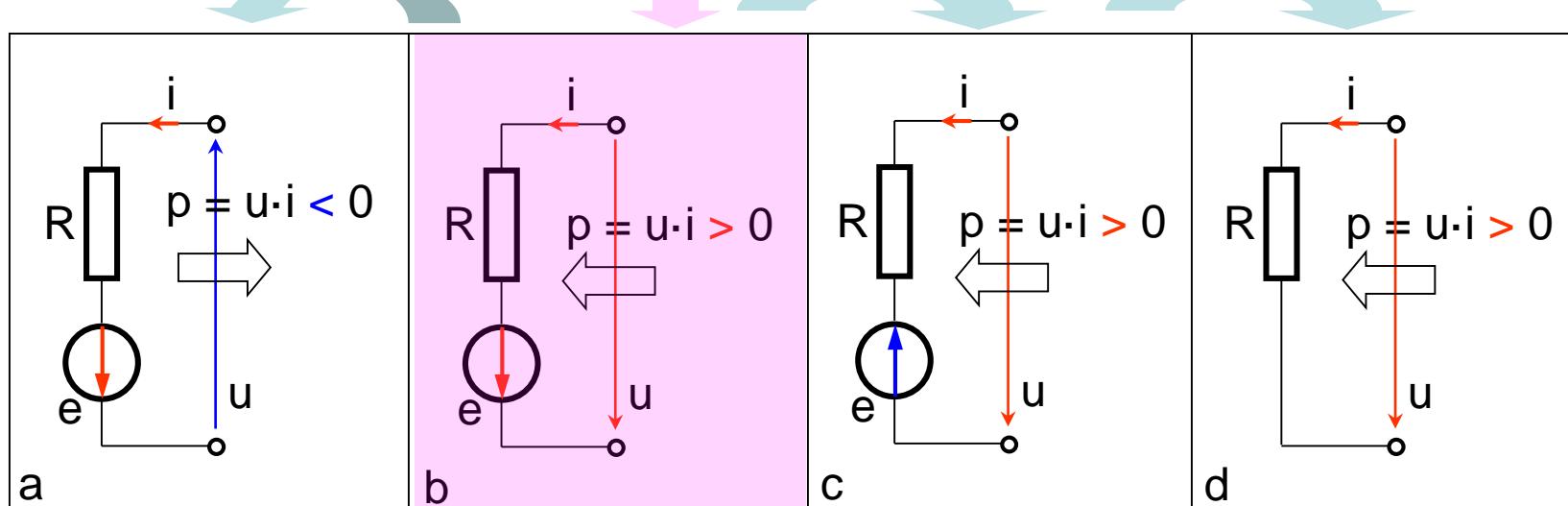


mărimile de stare variază periodic

#### d) clasificarea laturilor\* de circuit

- latură  $\begin{cases} \text{- activă: } e \neq 0 \\ \text{- pasivă: } e = 0 \end{cases}$
- latură  $\begin{cases} \text{- receptoare: } p = u \cdot i > 0 \text{ (primește putere pe la borne);} \\ \text{- generatoare: } p = u \cdot i < 0 \text{ (cedează putere pe la borne);} \end{cases}$

**latură activă receptoare:**  $\uparrow i \equiv \uparrow u$  și  $\uparrow i \equiv \uparrow e$ ;  $u + e = i \cdot R$



**Fig. 3.2 Laturi active (a, b, c); pasivă (d); generatoare (a); receptoare (b, c, d)**

Latură de circuit electric = circuit electric (neizolat) dipolar

### 3.1.3 MĂRIMI SINUSOIDATE

#### a) producere

- flux magnetic fascicular  $\Phi_f = \Phi_{A\text{-spiră}}$ :

$$\Phi_f = \bar{B} \cdot \bar{A} = BA \cos(\omega t + \gamma)$$

- flux magnetic total:  $\Phi = \Phi_{A\text{-bobină}}$ :

$$\Phi_{A\Gamma} = \Phi = N \cdot \Phi_f ;$$

- t.e.m. de mișcare:

$$e = -N \frac{d\Phi_f}{dt} = NBA\omega \sin(\omega \cdot t + \gamma) = E_m \sin(\omega \cdot t + \gamma)$$

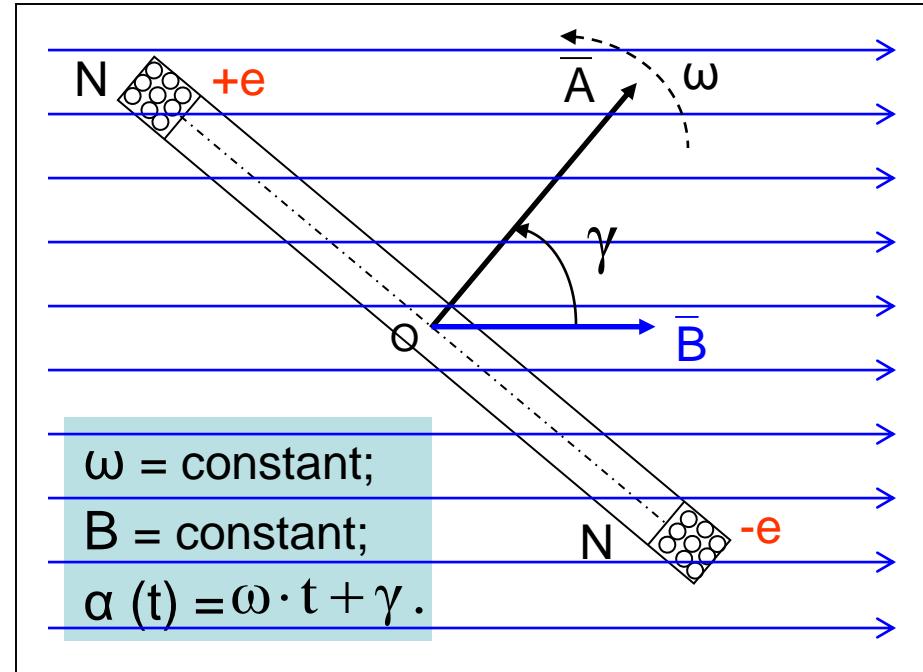


Fig. 3.3 Producerea t.e.m. sinusoidală, prin rotirea unei bobine într-un cîmp magnetic exterior

$$N \cdot B \cdot A \cdot \omega = \text{const.} = E_m$$

## b) caracterizare

- perioada:  $T$  [s]
- frecvență:  $f = 1/T$  [ $s^{-1}$ ] = [Hz]
- pulsăția:  $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$

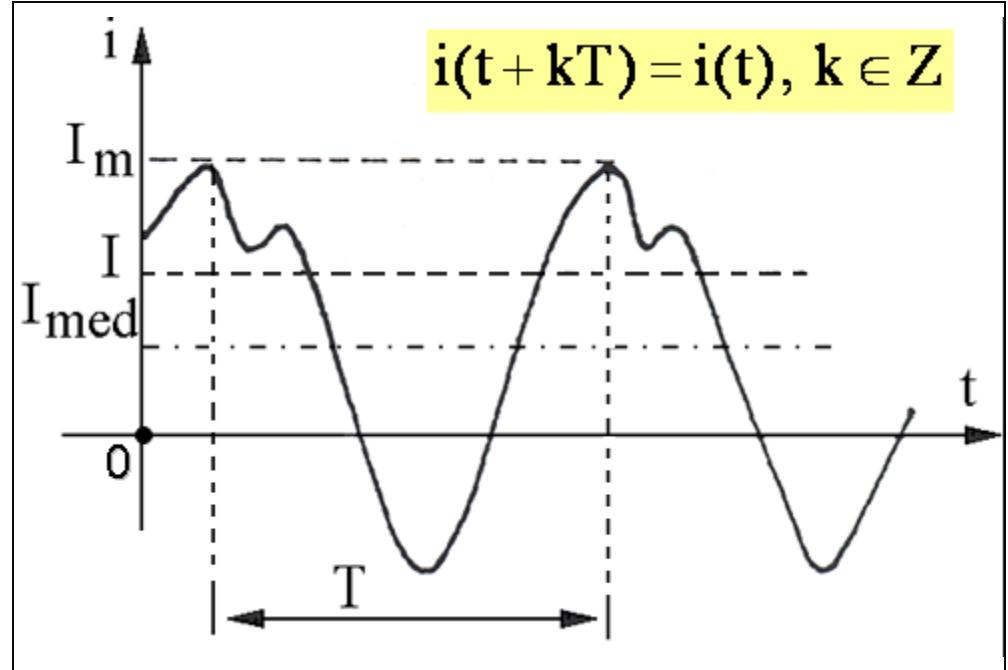


Fig. 3.4 Caracterizarea mărimii periodice  $i(t)$

- valoarea medie:  $I_{med} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i(t) dt \geq 0$  sau  $< 0$
- valoarea medie pătratică = valoarea efectivă (eficace):  
$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i^2(t) dt} \geq 0$$



- valoarea indicată de apărtele de măsură

$$i = I_m \sin(\omega \cdot t + \gamma); \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \gamma) \cdot dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m$$

$$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \gamma)$$

- faza:  $\omega \cdot t + \gamma$  [rad]

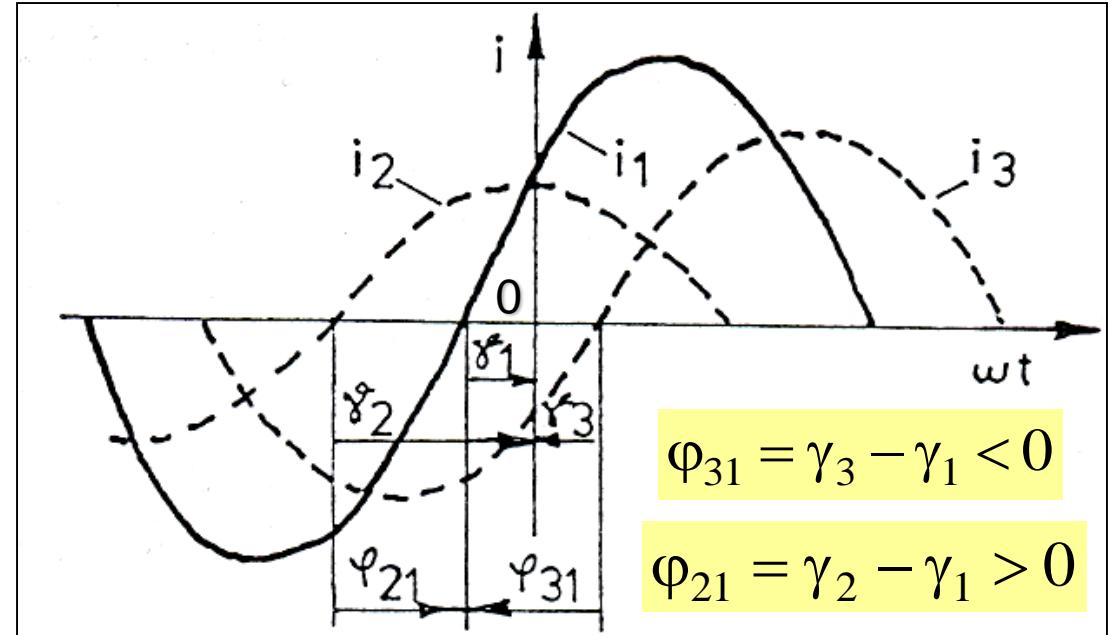


Fig. 3.5 Faze inițiale și defazaje

- faza inițială:  $\gamma \in (-\pi, \pi]$
- defazajul:  $\varphi_{12} = -\varphi_{21} = \gamma_1 - \gamma_2 \in (-\pi, \pi]$   $\begin{cases} \varphi = 0: \text{mărimi } \underline{\text{în fază}}; \\ \varphi = \pi: \text{mărimi } \underline{\text{în opozitie de fază.}} \end{cases}$

Problema 3.1.

Caracterizați sinusoida tensiunii rețelei monofazate de j.t. dacă valoarea instantanee are expresia:  $u(t) = \sqrt{2} \cdot 220 \sin(100\pi \cdot t)$  [V].

$$U = 220 \text{ [V]};$$

$$U_m = \sqrt{2} \cdot 220 = 311 \text{ [V]}.$$

$$u(t) = \sqrt{2} U \cdot \sin(\omega \cdot t + \gamma)$$

$$\omega = 100\pi = 314 \text{ [rad/s]};$$

$$f = \omega/2\pi = 50 \text{ [Hz]};$$

$$T = 1/f = 0,02 \text{ [s]}$$

Tema 3.1

Calculați frecvența și pulsația mărimii sinusoidale dacă  $T = 20 \text{ [ms]}$ .

Tema 3.2.

Scrieți ecuația și reprezentați sinusoida tensiunii  $u(t)$ , dacă  $T = 2 \text{ [ms]}$  și valoarea maximă (de vîrf)  $U_m = 331 \text{ [V]}$  este atinsă la  $t = 0,2 \text{ [ms]}$ .

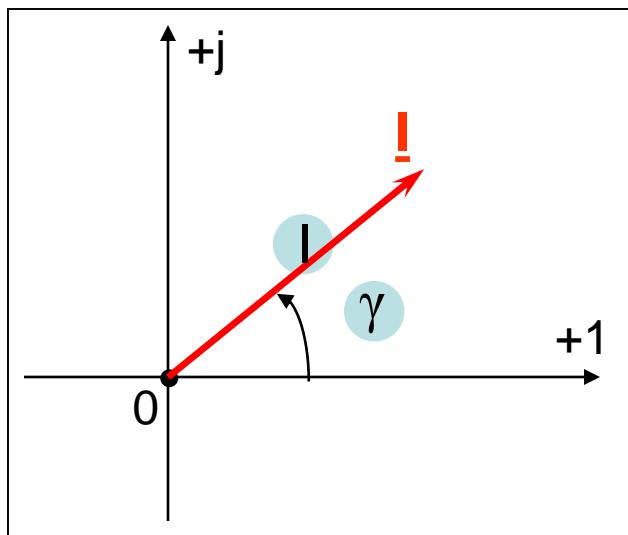
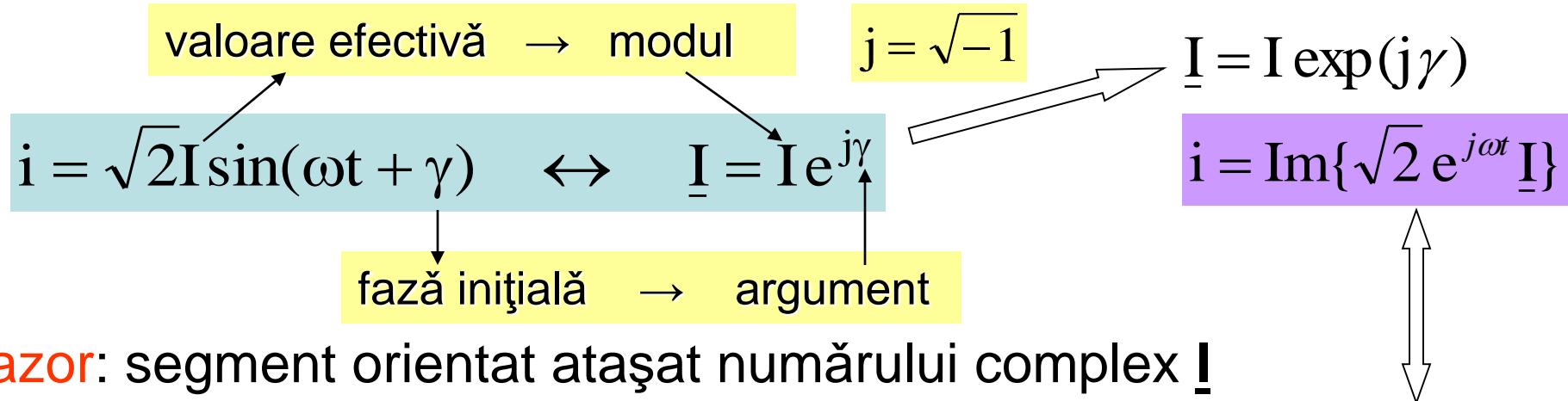
Tema 3.3

Demonstrați că valoarea medie a mărimilor sinusoidale este nulă.

Tema 3.4

Scrieți expresia sinusoidei curentului electric, dacă ampermetrul indică  $2 \text{ [A]}$  iar frecvențmetrul  $100 \text{ [Hz]}$ . Alegeți fază inițială a curentului sinusoidal egală cu un sfert de perioadă.

### c) reprezentarea în complex (prin fazori)



$$\underline{I} = I \cdot e^{j\gamma} = I(\cos\gamma + j \cdot \sin\gamma) \quad \left\{ \begin{array}{l} I = \sqrt{\operatorname{Re}^2\{\underline{I}\} + \operatorname{Im}^2\{\underline{I}\}} \\ \gamma = \arctg \frac{\operatorname{Im}\{\underline{I}\}}{\operatorname{Re}\{\underline{I}\}} \end{array} \right.$$

Fig. 3.6 Planul complex (planul Gauss).

Problema 3.2.

$$u(t) = 4,24 \cdot \sin(\omega \cdot t + \pi/3)$$

$$4,24 = U\sqrt{2}$$

$$\underline{U} = 1,5 + j2,6$$

$$\underline{U} = \frac{4,24}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} = 3 \left( \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right) = 3 \left( \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1,5 + j2,6$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \sqrt{1,5^2 + 2,6^2} = 3 \\ \gamma = \arctg \frac{\operatorname{Im}\{\underline{I}\}}{\operatorname{Re}\{\underline{I}\}} = \arctg \frac{2,6}{1,5} = 60^\circ = 1,05[\text{rad}] = \pi/3[\text{rad}] \end{array} \right.$$

## d) operații cu mărimi sinusoidale reprezentate în complex

### • ADUNAREA

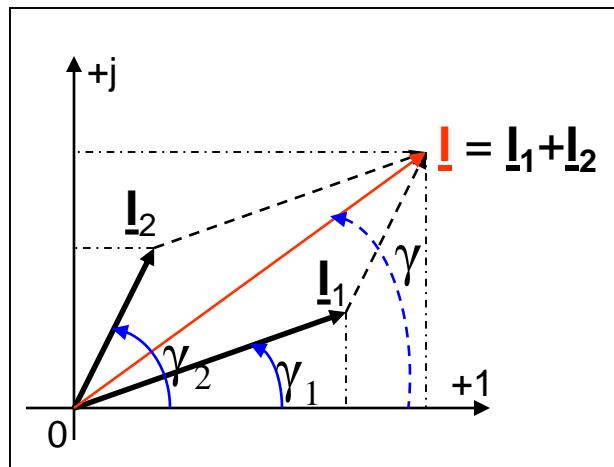
$$\gamma = \arctg \frac{I_1 \cdot \sin \gamma_1 + I_2 \cdot \sin \gamma_2}{I_1 \cdot \cos \gamma_1 + I_2 \cdot \cos \gamma_2}$$

$$i = i_1 + i_2: \sqrt{2}I \sin(\omega t + \gamma) \equiv \sqrt{2}I_1 \sin(\omega t + \gamma_1) + \sqrt{2}I_2 \sin(\omega t + \gamma_2)$$

↑  
↓

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 \cdot I_2 \cdot \cos(\gamma_1 - \gamma_2)}$$

$$\underline{I} = I e^{j\gamma} = I \cos \gamma + j I \sin \gamma = I_1 \cos \gamma_1 + I_2 \cos \gamma_2 + j(I_1 \sin \gamma_1 + I_2 \sin \gamma_2) = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$



$$\begin{cases} I_1 \cos \gamma_1 + I_2 \cos \gamma_2 = I \cos \gamma \\ I_1 \sin \gamma_1 + I_2 \sin \gamma_2 = I \sin \gamma \end{cases}$$

**Fig. 3.7** Adunarea mărimilor sinusoidale reprezentate în complex

## • AMPLIFICAREA CU UN SCALAR

$$\lambda \cdot i = \lambda \cdot \sqrt{2}I \cdot \sin(\omega \cdot t + \gamma) \Leftrightarrow \lambda I \cdot e^{j\gamma} = \lambda \cdot \underline{I}$$

## • DERIVAREA

$$\frac{di}{dt} = \sqrt{2}I \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \gamma) = \sqrt{2} \cdot I\omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \gamma + \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \omega I \cdot e^{j(\gamma+\pi/2)} = j\omega \cdot \underline{I}$$

$$e^{j\pi/2} = (\cos \frac{\pi}{2} + j \cdot \sin \frac{\pi}{2}) = 0 + j \cdot 1 = j$$

## • INTEGRAREA

$$\int i \cdot dt = -\sqrt{2}I \frac{1}{\omega} \cos(\omega \cdot t + \gamma) = \sqrt{2} \frac{I}{\omega} \sin(\omega \cdot t + \gamma - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \frac{I}{\omega} e^{j(\gamma-\pi/2)} = \frac{\underline{I}}{j\omega}$$

$$e^{-j\pi/2} = \frac{1}{e^{j\pi/2}} = \frac{1}{j} = -j$$

**derivare** = {  
 - amplificare cu scalarul  $\omega$  și rotire cu  $+\pi/2$  [rad] =  $+90^\circ$   
 - inmultirea fazorului cu  $j\omega$

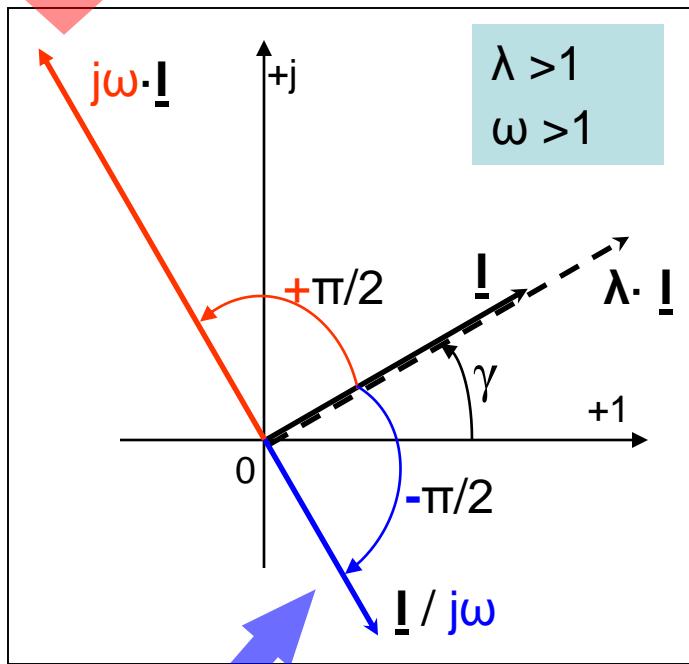


Fig. 3.8 Operații cu mărimi sinusoidale reprezentate în complex (operații cu fazori).

**integrare** = {  
 - amplificare cu scalarul  $1/\omega$  și rotire cu  $-\pi/2$  [rad] =  $-90^\circ$   
 - împărțirea fazorului cu  $j\omega$

Avantajul operațiilor cu fazori: transformarea ecuațiilor integro - diferențiale (funcție de timp) în ecuații algebrice (cu numere complexe).

$$\begin{cases} u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t); \\ u_R(t) = R \cdot i(t); \quad u_L(t) = L \frac{di}{dt}; \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int i \cdot dt; \end{cases}$$

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \cdot dt$$

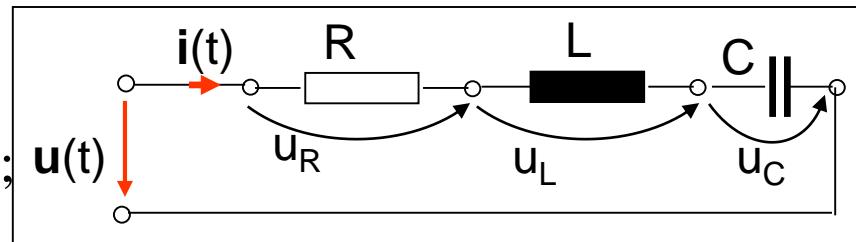


Fig. 3.9 Circuit RLC serie

$$\underline{U} = R \cdot \underline{I} + j\omega \cdot L \cdot \underline{I} - j \frac{1}{\omega \cdot C} \underline{I} = \underline{I} [R + j(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C})] \Rightarrow \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z} = R + j(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C})$$

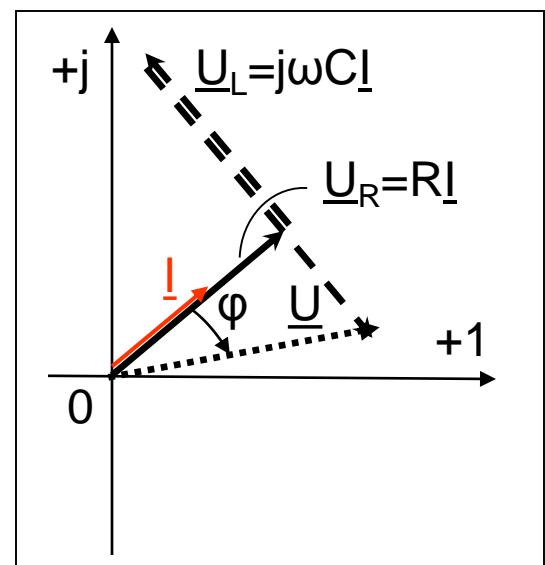


Fig. 3.10 Diagrama fazorială

împărțire cu fazorul  $\underline{I} = I \cdot e^{j \cdot \gamma_i}$   
(împărțire cu  $I$  și rotire cu  $-\gamma_i$ )

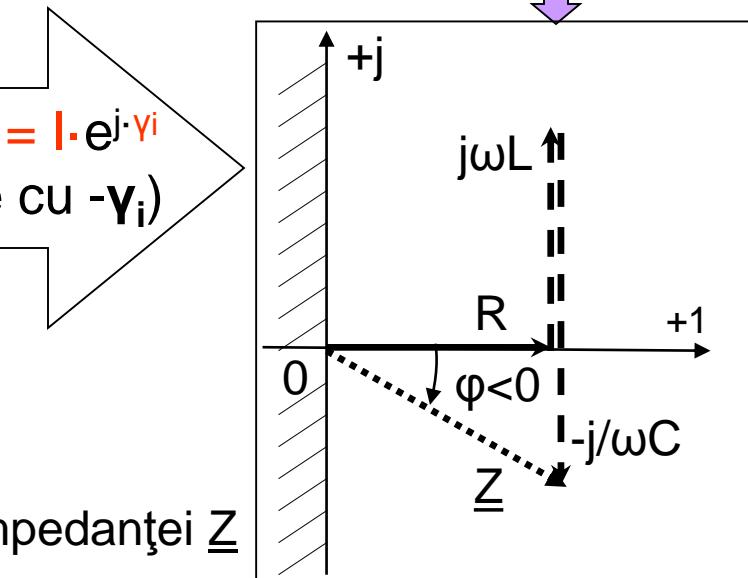
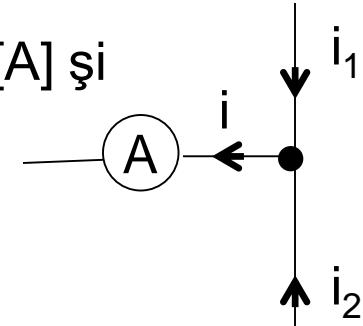


Fig. 3.11 Semiplanul impedanței  $\underline{Z}$

### Problema 3.3.

Ce valoare indică ampermetrul, dacă  $i_1(t) = 3\sqrt{2} \sin(314t + \pi/3)$ [A] și  $i_2(t) = 5,65 \sin(100\pi t + \pi/6)$ [A]. Scrieți expresia sinusoidală a curentului ce parcurge ampermetrul.



### Rezolvare

- identificând sinusoidalele:  $I_1 = 3$ [A];  $\gamma_1 = \pi/3$ [rad] și  $I_2 = 5,65/\sqrt{2} = 4$ [A];  $\gamma_2 = \pi/6$ [rad];
- fazorii curenților:  $\underline{I}_1 = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} = 3(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3}) = 3(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1,5 + j2,6$ [A];  
 $\underline{I}_2 = 4 \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} = 4(\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6}) = 4(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}) = 3,46 + j2$ [A];
- prima teorema a lui Kirchhoff:  $i_1 + i_2 - i = 0; \rightarrow \underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I} = 0; \Rightarrow \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I};$   
 $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 4,96 + j4,6 = 6,76 \cdot e^{j0,74} = 6,76 \cdot e^{j43^0}$  [A]  $\left\{ \begin{array}{l} I = \sqrt{4,96^2 + 4,6^2} = 6,76 \text{[A]} \\ \gamma = \arctg \frac{4,6}{4,96} = 0,74 \text{[rad]} = 43^0 \end{array} \right.$
- $i(t) = 6,76 \cdot \sqrt{2} \sin(314t + 0,74)$ [A].

### Tema 3.5

Determinați, cu ajutorul fazorilor, valoarea efectivă, faza inițială a curentului  $i = i_1 - i_2$  și scrieți expresia valorii instantanee  $i(t)$ , dacă  $i_1(t) = \sqrt{2}I_1 \sin(\omega t + \pi/3)$ ,  $i_2(t) = \sqrt{2}I_2 \sin(\omega t + 2\pi/3)$  și  $I_1 = 2I_2 = 3$ [A].

