

CUPRINS

Introducere.....	5
1. Sisteme de proiecție.....	6
1.1 Sistemul central de proiecție.....	6
1.2 Sistemul paralel de proiecție.....	7
1.3 Corespondența proiectivă.....	8
2. Punctul.....	9
2.1 Împărțirea spațiului. Diedre. Octanți. Triedre.....	9
2.2 Epura punctului.....	11
2.2.1 Proiecția dublu ortogonală a punctului.....	11
2.2.2 Tripla proiecție ortogonală a punctului.....	12
2.3 Poziții particulare ale punctelor.....	15
2.3.1 Puncte situate în planele bisectoare.....	15
2.3.2 Puncte situate în planele de proiecție și pe axe.....	15
2.4 Puncte simetrice.....	16
2.4.1 Puncte simetrice față de planele de proiecție.....	16
2.4.2 Puncte simetrice față de axe de proiecție.....	17
2.4.3 Puncte simetrice față de planele bisectoare.....	18
2.5 Probleme rezolvate.....	18
2.6 Probleme propuse.....	19
3. Dreapta.....	21
3.1 Epura dreptei.....	21
3.2 Urmele dreptei. Împărțirea dreptei în regiuni. Intersecția cu planele bisectoare.....	22
3.3 Pozițiile particulare ale unei drepte din spațiu.....	24
3.3.1 Dreaptă paralelă cu unul din planele de proiecție.....	24
3.3.2 Dreaptă perpendiculară pe unul din planele de proiecție.....	26
3.3.3 Alte poziții particulare ale unei drepte din spațiu.....	28
3.4 Pozițiile relative a două drepte	30
3.4.1 Drepte paralele.....	30
3.4.2 Drepte concurente.....	31
3.4.3 Drepte disjuncte.....	32
3.5 Probleme rezolvate.....	33
3.6 Probleme propuse.....	36
4. Planul.....	37
4.1 Reprezentarea planului. Relația punct – dreaptă – plan.....	37
4.2 Determinarea urmelor unui plan.....	39
4.3 Drepte particulare ale planului.....	40
4.3.1 Orizontala planului.....	40
4.3.2 Frontala planului.....	41
4.3.3 Dreapta de profil a planului.....	42
4.3.4 Liniile de cea mai mare pantă ale unui plan.....	42
4.4 Pozițiile particulare ale unui plan față de planele de proiecție.....	44
4.4.1 Plane perpendiculare pe unul din planele de proiecție.....	44
4.4.2 Plane paralele cu un plan de proiecție.....	46
4.5 Probleme rezolvate.....	48
4.6 Probleme propuse.....	51

5. Pozițiile relative ale elementelor geometrice.....	53
5.1 Pozițiile relative a două plane.....	53
5.1.1 Plane paralele.....	53
5.1.2 Plane concurente.....	54
5.2 Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan.....	57
5.3 Drepte și plane perpendiculare.....	63
5.4 Probleme rezolvate.....	65
5.5 Probleme propuse.....	72
6. Metodele geometriei descriptive.....	75
6.1 Metoda schimbării planelor de proiecție.....	75
6.1.1 Schimbarea planului vertical de proiecție.....	75
6.1.2 Schimbarea planului orizontal de proiecție.....	77
6.1.3 Dubla schimbare a planelor de proiecție.....	79
6.2 Metoda rotației.....	82
6.2.1 Rotația de nivel.....	82
6.2.2 Rotația de front.....	85
6.2.3 Dubla rotație a dreptelor și planelor.....	87
6.3 Metoda rabaterii.....	90
6.3.1 Rabaterea unui plan oarecare pe planul orizontal de proiecție.....	91
6.3.2 Rabaterea unui plan oarecare pe planul vertical de proiecție.....	93
6.3.3 Rabaterea pe plane paralele cu unul din planele de proiecție.....	93
6.3.4 Rabaterea planelor proiectante.....	95
6.3.5 Ridicarea rabaterii.....	98
6.4 Probleme rezolvate.....	101
6.5 Probleme propuse.....	109
7. Probleme de sinteză (punct, dreaptă, plan, metode).....	115
7.1 Probleme rezolvate.....	115
7.2 Probleme propuse.....	117
8. Poliedre.....	123
8.1 Reprezentarea poliedrelor.....	123
8.1.1 Reprezentarea poliedrelor regulate.....	123
8.1.2 Reprezentarea prisme. Punct pe suprafața prismatică.....	125
8.1.3 Reprezentarea piramidei. Punct pe suprafața piramidală.....	126
8.2 Secțiuni plane în poliedre.....	128
8.3 Intersecția unui poliedru cu o dreaptă.....	130
8.3.1 Intersecția unei prisme cu o dreaptă.....	130
8.3.2 Intersecția unei piramide cu o dreaptă.....	132
8.4 Desfășurarea suprafețelor poliedrale.....	133
8.4.1 Desfășurarea prisme.....	134
8.4.2 Desfășurarea piramidei.....	137
8.5 Intersecția suprafețelor poliedrale.....	139
8.5.1 Intersecția a două piramide.....	140
8.5.2 Intersecția unei piramide cu o prismă.....	143
8.5.3 Intersecția a două prisme.....	145
8.6 Probleme rezolvate.....	149
8.7 Probleme propuse.....	151

9. Suprafețe curbe.....	153
9.1 Reprezentarea suprafețelor curbe.....	153
9.1.1 Reprezentarea cilindrului. Punct pe suprafața cilindrică.....	153
9.1.2 Reprezentarea conului. Punct pe suprafața conică.....	154
9.1.3 Reprezentarea sferei. Punct pe suprafața sferică.....	155
9.2 Plane tangente la suprafețe curbe.....	156
9.2.1 Plan tangent la o suprafață cilindrică.....	156
9.2.2 Plan tangent la o suprafață conică.....	157
9.2.3 Plan tangent la o suprafață sferică.....	158
9.3 Secțiuni plane în suprafețe curbe.....	159
9.3.1 Secțiuni plane în cilindri.....	159
9.3.2 Secțiuni plane în conuri.....	161
9.3.3 Secțiuni plane în sferă.....	165
9.4 Intersecția suprafețelor curbe cu drepte.....	167
9.4.1 Intersecția unui cilindru cu o dreaptă.....	167
9.4.2 Intersecția unui con cu o dreaptă.....	168
9.4.3 Intersecția unei sfere cu o dreaptă.....	168
9.5 Desfășurarea suprafețelor curbe.....	170
9.5.1 Desfășurarea suprafețelor cilindrice.....	170
9.5.2 Desfășurarea suprafețelor conice.....	172
9.5.3 Desfășurarea sferei.....	174
9.6 Intersecția suprafețelor curbe.....	175
9.6.1 Intersecția suprafețelor cilindro - conice.....	176
9.6.2 Intersecția suprafețelor de rotație utilizând suprafețe auxiliare sferice.....	179
9.7 Desfășurarea corpurilor de rotație intersectate.....	183
9.8 Probleme rezolvate.....	187
9.9 Probleme propuse.....	192
 Bibliografie.....	 197

NOTAȚII ȘI SIMBOLURI

$[H], [V], [L]$ – planele de proiecție, orizontal, vertical și lateral

Ox, Oy, Oz – axele de proiecție

O – originea sistemului de reprezentare ortogonală

$DI, DII, DIII, DIV$ – diedre

$T_I, T_{II}, \dots, T_{VIII}$ – triedre

$[B_{1-3}], [B_{2-4}]$ – plane bisectoare

A, B, C, \dots - puncte în spațiu

a, b, c, \dots - proiecțiile punctelor A, B, C, \dots din spațiu, pe planul orizontal de proiecție

a', b', c', \dots - proiecțiile punctelor A, B, C, \dots din spațiu, pe planul vertical de proiecție

a'', b'', c'', \dots - proiecțiile punctelor A, B, C, \dots din spațiu, pe planul lateral de proiecție

$A(a, a', a'')$ – punctul A din spațiu, cu proiecțiile a, a' și a'' pe planele de proiecție

D, Δ, \dots - drepte din spațiu

d, δ, \dots - proiecțiile dreptelor D, Δ, \dots din spațiu, pe planul orizontal de proiecție

d', δ', \dots - proiecțiile dreptelor D, Δ, \dots din spațiu, pe planul vertical de proiecție

d'', δ'', \dots - proiecțiile dreptelor D, Δ, \dots din spațiu, pe planul lateral de proiecție

$D(d, d', d'')$ – dreapta D din spațiu, cu proiecțiile d, d' și d'' pe planele de proiecție

$H(h, h', h'')$ – urma orizontală a dreptei

$V(v, v', v'')$ – urma verticală a dreptei

$L(l, l', l'')$ – urma laterală a dreptei

$[P], [Q], [R], \dots$ - plane în spațiu

P, Q, R, \dots - urmele orizontale ale planelor $[P], [Q], [R], \dots$

P', Q', R', \dots - urmele verticale ale planelor $[P], [Q], [R], \dots$

P'', Q'', R'', \dots - urmele laterale ale planelor $[P], [Q], [R], \dots$

a_0, b_0, \dots - puncte rabătute pe unul din planele de proiecție sau pe plane paralele cu acestea

d_0, δ_0, \dots - drepte rabătute pe unul din planele de proiecție sau pe plane paralele cu acestea

P_0, Q_0, \dots - urmele planelor $[P], [Q], \dots$ rabătute pe planele de proiecție

\parallel - paralel \in - apartenență

\perp - perpendicular \notin - neapartenență

\cup - reuniune \equiv - identic

\cap - intersecție \angle - unghi

= INTRODUCERE =

Geometria descriptivă este știința reprezentării plane a spațiului. Corpurile din spațiu pot fi reprezentate prin metoda dublei proiecții ortogonale, metodă care permite determinarea dimensiunilor corpurilor și prin axonometrie, metodă care oferă imaginea spațială a lor.

Utilizarea proiecției pe două plane este dovedită încă din secolul al XVII-lea, dar abia la sfârșitul secolului al XVIII-lea, în urma acumulării diferitelor concepții în această direcție, savantul francez *Gaspard Monge* (1798) a creat o știință pe care el a numit-o *Geometrie descriptivă*. În acest sens, pentru studiul corespondenței biunivoce dintre punctele spațiului cu trei dimensiuni și punctele din plan, el s-a folosit de proiecții. Monge, fiind întemeietorul acestei științe, a contribuit la răspândirea ei în Franța cât și în țările care aveau legături cu ea. În țara noastră elemente de Geometrie descriptivă au început să fie predate la începutul secolului al XIX-lea în diferite școli unde se făceau cursuri de ingineri.

Obiectul și scopul Geometriei descriptive determină un loc bine definit pentru aceasta în rândul celorlalte discipline ingineresti.

Geometria descriptivă constituie baza teoretică a desenului tehnic, contribuind la deprinderea de a gândi științific și dezvoltând posibilitatea de a vedea în spațiu, de a distinge aranjarea armonioasă a diferitelor forme și estetica acestora.

Studiul Geometriei descriptive formează la studenți un anumit raționament al relațiilor spațiale în vederea transpunerii în diverse sisteme de reprezentare, pe care le vor folosi ca viitori specialiști ai tehnicii moderne.

Geometria descriptivă este prin excelență o disciplină care nu poate fi învățată mecanic, având un raționament geometric. Trecerea de la obiectele din spațiu la reprezentările plane și invers, formează vederea în spațiu și dezvoltă imaginația, însușire absolut necesară inginerului, în rezolvarea diferitelor probleme tehnice specifice activității lui.

Lucrarea prezintă sistemele de reprezentare plană a obiectelor din spațiu, pornind de la noțiuni referitoare la punct, dreaptă, plan, într-un mod simplu, precis și perceptibil de către studenți. Cunoașterea modului de realizare a proiecțiilor oferă posibilitatea de a concepe și de a exprima ideile tehnice.

Materialul prezentat în această lucrare este structurat în 9 capitole. În fiecare capitol se detaliază pe larg noțiunile teoretice, acestea având aplicații în problemele rezolvate, probleme care facilitează înțelegerea teoriei. În sprijinul activității studenților, au fost selectate și prezentate spre rezolvare probleme specifice fiecărui capitol. Astfel, pe parcursul parcurgerii materiei poate fi făcută o verificare a modului în care cunoștințele dobândite au fost și înțelese.

Din cele arătate rezultă că, Geometria descriptivă este o disciplină importantă în formarea teoretică și practică a studenților, îndrumându-i în reprezentarea corectă și apoi în executarea corpurilor și a combinațiilor rezultate din aceste corpuri geometrice, creând astfel mașini, instalații și utilaje industriale.

Simplitatea lucrării și diversitatea conținutului o recomandă nu numai pentru uzul studenților din facultățile tehnice ci și pentru specialiștii din acest domeniu.

1.2 Sistemul paralel de proiecție

Sistemul paralel de proiecție este definit de *planul de proiecție* $[P]$ și de *direcția de proiecție* D . În acest caz, centrul de proiecție S este considerat situat la infinit, iar proiectantele sunt paralele cu direcția D .

Dacă proiectantele formează cu planul de proiecție un unghi $\alpha \neq 90^\circ$, proiecția se numește *paralel oblică*. În figura 1.2 proiecțiile a, b, c se găsesc la intersecția proiectantelor, duse prin punctele A, B, C , paralele cu direcția D , cu planul de proiecție $[P]$.

În cazul în care proiectantele sunt perpendiculare pe planul de proiecție, proiecția paralelă este *ortogonală* (fig. 1.3).

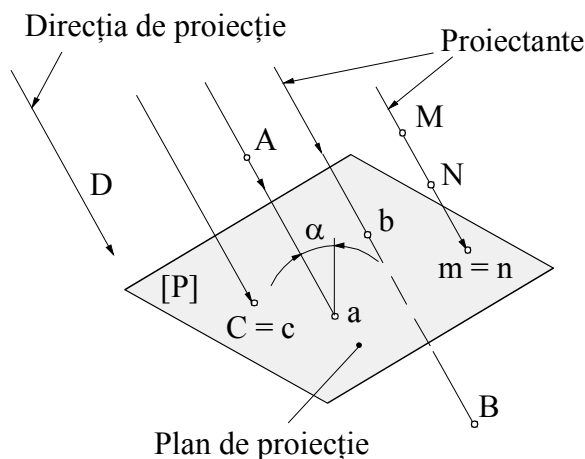


Fig.1.2 Proiecția paralelă oblică

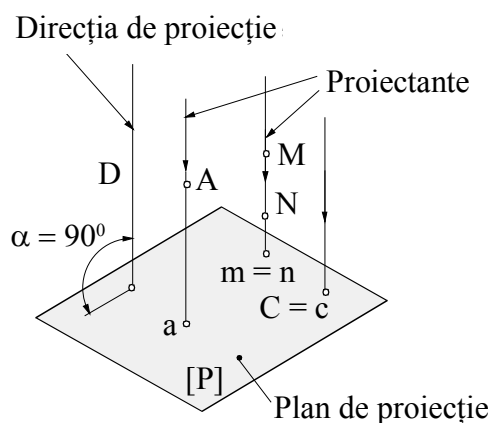


Fig.1.3 Proiecția paralelă ortogonală

Având în vedere că atât în cazul proiecției paralele oblice, cât și a celei ortogonale, proiectantele generează o suprafață cilindrică, sistemul paralel de proiecție este întâlnit și sub denumirea de *proiecție cilindrică*.

În figura 1.4 sunt reprezentate proiecțiile paralele ortogonale a două drepte concurente Δ_1 și Δ_2 (a), paralele Δ_3 și Δ_4 (b) și a unei plăci triunghiulare opace ABC (c). Trasarea proiecției unei drepte se face considerând două puncte pe dreaptă și determinând proiecțiile acestora, sau intersectând planul definit de dreaptă și o proiectantă dusă printr-un punct al drepte, cu planul de proiecție.

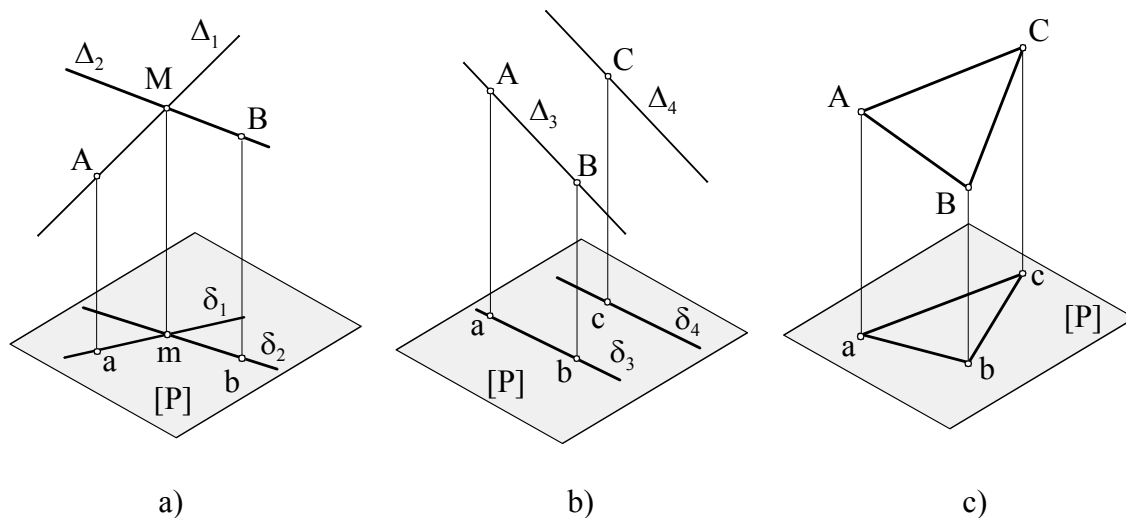


Fig.1.4 Proiecția paralelă ortogonală a două drepte (concurente , paralele) și a unei plăci

Și în cazul sistemului paralel de proiecție toate punctele care sunt situate pe o proiectantă se regăsesc proiectate într-un singur punct pe planul de proiecție, deci corespondența dintre punctele spațiului și cele ale planului de proiecție este *univocă*.

1.3 Corespondența proiectivă

Prin sistemele de proiecție prezentate mai sus s-a realizat o *corespondență proiectivă* între punctele din spațiul tridimensional și punctele din spațiul bidimensional. Dacă unui punct îi corespunde un singur punct, corespondența se numește *univocă*, iar dacă transformarea se poate realiza și în sens invers atunci corespondența dintre cele două puncte este *biunivocă*.

În reprezentările tehnice sistemul de proiecție preferat este sistemul paralel cu proiectantele perpendiculare pe planul de proiecție.

Proiecția unei drepte pe un plan de proiecție nu determină proiecția dreptei în spațiu. Fie planul de proiecție $[H]$ și pe el segmentul ab , proiecția unui segment de dreaptă din spațiu (fig.1.5). Pentru determinarea acestui segment se ridică perpendiculare din punctele segmentului de proiecție din planul $[H]$. Se constată că, orice segment din planul $[Q] \perp [H]$ AB, A_1B_1 , etc., va avea ca proiecție pe planul $[H]$ segmentul ab .

Rezultă că poziția segmentului de dreaptă din spațiu nu poate fi determinată prin corespondența univocă.

Pentru îndepărtarea acestei nedeterminări este necesară realizarea unei corespondențe biunivoce care să conducă la determinarea punctelor din spațiul tridimensional în cazul în care se cunosc proiecțiile acestor puncte.

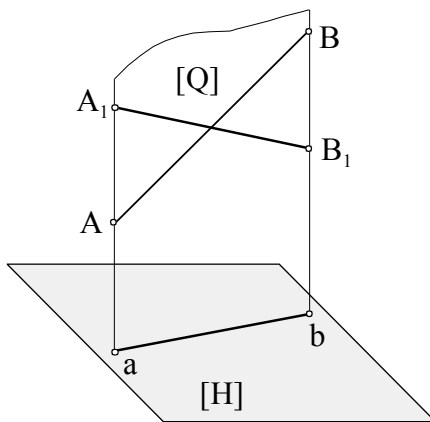


Fig.1.5 Corespondența univocă

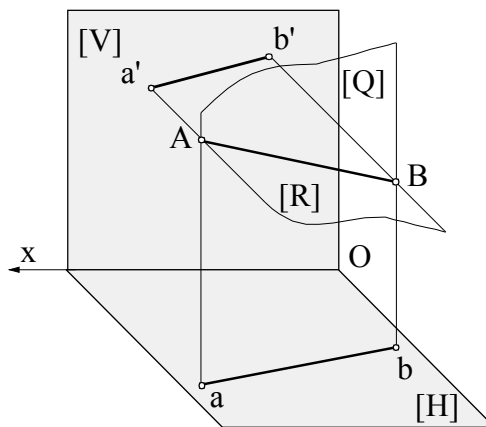


Fig.1.6 Corespondența biunivocă

Pentru aceasta se folosește *sistemul de proiecție dublu ortogonal Monge*, obținut prin introducerea unui al doilea plan de proiecție perpendicular pe primul. Cele două plane sunt unul orizontal $[H]$, iar celălalt vertical $[V]$. Astfel, în figura 1.6 se consideră ab , proiecția pe planul orizontal de proiecție și $a'b'$, proiecția pe planul vertical de proiecție. Dacă la planele respective se duc proiectantele perpendiculare din punctele proiecțiilor, acestea determină planele $[Q] \perp [H]$ și $[R] \perp [V]$. Cele două plane se intersectează, linia de intersecție reprezentând tocmai dreapta AB din spațiul tridimensional.

2. PUNCTUL

2.1 Împărțirea spațiului. Diedre. Octanți. Triedre

Sistemul de proiecție folosit în Geometria descriptivă este proiecția paralelă, cu proiectantele perpendiculare pe două plane de proiecție.

Se consideră două plane de proiecție, reciproc perpendiculare, *planul orizontal* $[H]$ și *planul vertical* $[V]$. Dreapta de intersecție dintre ele, poartă în Geometria descriptivă, numele de *linie de pământ* și se notează cu Ox .

Linia de pământ împarte fiecare plan de proiecție în două semiplane:

- H_a - semiplanul orizontal anterior – în fața planului vertical ;
- H_p - semiplanul orizontal posterior – în spatele planului vertical ;

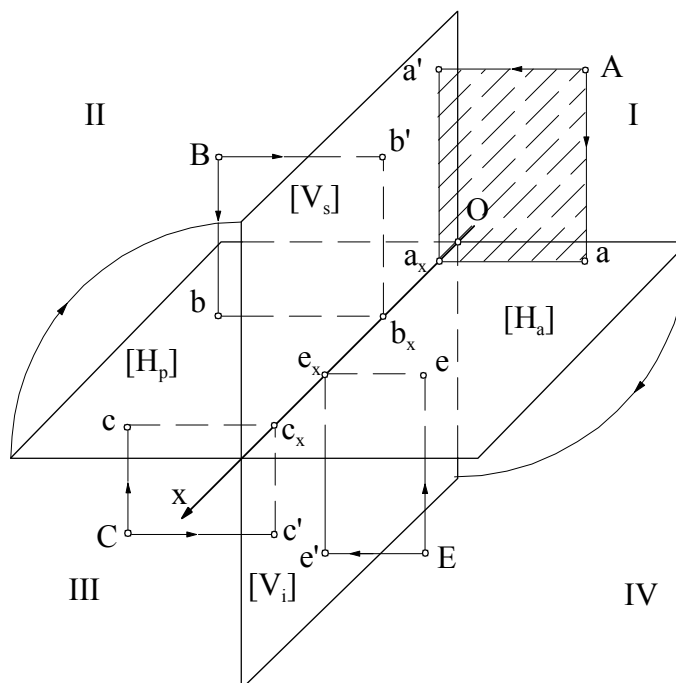


Fig.2.1 Împărțirea spațiului în diedre

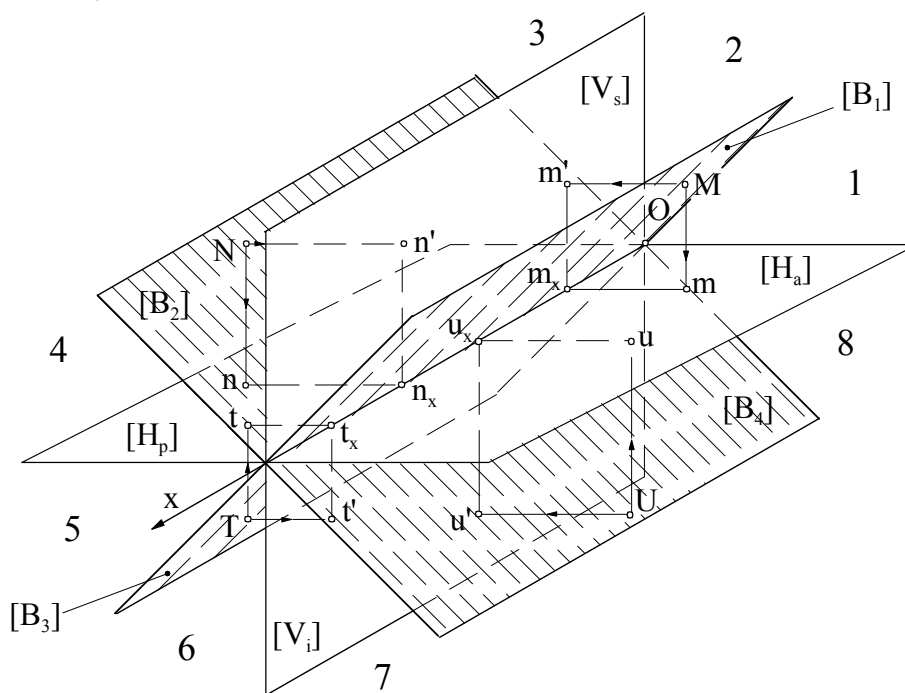


Fig.2.2 Împărțirea spațiului în octanți. Plane bisectoare

- V_s - semiplanul vertical superior – deasupra planului orizontal ;
- V_i - semiplanul vertical inferior – sub planul orizontal.

Spațiul din jurul planelor de proiecție este împărțit de către acestea în patru regiuni, numite *diedre* și numerotate cu cifre romane de la I la IV, ca în figura 2.1. Acestea sunt mărginite de semiplanele de proiecție amintite mai sus.

Unghiurile diedre astfel formate pot fi împărțite în unghiuri egale cu ajutorul *planelor bisectoare* (fig.2.2). Acestea trec prin linia de pământ Ox și sunt perpendiculare între ele. Notarea planelor bisectoare se face după diedrele pe care le străbat : $[B_{1-3}]$, $[B_{2-4}]$ și sunt împărțite la rândul lor de axa Ox în semiplanele B_1 , B_2 , B_3 și B_4 .

Cele opt regiuni astfel formate și delimitate de câte un semiplan de proiecție și un semiplan bisector poartă numele de *octanți* și se notează cu cifre arabe de la 1 la 8.

S-a arătat că un punct sau o dreaptă din spațiu este determinată dacă se cunosc două proiecții ale lor. Există cazuri când dubla proiecție ortogonală nu asigură lămurirea precisă a formei și poziției obiectului.

De aici a rezultat necesitatea introducerii celui de al treilea plan de proiecție și implicit, celei de a treia proiecții. Acesta este perpendicular pe planul $[H]$ și $[V]$, este numit *plan lateral* și se notează cu $[L]$.

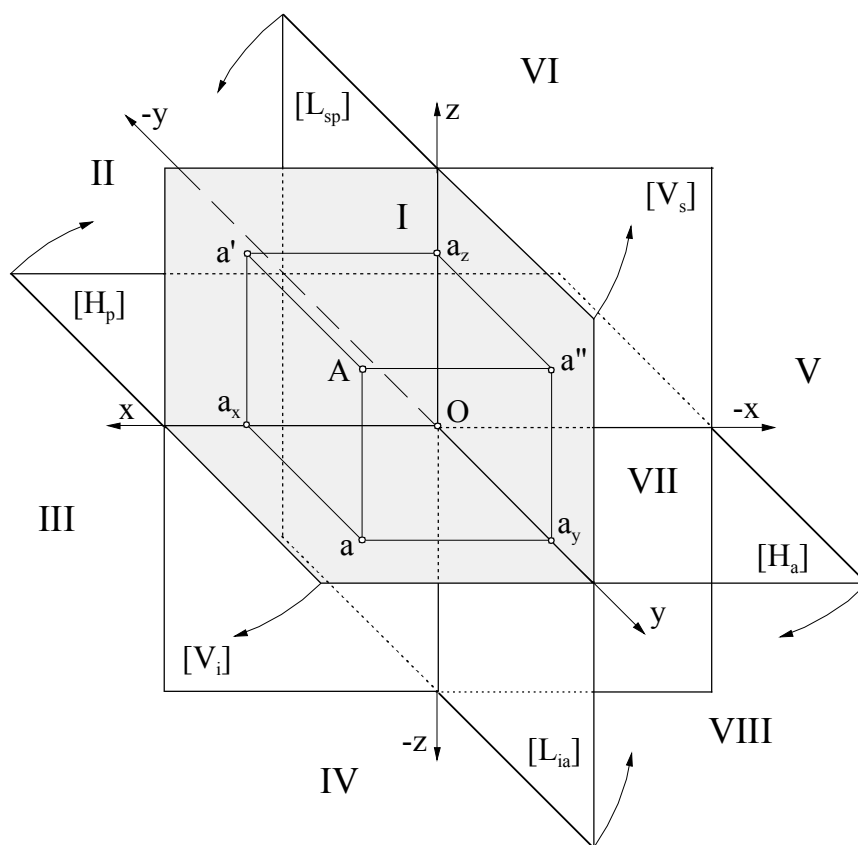


Fig.2.3 Împărțirea spațiului în triedre

Planul lateral $[L]$ împreună cu planul $[H]$ și $[V]$ împart spațiul în opt triedre dreptunghice. Numerotarea acestora se face ca la diedre, pentru triedrele din partea stângă a planului lateral de proiecție, apoi pentru restul de patru triedre, se numerotează în continuare, în același sens, având în vedere că triedrul V are în stânga triedrul I (fig.2.3).

Intersecția planului lateral cu cele două plane de proiecție, $[H]$ și $[V]$, generează două axe de proiecție : $[H] \cap [L] = Oy$, $[V] \cap [L] = Oz$ și un punct : $[H] \cap [V] \cap [L] = O$,

numit *origine*. Punctul O este numit origine deoarece de la acesta încep măsurătorile pe axe, împărțindu-le în două și dând semnul lor astfel :

- Ox : - semiaxa pozitivă x – în stânga lui O ;
 - semiaxa negativă x – în dreapta lui O ;
- Oy : - semiaxa pozitivă y – în fața lui O ;
 - semiaxa negativă y – în spatele lui O ;
- Oz : - semiaxa pozitivă z – în partea de sus a punctului O ;
 - semiaxa negativă z – în partea de jos a punctului O .

În funcție de zona planului lateral la care se face referire, față de planul orizontal și vertical, acesta poate fi numit planul lateral superior (anterior sau posterior) (L_{sa} , L_{sp}) și planul lateral inferior (anterior sau posterior) (L_{ip} , L_{ia}).

2.2 Epura punctului

2.2.1 Proiecția dublu ortogonală a punctului

Revenind la figura 2.1, aici sunt reprezentate patru puncte în cele patru diedre și respectiv proiecțiile lor pe planele de proiecție $[H]$ și $[V]$.

Planele de proiecție fiind ortogonale, proiectantele sunt de asemenea ortogonale. Acest sistem de proiecție se numește *dublu ortogonal* sau *sistem Monge*.

Fie punctul A situat în diedrul unu. Proiectanta verticală din A înțepă planul orizontal în a , punct numit *proiecția orizontală a punctului A* , iar proiectanta orizontală din A înțepă planul vertical în a' , punct numit *proiecția verticală a punctului A* . Convențional se notează punctele din spațiu cu litere majuscule, A , B , C , E , iar proiecțiile lor cu litere mici, și anume : proiecțiile orizontale cu a , b , c , e și cele verticale cu a' , b' , c' , e' .

Planul $[aAa']$ este perpendicular pe linia de pământ, intersecția cu aceasta notându-se cu a_x (proiecția ortogonală a punctului A pe axa Ox). Același plan intersectează planul de proiecție orizontal după segmentul $aa_x \perp Ox$, $aa_x = Aa'$, iar planul vertical de proiecție după segmentul $a'a_x \perp Ox$, $a'a_x = Aa$.

Poziția punctului A în spațiu este definită de *coordonatele descriptive ale punctului*. Acestea sunt :

- *abscisa* - segmentul Oa_x , de pe axa Ox ;
- *depărtarea* – distanța de la punctul A la planul vertical, Aa' ;
- *cota* - distanța de la punctul A la planul orizontal, Aa .

Din punct de vedere al semnelor, toate punctele situate deasupra planului orizontal (diedrul I și II) au cotele pozitive și toate punctele situate în fața planului vertical (diedrul I și IV) au depărtările pozitive.

Dacă se cunosc proiecțiile a și a' ale punctului A se poate afla poziția spațială a punctului, la intersecția proiectantelor perpendiculare pe planele $[H]$ și $[V]$ duse din punctele a și a' , determinându-se o poziție unică pentru punctul A în spațiu. Rezultă că, prin dubla proiecție ortogonală se realizează *corespondența biunivocă* a punctelor din spațiu cu cele din plan.

Reprezentarea axonometrică a diedrelor (fig.2.1) este destul de aglomerată de linii, având în vedere că la reprezentarea unor elemente geometrice (drepte, plane, corpuri), care trebuie proiectate, acestea s-ar înmulți foarte mult. Astfel, câmpul desenului ar fi foarte aglomerat și deci, va îngreuna perceperea celor reprezentate. Pentru evitarea acestui neajuns, se rotește planul $[H]$ după săgețile arătate în figura 2.1, în sensul acelor de ceasornic, în jurul axei Ox , până se suprapune peste planul $[V]$. În această situație, semiplanul orizontal anterior $[H_a]$ se suprapune peste semiplanul vertical inferior $[V_i]$, iar semiplanul orizontal posterior $[H_p]$ se suprapune peste semiplanul vertical superior $[V_s]$.

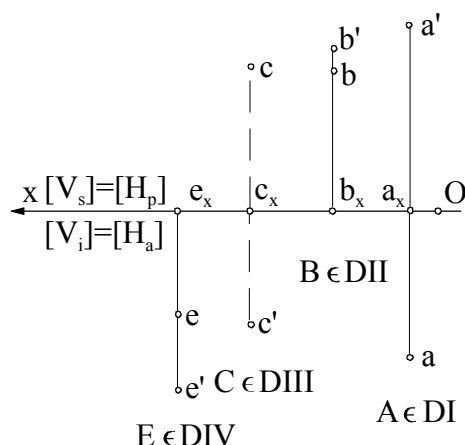


Fig.2.4 Epura punctului în cele patru diedre

deasupra axei Ox , iar cele negative (punctele din diedrele III și IV) sub ea.

Rezultă că, poziția punctului în spațiu în raport cu planele de proiecție se poate determina după semnul coordonatelor sale descriptive (tabelul 2.1).