### Tema 3.6

Deduceți forma canonica în sinus a t.e.m. autoinduse în bobina de inductivitate  $L=3$ [mH] parcursă de curentul  $i_1(t) = 3\sqrt{2} \sin(314t + \pi/3)$ [A].

### 3.1.4 CARACTERIZAREA DIPOLULUI PASIV

- Caracterizare = cunoașterea valoriilor parametrilor electrici echivalenți;
- Parametrii electrici pot fi determinați experimental, prin încercări electrice (încercarea de mers în gol și încercarea la scurtcircuit de probă).

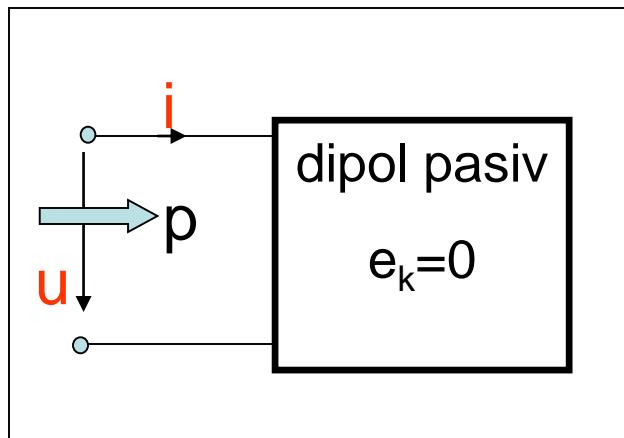


Fig. 3.12 Dipol electric pasiv (receptor)

- excitație:  $u = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \gamma_u) \leftrightarrow \underline{U} = U e^{j\gamma_u}$

parametri dipolului:  
?

{ 4 grupe de câte 2 parametri reali;  
2 parametri complexi.

- răspuns:  $i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \gamma_i) \leftrightarrow \underline{I} = I e^{j\gamma_i}$

### a) Impedanță $Z$ și defazaj $\varphi$

$$\begin{cases} Z = \frac{U}{I} \geq 0, \quad [\Omega] \\ \varphi = \gamma_u - \gamma_i \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \quad [\text{rad}] \end{cases}$$

$$\Rightarrow i = \sqrt{2} \frac{U}{Z} \sin(\omega t + \gamma_u - \varphi)$$

$\varphi > 0$  – dipol cu caracter inductiv;  
 $\varphi = 0$  – dipol cu caracter rezistiv;  
 $\varphi < 0$  – dipol cu caracter capacativ.

### b) Rezistență $R$ și reactană $X$

$$\begin{cases} R = Z \cos \varphi \geq 0, \quad [\Omega] \\ X = Z \sin \varphi \geq 0 \text{ sau } < 0, \quad [\Omega] \end{cases}$$

$X > 0$  – dipol cu caracter inductiv;  
 $X = 0$  – dipol cu caracter rezistiv;  
 $X < 0$  – dipol cu caracter capacativ.

$$\begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \varphi = \arctg \frac{X}{R} \end{cases}$$



$$i = \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} \sin(\omega t + \gamma_u - \arctg \frac{X}{R})$$

c) Impedanță complexă  $\underline{Z}$   $\rightarrow$  Nu este fazor, ci operator complex

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U} \cdot e^{j\gamma_u}}{\underline{I} \cdot e^{j\gamma_i}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \cdot e^{j(\gamma_u - \gamma_i)} = Z \cdot e^{j\varphi} \rightarrow \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \rightarrow I \rightarrow i(t)$$

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi} = Z(\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi) = R + j X$$

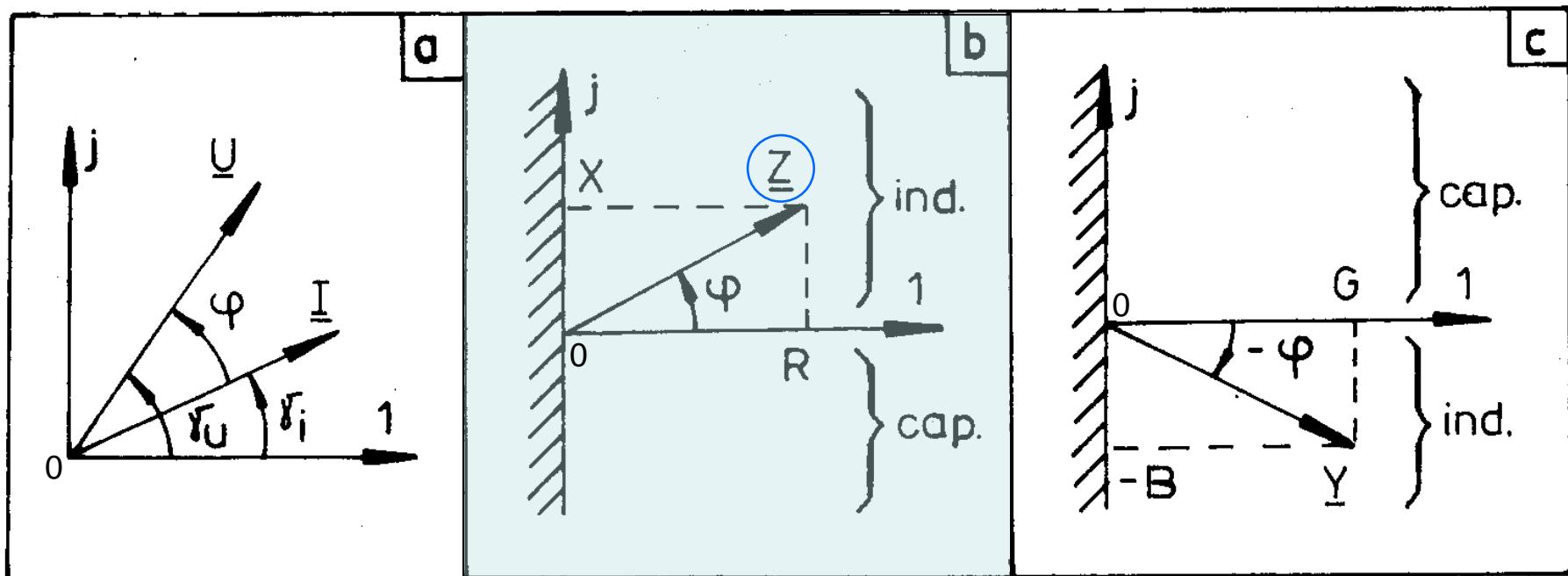


Fig. 3.13 Planul complex al fazorilor tensiune și curent (a) și semiplanele parametrilor impedanță (b) și admitanță (c).

### c) Admitanță $\textcolor{blue}{Y}$ și defazaj $\varphi$

$$\begin{cases} Y = \frac{I}{U} = \frac{1}{Z} \geq 0, [\text{S}] \\ \varphi = \gamma_u - \gamma_i \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], [\text{rad}] \end{cases}$$

$$\iff i = \sqrt{2}UY \sin(\omega t + \gamma_u - \varphi)$$

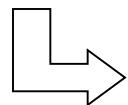
### d) Conductanță $\textcolor{blue}{G}$ și susceptanță $\textcolor{blue}{B}$

$$\begin{cases} G = Y \cos \varphi \geq 0, [\text{S}] \\ B = Y \sin \varphi \geq 0 \text{ sau } < 0, [\text{S}] \end{cases}$$

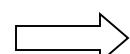
$$\begin{cases} Y = \sqrt{G^2 + B^2} \\ \varphi = \arctg \frac{B}{G} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad i = \sqrt{2}U\sqrt{G^2 + B^2} \sin\left(\omega t + \gamma_u - \arctg \frac{B}{G}\right)$$

c) Admitanță complexă  $\underline{Y}$   $\rightarrow$  Nu este fazor, ci operator complex

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z e^{j\varphi}} = Y e^{-j\varphi} = Y \cos \varphi - j Y \sin \varphi = G - j B$$



$$\underline{I} = \underline{U} \underline{Y}$$



$$\underline{I} \rightarrow i(t)$$

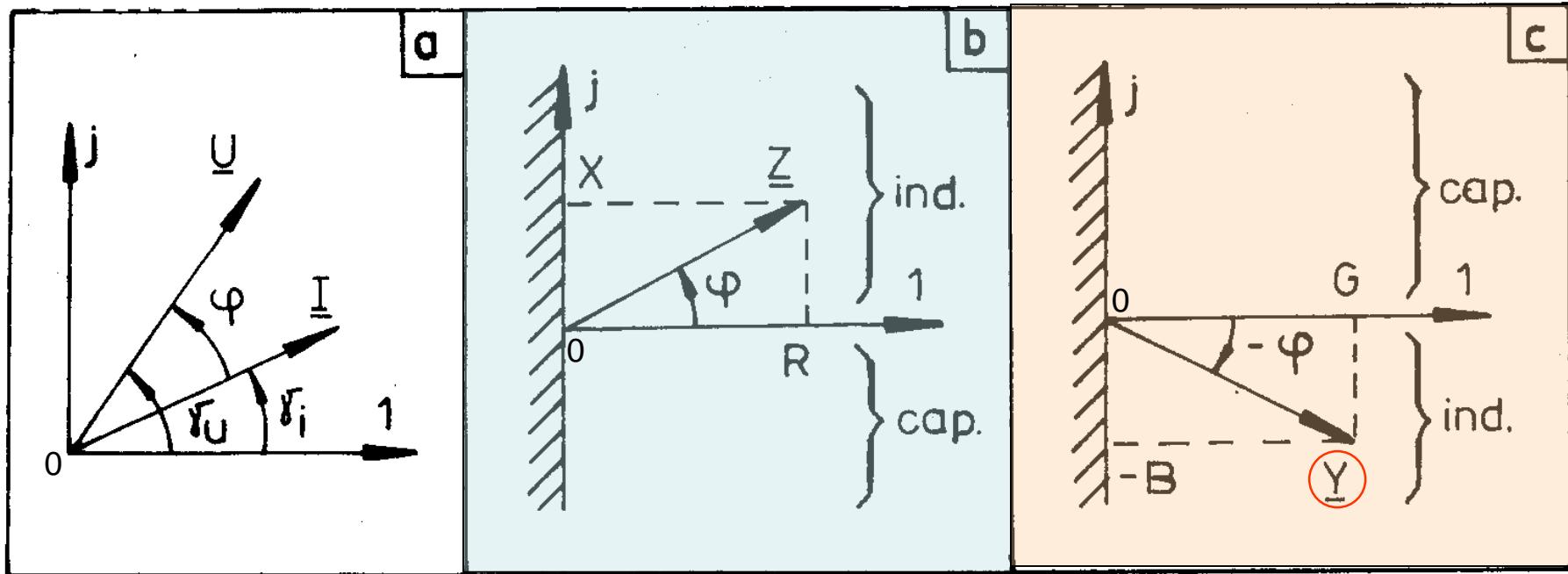
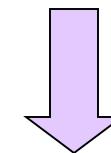


Fig. 3.14 Planul complex al fazorilor tensiune și curent (a) și semiplanele parametrilor impedanță (b) și admitanță (c).

### Problema 3.4.

Ce caracter (inductiv, capacativ sau rezistiv) are dipolul electric caracterizat de impedanță complexă  $Z = 3 + j4[\Omega]$ .

Soluție:  $Z = R + jX = 3 + j4$ ;  $\rightarrow R = 3$ ;  $X = +4 > 0 \rightarrow$  caracter inductiv.

### Problema 3.5.

Curentul sinusoidal, de pulsatie  $\omega = 2\pi f$ , frecvență  $f = 50[\text{Hz}]$  și valoare efectivă  $I = 2[\text{mA}]$ , parcurge rezistorul de rezistență  $R = 1500[\Omega]$ . Să se calculeze:

- valoarea instantanee a curentului:  $i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t + \alpha) = 2,83 \cdot 10^{-3} \sin(314t + \alpha)[\text{A}]$ ;
- valoarea instantanee a tensiunii, la bornele rezistorului:  
$$u(t) = R \cdot i = \sqrt{2} \cdot I \cdot R \cdot \sin(\omega t + \alpha) = 4,24 \cdot \sin(314t + \alpha)[\text{V}]$$
;
- valoarea efectivă a tensiunii:  
$$U = R \cdot I = 1500 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 3[\text{V}]$$
.

### Problema 3.6

Să se calculeze curentul prin bobina de inductivitate  $L = 5[\mu\text{H}]$ , alimentată la tensiunea sinusoidală cu valoare efectivă de  $3[\text{V}]$  și frecvență  $f = 20[\text{kHz}]$ .

- valoarea instantanee a tensiunii :  $u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sin(125,7 \cdot 10^3 t + \alpha)[\text{V}]$ ;
- admitanță bobinei:  $Y_L = 1 / Z_L = 1 / \omega \cdot L = 1 / (2\pi f \cdot L) = 1,59[\text{S}]$ ;
- valoarea instantanee a curentului:  
$$i(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot Y_L \cdot \sin(\omega t + \alpha - \pi/2) = \sqrt{2} \cdot 4,77 \cdot \sin(125,7 \cdot 10^3 t + \alpha - \pi/2)[\text{A}]$$
.

Tema 3.7

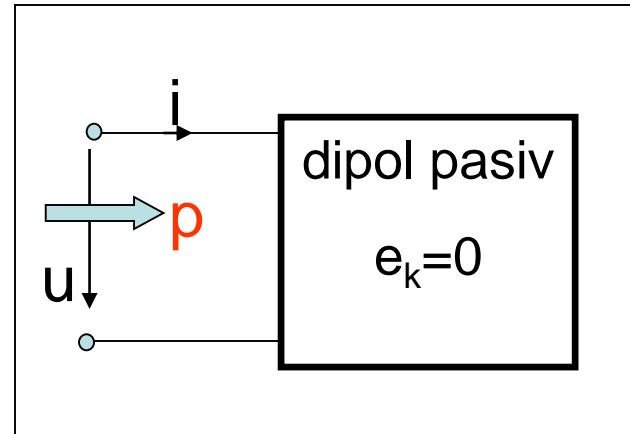
Calculați impedanța complexă, impedanța și admitanța condensatorului cu capacitatea  $C = 33[\text{nF}]$ , la frecvența  $f = 100[\text{Hz}]$ . Se dă:  $X = -1/\omega C$ .

Tema 3.8

Ce caracter are dipolul electric caracterizat de admitanța  $\underline{Y} = 3 + j4[\text{S}]$ .  
Justificați răspunsul.

### 3.1.5 PUTERI ELECTRICE În REGIM SINUSOIDAL

- Se dau:  $\begin{cases} u = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \gamma_u) \\ i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \gamma_i) \end{cases}$  - excitația; răspunsul;



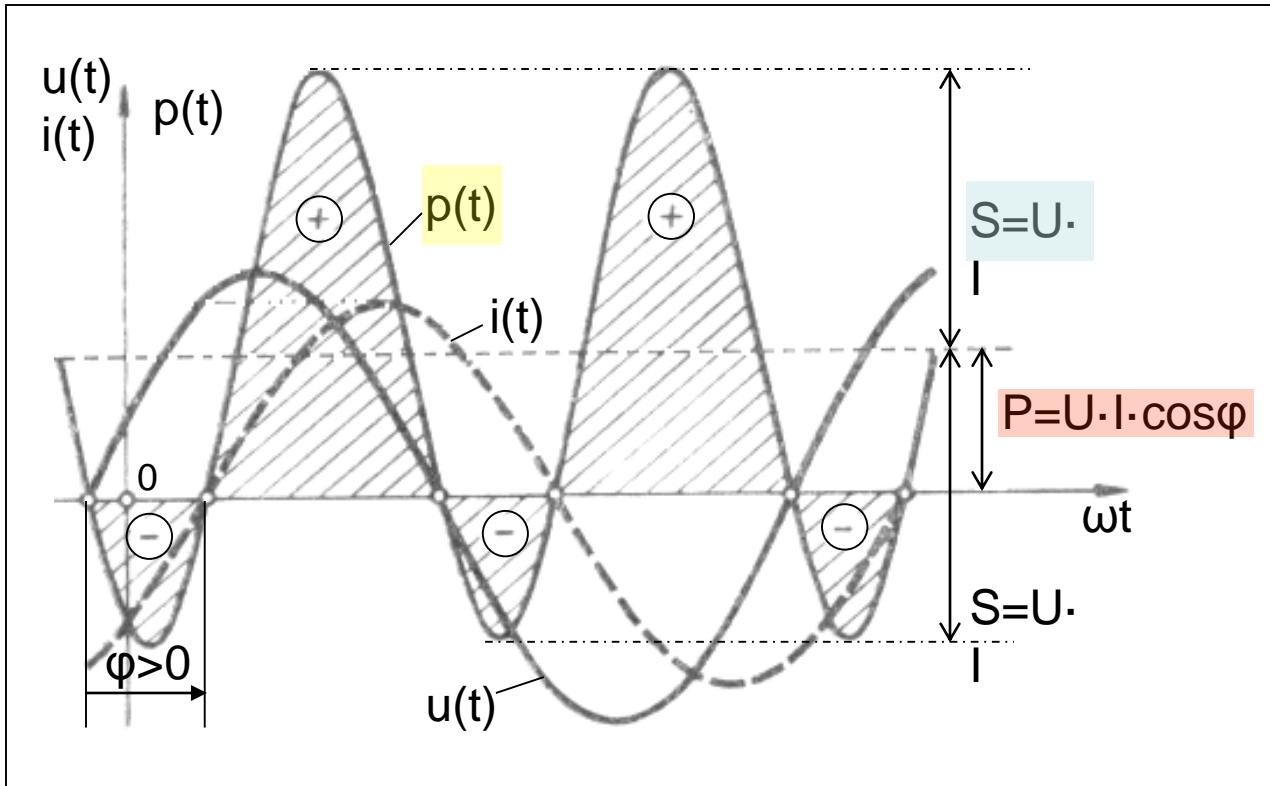
- Se definesc:

a) Puterea instantanee  $p(t)$ :

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \cdot i(t) = \sqrt{2} U \sin(\omega \cdot t + \gamma_u) \cdot \sqrt{2} I \sin(\omega \cdot t + \gamma_i) = \\ &= UI \underbrace{\cos(\gamma_u - \gamma_i)}_{\phi} - UI \cos(2\omega \cdot t + \gamma_u + \gamma_i) \end{aligned}$$

b) Puterea aparentă  $S$ :  $S = UI = ZI^2 = YU^2 \geq 0$ , [VA]

- amplitudinea puterii instantanee;
- putere disponibilă.



**Fig. 3.16 Puterea instantanee  $p(t)$ , activă  $P$  și aparentă  $S$ .**

Observații:

- Dacă  $u(t)$  și  $i(t)$  au frecvența  $f$ , puterea  $p(t)$  are frecvența dublă:  **$2f$** .
- Dacă  $\varphi \neq 0$  există momente în care  $p(t) < 0$ , adică dipolul, deși este pasiv, cedează sursei de alimentare o parte din energia înmagazinată în cîmpul magnetic al bobilelor și/sau energia înmagazinată în cîmpul electric al condensatoarelor.

### c) Puterea activă P:

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} p dt = UI \cos \varphi =$$
$$= ZI^2 \cos \varphi = RI^2 = YU^2 \cos \varphi = GU^2 \geq 0, \quad [\text{W}]$$

- $P \geq 0 \rightarrow$  absorbită;
- putere utilă.

• factor de putere:  $k_p = \frac{P}{S} = \cos \varphi, \quad [-]; \quad k_p \in [0,1];$

- { - factor de utilizare a puterii disponibile;
- { - caracterizează eficacitatea sistemului de distribuție a energiei electrice;
- { - distribuitorul de energie electrică dorește  $k_p$  cât mai mare, adică  $k_p \rightarrow 1$ .

#### d) Puterea reactivă $Q$

$$Q = UI \sin \varphi = \sqrt{S^2 - P^2} =$$

$$= ZI^2 \sin \varphi = XI^2 = YU^2 \sin \varphi = BU^2 \geq 0 \text{ sau } < 0, [\text{VAR}]$$

- dipol inductiv:  $Q > 0$ , absoarbe putere reactivă;
- dipol rezistiv:  $Q = 0$ ;  transfer între elementele circuitului
- dipol capacativ:  $Q < 0$ , debitează putere reactivă.

d) Puterea complexă  $\underline{S}$   $\rightarrow$  Nu este fazor, ci operator complex

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U e^{j\gamma_u} \cdot I e^{-j\gamma_i} = U \cdot I e^{j(\gamma_u - \gamma_i)} = S e^{j\varphi} = \overbrace{S \cos \varphi} + j \cdot \overbrace{S \sin \varphi} = P + j \cdot Q$$

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z} \cdot \underline{I} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z} \cdot I e^{j\gamma_i} \cdot I e^{-j\gamma_i} = \underline{Z} \cdot I^2 = (R + jX)I^2 = \\ &= \underline{U} \cdot \underline{Y}^* \cdot \underline{U}^* = \underline{Y}^* \cdot U e^{j\gamma_u} \cdot U e^{-j\gamma_u} = \underline{Y}^* \cdot U^2 = (G + jB)U^2 \end{aligned}$$

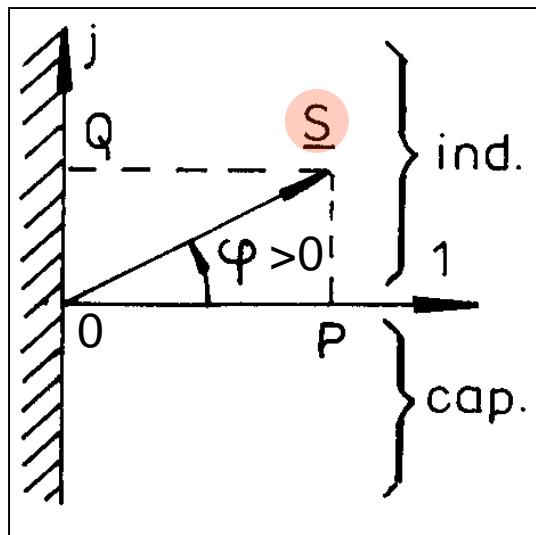


Fig. 3.17 Semiplanul puterii complexe  $\underline{S}$ .

Problema 3.7.

Un motor asincron monofazat este alimentat la tensiunea de 220[V], frecvență 50[Hz]. Motorul este receptor inductiv, care poate fi reprezentat prin impedanță complexă  $Z = R + jX = 42 + j26[\Omega]$ . Calculați puterile electrice absorbite de motor.

Rezolvare  $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{42^2 + 26^2} = 49,4[\Omega]$ ;

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{49,4} = 4,45[A];$$

$$P = R \cdot I^2 = 42 \cdot 4,45^2 = 833[W]; Q = X \cdot I^2 = 26 \cdot 4,45^2 = 516[\text{var}];$$

$$S = U \cdot I = 220 \cdot 4,45 = 980[\text{VA}]; k_p = \cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{833}{980} = 0,85.$$

Tema 3.9

Problema precedentă rezolvată în complex. Calculați și inductivitatea motorului.

Tema 3.10

Rezistorul cu  $R = 3[\Omega]$  disipă  $P = 675[W]$ . Care este valoarea maximă a curentului și valoarea efectivă a tensiunii la bornele rezistorului?

Tema 3.11

Ce caracter (rezistiv, inductiv sau capacativ) are dipolul care absoarbe atât putere activă cât și putere reactivă. Justificați răspunsul.

### Problema 3.8.

O bobină reală cu rezistență  $R = 6[\Omega]$  și inductivitatea  $L = 15[mH]$  este alimentată cu tensiunea  $u(t) = \sqrt{2} \cdot 24 \cdot \sin(314t)[V]$ . Calculați parametrii electrici ai bobinei și puterile electrice absorbite de aceasta.

#### Rezolvare:

- Valoarea efectivă, pulsația, frecvența și faza inițială a tensiunii sînt:  
 $U = 24[V]; \omega = 100\pi = 314[\text{rad/s}]; f = \omega/2\pi = 50[\text{Hz}]; \gamma_u = 0$ .
- Reactanță:  $X = \omega L = 100\pi \cdot 15 \cdot 10^{-3} = 4,71[\Omega]$ , permite calculul impedanței și defajazului:  
 $Z = (R^2 + X^2)^{1/2} = 7,63[\Omega]; \varphi = \arctg X/R = \arctg 4,71/6 = 0,66[\text{rad}] = 38^\circ$ .
- Valoarea efectivă, faza inițială și expresia curentului absorbit:  
 $I = U/Z = 24/7,63 = 3,13[A]; \gamma_i = \gamma_u - \varphi = -0,66[\text{rad}]; i(t) = \sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot \sin(314t - 0,66)[A]$ .
- Puterile activă și reactivă consumate de bobină:  
 $P = R \cdot I^2 = U \cdot I \cos \varphi = 59,3[W]; Q = X \cdot I^2 = U \cdot I \sin \varphi = 46,6[\text{var}]$ .
- Utilizînd simbolurile complexe ale mărimilor și parametrilor:  
 $\underline{U} = U \cdot e^{j\gamma_u} = 24[V]; \underline{I} = I \cdot e^{j\gamma_i} = 3,14 \cdot e^{-j0,66} = 2,47 - j1,94[A];$   
 $\underline{Z} = Z e^{j\varphi} = R + jX = 6 + j4,71[\Omega];$   
 $\underline{S} = \underline{Z} \cdot \underline{I}^2 = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$   $= 24(2,47 + j1,94) = 59,3 + j46,6[\text{VA}]$ .

### Tema 3.12

Calculați impedanța și admitanța unui condensator de capacitate  $C = 47[\text{nF}]$ , la frecvența  $f = 100[\text{kHz}]$ . Repetați calculele pentru bobina cu inductivitatea  $L = 3,3[\mu\text{H}]$ . Calculați valorile maxime ale tensiunii la bornele acestor elemente ideale de circuit parcurse de curentul sinusoidal de frecvență  $f$  și valoare efectivă  $I = 5[\text{mA}]$ .

### Tema 3.13

La ce tensiune se poate alimenta un rezistor cu caracteristicile:  $P = 1[\text{W}]$  și  $R = 10[\text{k}\Omega]$ ?

### Tema 3.14

Un motor de c.a. monofazat, alimentat la tensiunea  $U = 220 [\text{V}]$ , absorbe puterea activă  $P = 2 [\text{kW}]$ , la  $\cos\phi = 0,8$ . Să se calculeze parametri dipolului receptor constituit de motor, puterea reactivă și puterea aparentă.

### 3.2.1 FORMA COMPLEXĂ a LEGII lui OHM

Teorema lui Joule  $\longleftrightarrow$  legea conducedei electrice, în regim cuasistăționar, pentru o **latură** de circuit electric.

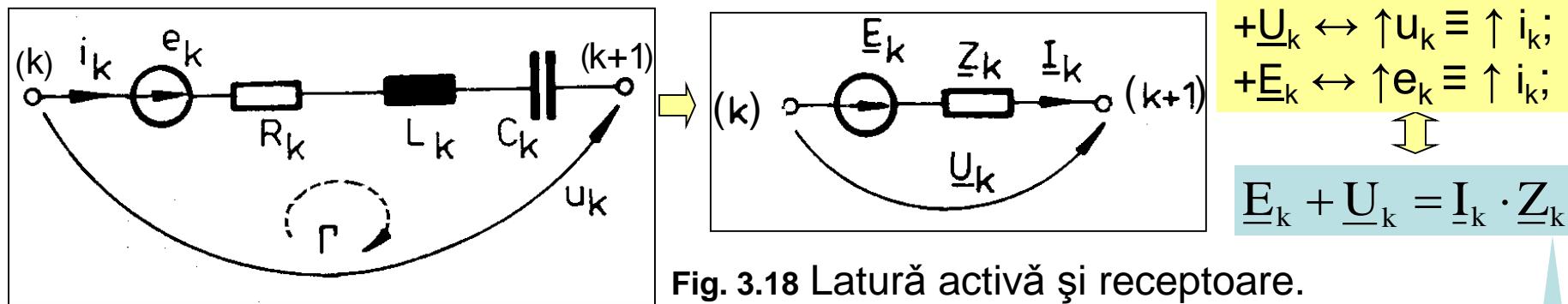
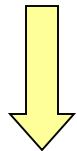


Fig. 3.18 Latură activă și receptoare.

$$\oint_{\Gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} = e_k + \underbrace{\left( -L_k \frac{di_k}{dt} \right)}_{e_k + u_k}; \quad \oint_{\Gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} = u_R + u_C - u_k = R_k \cdot i_k + \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k \cdot dt - u_k$$

$$e_k + u_k = R_k \cdot i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k \cdot dt$$



corespondența operațiilor

$$E_k + U_k = R_k \cdot I_k + j\omega \cdot L_k \cdot I_k + \frac{I_k}{j\omega \cdot C_k} = I_k \left[ R_k + j(\omega \cdot L_k - \frac{1}{\omega C_k}) \right] = I_k \cdot Z_k$$

## 3.2.2 TEOREMELE lui KIRCHHOFF

a) prima teoremă – nodul (n)

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{k \in (n)} i_k = 0; \\ \sum_{k \in (n)} I_k = 0; \end{array} \right\}$$

$+I_k \leftrightarrow i_k$  ieșe din nod

$$+i_1 - i_2 + i_k - i_n = 0$$

$$+\underline{I}_1 - \underline{I}_2 + \underline{I}_k - \underline{I}_n = 0$$

$$+\underline{i}_1 - \underline{i}_2 + \underline{i}_k - \underline{i}_n = 0$$

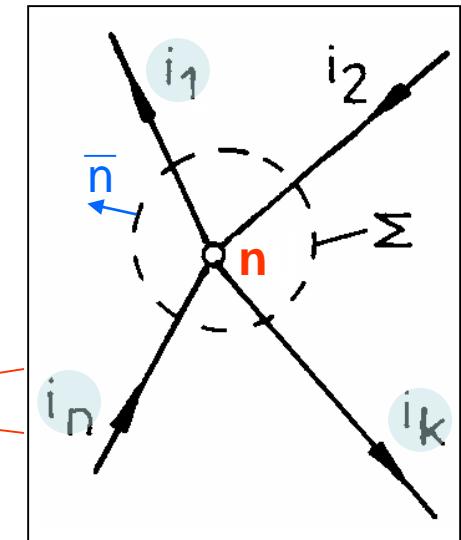
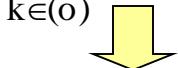


Fig. 3.19 Nod electrocinetic

b) a doua teoremă – ochiul (o)

$$u_k = V_k - V_{k+1}; \quad \sum_{k \in (o)} u_k = 0$$



$$\sum_{k \in (o)} U_k = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} E_k + U_k = I_k \cdot Z_k \\ \sum_{k \in (o)} E_k = \sum_{k \in (o)} Z_k I_k \end{array} \right\}$$

$+U_k \leftrightarrow \uparrow u_k \equiv \uparrow o;$   
 $+E_k \leftrightarrow \uparrow e_k \equiv \uparrow o;$   
 $+\underline{I}_k \leftrightarrow \uparrow i_k \equiv \uparrow o;$

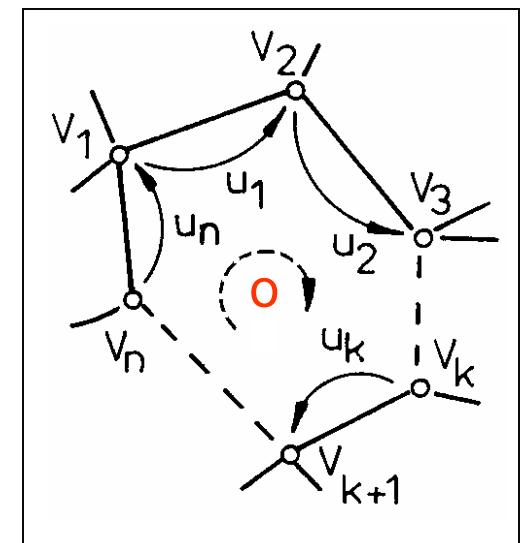


Fig. 3.20 Ochi de circuit electric

## APLICATIE

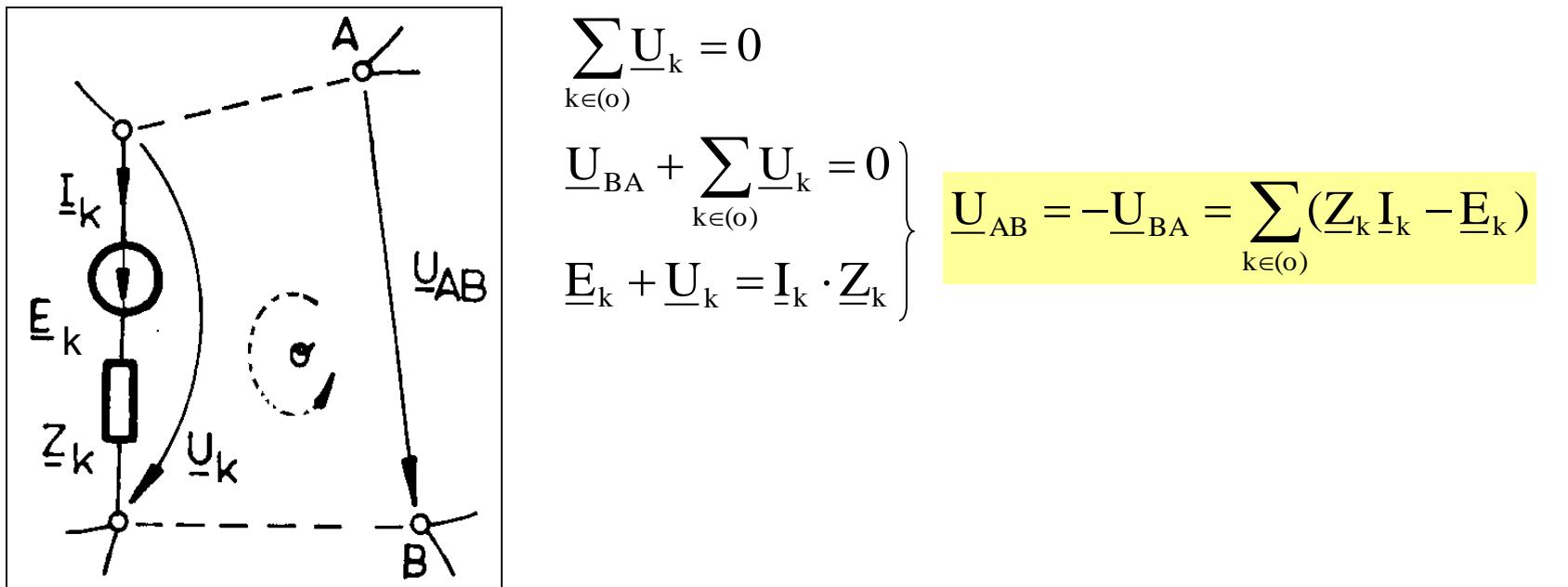
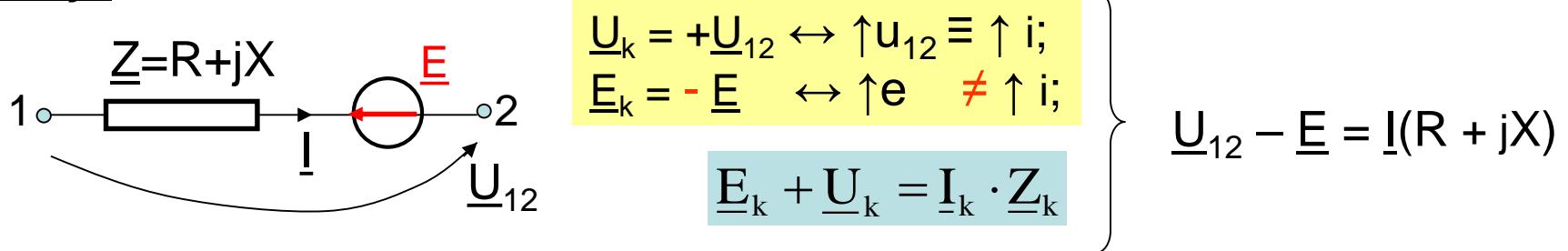


Fig. 3.21 Calculul tensiunii între două noduri

Problema 3.9

Aplicati teorema lui Joule la laturii active formate din impedanță  $\underline{Z} = R + jX$ , inseriată cu o sursă de tensiune contraelectromotoare (t.c.e.m.).

Soluție



### 3.2.3 TEOREMA CONSERVĂRII PUTERILOR

(rețea izolată:  $\ell$  -laturi; o -ochiuri independente)

$$\sum_{j \in (k)} \underline{I}_j = 0; \quad \sum_{j \in (k)} \underline{I}_j^* = 0; \quad \underline{V}_k \sum_{j \in (k)} \underline{I}_j^* = 0; \quad \sum_{k=1}^n \underline{V}_k \sum_{j \in (k)} \underline{I}_j^* = 0; \quad \sum_{k=1}^1 (\underline{V}_k - \underline{V}_{k+1}) \underline{I}_k^* = 0.$$

$$\sum_{k=1}^1 \underline{U}_k \cdot \underline{I}_k^* = 0; \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^1 \underline{S}_k = 0; \quad \underline{S}_k = P_k + jQ_k \\ \underline{Z}_k = R_k + jX_k; \quad \sum_{k=1}^1 P_k = 0 \\ \sum_{k=1}^1 Q_k = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{- se conservă atât puterile} \\ \text{active cît și cele reactive} \end{array}$$

$$\sum_{k=1}^1 \underline{E}_k \underline{I}_k^* = \sum_{k=1}^1 \underline{Z}_k \underline{I}_k^2$$

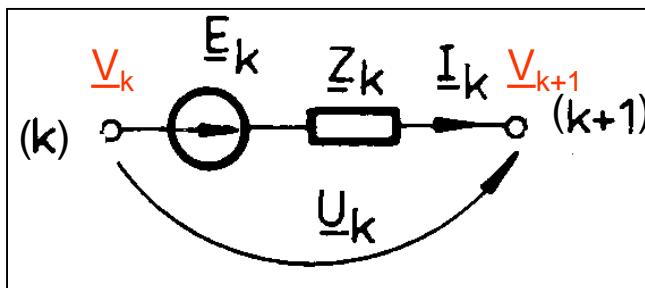


Fig. 3.22 Latură activă și receptoare

### 3.3. ELEMENTE de CIRCUIT DIPOLARE

element { activ ( $e \neq 0$ )      rezistor;  
          pasiv ( $e = 0$ ) { bobină;  
   condensator.

#### 3.3.1. ELEMENTE ACTIVE (SURSE, GENERATOARE)

#### 3.3.2. REZISTOARE ELECTRICE

#### 3.3.3. BOBINE ELECTRICE

#### 3.3.4. CONDENSATOARE ELECTRICE

### 3.3.1. ELEMENTE ACTIVE (SURSE, GENERATOARE)

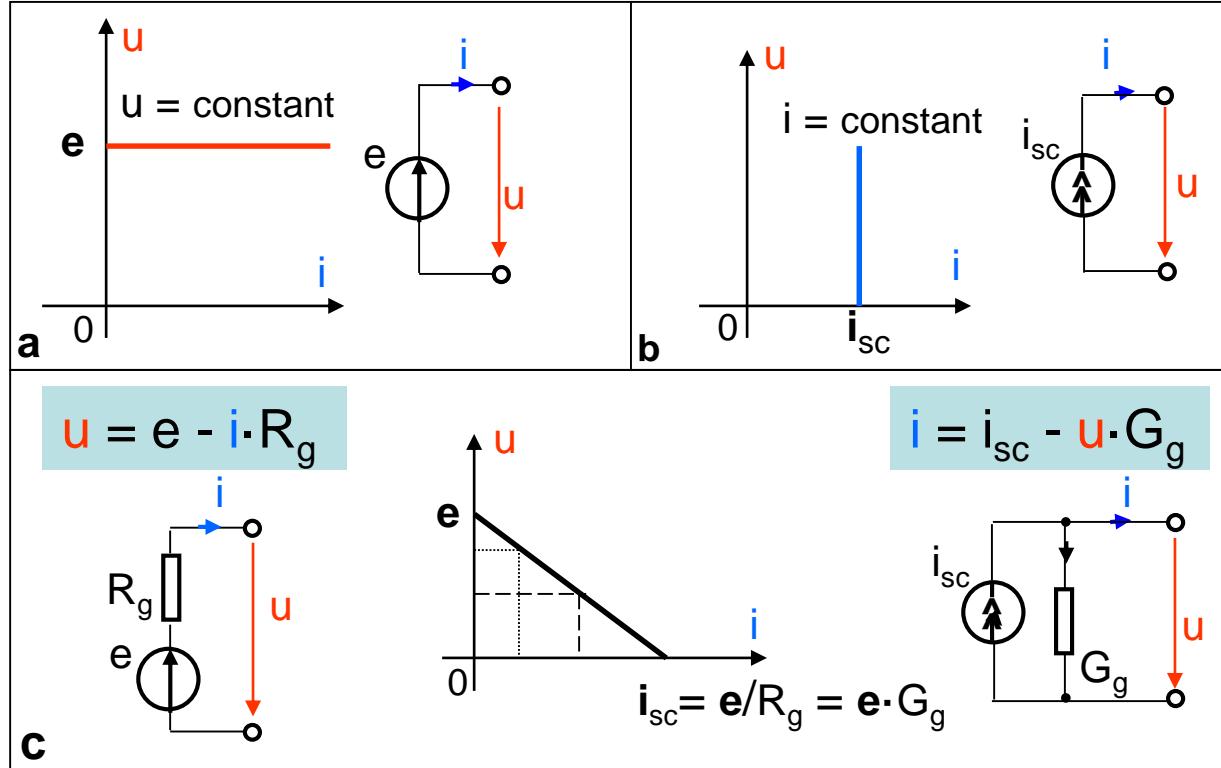


Fig. 3.23 Generator ideal de tensiune (a), ideal de curent (b) și generator real (c).

• În c.a. sinusoidal:

- { - generatorul real are caracter inductiv;
- este caracterizat de t.e.m. sinusoidală  $\underline{E} = Ee^{j\omega t}$
- și de impedanță complexă  $\underline{Z}_g = 1/Y_g$

$$\underline{E} - \underline{U} = \underline{I} \cdot \underline{Z}_g$$

### 3.3.2. REZISTOARE ELECTRICE

a) rezistor liniar:  $R = \text{const.} \neq f(u,i)$

$$u = R \cdot i \leftrightarrow U = R \cdot I$$

$$Z_R = \frac{U}{I} = R \quad \left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ Z_R = R; \Rightarrow \text{Impedanța este independentă de } f \\ \varphi = \arctg \frac{X}{R} = 0 \end{array} \right.$$

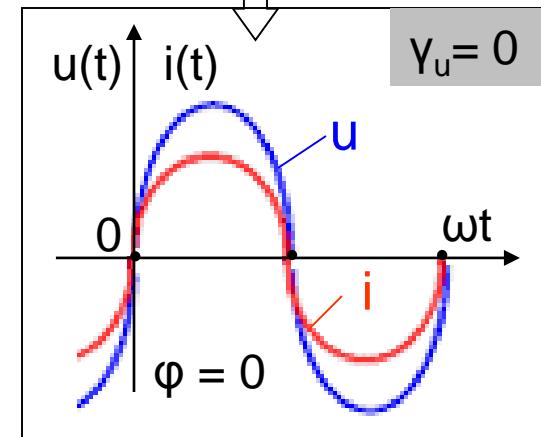
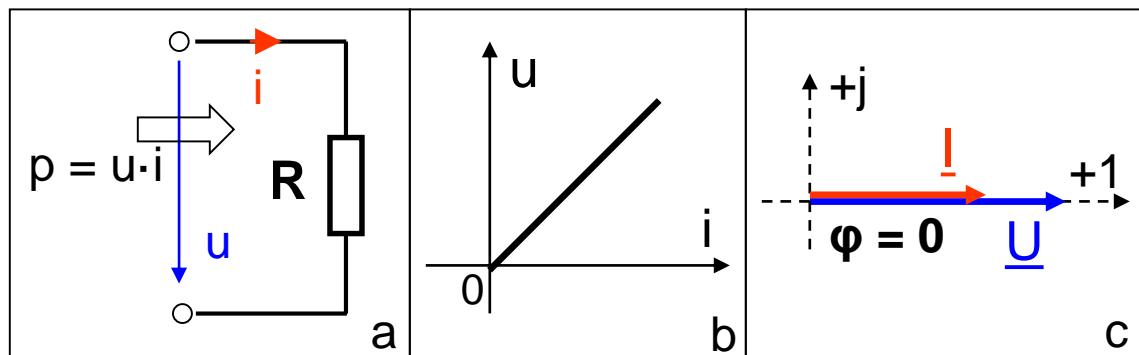


Fig. 3.24 Rezistor liniar în c.a.

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{Z} I^2 = R I^2 = \underline{Y}^* U^2 = \frac{U^2}{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} P = R \cdot I^2 = U^2/R; \\ Q = 0. \end{array} \right.$$

rezistorul liniar absoarbe numai putere activă

b) rezistor neliniar:  $R \neq \text{const.} = f(u,i)$

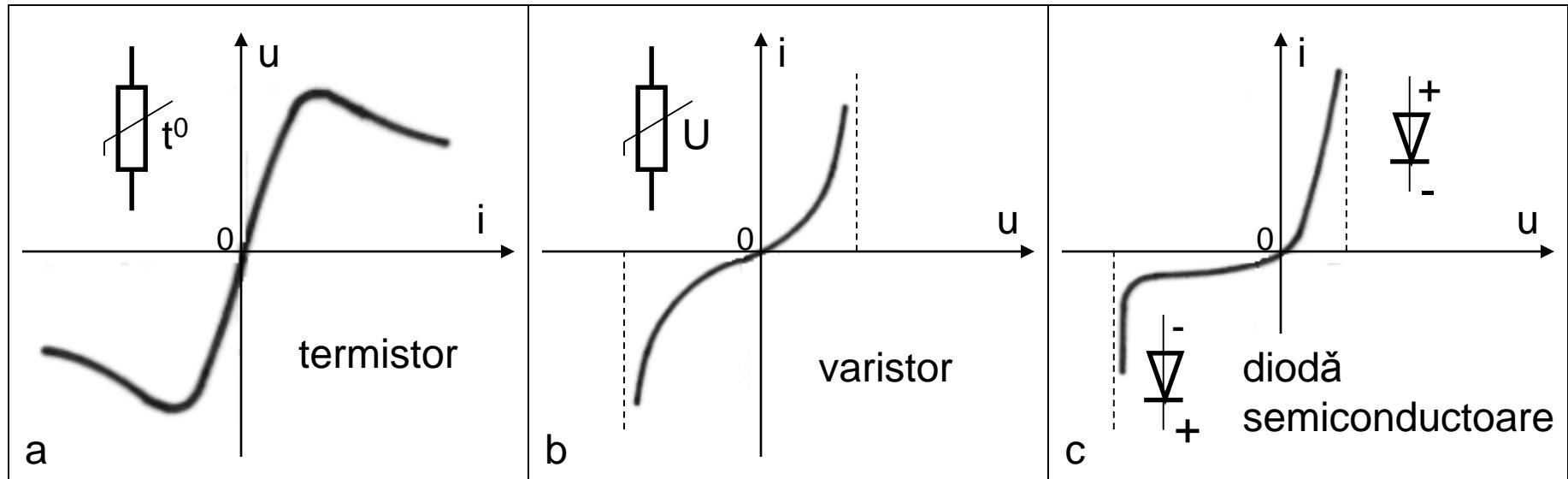
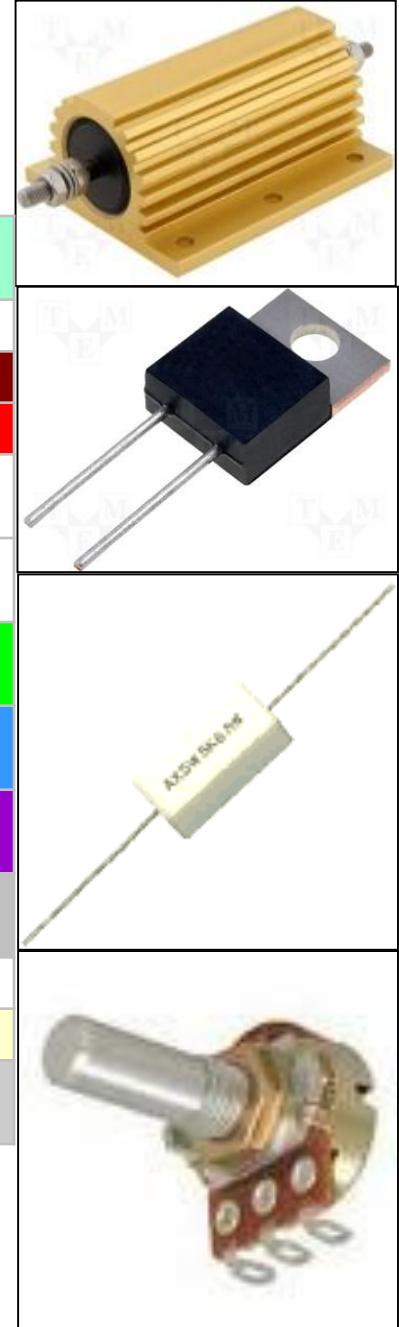


Fig. 3.25 Caracteristica volt-amper a rezistoarelor neliniare:  
a) termistor; b) varistor; c) diodă semiconductoare.

## Utilizare:

- producerea locală unei căderi de tensiune;
- transformarea energiei electrice în energie termică (căldură).



## Tehnologie:

- rezistoare chimice;
- rezistoare bobinate;
- rezistoare cu peliculă.

## Mărimi caracteristice:

- puterea disipată;
- rezistență;
- toleranță.

## Categorii de rezistoare:

- fixe;
- variabile;
- neliniare

culoare a	banda 1	banda 2	banda 3	banda 4	banda 5
Negru	0	0	0	x 1	
Maro	1	1	1	x 10	1%
Rosu	2	2	2	x 100	2%
Portocaliu	3	3	3	x 1,000	
Galben	4	4	4	x 10,000	
Verde	5	5	5	x 100,000	0.50%
Albastru	6	6	6	x 10 <sup>6</sup>	0.25%
Violet	7	7	7	x 10 <sup>7</sup>	0.10%
Gri	8	8	8	x 10 <sup>8</sup>	0.05%
Alb	9	9	9	x 10 <sup>9</sup>	
Auriu				x 0.1	5%
Argintiu	1 2 3 4 5			x 0.01	10%

Fig. 3.26 Codul de culori pentru marcarea rezistoarelor electronice

### 3.3.3. BOBINE ELECTRICE

a) bobina ideală (fără pierderi):  $L = \text{const.} \neq f(\Phi, i)$ ;  $R = 0$ .

- inductivitate = inductanță:  $L = \Phi/i$ ; [ $H = \text{Wb/A}$ ]

$$\left. \begin{array}{l} u + e = Ri \\ R = 0 \\ e = -L \frac{di}{dt} \end{array} \right\}$$

$$u = L \frac{di}{dt} \leftrightarrow U = j\omega L I$$

$$Z_L = \frac{U}{I} = j\omega \cdot L$$

$$\left. \begin{array}{l} R = 0; \\ X = +\omega L; \\ \varphi = +\pi/2; \\ Z_L = \omega L \end{array} \right\}$$

- impedanța bobinei variază liniar cu frecvența  $f$ ;
- la  $f = 0$  (c.c.) impedanța este nulă (**scurtcircuit**).

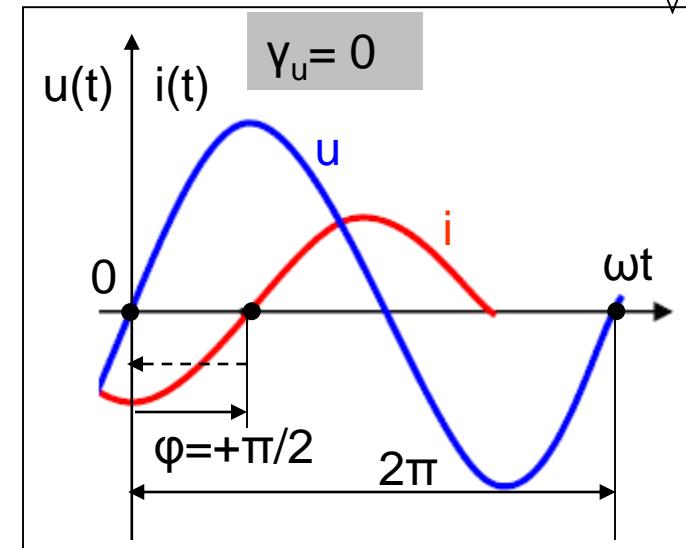
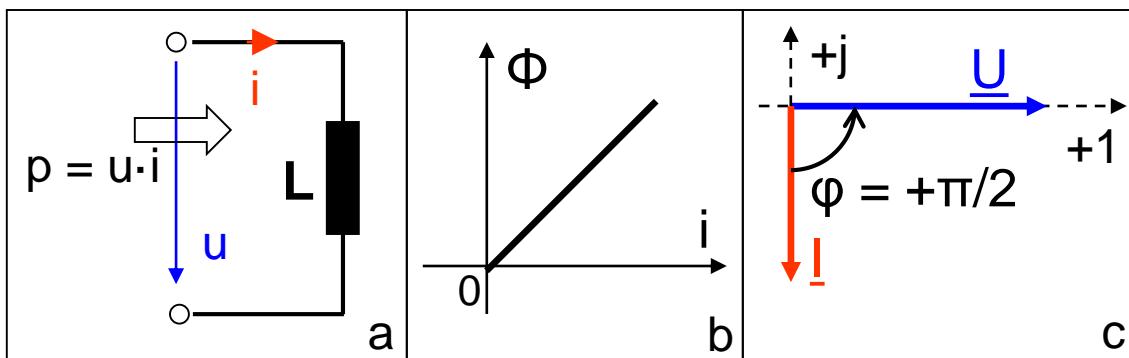
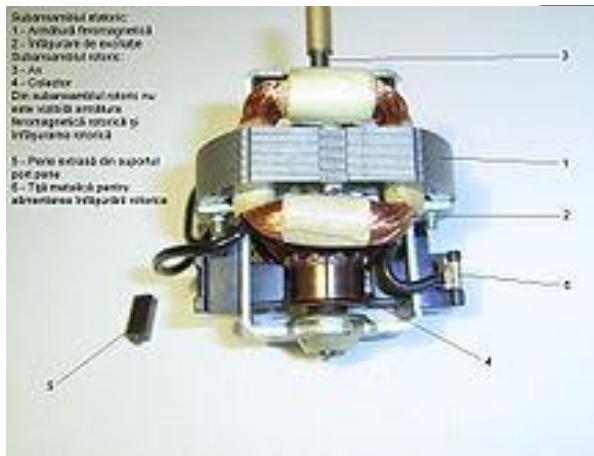


Fig. 3.27 Bobina electrică ideală în c.a. sinusoidal

$$S = P + jQ = Z I^2 = j\omega L I^2 = Y^* U^2 = j \frac{U^2}{\omega L} \left\{ \begin{array}{l} P = 0; \\ Q = \omega L \cdot I^2 > 0; \text{ absorbita} \end{array} \right.$$



Bobine fără miez ( cu aer:  $\mu_r = 1$ ):

- inductivitate perfect liniară;
- frecvență mare, care ar cauza pierderi exagerate în miez feromagnetic.

Bobine cu miez feromagnetic (închis, sau cu întrefier):

- tolă silicioasă de oțel electrotehnic:  $\mu_r = 10^3 \div 10^5$ ;
- întrefierul liniarizează caracteristica de magnerizare;
- utilizate la frecvențe industriale (sute Hz):  $p_{1,0/50} = 1 \text{ [W/kg]}$ .

$$\left. \begin{array}{l} B = 1 \text{ [T]} \\ f = 50 \text{ [Hz]} \end{array} \right\}$$

Bobine cu miez ferimagnetic:

- ferite = materiale semiconductoare sinterizate:  $\text{MeO Fe}_2\text{O}_3$ ;
- utilizate la frecvențe mari și foarte mari (kHz ÷ GHz).

## b) bobina cu pierderi (reală): $L \neq \text{const.} = f(\Phi, i)$ ; $R \neq 0$ .

- pierderi:
    - în rezistență proprie  $p_R$ ;
    - prin histerezis magnetic  $p_H$ ;
    - prin curenți turbionari  $p_T$
- $P = UI\cos\varphi = p_R + p_H + p_T$   
 $p_R = p_{CU}$ : pierderi în înfășurare  
 $p_H + p_T = p_{Fe}$ : pierderi în miez

- scheme echivalente:

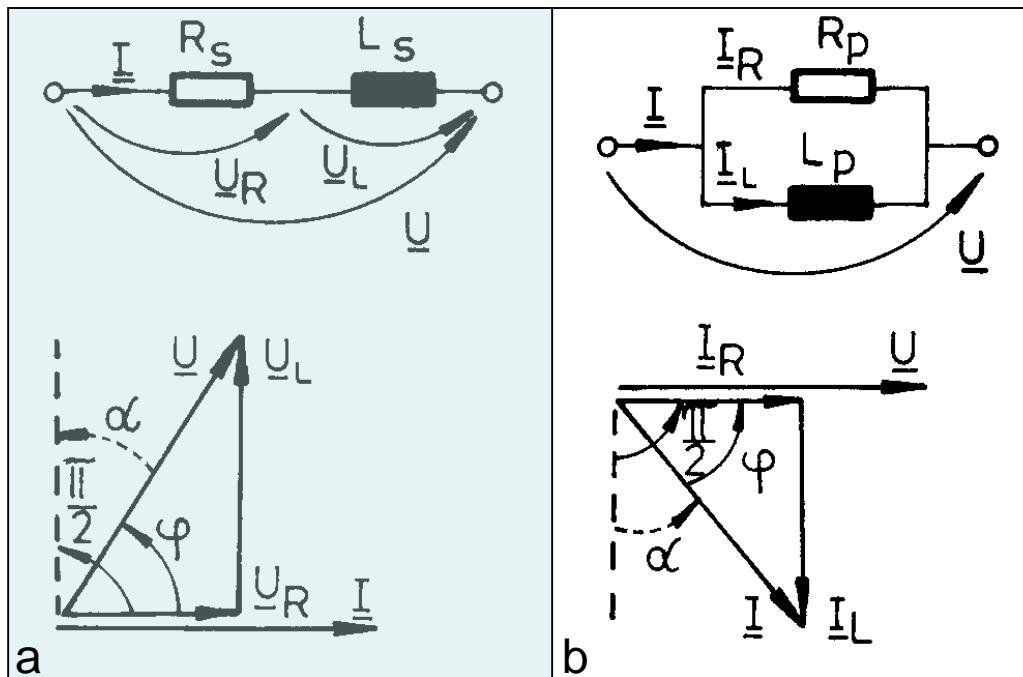


Fig. 3.28 Schemele echivalente **serie** (a) și paralel (b) ale bobinei reale și diagramele fazoriale.