Tabelul 2.1

coordonată \ diedru	I	II	III	IV
depărtare	+	-	-	+
cotă	+	+	-	-

În figura 2.4 sunt reprezentate și epurele punctelor din diedrele II , III , și IV din figura 2.1, respectând următoarea metodologie :

- se trasează linia de pământ Ox ;
- se stabilește poziția punctului b_x (c_x și e_x) astfel încât $Ob_x \equiv$ abscisa punctului B ;
- se trasează linia de ordine prin b_x (c_x și e_x) perpendiculară pe Ox ;
- se măsoară depărtările și cotele pe linia de ordine ținând seama de semnul acestora, rezultând proiecțiile orizontale și verticale ale punctelor pe planele de proiecție.

Observație: În epură, prin schimbarea notațiilor (a depărtării sau a cotei) se schimbă nu numai poziția punctului, ci chiar și diedrul în care este situat punctul în spațiu.

2.2.2 Tripla proiecție ortogonală a punctului

Considerând și planul lateral de proiecție (fig.2.3), un punct A din spațiu va avea pe lângă proiecțiile a și a' pe planele $[H]$ și $[V]$, o a treia proiecție pe planul lateral notată a'' și numită *proiecție laterală*. Aceasta se determină prin intersecția proiectantei dusă din A pe planul lateral $[L]$ cu acest plan.

În acest caz, poate fi definită *abscisa punctului* ca distanța de la acesta la planul lateral, $Aa'' = a_x O$.

Planul $[a'Aa'']$ este perpendicular pe axa Oz și o intersectează în a_z (proiecția ortogonală a punctului A pe axa Oz), iar planul $[aAa'']$ este perpendicular pe axa Oy și o intersectează în a_y (proiecția ortogonală a punctului A pe axa Oy).

Ansamblul liniilor de construcție pentru cele trei proiecții a , a' și a'' și axele triedrului determină paralelipipedul coordonatelor care are muchiile :

- abscisa : $Aa'' = aa_y = Oa_x = a'_a_z$;

Desenul astfel obținut se numește *epură* și având în vedere că planele de proiecție sunt considerate infinite, se convine ca în epură cele două plane să fie reprezentate numai prin linia de pământ Ox .

În figura 2.4 este reprezentată epura punctului $A(a, a')$ din diedrul I . Segmentele a'_a_x și aa_x , care reprezintă cota, respectiv depărtarea punctului M , devin dreapta $a'_a_x a \perp Ox$, numită *linie de ordine*.

Se observă că după rotire, depărtările pozitive (punctele din diedrele I și IV) se măsoară sub linia de pământ, iar cele negative (punctele din diedrele II și III) deasupra ei. De asemenea, cotele pozitive (punctele din diedrele I și II) se măsoară

- depărtarea : $Aa' = a''a_z = Oa_y = aa_x$
- cota : $Aa = a'a_x = Oa_z = a''a_y$.

Trecerea de la imaginea spațială din figura 2.3 la epura din figura 2.5 se face folosind același procedeu ca la epura a două plane de proiecție. Se rotesc planele $[H]$ și $[L]$ în sensurile indicate de săgeți până se suprapun : $[H] \equiv [V] \equiv [L]$. Astfel, axa Oy se suprapune, o dată peste Oz , păstrându-și notația, iar a doua oară peste Ox , fiind notată cu Oy_1 . De asemenea, se observă că punctul a_y de pe axa Oy va avea în epură două puncte corespondente, a_y pe axa Oy și a_{y1} pe axa Oy_1 , obținut prin rotirea planului $[L]$. Arcul de cerc $a_y a_{y1}$, de rază egală cu depărtarea și cu centrul în O , este proiecția arcului de cerc după care se rotește proiecția a'' , odată cu planul $[L]$.

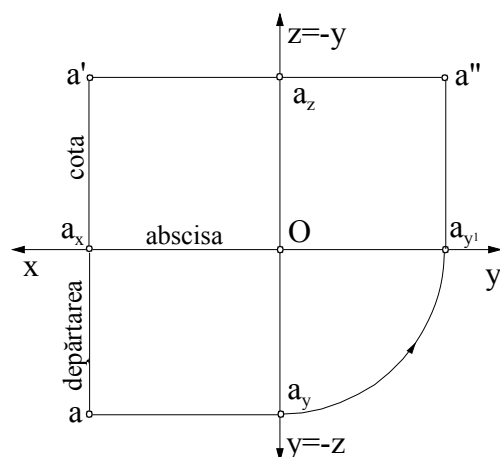


Fig.2.5 Epura punctului A

Poziționarea punctelor într-unul din cele opt triedre este dată de semnele *coordonatelor descriptive* prezentate în tabelul 2.2.

Tabelul 2.2

coordonată \ triedru	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
abscisă	+	+	+	+	-	-	-	-
depărtare	+	-	-	+	+	-	-	+
cotă	+	+	-	-	+	+	-	-

În tabelul 2.3 sunt reprezentate punctele A, B, C și E situate în triedrele I, II, III și IV. Epurele punctelor (b) din tabel sunt însoțite de reprezentările spațiale ale acestora (a) care, corelate cu sensurile în care se rotesc planele $[H]$ și $[L]$, dau nu numai imaginea vizuală ci și justificarea geometrică a construcțiilor din epură.

Epura punctelor se realizează respectând următoarea metodologie prezentată pentru punctul A (tab.2.3, figurile b) :

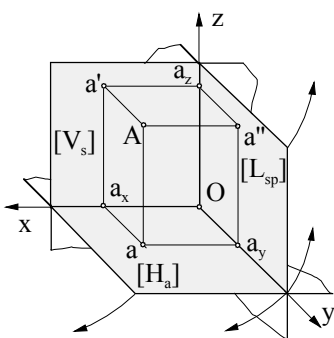
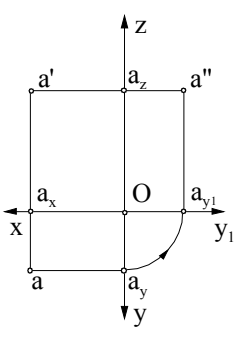
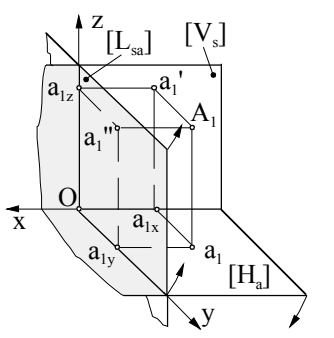
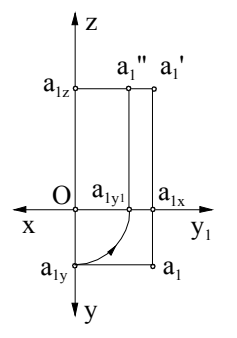
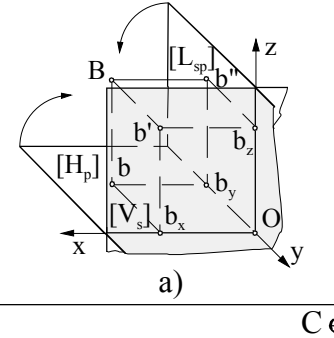
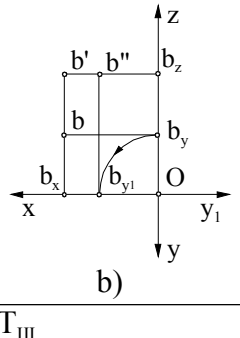
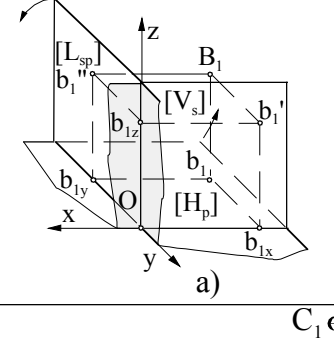
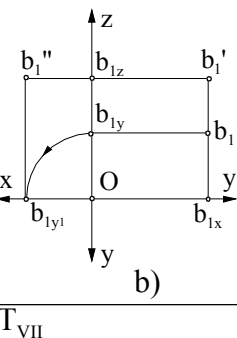
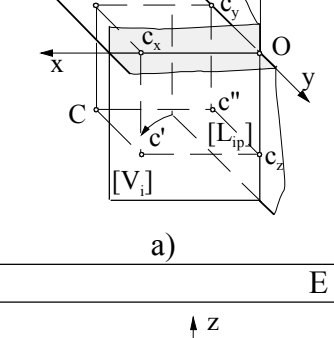
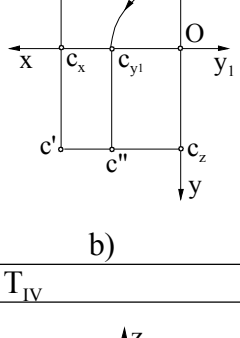
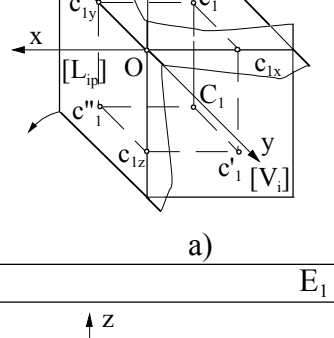
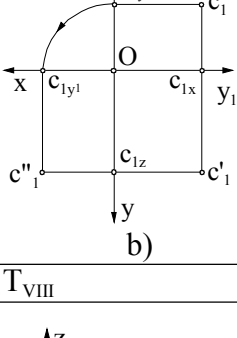
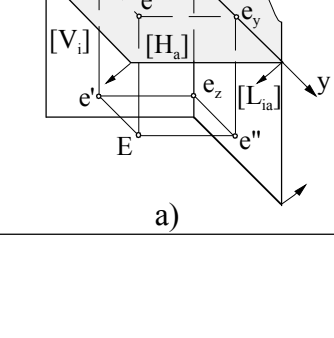
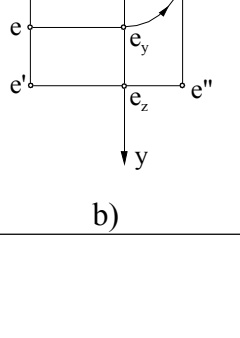
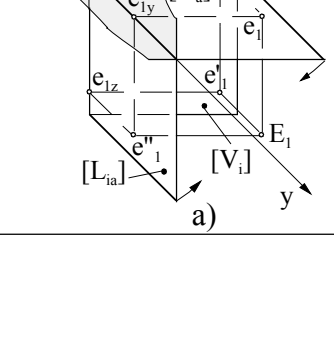
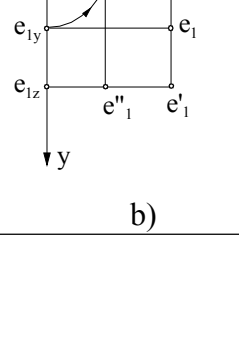
- se trasează linia de pământ Ox și celelalte două axe ale epurei, Oy și Oz ;
- pe axa Ox se măsoară, din O , abscisa punctului A. Se obține punctul ajutător a_x și prin acesta se duce linia de ordine, perpendiculară pe Ox ;
- pe axa Oy se măsoară, din O , depărtarea punctului A. Se obține punctul ajutător a_y și prin acesta se duce o paralelă la Ox care intersectează linia de ordine în a – proiecția orizontală a punctului A ;
- pe axa Oz se măsoară, din O , cota punctului A. Se obține punctul ajutător a_z și prin acesta se duce o paralelă la Ox care intersectează linia de ordine în a' – proiecția verticală a punctului A ;
- cu vârful compasului în O și de rază Oa_y se descrie un arc de cerc în *sens trigonometric* și la intersecția cu Oy_1 se obține punctul a_{y1} . Prin acesta se duce o perpendiculară pe Oy_1 care intersectează paralela prin a_z , la Ox , în a'' – proiecția laterală a punctului A.

Pentru determinarea proiecției laterale a'' se poate proceda și la măsurarea depărtării punctului pe paralela la Ox prin a_z , pornind din a_z (spre dreapta dacă este pozitivă și spre stânga dacă este negativă).

Epurele punctelor situate în triedrele V, VI, VII și VIII se obțin în mod similar, ținând seama de faptul că abscisele punctelor sunt negative și se măsoară pe axa Ox ,

pornind din O spre dreapta. În tabelul 2.3, figurile b , sunt reprezentate aceste epure, astfel : $A_I \in T_V$, $B_I \in T_{VI}$, $C_I \in T_{VII}$, $E_I \in T_{VIII}$.

Tabelul 2.3 Reprezentarea grafică a punctelor situate în cele opt triedre

$A \in T_I$		$A_I \in T_V$	
			
$B \in T_{II}$		$B_I \in T_{VI}$	
			
$C \in T_{III}$		$C_I \in T_{VII}$	
			
$E \in T_{IV}$		$E_I \in T_{VIII}$	
			

Observații :

- proiecțiile orizontală și verticală ale unui punct se găsesc totdeauna pe linia de ordine perpendiculară pe axa Ox , de o parte și de alta a ei sau de aceeași parte, în funcție de diedrul în care este situat punctul ;

- proiecțiile laterală și verticală ale unui punct se află totdeauna pe o linie ajutătoare, paralelă cu axa Ox , de o parte și de alta a axei Oz sau de aceeași parte a ei în funcție de diedrul în care este situat punctul. Această aliniere a două câte două din proiecțiile unui punct A (a cu a' și a' cu a'') constituie o verificare a corectitudinii efectuării construcțiilor geometrice din epură.

- un punct A din spațiu este determinat prin cele două proiecții a și a' . Astfel, el se va nota $A(a, a')$ și se va citi punctul A de proiecții a și a' ;

- în probleme, pentru notarea coordonatelor numerice ale punctului, se va folosi modul de notare al punctelor de la geometria analitică, adică $A(x, y, z)$, unde $x \equiv$ abscisa, $y \equiv$ depărtarea, $z \equiv$ cota.

2.3 Poziții particulare ale punctelor

2.3.1 Puncte situate în planele bisectoare

Planele bisectoare sunt locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de planele de proiecție $[H]$ și $[V]$. Punctele situate în planele bisectoare au cota și depărtarea egale în modul.

În figura 2.2 punctele M și T , situate în planul bisector $[B_{1-3}]$, au cota și depărtarea egale și de același semn, iar punctele N și U , situate în planul bisector $[B_{2-4}]$, au cota și depărtarea egale și de semne contrare. Epura acestor puncte este reprezentată în figura 2.6.

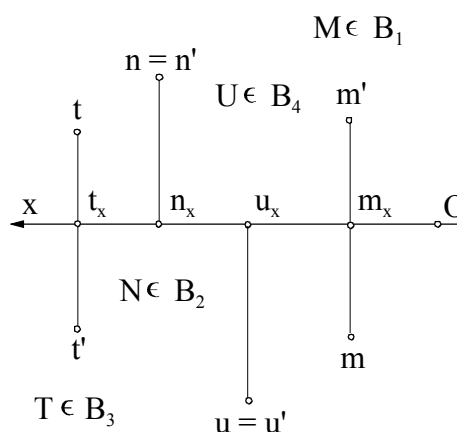


Fig.2.6 Epura punctelor situate în planele bisectoare

2.3.2 Puncte situate în planele de proiecție și pe axe

Pentru a se vedea ce se întâmplă cu coordonatele punctului atunci când este situat într-unul din planele de proiecție, se consideră că punctul M din figura 2.3 este mobil și se apropie pe rând de acestea. Se constată că i se anulează una din coordonate. Astfel, punctul M va avea proiecția pe planul pe care se găsește, confundată cu punctul însuși, iar celelalte două proiecții, situate pe două din axele de proiecție. În figura 2.7 sunt reprezentate în spațiu (a) și transpuse în epură (b) puncte situate în planele de proiecție, după cum urmează:

- punctul $A \in [H]$ are *abscisa* $\neq 0$, *depărtarea* $\neq 0$, *cota* $= 0$ și $A \equiv a$, $a' \in Ox$, $a'' \in Oy$;
- punctul $B \in [V]$ are *abscisa* $\neq 0$, *depărtarea* $= 0$, *cota* $\neq 0$ și $B \equiv b'$, $b \in Ox$, $b'' \in Oz$;
- punctul $C \in [L]$ are *abscisa* $= 0$, *depărtarea* $\neq 0$, *cota* $\neq 0$ și $C \equiv c''$, $c \in Oy$, $c' \in Oz$.

Punctele situate pe axele de proiecție sunt situate practic pe două plane de proiecție concomitent. Acestea au două din proiecții confundate cu punctul însuși, iar a treia proiecție situată în origine.

În figura 2.7 sunt reprezentate trei puncte pe cele trei axe de proiecție, astfel :

- punctul $E \in Ox$, $E \equiv e \equiv e'$, $e'' \equiv O$;
- punctul $F \in Oy$, $F \equiv f \equiv f''$, $f' \equiv O$;

- punctul $G \in Oz$, $G \equiv g \equiv g''$, $g \equiv O$.

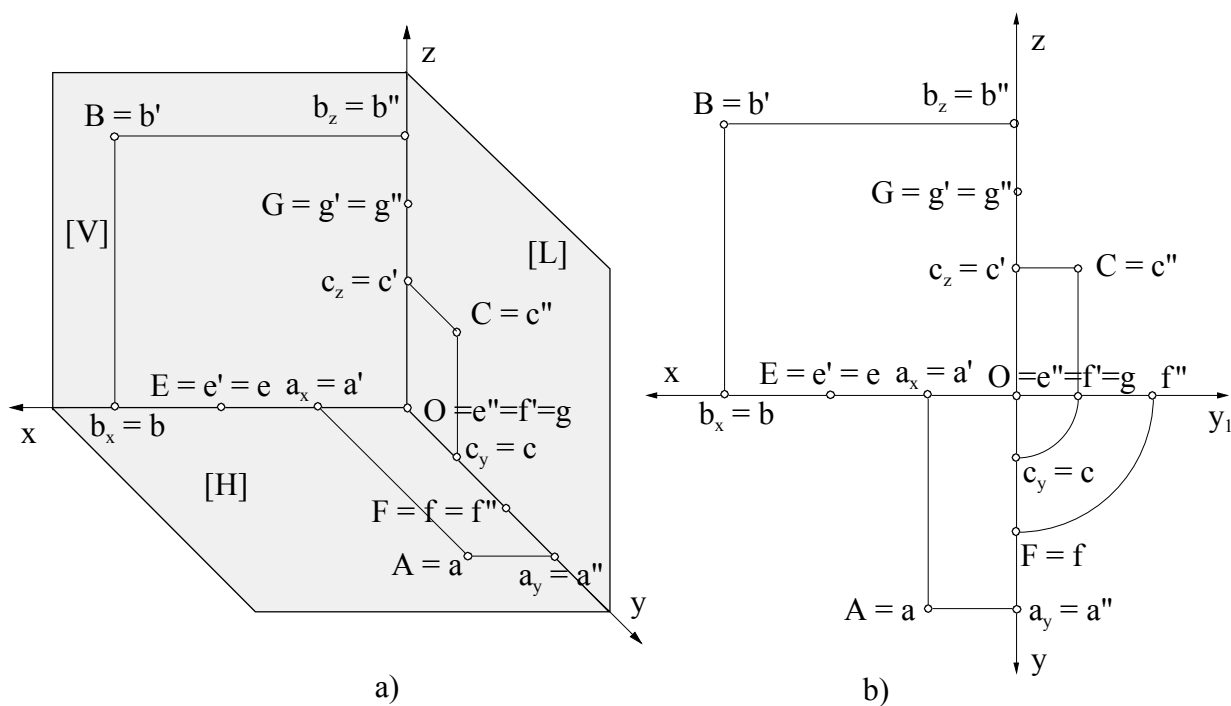


Fig.2.7 Puncte situate în planele de proiecție și pe axe

2.4 Puncte simetrice

2.4.1 Puncte simetrice față de planele de proiecție

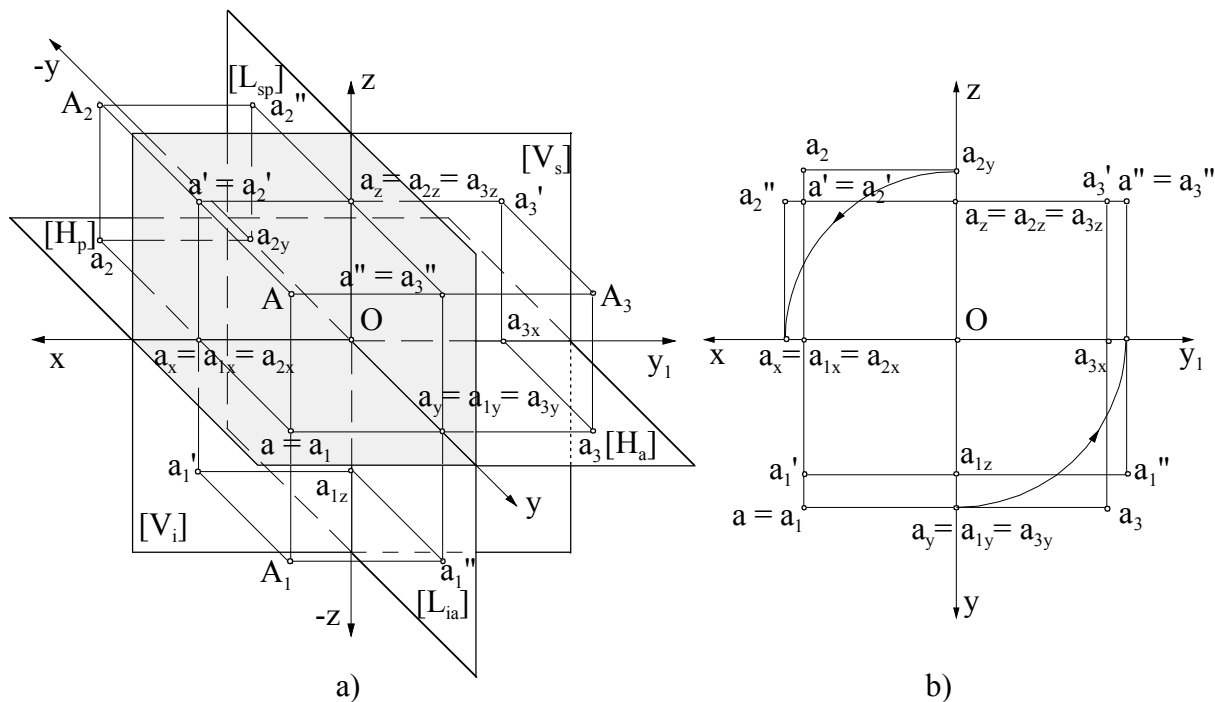


Fig.2.8 Puncte simetrice față de planele de proiecție

Un punct A , situat în triedrul I, are trei puncte simetrice față de planele de proiecție (fig.2.8). Acestea au câte două coordonate identice cu ale punctului A , iar a treia coordonată egală în valoare absolută, după cum urmează :

- punctul A_1 este simetricul punctului A față de planul orizontal, este situat în triedrul IV, are abscisa și depărtarea punctului A , iar cota egală cu a punctului A , dar cu semn schimbat ;
- punctul A_2 este simetricul punctului A față de planul vertical, este situat în triedrul II, are abscisa și cota punctului A , iar depărtarea egală cu a punctului A , dar cu semn schimbat ;
- punctul A_3 este simetricul punctului A față de planul lateral, este situat în triedrul V, are depărtarea și cota punctului A , iar abscisa egală cu a punctului A , dar cu semn schimbat.

2.4.2 Puncte simetrice față de axe de proiecție

Punctul M , situat în triedrul I, are trei puncte simetrice față de axe de proiecție (fig.2.9). Acestea au câte două coordonate egale în valoare absolută cu coordonatele punctului M , iar a treia coordonată identică, după cum urmează :

- punctul M_1 este simetricul punctului A față de axa Ox , este situat în triedrul III, are abscisa punctului M , iar cota și depărtarea egală cu a punctului M , dar cu semn schimbat ;
- punctul M_2 este simetricul punctului M față de axa Oy , este situat în triedrul VIII, are depărtarea punctului M , iar abscisa și cota egală cu a punctului M , dar cu semn schimbat ;
- punctul M_3 este simetricul punctului M față de axa Oz , este situat în triedrul VI, are cota punctului M , iar abscisa și depărtarea egală cu a punctului M , dar cu semn schimbat.

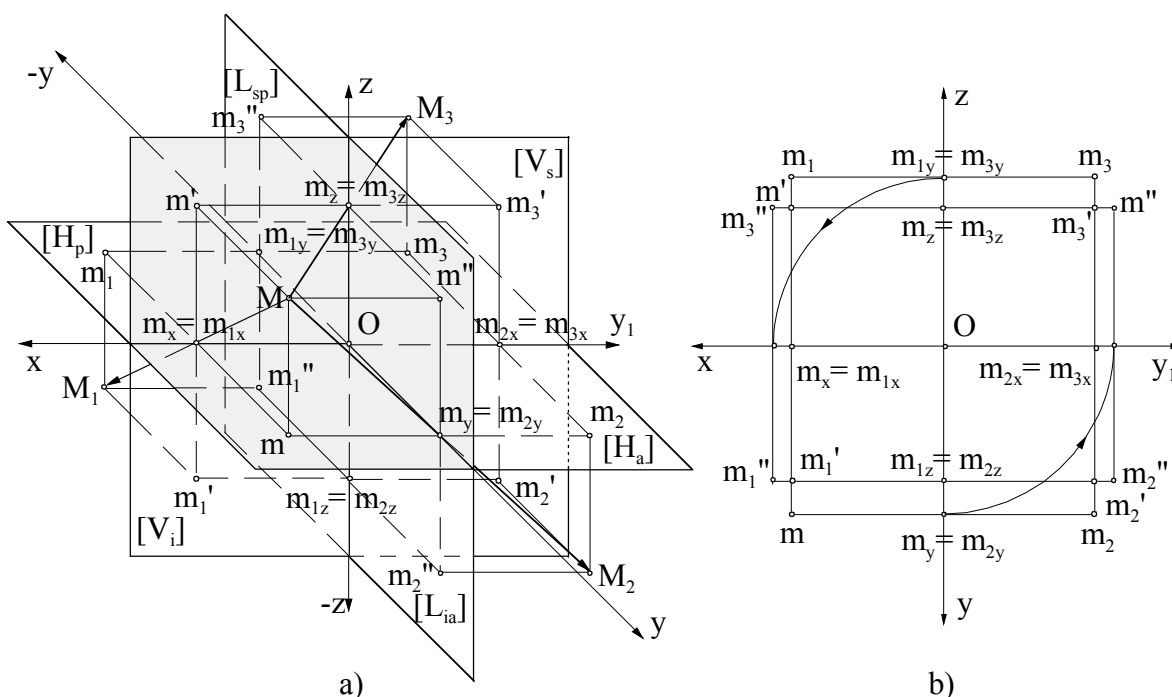


Fig.2.9 Puncte simetrice față de axe de proiecție

2.4.3 Puncte simetrice față de planele bisectoare

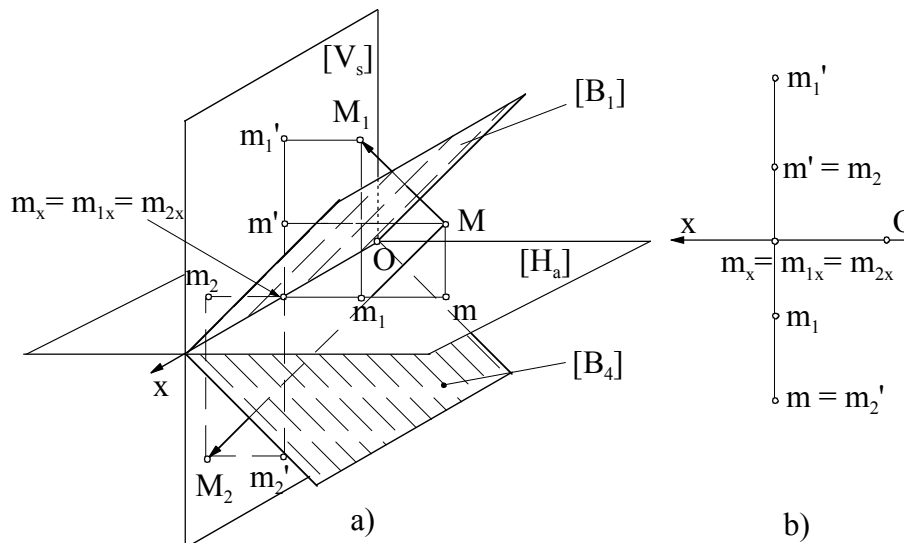


Fig.2.10 Puncte simetrice față de planele bisectoare

decât cel în care se găsește, este situat în diedrul opus față de axa Ox , având aceeași abscisă, iar depărtarea egală cu cota punctului de bază și cota egală cu depărtarea acelui punct, ambele cu semn schimbat.

În figura 2.10 simetricul punctului M , față de planul bisector $[B_1]$, este punctul M_1 , iar față de planul bisector $[B_4]$, este punctul M_2 . Punctul M și M_1 sunt situate în diedrul I, iar punctul M_2 , în diedrul III.

2.5 Probleme rezolvate

1. Să se construiască epura punctelor $A(15,25,20)$, $B(8,-8,25)$, $C(20,-18,-20)$, $E(25,10,-15)$ și să se stabilească poziția lor în spațiu.

Rezolvare : Pentru construirea epurei se procedează astfel (fig.2.11) :

- se trasează axele de coordonate Ox , Oy , și Oz ;

- pe axa Ox se măsoară, începând din O , $Oa_x = 15$, abscisa punctului A . Prin a_x se duce linia de ordine, perpendiculară pe Ox ;

- pe axa Oy se măsoară, începând din O , $Oa_y = 25$, depărtarea punctului A . Prin a_y se duce o paralelă la Ox care intersectează linia de ordine în a – proiecția orizontală a punctului A ;

- pe axa Oz se măsoară, începând din O , $Oa_z = 20$, cota punctului A . Prin a_z se duce o paralelă la Ox care intersectează linia de ordine în a' – proiecția verticală a punctului A ;

- cu vârful compasului în O și de rază Oa_y se descrie un arc de cerc în sens trigonometric și la intersecția cu Oy_1 se obține punctul a_{y1} . Prin acesta se duce o perpendiculară pe Oy_1 care intersectează paralela prin a_z în a'' – proiecția laterală a punctului A .

Epura punctelor B , C și E se determină în

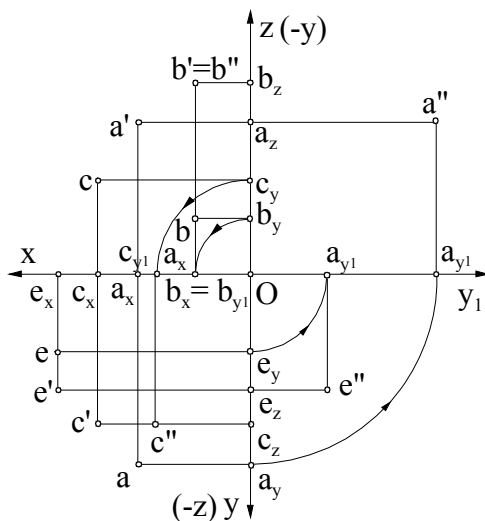


Fig.2.11 Rezolvarea problemei 1

mod similar, cu observația că depărtările și cotele negative se măsoară în sensul negativ al axelor Oy și Oz .

Analizând semnul coordonatelor punctelor rezultă că punctul $A \in DI$, punctul $B \in DII$, punctul $C \in DIII$ și punctul $E \in DIV$.

2. Să se construiască epura punctelor $E(15,10,0)$, $F(0,20,15)$, $G(20,0,10)$ și să se specifice poziția lor față de planele de proiecție.

Rezolvare : Epura punctelor se realizează ca și în cazul problemei 1 (fig.2.12). Deoarece s-a observat că fiecare punct are una din coordonate nulă, rezultă că ele sunt situate în planele de proiecție, după cum urmează : punctul $E \in [H]$, punctul $F \in [L]$ și punctul $G \in [V]$.

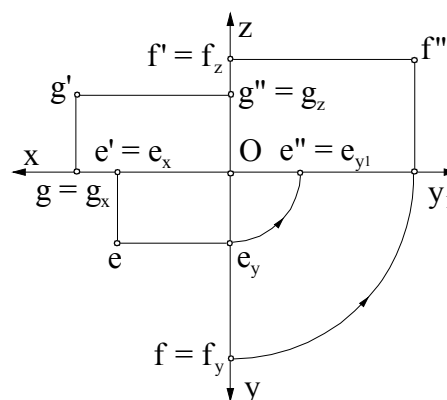


Fig.2.12 Rezolvarea problemei 2

3. Să se construiască epura punctelor $A(15,11,18)$, $B(-15,11,18)$, $C(15,18,11)$ și să se analizeze particularitățile lor.

Rezolvare : Epura punctelor este reprezentată în figura 2.13. Punctul A este situat în diedrul I. Analizând coordonatele punctelor, s-a stabilit că punctul B este simetricul punctului A față de planul lateral, deoarece are aceleași coordonate, cu semn schimbat la abscisă. De asemenea, punctul C este simetricul punctului A față de planul bisector $[B_I]$, având cota egală cu depărtarea, $c_x c' = a_x a'$ și depărtarea egală cu cota, $c_y c = a_y a'$, punctului A .

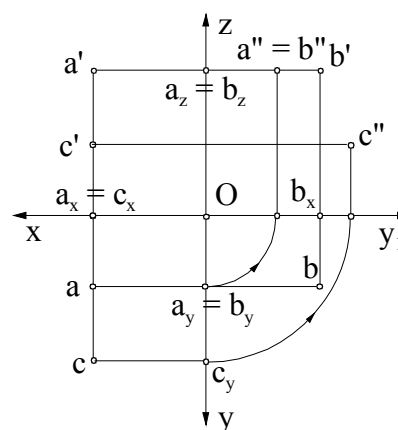


Fig.2.13 Rezolvarea problemei 3

4. Să se reprezinte în epură cele trei proiecții ale triunghiului ABC, știind că vârfurile lui sunt astfel situate în spațiu : $A \in [H]$, $B \in Ox$, $C \in [L]$. Stabiliți coordonatele vârfurilor pentru exemplificare.

Rezolvare : Punctele A și C fiind situate în plane de proiecție, au una din coordonate nulă ; se stabilesc următoarele coordonate : $A(13,27,0)$ și $C(0,10,17)$. Dacă punctul B se află pe axa Ox , acesta are cota și depărtarea nule. Pentru punctul B se stabilesc coordonatele : $B(24,0,0)$. Se reprezintă în epură cele trei vârfuri ale triunghiului (fig.2.14) și se unesc proiecțiile de același nume, obținându-se proiecțiile triunghiului pe cele trei plane de proiecție : $[abc]$ – proiecția orizontală, $[a'b'c']$ – proiecția verticală și $[a''b''c'']$ – proiecția laterală.

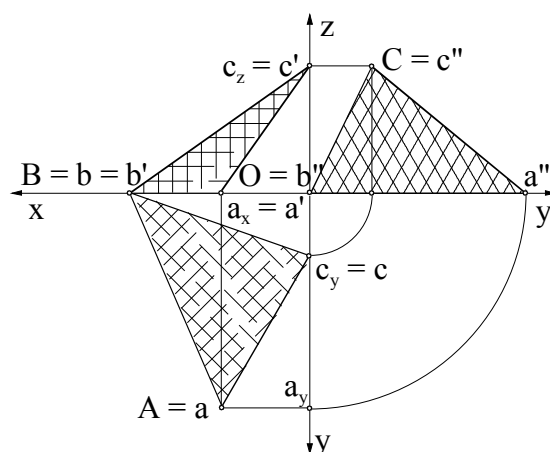


Fig.2.14 Rezolvarea problemei 4

2.7 Probleme propuse

1. Să se construiască epura punctelor $A(25,15,30)$, $B(10,-20,10)$, $C(30,-15,-30)$, $E(5,15,-25)$ și să se stabilească poziția lor în spațiu.
2. Să se construiască epura punctelor $E(30,20,0)$, $F(0,15,20)$, $G(10,0,20)$ și să se specifice poziția lor față de planele de proiecție.
3. Să se construiască epura punctelor $A(20,15,25)$, $B(20,15,-25)$, $C(20,-25,-15)$ și să se analizeze particularitățile lor.
4. Să se precizeze coordonatele punctelor A , B , C și E , astfel încât acestea să aibă următoarea poziție în spațiu : $A \in DI$, $B \in DII$, $C \in DIII$ și $E \in DIV$. Reprezentați epura acestor puncte.
5. Să se precizeze coordonatele punctelor E , F , și G , astfel încât acestea să aibă următoarea poziție în spațiu : $E \in [H]$, $F \in [V]$, și $G \in [L]$. Reprezentați epura acestor puncte.
6. Fie punctul $A(20,10,40)$. Să se reprezinte epura punctului A și a punctelor simetrice față de : planul vertical (A_1), axa Oy (A_2) și planul bisector [B_1] (A_3).
7. Se dau punctele $A(10,35,25)$, $B(60,0,30)$, $C(30,0,0)$, $E(30,-40,-40)$. Să se construiască epurele punctelor și să se specifice poziția lor în spațiu.
8. Cum sunt situate în spațiu punctele E și F , dacă în epură proiecțiile lor de nume contrar coincid ($e = f'$, $e' = f$) ? Exemplificați numeric.
9. Să se construiască epura unui punct A , situat la 20mm de planul lateral, în planul bisector al diedrului I.
10. Se dă punctul $M(30,-20,40)$. Să se reprezinte epura punctului M și a punctelor simetrice față de : planul orizontal (M_1), axa Ox (M_2) și planul bisector [B_2] (M_3).
11. La ce distanță se găsește punctul $A(30,25,10)$ față de axa Ox ? Dar punctul $M(30,-10,-15)$?
12. Să se construiască epura punctului $A(20,y,30)$, știind că este situat la o distanță $l = 50\text{mm}$, față de axa Ox .
13. Să se construiască epura triunghiului ABC , cunoscând coordonatele vârfurilor : $A(60,10,30)$, $B(10,30,10)$ și $C(40,20,50)$.
14. Să se reprezinte în epură cele trei proiecții ale triunghiului ABC , știind că vârfurile lui sunt astfel situate în spațiu : $A \in [V]$, $B \in Oy$, $C \in [H]$. Stabiliți coordonatele vârfurilor pentru exemplificare.
15. Să se reprezinte în epură cele trei proiecții ale triunghiului EFG , știind că vârfurile lui sunt astfel situate pe axele de proiecție : $E \in Oy$, $F \in Oz$, $G \in Ox$. Stabiliți coordonatele vârfurilor pentru exemplificare.
16. Să se construiască epura triunghiului ABC , cunoscând coordonatele vârfului $A(40,10,30)$ și faptul că vârfurile B și C sunt simetricele punctului A față de planul orizontal, respectiv vertical. Ce se poate spune despre poziția triunghiului ABC în spațiu ? Dar despre proiecția sa pe planul lateral de proiecție, [$a''b''c''$] ?
17. Să se construiască epura triunghiului MNS , cunoscând coordonatele vârfului $M(20,15,25)$ și faptul că vârfurile N și S sunt simetricele punctului M față de planul lateral, respectiv vertical. Ce se poate spune despre poziția triunghiului MNS în spațiu ? Dar despre proiecția sa pe planul orizontal de proiecție, [abc] ?
18. Să se construiască epura unui punct A situat la distanța de 30mm față de planul lateral și la distanța de 20mm față de planul vertical, știind că este situat în planul bisector al diedrului IV, [B_4].

3. DREAPTA

3.1 Epura dreptei

În spațiu, o dreaptă de poziție oarecare este definită de două puncte. Prin urmare, pentru a construi în spațiu sau în plan o dreaptă, este suficient să se construiască proiecțiile a două puncte ale ei.

Fie dreapta D din spațiu, definită de punctele A și B , ce aparțin dreptei (fig.3.1, a). Planul determinat de dreapta din spațiu și proiectanta oricărui punct de pe dreaptă se numește *plan proiectant*. Există astfel, un plan proiectant față de planul horizontal de proiecție, un plan proiectant față de planul vertical de proiecție și un plan proiectant față de planul lateral de proiecție. Intersecția dintre aceste plane proiectante și planele de proiecție sunt drepte și reprezintă proiecțiile dreptei pe planele de proiecție, după cum urmează:

$$[ABab] \cap [H] = ab \equiv d - \text{proiecția orizontală}$$

$$[Aba'b'] \cap [V] = a'b' \equiv d' - \text{proiecția verticală}$$

$$[Aba''b''] \cap [L] = a''b'' \equiv d'' - \text{proiecția laterală}$$

Altfel spus, proiectantele duse din A și B pe planul orizontal de proiecție vor determina proiecția orizontală a dreptei, d . În mod similar se determină proiecția pe planul vertical, d' și pe planul lateral, d'' .

Reprezentarea în epură a dreptei D (fig.3.1 b) se obține prin construirea proiecțiilor punctelor care definesc dreapta și unirea proiecțiilor de același fel ale celor două puncte, astfel : $a \cup b = d$, $a' \cup b' = d'$, $a'' \cup b'' = d''$.

Deoarece o dreaptă este definită în epură prin cel puțin două dintre proiecțiile ei, dreapta se notează $D(d, d')$ și se citește dreapta D din spațiu cu proiecțiile d și d' .

Un punct $M(m, m')$ se găsește pe dreapta $D(d, d')$, atunci când proiecțiile lui se situează pe proiecțiile de același fel ale dreptei : $m \in d$ și $m' \in d'$ (fig.3.1). De aici, rezultă că în rezolvarea diferitelor probleme, atunci când este dată sau este găsită proiecția de un nume a unui punct ce aparține unei drepte, cealaltă proiecție a punctului poate fi determinată pe proiecția de nume contrar a dreptei și pe aceeași linie de ordine.

Observații :

- în cazul proiecției ortogonale, segmentul de dreaptă rezultat prin proiecția unui segment din spațiu pe oricare plan de proiecție, nu poate fi mai mare decât segmentul din spațiu;
- în epură, condiția necesară și suficientă ca un punct să aparțină unei drepte este ca proiecțiile punctului să fie situate pe proiecțiile de același nume ale dreptei.

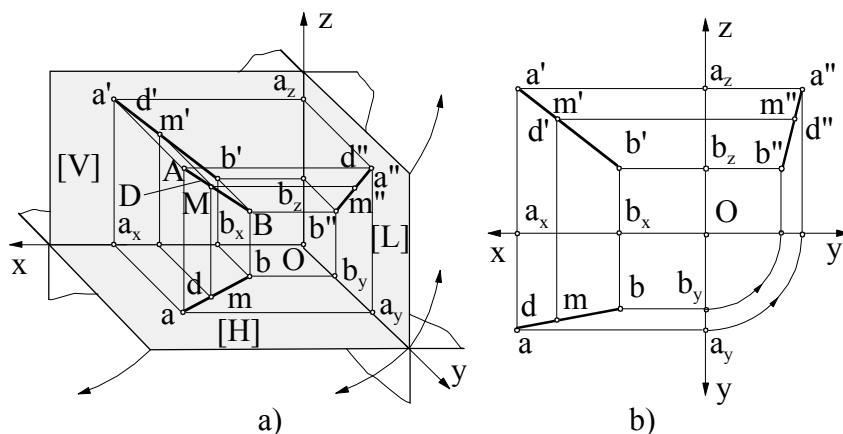


Fig.3.1 Reprezentarea dreptei : a) în spațiu ; b) în epură

3.2 Urmele dreptei. Împărțirea dreptei în regiuni. Intersecția cu planele bisectoare

Urma unei drepte este un punct unde dreapta din spațiu intersectează un plan de proiecție. În figura 3.2, a, se consideră o dreaptă $D(d, d')$ definită de punctele A și B . Punctul $H(h, h')$, de intersecție dintre dreaptă și planul orizontal de proiecție $[H]$, este numit *urmă orizontală*, iar punctul $V(v, v')$, de intersecție dintre dreaptă și planul vertical de proiecție $[V]$, este numit *urmă verticală*.

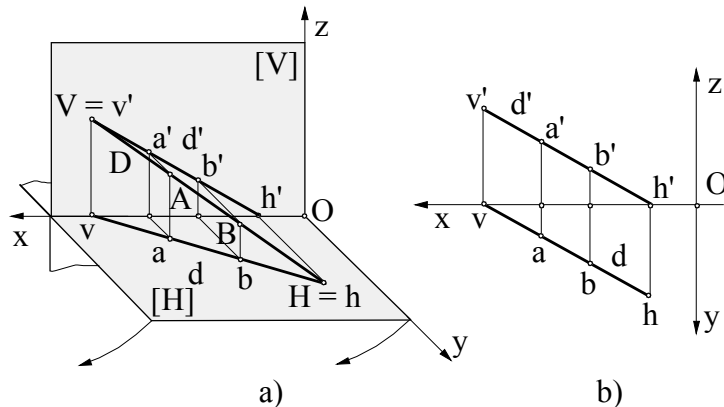


Fig.3.2 Urmele dreptei în sistemul celor două plane de proiecție

Pentru a se determina urmele unei drepte în epură, trebuie să se țină seama de condiția de apartenență a punctului la dreaptă și de definiția urmei unei drepte.

Urmele, fiind puncte conținute în planele de proiecție, au una din coordonate nulă. Astfel, în figura 3.2, b, pentru determinarea urmei orizontale a dreptei D , se prelungește proiecția verticală d' până se intersectează cu axa Ox (adică, se caută un punct care să aibă cota zero), determinându-se punctul h' - proiecția verticală a urmei orizontale. Pentru determinarea proiecției orizontale a urmei orizontale, se duce linia de ordine prin proiecția h' care intersectează proiecția orizontală a dreptei, d , în h .

La determinarea urmei verticale a dreptei D (punct de depărtare zero), se procedează în mod similar, prelungind proiecția orizontală d a dreptei până la intersecția cu axa Ox , unde se obține punctul v - proiecția orizontală a urmei verticale. Prin proiecția v se duce o linie de ordine până la intersecția cu proiecția verticală d' a drepte și se determină punctul v' - proiecția verticală a urmei verticale.

Dacă se consideră dreapta D în sistemul celor trei plane de proiecție (fig.3.3) se definește și a treia urmă a dreptei, *urma laterală*, ca fiind punctul de intersecție dintre dreapta D și planul lateral $[L]$.

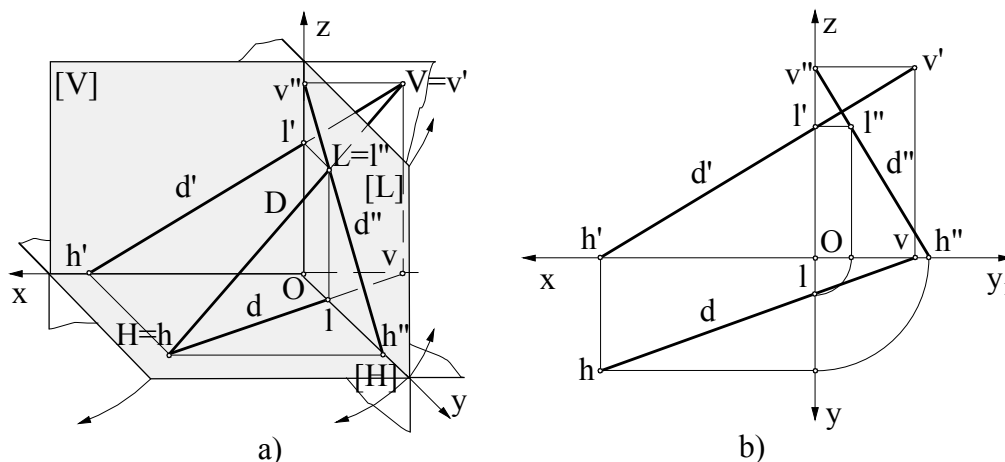


Fig.3.3 Urmele dreptei în sistemul celor trei plane de proiecție

Urma laterală $L(l, l', l'')$ este un punct din planul lateral, deci are abscisa nulă, iar pentru determinarea ei în epură se poate proceda în două moduri (fig.3.3, b):

- se prelungește proiecția orizontală d până la intersecția cu Oy și se determină proiecția orizontală a urmei laterale l ; se duce un arc de cerc cu centrul în O și de rază Ol până la intersecția cu Ox ; se ridică o perpendiculară până la intersecția cu d'' , unde se obține punctul l'' – proiecția laterală a urmei laterale a dreptei D ;

- se prelungește proiecția verticală d' până la intersecția cu Oz și se determină punctul l' , proiecția verticală a urmei laterale; se duce o paralelă la Ox prin l' până la intersecția cu d'' unde se obține punctul l'' – proiecția laterală a urmei laterale a dreptei D .

În epura din figura 3.3, b, s-au determinat și proiecțiile laterale ale urmelor orizontală și verticală, acestea situându-se astfel: h'' pe Oy_1 și v'' pe Oz .

Împărțirea dreptei în regiuni înseamnă delimitarea porțiunilor de dreaptă ce sunt cuprinse în fiecare diedru. Această delimitare este făcută de urmele orizontale și verticale ale dreptei, care sunt „puncte de graniță” pentru dreaptă. Urmele drepte sunt situate în planele de proiecție ce definesc diedrele.

O dreaptă de poziție generală străbate trei diedre. Segmentul de dreaptă cuprins între urmele H și V se află într-un singur diedru, iar celelalte două semidrepte, din stânga și dreapta urmelor, în alte două diedre.

Pentru identificarea diedrelor străbătute de dreapta $D(d, d')$ din figura 3.4, se analizează semnele depărtărilor și cotelor punctelor drepte, considerând un punct pe dreaptă în fiecare regiune, astfel:

- în regiunea din dreapta urmei $V(v, v')$, punctul $A(a, a')$ are depărtarea negativă și cota pozitivă; rezultă că semidreapta străbate diedrul DII ;

- în regiunea cuprinsă între urme, punctul $I(i, i')$ are depărtarea pozitivă și cota pozitivă; segmentul de dreaptă VH din dreapta D se găsește în diedrul DI ;

- în regiunea din stânga urmei $H(h, h')$, punctul $B(b, b')$ are depărtarea pozitivă și cota negativă; rezultă că semidreapta străbate diedrul DIV .

Odată stabilite urmele și diedrele, în analiza drepte se mai pot determina și alte puncte importante ale dreptei, cum ar fi punctele în care dreapta intersectează planele bisectoare.

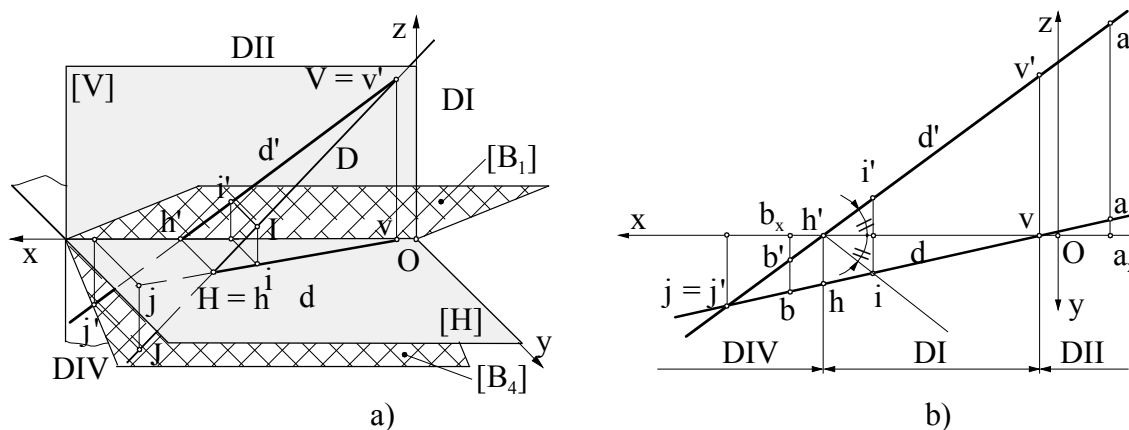


Fig.3.4 Împărțirea dreptei în regiuni. Intersecția cu planele bisectoare

În general, o dreaptă intersectează ambele plane bisectoare, în afară de cazul când este paralelă cu unul din ele. Se ține seama de faptul că, punctul de intersecție cu bisectorul $[B_{1-3}]$ va avea depărtarea egală cu cota și de același semn, iar punctul de intersecție cu bisectorul $[B_{2-4}]$ va avea depărtarea și cota egale în modul și de semne contrare.

Analizând dreapta $D(d, d')$ din figura 3.4, a, se observă că aceasta intersectează semiplanul bisector $[B_1]$ și $[B_4]$. Pentru a determina aceste puncte de intersecție se caută un punct în regiunea diedrului DI și unul în diedrul DIV . În acest sens, se face o construcție pur geometrică ducând din punctul h' o dreaptă simetrică proiecției verticale d' , față de axa Ox care intersectează proiecția orizontală d în punctul i (fig.3.4, b). Cu ajutorul liniei de ordine dusă prin i se determină și proiecția verticală i' , situată pe d' și astfel punctul $I(i, i')$ este punctul de intersecție cu semiplanul bisector $[B_1]$ (depărtarea egală cu cota). Punctul $J(j, j')$ este punctul de intersecție cu semiplanul $[B_4]$ și se determină prelungind proiecțiile d și d' ale dreptei până la intersecția lor (depărtarea și cota egale în modul).

3.3 Pozițiile particulare ale unei drepte din spațiu

O dreaptă din spațiu poate să aibă următoarele poziții față de planele de proiecție:

- dreaptă de poziție generală (înclinată) față de planele de proiecție;
- dreaptă paralelă cu unul din planele de proiecție
- dreaptă perpendiculară pe unul din planele de proiecție (paralelă cu două din planele de proiecție sau cu una din cele trei axe)

Dreptele paralele cu unul din planele de proiecție sau perpendiculare pe acestea au anumite proprietăți în spațiu și prezintă unele particularități în reprezentarea în epură, cunoașterea lor fiind utilă în simplificarea construcțiilor grafice.

3.3.1 Dreaptă paralelă cu unul din planele de proiecție

a) *Dreapta orizontală* (dreaptă de nivel) este dreapta paralelă cu planul orizontal de proiecție (fig.3.5).

Proprietăți: - toate punctele orizontalei au aceeași cotă;

- proiecțiile verticală, d' și laterală, d'' , ale orizontalei sunt paralele cu axa Ox ;
- proiecția orizontală a orizontalei, d , are o poziție oarecare. Orice segment din dreapta orizontală se proiectează pe planul orizontal în adevărată mărime: $AB = ab$;
- unghiul pe care-l face orizontala cu planul vertical, α , se proiectează în adevărată mărime pe planul orizontal și se regăsește în epură între proiecția orizontală, d , a orizontalei și linia de pământ, Ox ;
- orizontala are numai urmă verticală $V(v, v', v'')$ și laterală $L(l, l', l'')$.

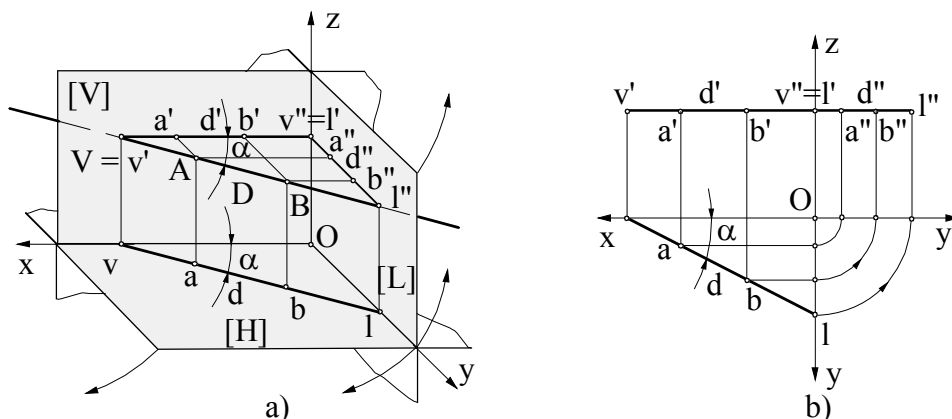


Fig.3.5 Reprezentarea dreptei orizontale, $D \parallel [H]$: a) în spațiu ; b) în epură

b) *Dreapta de front* (frontala) este dreapta paralelă cu planul vertical de proiecție (fig.3.6).

Proprietăți: - toate punctele frontalei sunt egal depărtate de planul vertical;

- proiecția orizontală a frontalei, d , este paralelă cu linia de pământ, Ox ;

- proiecția verticală a frontalei, d' , are o poziție oarecare. Orice segment de dreaptă, AB , aflat în poziție de frontală în spațiu, se proiectează în adevărată mărime pe planul vertical: $AB = a'b'$;

- proiecția laterală a frontalei, d'' , este perpendiculară pe axa Oy_1 ;

- unghiurile pe care le face frontala cu planul orizontal, γ , și respectiv cu planul lateral, β , se regăsesc în epură între proiecția verticală d' și axa Ox , γ și respectiv axa Oz , β ;

- frontala are numai urmă orizontală $H(h, h', h'')$ și laterală $L(l, l', l'')$.

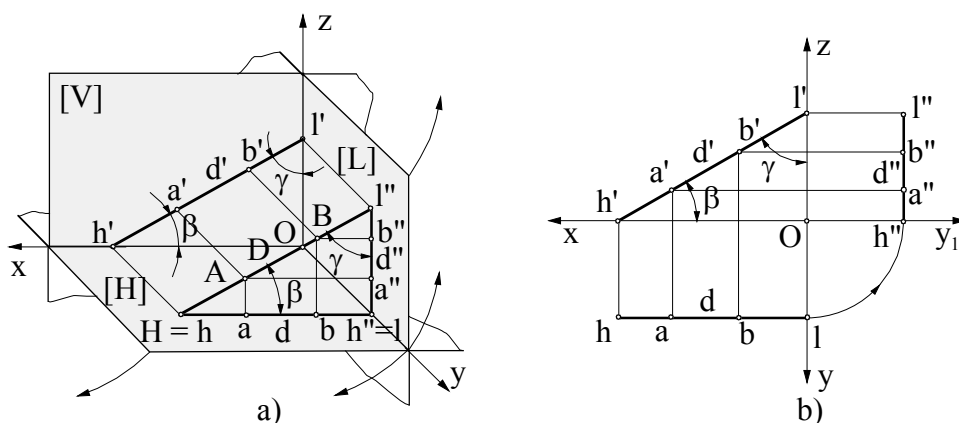


Fig.3.6 Reprezentarea dreptei de front, $D \parallel [V]$: a) în spațiu ; b) în epură

c) *Dreapta de profil* este dreapta paralelă cu planul lateral de proiecție (fig.3.7).

Proprietăți: - toate punctele dreptei de profil au aceeași abscisă;

- proiecțiile orizontală, d și verticală, d' , ale dreptei de profil sunt în prelungire și perpendiculare pe linia de pământ, Ox ;

- proiecția laterală a dreptei de profil, d'' , are o poziție oarecare. Un segment al dreptei de profil se proiectează în adevărată mărime pe planul lateral: $AB = a''b''$;

- unghiurile pe care le face dreapta de profil cu planul orizontal, α și vertical, β , se identifică în epură ca fiind unghiurile dintre proiecția laterală, d'' și axa $Oy_1 - \alpha$ și axa $Oz - \beta$;

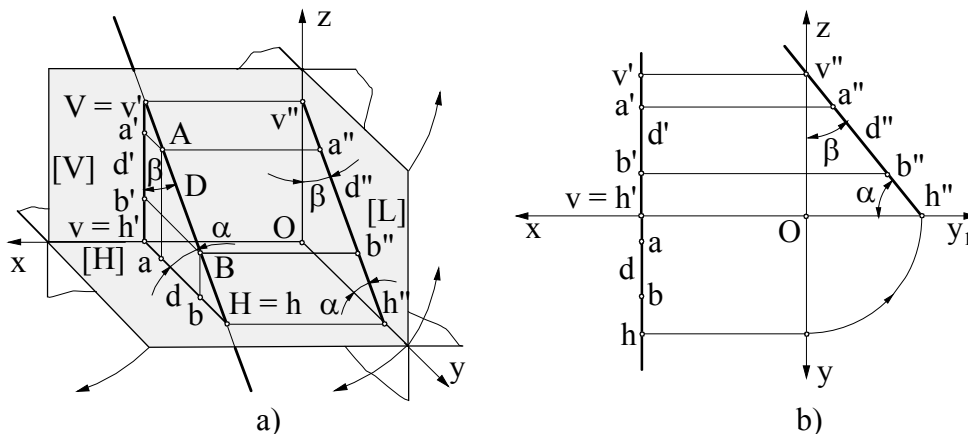


Fig.3.7 Reprezentarea dreptei de profil, $D \parallel [L]$: a) în spațiu ; b) în epură

- dreapta de profil are numai urmă orizontală $H(h, h', h'')$ și verticală $V(v, v', v'')$.

d) *Drepte cuprinse în planele de proiecție*

Dreptele paralele cu planele de proiecție au un caz particular și anume atunci când distanța dintre drepte și planele cu care sunt paralele este nulă, ele devenind cuprinse în planele respective (fig.3.8).

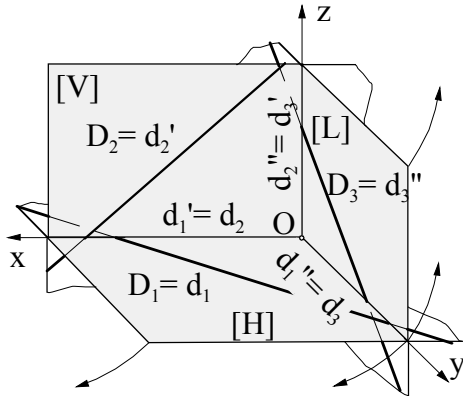


Fig.3.8 Drepte cuprinse în planele de proiecție

Aceste drepte au toate proprietățile dreptelor paralele cu planele de proiecție, enunțate mai sus și de asemenea, proiecția pe planul în care se găsește segmentul de dreaptă este confundată cu însăși acesta, iar celelalte două proiecții sunt suprapuse pe axele de proiecție.

În figura 3.9, a dreapta D_1 , cuprinsă în planul orizontal, are proiecția orizontală $d_1 \equiv D$, proiecția verticală d_1' suprapusă peste axa Ox , iar proiecția laterală d_1'' suprapusă peste axa Oy_1 .

În figura 3.9, b dreapta D_2 , cuprinsă în planul vertical, are proiecția verticală $d_2' \equiv D_2$, proiecția orizontală d_2 suprapusă peste

axa Ox , iar proiecția laterală d_2'' suprapusă peste axa Oz .

Dreapta D_3 , din figura 3.9, c, cuprinsă în planul lateral, are proiecția laterală $d_3'' \equiv D_3$, proiecția orizontală d_3 suprapusă peste axa Oy , iar proiecția verticală d_3' suprapusă peste axa Oz .

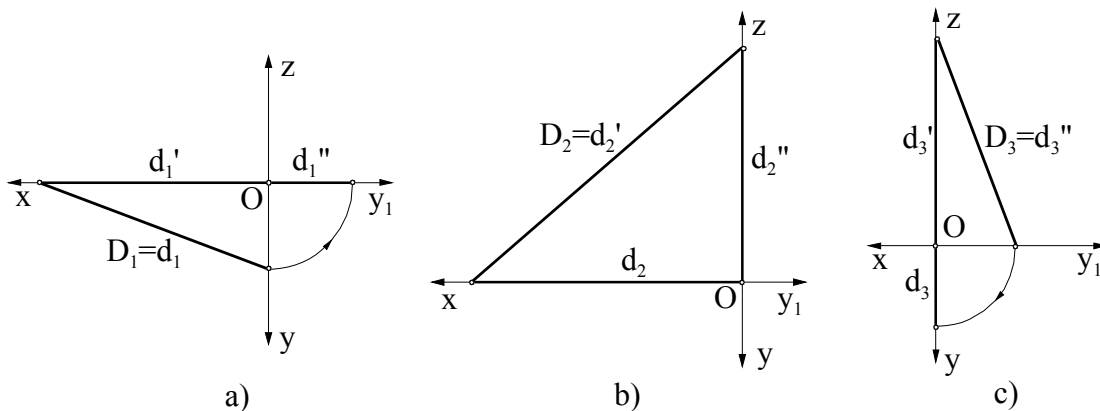


Fig.3.9 Drepte cuprinse în planele de proiecție: a) $D_1 \in [H]$; b) $D_2 \in [V]$; c) $D_3 \in [L]$

3.3.2 Dreaptă perpendiculară pe unul din planele de proiecție

a) *Dreapta verticală* este dreapta perpendiculară pe planul orizontal de proiecție (fig.3.10).

Proprietăți: - toate punctele verticalei sunt egal depărtate de planul vertical și de planul lateral de proiecție;

- proiecția orizontală a verticalei, d , este un punct și se confundă cu urma orizontală, $d \equiv h$;

- proiecțiile verticală, d' și laterală, d'' , ale verticalei sunt paralele cu axa Oz ;

- dreapta verticală nu are urmă verticală și laterală.

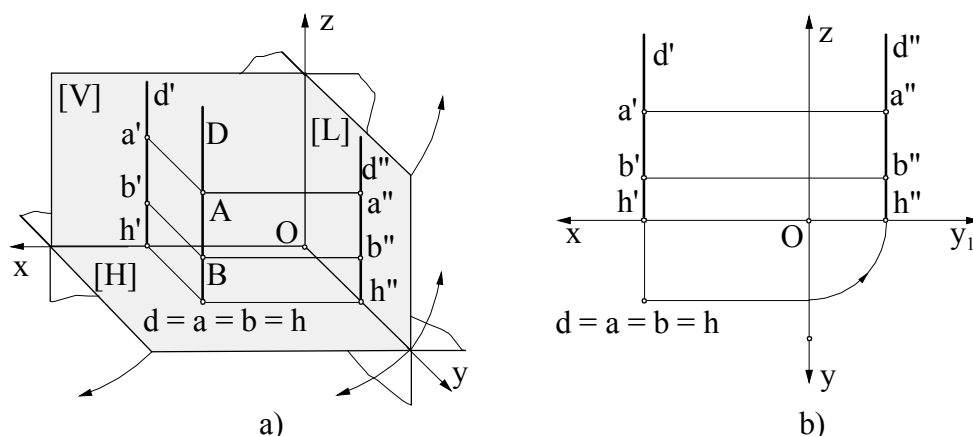


Fig.3.10 Reprezentarea dreptei verticale, $D \perp [H]$: a) în spațiu ; b) în epură

b) *Dreapta de capăt* este dreapta perpendiculară pe planul vertical de proiecție (fig.3.11).

Proprietăți: - toate punctele dreptei de capăt au aceeași abscisă și cotă;

- proiecția verticală a dreptei de capăt, d' , este un punct și se confundă cu urma verticală, $d' \equiv v'$;

- proiecția orizontală a dreptei de capăt, d , este paralelă cu axa Oy ;

- proiecția laterală a dreptei de capăt, d'' , este paralelă cu axa Oy_1 ;

- dreapta de capăt nu are urmă orizontală și laterală.

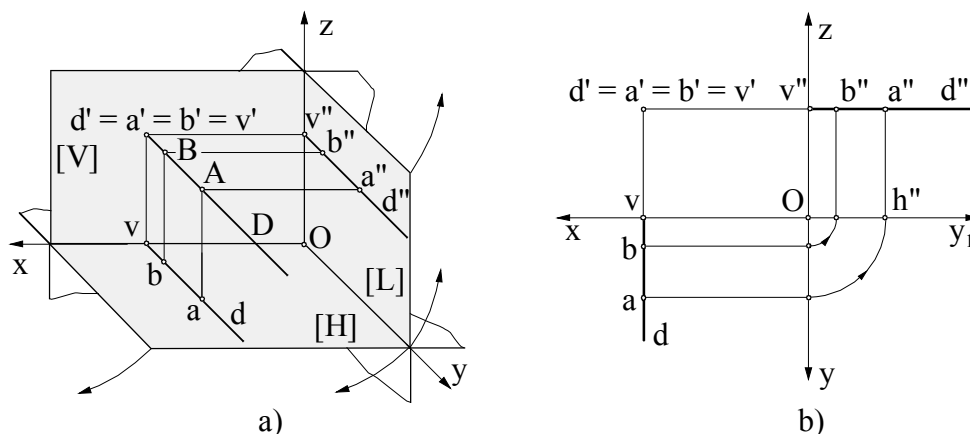


Fig.3.11 Reprezentarea dreptei de capăt, $D \perp [V]$: a) în spațiu ; b) în epură

c) *Dreapta fronto-orizantală* este dreapta perpendiculară pe planul lateral de proiecție (fig.3.12).

Proprietăți: - toate punctele fronto-orizontalei au aceeași depărtare și cotă;

- proiecția laterală a fronto-orizontalei, d'' , este un punct identic cu urma laterală, $d'' \equiv l''$;

- proiecțiile orizontală, d și verticală, d' , ale fronto-orizontalei sunt paralele cu linia de pământ, Ox ;

- dreapta fronto-orizantală nu are urmă orizontală și verticală.

d) *Drepte identice cu axele de proiecție* sunt un caz particular al dreptelor paralele cu axele de proiecție. Acestea au una din proiecții suprapusă în origine, iar celelalte două pe axe, identice cu însăși dreapta.

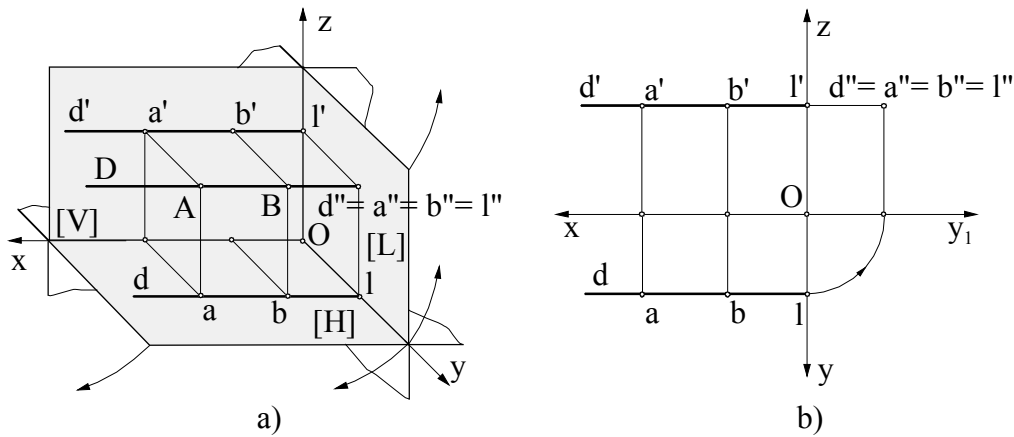


Fig.3.12 Reprezentarea dreptei fronto-orientale, $D \perp [L]$: a) în spațiu ; b) în epură

În figura 3.13, *a* segmentul de dreaptă AB este identic cu axa Ox , având proiecțiile orizontală și verticală suprapuse cu segmentul însuși, $ab \equiv a'b' \equiv AB$, iar proiecția laterală un punct în origine, $a'' \equiv b'' \equiv O$.