$Z_s = R_s + j\omega L_s$

$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = R_s \cdot \underline{I} + j\omega L_s \cdot \underline{I}$   
 $\varphi = \pi/2 - \alpha$ ;  
 $\alpha$  = unghi de pierderi.

- metoda celor 3 aparate:  
 $P[W]$ ;  $U[V]$ ;  $I[A]$

$P = UI \cdot \cos\varphi = UI \cdot \sin\alpha$

$R_s = \frac{P}{I^2}; \quad L_s = \frac{\sqrt{U^2 I^2 - P^2}}{2\pi \cdot f \cdot I^2}.$

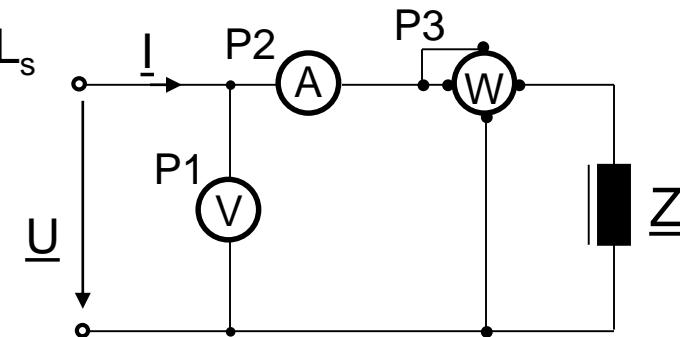
### Problema 3.10.

Calculul parametrilor unei bobine reale, prin metoda celor 3 aparate. Se dă valorile măsurate:  $I = 1[A]$ ;  $U = 100[V]$ ;  $P = 10[W]$ ;  $f = 50[Hz]$ .

Soluție: alegem schema echivalentă serie:  $\underline{Z} = R_s + j\omega L_s$

$$R_s = P/I^2 = 10[\Omega]; L_s = \sqrt{U^2 I^2 - P^2} / (2\pi f \cdot I^2) = 0,316[H];$$

$$X = 2\pi f \cdot L = 99,5[\Omega]; k_p = \cos\varphi = P/UI = 0,1$$



### Problema 3.11.

O bobină cu miez de fier are rezistență ohmică (în c.c.)  $R = 6,4[\Omega]$ . Alimentată cu tensiunea sinusoidală cu valoarea efectivă  $U = 220[V]$  și frecvența  $f = 50[Hz]$ , bobina absoarbe puterea activă  $P = 400[W]$ , la un curent  $I = 4[A]$ . Se cer:

- parametrii schemei echivalente serie;
- factorul de putere și puterea reactivă absorbită;
- pierderile de putere în înfășurarea bobinei și pierderile în miez.

### Rezolvare:

a)  $R_s = P/I^2 = 400/4^2 = 25[\Omega]$ ;  $L_s = \sqrt{U^2 I^2 - P^2} / (2\pi f \cdot I^2) = 0,138[H]$ ; De precizat că rezistența echivalentă  $R_s$  înglobează atât rezistența ohmică cât și rezistența datorată pierderilor în miezul feromagnetic ( $R_s = R + R_{Fe}$ ;  $25[\Omega] = 6,4[\Omega] + R_{Fe}$ ).

b)  $k_P = \cos\varphi = P/(UI) = 400/(220 \cdot 4) = 0,45$ ;  $Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{U^2 I^2 - P^2} = 693[\text{var}]$ .

c) - pierderile în înfăşurări = pierderi în rezistență ohmică;  $p_{Cu} = R \cdot I^2 = 6,4 \cdot 4^2 = 102,4[W]$ ;

- pierderile în miez:  $p_{Fe} = P - p_{Cu} = R_{Fe} \cdot I^2 = (400 - 102,4) = (18,6 \cdot 4^2) = 197,6[W]$ .

### Tema 3.14

Care din valorile impedanțelor de mai jos, caracterizează o bobină reală și care o bobină ideală:  $\underline{Z} = 1 + j2[\Omega]$ ,  $\underline{Z} = 1 - j2[\Omega]$ ,  $\underline{Z} = 1[\Omega]$ ,  $\underline{Z} = +j2[\Omega]$ ,  $\underline{Z} = -j2[\Omega]$ .  
Justificați alegerea făcută.

### 3.3.4. CONDENSATOARE ELECTRICE

a) condensatorul liniar (fără pierderi): **C = const.  $\neq f(q,u)$ .**

- capacitate:  $C = q/u$ ; [ $F = C/V$ ]

$$\left. \begin{array}{l} i = \frac{dq}{dt} \\ q = C \cdot u \\ C = \text{const.} \end{array} \right\} i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} \leftrightarrow I = j\omega C U$$

$$Z_C = \frac{U}{I} = \frac{1}{j\omega \cdot C} = -j \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$R = 0; X = -\frac{1}{\omega C}; \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$Z_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

- impedanța condensatorului variază invers proporțional cu frecvența;
- la  $f=0$  (c.c.) impedanța condensatorului este infinită (**întrerupere de circuit**).

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{Z} I^2 = -j \frac{I^2}{\omega C} = \underline{Y}^* U^2 = -j\omega C U^2 \left\{ \begin{array}{l} P = 0; \\ Q = -\omega C \cdot U^2 < 0; \text{debitata} \end{array} \right.$$

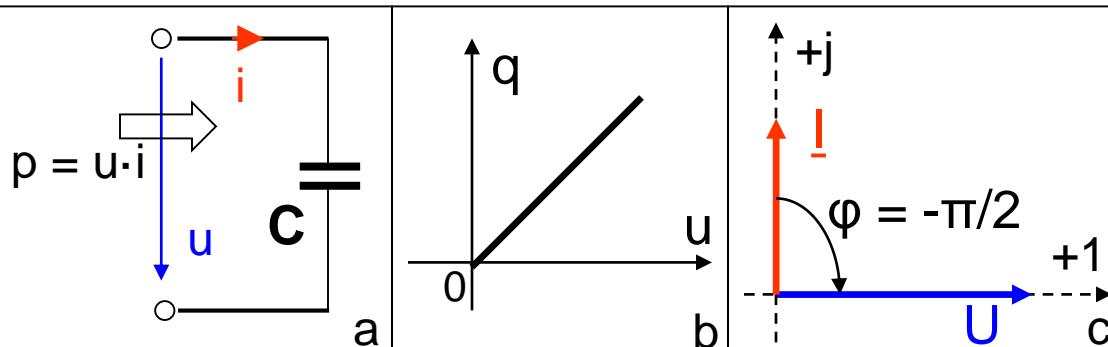
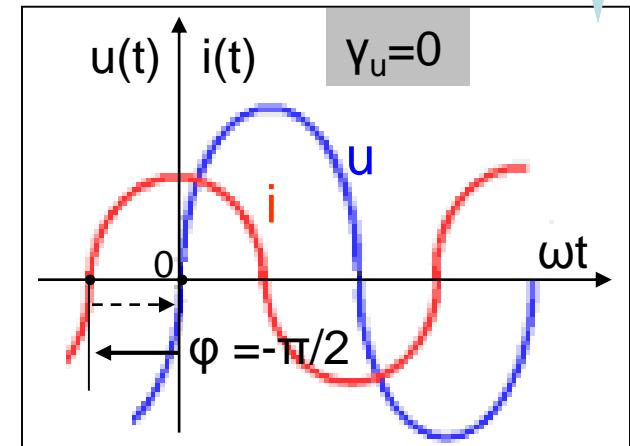


Fig. 3.29 Condensator liniar (fără pierderi)



## Clasificarea condensatoarelor după:

- geometria armăturilor: rulate, plane, tubulare, plachete;
- tipul dielectricului: aer, hîrtie, ceramică, mică, oxid metalic ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ;  $\text{Ta}_2\text{O}_5$ );
- domeniu de utilizare: electronică, electrotehnică, înaltă tensiune.

## Familii de condensatoare:

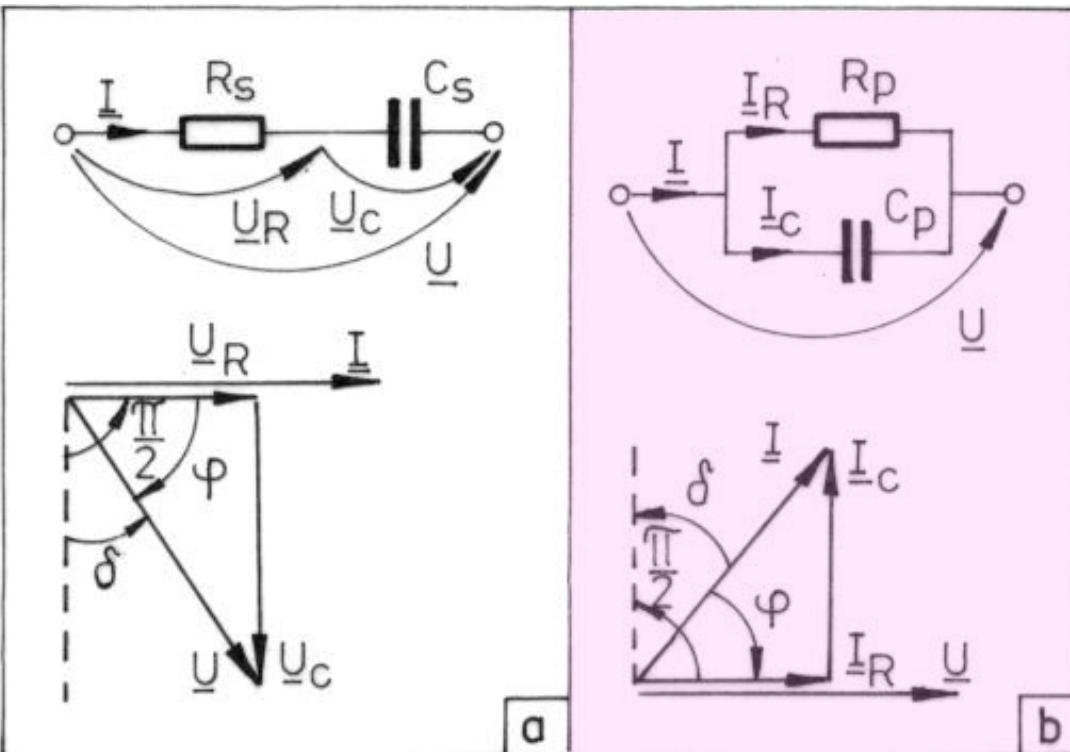
- fixe neelectrolitice: hîrtie împregnată, mică, film termoplastic (poliester, policarbonat, polipropilenă, poliester), sticlă, ceramică, ulei, gaz;
- fixe electrolitice: oxid metalic, polarizate / nepolarizate;
- variabile / ajustabile (trimer): aer, ceramică, film plastic;
- neliniare: diode varicap - folosite în automatizări.



## b) condensatorul real (cu pierderi): $P \neq 0; \varphi \neq -\pi/2$

- pierderi datorate: {- imperfecțiunilor dielectricului;  
- polarizării ciclice a dielectricului}
- scheme echivalente:

$$Y_p = 1/R_p + j\omega C$$



**Fig. 3.30** Scheme echivalente serie (a) și paralel (b) ale condensatorului real și diagramele fazoriale.

$$\left. \begin{array}{l} I = I_R + I_C = U/R_P + j\omega C_P \cdot U \\ \Phi = -\pi/2 + \delta; \\ \delta = \text{unghi de pierderi.} \end{array} \right\}$$

- metoda celor 3 aparate:  
 $P[W]$ ;  $U[V]$ ;  $I[A]$

$$R_P = \frac{U^2}{P};$$

$$C_P = \frac{\sqrt{U^2 I^2 - P^2}}{2\pi \cdot f \cdot U^2}.$$

$$P = UI \cdot \cos \varphi = U \frac{I_C}{\cos \delta} \sin \delta = 2\pi \cdot f \cdot U^2 C \cdot \operatorname{tg} \delta$$

aplicații

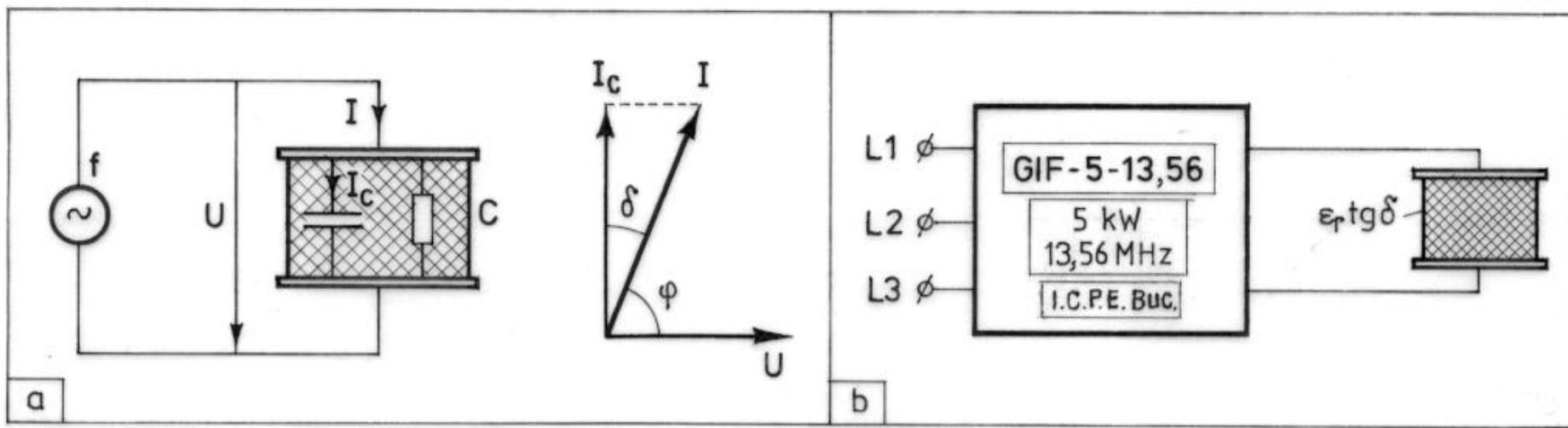
încălzirea dielectrică

## Încălzirea dielectrică

$$\left. \begin{array}{l} P = 2\pi \cdot f \cdot U^2 C \cdot \operatorname{tg}\delta \\ C = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A}{d} \\ U = E \cdot d \end{array} \right\} p = \frac{P}{V} = E^2 \cdot 2\pi \cdot \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot f \cdot \operatorname{tg}\delta \quad [\text{W/m}^3]$$

Utilizări: 

- uscarea în volum a materialelor izolatoare (lemn, piese abrazive etc.);
- lipirea maselor plastice;
- cuptorul cu microunde.



**Fig. 3.31** Pierderi în dielectricul condensatorul (a). Instalația de încălzire dielectrică (b).

### Problema 3.12.

Care din valorile admitanțelor de mai jos, caracterizează un condensator real și care un condensator ideal:  $\underline{Y} = 1 + j2[S]$ ,  $\underline{Y} = 1 - j2[S]$ ,  $\underline{Y} = 1[S]$ ,  $\underline{Y} = +j2[S]$ ,  $\underline{Y} = -j2[S]$ . Justificați răspunsul ales.

### Problema 3.13

În vederea determinării experimentale a parametrilor unui condensator, acesta se alimentează cu tensiunea  $U = 50[V]$  de frecvență  $f = 50[Hz]$ , absorbind curentul  $I = 0,28[A]$  și puterea activă  $P = 850[mW]$ . Să se calculeze unghiul de pierderi în dielectricul condensatorului și parametrii schemei echivalente paralel.

#### Rezolvare:

$$\cos\varphi = \sin\delta = P/(U \cdot I) = 0,85/(50 \cdot 0,28) = 0,061; \rightarrow \delta = \arcsin 0,061 = 3^{\circ}30' = 0,06[\text{rad}]$$

$$R_P = U^2/P = 50^2/0,85 = 2941[\Omega] = 2,941[k\Omega];$$

$$C_P = (U^2 I^2 - P^2)^{1/2} / (2\pi f U^2) = 17,8 \cdot 10^{-6}[F] = 17,8[\mu F].$$

## Caracterizarea elementelor ideale de circuit

Element de circuit	Rezistor	Bobină	Condensator
Ecuăția tensiunii funcție de timp	$u = R \cdot i$	$u = L \cdot di/dt$	$u = 1/C \cdot \int i \cdot dt$
Ecuăția tensiunii în complex	$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}$	$\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I}$	$\underline{U}_C = \underline{I} / j\omega C$
Impedanța complexă $\underline{Z} = R + jX$	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = j\omega L$	$\underline{Z}_C = -j / \omega C$
Admitanța complexă $\underline{Y} = G - jB$	$\underline{Y}_R = 1/R$	$\underline{Y}_L = -j / \omega L$	$\underline{Y}_C = j\omega C$
Defazajul $\phi$	$\phi_R = 0$	$\phi_L = +\pi/2$	$\phi_R = -\pi/2$
Impedanță $Z$	$Z_R = R$	$Z_L = \omega L$	$Z_C = \omega L$
Admitanță $Y$	$Y_R = 1/R$	$Y_L = 1/\omega L$	$Y_C = \omega C$
Rezistență $R$	$R_R = R$	$R_L = 0$ (serie)	$R_C = 0$ (serie)
Reactanță $X$	$X_R = 0$	$X_L = +\omega L$	$X_C = -1/\omega C$
Conductanță $G$	$G_R = 1/R$	$G_L = 0$ (paralel)	$G_C = 0$ (paralel)
Susceptanță $B$	$B_R = 0$	$B_L = -1/\omega L$	$B_C = +\omega C$
Puterea complexă $\underline{S} = P + jQ$	$\underline{S}_R = R \cdot I^2 + j0$	$\underline{S}_L = 0 + j\omega L I^2$	$\underline{S}_C = 0 - j\omega C U^2$
Factorul de putere $k_P = \cos\phi$	$\cos\phi = 1$	$\cos\phi = 0$	$\cos\phi = 0$

Tema 3.15

Reprezentați variația rezistenței electrice cu frecvența, pentru elementele de circuit ideale: rezistor, bobină și condensator.

Tema 3.16

Explicați comportarea bobinei și condensatorului în c.a., dacă frecvența  $f \rightarrow \infty$ .

Tema 3.17

Un condensator plan are caracteristicile: suprafața armăturilor  $A = 1[m^2]$ , distanța dintre armături  $d = 5[mm]$ , permitivitatea relativă a dielectricului  $\epsilon_r = 2,5$  și tangenta unghiului de pierderi în dielectric  $\operatorname{tg}\delta = 10^{-3}$ . Care sunt capacitatea condensatorului și pierderile în dielectric, dacă este alimentat cu tensiunea  $U = 1[kV]$  și frecvența  $f = 1[kHz]$ ?

# Cap. 4 CIRCUITE ELECTRICE LINIARE ÎN REGIM PERMANENT

## 4.1 CIRCUITE MONOFAZATE

pag. B1\*

4.1.1 Metode de rezolvare	185
4.1.2 Metode de transfigurare	188
4.1.3 Rezonanță electrică	213
4.1.4 Imbunătățirea factorului de putere	219
4.1.5 Circuite electrice simple	216

## 4.2 CIRCUITE TRIFAZATE

4.2.1 Sisteme trifazate	201
4.2.2 Conexiunile circuitelor trifazate	203
4.2.3 Rezolvarea sistemelor trifazate conectate în stea	205
4.2.4 Rezolvarea sistemelor trifazate conectate în triunghi	206
4.2.5 Puteri electrice în rețele trifazate	207
4.2.6 Metoda componentelor simetrice	----

11 probleme rezolvate + 13 probleme propuse

# 4.1. CIRCUITE MONOFAZATE

## 4.1.1. METODE de REZOLVARE

### Metoda teoremelor lui Kirchhoff

- Etape:

1. Analiza topologică:  $\ell = 6$ ;  $n = 4$ ;  $o = \ell - n + 1 = 3$ ;
2. Alegerea arbitrară a sensului curentilor  $i_k$ ,  $k = 1 \dots \ell$ ;
3. Calculul fazorilor t.e.m. din laturile active:

$$E_k = E_k \cdot e^{j\gamma}, k = 1 \dots \ell;$$

4. Calculul impedantelor complexe ale laturilor:

$$Z_k = R_k + jX_k, k = 1 \dots \ell;$$

5. Aplicarea teoremei întâi a lui Kirchhoff pentru  $n-1$  noduri;

$$\sum_{k \in (n)} I_k = 0;$$

6. Aplicarea teoremei a doua a lui Kirchhoff pentru  $o$  ochiuri;

$$\sum_{k \in (o)} E_k = \sum_{k \in (o)} Z_k I_k$$

7. Rezolvarea modelului matematic (sistem neomogen  $(\ell \times \ell)$  compatibil determinat) pentru determinarea curentilor  $I_k$ ,  $k = 1 \dots \ell$ ;

8. Verificarea soluției, aplicînd teorema conservării puterilor:

$$\sum_{k=1}^1 E_k I_k^* = \sum_{k=1}^1 Z_k I_k^2$$

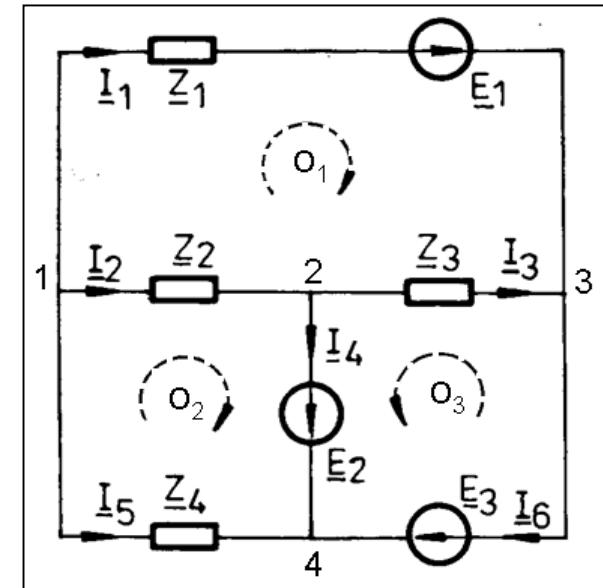


Fig.4.1 Circuit electric izolat

• Aplicația 1

5

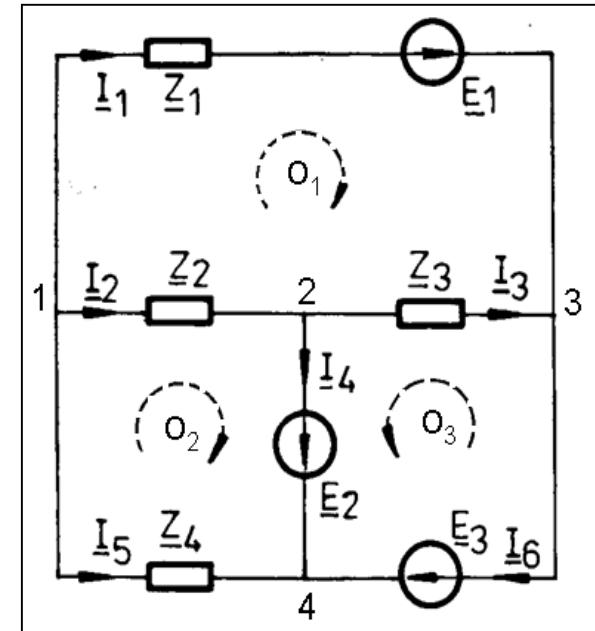
$$\left\{ \begin{array}{l} T1K(1): \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_5 = 0; \\ T1K(2): -\underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4 = 0; \\ T1K(3): -\underline{I}_1 - \underline{I}_3 + \underline{I}_6 = 0; \end{array} \right.$$

6

$$\left\{ \begin{array}{l} T2K(o_1): \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_3 \underline{I}_3 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = \underline{E}_1; \\ T2K(o_2): \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_4 \underline{I}_5 = \underline{E}_2; \\ T2K(o_3): -\underline{Z}_3 \underline{I}_3 = \underline{E}_2 - \underline{E}_3; \end{array} \right.$$

8

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1^2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2^2 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3^2 + \underline{Z}_4 \cdot \underline{I}_5^2 = \underline{E}_1 \cdot \underline{I}_1^* + \underline{E}_2 \cdot \underline{I}_4^* + \underline{E}_3 \cdot \underline{I}_6^*$$



Alte metode – au la bază teoremele lui Kirchhoff, aplicate unor circuite simplificate:

Metoda curenților ciclici (de buclă):  $\underline{I}_{cj}$ ,  $j = 1 \dots (\ell - n + 1)$ ;  $\rightarrow \underline{I}_k = \sum_{j \in (k)} \underline{I}_j$

Metoda potențialelor la noduri:  $\underline{V}_j$ ,  $j = 1 \dots (n - 1)$ ,  $\underline{V}_n = 0$ ;  $\underline{I}_k = (\underline{V}_k - \underline{V}_{k+1} + \underline{E}_k) \underline{Y}_k$

Metoda superpoziției: suma curenților injectați, în retea, de fiecare sursă;

Metoda generatoarelor echivalente:

- de tensiune (Thevenin)  $\rightarrow$  valoarea tensiunii între 2 noduri;
- de curent (Norton)  $\rightarrow$  valoarea curentului dintr-o latură.

## 4.1.2. METODE de TRANFIGURARE

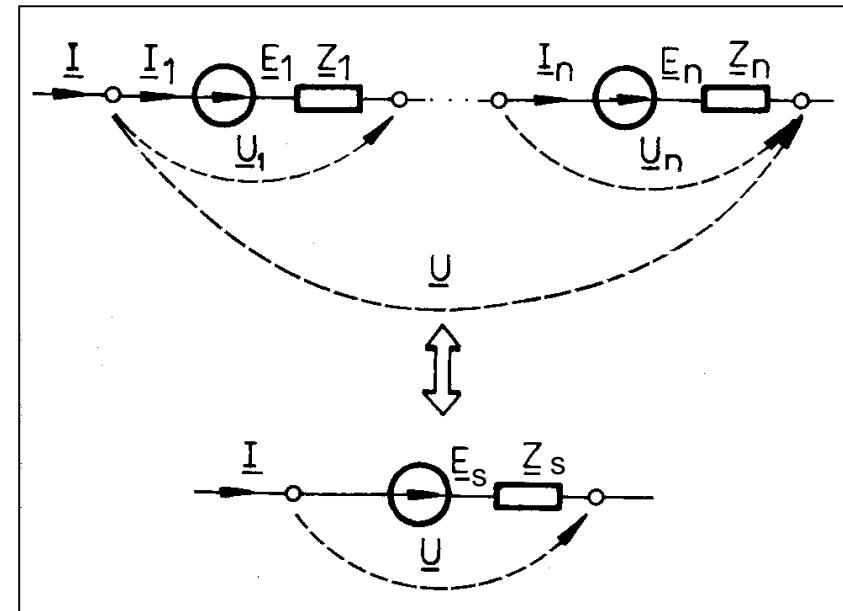
a) transfigurarea serie:  $\underline{I} = \text{const.} = \underline{I}_k$  ;

$$\underline{U} = \sum_{k=1}^n \underline{U}_k; \quad \underline{E}_k + \underline{U}_k = \underline{I}_k \cdot \underline{Z}_k;$$

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \sum_{k=1}^n (\underline{I}_k \cdot \underline{Z}_k - \underline{E}_k) = \underline{I} \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k - \sum_{k=1}^n \underline{E}_k. \\ \underline{U} &= \underline{I} \cdot \underline{Z}_s - \underline{E}_s \end{aligned}$$

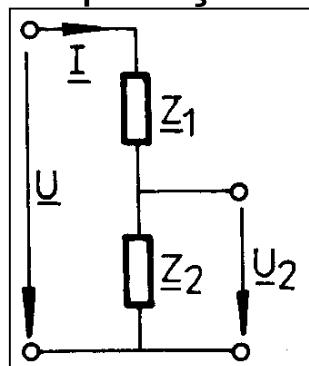
$\underline{Z}_s = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k$

$\underline{E}_s = \sum_{k=1}^n \underline{E}_k$



**Fig.4.2** Transfigurarea laturilor active conectate în serie

• Aplicația 2



$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{I}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \\ \underline{U}_2 &= \underline{I} \cdot \underline{Z}_2 \end{aligned} \right\} \quad \underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U} \Rightarrow \underline{U}_2 = f(\underline{U})$$

Problema 4.1. Calculul capacității echivalente a condensatoarelor conectate în serie.