Segmentul de dreaptă CE , din figura 3.13, *b*, este identic cu axa Oy , având proiecțiile orizontală și laterală suprapuse peste acesta, $ce \equiv c''e'' \equiv CE$, iar proiecția verticală un punct în origine, $c' \equiv e' \equiv O$.

În figura 3.13, *c* este reprezentat un segment de dreaptă MN care aparține axei Oz și care are proiecțiile verticală și laterală identice cu segmentul însuși, $m'n' \equiv m''n'' \equiv MN$, iar proiecția orizontală suprapusă în origine, $m \equiv n \equiv O$.

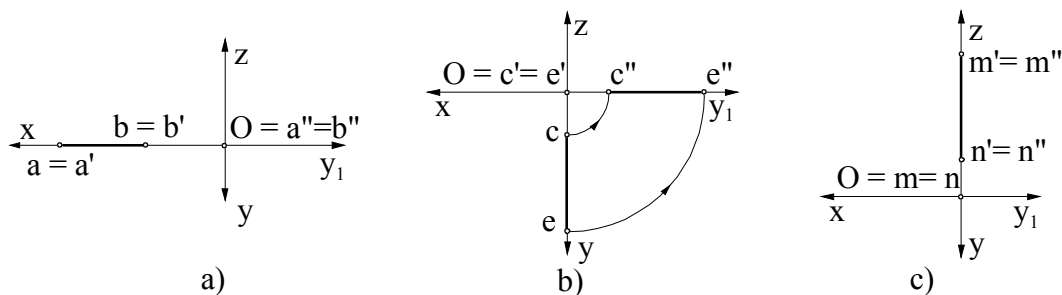


Fig.3.13 Drepte suprapuse pe axe : $AB \in Ox$, $CE \in Oy$, $MN \in Oz$

3.3.3 Alte poziții particulare ale unei drepte din spațiu

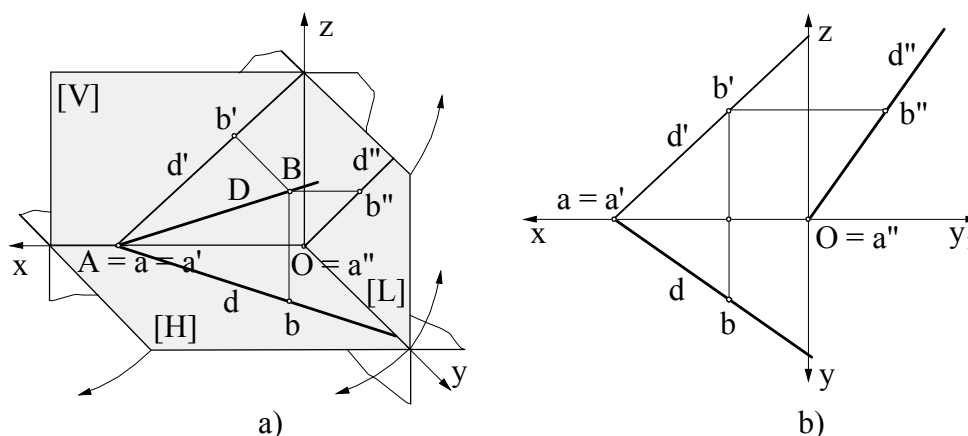
a) Dreaptă care intersectează o axă de proiecție

Pentru aceste drepte una dintre proiecții trece prin origine și au două dintre urme confundate, situate pe axa pe care o intersectează (punctul de intersecție a celorlalte două proiecții).

Fie dreapta D , definită de punctele A și B , care intersectează linia de pământ, Ox , în punctul A , punct care se confundă cu cele două urme, orizontală și verticală (fig.3.14). Proiecția laterală a dreptei, d'' , trece prin origine.

b) Drepte conținute într-unul din planele bisectoare

O dreaptă care aparține planelor bisectoare are proiecțiile orizontală și verticală simetrice față de linia de pământ, Ox , distincte (pentru semiplanele bisectoare $[B_1]$ și $[B_3]$) sau confundate (pentru semiplanele bisectoare $[B_2]$ și $[B_4]$). De asemenea, acestea au

Fig.3.14 Dreaptă care intersectează axa Ox

urmele orizontală și verticală situate pe axa Ox și identice, fiind de fapt un caz particular al dreptelor care intersectează axele de proiecție.

În figura 3.15 sunt reprezentate în epură patru segmente de dreaptă, aparținând fiecare unui alt semiplan bisector

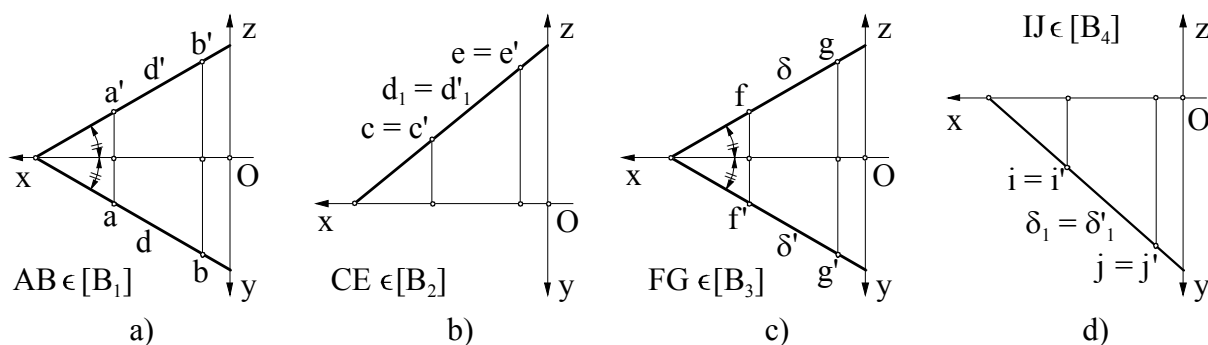


Fig.3.15 Drepte conținute în planele bisectoare

c) *Drepte paralele cu planele bisectoare*

O dreaptă paralelă cu planul bisector $[B_{1-3}]$ are proiecțiile orizontală și verticală simetrice față de axa Ox și acestea nu se intersectează în același punct cu linia de pământ (au urmele orizontală și verticală distincte). În figura 3.16, a segmentul de dreaptă MN (de pe dreapta D) este paralel cu planul bisector $[B_{1-3}]$ și are unghiul 1 egal cu unghiul 2.

O dreaptă paralelă cu planul bisector $[B_{2-4}]$ are proiecțiile orizontală și verticală paralele între ele și distincte. În figura 3.16, b segmentul de dreaptă RS (de pe dreapta D_1) este paralel cu planul bisector $[B_{2-4}]$ și are $rs \parallel r's'$.

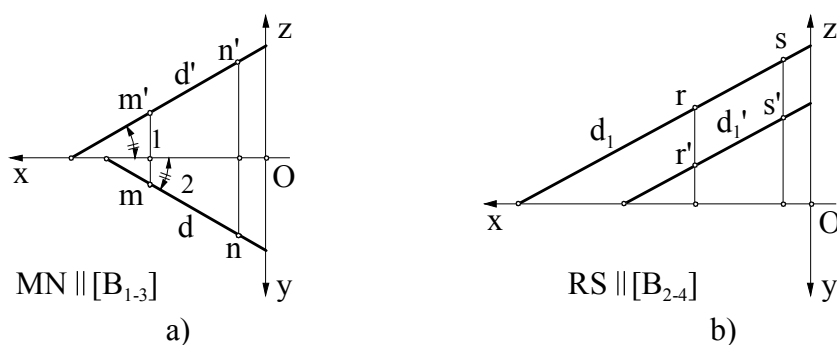


Fig.3.16 Drepte paralele cu planele bisectoare

3.4 Pozițiile relative a două drepte

Două drepte în spațiu pot fi coplanare și necoplanare.

Două drepte coplanare în spațiu pot fi paralele sau concurente.

Dreptele necoplanare, numite drepte disjuncte, nu sunt nici concurente și nici paralele.

3.4.1 Drepte paralele

Două drepte paralele în spațiu au în epură proiecțiile de același nume paralele între ele, având în vedere faptul că planele proiectante care le conțin sunt paralele între ele și intersectează planele de proiecție după drepte paralele (fig.3.17, a).

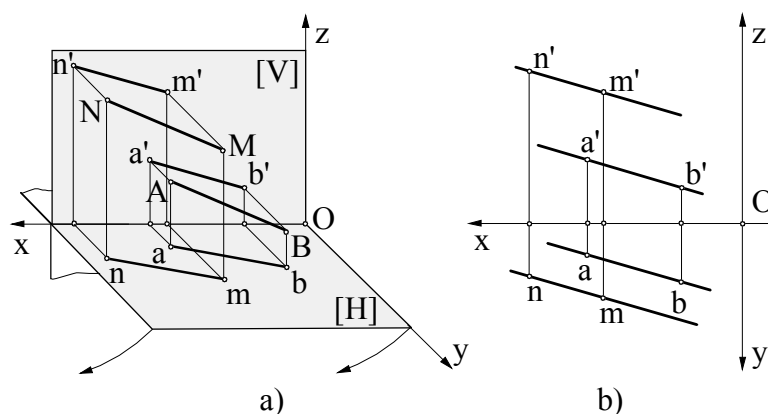


Fig.3.17 Reprezentarea dreptelor paralele:
a) în spațiu: $AB \parallel MN$; b) în epură: $ab \parallel mn, a'b' \parallel m'n'$

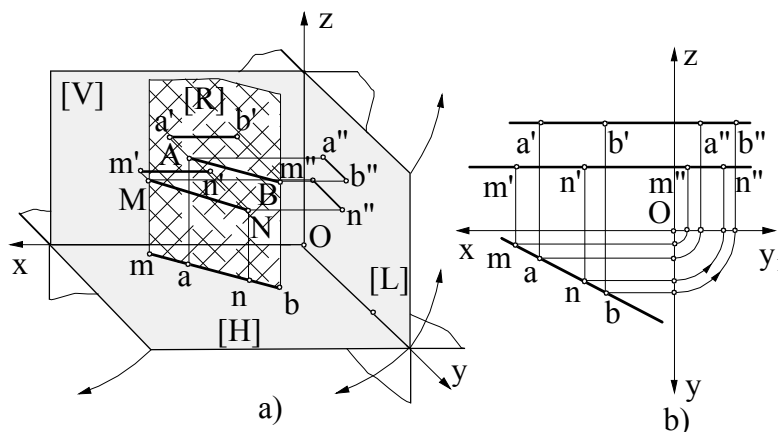


Fig.3.18 Reprezentarea dreptelor paralele, cu plan proiectant comun față de planul orizontal [H]

În figura 3.17 se observă că dacă $AB \parallel MN$, în spațiu, în epură avem : $ab \parallel mn$ și $a'b' \parallel m'n'$.

Dacă planul determinat de cele două drepte paralele este proiectant față de unul din planele de proiecție, atunci în epură proiecțiile dreptelor pe planul respectiv sunt confundate, iar pe celelalte plane de proiecție sunt paralele și distincte. În epura din figura 3.18, b proiecțiile orizontale ale segmentelor paralele AB și MN sunt confundate, $ab \equiv mn$, deoarece ele determină planul proiectant $[R] \perp [H]$, așa cum se poate observa din reprezentarea în spațiu din figura 3.21, a.

Observație: Dacă două drepte paralele cu unul dintre planele de proiecție sunt date în epură numai prin proiecțiile pe celelalte două plane (unde apar paralele), nu se poate spune că dreptele sunt paralele între ele. Este obligatoriu să se construiască și cea de a treia proiecție și dacă și aceste proiecții vor fi paralele, atunci dreptele sunt paralele în spațiu.

3.4.2 Drepte concurente

În spațiu, două drepte sunt concurente când au un punct comun, punctul de intersecție al lor. În epură, condiția ca două drepte să fie concurente este ca proiecțiile lor de același nume să se intersecteze, iar punctele de intersecție ale proiecțiilor (orizontale și verticale) să fie pe aceeași linie de ordine.

În figura 3.19, a, $AB \cap MN = I$, iar în epură (fig.3.19, b), $ab \cap mn = i$ și $a'b' \cap m'n' = i'$, proiecțiile punctului de intersecție i și i' sunt pe aceeași linie de ordine.

Două drepte se pot intersecta în spațiu sub un unghi oarecare sau sub un unghi drept. Dacă un unghi oarecare are laturile paralele cu un plan de proiecție, unghiul se proiectează în adevărată mărime pe planul respectiv.

Pentru unghiul drept este suficient ca numai una dintre laturile lui să fie paralelă cu planul de proiecție pentru ca acesta să se proiecteze în adevărată mărime pe acel plan – *teorema unghiului drept*.

Rezultă că, în sistemul de proiecție dublu ortogonal, unghiul drept se proiectează în adevărată mărime pe unul din planele de proiecție, atunci când una din laturile unghiului este orizontală, frontală sau dreaptă de profil.

În figura 3.20 a este reprezentat în epură unghiul drept ale cărui laturi sunt orizontală CE și dreapta oarecare AB . Unghiul se proiectează în adevărată mărime în proiecția orizontală.

Analog, un unghi drept care are una din laturi frontala IJ sau dreapta de profil FG , iar cealaltă latură o dreaptă oarecare MN , respectiv RS , se proiectează în adevărată mărime în proiecția pe planul vertical, respectiv lateral (fig.3.20, b și c).

Pe baza celor de mai sus se poate formula și *reciproca teoremei unghiului drept*: dacă proiecția unui unghi este de 90° , atunci unghiul proiectat este drept numai dacă cel puțin una dintre laturile lui este paralelă cu acel plan de proiecție.

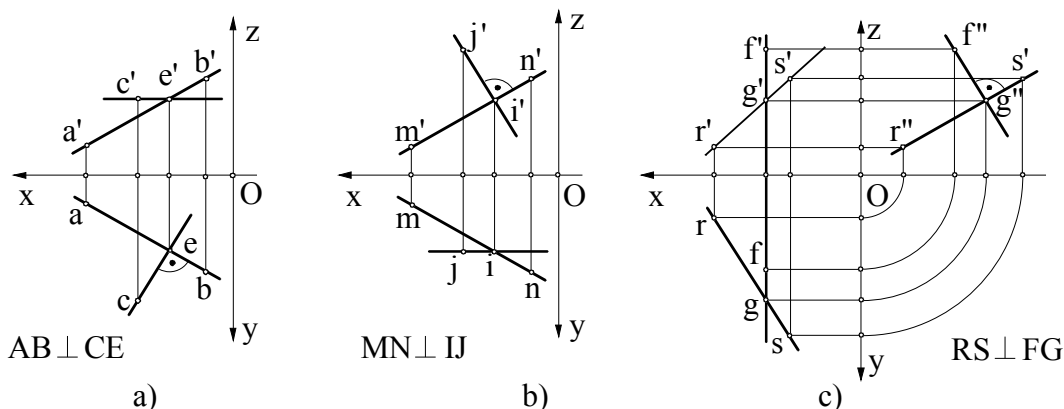


Fig.3.20 Proiecția în adevărată mărime a unghiului drept

3.4.3 Drepte disjuncte

Oricare două drepte care nu sunt paralele sau concurente în spațiu intră în categoria dreptelor *disjuncte*.

Acestea sunt necoplanare, după cum se observă și în figura 3.21, $a, AB \in [Q]$ și $MN \in [R]$. Din reprezentarea lor în epură (fig.3.21, b) chiar dacă proiecțiile verticale se intersectează, $a'b' \cap m'n' = i'_1$, acesta este doar un punct de concurență aparent, deoarece ducând linia de ordine, în proiecția orizontală îi corespund două proiecții, pe fiecare proiecție orizontală a dreptei în parte, $i_1 \in ab$ și $i_2 \in mn$. Rezultă că dreptele sunt neconcurente. De asemenea, ele nu sunt paralele, chiar dacă au proiecțiile orizontale paralele, pentru că nu este verificată condiția de paralelism în proiecția verticală.

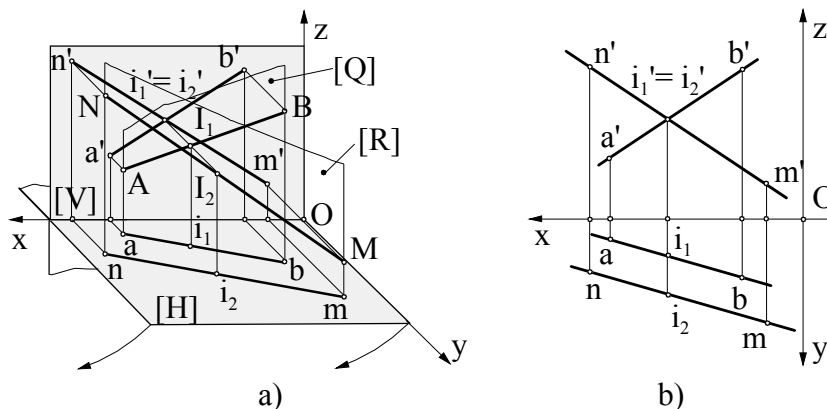


Fig.3.21 Reprezentarea dreptelor disjuncte:

a) în spațiu: $AB \in [Q]$, $MN \in [R]$; b) în epură: $AB \cap MN = \emptyset$

Vizibilitatea în epură

În rezolvarea problemelor de intersecții a dreptelor cu plăci, corpuri geometrice sau intersecții de corpuri geometrice, unele porțiuni de drepte sunt invizibile, fiind acoperite de suprafețe considerate opace.

Vizibilitatea se stabilește ușor prin punctele dublu aparente ale dreptelor disjuncte. Astfel, în figura 3.21, a se observă că dreapta MN este situată în fața dreptei AB . Pentru a stabili acest lucru în epură (fig.3.21, b) se consideră punctul unde proiecțiile verticale ale dreptelor se intersectează și unde există două puncte suprapuse, I_1 și I_2 . Este vizibil punctul care are depărtarea mai mare și anume punctul I_2 .

Observație : Dintre două puncte care au pe unul din planele de proiecție, orizontal vertical sau lateral, proiecțiile suprapuse, este vizibil punctul care se află la distanță mai mare de acel plan, adică cel care are cota, depărtarea respectiv abscisa mai mare.

În figura 3.22 dintre punctele A și B este vizibil punctul B , în fiecare dintre cazuri.

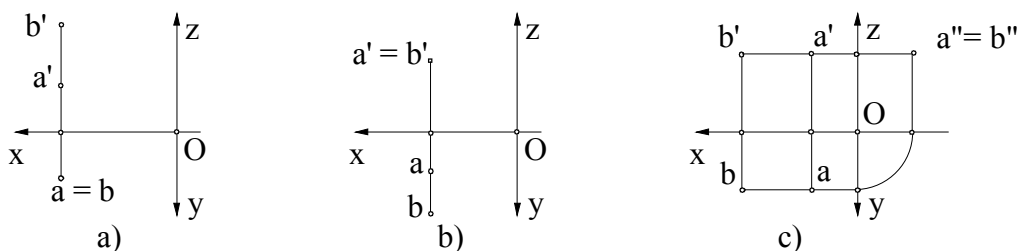


Fig.3.22 Vizibilitatea în epură

3.5 Probleme rezolvate

1. Fie punctele $A(25,14,17)$ și $B(10,10,5)$. Să se reprezinte în epură dreapta $D(d,d',d'')$, definită de punctele A și B . Să se determine urmele dreptei, diedrele pe care le străbate dreapta și punctele de intersecție cu planele bisectoare.

Rezolvare : Pentru rezolvarea problemei se procedează astfel (fig.3.23) :

- se trasează axele de coordonate Ox , Oy și Oz ;

- se reprezintă epura punctelor $A(a,a',a'')$ și $B(b,b',b'')$;

- se unesc proiecțiile de același nume ale punctelor și se obțin proiecțiile d, d' și d'' ale dreptei $D : a \cup b = d, a' \cup b' = d', a'' \cup b'' = d''$;

- pentru determinarea urmei orizontale $H(h,h',h'')$ – punct de cotă nulă – se intersectează proiecția verticală d' cu axa Ox , rezultând proiecția verticală a urmei orizontale h' , $d' \cap Ox = h'$; se duce linia de ordine din h' până pe proiecția orizontală d , unde se determină proiecția orizontală h ; la intersecția dintre proiecția laterală d'' cu axa Oy_1 se determină proiecția laterală h'' , $d'' \cap Oy_1 = h''$;

- pentru determinarea urmei verticale $V(v,v',v'')$ – punct de depărtare nulă – se intersectează proiecția orizontală d cu axa Ox , rezultând proiecția orizontală a urmei verticale v , $d \cap Ox = v$; se duce linia de ordine din v până pe proiecția verticală d' , unde se determină proiecția verticală v' ; la intersecția dintre proiecția laterală d'' cu axa Oy se determină proiecția laterală v'' , $d'' \cap Oy = v''$;

- proiecțiile orizontală și verticală ale urmei laterale se determină la intersecția axei Oy , respectiv Oz , cu proiecția orizontală, respectiv verticală, a dreptei : $d \cap Oy = l$, $d' \cap Oz = l'$; proiecția laterală a urmei laterale l'' se află trasând o paralelă la axa Ox prin l' , până la intersecția cu proiecția laterală d'' ;

- urma orizontală și urma verticală împart dreapta în trei regiuni, fiecare regiune fiind determinată de diedrul pe care îl străbate; studiind semnele coordonatelor punctelor de pe dreaptă, în fiecare regiune, rezultă : în stânga urmei orizontale dreapta străbate diedrul DI , pentru că punctul $A \in DI$; între urma orizontală și cea verticală s-a considerat punctul $C(c,c')$, $c \in d$, $c' \in d'$, care are cota negativă și depărtarea pozitivă, deci $C \in DIV (T_{VIII})$ și implicit și dreapta străbate diedrul DIV ; în dreapta urmei verticale dreapta străbate diedrul $DIII$, pentru că punctul care s-a luat pe dreaptă, $e \in d$, $e' \in d'$, aparține diedrului $DIII$, $E \in DIII (T_{VII})$;

- dreapta intersectează semiplanele bisectoare $[B_1]$ și $[B_2]$:

- punctul de intersecție $I(i,i')$ cu bisectorul $[B_1]$ se determină trasând prin punctul h' simetrica proiecției verticale d' , față de linia de pământ Ox ; aceasta intersectează proiecția orizontală d în i ; ducând linia de ordine prin i , la intersecția cu proiecția verticală d' se determină i' , punctul I , având cota și depărtarea egale.

- punctul de intersecție $J(j,j')$ cu bisectorul $[B_2]$ se determină la intersecția proiecțiilor orizontală și verticală, $d \cap d' = j \equiv j'$, punct care are cota și depărtarea egale în modul.

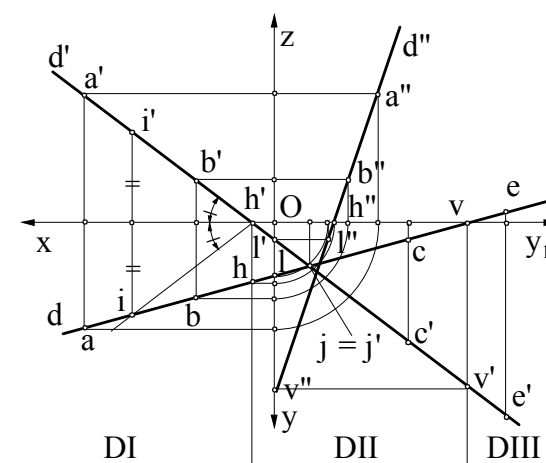
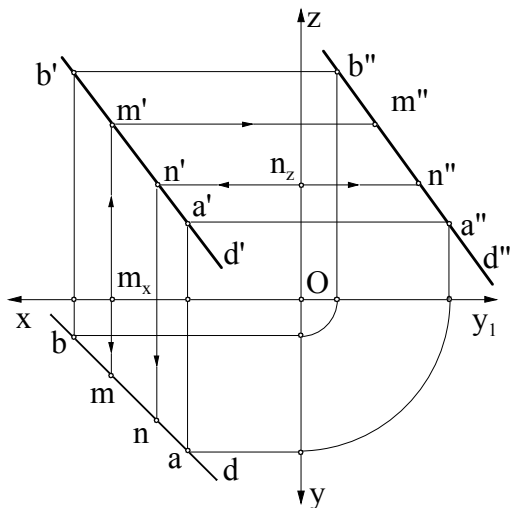


Fig.3.23 Rezolvarea problemei 1



ordine până la intersecția cu proiecțiile d și d' , determinând proiecțiile m și m' ale punctului. Proiecția m'' se găsește pe paralela dusă prin m' la Ox și totodată pe proiecția d'' . Punctul $M(m, m', m'')$ este astfel determinat. Pentru punctul N se găsesc mai întâi proiecțiile verticală și laterală, n' și n'' , trasând paralela la Ox prin n_z , până la intersecția cu d' și d'' , iar apoi din n' se coboară o linie de ordine până pe d , unde se determină și proiecția n .

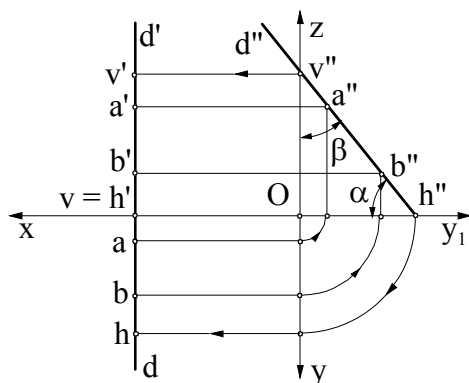


Fig.3.25 Rezolvarea problemei 3

Din epura dreptei D se găsesc unghiurile pe care aceasta le face cu planele de proiecție, și anume: $\angle(D, [V]) = \angle(d'', Oz) = \beta$ și $\angle(D, [H]) = \angle(d'', Oy_1) = \alpha$.

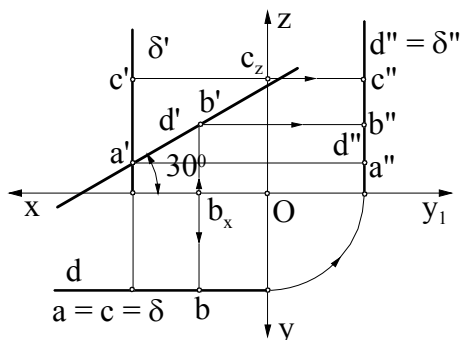


Fig.3.26 Rezolvarea problemei 4

2. Să se reprezinte în epură dreapta $D(d, d', d'')$, definită de punctele $A(15, 20, 10)$ și $B(30, 5, 30)$. Să se determine pe dreaptă un punct M , a cărui depărtare este 30mm și un punct N a cărui cotă este 20mm.

Rezolvare : Pentru determinarea epurei dreptei se reprezintă punctele $A(a, a', a'')$, $B(b, b', b'')$ și se unesc proiecțiile de același nume ale punctelor, obținându-se proiecțiile d, d' și d'' ale dreptei (fig.3.24).

Proiecțiile punctelor $M(m, m', m'')$ și $N(n, n', n'')$ trebuie să fie situate fiecare pe proiecția de același nume a dreptei. Pentru aflarea lor se fixează pe Ox abscisa punctului M , $Om_x = 30$ și pe Oz , cota punctului N , $On_z = 20$. Prin punctul m_x se trasează linia de

3. Să se determine urmele dreptei $D(d, d', d'')$, definită de punctele $A(22, 3, 14)$ și $B(22, 10, 5)$. Ce informații oferă epura despre dreapta din spațiu ?

Rezolvare : Din analiza coordonatelor punctelor care determină dreapta se observă că aceasta este o dreaptă de profil, deci are urmă orizontală și verticală. Urmele dreptei nu se pot determina conform celor arătate la o dreaptă oarecare. După trasarea epurei dreptei $D(d, d', d'')$, se prelungește proiecția d'' până la intersecția cu axele Oz și Oy_1 , obținându-se proiecțiile laterale ale urmelor verticală și orizontală, $d'' \cap Oz = v''$, $d'' \cap Oy_1 = h''$ și apoi celelalte proiecții corespunzătoare (fig.3.25).

4. Se dă punctul $A(18, 13, 4)$. Să se stabilească coordonatele unui punct B , astfel încât segmentul de dreaptă AB să fie paralel cu planul vertical de proiecție și să facă un unghi de 30° cu planul orizontal și a unui punct C , astfel încât AC să fie verticală.

Rezolvare : Se reprezintă în epură punctul $A(a, a', a'')$, se trasează prin proiecția orizontală a o paralelă la axa Ox , d , prin proiecția laterală a'' o paralelă la axa Oy , d'' și prin proiecția verticală a' o dreaptă înclinată la 30° , față de axa Ox (fig.3.26). Acestea sunt proiecțiile dreptei $D(d, d', d'')$, o

frontală care conține segmentul AB . Rezultă că pentru a stabili coordonatele unui punct B este suficient să se ia abscisa punctului, de exemplu : $Ob_x = 9\text{mm}$, pentru ca apoi să se determine proiecțiile b , b' și b'' , astfel încât acestea să aparțină proiecțiilor dreptei D ; rezultă $B(9,13,9)$.

Prin punctul $A(a,a',a'')$ se trasează verticala $\Delta(\delta,\delta',\delta'')$, astfel încât $a = \delta$, $\delta' \perp Ox$, $a' \in \delta'$ și $\delta'' \perp Oy_1$, $a'' \in \delta''$. Punctul $C \in \Delta$ are abscisa și depărtarea punctului A , iar pentru cotă se consideră $Oc_z = 15$, $C(18,13,15)$.

5. Prin punctul $M(18,7,14)$ să se traseze proiecțiile unei drepte orizontale $D(d,d',d'')$ și ale unei drepte verticale $\Delta(\delta,\delta',\delta'')$.

Rezolvare : Se reprezintă epura punctului M ; prin proiecția verticală m' se trasează o paralelă la axa Ox , d , care se prelungește și prin proiecția laterală, aceasta reprezentând d'' . Problema are o infinitate de soluții, deoarece printr-un punct se pot trasa o infinitate de orizontale. Se consideră o orizontală care să facă 45° cu planul vertical, deci proiecția orizontală d se trasează prin m , înclinată la 45° față de axa Ox (fig.3.27).

Verticala $\Delta(\delta,\delta',\delta'')$ se trasează prin punctul $M(m,m',m'')$, astfel : $m = \delta$, $\delta' \perp Ox$, $m' \in \delta'$ și $\delta'' \perp Oy_1$, $m'' \in \delta''$.

6. Fie dreapta $D(d,d',d'')$ definită de punctele $A(21,4,8)$ și $B(8,8,5)$. Prin punctul $N(18,7,20)$ să se ducă o paralelă D_1 la D , o dreaptă concurentă D_2 cu D și o dreaptă disjunctă D_3 .

Rezolvare : Proiecțiile dreptei D_1 sunt paralele cu proiecțiile de același nume ale dreptei D , $d_1 \parallel d$, $d_1' \parallel d'$ și se trasează prin proiecțiile punctului N , $n \in d$, $n' \in d'$.

Dreapta D_2 , concurentă cu dreapta D , este definită de punctul N și de punctul A , $a \cup n = d_2$, $a' \cup n' = d_2'$. Astfel se asigură condiția ca punctul de concurență să aparțină ambelor drepte.

Dreapta disjunctă D_3 , este dată de proiecțiile d_3 și d_3' , trasate prin n , respectiv n' , care după cum se observă în figura 3.28, sunt concurente în f și e' , proiecții care nu aparțin aceluiași punct al dreptei D , nefiind situate pe aceeași linie de ordine.

7. Se dă frontala AB , $A(12,10,16)$, $B(4,10,2)$ și punctul exterior ei, $M(20,4,4)$. Să se traseze în epură prin M , o dreaptă D perpendiculară pe AB .

Rezolvare : Unghiul drept se proiectează în adevărată mărime în proiecția pe planul vertical. Prin m' se trasează o perpendiculară d' pe $a'b'$ și se determină punctul de intersecție $I(i,i')$. Unind m cu i se obține proiecția d a dreptei D (fig.3.29).

8. Să se precizeze poziția relativă a dreptelor D_1 , D_2 , D_3 din figura 3.30 și să se întrerupă proiecțiile celor invizibile în punctele de concurență aparentă.

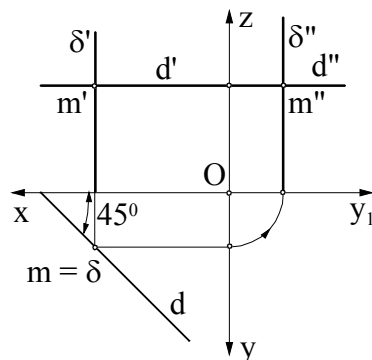


Fig.3.27 Rezolvarea problemei 5

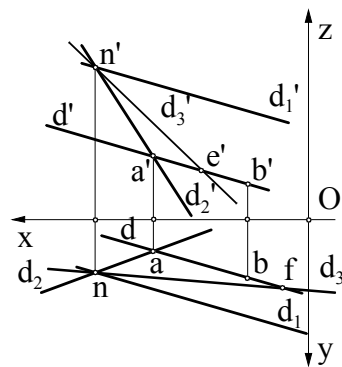


Fig.3.28 Rezolvarea problemei 6

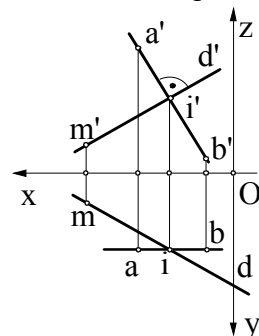


Fig.3.29 Rezolvarea problemei 7

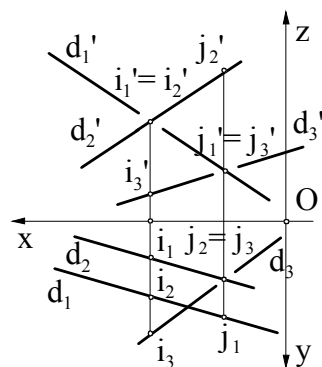


Fig.3.30 Rezolvarea problemei 8

Rezolvare : Studiind punctele de concurență aparentă I_1 , I_2 , J_1 , J_2 și J_3 se constată că dreptele sunt disjuncte. În proiecția verticală sunt vizibile punctele I_2 față de I_1 și J_1 față de J_3 , deci se reprezintă întrerupte proiecțiile d_1' și d_3' . În proiecția orizontală sunt vizibile punctul J_2 față de J_3 , deci se reprezintă întreruptă proiecția d_3 .