Răspuns:  $\frac{1}{C_S} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$

**Fig. 4.3** Divizorul de tensiune

b) transfigurarea paralel:  $\underline{U} = \text{const.} = \underline{U}_k$ ;

$$\underline{E}_k + \underline{U}_k = \underline{I}_k \cdot \underline{Z}_k$$

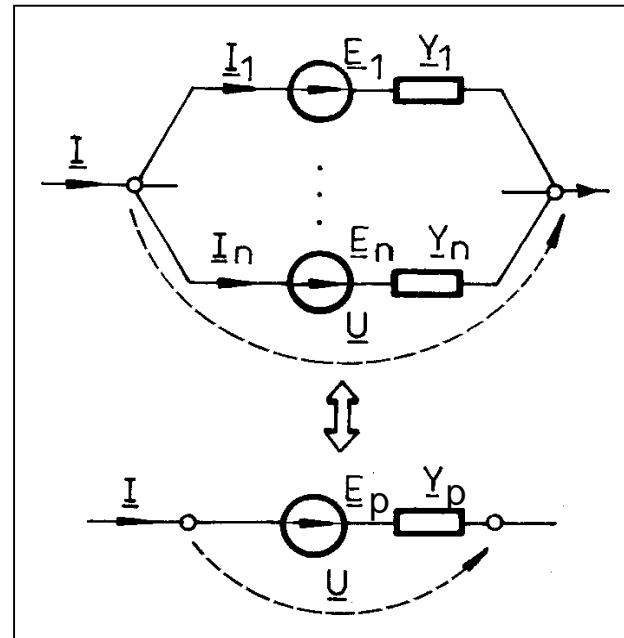
$$\underline{I}_k = \frac{1}{\underline{Z}_k} (\underline{U}_k + \underline{E}_k) = \underline{Y}_k (\underline{U}_k + \underline{E}_k); \quad \underline{I} = \sum_{k=1}^n \underline{I}_k$$

$$\underline{I} = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k (\underline{U}_k + \underline{E}_k) = \underline{U} \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k + \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k \underline{E}_k$$

$$\underline{I} = \underline{Y}_p (\underline{U} + \underline{E}_p)$$

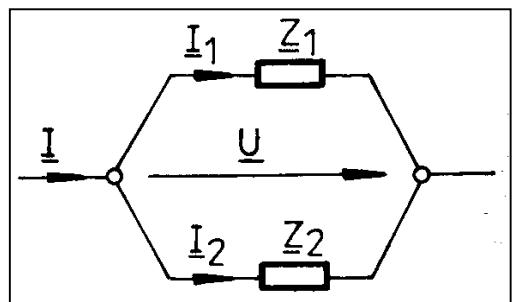
$$\underline{E}_p = \frac{\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k \underline{E}_k}{\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_p} = \underline{Y}_p = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_k}$$



**Fig. 4.4 Transfigurarea laturilor active conectate în paralel**

• Aplicația 3



$$\left. \begin{array}{l} \underline{U} = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 \\ \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \end{array} \right\} \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I} \quad \rightarrow \quad \underline{I}_1 = f(\underline{I})$$

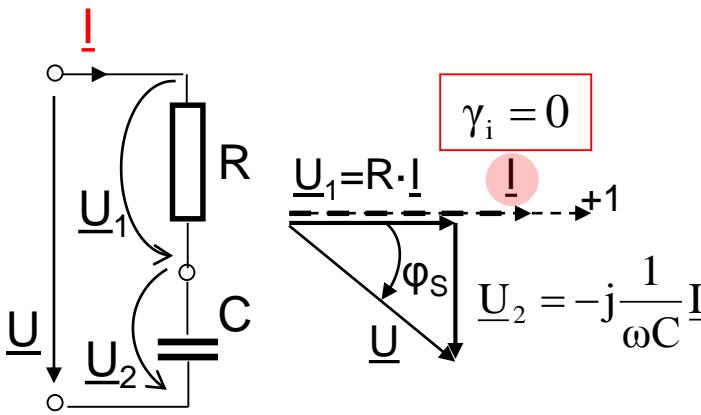
Problema 4.2. Calculul rezistenței echivalente a rezistoarelor conectate în paralel.

Răspuns:  $\frac{1}{R_p} = \sum_1^n \frac{1}{R_k} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$

**Fig. 4.5 Divizorul de curent**

### Problema 4.3.

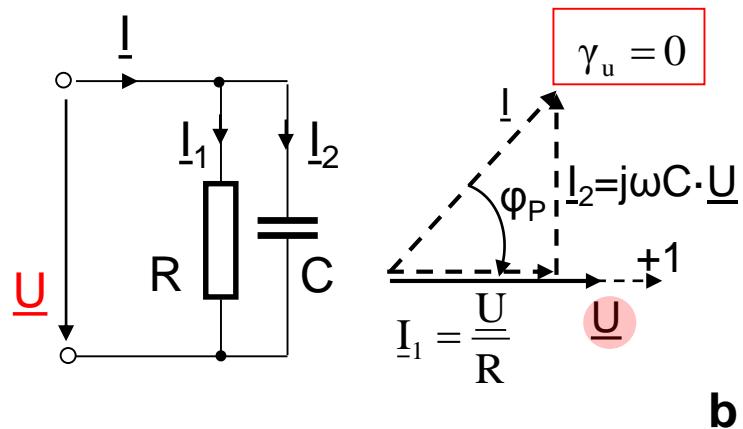
Circuitul format dintr-un rezistor inseriat cu un condensator ideal are factorul de putere  $\cos\varphi_s=0,8$ . Calculați factorul de putere al dipolului format prin conectarea în paralel ale acelorași componente, la aceeași frecvență a tensiunii de alimentare. Care este raportul puterilor active absorbite de cei doi dipoli?



Soluție

$$\cos\varphi_s = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega \cdot RC)^2}} = 0,8; \Rightarrow (\omega RC)^2 = \frac{0,64}{0,36}$$

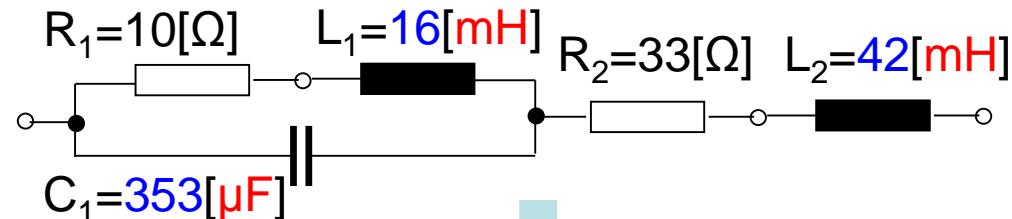
$$\cos\varphi_p = \frac{1/R}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 R^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{0,64}{0,36}}} = 0,6$$



$$\frac{P_s}{P_p} = \frac{R \cdot I^2}{R \cdot I_1^2} = \frac{\frac{U}{\sqrt{R^2 + 1/(\omega \cdot C)^2}}}{\frac{U^2}{R^2}} = \frac{R^2}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{(\omega \cdot RC)^2}} = 0,64$$

## Problema 4.4.

Calculați impedanța, rezistența și reactanța dipolului din figura de mai jos, dacă frecvența are valoarea  $f = 50\text{Hz}$ .



### Soluție

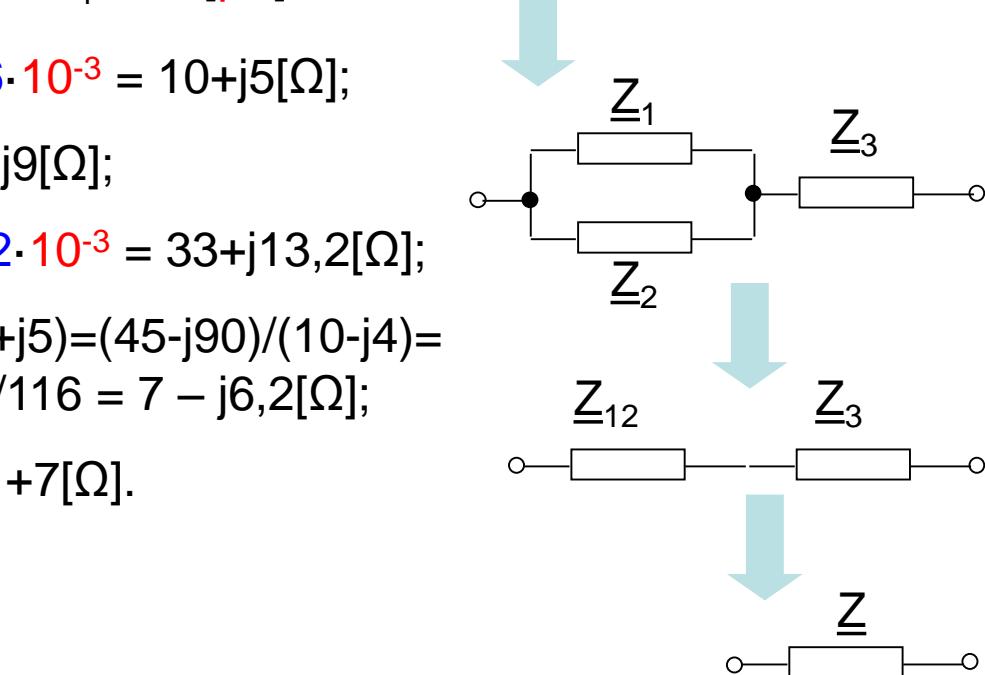
$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{R1} + \underline{Z}_{L1} = R_1 + j\omega L_1 = 10 + j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 16 \cdot 10^{-3} = 10 + j5 \text{[}\Omega\text{]};$$

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_C = -j/\omega C_1 = -j/(2\pi \cdot 50 \cdot 353 \cdot 10^{-6}) = -j9 \text{[}\Omega\text{]};$$

$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_{R2} + \underline{Z}_{L2} = R_2 + j\omega L_2 = 33 + j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 42 \cdot 10^{-3} = 33 + j13,2 \text{[}\Omega\text{]};$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{12} &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) = -j9(10 + j5) / (-j9 + 10 + j5) = (45 - j90) / (10 - j4) = \\ &= (10 + j4)(45 - j90) / (10^2 + 4^2) = (810 - j720) / 116 = 7 - j6,2 \text{[}\Omega\text{]}; \end{aligned}$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_3 = 17 + j7 \text{[}\Omega\text{]}; R = 17 \text{[}\Omega\text{]}; X = +7 \text{[}\Omega\text{]}.$$

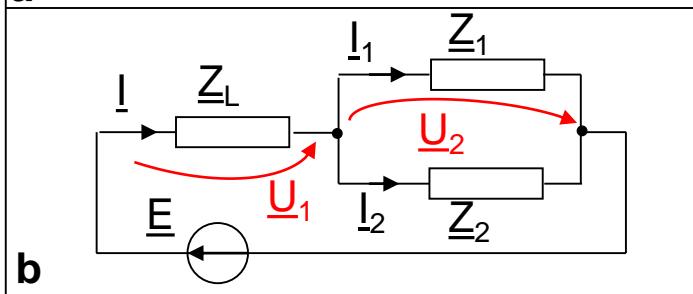
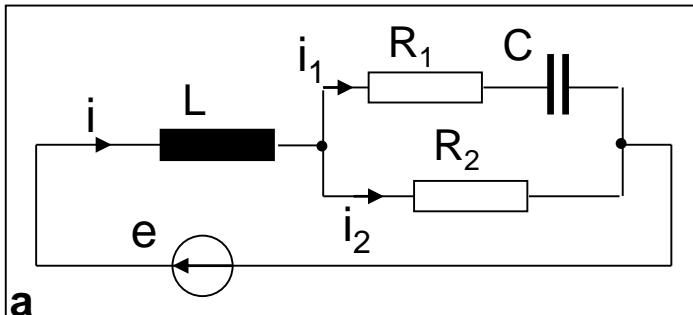


### Tema 4.1

- Ce caracter are dipolul din problema 4.4? Justificați răspunsul.
- Calculați valoarea factorului de putere și valoarea inductivității echivalente a dipolului din problema 4.4.

## Problema 4.5

Să se rezolve circuitul din figura a) și să se verifice soluția. Se dă:  $R_1 = 20[\Omega]$ ,  $R_2 = 30[\Omega]$ ,  $L = 45[mH]$ ,  $C = 60[\mu F]$ ,  $E = 220[V]$ ,  $f = 50[Hz]$ ,  $\gamma = \pi/6[\text{rad}]$ .



Rezolvare:

$$\omega = 2\pi f = 100\pi = 314[\text{rad/s}];$$

$$\underline{E} = E e^{j\gamma} = 220 \cdot e^{j\pi/6} = 220(\sqrt{3}/2 + j/2) = 190,5 + j110[V];$$

$$\underline{Z}_L = j\omega L = j \cdot 314 \cdot 45 \cdot 10^{-3} = j14,14 = 14,14 \cdot e^{j\pi/2}[\Omega];$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 - j/\omega C = 20 - j/(100\pi \cdot 60 \cdot 10^{-6}) = 20 - j53,05 = 56,7 \cdot e^{-j0,36}[\Omega]; \underline{Z}_2 = R_2 = 30[\Omega].$$

$$\begin{cases} -I + I_1 + I_2 = 0 \\ \underline{Z}_1 \cdot I_1 - \underline{Z}_2 \cdot I_2 = \underline{E} \\ \underline{Z}_L \cdot I + \underline{Z}_2 \cdot I_2 = \underline{U}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} -I + I_1 + I_2 = 0 \\ (20 - j53,05) \cdot I_1 - 30 \cdot I_2 = 0 \\ j14,14 \cdot I + 30 \cdot I_2 = 190,5 + j110 \end{cases}$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_L + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) = j14,14 + 30(20 - j53,05) / (20 - j53,05 + 30) = 21,53 + j5,16 = 22,2 \cdot e^{j0,23}[\Omega].$$

$$I = \underline{E} / \underline{Z} = 220 \cdot e^{j\pi/6} / 22,2 \cdot e^{j0,23} = 9,93 \cdot e^{j0,29} = 9,53 + j2,78[A].$$

$$\underline{U}_1 = I \cdot \underline{Z}_L = 9,93 \cdot e^{j0,29} \cdot 14,14 e^{j1,57} = 140,47 \cdot e^{j1,86} = -40 + j134,6[V];$$

$$\underline{U}_2 = \underline{E} - \underline{U}_1 = 190,5 + j110 - (-40 + j134,6) = 230,5 - j24,6 = 231,8 \cdot e^{j0,1}[V];$$

$$I_1 = \underline{U}_2 / \underline{Z}_1 = 231,8 \cdot e^{j0,1} / 56,7 \cdot e^{-j0,36} = 4,08 \cdot e^{j0,46}[A]; I_2 = \underline{U}_2 / \underline{Z}_2 = 231,8 \cdot e^{j0,1} / 30 = 7,73 e^{j0,1}[A];$$

$$\underline{S}_G = \underline{E} \cdot I^* = 220 \cdot e^{j\pi/6} \cdot 9,93 \cdot e^{-j0,29} = 2184,6 \cdot e^{j0,23} = 2127 + j498[\text{VA}];$$

$$P = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 = 20 \cdot 4,08^2 + 30 \cdot 7,73^2 = 2126[W];$$

$$Q = X_L \cdot I^2 + X_C \cdot I_1^2 = 14,14 \cdot 9,93^2 + (-53,05) \cdot 4,08^2 = 1394 - 883 = 511[\text{VAR}].$$

Tema 4.2. Să se calculeze impedanța complexă, rezistența și reactanța conexiunii serie, respectiv paralel a impedanțelor:  $\underline{Z}_1 = 1 - j2[\Omega]$  și  $\underline{Z}_2 = 3 + j3[\Omega]$ .

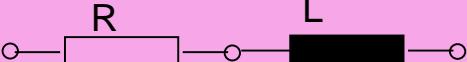
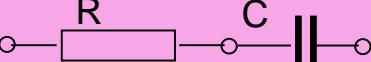
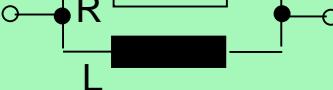
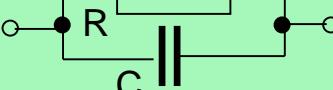
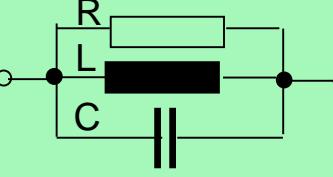
Tema 4.3. Cum conectați două rezistoare astfel încât dipolul format să aibă rezistență mai mică decât oricare din valorile celor două rezistoare? Calculați rezistența dipolului astfel obținut, dacă  $R_1=10[\Omega]$  și  $R_2=15[\Omega]$ .

Tema 4.4. Rezistoarele cu  $R_1 < R_2$  sunt conectate în paralel. Cum este rezistența dipolului format: a)  $R < R_1 < R_2$ ; b)  $R_1 < R < R_2$ ; c)  $R > R_2$ .

Tema 4.5. Condensatorul ideal de capacitate  $C = 30[\mu F]$  este conectat în paralel cu un dipol format prin legarea în serie a bobinei de inductivitate  $L = 83[mH]$  și a rezistorului cu rezistență  $R = 42[\Omega]$ . Reprezentați schema circuitului și calculați impedanța echivalentă și factorul de putere, dacă  $f = 100[Hz]$ .

Tema 4.6. Un divizor de tensiune este format prin inserierea a două impedanțe  $\underline{Z}_1$  și  $\underline{Z}_2$ , fiecare formată dintr-un rezistor ideal în paralel cu un condensator ideal. Reprezentați schema electrică a divizorului și determinați condiția în care raportul tensiunilor la bornele celor două impedanțe  $\underline{U}_2 / \underline{U}$  este egal cu  $1/10$ , indiferent de valoarea frecvenței tensiunii de alimentare.

Tema 4.7. Rezistorul cu rezistență de  $200[\Omega]$  și condensatorul cu capacitatea de  $1,06[mF]$  sunt legate în serie și alimentate la reteaua monofazată:  $220[V] / 50[Hz]$ . Să se calculeze: impedanța echivalentă  $\underline{Z}_s$ , valoarea efectivă a curentului și valoarea puterii complexe  $\underline{S}$  absorbite de dipol.

Schema electrică	Impedanță $Z = R + jX$	Admitanță $Y = G - jB$
	$R + j\omega \cdot L$	$\frac{1}{R + j\omega \cdot L} = \frac{R - j\omega \cdot L}{R^2 + \omega^2 L^2}$
	$R + \frac{1}{j\omega \cdot C} = R - j\frac{1}{\omega \cdot C}$	$\frac{\omega^2 R C^2 + j\omega \cdot C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$
	$j(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}) = j\frac{\omega^2 L C - 1}{\omega C}$	$j\frac{\omega C}{\omega^2 L C - 1}$
	$R + j(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C})$	$\frac{R - j(\omega \cdot L - 1/\omega \cdot C)}{R^2 - (\omega \cdot L - 1/\omega \cdot C)^2}$
	$\frac{R\omega^2 L^2 + j\omega \cdot L \cdot R^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$	$\frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega \cdot L}$
	$\frac{R + j\omega \cdot C R^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$	$\frac{1}{R} + j\omega \cdot C$
	$j\frac{\omega \cdot L}{1 - \omega^2 L C}$	$j(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L})$
	$\frac{R - jR^2(\omega \cdot C - 1/\omega \cdot L)}{1 + R^2(\omega \cdot C - 1/\omega \cdot L)^2}$	$\frac{1}{R} + j(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C})$

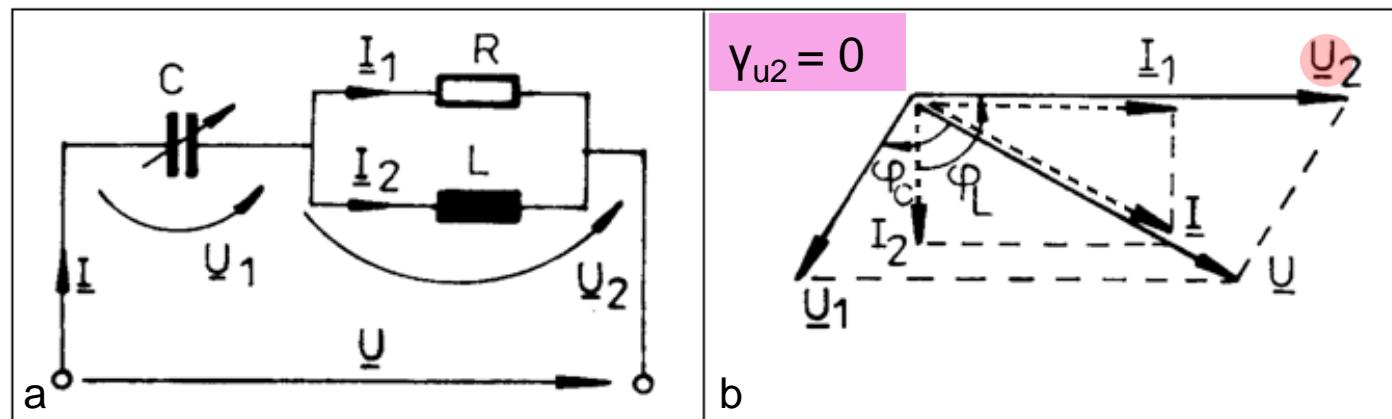
## 4.1.3. REZONANȚA ELECTRICĂ

- { - regim de funcționare a circuitelor electrice de c.a.
- { - circuitul trebuie să conțină obligatoriu atât bobine cât și condensatoare

- Condiția de rezonanță: **dipolul nu absoarbe putere reactivă**

$$Q = XI^2 = BU^2 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} X = Z \cdot \sin \varphi = 0; \\ B = Y \cdot \sin \varphi = 0; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 0 \\ f(R, L, C, \omega) = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{circuit cu reactanțe} \\ \text{compensate} \end{array}$$

- Aplicația 4



**Fig. 4.6** Dipol pasiv (a) și diagrama fazorială la rezonanță (b).

$$\underline{Z} = \underline{Z}_c + \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_c + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = -j \frac{1}{\omega \cdot C} + \frac{R \cdot j\omega \cdot L}{R + j\omega \cdot L} = R_e + j \left[ \frac{\omega \cdot R^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1}{\omega \cdot C} \right]$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{C = \frac{1}{\omega^2 L} + \frac{L}{R^2}} \quad \xleftarrow{\hspace{10em}} \quad X_e = 0$

• Aplicația 5

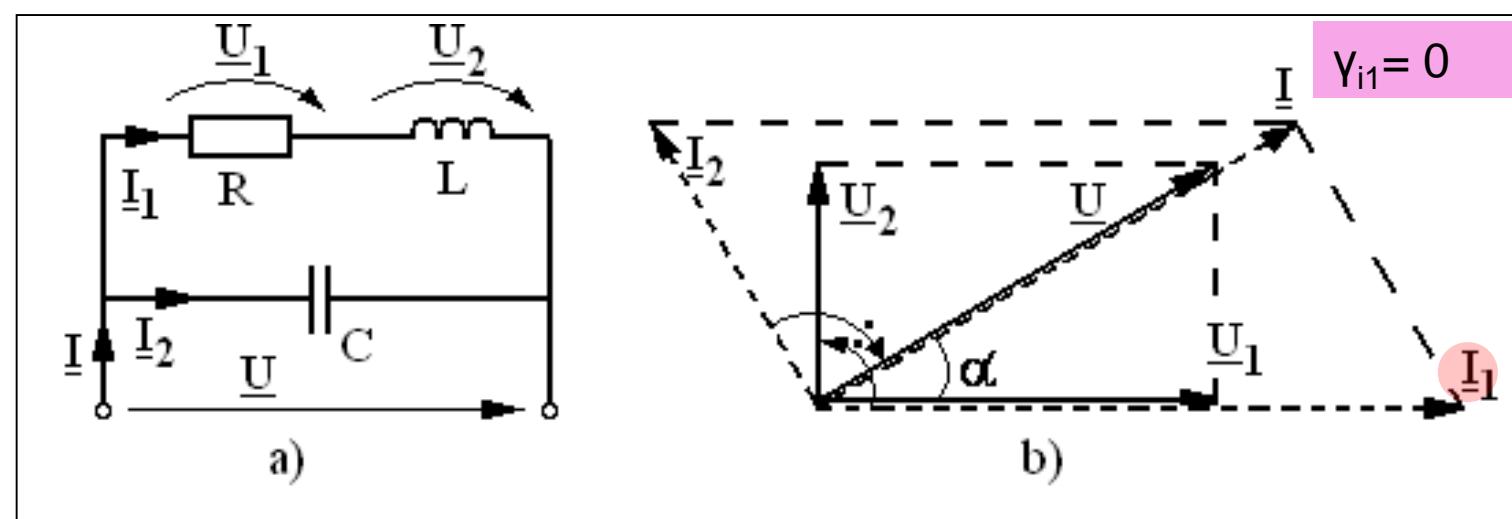


Fig. 4.7 Circuit RLC mixt (a) și diagrama fazorială la rezonanță (b).

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L = R + j\omega L; \quad Y_1 = 1/\underline{Z}_1 = 1/(R + j\omega L);$$

$$\underline{Z}_2 = 1/(j\omega C); \quad Y_2 = 1/\underline{Z}_2 = j\omega C; \quad Y_e = Y_p = Y_1 + Y_2$$

$$Y_e = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - j \left( \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} - \omega C \right) = G_e - jB_e$$

$$R = \sqrt{L/C - \omega^2 L^2}; \quad \leftrightarrow \omega^2 LC < 1$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{L^2}}; \quad \leftrightarrow R^2 C < L$$

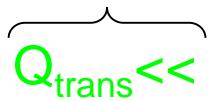
$$C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2}; \quad L = ??$$

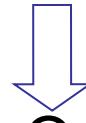
$$B_e = 0$$

## 4.1.4. IMBUNĂTĂȚIREA FACTORULUI de PUTERE (compensarea puterii reactive)

- $k_P = \frac{P}{S} = \cos\varphi$ ;   $k_P = 0,93 - 0,97$  (de ce nu  $k_P = 1$  ?)
  - $P = UI_1\cos\varphi_1 = UI_2\cos\varphi_2 = \text{const.}$  transportată la:  $\begin{cases} I_1 > \text{ și } \cos\varphi_1 < \\ I_2 < \text{ și } \cos\varphi_2 > ; \end{cases}$
  - pierderi cît mai reduse în linia de transport:
- $$\Delta P = R_L I^2 = R_L \frac{S^2}{U^2} = R_L \frac{P^2 + Q^2}{U^2} = R_L \frac{P^2}{U^2 \cos^2 \varphi} \ll \begin{cases} U_{\text{trans}} >> ; \\ Q_{\text{trans}} << ; \\ \cos\varphi >>. \end{cases}$$
- majoritatea consumatorilor mari sănt inductivi:  $Q > 0$  (absorbită):

$$Q_{\text{transportată}} + Q_{\text{produsă local}} = Q_{\text{necesară}}$$

- folosirea condensatoarelor;
- supraexcitarea mașinilor sincrone.