3.6 Probleme propuse

1. Fie punctele A și B. Să se reprezinte în epură dreapta $D(d, d', d'')$, definită de punctele A și B. Să se determine urmele dreptei, diedrele pe care le străbate dreapta și punctele de intersecție cu planele bisectoare.

- $A(40, 10, 15)$ și $B(15, 15, 10)$
- $A(90, 30, 10)$ și $B(10, 10, 60)$
- $A(30, -20, 10)$ și $B(10, 20, -30)$
- $A(10, -20, -30)$ și $B(30, 20, -10)$
- $A(15, 25, 25)$ și $B(40, 10, 15)$

2. Să se reprezinte în epură dreapta $D(d, d', d'')$, dată de M și N. Să se găsească urmele dreptei, diedrele pe care le străbate și punctele de intersecție cu planele bisectoare.

- $M(26, 17, 13)$ și $N(74, 7, 40)$
- $M(50, 10, 40)$ și $N(20, 30, 10)$
- $M(70, 40, 50)$ și $N(10, 10, 15)$
- $M(65, 35, 15)$ și $N(25, 10, 50)$
- $M(-40, 30, 20)$ și $N(30, -20, 46)$

3. Să se reprezinte în epură dreapta $D(d, d', d'')$: $A(6, 30, 30)$ și $B(10, -20,)$. Să se determine pe dreaptă un punct M, a cărui depărtare este -10mm și un punct N a cărui cotă este 20mm.

4. Să se determine proiecțiile punctului A, de cotă -20mm și a punctului B, de depărtare 10mm, știind că aparțin dreptei $D(d, d', d'')$, definită de punctele $E(30, 40, 10)$ și $F(-30, 10, 60)$.

5. Să se determine urmele dreptei $D(d, d', d'')$, definită de punctele $A(-10, 20, 15)$ și $B(10, 10, 15)$. Ce particularități are dreapta din spațiu ?

6. Să se determine urmele dreptei $D(d, d', d'')$, definită de punctele $A(50, 30, 10)$ și $B(30, 30, -10)$. Ce informații oferă epura despre dreapta din spațiu ?

7. Se dă punctul $A(30, 20, 50)$. Să se stabilească coordonatele unui punct B, astfel încât segmentul de dreaptă AB să fie paralel cu planul orizontal de proiecție și să facă un unghi de 45° cu planul [V] și a unui punct C, așa încât AC să definească o dreaptă de capăt.

8. Prin punctul $M(10, 30, 15)$ să se traseze proiecțiile unei drepte frontale $D(d, d', d'')$ și a unei drepte verticale $\Delta(\delta, \delta', \delta'')$.

9. Prin punctul $N(25, 15, 30)$ să se traseze proiecțiile unei drepte de profil $D(d, d', d'')$, care face 30° cu planul vertical și a unei drepte fronto-orizontale $\Delta(\delta, \delta', \delta'')$.

10. Fie punctul $A(20, 20, 50)$. Să se traseze prin A o dreaptă orizontală, știind că aceasta întâlnește semiplanul bisector $[B_1]$ la o distanță de 60mm de planul lateral.

11. Fie dreapta $D(d, d', d'')$ definită de punctele $A(10, 30, 15)$ și $B(60, 10, 5)$. Prin punctul $N(45, 50, 40)$ să se ducă o paralelă D_1 la D, o dreaptă concurentă D_2 cu D și o dreaptă disjunctă D_3 .

12. Prin punctul $C(30, 20, 40)$ să se traseze o perpendiculară pe o orizontală D, aflată la 50mm de planul orizontal, știind că face cu planul vertical un unghi de 45° .

13. Să se ducă în epură prin punctul $M(10, -20, 30)$ o verticală și o fronto-orizontală.

14. Prin punctul $A(20, 0, 40)$ să se ducă o frontală care face 60° cu planul orizontal.

15. Să se construiască epura unui triunghi isoscel ABC, știind că baza AB este paralelă cu planul orizontal de proiecție: $A(50, 10, 20)$, $B(20, 40, 20)$.

4. PLANUL

4.1 Reprezentarea planului. Relația punct – dreaptă – plan

Un plan oarecare $[P]$ este determinat în spațiu de trei puncte necoliniare, de o dreaptă și un punct exterior ei, de două drepte paralele sau concurente. Și în epură un plan se reprezintă prin proiecțiile elementelor geometrice care îl determină. Astfel, în figurile următoare planele sunt definite după cum urmează:

- prin trei puncte necoliniare, $A(a,a')$, $B(b,b')$ și $C(c,c')$ – planul $[P]$ – fig.4.1;
- prin o dreaptă $AB(ab,a'b')$ și un punct exterior ei $C(c,c')$ – planul $[Q]$ – fig.4.2;
- prin două drepte paralele $AB(ab,a'b')$ și $MN(mn,m'n')$ – planul $[R]$ – fig.4.3;
- prin două drepte concurente $AB(ab,a'b')$ și $MN(mn,m'n')$ cu punctul de concurență în $I(i,i')$ – planul $[T]$ – fig.4.4;

Reprezentarea planelor prin modurile prezentate mai sus nu este destul de sugestivă, adică nu arată cu suficientă claritate poziția planului față de planele de proiecție. Pentru a înlătura această problemă, în Geometria descriptivă, în mod frecvent un plan oarecare $[P]$ este reprezentat prin urmele sale.

Urmele planului reprezintă dreptele de intersecție dintre planul oarecare $[P]$ și planele de proiecție. Acestea sunt: *urma orizontală* – P , *urma verticală* – P' și *urma laterală* – P'' (fig.4.5, a).

Urmele sunt drepte conținute în planele de proiecție și anume urma orizontală, P , este o orizontală de cotă zero, urma verticală, P' , este o frontală de depărtare zero și urma laterală, P'' ,

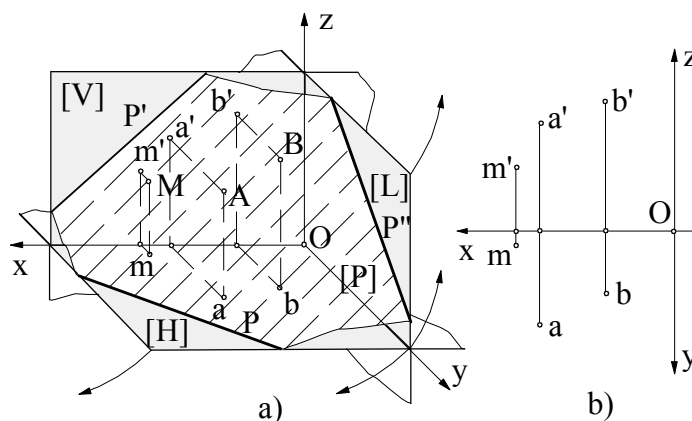


Fig.4.1 Reprezentarea planului determinat prin trei puncte necoliniare: a) în spațiu ; b) în epură

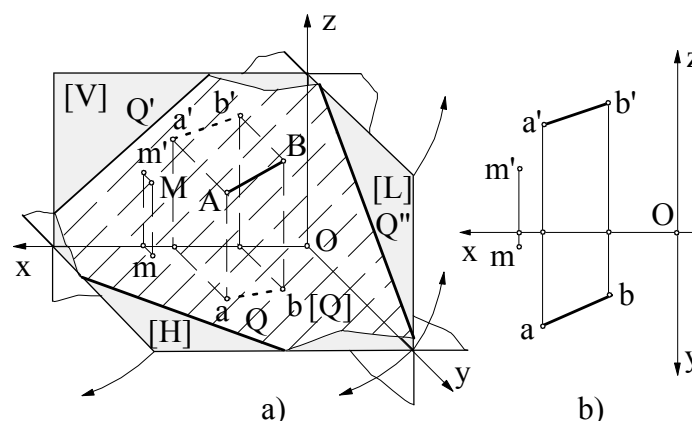


Fig.4.2 Reprezentarea planului determinat de o dreaptă și un punct exterior: a) în spațiu ; b) în epură

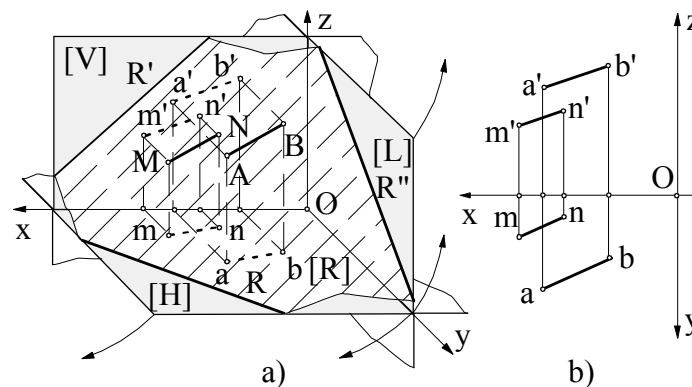


Fig.4.3 Reprezentarea planului determinat prin două drepte paralele: a) în spațiu ; b) în epură

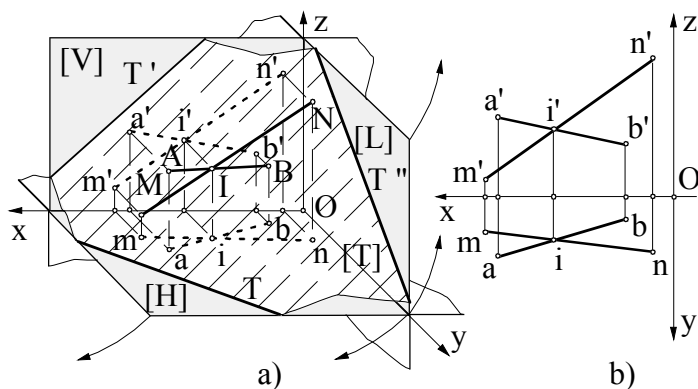


Fig.4.4 Reprezentarea planului determinat prin drepte concurente: a) în spațiu ; b) în epură

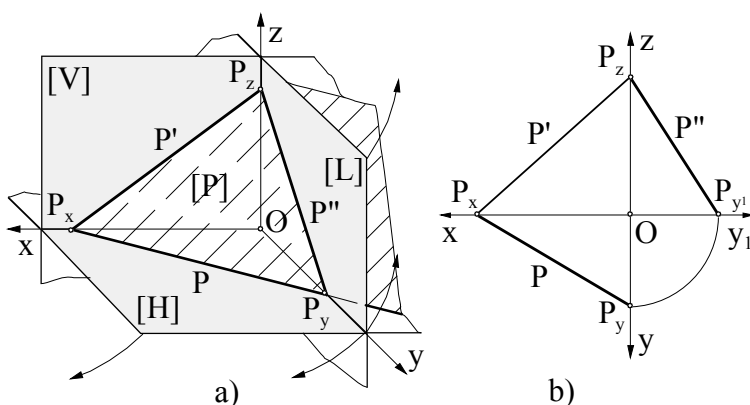


Fig.4.5 Reprezentarea urmelor planului: a) în spațiu ; b) în epură

diedrul I și că acestea fiind drepte, sunt infinite și pot fi prelungite dincolo de punctele de intersecție cu axele.

O dreaptă este situată într-un plan dacă toate punctele dreptei aparțin planului, sau mai simplu, dacă are cel puțin două puncte conținute în acel plan. Știind că o dreaptă, D , intersectează planele de proiecție după urmele sale $H(h, h', h'')$ și $V(v, v', v'')$ și considerând această dreaptă inclusă într-un plan $[P]$, înseamnă că urmele dreptei vor fi situate pe urmele planului. Astfel, în epură putem considera ca două puncte ale dreptei conținute în plan chiar urmele orizontală și verticală ale dreptei (fig.4.6, a).

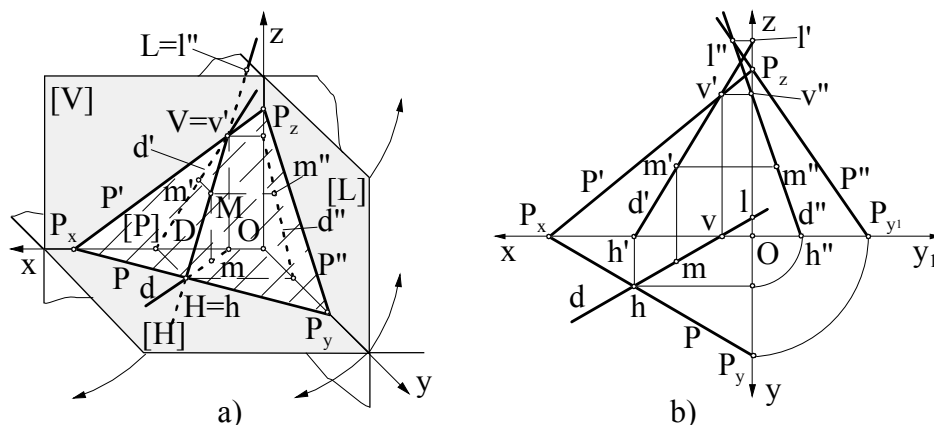


Fig.4.6 Relația punct – dreaptă – plan, $M \in D, D \in [P] \Rightarrow M \in [P]$

o dreaptă de profil de abscisă zero. Cele trei urme sunt concurente două câte două în punctele P_x, P_y , și P_z situate pe axe, puncte care reprezintă intersecția dintre planul $[P]$ și aceste axe.

Epura planului $[P]$ (fig.4.5, b) se obține prin rotirea planelor $[H]$ și $[L]$ peste planul $[V]$, până la suprapunerea lor. În general, urmele orizontală și verticală sunt suficiente pentru rezolvarea problemelor, urma laterală folosindu-se atunci când prin proiecția pe planul lateral se obține o simplificare a rezolvării.

Cunoscând urma orizontală și verticală a unui plan, pentru obținerea urmei laterale, P'' , se rotește punctul P_y în jurul originii O , în sens trigonometric până se situează pe axa Oy_1 , în P_{y1} , iar apoi acest punct se unește cu punctul P_z : $P_{y1} \cup P_z = P''$. Trebuie făcută precizarea că planul din figura 4.5 este reprezentat prin urmele din

Observație : Condiția necesară și suficientă ca o dreaptă să aparțină unui plan este ca urmele dreptei să fie situate pe urmele de același nume ale planului.

În figura 4.6, b dreapta $D(d, d', d'')$ aparține planului $[P]$, deoarece are proiecția orizontală a urmei orizontale, h , pe urma orizontală, P , a planului, proiecția verticală a urmei verticale, v' , pe urma verticală, P' , a planului și proiecția laterală a urmei laterale, l'' , pe urma laterală, P'' , a planului.

Pentru a se putea lua un punct într-un plan, trebuie să se asigure faptul că punctul se găsește pe o dreaptă din plan.

Observație : În epură, condiția necesară și suficientă ca un punct să aparțină unui plan, este ca punctul să fie situat pe o dreaptă din plan.

În figura 4.6 punctul $M(m, m', m'')$ aparține planului $[P]$, deoarece este situat pe dreapta $D(d, d', d'')$ din plan, îndeplinind condiția de apartenență a punctului la dreaptă, și anume : $m \in d$, $m' \in d'$, $m'' \in d''$.

În probleme, se întâlnește frecvent cerința de a se lua o dreaptă într-un plan dat fie prin urme, fie prin elementele geometrice de definire a acestuia.

Dacă planul este dat prin urme se procedează astfel (fig.4.6):

- se alege o proiecție a dreptei, fie aceasta proiecția verticală, d' ;
- se determină urmele dreptei $h' = d' \cap Ox$ și $v' = d' \cap P'$;
- se duc linii de ordine din h' până pe P și se determină h și din v' până pe Ox și se determină v ;
- se determină proiecția orizontală a dreptei $d = h \cup v$.

Dacă planul este dat prin două drepte paralele (fig.4.7, a) sau concurente (fig.4.7, b), se determină punctele de intersecție dintre dreapta căutată și dreptele de definire a planului, astfel:

- se trasează una dintre proiecțiile dreptei; fie proiecția verticală d' (δ') și se determină proiecțiile verticale ale punctelor de intersecție cu dreptele prin care este dat planul: $d' \cap a'b' = n'$, $d' \cap c'e' = m'$; ($\delta' \cap a'b' = f'$, $\delta' \cap c'b' = g'$);
- se duc linii de ordine din n' (f') până pe ab și din m' (g') până pe ce (cb), rezultând proiecțiile orizontale n (f) și m (g) ale punctelor de intersecție;
- se determină proiecția orizontală a dreptei, $d = m \cup n$; ($\delta = f \cup g$).

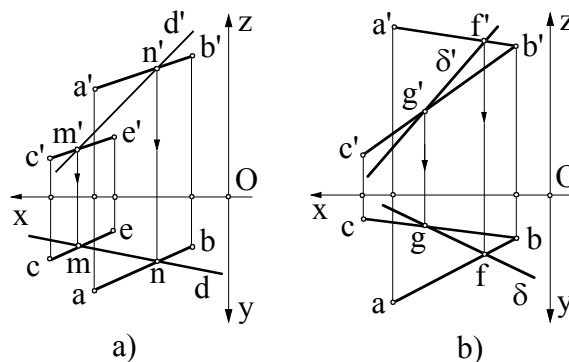


Fig.4.7 Dreaptă conținută în plan :

- a) $D(d, d') \in [AB, CE]$, $AB \parallel CE$;
 b) $\Delta(\delta, \delta') \in [AB, CB]$, $AB \cap CB = B$

4.2 Determinarea urmelor unui plan

Dacă se cunosc elementele care determină un plan se pot afla urmele planului, respectând condiția de apartenență a dreptei la plan. Toate cele patru cazuri de determinare a planului prezentate anterior, se reduc la două cazuri de determinare a urmelor unui plan, și anume: plan determinat de două drepte paralele și plan determinat de două drepte concurente. Într-adevăr, când planul este dat prin trei puncte distincte sau o dreaptă și un punct exterior ei, din aceste elemente se pot defini două drepte paralele sau două drepte concurente.

Pentru determinarea urmelor unui plan se aplică raționamentul invers, plecând de la condiția de apartenență a dreptelor la plan, și anume urmele unui plan trec prin urmele de

același nume ale dreptelor care îl determină. Astfel, se determină urmele a două drepte care aparțin planului și se unesc proiecțiile de același nume obținând urmele planului.

Fie planul $[P]$ definit de două drepte paralele $D_1(d_1, d_1')$ și $D_2(d_2, d_2')$ (fig.4.8). Pentru determinarea urmelor planului se găsesc urmele orizontale $H_1(h_1, h_1')$ și $H_2(h_2, h_2')$ și urmele verticale $V_1(v_1, v_1')$ și $V_2(v_2, v_2')$ ale dreptelor și se unesc proiecțiile orizontale ale urmelor orizontale și proiecțiile verticale ale urmelor verticale : $h_1 \cup h_2 = P$, $v_1' \cup v_2' = P'$. Dacă reprezentarea este corectă, urmele P și P' sunt concurente în P_x pe axa Ox .

Construcția din figura 4.8 poate fi folosită și dacă planul $[P]$ ar fi dat prin trei puncte necoliniare A, B, C sau printr-o dreaptă AB și un punct exterior ei C .

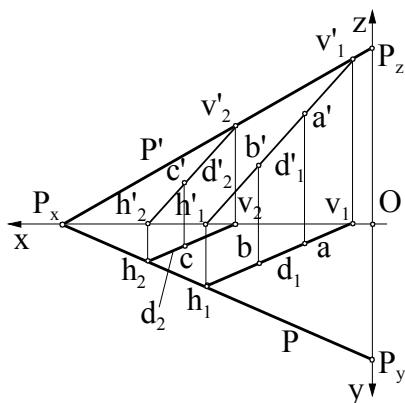


Fig.4.8 Urmele planului determinat de două drepte paralele

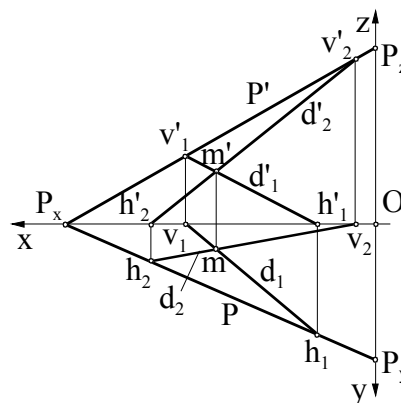


Fig.4.9 Urmele planului determinat de două drepte concurente

Urmele unui plan $[P]$ care conține dreptele $D(d, d')$ și $D_1(d_1, d_1')$, concurente în punctul $M(m, m')$, se obțin în mod similar, după determinarea urmelor orizontale și verticale ale celor două drepte : $P = h \cup h_1$, $P' = v' \cup v_1'$ și $P \cap P' = P_x$, $P_x \in Ox$ (fig.4.9).

4.3 Drepte particulare ale planului

Într-un plan oarecare pe lângă dreptele care ocupă o poziție oarecare, există și drepte care au o poziție particulară față de planele de proiecție. Aceste drepte sunt : orizontalele, frontalele, dreptele de profil și liniile de cea mai mare pantă ale planului.

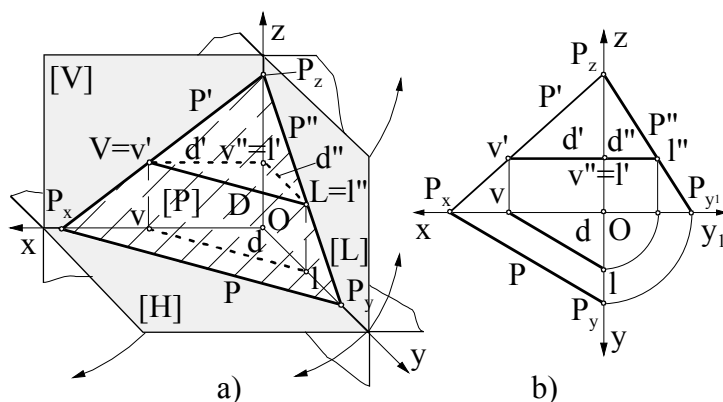


Fig.4.10 Reprezentarea orizontalei planului:

a) în spațiu ; b) în epură

în epură proiecția orizontală paralelă cu urma P a planului, $d \parallel P$ (fig.4.10, b).

4.3.1 Orizontala planului

Orizontala planului $[P]$ este o dreaptă, $D(d, d', d'')$, conținută într-un plan oarecare $[P]$ și paralelă cu planul $[H]$ de proiecție (fig.4.10, a). Toate orizontalele unui plan sunt paralele între ele, deci au proiecțiile paralele în epură. Deoarece, urma orizontală, P , a planului este și ea o orizontală cuprinsă în planul $[H]$, rezultă că orizontala D are

Se poate duce orizontala unui plan și când acesta nu este dat prin urme.

De exemplu, se cere să se ducă prin punctul $A(a, a')$ o orizontală a planului triunghiului $[ABC]$ (fig.4.11).

Pentru aceasta prin proiecția verticală a' se duce proiecția verticală g' a orizontalei, paralelă cu Ox . Se determină punctul de intersecție dintre aceasta și proiecția verticală $b'c'$, m' , și ducând linie de ordine, proiecția corespunzătoare, m , pe proiecția orizontală bc a laturii BC . Se unesc proiecțiile orizontale a și m și se determină proiecția orizontală g a orizontalei, $g = a \cup m$.

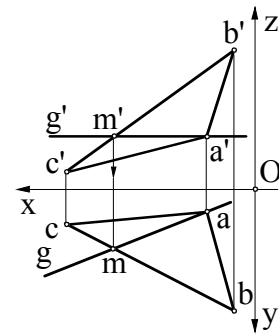


Fig.4.11 Orizontala planului determinat de ΔABC

4.3.2 Frontala planului

Frontala planului este o dreaptă $D(d, d')$ paralelă cu planul vertical de proiecție și conținută în planul $[P]$ (fig.4.12, a). Toate frontalele unui plan sunt paralele între ele, deci au proiecțiile paralele în epură.

Urma verticală d' a frontalei planului $[P]$ este paralelă cu urma verticală P' a planului (care este și ea o frontală cuprinsă în planul $[V]$ de proiecție) și trece prin h' de pe axa Ox . Frontala planului are urma orizontală $H(h, h')$ situată pe urma orizontală a planului $[P]$. Proiecția orizontală d a frontalei trece prin h și este paralelă cu Ox (fig.4.12, b).

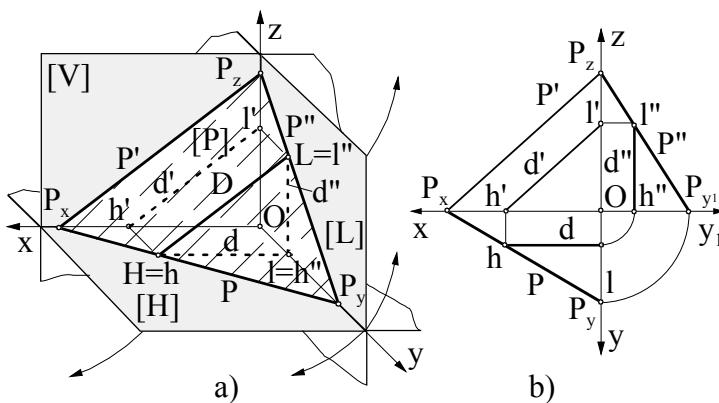


Fig.4.12 Reprezentarea frontalei planului:
a) în spațiu ; b) în epură

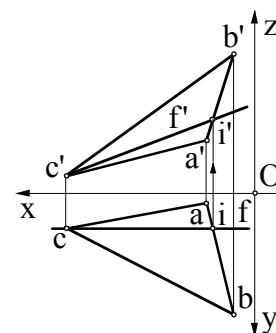


Fig.4.13 Frontala planului determinat de ΔABC

Pentru a construi o frontală într-un plan determinat prin trei puncte necoliniare $A(a, a')$, $B(b, b')$ și $C(c, c')$, planul triunghiului ABC , se duce proiecția orizontală f a frontalei, printr-unul din puncte, C spre exemplu. Se determină punctul i , de intersecție cu latura ab , al doilea punct al frontalei (fig.4.13). Prin i se duce linia de ordine care determină proiecția i' a punctului, pe proiecția verticală $a'b'$. Se unește c' cu i' și se determină proiecția verticală a frontalei, $f' = a' \cup m'$.

Astfel, frontala $F(f, f')$ a planului $[ABC(abc, a'b'c')]$ este determinată în ambele proiecții.

4.3.3 Dreapta de profil a planului

Dreapta de profil a planului este o dreaptă $D(d,d',d'')$ paralelă cu planul lateral de proiecție și situată în planul $[P]$ (fig. 4.14, a).

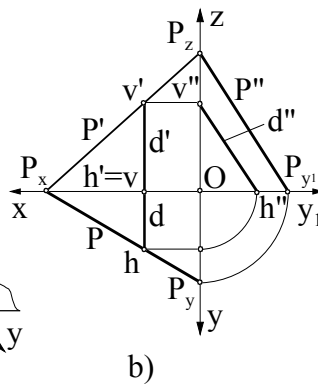
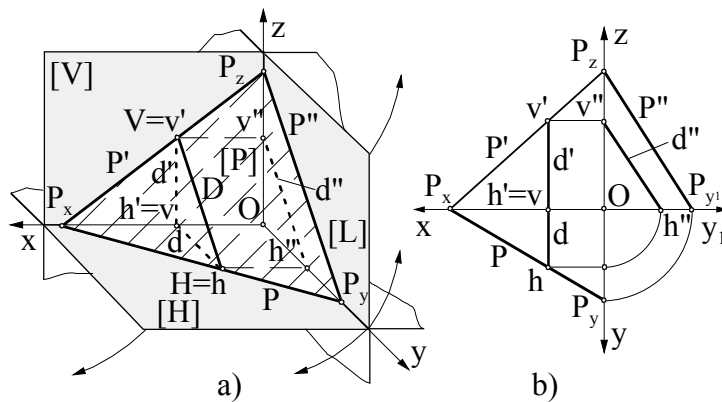


Fig. 4.14 Reprezentarea dreptei de profil a planului:
a) în spațiu ; b) în epură

În epură, dreapta de profil a planului $[P]$ are proiecția laterală d'' paralelă cu urma laterală a planului, P'' , deoarece toate dreptele de profil ale unui plan sunt paralele între ele (fig. 4.14, b). Dreapta de profil are numai urmă orizontală $H(h, h', h'')$ și urmă verticală $V(v, v', v'')$, cu proiecțiile h situată pe P și v' situată pe P' . Prin aceste urme trec proiecțiile orizontală d și verticală d' ale dreptei de profil, perpendiculare pe Ox și suprapuse.

4.3.4 Liniile de cea mai mare pantă ale unui plan

Liniile de cea mai mare pantă ale unui plan oarecare sunt dreptele conținute în acel plan și care formează unghiurile cele mai mari cu planele de proiecție. Deci, într-un plan pot exista trei drepte de cea mai mare pantă : față de planul orizontal de proiecție, față de planul vertical de proiecție și față de planul lateral de proiecție. Acestea se vor nota în continuare, prescurtat, l.c.m.m.p.

a) *L.c.m.m.p. față de planul $[H]$* este o dreaptă conținută în planul $[P]$ și perpendiculară pe toate orizontalele planului, deci implicit și pe urma orizontală P a planului (fig. 4.15). În epură, dreapta $D(d, d')$ considerată l.c.m.m.p. față de planul $[H]$, are proiecția orizontală d perpendiculară pe proiecția orizontală a oricărei orizontale $G(g, g')$ a planului $[P]$, conform teoremei unghiului drept.

Proprietăți ale l.c.m.m.p. față de planul $[H]$:

1) l.c.m.m.p. față de planul $[H]$ măsoară între ea și proiecția ei pe planul orizontal unghiul diedru dintre planul oarecare $[P]$ și planul $[H]$. Aceste plane formează între ele

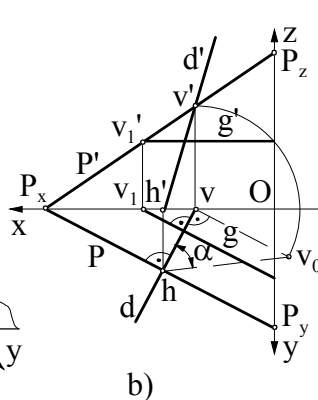
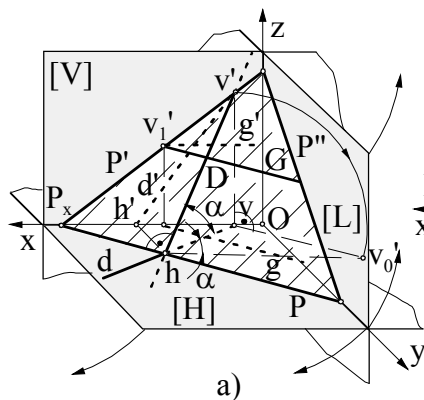


Fig. 4.15 Reprezentarea l.c.m.m.p. față de planul $[H]$:
a) în spațiu ; b) în epură

unghiul diedru α , a cărui muchie este urma orizontală P a planului $[P]$. Mărimea acestui unghi se măsoară cu unghiul plan format între două drepte perpendiculare pe urma P , câte una în fiecare din cele două plane $[P]$ și $[H]$. Acestea sunt l.c.m.m.p. față de planul $[H]$, D și proiecția ei pe planul $[H]$, d , concurente în h , pe urma orizontală P .

În figura 4.15, a se observă că unghiul α face parte din triunghiul dreptunghic hvv' ,

ale cărui catete sunt cota vv' și proiecția orizontală hv . În epură (fig.4.15, b), se poate construi acest triunghi rotind cota vv' până devine perpendiculară pe hv , obținând punctul v_0' . Unind v_0' cu h se obține triunghiul dreptunghic în v cu $\angle \alpha = \angle v h v_0'$.

2) l.c.m.m.p. față de planul $[H]$ determină singură planul în care se găsește (singurul caz când un plan poate fi determinat de o singură dreaptă).

În figura 4.16 se consideră dată dreapta $D(d, d')$, ca fiind l.c.m.m.p. față de planul $[H]$ a planului $[P]$ și se cere să se determine urmele acestui plan. Cunoscând că proiecția orizontală d a dreptei trebuie să fie perpendiculară pe urma orizontală P a planului care o conține, se determină urmele dreptei și se duce prin urma h urma P a planului astfel încât, $P \perp d$. La intersecția cu axa Ox se găsește P_x . Urmă verticală P' a planului trece prin P_x și prin v' , $P' = P_x \cup v'$.

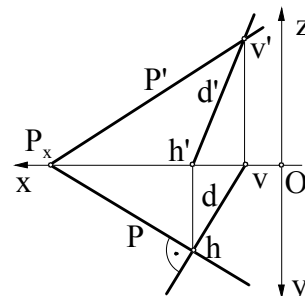


Fig.4.16 Plan determinat prin l.c.m.m.p. față de planul $[H]$

L.c.m.m.p. față de planul $[H]$ poate fi trasată și dacă planul este dat în alt fel decât prin urme. În figura 4.17 planul este determinat de trei puncte necoliniare $A(a, a', a'')$, $B(b, b', b'')$ și $C(c, c', c'')$ și se cere trasarea unei l.c.m.m.p. a planului $[ABC]$ față de planul $[H]$, $\Delta(\delta, \delta', \delta'')$.

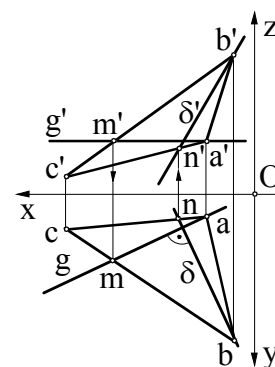


Fig.4.17 L.c.m.m.p. a planului $[ABC]$ față de planul $[H]$

Pentru aceasta este necesară o orizontală a planului și pentru a ușura construcția, aceasta se duce printr-un punct de definire a planului, punctul A . Prin a' se duce o paralelă la axa Ox , g' , proiecția verticală a orizontalei, care intersectează o dreaptă a planului, $c'b'$, în m' , al doilea punct al orizontalei. Proiecția orizontală a orizontalei, g , va fi dată de am . Perpendiculara dusă din b (sau din alt punct al planului $[ABC]$) pe am , δ , este proiecția orizontală a l.c.m.m.p. față de planul $[H]$. Cealaltă proiecție a ei se găsește ținând seama că aparține planului, deci este concurentă cu dreapta AC în punctul $N(n, n')$, $\delta = b \cup n$, $\delta' = b' \cup n'$.

b) L.c.m.m.p. față de planul $[V]$ este o dreaptă a planului $[P]$ care este perpendiculară pe toate frontalele planului, deci și pe urma verticală P' . Fie $D(d, d')$ l.c.m.m.p. a planului $[P]$ față de planul $[V]$ (fig.4.18). Proiecția d' este perpendiculară pe proiecția f' a unei frontale din planul $[P]$, cât și pe urma P' a planului.

Și pentru l.c.m.m.p. față de planul $[V]$ se pot analiza proprietăți similare cu cele ale l.c.m.m.p. față de planul $[H]$. Astfel, l.c.m.m.p. față de planul $[V]$ măsoară între ea și proiecția ei pe planul $[V]$ unghiul diedru β dintre planele $[P]$ și $[V]$. Unghiul β este în spațiu unghi al triunghiului

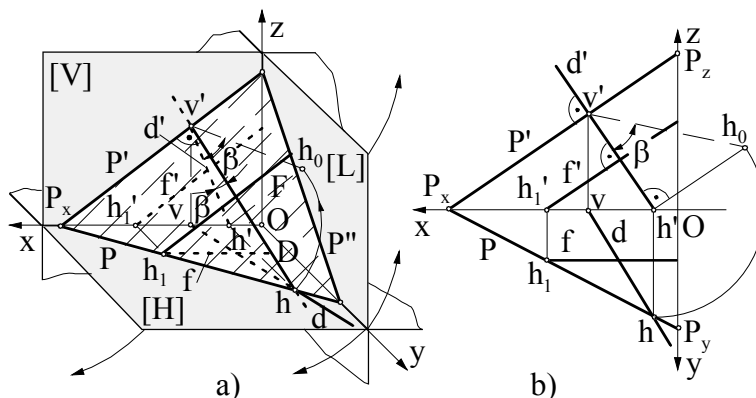


Fig.4.18 Reprezentarea l.c.m.m.p. față de planul $[V]$: a) în spațiu ; b) în epură

dreptunghic $v'h'h$ (fig.4.18, a). Pentru determinarea lui în epură se construiește acest triunghi pornind de la cateta $v'h'$ și rotind cealaltă catetă $h'h$ până devine perpendiculară pe $v'h'$, obținând punctul h_0 . Unghiul căutat este $\angle \beta = \angle h'v'h_0$.

Ca și în cazul anterior și l.c.m.m.p. față de planul $[V]$ determină singură planul (se face un raționament similar).

4.4 Pozițiile particulare ale unui plan față de planele de proiecție

Planul care ocupă în spațiu o anumită poziție față de planele de proiecție se numește plan particular.

Planele particulare pot avea următoarele poziții :

- plane perpendiculare pe unul din planele de proiecție;
- plane paralele cu unul din planele de proiecție.

4.4.1 Plane perpendiculare pe unul din planele de proiecție

Planul perpendicular pe unul din planele de proiecție poartă numele de plan proiectant față de planul pe care este perpendicular. Planul proiectant intersectează toate cele trei plane de proiecție, deci are trei urme și taie două axe de proiecție, cu a treia fiind paralel.

a) *Plan proiectant față de planul orizontal de proiecție* (plan vertical)

Planul proiectant față de planul orizontal de proiecție este numit și plan vertical.

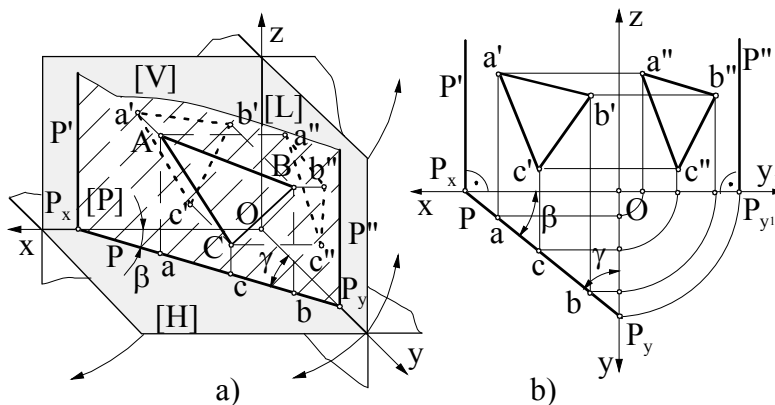


Fig.4.19 Reprezentarea planului proiectant față de planul $[H]$:

a) în spațiu ; b) în epură

Urma orizontală P a acestui plan este o dreaptă oarecare în planul $[H]$. Urmele verticală P' și laterală P'' sunt drepte perpendiculare pe planul $[H]$, în P_x și respectiv P_y , având în vedere că planele $[P]$, $[V]$ și $[L]$ sunt perpendiculare pe planul $[H]$, deci și dreptele lor de intersecție sunt perpendiculare pe același plan (fig.4.19). În epură $P' \perp Ox$ și $P'' \perp Oy_1$.

Unghiurile pe care

le formează planul $[P]$ cu planul $[V]$, β , și cu planul $[L]$, γ , se regăsesc în epură între urma orizontală P și axa Ox , β , și respectiv între urma orizontală P și axa Oy , γ .

Orice punct, dreaptă sau figură geometrică conținută într-un plan vertical se proiectează pe planul orizontal, pe o dreaptă, suprapusă cu urma orizontală a planului. Triunghiul ABC din planul vertical $[P]$ are proiecția orizontală $abc \equiv P$ și proiecțiile verticală $a'b'c'$ și laterală $a''b''c''$ deformate față de mărimea reală (fig.4.19).

În probleme, planul proiectant vertical se definește prin valorile date pentru distanțele pe axe Ox și Oy (OP_x și OP_y), fiind paralel cu axa Oz , $OP_z = \infty$.

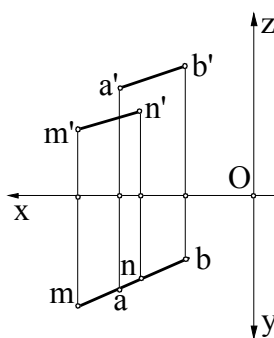


Fig.4.20 Plan vertical, determinat de două drepte paralele

Un plan dat prin elementele care îl determină, poate fi identificat ca plan vertical, dacă în proiecția orizontală acele elemente se suprapun. În figura 4.20 planul $[P]$ este definit de două drepte paralele, $AB \parallel MN$, ale căror proiecții orizontale se suprapun, fiind identice cu urma orizontală a planului $ab \equiv mn \equiv P$. Despre acest plan se poate spune că este perpendicular pe planul orizontal de proiecție.

b) *Plan proiectant față de planul vertical de proiecție (plan de capăt)*

Planul perpendicular pe planul vertical de proiecție este numit plan de capăt (fig.4.21). Acesta are urma orizontală P perpendiculară pe axa Ox în P_x , urma laterală P'' perpendiculară pe axa Oz în P_z și urma verticală P' înclinată față de axele Ox și Oz . Unghiurile pe care le face urma P' cu axa Ox , α și cu axa Oz , γ , sunt unghiurile pe care le face planul de capăt $[P]$ cu planul $[H]$, α și respectiv cu planul $[L]$, γ .

Orice element geometric conținut de planul de capăt $[P]$ are proiecția verticală suprapusă peste urma verticală P' a planului. În figura 4.21 planul $[P]$ conține triunghiul ABC , cu proiecția verticală $a'b'c' \equiv P'$. Triunghiul, în ansamblu, se proiectează deformat pe toate planele de proiecție.

În probleme, planul de capăt se definește prin valorile date pentru distanțele pe axele Ox și Oz (OP_x și OP_z), fiind paralel cu axa Oy , $OP_y = \infty$.

Când planul de capăt este dat în alt mod decât prin urme, poziția lui poate fi imediat dedusă dacă se studiază proiecțiile verticale ale elementelor care definesc planul. Astfel, în figura 4.22 dreptele paralele $AB(ab, a'b')$ și $MN(mn, m'n')$ determină un plan proiectant față de planul $[V]$, deoarece proiecțiile lor verticale sunt suprapuse. Ele determină urma verticală a planului.

c) *Plan proiectant față de planul lateral de proiecție*

În cazul planului perpendicular pe planul lateral se întâlnesc două situații :

1 – *plan paralel cu linia de pământ* – este un plan $[P]$ perpendicular pe planul $[L]$ de proiecție care are urma orizontală P și

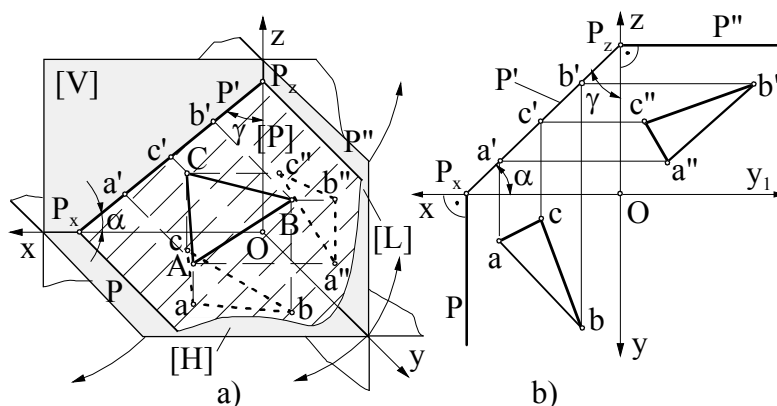


Fig.4.21 Reprezentarea planului de capăt :
a) în spațiu ; b) în epură

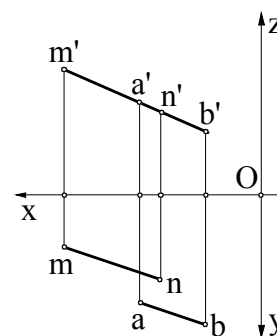


Fig.4.22 Plan de capăt, determinat de două drepte paralele

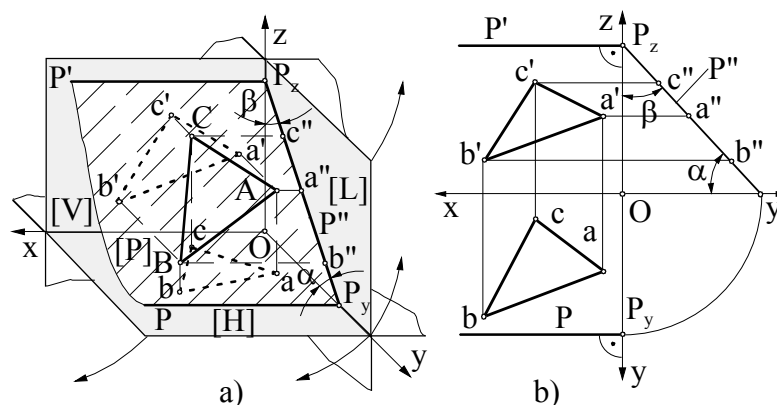


Fig.4.23 Reprezentarea planului paralel cu linia de pământ :
a) în spațiu ; b) în epură

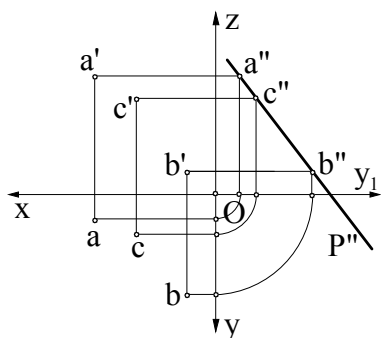


Fig. 4.24 Plan paralel cu linia de pământ, determinat de trei puncte necoliniare

trei puncte sunt în linie dreaptă (coliniare) și ele determină chiar urma laterală a planului pe care îl definesc (fig. 4.24).

În probleme, planul paralel cu linia de pământ se definește prin valorile date pentru distanțele pe axele Oy și Oz (OP_y și OP_z), fiind paralel cu axa Ox , $OP_x = \infty$.

2 – plan axial : tot plan proiectant față de planul $[L]$ este și planul care trece prin axa Ox și poartă numele de plan axial.

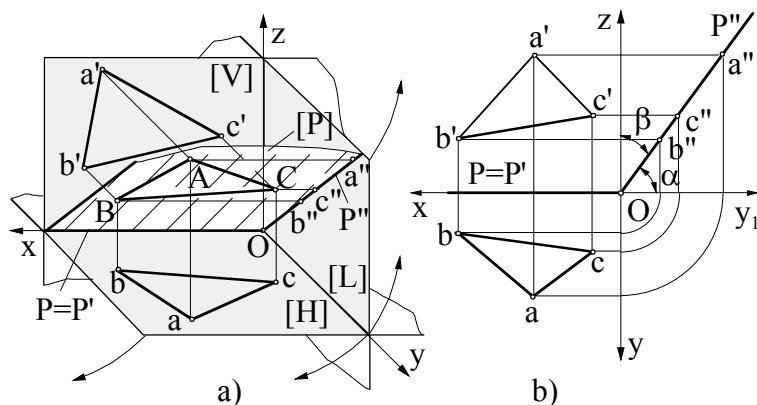


Fig. 4.25 Reprezentarea planului axial $[P]$:
a) în spațiu ; b) în epură

bisector.

Dacă planul axial este dat în epură prin urma orizontală și verticală, planul nu este determinat, deoarece prin axa Ox pot trece o infinitate de plane, toate având urmele orizontale și verticale pe linia de pământ. Pentru a fi determinat unul dintre ele, trebuie să se mai dea, pe lângă cele două urme identice, cel puțin încă un element, cum ar fi un punct din acel plan.

4.4.2 Plane paralele cu un plan de proiecție

Planele paralele cu un plan de proiecție sunt perpendiculare pe celelalte două plane de proiecție, deci se poate spune că sunt proiectante față de acestea (dublu proiectante). Aceste plane au numai două urme și intersectează o singură axă de proiecție, axa perpendiculară pe ele.

verticală P' paralel cu axa Ox și urma laterală P'' înclinată față de axele Oz cu unghiul β și față de Oy_1 cu unghiul α , unghiuri ce reprezintă unghiurile pe care le face planul $[P]$ cu planul $[V]$, β , respectiv cu planul $[H]$, α . (fig. 4.23).

Toate elementele geometrice ce aparțin unui plan paralel cu linia de pământ se proiectează pe planul lateral suprapuse pe urma laterală P'' a planului. Triunghiul ABC aparține planului $[P]$ și are proiecția orizontală abc și verticală $a'b'c'$ deformate, iar proiecția laterală suprapusă pe urma laterală a planului, $a''b''c'' \equiv P''$ (fig. 4.23).

Când planul este dat prin trei puncte necoliniare ca în figura 4.24, se poate spune că acesta este un plan paralel cu linia de pământ, deoarece proiecțiile laterale ale celor

Planul axial $[P]$ are urma orizontală P și verticală P' suprapuse și identice cu axa Ox și urma laterală P'' înclinată față de axele Oy și Oz și trece prin origine (fig. 4.25). Planul $[P]$ este înclinat față de planul $[H]$ cu unghiul α și față de planul $[V]$ cu unghiul β , unghiuri care se regăsesc în epură între urma laterală P'' a planului și axa Oy_1 , respectiv axa Oz . Dacă $\angle \alpha = \angle \beta$, planul axial este plan

a) *Plan de nivel*

Planul de nivel $[N]$ este un plan paralel cu planul orizontal de proiecție. Urma orizontală a planului este la infinit, iar urma verticală N' și laterală N'' sunt paralele cu axa Ox , respectiv Oy (fig.4.26, a). În epură, planul este reprezentat prin urma verticală N' și laterală N'' , în prelungire, paralele cu Ox , care trec prin punctul de intersecție cu axa Oz , N_z (fig.4.26, b).

Având în vedere că planul de nivel este paralel cu planul $[H]$, orice figură geometrică se proiectează pe planul orizontal în adevărată mărime, iar pe planul vertical și lateral, suprapusă peste urma verticală, respectiv laterală a planului. Triunghiul ABC , conținut în planul $[N]$ este proiectat în adevărată mărime în proiecția orizontală $abc \equiv ABC$ și are proiecția verticală $a'c'b' \equiv N'$ și proiecția laterală $b''a''c'' \equiv N''$.

Un plan de nivel este determinat dacă se cunoaște cota z a oricărui punct din acest plan, fiind astfel definit : $ON_x = \infty$, $ON_y = \infty$, $ON_z = z$.

b) *Plan de front*

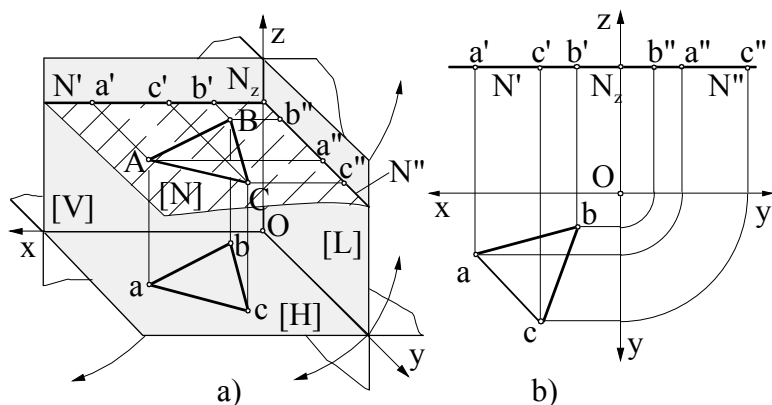
Planul de front $[F]$ este paralel cu planul vertical de proiecție (fig.4.27, a). Urma orizontală F a planului este paralelă cu linia de pământ, urma verticală F' este la infinit, iar urma laterală F'' este paralelă cu axa Oz . Planul de front taie numai axa Oy , în punctul F_y . În epură, urmele planului trec prin F_y și respectiv F_{y1} .

Orice figură geometrică conținută într-un plan de front se proiectează în adevărată mărime pe planul vertical, iar pe planul orizontal și lateral respectivele urme ale planului. În figura 4.27, b, triunghiul ABC are proiecția verticală în mărime reală, $a'b'c' \equiv ABC$ și proiecțiile orizontală și laterală suprapuse pe urmele planului : $abc \equiv F$, $a''b''c'' \equiv F''$.

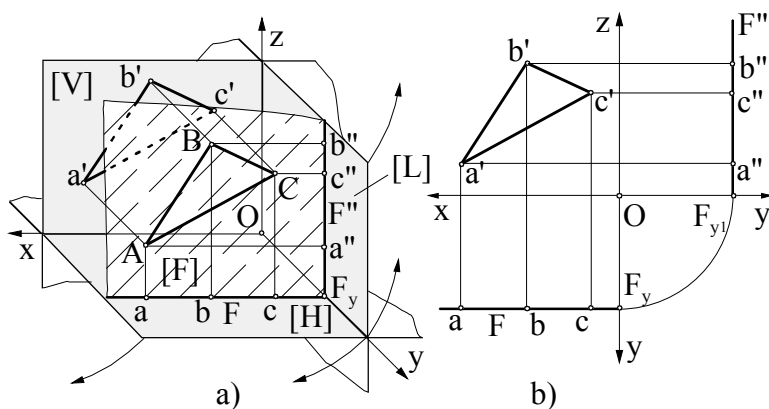
Planul de front este definit când se cunoaște depărtarea y a oricărui punct ce aparține planului, fiind definit astfel : $OF_x = \infty$, $OF_y = y$, $OF_z = \infty$.

c) *Plan de profil*

Planul de profil $[P]$ este paralel cu planul lateral de proiecție (fig.4.28).

Fig.4.26 Reprezentarea planului de nivel $[N]$:

a) în spațiu ; b) în epură

Fig.4.27 Reprezentarea planului front $[F]$:

a) în spațiu ; b) în epură

Acest plan taie numai linia de pământ, în P_x , punct prin care trece și are urma orizontală, P și verticală P' , perpendiculare pe axa Ox și în prelungire. Urma laterală a planului de profil este la infinit.

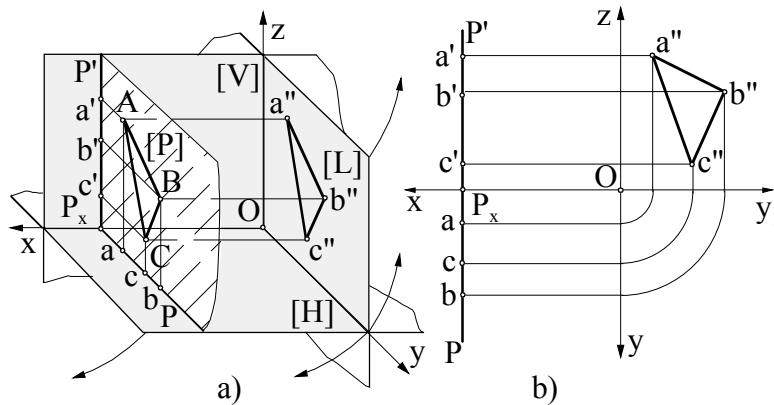


Fig.4.28 Reprezentarea planului de profil $[P]$:

a) în spațiu ; b) în epură

Pentru construcția unei figuri geometrice ce aparține unui plan de profil se lucrează și pe planul lateral, deoarece în această proiecție figura apare nedeformată. În figura 4.28 triunghiul din planul de profil $[P]$ se proiectează pe planul orizontal și vertical de proiecție suprapus peste urmele planului : $abc \equiv P$ și $a'b'c' \equiv P'$, iar pe planul lateral se proiectează în adevărată mărime, $a''b''c''$

$\equiv ABC$, fiind paralel cu acest plan.

Un plan de profil este determinat când se cunoaște abscisa x a unui punct al planului, fiind dat în probleme, astfel : $OP_x = x$, $OP_y = \infty$, $OP_z = \infty$.

4.5 Probleme rezolvate

1. Să se determine urmele planului $[P]$, definit de trei puncte necoliniare : $A(13,4,22)$, $B(22,8,12)$, $C(37,4,8)$.

Rezolvare : Se reprezintă în epură punctele $A(a,a')$, $B(b,b')$ și $C(c,c')$. Rezolvarea cerinței problemei se poate face aplicând cele două moduri de determinare a urmelor unui plan, prezentate în aliniatul 4.2, după cum urmează :

a) folosind două drepte paralele : cu ajutorul punctelor A și B se trasează dreapta $D_1(d_1,d_1')$, iar prin punctul C se duce dreapta $D_2(d_2,d_2')$ paralelă cu dreapta D_1 , $d_2 \parallel d_1$,

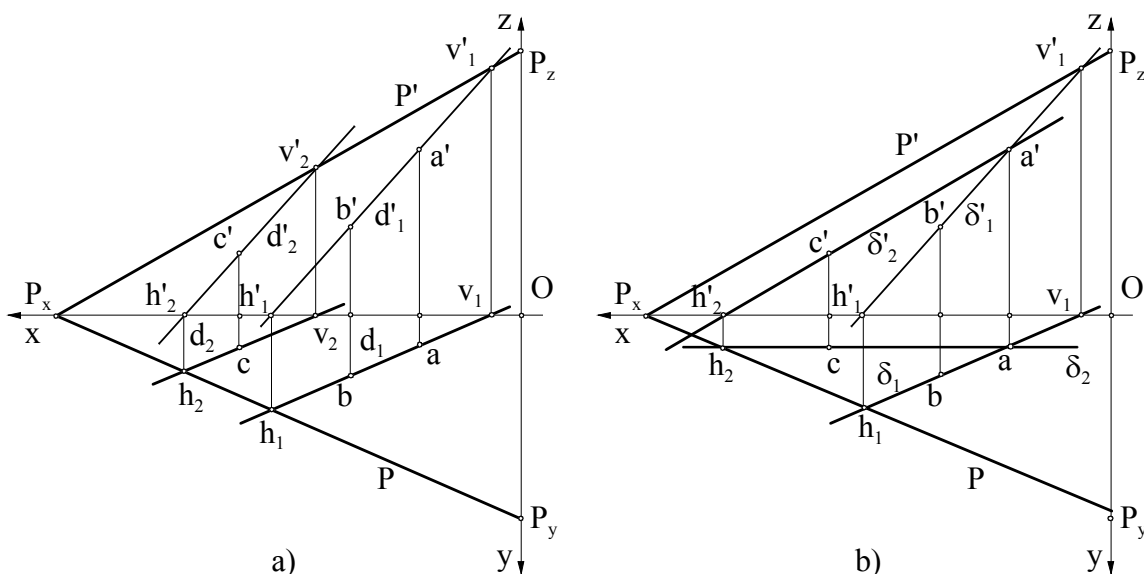


Fig.4.29 Rezolvarea problemei 1

$d_2' \parallel d_1'$. Se determină urmele orizontale $H_1(h_1, h_1')$, $H_2(h_2, h_2')$ și urmele verticale $V_1(v_1, v_1')$, $V_2(v_2, v_2')$ ale dreptelor și se unesc proiecțiile de același nume ale lor, indiferent în ce ordine : $h_1 \cup h_2 = P$, $v_1' \cup v_2' = P'$ (fig.4.29, a).

b) folosind două drepte concurente : cu ajutorul punctelor A și B se trasează dreapta $\Delta_1(\delta_1, \delta_1')$, iar prin punctul C se duce dreapta $\Delta_2(\delta_2, \delta_2')$ concurentă cu dreapta Δ_1 în punctul A , $\delta_2 \cap \delta_1 = a$, $\delta_2' \cap \delta_1' = a'$. Pentru drepte se determină urmele orizontale $H_1(h_1, h_1')$, $H_2(h_2, h_2')$ și urma verticală $V_1(v_1, v_1')$. Dreapta Δ_2 fiind dreaptă frontală nu are urmă verticală. Trasarea urmelor planului începe cu urma orizontală, $h_1 \cup h_2 = P$, care la intersecția cu axa Ox determină punctul P_x . Urmă verticală P' este dată de urma verticală V_1 și de punctul P_x : $v_1' \cup P_x = P'$ (fig.4.29, b).

2. Să se determine urmele planului $[P]$, definit de punctul $A(35,20,30)$ și de verticala $D(d, d')$: $B(50,35,20)$, $C(50,35,40)$.

Rezolvare : Punctul $A(a, a')$ și dreapta $D(d, d')$, care este o verticală, determină un plan proiectant vertical. Urmă orizontală P a acestui plan este determinată de proiecția orizontală a dreptei, d și de proiecția orizontală a punctului, a : $P = d \cup a$, având în vedere că un punct sau o dreaptă conținută într-un plan vertical se proiectează pe planul orizontal suprapusă pe urma orizontală a planului. Urmă P intersectează axa Ox în punctul P_x , de unde se trasează o perpendiculară pe Ox , ce reprezintă urma verticală P' a planului (fig.4.30).

3. Să se determine urmele unui plan paralel cu axa Ox care face 45° cu planul orizontal și conține punctul $C(15,8,10)$. Prin punctul C să se traseze o fronto-orizontală $D(d, d', d'')$ și un plan de profil $[Q]$.

Rezolvare : Urmă laterală P'' a planului paralel cu axa Ox se trasează prin proiecția laterală c'' , înclinată la 45° față de axa Oy_1 . Aceasta intersectează axele de coordonate în punctele P_z și P_{y_1} . Urmă orizontală P și verticală P' se trasează paralele cu axa Ox , prin punctele P_z și P_y , unde P_y este corespondentul punctului P_{y_1} pe axa Oy .

Fronto-orizontala $D(d, d', d'')$ se trasează astfel : proiecția laterală d'' , un punct identic cu urma laterală $c'' = d''$, iar proiecțiile orizontală d și verticală d' paralele cu axa Ox , prin proiecțiile orizontală c și verticală c' , ale punctului C .

Planul de profil $[Q]$ nu are urmă laterală, iar urmele orizontală Q și verticală Q' sunt suprapuse peste linia de ordine a punctului C , pe care îl conține, în prelungire (fig.4.31).

4. Fie planul oarecare $[P]$, definit prin urme : $OP_x = 40$, $OP_y = 23$ și $OP_z = 31$. Să se determine proiecțiile triunghiului $ABC(abc, a'b'c')$, ale cărui vârfuri aparțin planului $[P]$, știind : $A(25, y_A, 5)$, $B(5, 10, z_B)$ și $C(10, y_C, 20)$.

Rezolvare : Se reprezintă urmele planului oarecare, fixând tăieturile cu axele de coordonate, P_x , P_y și P_z , la

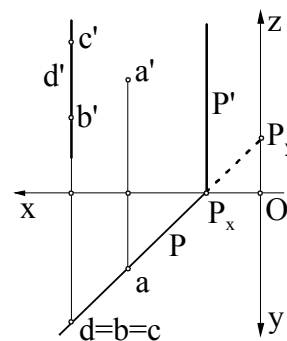


Fig.4.30 Rezolvarea problemei 2

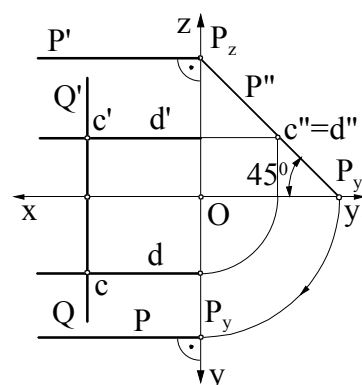


Fig.4.31 Rezolvarea problemei 3

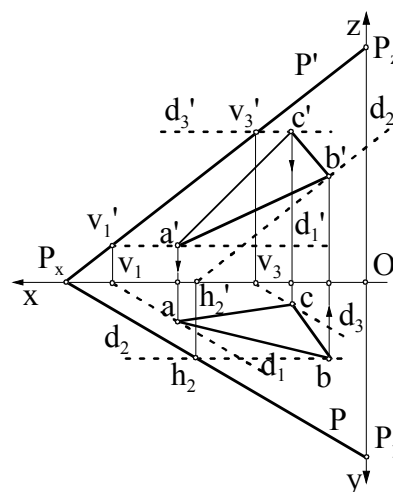


Fig.4.32 Rezolvarea problemei 4

distanțele date. Se unesc două câte două, astfel : $P = P_x \cup P_y$ și $P' = P_x \cup P_z$. Pentru determinarea proiecțiilor orizontală și verticală ale triunghiului ABC trebuie determinate depărtările y_A, y_C , respectiv cota z_B . În acest scop se trasează horizontalele, $D_1(d_1, d_1')$, $D_3(d_3, d_3')$, prin proiecțiile a', c' și frontala $D_2(d_2, d_2')$ prin proiecția b , astfel încât aceste drepte să aparțină planului $[P]$ (să aibă urmele situate pe urmele de același fel ale planului). Se trasează linii de ordine prin proiecțiile vârfurilor triunghiului cunoscute și se respectă

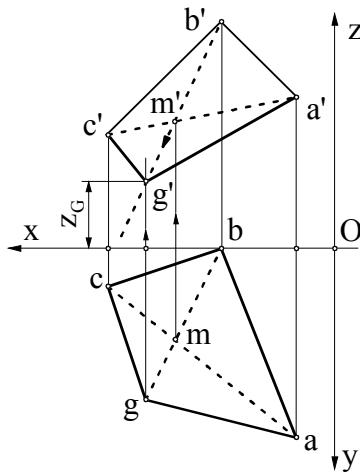


Fig.4.33 Rezolvarea problemei 5

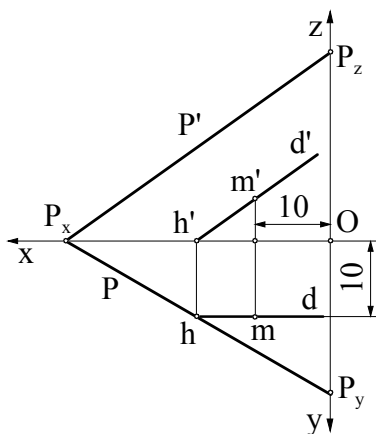


Fig.4.34 Rezolvarea problemei 6

condiția de apartenență a punctului la plan, determinând proiecțiile a, c, b' și implicit proiecțiile triunghiului (fig.4.32).

5. Să se găsească grafic, cota punctului G , astfel încât patrulaterul $ABCG$ să fie o placă rigidă, cunoscând : $A(5,25,20)$, $B(15,0,30)$, $C(30,5,15)$ $G(25,20,z_G)$.

Rezolvare : Se reprezintă în epură punctele și se trasează laturile posibile ale plăcii. Pentru ca punctul G să aparțină planului determinat de punctele A, B și C se impune ca acesta să fie situat pe o dreaptă din plan, și anume pe diagonala BG . Se trasează diagonala $AC(ac, a'c')$ și proiecția orizontală bg a diagonalei BG . Acestea se intersectează în punctul $M(m, m')$. Unind proiecțiile b' cu m' și prelungind până la intersecția cu linia de ordine a punctului G se obține proiecția g' și cota acestui punct, ca distanța de la axa Ox la g' : $z_G = 9\text{mm}$ (fig.4.33).

6. Să se determine locul geometric al punctelor din planul $[P]$, definit prin urme : $OP_x = 35$, $OP_y = 20$, $OP_z = 25$, care sunt situate la 10mm de planul vertical $[V]$. Vizualizați un punct $M(m, m')$ situat pe dreapta D , care să fie situat la 10mm de planul lateral $[L]$.

Rezolvare : Se reprezintă urmele planului $[P]$, fixând punctele de intersecție cu axele de coordonate, P_x, P_y și P_z , la distanțele date. Se unesc două câte două, astfel : $P = P_x \cup P_y$ și $P' = P_x \cup P_z$. Locul geometric al punctelor din planul $[P]$ situate la 10mm de planul vertical $[V]$, este o dreaptă frontală $D(d, d')$. Pentru aflarea proiectiilor ei, se măsoară pe axa Oy 10mm și se trasează o paralelă la axa Ox , care reprezintă proiectia

orizontală d . Frontala D trebuie să fie situată în planul $[P]$, respectiv să aibă urma orizontală $H(h, h')$ situată pe urmele planului, deci $d \cap P = h$. Proiecția verticală d' se trasează prin proiecția h' , paralelă cu urma verticală P' a planului.

Pentru vizualizarea punctului $M(m, m')$, situat la 10mm de planul lateral $[L]$, se trasează o linie de ordine la 10mm de originea O , în sens pozitiv, și se intersectează cu proiectiile dreptei frontale rezultând proiectiile m și m' , fiecare pe proiectia de același fel a dreptei (fig.4.34).

7. Să se determine urmele planului $[P]$, definit prin linia de cea mai mare pantă față de planul orizontal $[H]$, $D(d, d') : A(12, -9, 37)$, $B(20, 5, 12)$. Ce valoare are unghiul α pe care îl face planul $[P]$ cu planul orizontal $[H]$?

Rezolvare : Se reprezintă punctele $A(a, a')$ și $B(b, b')$ în epură, se determină proiectiile dreptei $D(d, d')$, unind proiectiile punctelor de același fel și se determină urmele orizontală $H(h, h')$ și verticală $V(v, v')$ ale dreptei. Cunoscând că proiectia orizontală d a l.c.m.m.p. față

de planul orizontal trebuie să fie perpendiculară pe urma orizontală P a planului care o conține, se duce prin urma h , urma P a planului astfel încât, $P \perp d$. La intersecția cu axa Ox se găsește punctul P_x . Urmă verticală P' a planului trece prin P_x și prin v' , $P' = P_x \cup v'$ (fig.4.35).

Unghiul α pe care îl face planul $[P]$ cu planul orizontal $[H]$ se regăsește între l.c.m.m.p. față de planul $[H]$, D și proiecția ei pe planul $[H]$, d , concurente în h . În epură unghiul α se măsoară în triunghiul hvv_0' : $\angle \alpha = \angle hvv_0' = 55^\circ$. Punctul v_0' se obține rotind cota vv' , în jurul lui v , până devine perpendiculară pe hv .

8. Fie planul oarecare $[P]$, definit de trei puncte necoliniare : $A(13,15,22)$, $B(22,8,12)$, $C(37,4,20)$. Să se traseze o linie de cea mai mare pantă a planului față de planul orizontal, $D(d,d')$, fără a construi urmele planului.