# a) în rețele monofazate

$$Q_2 < Q_1$$

$$\overbrace{I_2 \cdot \sin \varphi_2 < I_1 \cdot \sin \varphi_1}^{\uparrow} | \cdot U$$

$$P_2 = P_1$$

$$\varphi_2 < \varphi_1 \rightarrow \cos \varphi_2 > \cos \varphi_1; \sin \varphi_2 < \sin \varphi_1$$

$$I_2 < I_1; I_1 \cdot \cos \varphi_1 = I_2 \cdot \cos \varphi_2$$

$$\left. \begin{array}{l} I_2 = I_1 + I_C \\ I_C = j\omega C U \end{array} \right\}$$

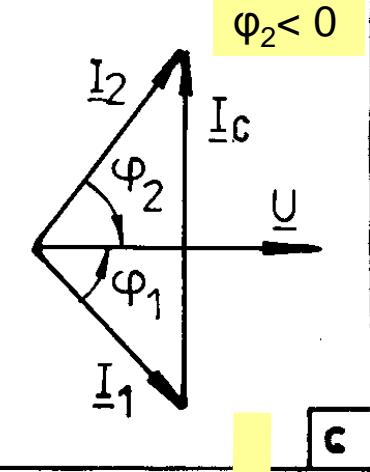
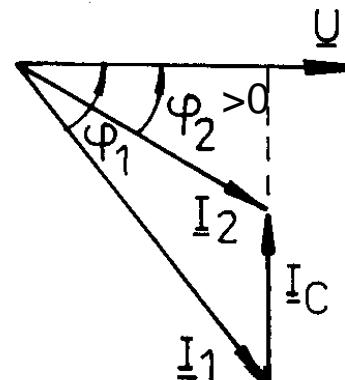
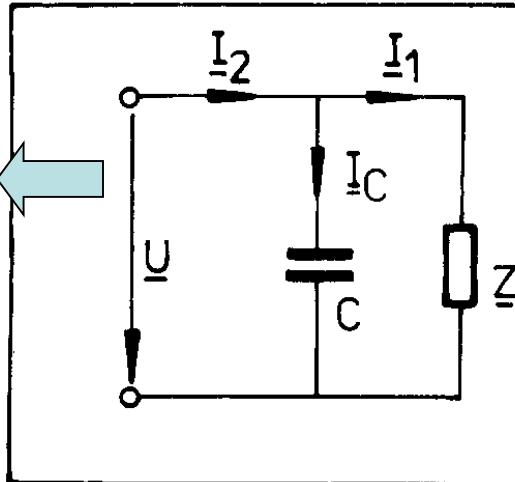


Fig.4.8 Imbunătățirea factorului de putere prin condensatoare

$$C = \frac{1}{\omega U} I_C = \frac{1}{\omega U} (I_1 \sin \varphi_1 - I_2 \sin \varphi_2);$$

supracompenzare

$$C = \frac{1}{\omega U} \left( \frac{P}{U \cos \varphi_1} \sin \varphi_1 - \frac{P}{U \cos \varphi_2} \sin \varphi_2 \right);$$

$$C = \frac{P}{\omega U^2} (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2)$$

## b) în rețele trifazate

$$C_{\Delta} = \frac{P}{3\omega \cdot U^2} (\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2) = \frac{C_Y}{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_Y = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot U_{\Delta}; \\ C_Y = 3 \cdot C_{\Delta} \end{array} \right.$$

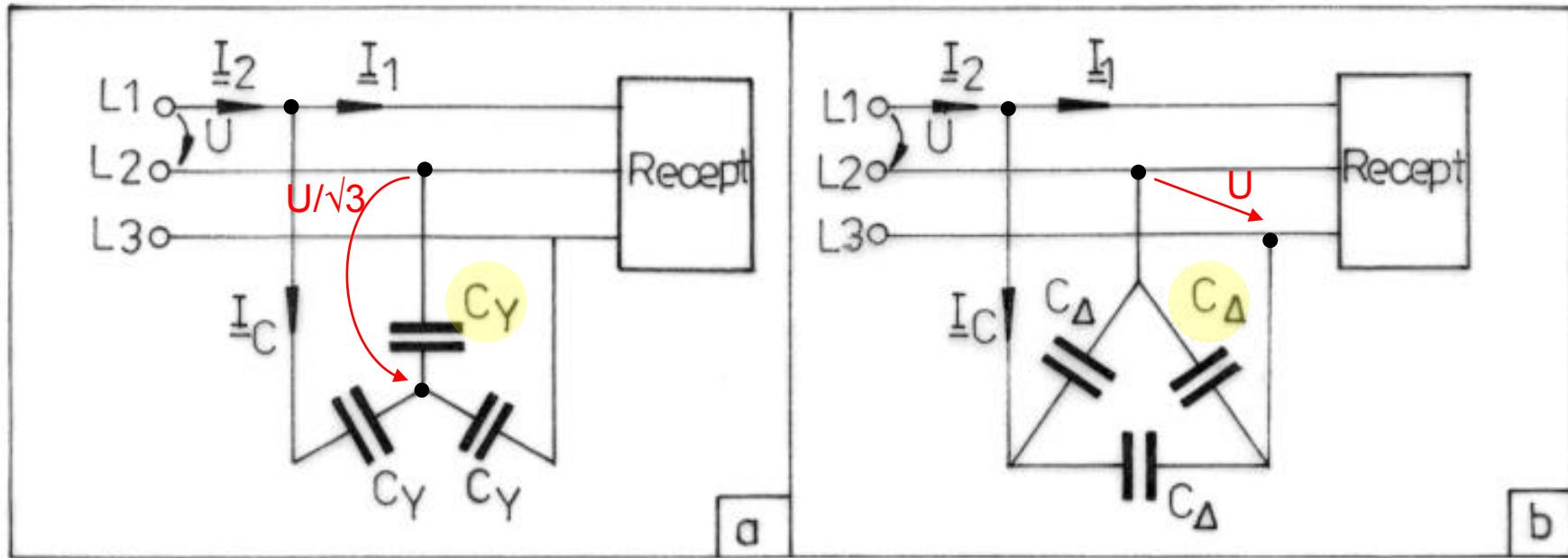


Fig.4.9 Conectarea condensatoare în stea (a) și în triunghi (b).

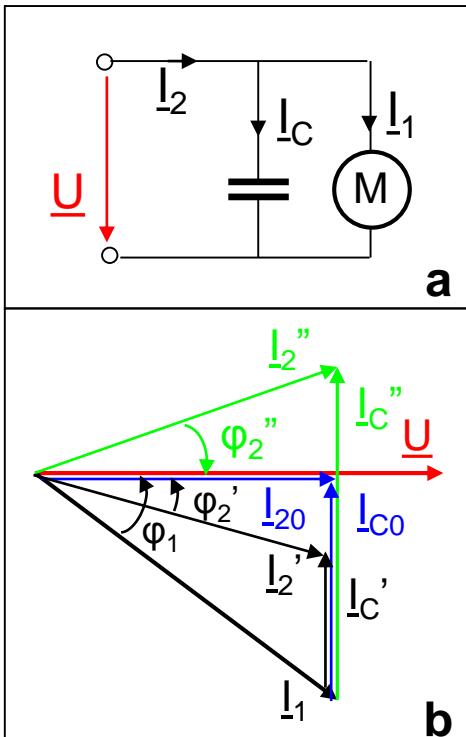
Concluzie:

- la conectarea în stea (Y) sînt necesare condensatoare de capacitate mare, dar cu tensiunea nominală mică;
- la conectarea în triunghi ( $\Delta$ ) sînt necesare condensatoare de capacitate mică, dar cu tensiunea nominală mare.

## Problema 4.6

**Un motor electric (dipol inductiv) absoarbe, din reteaua monofazată cu  $U = 220[V]$  și  $f = 50[Hz]$ , puterea  $P = 1,5[kW]$ , la  $\cos\varphi_1 = 0,7$ . Să se calculeze:**

- valoarea condensatorului care măreste factorul de putere la valoarea 0,95;**
- valoarea capacității la care curentul absorbit din rețea este minim.**



Rezolvare:

a) Motorul fiind dipol inductiv,  $\varphi_1 = 45^035'$ ,  $\operatorname{tg}\varphi_1 = 1,02$ , iar ansamblul poate rezulta inductiv sau capacativ:  $\varphi_2 = \pm 18^010'$ ,  $\operatorname{tg}\varphi_2 = \pm 0,328$ .

Pentru a reduce consumul de putere reactiva de la  $Q_1 = P \cdot \operatorname{tg}\varphi_1$  la  $Q_2 = P \cdot \operatorname{tg}\varphi_2$ , diferența de putere reactiva va fi furnizata de condensatorul avind capacitatea:

$$C = \frac{Q_1 - Q_2}{\omega U^2} = \frac{P}{\omega U^2} (\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2) = \frac{1500}{2\pi \cdot 50 \cdot 220^2} (1,02 \pm 0,328)[F],$$

cu soluțiile  $C' = 66,9[\mu F]$  și  $C'' = 130,3[\mu F]$ . În ambele cazuri curentul absorbit din rețea se reduce de la valoarea  $I_1 = P/(U \cdot \cos\varphi_1) = 1500/(220 \cdot 0,7) = 9,74[A]$  la valoarea  $I_2' = I_2'' = P/(U \cdot \cos\varphi_2) = 1500/(220 \cdot 0,95) = 7,18[A]$ , cu deosebirea

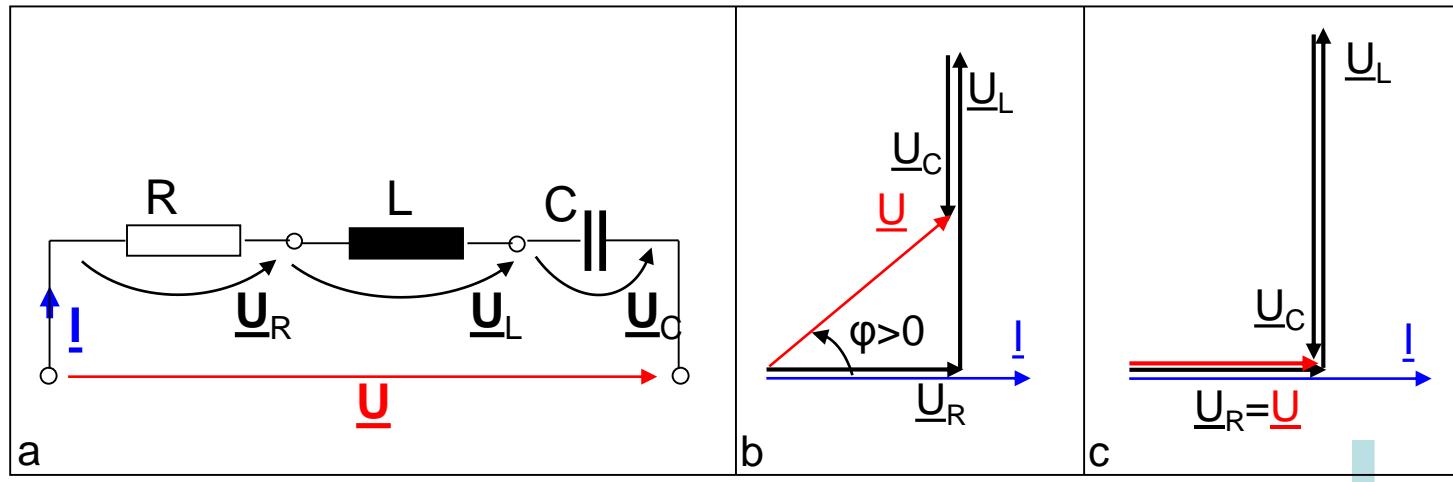
ca la conectarea capacității  $C'$  comportarea circuitului este inductivă ( $\varphi_2' = +18^010'$ ), iar pentru  $C''$  intervine supracompensarea, comportarea fiind capacativă ( $\varphi_2'' = -18^010'$ ).

b) Curentul absorbit din rețea este minim la rezonanță:  $\varphi_{20} = 0$ ;  $I_{20} = P/(U \cdot \cos\varphi_{20}) = 1500/220 = 6,82[A]$  și se obține la conectarea condensatorului cu capacitatea:

$$C_0 = \frac{P}{\omega U^2} (\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2) = \frac{1500}{2\pi \cdot 50 \cdot 220^2} 1,02 = 98,6[F].$$

## 4.1.5. CIRCUITE ELECTRICE SIMPLE

### a) Circuit RLC serie



**Fig.4.10** Circuit RLC serie (a) și diagramele fazoriale  
în regim inductiv (b), respectiv la rezonanță (c).

rezonanță tensiunilor  
 $\underline{U}_C = \underline{U}_L \gg \underline{U}$

$$u = u_R + u_L + u_C = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot dt;$$

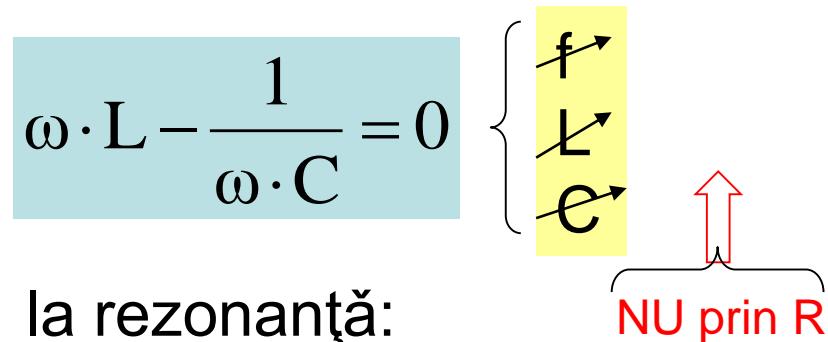
$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = R \cdot \underline{i} + j\omega \cdot L \underline{i} - j \frac{1}{\omega \cdot C} \underline{i} = \underline{i} \left[ R + j(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}) \right];$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{i}} = R + j(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C});$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C})^2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}$$

- condiția de rezonanță:  $X = 0$ ;  $\Rightarrow \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} = 0$



- proprietățile circuitului RLC serie la rezonanță:

- curent maxim:  $I_0 = \frac{U}{Z_0} = \frac{U}{R} = \text{max.}$

- factor de putere maxim:  $\varphi_0 = 0; \rightarrow \cos \varphi_0 = \cos 0^\circ = 1$

- putere activă maximă:  $P_0 = UI_0 \cos \varphi_0 = U \frac{U}{R} \cdot 1 = \frac{U^2}{R} = \text{max.}$

- rezonanță de tensiuni:  $U_{L0} = U_{C0} \gg U$

## b) Circuit RLC paralel

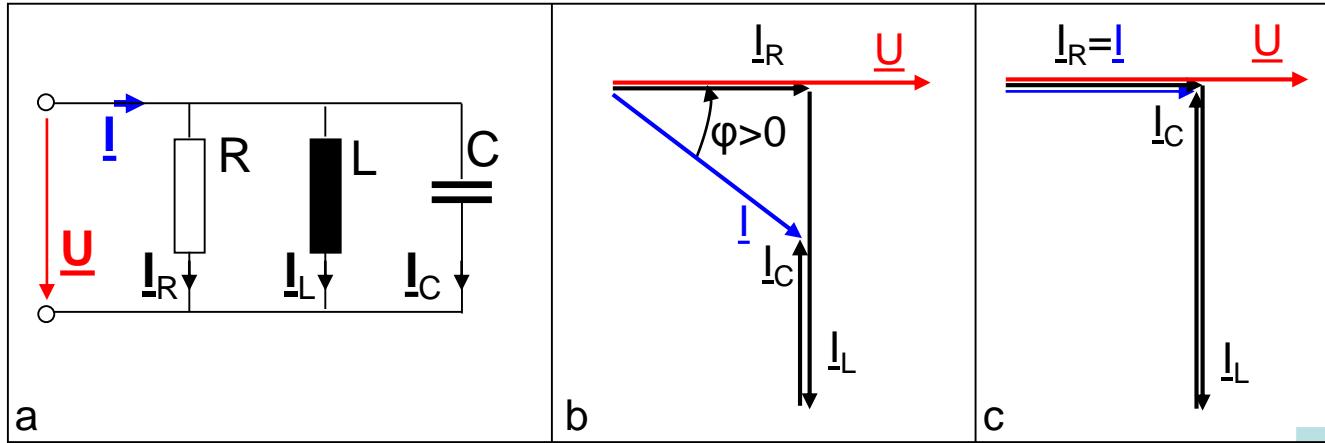


Fig.4.11 Circuit RLC paralel (a) și diagramele fazoriale (b, c).

rezonanță curentilor  
 $I_C = I_L \gg I$

$$i = i_R + i_L + i_C = \frac{u}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t u \cdot dt + C \frac{du}{dt};$$

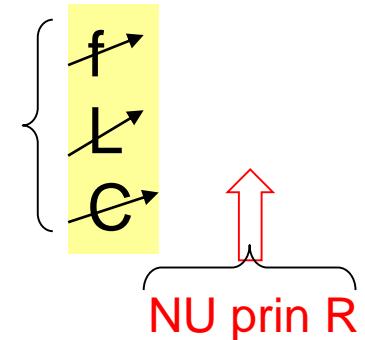
$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C = \frac{\underline{U}}{R} - j \frac{1}{\omega \cdot L} \underline{U} + j \omega \cdot C \underline{U} = \underline{U} \left[ \frac{1}{R} - j \left( \frac{1}{\omega \cdot L} - \omega \cdot C \right) \right];$$

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{R} - j \left( \frac{1}{\omega \cdot L} - \omega \cdot C \right); \quad Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \frac{1}{\omega \cdot L} - \omega \cdot C \right)^2};$$

$$\varphi = \arctg \frac{\frac{1}{\omega \cdot L} - \omega \cdot C}{1/R}$$

- condiția de rezonanță:  $B = 0$ ;  $\rightarrow \frac{1}{\omega \cdot L} - \omega \cdot C = 0$

$$\frac{1}{\omega \cdot L} - \omega \cdot C = 0$$



- proprietățile circuitului RLC paralel la rezonanță:

- curent minim:  $I_0 = U \cdot Y_0 = \frac{U}{R} = \text{min.}$

- factor de putere maxim:  $\varphi_0 = 0; \rightarrow \cos \varphi_0 = \cos 0^\circ = 1 = \text{max.}$

- rezonanță de curenți:  $I_{L0} = I_{C0} \gg I$

# 4. 2. CIRCUITE TRIFAZATE

## 4.2.1. SISTEME TRIFAZATE

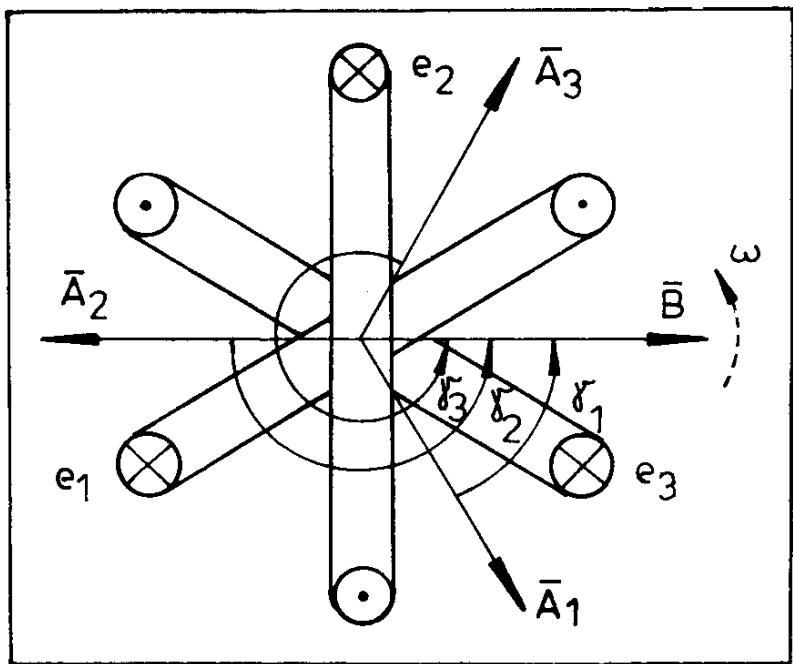


Fig.4.12 Producerea sistemului trifazat de tensiuni electromotoare

- sistem trifazat de t.e.m:

(3 mărimi electrice de același tip și aceeași frecvență)

$$\Phi_1 = \bar{B} \bar{A}_1 = BA_1 \cos(\omega t + \gamma_1)$$

$$e_1 = -N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} =$$

$$= \omega N_1 B A_1 \sin(\omega t + \gamma_1) =$$

$$= \sqrt{2} E_1 \sin(\omega t + \gamma_1)$$

$$E_m = \omega NBA = 2\pi \cdot f \cdot N \cdot B \cdot A;$$

$$E = E_m / \sqrt{2} = 4,44 \cdot f \cdot N \cdot B \cdot A;$$

$$\begin{cases} e_1 = \sqrt{2} E_1 \sin(\omega t + \gamma_1) \\ e_2 = \sqrt{2} E_2 \sin(\omega t + \gamma_2) \\ e_3 = \sqrt{2} E_3 \sin(\omega t + \gamma_3) \end{cases}$$

- sistem trifazat simetric (STS):  $\left\{ \begin{array}{l} E_1 = E_2 = E_3 = E; \\ \Phi_{12} = \Phi_{23} = \Phi_{31} = \pm 2\pi/3. \end{array} \right.$

$$\begin{cases} e_1 = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \gamma) \\ e_2 = \sqrt{2}E \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2}E \sin\left(\omega t + \gamma + \frac{4\pi}{3}\right); \\ e_3 = \sqrt{2}E \sin\left(\omega t + \gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{E}_1 = Ee^{j\gamma} \\ \underline{E}_2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} \underline{E}_1. \\ \underline{E}_3 = e^{j\frac{2\pi}{3}} \underline{E}_1 \end{cases}$$

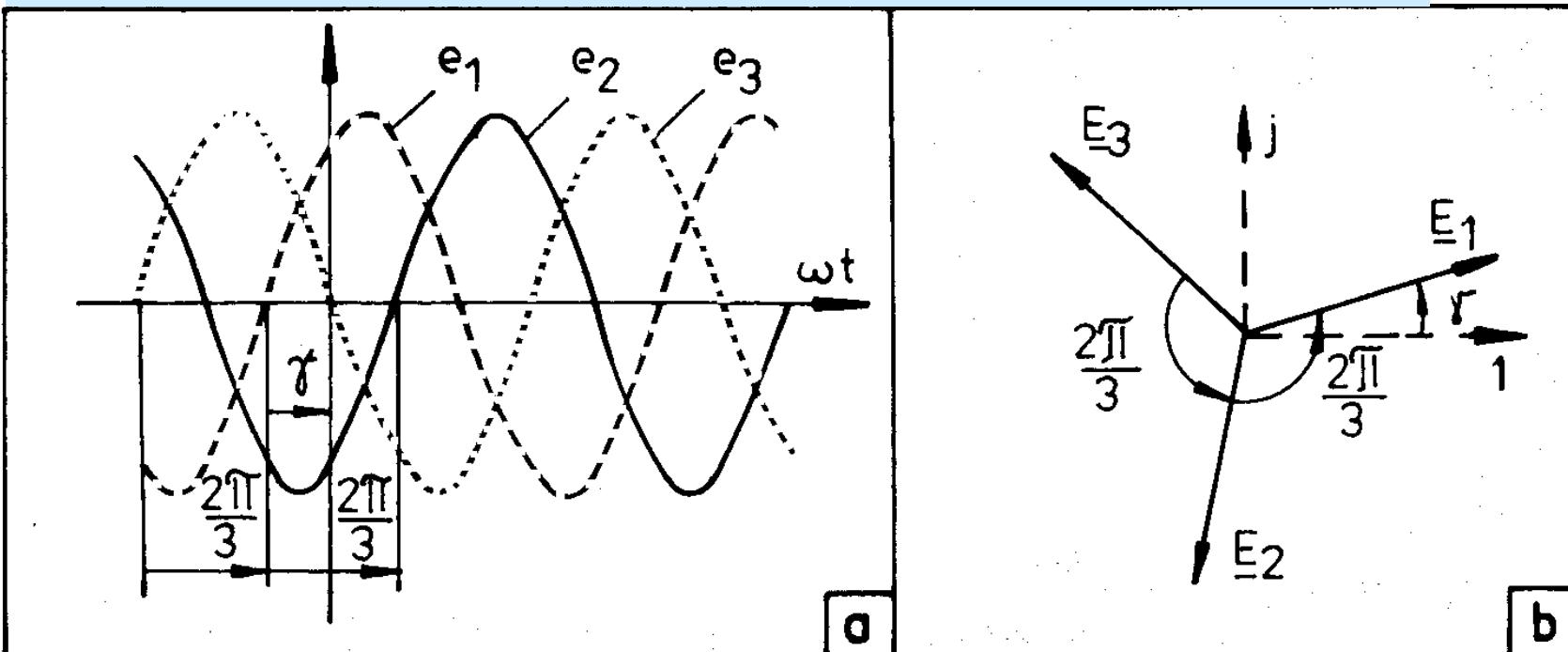


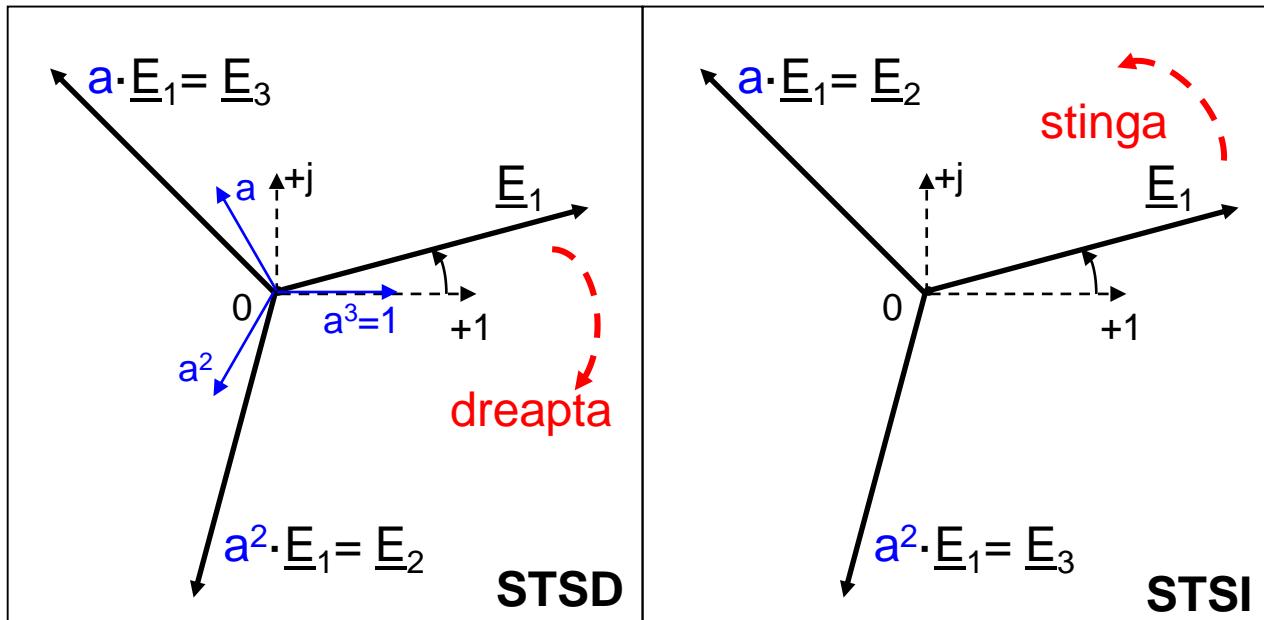
Fig.4.13 Sistem trifazat simetric în valori instantanee (a) și fazori (b).

- operator de rotatie:  $a = e^{\frac{j2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $a^2 = e^{\frac{j4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$a^3 = 1; \quad 1 + a + a^2 = 0; \quad a^* = a^2$$

- sistem trifazat simetric:

$$\begin{cases} \text{direct (rotire spre dreapta): } \underline{E}_1; \underline{E}_2 = a^2 \underline{E}_1; \underline{E}_3 = a \underline{E}_1 \\ \text{invers (rotire spre stanga): } \underline{E}_1; \underline{E}_2 = a \underline{E}_1; \underline{E}_3 = a^2 \underline{E}_1 \end{cases}$$



**Fig.4.14** Sistem trifazat simetric direct și invers.

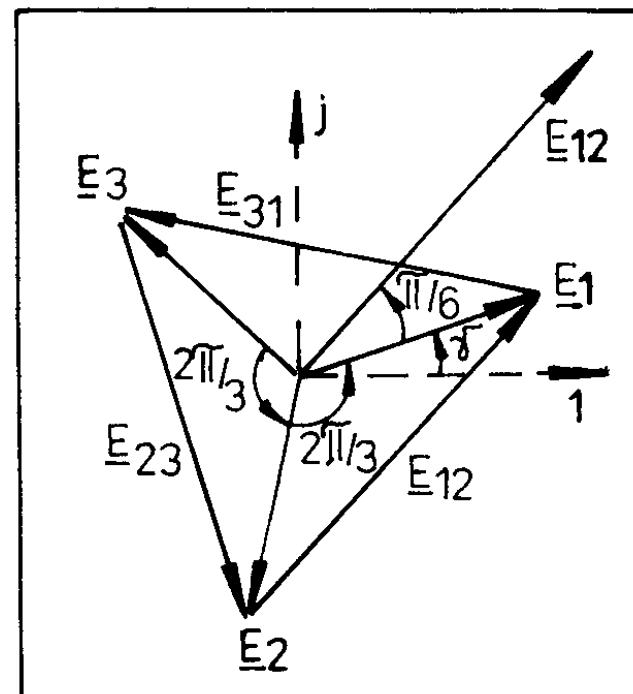
- diferența a două mărimi:

$$\begin{aligned} \underline{e}_{12} = \underline{e}_1 - \underline{e}_2 &= \sqrt{2}E \left[ \sin(\omega t + \gamma) - \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \right] = \\ &= \sqrt{2}E 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos\left(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}(\sqrt{3}E) \sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{6}\right) \\ \underline{E}_{12} = \underline{E}_1 - \underline{E}_2 &= \underline{E}_1 \left(1 - a^2\right) = \underline{E}_1 \left(\frac{3}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} \underline{E}_1 e^{j \frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

$\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3$ : sistemul mărimilor de fază;  
 $\underline{E}_{12}, \underline{E}_{23}, \underline{E}_{31}$ : sistemul mărimilor de linie.