Rezolvare : Din cele trei puncte se construiesc două drepte $D_1(d_1,d_1')$ și $D_2(d_2,d_2')$, concurente în punctul B , care definesc planul $[P]$. L.c.m.m.p. față de planul orizontal este perpendiculară pe toate orizontalele planului $[P]$, deci și pe orizontala $G(g,g')$, trasată prin punctul A . Proiecția verticală g' se duce paralelă la axa Ox , prin proiecția a' . La intersecția cu proiecția d_2' se determină proiecția m' și coborând linie de ordine până pe proiecția d_2 , proiecția m . Rezultă $g = a \cup m$. Conform teoremei unghiului drept proiecția d se trasează perpendiculară pe proiecția g . Se alege ca l.c.m.m.p. față de planul orizontal să se construiască prin punctul B al planului $[P]$, rezultând la intersecția cu proiecția g , punctul n , și respectiv n' pe g' : $d = b \cup n$, $d' = b' \cup n'$ (fig.4.36).

9. Să se determine planul de nivel ce conține punctul $A(20,8,18)$ și să se traseze prin $A(a,a',a'')$ o orizontală $D(d,d',d'')$, care face 30° cu planul vertical.

Rezolvare : Urmele verticală N' și laterală N'' se trasează prin proiecțiile a' și a'' , paralele cu axa Ox . Proiecția d a orizontalei face 30° cu axa Ox și trece prin proiecția a . Proiecțiile d' și d'' sunt suprapuse peste urmele planului, $d' \equiv N'$, $d'' \equiv N''$.

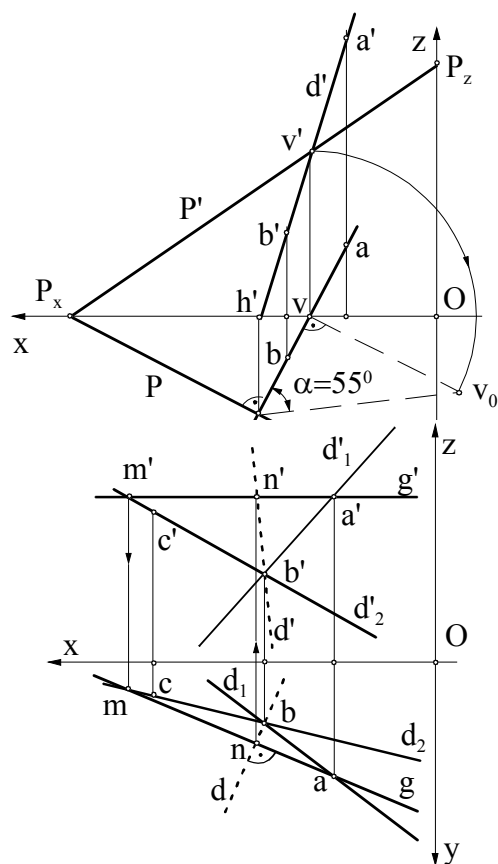


Fig.4.36 Rezolvarea problemei 8

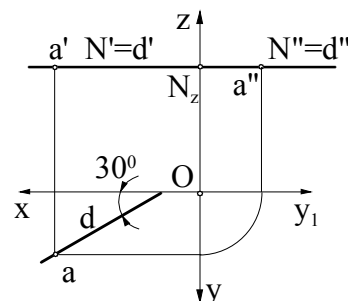


Fig.4.37 Rezolvarea problemei 9

4.6 Probleme propuse

1. Să se determine urmele planului $[P]$, definit de trei puncte necoliniare, pentru fiecare din cazurile următoare :

- $A(50,13,37)$, $B(70,-12,52)$, $C(20,5,70)$;
- $A(23,10,60)$, $B(10,70,5)$, $C(50,15,40)$;
- $A(100,10,70)$, $B(60,70,90)$, $C(20,30,20)$;
- $A(50,5,15)$, $B(35,30,5)$, $C(70,50,60)$;
- $A(45,10,20)$, $B(70,0,40)$, $C(100,40,0)$.

2. Să se determine urmele planului [P], determinat de dreapta D (definită de punctele A și B) și de punctul C, exterior ei, pentru fiecare din cazurile următoare :

- $D(d,d') : A(130,90,20), B(110,10,80) \text{ și } C(40,70,30);$
- $D(d,d') : A(80,40,50), B(20,15,10) \text{ și } C(45,10,40);$
- $D(d,d') : A(95,20,5), B(70,10,25) \text{ și } C(50,10,20);$
- $D(d,d') : A(35,5,30), B(15,30,10) \text{ și } C(70,10,25);$
- $D(d,d') : A(80,15,40), B(60,40,10) \text{ și } C(30,10,30).$

3. Fie planul [P] definit prin două drepte horizontale paralele $D_1(d_1,d_1') : A(70,5,20), B(30,35,20)$ și $D_2(d_2,d_2') : C(40,10,30)$. Să se determine urmele planului.

4. Să se determine urmele planului [P], definit de punctul $A(80,25,15)$ și de dreapta de capăt $D(d,d') : B(50,20,40), C(50,50,40)$. Să se traseze prin punctul A o frontală a planului [P]. Se poate trasa prin punctul A și o orizontală a planului [P] ?

5. Să se determine urmele planului [P], definit de punctul $A(25,10,30)$ și de verticala $D(d,d') : B(40,20,20), C(40,20,40)$. Să se traseze prin punctul A o orizontală a planului [P]. Se poate trasa prin punctul A și o dreaptă de profil a planului [P] ?

6. Să se determine urmele unui plan paralel cu axa Ox care face 60° cu planul orizontal și conține punctul $A(35,5,20)$. Prin punctul A să se traseze o fronto-orizentală $\Delta(\delta,\delta',\delta'')$ și un plan de profil [R].

7. Să se determine urmele unui plan axial care face 30° cu planul orizontal și să se traseze o fronto-orizentală, conținută în plan, situată la cota egală cu 15mm.

8. Fie planul oarecare [P], definit prin urme : $OP_x = 100, OP_y = 50$ și $OP_z = 70$. Să se determine proiecțiile triunghiului $ABC(abc,a'b'c')$, ale cărui vârfuri aparțin planului [P], știind : $A(60,y_A,5), B(5,y_B,30)$ și $C(40,10,z_C)$.

9. Să se găsească grafic cota sau depărtarea punctelor de mai jos, astfel încât patrulaterul $ABCG$ să fie o placă rigidă :

- $A(45,10,20), B(70,0,40), C(100,40,0) \text{ și } G(70,y_G,10);$
- $A(10,30,30), B(50,20,50), C(90,70,10) \text{ și } G(20,50,z_G);$
- $A(15,70,60), B(90,60,50), C(70,30,10) \text{ și } G(30,y_G,30);$
- $A(70,y_A,10), B(110,10,20), C(60,70,60) \text{ și } G(30,30,30);$
- $A(120,50,40), B(70,10,20), C(20,30,z_C) \text{ și } G(30,60,80).$

10. Să se determine locul geometric al punctelor din planul [P], definit prin urme : $OP_x = 105, P_y = 60, OP_z = 75$, care sunt situate la 30mm de planul vertical [V]. Vizualizați un punct $M(m,m')$ care să fie situat la 30mm de planul lateral [L].

11. Să se determine locul geometric al punctelor din planul [P], definit prin urme : $OP_x = 105, P_y = 60, OP_z = 75$, care sunt situate la 35mm de planul vertical [H]. Vizualizați un punct $M(m,m')$ care să fie situat la 25mm de planul lateral [L].

12. Să se determine urmele planului [P], definit prin linia de cea mai mare pantă față de planul orizontal [H], $D(d,d') : A(15,70,60), B(70,30,10)$. Ce valoare are unghiul α pe care îl face planul [P] cu planul orizontal [H] ?

13. Să se determine urmele planului [P], definit prin linia de cea mai mare pantă față de planul vertical [V], $D(d,d') : A(60,70,60), B(30,30,35)$. Ce valoare are unghiul β pe care îl face planul [P] cu planul vertical [V] ?

14. Fie planul oarecare [P], definit de trei puncte necoliniare : $A(120,50,40), B(70,10,20), C(30,60,80)$. Să se traseze câte o linie de cea mai mare pantă a planului față de planul orizontal, $D(d,d')$ și față de planul vertical, $\Delta(\delta,\delta')$, fără a construi urmele planului.

15. Să se determine planele de nivel și de front ce conțin punctul $A(50,30,40)$ și să se traseze prin A o orizontală și o frontală care fac 60° cu planul [V], respectiv [H] .

5. POZIȚIILE RELATIVE ALE ELEMENTELOR GEOMETRICE

5.1 Pozițiile relative a două plane

Două plane pot fi paralele sau concurente în spațiu.

5.1.1 Plane paralele

Pornind de la teorema conform căreia două plane paralele sunt intersectate de un al treilea plan după drepte paralele (al treilea plan fiind unul din planele de proiecție), rezultă că două plane oarecare $[P]$ și $[Q]$ sunt paralele dacă au urmele de același fel paralele între ele (fig. 5.1).

Reciproca acestei teoreme este valabilă, adică dacă urmele de același fel a două plane sunt paralele în epură, planele sunt paralele în spațiu.

Teorema de mai sus poate fi verificată pentru toate planele, referitor la urmele orizontale și verticale, excepție fac planele paralele cu axa Ox , la care trebuie verificate și urmele laterale, având în vedere că pentru toate aceste plane urmele orizontale și verticale sunt paralele cu axa Ox . În figura 5.2, planele $[P]$ și $[Q]$ nu sunt paralele pentru că urmele lor laterale P'' și Q'' se intersectează și nu sunt paralele. Cele două plane se intersectează după fronto-orizontala $D(d, d', d'')$.

Când planele nu sunt date prin urme, a verifica dacă două plane sunt sau nu paralele, revine la a verifica dacă unul dintre plane are două drepte paralele cu două drepte din celălalt plan.

În figura 5.3 planele $[P]$ și $[Q]$ sunt determinate prin triunghiurile ABC , respectiv EFG , $[P] = [ABC]$, $[Q] = [EFG]$. Pentru a verifica dacă sunt sau nu paralele, se duce câte o orizontală $D_1 \in [ABC]$, $D_2 \in [EFG]$ și câte o frontală $D_3 \in [ABC]$, $D_4 \in [EFG]$ în fiecare plan și

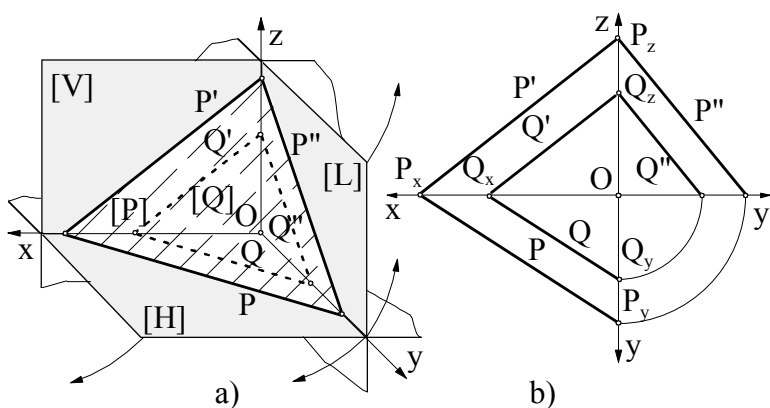


Fig.5.1 Reprezentarea planelor paralele:
a) în spațiu, $[P] \parallel [Q]$; b) în epură, $P \parallel Q, P' \parallel Q', P'' \parallel Q''$

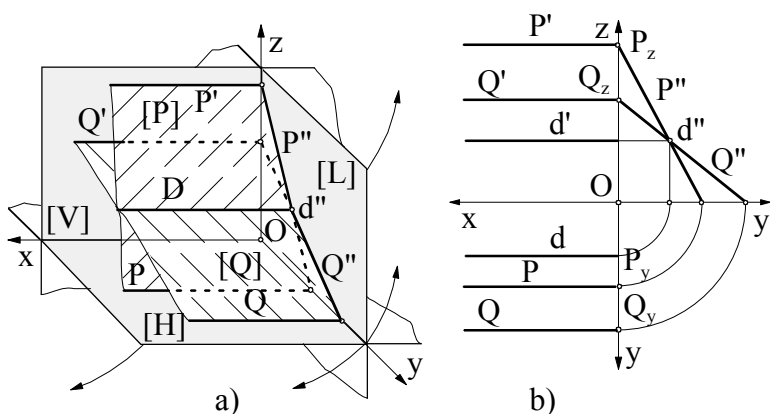


Fig.5.2 Reprezentarea planelor paralele cu axa Ox , concurente:
a) în spațiu, $[P] \cap [Q] = D, D \perp [L]$; b) în epură, $P \parallel Q, P' \parallel Q', P'' \cap Q'' = d''$

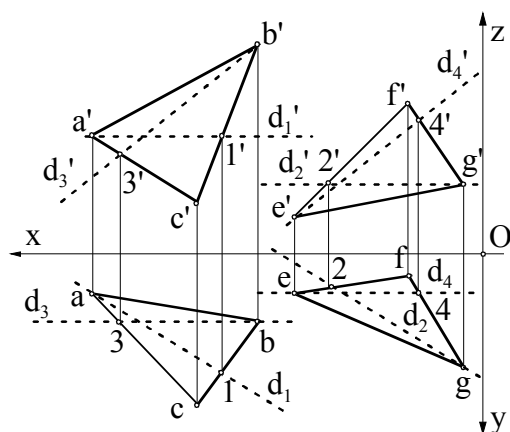


Fig.5.3 Triunghiuri paralele
[ABC] || [EFG]

dacă proiecțiile orizontale ale orizontalelor și proiecțiile verticale ale frontalelor sunt paralele $d_1 \parallel d_2$, $d_3' \parallel d_4'$, atunci planele sunt paralele, $[ABC] \parallel [EFG]$.

Fiind dat un plan prin urme și un punct exterior lui se poate construi planul ce trece prin acel punct și este paralel cu planul dat. Astfel, în figura 5.4, a, se dă planul $[P]$ și punctul $M(m, m')$, exterior lui și se cere construirea unui plan $[Q] \parallel [P]$. Pentru rezolvare, se construiește prin punctul M o orizontală $D(d, d')$, cu proiecția orizontală d paralelă cu urma orizontală P , $d \parallel P$ și se determină urma verticală a ei, v' . Prin v' se duce urma verticală Q' a planului $[Q]$, astfel încât: $Q' \parallel P'$. Urmă Q' intersectează axa Ox în Q_x , prin care se duce urma orizontală Q a planului $[Q]$: $Q \parallel P$ (fig.5.4, c).

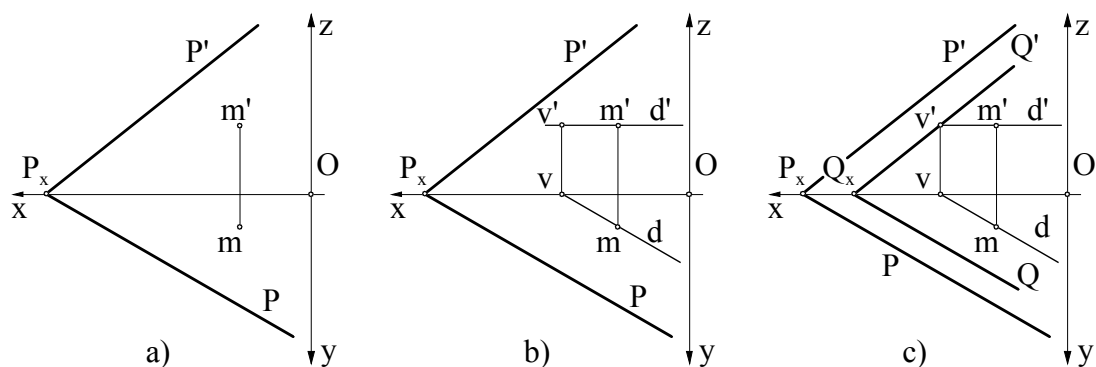


Fig.5.4 Construirea unui plan $[Q]$ paralel cu un plan $[P]$, printr-un punct M , exterior lui

5.1.2 Plane concurente

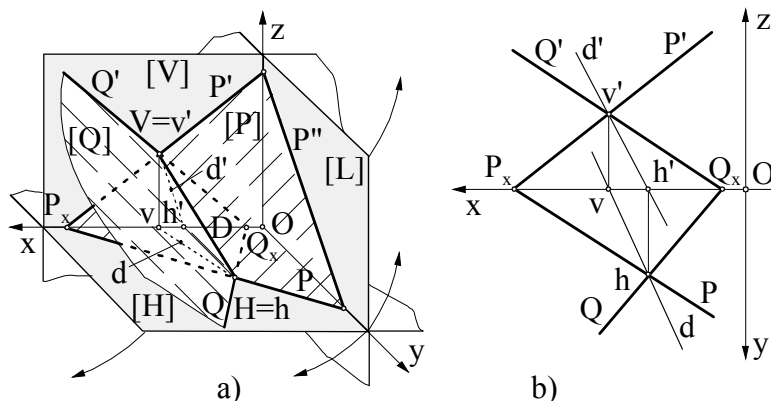


Fig.5.5 Reprezentarea planelor concurente:

- a) în spațiu, $[P] \cap [Q] = D(d, d')$;
b) în epură, $P \cap Q = h$, $P' \cap Q' = v'$, $d = h \cup v$, $d' = h' \cup v'$

Două plane concurente se intersectează după o dreaptă. Dacă planele sunt date prin urme, dreapta de intersecție trebuie să respecte condiția de apartenență la plan, pentru ambele plane, adică să aibă urmele situate pe urmele planelor. Aceste puncte sunt punctele de intersecție ale urmelor de același nume.

În figura 5.5, a planele $[Q]$ și $[P]$ se intersectează după dreapta $D(d, d')$, ale cărei urme

sunt : urma orizontală $H(h, h')$ la intersecția urmelor orizontale P și Q ale planelor, $H = h = P \cap Q$ și urma verticală $V(v, v')$ la intersecția urmelor verticale ale planelor, $V = v' = P' \cap Q'$. Proiecțiile dreptei de intersecție se obțin unind proiecțiile urmelor de același nume : $d = h \cup v$, $d' = h' \cup v'$ (fig.5.5, b).

Dacă planele intersectate $[P]$ și $[Q]$ au urmele orizontale paralele, urma orizontală a dreptei de intersecție se află la infinit, adică dreapta va fi o orizontală $G(g, g')$ (fig.5.6). Urmă ei verticală se află la intersecția urmelor verticale ale celor două plane, $v' = P' \cap Q'$ iar proiecția orizontală g trece prin v și este paralelă cu urmele orizontale ale celor două plane, $g \parallel P \parallel Q$.

În mod analog, dacă urmele verticale ale planelor concurente $[R]$ și $[T]$ sunt paralele, dreapta de intersecție va fi o frontală, $F(f, f')$, care are urma verticală la infinit (fig.5.7). Urmă orizontală a frontalei se găsește la intersecția urmelor orizontale a celor două plane, $h = R \cap T$, iar proiecția verticală a frontalei f' trece prin h' și este paralelă cu urmele verticale ale planelor, $f' \parallel R' \parallel T'$.

Se pune problema intersecției dintre un plan oarecare și un plan de nivel sau de front.

Plecând de la raționamentul conform căruia două plane paralele sunt intersectate de un al treilea după două drepte paralele, intersecția dintre un plan oarecare $[P]$ și un plan de nivel $[N]$ este o orizontală $G(g, g')$ (fig.5.8). Cele două plane paralele sunt planul orizontal $[H]$ de proiecție și

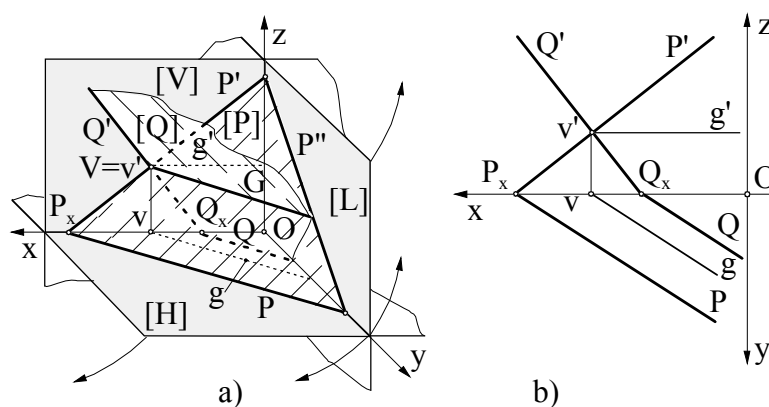


Fig.5.6 Plane concurente $[P] \cap [Q] = G(g, g')$, $G \parallel [H]$:
a) în spațiu ; b) în epură

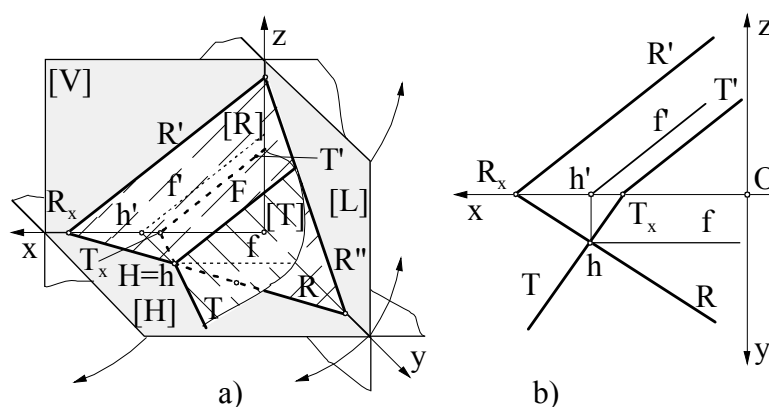


Fig.5.7 Plane concurente $[R] \cap [T] = F(f, f')$, $F \parallel [V]$:
a) în spațiu ; b) în epură

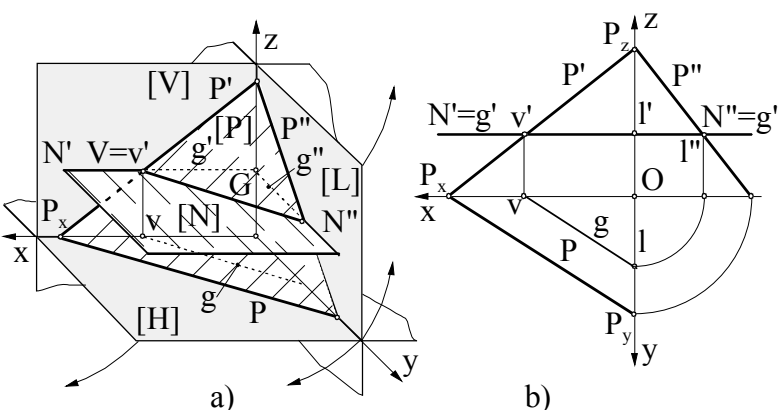


Fig.5.8 Reprezentarea intersecției plan oarecare $[P]$,
plan de nivel $[N]$: a) în spațiu ; b) în epură

planul $[N]$, iar planul care le intersectează este planul $[P]$. Rezultă dreapta P – urma orizontală a planului $[P]$ (orizontală de cotă zero) și dreapta de intersecție căutată $G(g, g')$ – orizontală de cotă egală cu cota planului de nivel (fig.5.8, a). În epură, proiecția verticală a orizontalei de intersecție g' trece prin urma verticală v' , $v' = N' \cap P'$ și este suprapusă peste urma verticală a planului $[N]$, $N' \equiv g'$ iar proiecția orizontală g trece prin v și este paralelă cu urma orizontală a planului $[P]$, $g \parallel P$ (fig.5.8, b).

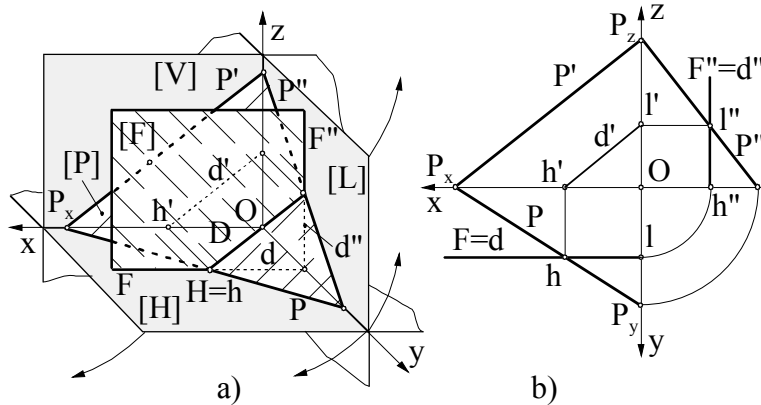


Fig.5.9 Reprezentarea intersecției plan oarecare $[P]$, plan de front $[F]$: a) în spațiu ; b) în epură

Similar pentru intersecția dintre un plan oarecare $[P]$ și un plan de front $[F]$ se obține o frontală $D(d, d')$ (fig.5.9). Proiecția orizontală a frontalei d trece prin urma orizontală h , $h = P \cap F$ și este suprapusă peste urma orizontală a planului de front, $F \equiv d$, iar proiecția verticală trece prin h' și este paralelă cu urma verticală a planului $[P]$, $d' \parallel P'$.

Intersecția a două plane paralele cu axa Ox , este o dreaptă $D(d, d')$, care nu are nici urmă orizontală, nici urmă verticală, având în vedere că urmele orizontale și verticale a celor două plane se intersectează la infinit (fig.5.2, a). O astfel de dreaptă, este o fronto-orizontală. Pentru trasarea ei în epură (fig.5.2, b), trebuie să se găsească cel puțin un punct al dreptei, sau urma laterală care este identică cu proiecția laterală d'' a fronto-izontalei și se află la intersecția urmelor laterale a celor două plane, $d'' = P'' \cap Q''$.

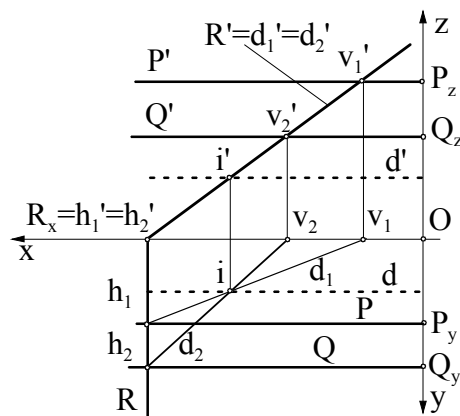


Fig.5.10 Intersecția a două plane paralele cu linia de pământ

Pentru determinarea unui punct comun celor două plane paralele cu axa Ox , când nu se poate lucra cu planul lateral, se poate folosi un plan auxiliar – plan proiectant sau plan oarecare.

În figura 5.10 planele $[P]$ și $[Q]$ se intersectează cu planul de capăt $[R]$, rezultând ca punct comun al celor trei plane, punctul $I(i, i')$: $[P] \cap [R] = D_1(d_1, d_1')$, $[Q] \cap [R] = D_2(d_2, d_2')$, $d_1 \cap d_2 = i$. Fronto-orizontala de intersecție $D(d, d')$ se trasează prin punctul $I(i, i')$: $i \in d$, $d \parallel Ox$, $i' \in d'$, $d' \parallel Ox$.

În cazul în care urmele planelor concurente nu se întâlnesc în cadrul epurei, dreapta de intersecție se determină cu ajutorul unor plane auxiliare, de nivel sau de front. Acestea intersectează fiecare din planele date după câte o orizontală sau o frontală, la intersecția cărora se află un punct comun celor trei plane, care determină dreapta de intersecție.

În figura 5.11 sunt reprezentate două plane, $[P]$ și $[Q]$, ale căror urme orizontale și verticale nu se intersectează în cadrul epurei. Cu ajutorul planului auxiliar de nivel $[N]$ s-au determinat orizontalele $G_1(g_1, g_1')$ și $G_2(g_2, g_2')$, după care planul de nivel intersectează fiecare din planele date și punctul lor comun de intersecție $I(i, i')$: $[N] \cap [P] = G_1(g_1, g_1')$,

$[N] \cap [Q] = G_2(g_2, g_2')$, $g_1 \cap g_2 = i$. Punctul $I(i, i')$ este un punct al dreptei de intersecție $D(d, d')$ dintre planele $[P]$ și $[Q]$.

Un alt punct $J(j, j')$ al dreptei de intersecție s-a determinat cu ajutorul planului auxiliar de front $[F]$, care intersectează planele după frontalele $D_1(d_1, d_1')$ și $D_2(d_2, d_2')$: $[F] \cap [P] = D_1(d_1, d_1')$, $[F] \cap [Q] = D_2(d_2, d_2')$, $d_1' \cap d_2' = j'$. Punctele $I(i, i')$ și $J(j, j')$ determină dreapta de intersecție $D(d, d')$: $d = i \cup j$, $d' = i' \cup j'$.

Dacă în cadrul epurei se întâlnesc numai urmele orizontale sau verticale ale planelor concurente, se folosește un singur plan auxiliar.

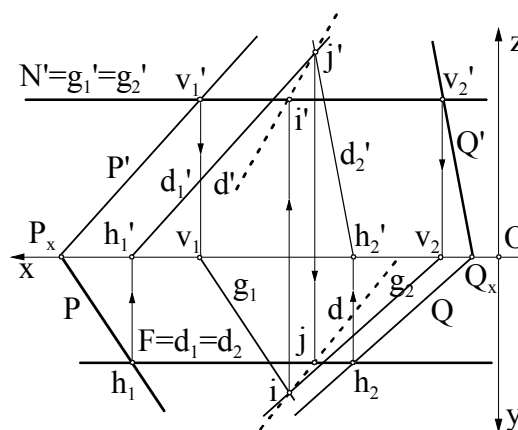


Fig. 5.11 Intersecția planelor ale căror urme nu se întâlnesc în cadrul epurei

5.2 Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan

Dreapta și planul pot avea în spațiu următoarele poziții relative :

- a) - dreapta conținută în plan (caz tratat în paragraful 4.1, figura 4.6) ;
- b) - dreapta paralelă cu planul ;
- c) - dreapta concurentă cu planul.

b) Dreapta paralelă cu planul

O dreaptă este paralelă cu un plan dacă este paralelă cu o dreaptă conținută în acel plan. În figura 5.12 sunt reprezentate, atât în spațiu (a) cât și în epură (b), planul $[P]$ și o dreaptă $D(d, d')$. În epură, verificarea paralelismului dintre cele două elemente, se face trasând o dreaptă D_1 , în planul $[P]$ și arătând că aceasta este paralelă cu dreapta $D(d, d')$ dată.

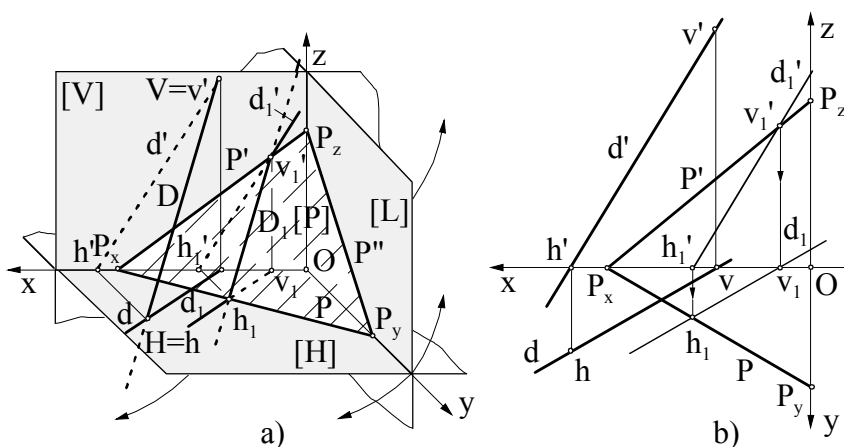


Fig. 5.12 Dreaptă paralelă cu planul, $D(d, d') \parallel [P]$:
a) în spațiu ; b) în epură

În primul rând, se trasează proiecția ei verticală, $d_1' \parallel d'$ (fig. 5.12, b). Se determină apoi proiecțiile verticale ale urmelor $h_1' \in Ox$ și $v_1' \in P'$ și corespondentele acestora în planul orizontal, $h_1 \in P$ și $v_1 \in Ox$. Dacă proiecția orizontală a dreptei $D_1(d_1, d_1')$, $d_1 = h_1 \cup v_1$, este paralelă cu proiecția orizontală a dreptei date, $d_1 \parallel d$, rezultă că cele două drepte sunt paralele, deci și dreapta dată este paralelă cu planul : $D \parallel [P]$.

Dacă se pune problema construirii unei dreptei $D_1(d_1, d_1')$ paralele cu un plan $[P]$ printr-un punct $A(a, a')$, exterior planului, problema are o infinitate de soluții.

Pentru rezolvare, se trasează o dreaptă $D(d, d')$, cuprinsă în plan și prin punctul $A(a, a')$ se duce dreapta $D_1(d_1, d_1')$ paralelă cu aceasta, astfel: $d_1 \parallel d$ și $d_1' \parallel d'$ (fig.5.13).

Dreapta $D_1(d_1, d_1')$ este paralelă cu planul $[P]$, deoarece este paralelă cu o dreaptă cuprinsă în plan.

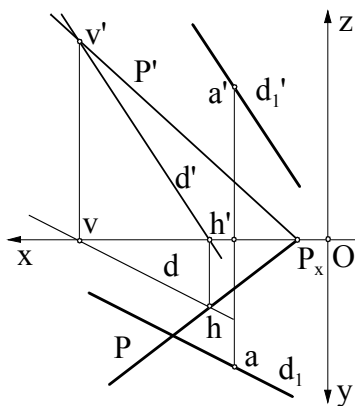


Fig.5.13 Construirea unei drepte paralele cu un plan : $D_1 \parallel [P]$

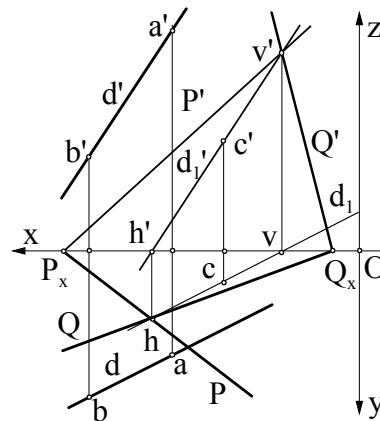


Fig.5.14 Construirea unui plan paralel cu o dreaptă, $[P] \parallel D$ sau $[Q] \parallel D$

Problema se poate pune și invers, adică să se construiască un plan $[P]$ printr-un punct dat $C(c, c')$, paralel cu o dreaptă D , dată de punctele $A(a, a')$ și $B(b, b')$. În acest caz, planul căutat trebuie să conțină o dreaptă $D(d, d')$, care trece prin punctul dat și este paralelă cu dreapta dată. Planul ale cărui urme trec prin urmele dreptei D (adică planul conține dreapta) este planul cerut. Deoarece o dreaptă nu determină complet un plan, există o infinitate de soluții. În epura din figura 5.14 s-au construit două astfel de plane, $[P]$ și $[Q]$, alegând punctele de intersecție cu axa Ox , P_x și Q_x , arbitrar și unind aceste puncte cu urmele dreptei D , $[P]: P = P_x \cup h$, $P' = P_x \cup v'$; $[Q]: Q = Q_x \cup h$, $Q' = Q_x \cup v'$.