- suma mărimilor sistemului simetric:

$$\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 = \underline{E}_1 (1 + a + a^2) = 0$$



**Fig.4.15** Sisteme trifazate simetrice directe (de fază și de linie).

## 4.2.2. CONEXIUNILE SISTEMELOR TRIFAZATE

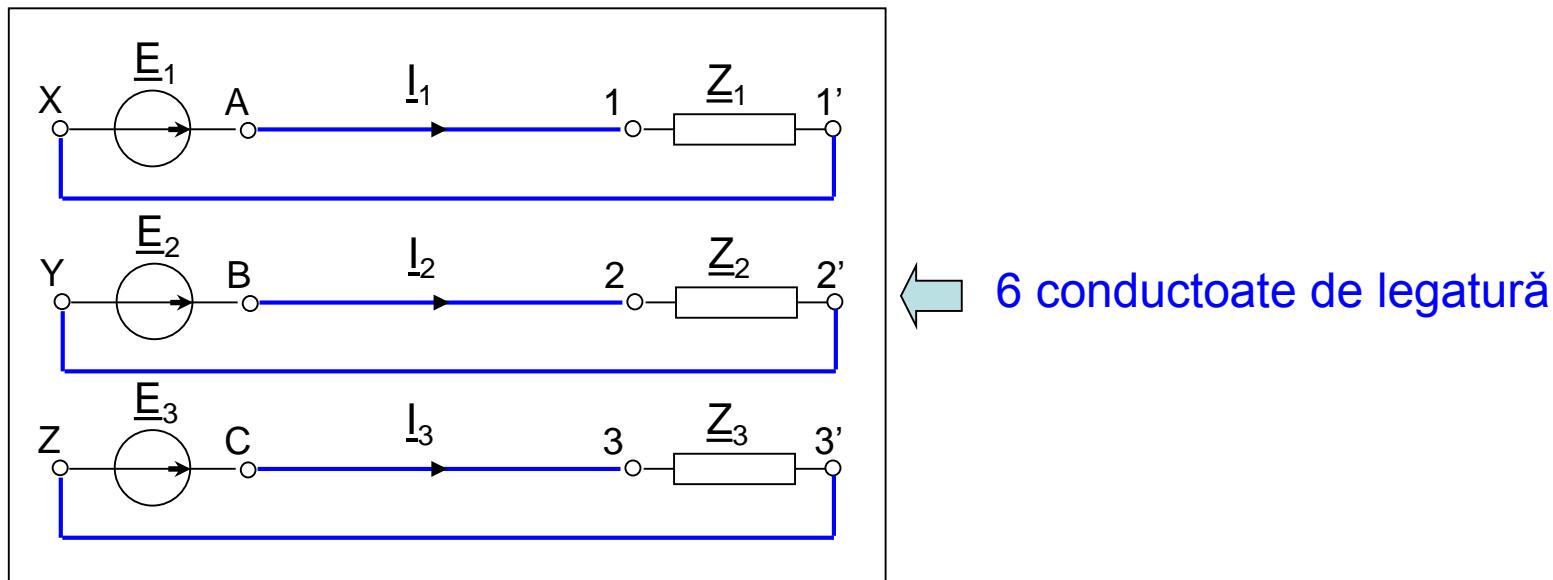
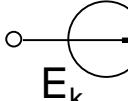
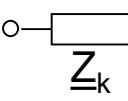


Fig.4.16 Sistem trifazat neconectat (3 linii monofazate independente)

 faze generatoare:  $\left\{ \begin{array}{l} A-X; \\ B-Y; \\ C-Z \end{array} \right.$

 faze receptoare:  $\left\{ \begin{array}{l} 1-1'; \\ 2-2'; \\ 3-3' \end{array} \right.$

Receptor trifazat:  $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ echilibrat: } \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \\ \underline{Z} e^{j\phi}; \\ \bullet \text{ dezechilibrat.} \end{array} \right.$

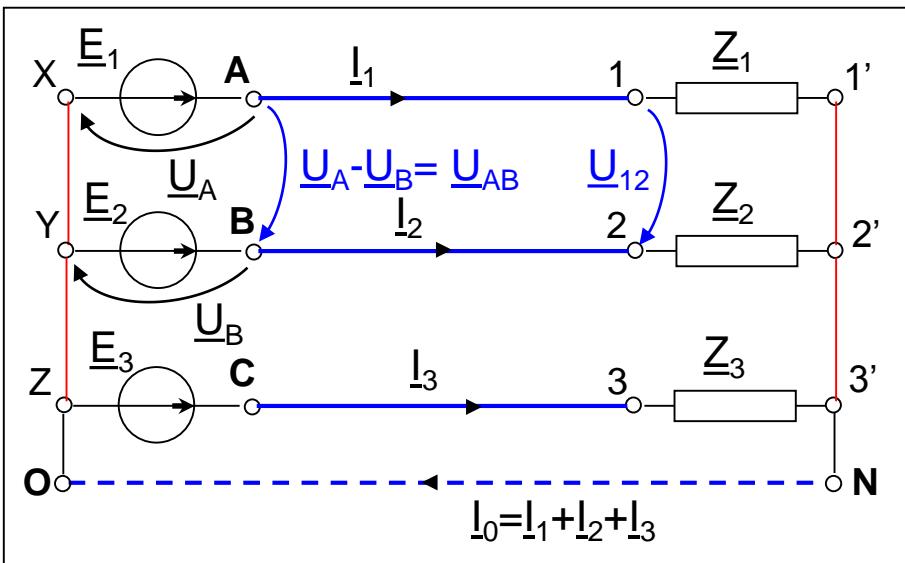


Fig.4.17 Rețea trifazată în conexiune stea.

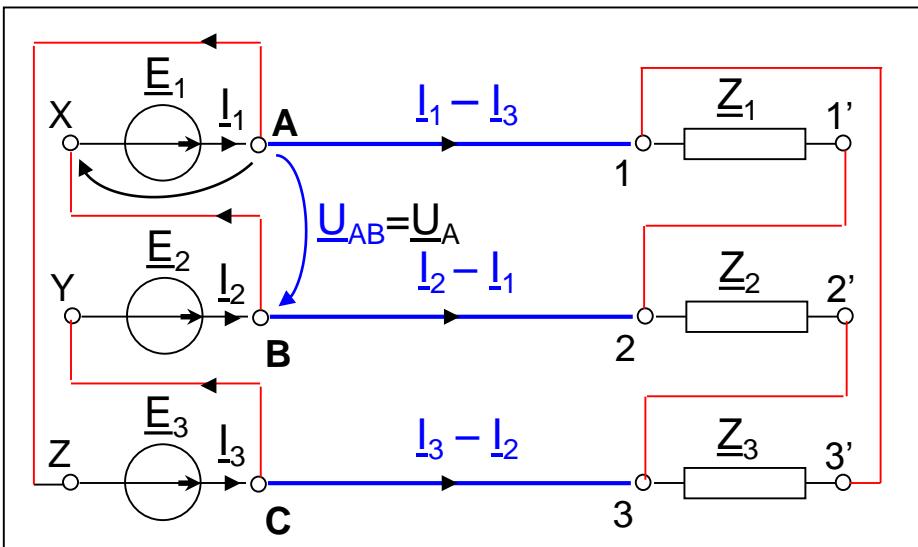
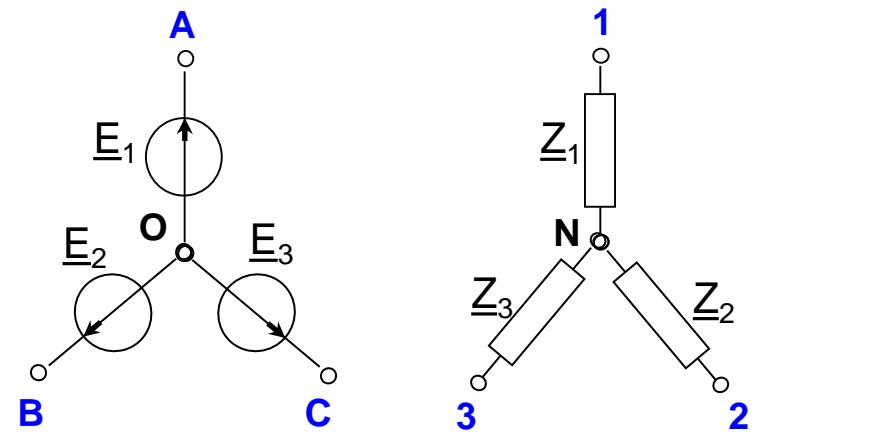
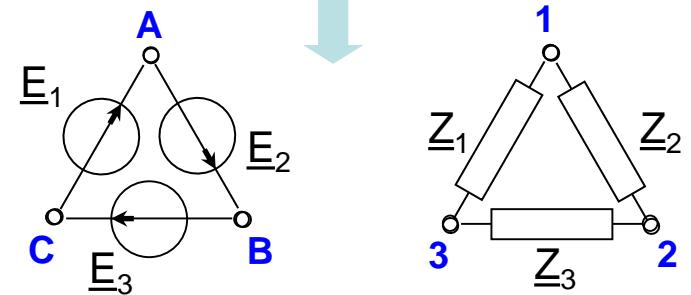


Fig.4.18 Rețea trifazată în conexiune triunghi.



conexiune stea (Y):  $\begin{cases} I_{\text{linie}} = I_{\text{faza}}; \\ U_{\text{linie}} \neq U_{\text{faza}} \end{cases}$

A, B, C – bornele generatorului;  
1, 2, 3 - bornele receptorului



conexiune triunghi (Δ):  $\begin{cases} I_{\text{linie}} \neq I_{\text{faza}}; \\ U_{\text{linie}} = U_{\text{faza}} \end{cases}$

### Problema 4.7

Arătați că tensiunile electrice cu valorile instantanee:

$u_1(t) = 10\sqrt{2} \cdot \sin(100\pi t)[V]$ ,  $u_2(t) = u_3(t) = 10\sqrt{2} \cdot \sin(100\pi t + \pi/2)[V]$  nu formează un sistem trifazat simetric.

Rezolvare:

$$U_1 = U_2 = U_3 = 10[V];$$

$$\varphi_{12} = \gamma_1 - \gamma_2 = 0 - \pi/2 = -\pi/2 \neq 2\pi/3[\text{rad}]; \varphi_{23} = \gamma_2 - \gamma_3 = \pi/2 - \pi/2 = 0 \neq 2\pi/3[\text{rad}].$$

### Problema 4.8

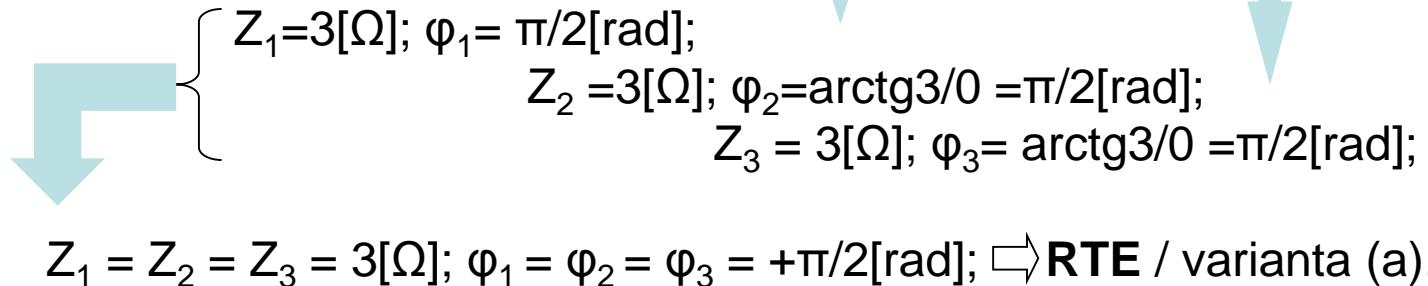
Receptorul trifazat caracterizat de:  $\underline{Z}_1 = 3e^{j\pi/2}[\Omega]$ ,  $\underline{Z}_2 = +j3 [\Omega]$ , și ( $R_3=0$ ,  $X=3[\Omega]$ ), este :

- a) echilibrat;
- b) dezechilibrat. Justificați varianta aleasă.

Rezolvare:

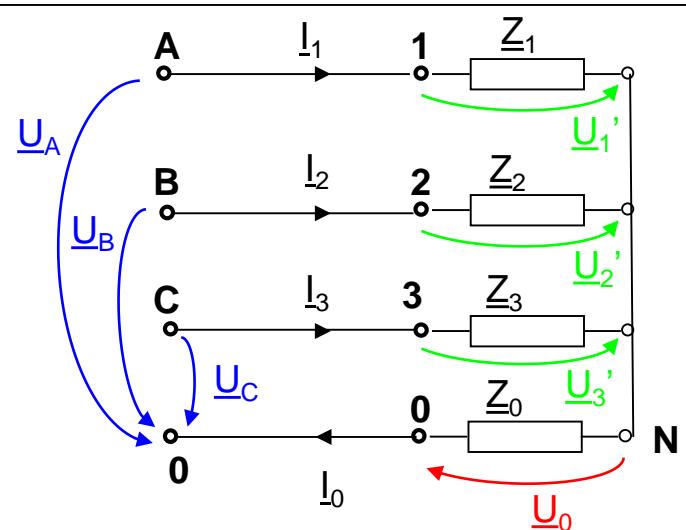
$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$$

$$\underline{Z} = R + jX$$

  
 $Z_1 = 3[\Omega]; \varphi_1 = \pi/2[\text{rad}]$ ;  
 $Z_2 = 3[\Omega]; \varphi_2 = \arctg 3/0 = \pi/2[\text{rad}]$ ;  
 $Z_3 = 3[\Omega]; \varphi_3 = \arctg 3/0 = \pi/2[\text{rad}]$ ;

$Z_1 = Z_2 = Z_3 = 3[\Omega]; \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = +\pi/2[\text{rad}] \Rightarrow \text{RTE} / \text{varianta (a)}$ .

## 4.2.3. REZOLVAREA SISTEMULUI TRIFAZAT În Y

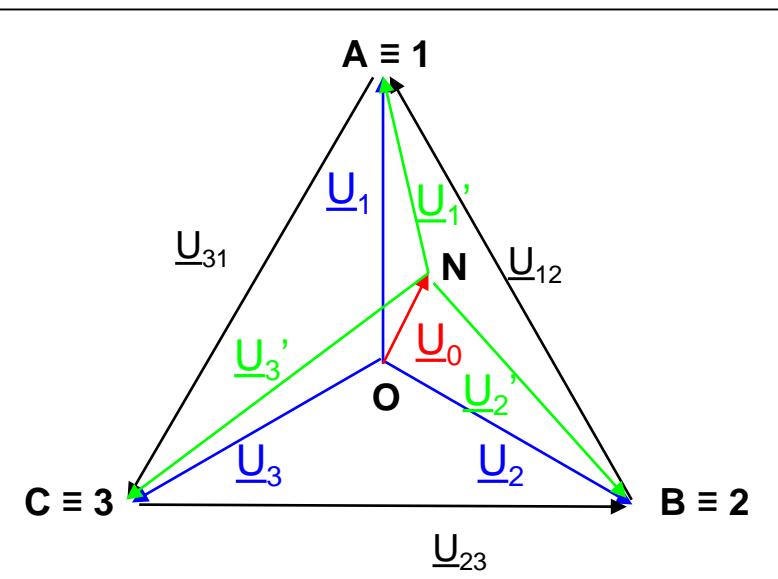


- tensiuni de fază:  $\underline{U}_A = \underline{U}_1$ ;  $\underline{U}_B = \underline{U}_2$ ;  $\underline{U}_C = \underline{U}_3$ ;
- tensiuni de linie:  $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{12}$ ;  $\underline{U}_{BC} = \underline{U}_{23}$ ;  $\underline{U}_{CA} = \underline{U}_{31}$ ;
- curenți de linie = curenți de fază:  $\underline{I}_1$ ;  $\underline{I}_2$ ;  $\underline{I}_3$   
 $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_0$

$$\underline{U}_1' \underline{Y}_1 + \underline{U}_2' \underline{Y}_2 + \underline{U}_3' \underline{Y}_3 = \underline{U}_0 \underline{Y}_0$$

$$(\underline{U}_1 - \underline{U}_0) \underline{Y}_1 + (\underline{U}_2 - \underline{U}_0) \underline{Y}_2 + (\underline{U}_3 - \underline{U}_0) \underline{Y}_3 = \underline{U}_0 \underline{Y}_0$$

Fig.4.19 Circuit trifazat în Y cu nul



$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_1 \underline{Y}_1 + \underline{U}_2 \underline{Y}_2 + \underline{U}_3 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_0 + \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

↗

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{I}_1 = (\underline{U}_1 - \underline{U}_0) \underline{Y}_1 \\ \underline{I}_2 = (\underline{U}_2 - \underline{U}_0) \underline{Y}_2 \\ \underline{I}_3 = (\underline{U}_3 - \underline{U}_0) \underline{Y}_3 \\ \underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{U}_0 \underline{Y}_0 \end{array} \right.$$

Fig.4.20 Diagrama fazorială pentru  $\underline{U}_0 \neq 0$ .

# Circuit trifazat simetric și echilibrat în conexiune stea

↓

$$\underline{U}_1 ; \underline{U}_2 = a^2 \underline{U}_1 ; \underline{U}_3 = a \underline{U}_1$$

↓

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = Z e^{j\varphi}$$

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_1 \underline{Y}_1 (1 + a + a^2)}{\underline{Y}_0 + 3 \underline{Y}_1} = 0$$

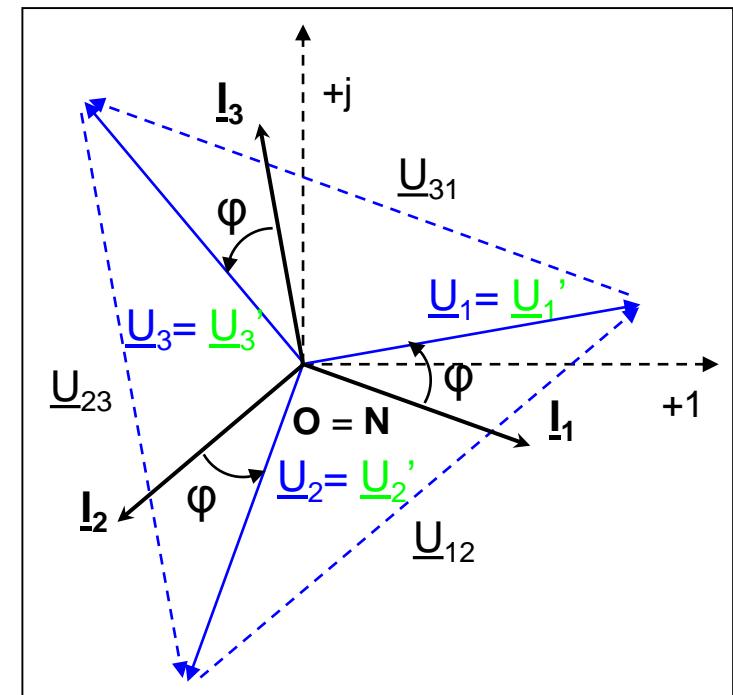
$$\underline{I}_0 = \underline{Y}_0 \underline{U}_0 = 0$$

↓

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = (\underline{U}_1 - \underline{U}_0) \underline{Y}_1 = \underline{U}_1 \underline{Y}_1 = \frac{\underline{U}_1}{Z} e^{-j\varphi} \\ \underline{I}_2 = \underline{U}_2 \underline{Y}_2 = a^2 \underline{I}_1 \\ \underline{I}_3 = \underline{U}_3 \underline{Y}_3 = a \underline{I}_1 \end{cases}$$

sistem trifazat simetric de curenți

$$U_\ell = \sqrt{3} U_f ; I_\ell = I_f$$



**Fig.4.21** Diagrama fazorială a circuitului simetric și echilibrat, în conexiune stea.

## 4.2.4. REZOLVAREA SISTEMULUI TRIFAZAT În $\Delta$

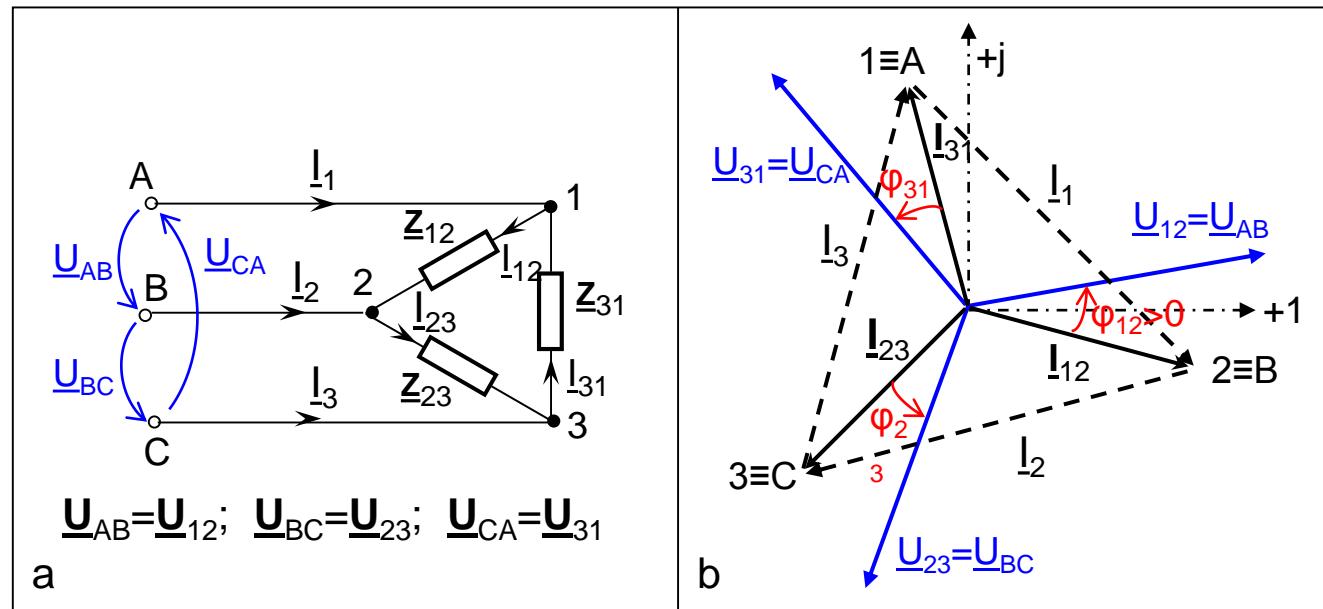


Fig.4.22 Circuit trifazat în conexiune triunghi (a) și diagrama sa fazorială (b).

- Se dau:
  - tensiunile de linie:  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$  ( $U_{CA}$  se poate calcula);
  - impedanțele receptoare:  $Z_{12}$ ,  $Z_{23}$  și  $Z_{31}$ .
- Se calculează:
  - curentii de fază:  $I_{12} = \frac{U_{12}}{Z_{12}}$ ;  $I_{23} = \frac{U_{23}}{Z_{23}}$ ;  $I_{31} = \frac{U_{31}}{Z_{31}}$
  - curentii de linie:  $I_1 = I_{12} - I_{31}$ ;  $I_2 = I_{23} - I_{12}$ ;  $I_3 = I_{31} - I_{23}$ ;

## Circuit trifazat simetric și echilibrat în conexiune triunghi

$$\underline{U}_{12} ; \underline{U}_{23} = a^2 \underline{U}_{12}$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31} = Z e^{j\varphi}$$

$$\underline{U}_{31} = -\underline{U}_{12} - \underline{U}_{23} = -(1 + a^2) \underline{U}_{12} = a \underline{U}_{12}$$

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{Z} e^{-j\varphi}; \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{Z} e^{-j\varphi} = a^2 \underline{I}_{12}; \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{Z} e^{-j\varphi} = a \underline{I}_{12}$$

sistem trifazat simetric de curenți

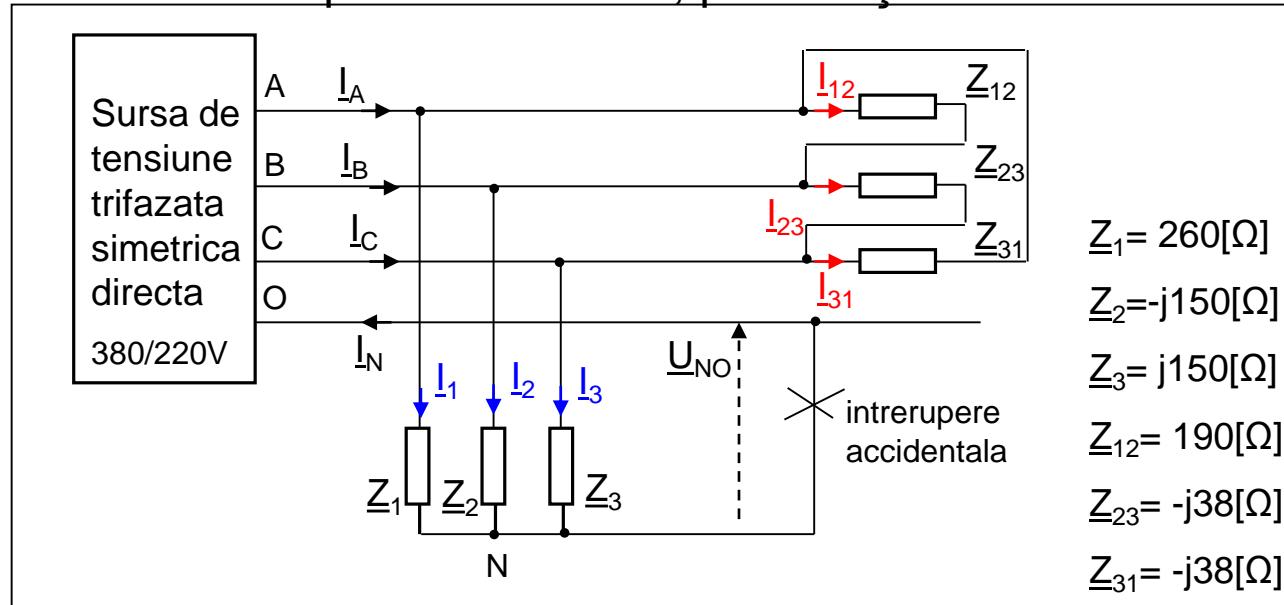
$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} ; I_1 = \sqrt{3} I_{12}$$

$$U_\ell = U_f ; I_\ell = \sqrt{3} I_f$$

## Problema 4.9

Două sarcini trifazate nesimetrice sunt conectate la o retea trifazată simetrică 380/220[V].

- Pentru un sistem trifazat simetric direct, care sunt valorile curentilor de linie și curentului de echilibrare?
- In cazul unei întreruperi accidentale a conductorului de nul, calculați valoarea tensiunii de deplasare a nulului, precum și noile valori ale curentilor de linie.



## Rezolvare

Fie sistemul trifazat simetric direct al tensiunilor de fază la generator (cu tensiunea  $U_A$  origine de fază):

$$U_A = U_f = 220[V]; U_B = a^2 \cdot U_f = a \cdot 220[V]; U_C = a \cdot U_f = a \cdot 220[V].$$

Rezultă sistemul tensiunilor de linie:

$$U_{AB} = \sqrt{3} \cdot U_A \cdot e^{j\pi/6} = 380 \cdot e^{j\pi/6}[V]; U_{BC} = a^2 \cdot U_{AB}; U_{CA} = a \cdot U_{AB}.$$

$$I_1 = \underline{U}_A / \underline{Z}_1 = 220 / 260 = 0,846[A]$$

$$I_2 = \underline{U}_B / \underline{Z}_2 = a^2 \cdot 220 / -j150 = j \cdot a^2 \cdot 220 / 150 = j(-1/2 - j\sqrt{3}/2) \cdot 1,466 = 1,27 - j0,733[A]$$

$$I_3 = \underline{U}_C / \underline{Z}_3 = a \cdot 220 / j150 = -j \cdot a \cdot 220 / 150 = -j(1/2 - j\sqrt{3}/2) \cdot 1,466 = -1,27 - j0,733[A]$$

$$I_{12} = \underline{U}_{AB} / \underline{Z}_{12} = 380 \cdot e^{j\pi/6} / 190 = 2 \cdot (\sqrt{3}/2 + j/2) = 1,732 + j1[A]$$

$$I_{23} = \underline{U}_{BC} / \underline{Z}_{23} = a^2 \cdot 380 \cdot e^{j\pi/6} / -j38 = (-1/2 - j\sqrt{3}/2) \cdot 10j \cdot (\sqrt{3}/2 + j/2) = 10[A]$$

$$I_{31} = \underline{U}_{CA} / \underline{Z}_{13} = a \cdot 380 \cdot e^{j\pi/6} / j38 = (1/2 - j\sqrt{3}/2) \cdot (-j10) \cdot (\sqrt{3}/2 + j/2) = -5(1+j\sqrt{3})[A]$$

$$I_A = I_1 + (I_{12} - I_{31}) = 0,846 + \sqrt{3} + j1 + 5(1+j\sqrt{3}) = 7,578 + j2,732[A]; I_1 = 8,055[A]$$

$$I_B = I_2 + (I_{23} - I_{12}) = 1,27 + -j0,733 + 10 - \sqrt{3} - j = 9,538 - j1,732[A]; I_2 = 9,848[A]$$

$$I_C = I_3 + (I_{31} - I_{23}) = -1,27 - j0,733 - 5(1+j\sqrt{3}) - 10 = -16,27 - j9,4[A]; I_3 = 18,79[A]$$

$$I_N = I_1 + I_2 + I_3 = 0,846 - j1,766[A]; I_N = 1,958[A].$$

$$\underline{U}_{NO} = \frac{\underline{U}_A \cdot \underline{Y}_1 + \underline{U}_B \cdot \underline{Y}_2 + \underline{U}_C \cdot \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{220(1/260 + a^2 / -j150 + a/j150)}{1/260 + 1 / -j150 + 1/j150} = 220 - j380[V]$$

$$U_{NO} = 439[V]$$

## Tema 4.8

O casă este alimentată la rețeaua trifazată de joasă tensiune 380/220[V], 50[Hz].

Următorii consumatori monofazați sănt conectati în stea cu nul accesibil:

- pe fază 1, o plită electrică cu puterea activă 1980[W] și  $\cos\phi = 1$ ;
- pe fază 2, o masină de spălat cu puterea aparentă 3300[VA] și  $\cos\phi = 0,8$  (inductiv);
- pe fază 3, ansamblul de prize și corpuri de iluminat. Iluminatul (incandescent și fluorescent) consumă o putere activă de 1320[W], la  $\cos\phi = 0,6$  (inductiv).

1. Desenați schema de principiu a instalației.

2. Calculați tensiunile de fază, curentii de fază, impedanțele echivalente ale sarcinilor.

3. Calculați curentii de linie și reprezentați diagrama fazorială a tensiunilor și curenților.

4. Calculați valoarea curentului de echilibrare (prin conductorul de nul).

## 4.2.5. PUTERI ELECTRICE În RETELE TRIFAZATE

### a) Rețea cu conductor neutru (rețea cu 4 conductoare)

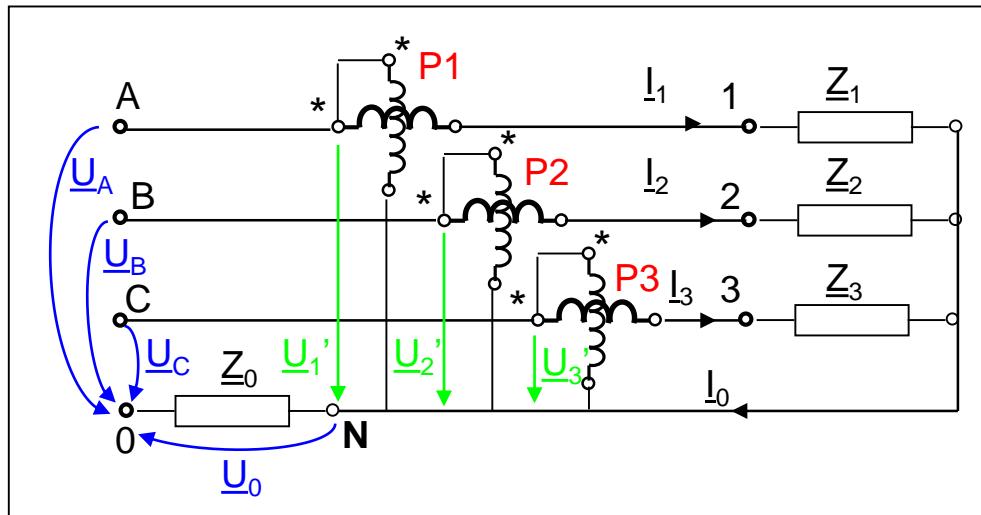


Fig.4.23 Măsurarea puterii active în rețele trifazate cu 4 conductoare

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 ; \quad \underline{I}_0^* = \underline{I}_1^* + \underline{I}_2^* + \underline{I}_3^*$$

$$S = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \underline{I}_3^* - \underline{U}_0 \underline{I}_0^* =$$

$$= (\underline{U}_1 - \underline{U}_0) \underline{I}_1^* + (\underline{U}_2 - \underline{U}_0) \underline{I}_2^* + (\underline{U}_3 - \underline{U}_0) \underline{I}_3^* = \underline{U}'_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}'_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}'_3 \underline{I}_3^*$$

$$P = \underline{U}'_1 \underline{I}_1 \cos(\widehat{\underline{U}'_1}, \underline{I}_1) + \underline{U}'_2 \underline{I}_2 \cos(\widehat{\underline{U}'_2}, \underline{I}_2) + \underline{U}'_3 \underline{I}_3 \cos(\widehat{\underline{U}'_3}, \underline{I}_3) = \\ = P_1 + P_2 + P_3 .$$

Observatii:

- putere activă se absoarbe **numai** pe faze (nu și prin conductorul de nul);
- puterea totală este suma puterilor pe cele trei faze.

## b) Rețea fără conductor neutru (rețea cu 3 conductoare)

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{12}; \underline{U}_{BC} = -\underline{U}_{32}$$

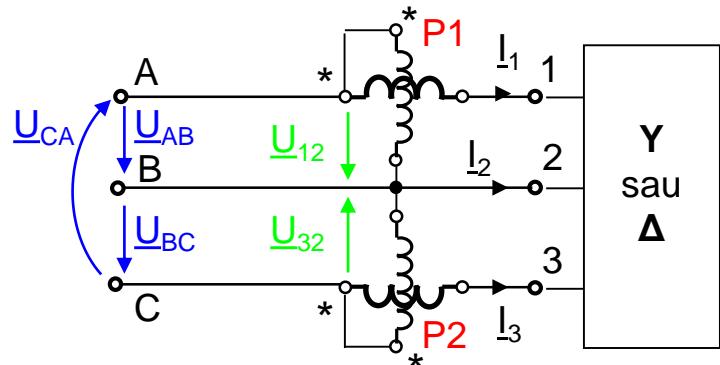


Fig.4.24 Măsurarea puterii active în rețele trifazate fără conductor neutru

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0; \underline{I}_1^* + \underline{I}_2^* + \underline{I}_3^* = 0$$

$$\underline{S} = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \underline{I}_3^* = (\underline{U}_1 - \underline{U}_2) \underline{I}_1^* + (\underline{U}_3 - \underline{U}_2) \underline{I}_3^* = \underline{U}_{12} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{32} \underline{I}_3^*$$

$$P = U_{12} I_1 \cos(\widehat{\underline{U}_{12}, \underline{I}_1}) + U_{32} I_3 \cos(\widehat{\underline{U}_{32}, \underline{I}_3}) = P_1 + P_2$$

Observații:

- $P_1$  și  $P_2$  au semnificația unor puteri active (dar nu sunt puteri active);
- $P_1$  și  $P_2$  pot avea și valori negative;
- wattmetrele sunt prevazute cu comutator de semn.

## Rețea trifazată simetrică și echilibrată



$$\underline{U}_{1f} = U_f ; \underline{U}_{2f} = a^2 \underline{U}_f ; \underline{U}_{3f} = a \underline{U}_f$$

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = Z e^{j\varphi}$$

$$\underline{I}_{1f}^* = \left( \frac{\underline{U}_{1f}}{\underline{Z}_1} \right)^* = \left( \frac{U_f}{Z} e^{-j\varphi} \right)^* = I_f e^{j\varphi}$$

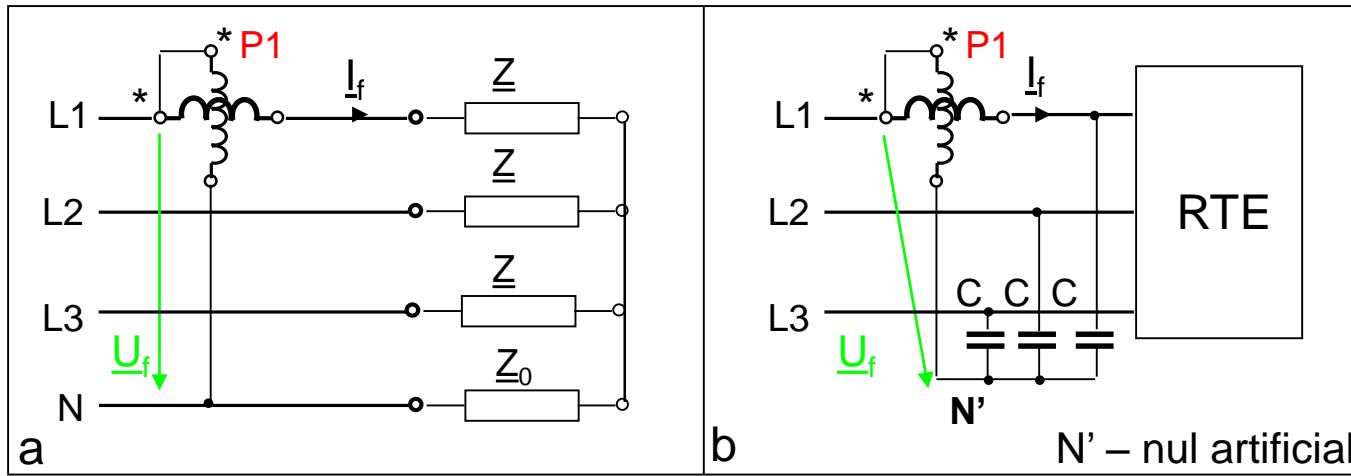
$$\underline{I}_{2f}^* = \left( \frac{\underline{U}_{2f}}{\underline{Z}_2} \right)^* = \left( a^2 \frac{U_f}{Z} e^{-j\varphi} \right)^* = a I_f e^{j\varphi}$$

$$\underline{I}_{3f}^* = \left( \frac{\underline{U}_{3f}}{\underline{Z}_3} \right)^* = \left( a \frac{U_f}{Z} e^{-j\varphi} \right)^* = a^2 I_f e^{j\varphi}$$

$$\underline{S} = \underline{U}_{1f} \underline{I}_{1f}^* + \underline{U}_{2f} \underline{I}_{2f}^* + \underline{U}_{3f} \underline{I}_{3f}^* =$$

$$= U_f I_f e^{j\varphi} + a^2 U_f a I_f e^{j\varphi} + a U_f a^2 I_f e^{j\varphi} = 3 U_f I_f e^{j\varphi}. \quad P = 3 U_f I_f \cos \varphi = 3 P_1$$

Concluzie: rețelele simetrice și echilibrate au fazele uniform încarcate



**Fig.4.25** Măsurarea puterii active în rețele simetrice și echilibrate cu (a) și fără (b) conductor neutru.

$$P = 3U_f I_f \cos \varphi = \begin{cases} Y \Rightarrow 3 \frac{U_\ell}{\sqrt{3}} I_\ell \cos \varphi \\ \Delta \Rightarrow 3U_\ell \frac{I_\ell}{\sqrt{3}} \cos \varphi \end{cases} = \boxed{\sqrt{3}U_\ell I_\ell \cos \varphi}$$

mai utilizată, deoarece nu totdeauna este accesibil nulul rețelei

Notatii:  $U_\ell = U$  și  $I_\ell = I$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \sqrt{3}UI \cos \varphi, [\text{W}], \\ Q = \sqrt{3}UI \sin \varphi, [\text{VAR}] ; S = \sqrt{3}UI, [\text{VA}]. \end{array} \right.$$

### Problema 4.10

Un receptor trifazat, conectat in triunghi, cu impedanta de faza  $\underline{Z}$ , caracterizata de  $R = 15[\Omega]$  si  $L = 32[mH]$ , este alimentat la reteaua trifazata si simetrica, cu tensiunea de linie de  $380[V]$  si frecventa  $50[Hz]$ . Sa se calculeze puterea activa absorbita.

#### Rezolvare:

Pentru conexiunea  $\Delta$ :  $U_l = U_f$ ;  $I_l = \sqrt{3} \cdot I_f = \sqrt{3} \cdot U_f / Z$ ; si  $\cos\varphi = R/Z$ , unde:  
 $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + (2\pi f L)^2}$

Inlocuind valorile cunoscute rezulta:

$$Z = \sqrt{15^2 + (2\pi \cdot 50 \cdot 32 \cdot 10^{-3})^2} = 10[\Omega];$$

$$I_f = 380/18 = 21,1[A]; I_l = \sqrt{3} \cdot 21,1 = 36,6[A];$$

$$\cos\varphi = 15/18 = 0,83;$$

Reteaua fiind simetrica si echilibrata si cunoscindu-se marimile de linie:

$$P = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_l \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 36,6 \cdot 0,83 = 19994[W] \approx 20[kW].$$

### Tema 4.9

Pentru receptorul trifazat din problema 4.9, calculati puterea reactiva si justificati ca aceasta putere este absorbita (nu debitata) de receptor.

### Tema 4.10

Daca sarcina trifazata, din problema 4.9, este conectata in stea in loc de triunghi, calculati valoarea curentului si o puterii active absorbite.

#### Tema 4.11

O sarcina echilibrata, conectata la o retea trifazata simetrica, cu tensiunea de linie de  $6[\text{kV}]$ , absoarbe o putere activa de  $48[\text{kW}]$ , la un factor de putere  $\cos\varphi = 0,94$ . Calculati valoarea efectiva a curentului de linie. Repetati calculul in cazul in care sarcina ar fi conectata in triunghi (aceeasi putere activa consumata si la acelasi  $\cos\varphi$ ) si determinati si valoarea efectiva a curentului prin fazele consumatorului.

#### Tema 4.12

Impedanta de fază a unui consumator trifazat echilibrat este formata dintr-o rezistenta  $R = 15[\Omega]$  in serie cu o capacitate  $C = 185[\mu\text{F}]$ . Acest consumator, in conexiune stea, este alimentat la o retea de  $50[\text{hz}]$ , a carei tensiuni de linie are valoarea  $380[\text{V}]$ . Calculati tensiunea de fază, curentul de fază, defazajul, puterile active si reactive ce caracterizeaza acest receptor trifazat.

#### Tema 4.13

La o retea trifazata si simetrica directa, cu tensiunea de  $380[\text{v}]$ , este legat in stea, o sarcina dezechilibrata formata dintr-un condensator  $C$ , o bobina  $L$  si un rezistor  $R$ . Neutru stelii N este legat la nulul sursei O. Cunoscind ca  $\omega L = \omega C = R = 100[\Omega]$ , se cere sa reprezentati diagrama fazoriala a tensiunilor si a curentilor pe fazele receptoare, precum si curentul prin conductorul de nul  $I_{NO}$ . In cazul intreruperii conductorului de nul, care este tensiunea  $U_{NO}$  si care sunt curentii prin fazele receptoare? Repetari calculele pentru aceeasi sarcina dar alimentata la o retea trifazata simetrica inversa.

## 4.2.6 CONVERSIA TRIUNGHI → STEA

Modificarea conexiunii impedantelor din triunghi în stea este utilizată pentru:

- reducerea temporara a puterii (exemplu – pornirea motoarelor asincrone);
- alimentarea consumatorului trifazat la o rețea cu tensiunea de  $\sqrt{3}$  mai mare.

### a) Reducerea puterii absorbite

Dacă tensiunea retelei și impedanța sarcinii rămân nemodate, conversia conexiunii din triunghi în stea, conduce la urmatoarele modificări:

- tensiunea de fază se reduce de  $\sqrt{3}$ ;
- curentul de fază se reduce de  $\sqrt{3}$  ori;
- curentul de linie se reduce de 3 ori.

Că atare puterea absorbită de sarcină devine de 3 ori mai mică:  $P_Y = \frac{1}{3} P_\Delta$

### b) Adaptarea la o tensiune mai mare

În SUA tensiunea de linie are valoarea de 220V (tensiunea de fază 127V).

**Dacă consumatorul are conexiunea  $\Delta$  va putea fi utilizat în UE, unde tensiunea de linie are valoarea 380V (tensiunea de fază 220V), prin modificarea conexiunii din  $\Delta$  în Y.**

Tensiunea, curentul și puterea de fază nu se modifică, deci consumatorul nu este suprasolicităt.

## 4.2.7 METODA COMPONENTELOR SIMETRICE

Studiul regimurilor nesimetrice in retele cu numar mare de linii de transport, transformatoare, generatoare si motoare trifazate se face dificil prin metode clasice, in special datorita prezentei cuplajelor magnetice intre elementele mobile (rotor si stator) ale masinilor electrice.

**Metoda componentelor simetrice**, recomandata pentru rezolvarea regimurilor trifazate nesimetrice ale circuitelor liniare, consta in calculul a trei regimuri simetrice.

a) descompunerea sistemului nesimetric in trei sisteme simetrice

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{E}_1 = \underline{E}_{h1} + \underline{E}_{d1} + \underline{E}_{i1} \\ \underline{E}_2 = \underline{E}_{h2} + \underline{E}_{d2} + \underline{E}_{i2} \\ \underline{E}_3 = \underline{E}_{h3} + \underline{E}_{d3} + \underline{E}_{i3} \end{array} \right. \text{nesimetric}$$

&  $\left\{ \begin{array}{l} \underline{E}_{h1} = \underline{E}_{h2} = \underline{E}_{h3} = \underline{E}_h \text{ simetric homopolar} \\ \underline{E}_{d1} = \underline{E}_d \\ \underline{E}_{d2} = a^2 \cdot \underline{E}_d \\ \underline{E}_{d3} = a \cdot \underline{E}_d \end{array} \right. \text{simetric direct}$

$\left\{ \begin{array}{l} \underline{E}_{i1} = \underline{E}_i \\ \underline{E}_{i2} = a \cdot \underline{E}_i \\ \underline{E}_{i3} = a^2 \cdot \underline{E}_i \end{array} \right. \text{simetric invers}$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{E}_1 = \underline{E}_h + \underline{E}_d + \underline{E}_i \\ \underline{E}_2 = \underline{E}_h + a^2 \cdot \underline{E}_d + a \cdot \underline{E}_i \\ \underline{E}_3 = \underline{E}_h + a \cdot \underline{E}_d + a^2 \cdot \underline{E}_i \end{array} \right.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} = 3\sqrt{3}j$$

sistem compatibil determinat

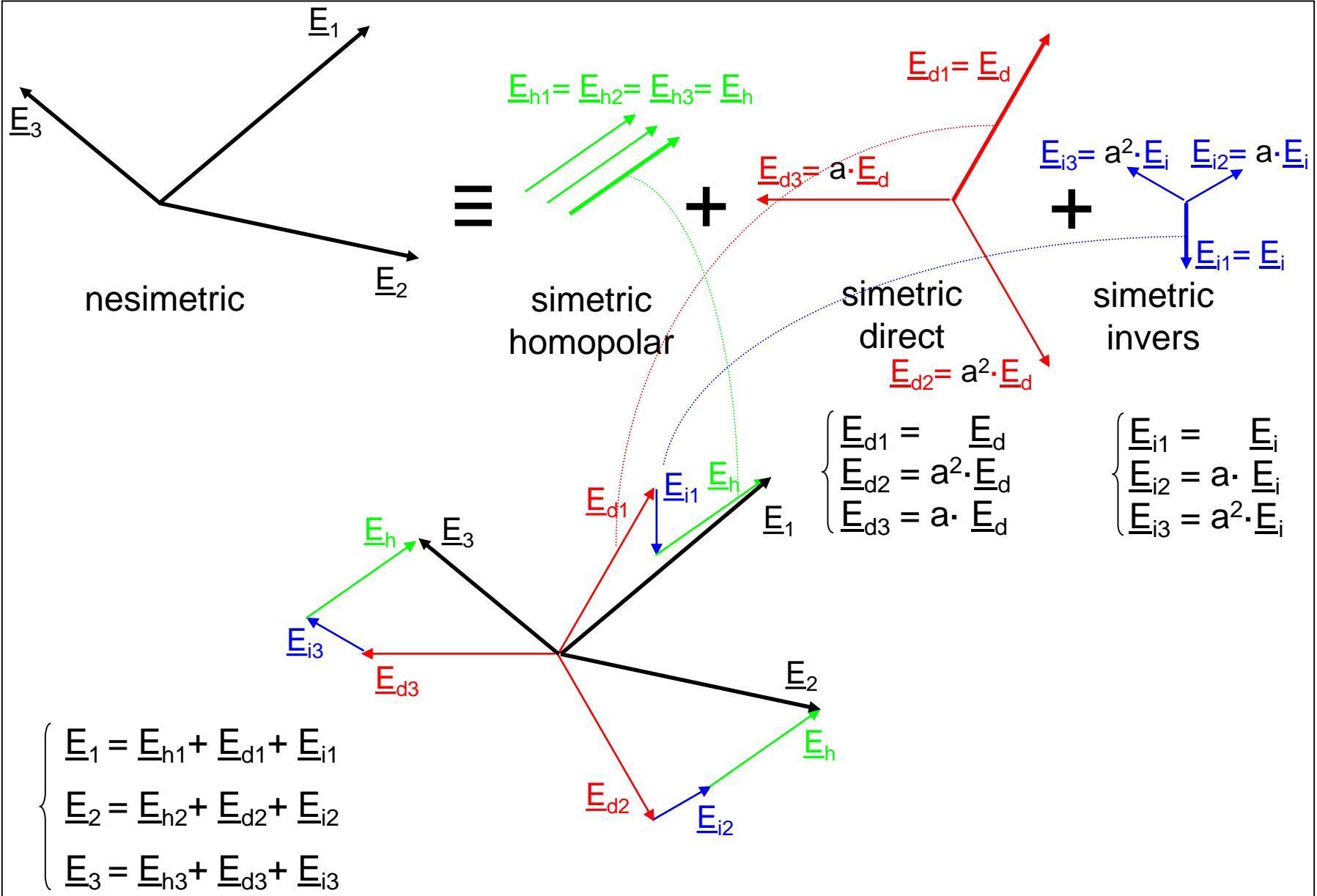


Fig.4.26 Reprezentarea geometrică a descompunerii sistemului trifazat nesimetric în componente trifazate simetrice

## b) calculul componentelor simetrice

- se cunosc marimile sistemului trifazat nesimetric:  $\underline{E}_1$ ,  $\underline{E}_2$  si  $\underline{E}_3$ ;
- componentele sistemelor simetrice  $\underline{E}_h$ ,  $\underline{E}_d$  si  $\underline{E}_i$  se calculeaza cu relatiile:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{E}_h = \frac{1}{3} (\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3) \\ \underline{E}_d = \frac{1}{3} (\underline{E}_1 + a \cdot \underline{E}_2 + a^2 \cdot \underline{E}_3) \\ \underline{E}_i = \frac{1}{3} (\underline{E}_1 + a^2 \cdot \underline{E}_2 + a \cdot \underline{E}_3) \end{array} \right.$$

### Problema 4.11

Sa se calculeze componentele simetrice ale sistemului nesimetric de tensiuni electrice cu valorile instantanee:  $u_1(t) = 10\sqrt{2} \cdot \sin(100\pi t)[V]$ ,  $u_2(t) = u_3(t) = 10\sqrt{2} \cdot \sin(100\pi t + \pi/2)[V]$ .

Rezolvare:

Fazorii acestor tensiuni sint:  $\underline{U}_1 = 10[V]$ ;  $\underline{U}_2 = \underline{U}_3 = 10 \cdot e^{j\pi/2} = j10[V]$ .

Valorile complexe (fazorii) componentelor simetrice ale tensiunilor sint:

$$\underline{U}_h = 1/3 \cdot (10 + j10 + j10) = \color{green}{10/3 \cdot (1+j2)} [V];$$

$$\underline{U}_d = 1/3 \cdot (10 + a \cdot j10 + a^2 \cdot j10) = 10/3 \cdot [1 + (-1/2 + j\sqrt{3}/2) \cdot j + (-1/2 - j\sqrt{3}/2) \cdot j] = \color{red}{10/3 \cdot (1-j)} [V];$$

$$\underline{U}_i = 1/3 \cdot (10 + a^2 \cdot j10 + a \cdot j10) = 10/3 \cdot [1 + (a^2 + a) \cdot j] = \color{blue}{10/3 \cdot (1-j)} [V];$$

### c) calculul puterilor cu ajutorul componentelor simetrice

$$\underline{S} = \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \cdot \underline{I}_3^*,$$

unde:  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{U}_2$ ,  $\underline{U}_3$  sint tensiunile de fază, iar  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$ ,  $\underline{I}_3$  curentii de fază.

Functie de componente simetrice:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_h + \underline{U}_d + \underline{U}_i; \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_h + a^2 \underline{U}_d + a \underline{U}_i; \quad \underline{U}_3 = \underline{U}_h + a \underline{U}_d + a^2 \underline{U}_i,$$

expresia puterii complete devine:

$$\underline{S} = \underline{U}_h(\underline{I}_1^* + \underline{I}_2^* + \underline{I}_3^*) + \underline{U}_d(\underline{I}_1^* + a^2 \cdot \underline{I}_2^* + a \cdot \underline{I}_3^*) + \underline{U}_i(\underline{I}_1^* + a \cdot \underline{I}_2^* + a^2 \cdot \underline{I}_3^*).$$

Deoarece;  $a^* = a^2$  si  $a^{2*} = a$ , rezulta:

$$\underline{S} = 3 \underline{U}_h \cdot \underline{I}_h^* + 3 \underline{U}_d \cdot \underline{I}_d^* + 3 \underline{U}_i \cdot \underline{I}_i^*.$$

#### d) transformator de nul

O retea de joasa tensiune (j.t.) este alimentata printr-un transformator trifazat T1 alimentat la o retea de inalta tensiune (i.t.). Ambele infasurari sunt conectate in stea, cu nul accesibil in secundar (j.t.) si cu nulul izolat in primar (i.t.). Aceasta ultima conditie implica:

$$I_A + I_B + I_C = 0.$$

Conform teoriei transformatorului, curentii din infasurari corespunzatoare ale primarului (i.t.) si secundarului (j.t.) sunt proportionali, diferind numai prin numarul de spire. Ca atare relatia este adevarata si pentru curentii de linie din reteaua de j.t.:

$$I_R + I_S + I_T = 0.$$

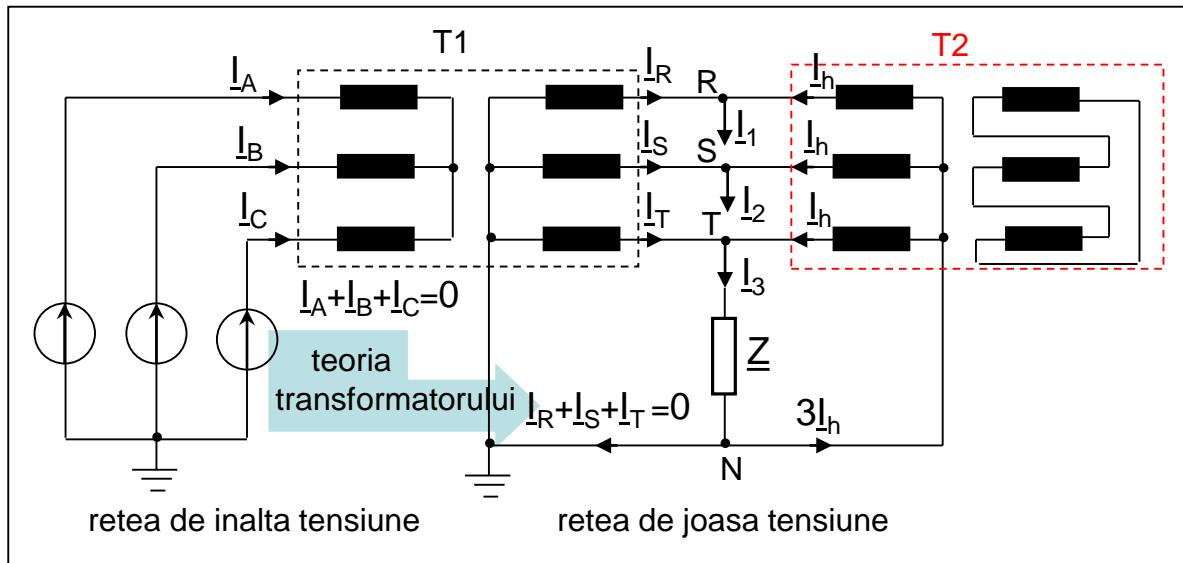
Deoarece suma curentilor de linie este nula, obligatoriu si componenta homopolara va fi tot nula. Astfel, in cazul conectarii unei sarcini dezechilibrate, nu se poate garanta mentinerea tensiunii de faza.

In cazul particular al conectarii unei sarcini monofazate  $\underline{Z}$  (de exemplu intre faza T si nulul N), conditia  $I_R = I_S = 0$  conduce la  $I_T = 0$  si  $\underline{U}_{TN} = 0$ .

Pentru garantarea unei alimentari corecte a sarcinii trebuie conectat, in reteaua de joasa tensiune, un alt doilea transformator, numit transformator de nul, cu primarul in stea cu nul accesibil si secundarul in triunghi. Acest transformator este capabil sa furnizeze componenta homopolara  $I_h$  ceruta. Conexiunea in triunghi a secundarului transformatorului T2 asigura egalitatea curentilor din primar.

In cazul sarcinii monofazate unice  $\underline{Z}$ , curentii ceruti sunt  $I_1 = I_2 = 0$  si  $I_3 = I = \underline{U}_{TN}/\underline{Z}$ .

Descompunerea in componente simetrice arata ca transformatorul T2 se comporta ca un circuit deschis (impedanta infinita) pentru componentelete directa si inversa si ca un scurtcircuit (impedanta nula) pentru componenta homopolara.



**Fig. 4.27 Tratarea nulului într-o rețea de joasă tensiune**