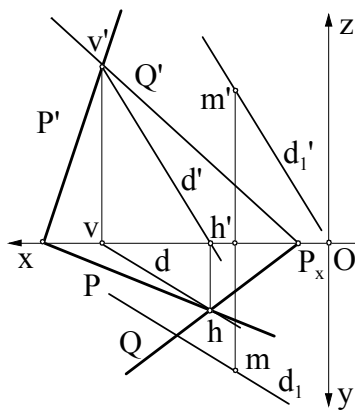


Fig.5.15 Dreaptă paralelă cu două plane : $D_1 \parallel [Q]$, $D_1 \parallel [R]$

c) Dreaptă concurentă cu planul

Determinarea punctului de intersecție dintre o dreaptă și un plan este mult utilizată pentru rezolvarea unor probleme de secțiuni plane în corpuri geometrice, de intersecții de corpuri geometrice și altele.

Pentru a determina punctul de intersecție dintre o dreaptă oarecare și un plan oarecare (fig.5.16) se utilizează un plan auxiliar, de regulă un plan proiectant, plan determinat de dreaptă. Etapele determinării punctului de intersecție dintre planul $[P]$ și dreapta $D(d, d')$ sunt prezentate în figura 5.17 :

1) prin dreapta $D(d, d')$ se duce un plan auxiliar proiectant, $[Q]$, convenabil ales (de capăt în acest caz) (fig.5.17, b);

2) se intersectează planul proiectant $[Q]$ cu planul oarecare $[P]$, rezultând dreapta $D_1(d_1, d_1')$, $d_1 = h \cup v$, $d_1' = h' \cup v'$ (fig.5.17, c);

3) se determină punctul de intersecție dintre dreapta dată și dreapta găsită anterior, $D \cap D_1 = I(i, i')$. Cele două drepte fiind în planul ajutător $[Q]$, punctul lor de intersecție se găsește, mai întâi, pe planul de proiecție față de care planul ajutător nu este proiectant, adică pe planul orizontal : $d \cap d_1 = i$ (fig.5.17, d). Deoarece punctul I aparține dreptei D_1 și aceasta este conținută în planul $[P]$, rezultă că I este punctul de intersecție dintre dreapta D și planul $[P]$.

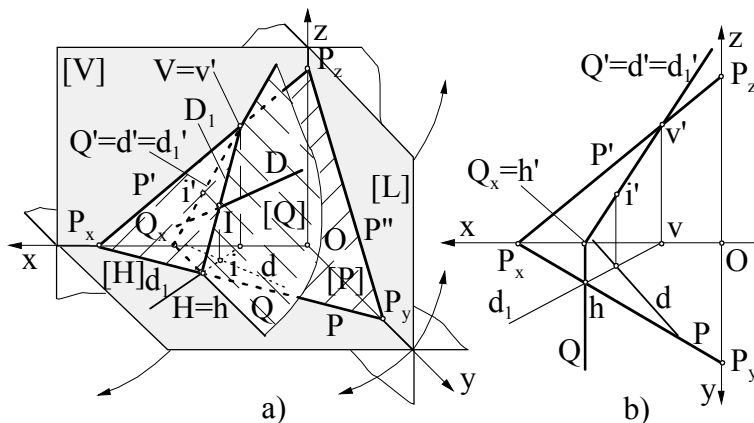


Fig.5.16 Reprezentarea intersecției dreaptă - plan oarecare (utilizând plan de capăt) : a) în spațiu ; b) în epură

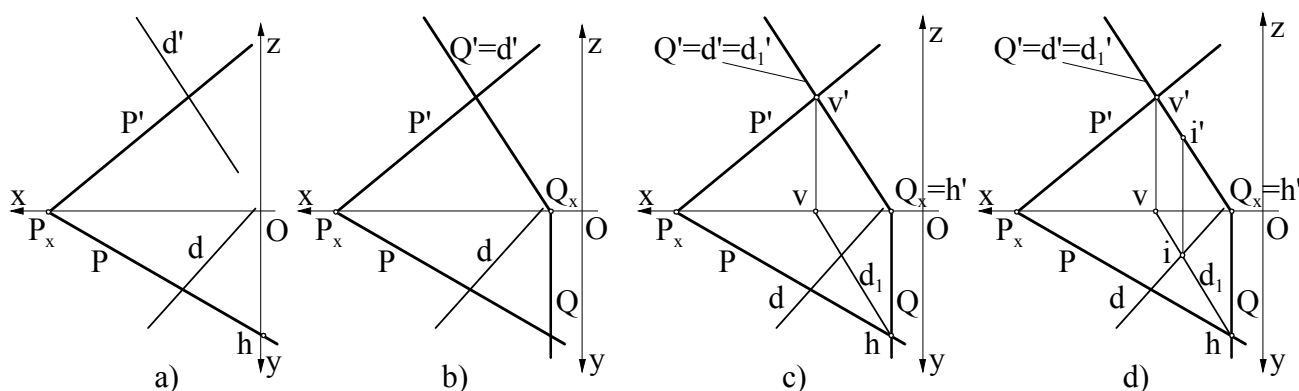


Fig.5.17 Etapele determinării punctului de intersecție dintre planul $[P]$ și dreapta $D(d, d')$

Dacă dreapta care intersectează un plan este oarecare, alegerea planului auxiliar ca plan de capăt sau plan vertical este la fel de convenabilă. În figura 5.18 este reprezentată, în spațiu și în epură, intersecția de mai sus, rezolvată cu ajutorul unui plan auxiliar vertical. În acest caz planul auxiliar fiind proiectant față de planul orizontal, punctul de intersecție se determină, mai întâi, în proiecția de pe planul vertical de proiecție, $d' \cap d_1' = i'$.

Atunci când dreapta care intersectează un plan este într-o

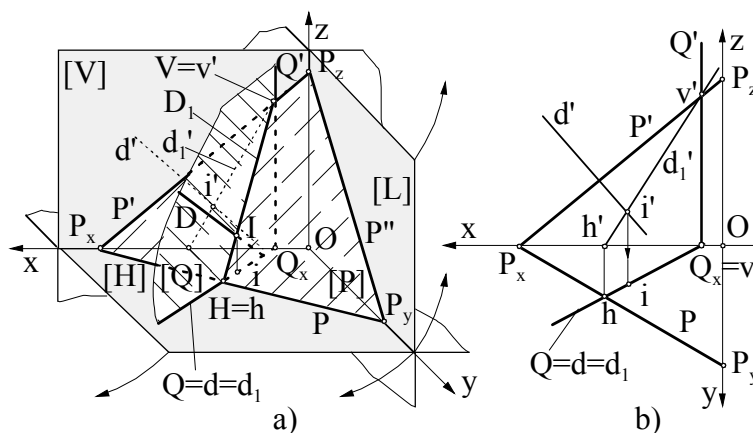


Fig.5.18 Reprezentarea intersecției dreaptă - plan oarecare (utilizând plan proiectant vertical) : a) în spațiu ; b) în epură

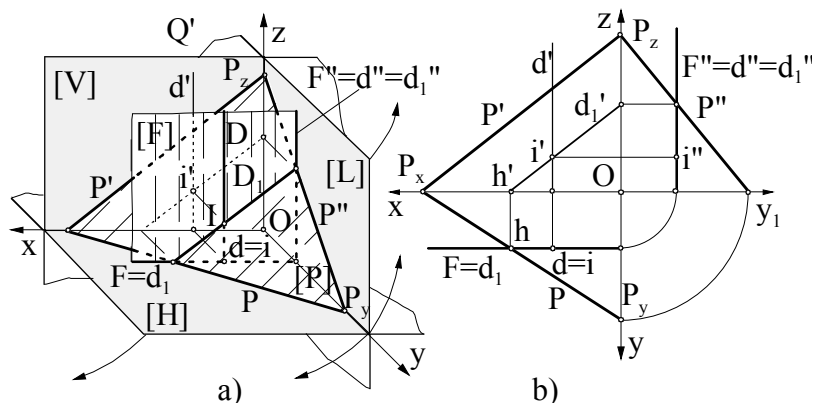


Fig. 5.19 Reprezentarea intersecției dintre verticala $D(d, d')$ și un plan oarecare $[P]$: a) în spațiu ; b) în epură

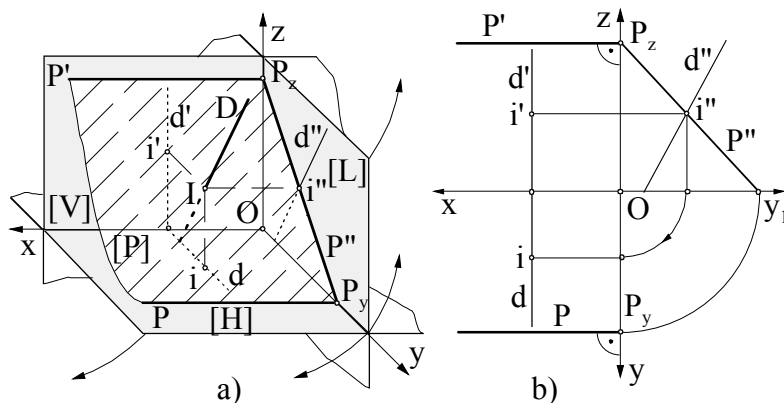


Fig. 5.20 Reprezentarea intersecției dintre o dreaptă de profil și un plan paralel cu linia de pământ : a) în spațiu; b) în epură

rezolvarea intersecției dintre un plan paralel cu linia de pământ $[P]$ și o dreaptă de profil $D(d, d')$, figura 5.20. Punctul de intersecție $I(i, i')$ se găsește, mai întâi, pe planul lateral de proiecție, ca intersecția dintre urma laterală P'' a planului și proiecția laterală d'' a dreptei de profil, $i'' = P'' \cap d''$.

Intersecția dintre o dreaptă oarecare și o figură geometrică

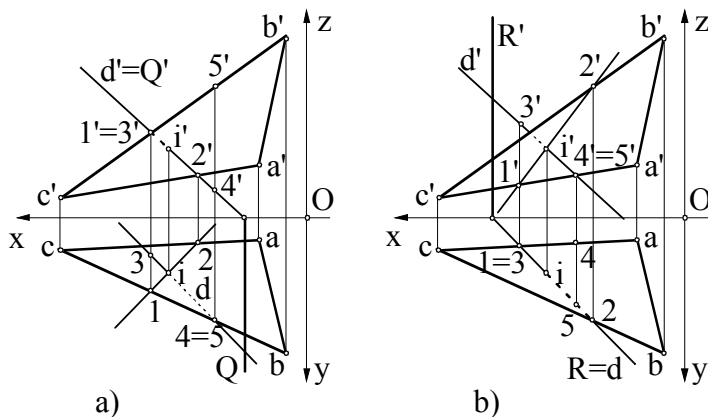


Fig. 5.21 Intersecția dintre o dreaptă oarecare $D(d, d')$ și o placă plană opacă $[ABC]$

poziție particulară, planul auxiliar poate fi ales și în altă poziție decât de plan proiectant. Astfel, pentru a rezolva intersecția dintre o dreaptă verticală $D(d, d')$ și un plan oarecare $[P]$, planul auxiliar ales este un plan de front $[F]$, dus prin dreaptă (fig. 5.19). Planul $[F]$ intersectează planul dat după o frontală $D_1(d_1, d_1')$, care intersectează verticala dată în punctul $I(i, i')$, intersecție vizibilă în proiecția pe planul vertical de proiecție, $d_1' \cap d' = i'$.

Intersecția dintre o dreaptă și un plan, ambele având poziții particulare față de planele de proiecție, poate fi rezolvată și fără ajutorul planului auxiliar, punctul de intersecție rezultând direct pe unul din planele de proiecție. Aceasta se poate observa în

Determinarea punctului de concurență dintre o dreaptă și un plan dat prin coordonatele vârfurilor unei figuri geometrice se face ca și în cazul prezentat la planul dat prin urme.

În figura 5.21, a) pentru găsirea punctului în care dreapta $D(d, d')$ intersectează placa $[ABC]$, se duce un plan de capăt $[Q]$ prin dreaptă și se determină dreapta $(1, 1' 2')$ după care acesta intersectează placa : $b'c' \cap Q' = 1'$, $a'c' \cap Q' = 2'$.

Această dreaptă se intersectează cu dreapta dată $D(d, d')$ în punctul $I(i, i')$, punct de intersecție ce se obține, mai întâi, în proiecția pe planul orizontal, $l2 \cap d = i$, pentru ca apoi cu ajutorul unei linii de ordine să se determine și proiecția verticală i' .

Dacă placa este opacă, este necesar să se stabilească porțiunile vizibile și respectiv invizibile ale dreptei.

Pentru determinarea vizibilității dreptei în proiecția verticală se consideră punctele $1' \equiv 3'$ unde, aparent, proiecția verticală a dreptei d' intersectează latura $b'c'$ a plăcii și se stabilește care dintre ele are depărtarea mai mare. Din proiecția orizontală rezultă că punctul 1 are depărtarea mai mare, deci în proiecția verticală punctul 1 este în fața punctului 3 și implicit latura $b'c'$ este vizibilă. Pe porțiunea $1'2'$ proiecția verticală a dreptei d' este invizibilă din $1'$ până în i' și vizibilă din i' până în $2'$.

Bazându-ne pe acest raționament și știind că, în proiecția orizontală dintre două puncte care au proiecțiile orizontale suprapuse este vizibil punctul care are cota mai mare, în continuare s-au considerat punctele $4 \equiv 5$, la intersecția aparentă a proiecției orizontale d a dreptei cu latura bc și s-a stabilit vizibilitatea dreptei pe planul orizontal. În proiecția orizontală, dreapta d este vizibilă de la latura ac până în i și invizibilă din i până la latura bc .

Aceeași problemă se poate rezolva utilizând ca plan ajutător un plan proiectant vertical $[Q]$, dus prin dreapta $D(d, d')$, obținându-se aceleași rezultate (fig.5.21, b).

Intersecția a două plăci plane

Știind că două plane se intersectează după o dreaptă, se pune problema determinării dreptei de intersecție dintre două plăci plane. Pentru aceasta se vor afla două puncte de intersecție dintre laturile unei plăci cu cealaltă placă, puncte care vor determina direcția dreptei de intersecție.

În figura 5.22 sunt date plăcile triunghiulare $[ABC]$ și $[KMN]$. Pentru determinarea dreptei lor de intersecție, se propune aflarea punctelor în care laturile KM și MN ale plăcii $[KMN]$ intersectează placa $[ABC]$.

Prin latura KM se duce planul de capăt $[Q_1]$, care intersectează placa $[ABC]$ după dreapta $(12, 1'2')$ și ea la rândul ei latura KM în punctul $I(i, i')$, unul dintre punctele care determină dreapta de intersecție dintre cele două plăci.

Pentru determinarea unui al doilea punct al dreptei de intersecție, prin latura MN se duce planul de capăt $[Q_2]$, care intersectează placa $[ABC]$ după dreapta $(34, 3'4')$, iar aceasta este

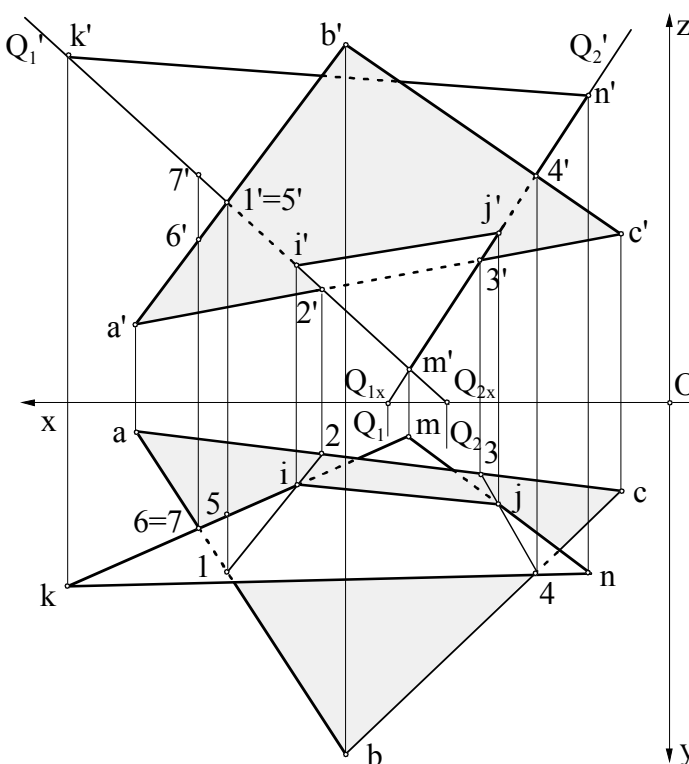


Fig.5.22 Intersecția a două plăci plane opace,
 $[ABC] \cap [KMN] = IJ(ij, i'j')$

concurrentă cu latura MN în punctul $J(j, j')$. Cele două plăci triunghiulare se intersectează după segmentul $IJ(ij, i'j')$.

Plăcile fiind considerate opace, se studiază vizibilitatea laturilor. În plan vertical, se consideră punctele aparent suprapuse $1' \equiv 5'$ și în plan orizontal, punctele $6 \equiv 7$, folosind teoria cunoscută. Astfel, în proiecția verticală este vizibil punctul 1 , deci latura $a'b'$, iar în plan orizontal, punctul 7 , deci latura km , în dreptul intersecțiilor aparente. Restul segmentelor vizibile și invizibile rezultă din epură, în funcție de linia de intersecție, considerând plăcile rigide.

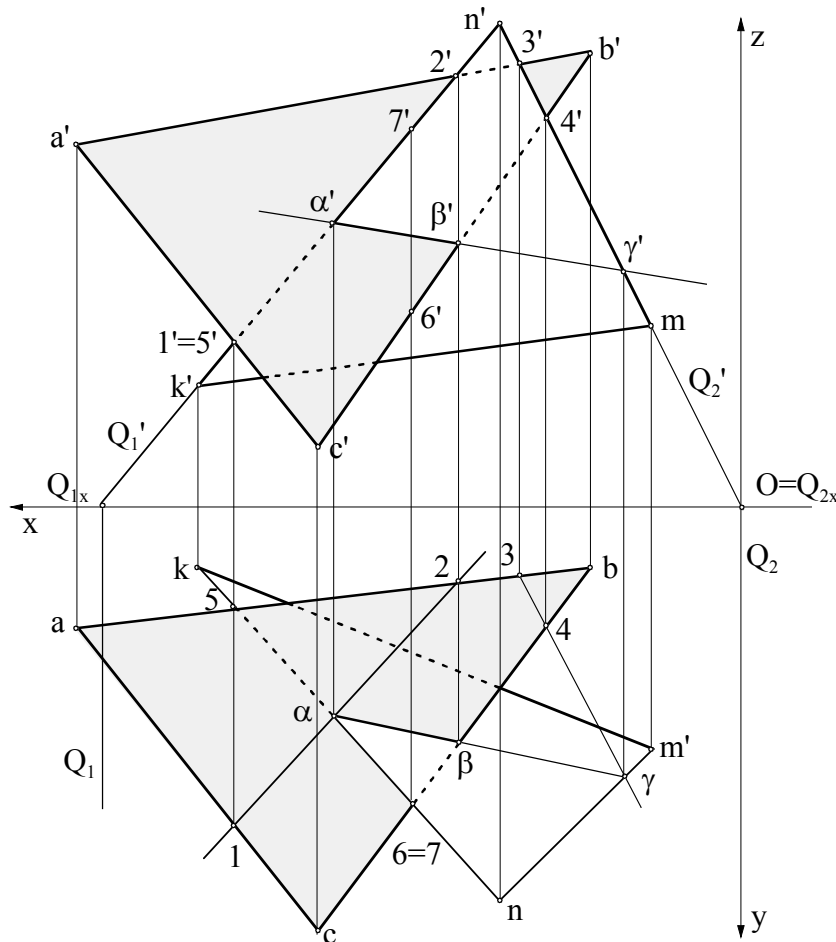


Fig. 5.23 Intersecția a două plăci plane opace, $[ABC] \cap [KMN] = (\alpha\beta, \alpha'\beta')$

Punctele care determină segmentul de dreaptă după care se intersectează două plăci nu rezultă întotdeauna direct. În figura 5.23 pentru determinarea dreptei de intersecție dintre plăcile $[ABC]$ și $[KMN]$ se intersectează laturile KN și MN cu placa $[ABC]$, folosind planele auxiliare de capăt $[Q_1]$ și $[Q_2]$. Latura KN intersectează placa $[ABC]$ în punctul (α, α') , iar latura MN intersectează planul din care face parte triunghiului ABC în punctul (γ, γ') și nu triunghiul efectiv.

Din dreapta de intersecție $(\alpha\gamma, \alpha'\gamma')$, segmentul după care se intersectează cele două plăci este $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$, (β, β') fiind punctul în care latura BC intersectează placa $[KMN]$.

Vizibilitatea plăcilor se determină studiind vizibilitatea punctelor $(1, 1')$, $(5, 5')$ și a punctelor $(6, 6')$ și $(7, 7')$.

5.3 Drepte și plane perpendiculare

a) Dreapta perpendiculară pe un plan

Un caz particular al intersecției dintre o dreaptă și un plan oarecare este cazul când dreapta face cu planul un unghi de 90° .

O dreaptă $D(d, d')$ perpendiculară pe un plan oarecare $[P]$, intersectează acel plan într-un punct $I(i, i')$. Prin punctul de intersecție se pot duce în plan o orizontală $G(g, g')$ și o frontală $F(f, f')$ a planului. Conform teoremei unghiului drept, proiecția orizontală a dreptei d va fi perpendiculară pe proiecția orizontală a orizontalei g , deci și pe urma orizontală a planului P și proiecția verticală a dreptei d' va fi perpendiculară pe proiecția verticală a frontalei f , deci și pe urma verticală a planului P' (fig.5.24).

Observație : O dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă proiecțiile ei sunt perpendiculare pe urmele de același nume ale planului.

Reciproca teoremei enunțate mai sus este adevărată, cu excepția planului paralel cu axa Ox și a planului axial, la care toate dreptele de profil au proiecțiile orizontale și verticale perpendiculare pe urmele de același nume ale planului. Verificarea perpendicularității se face ca și în figura 5.25, prin proiecția pe plan lateral atât a dreptei cât și a planului. Aici se observă că dreapta $D(d, d', d'')$ este perpendiculară pe planul $[P]$, deoarece și $d'' \perp P''$, în ambele cazuri.

Când planul nu este dat prin urme, construirea unei perpendiculare pe plan se face utilizând o orizontală și o frontală a planului. În figura 5.26, se pune problema trasării unei perpendiculare $D(d, d')$ prin punctul $M(m, m')$, pe planul triunghiului $[ABC]$. Se trasează orizontala $G(g, g')$ prin vârful A , $g' = a' \cup l'$, $g = a \cup l$ și frontala $F(f, f')$, prin vârful $C(c, c')$, $f = c \cup 2$, $f' = c' \cup 2'$. Din proiecția m se construiește proiecția orizontală d , perpendiculară pe orizontala g , iar din m' , proiecția verticală d' perpendiculară pe frontala f' : $d \perp g$, $d' \perp f'$.

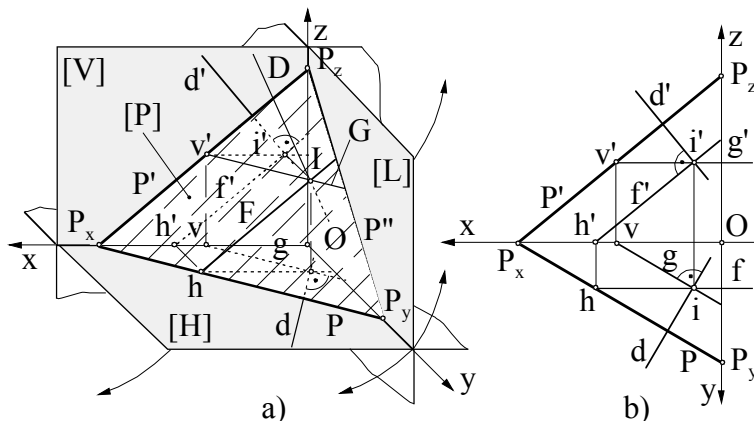


Fig.5.24 Reprezentarea unei drepte D perpendiculară pe un plan $[Q]$: a) în spațiu, $D \perp [Q]$; b) în epură, $d \perp P$, $d' \perp P'$

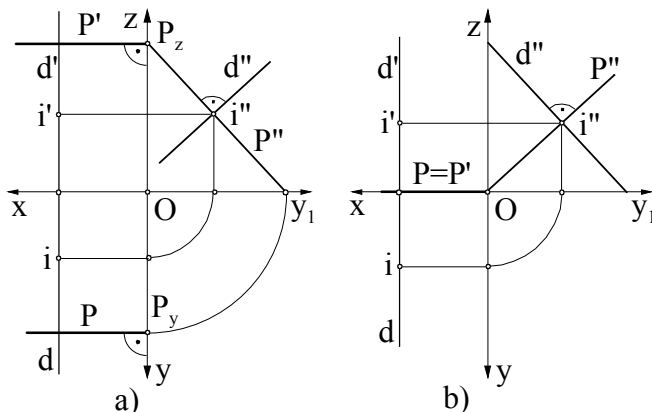


Fig.5.25 Dreaptă de profil perpendiculară pe un : a) plan paralel cu Ox ; b) plan axial: $D(d, d') \perp [P]$,

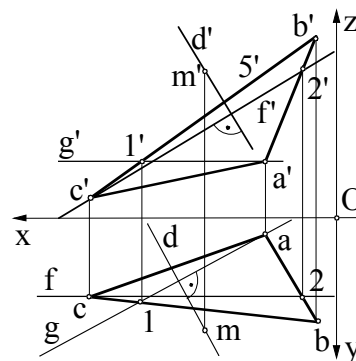


Fig.5.26 Dreaptă perpendiculară pe un triunghi: $D(d, d') \perp [ABC]$

b) *Plan perpendicular pe o dreaptă*

Se pune problema construirii unui plan $[P]$ perpendicular pe dreapta $D(d,d')$, printr-un punct exterior ei, $A(a,a')$ (fig.5.27). Pentru ca punctul A să aparțină planului trebuie ca acesta să fie situat pe o dreaptă a planului. Astfel, prin punctul A se duce o orizontală a planului $G(g,g')$, a cărei proiecție orizontală g să fie perpendiculară pe proiecția orizontală d a dreptei, $g \perp d$ și se determină urma verticală a orizontalei, $V(v,v')$. Urma verticală P' a planului trece prin v' și este perpendiculară pe proiecția verticală d' a dreptei, iar la intersecția cu linia de pământ Ox se obține punctul P_x . Urma orizontală P a planului trece prin punctul P_x și este perpendiculară pe proiecția orizontală d a dreptei. Planul $[P]$ este perpendicular pe dreapta $D(d,d')$ deoarece are urmele perpendiculare pe proiecțiile de același nume ale dreptei.

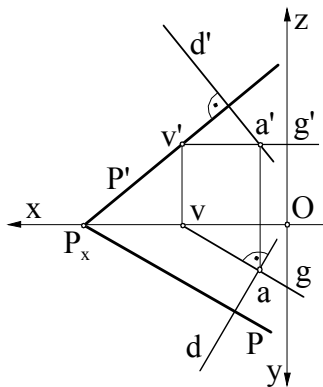


Fig.5.27 Plan perpendicular pe o dreaptă, $[P] \perp D(d,d')$, $A(a,a') \in [P]$

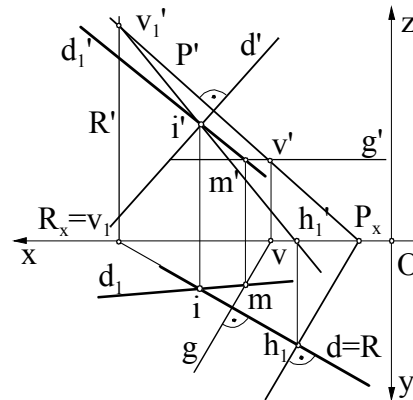


Fig.5.28 Drepte perpendiculare, $D_1 \perp D$

c) *Drepte perpendiculare*

Se cunoaște faptul că unghiul drept dintre două drepte oarecare nu se proiectează pe planele de proiecție în adevărată mărime.

Pentru a construi perpendiculara $D_1(d_1,d_1')$ pe o dreaptă $D(d,d')$, se pleacă de la considerentul că, prin punctul în care o dreaptă perpendiculară întâlnește un plan, se pot duce o infinitate de drepte conținute în plan, toate formând 90° cu perpendiculara dată.

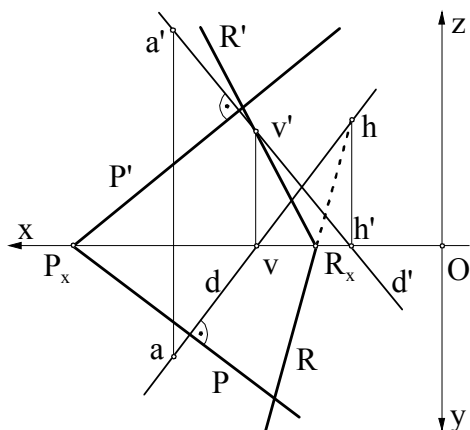
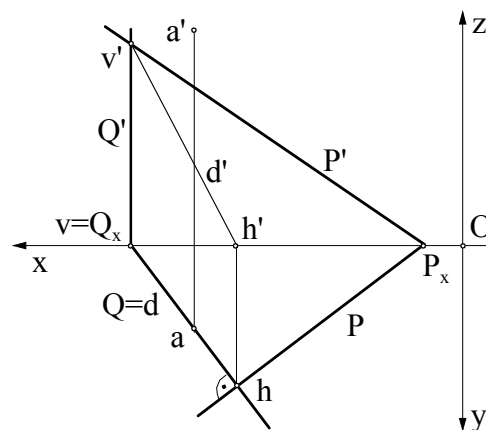
Fie $M(m,m')$ punctul prin care se duce perpendiculara D_1 pe dreapta D . Prin punctul M se duce un plan $[P]$ perpendicular pe dreapta D și se determină punctul $I(i,i')$ în care dreapta D intersectează planul $[P]$. În figura 5.28 planul $[P]$ s-a dus cu ajutorul orizontalei $G(g,g')$, construită prin punctul M , astfel încât $g \perp d$. Punctul de intersecție s-a determinat cu ajutorul planului proiectant vertical $[R]$, dus prin dreapta D , care intersectează planul $[P]$ după dreapta $H_1V_1(h_1v_1, h_1'v_1')$ și aceasta la rândul ei intersectează dreapta D în punctul I (se găsește, mai întâi, punctul de intersecție din proiecția verticală, $h_1'v_1' \cap d' = i'$). Perpendiculara D_1 se obține unind punctele M și I , $d_1 = m \cup i$ și $d_1' = m' \cup i'$.

d) *Plane perpendiculare*

Observație : Condiția necesară și suficientă ca două plane să fie perpendiculare între ele este ca unul dintre ele să conțină o dreaptă perpendiculară pe celălalt.

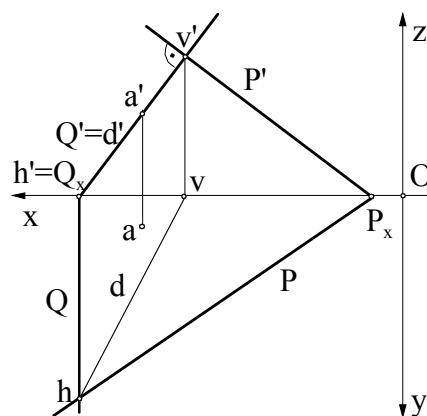
Fiind dat planul $[P]$, se cere ca prin punctul $A(a,a')$, exterior lui, să se construiască un plan $[R]$ perpendicular pe planul dat (fig.5.29). Conform observației de mai sus, prin punctul $A(a,a')$ se construiește o dreaptă $D(d,d')$ perpendiculară pe planul $[P]$, care va trebui să aparțină acestui plan. Se găsesc urmele dreptei, orizontală $H(h,h')$ și verticală $V(v,v')$, iar urmele planului $[R]$ se vor trasa prin ele.

Problema are o infinitate de soluții, având în vedere că o dreaptă oarecare nu determină singură planul. Astfel, se alege punctul R_x pe linia de pământ și se obțin urmele planului $[R]$, unind punctul R_x cu urmele dreptei D , $R = R_x \cup h$, $R' = R_x \cup v'$. Planul $[R]$ este perpendicular pe planul $[P]$, deoarece conține dreapta D , perpendiculară pe planul $[P]$.

Fig.5.29 Plane perpendiculare, $[R] \perp [P]$ Fig.5.30 Plane perpendiculare, $[Q] \perp [P]$

Se observă că, în general, două plane perpendiculare nu au urmele de același fel perpendiculare. Dacă unul dintre planele perpendiculare este plan particular, atunci urmele orizontale sau verticale pot să fie perpendiculare. Spre exemplu, în figura 5.30 planul oarecare $[P]$ și planul proiectant vertical $[Q]$ sunt perpendiculare și au urmele orizontale perpendiculare, $Q \perp P$.

Analog, un plan oarecare și un plan de capăt vor avea urmele verticale perpendiculare, $Q' \perp P'$ (fig.5.31).

Fig.5.31 Plane perpendiculare, $[Q] \perp [P]$

5.4 Probleme rezolvate

1. Prin punctul $M(25,5,10)$, să se construiască un plan $[Q]$ paralel cu planul $[P]$, dat prin urme : $OP_x = 10$, $OP_y = -10$, $OP_z = -20$.

Rezolvare : Pentru construirea planului $[Q]$ paralel cu planul $[P]$, se trasează o orizontală a planului $[Q]$, $G(g, g')$, prin punctul $M(m, m')$, astfel : proiecția g , paralelă cu urma orizontală P și proiecția g' , paralelă cu axa Ox . Se determină urma verticală $V(v, v')$ a orizontalei G și prin proiecția verticală v' , se trasează urma verticală Q' , paralelă cu urma verticală P' , la intersecția cu axa Ox obținându-se punctul Q_x . Prin Q_x se trasează urma orizontală Q , paralelă cu urma orizontală P (fig.5.32).

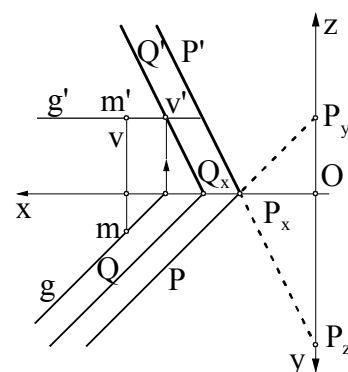


Fig.5.32 Rezolvarea problemei 1

2. Fie triunghiurile ABC și MNK , date prin coordonatele vârfurilor : $A(10,2,7)$, $B(3,14,23)$, $C(33,11,3)$, $M(60,15,20)$, $N(45,0,5)$ și $K(30,22,30)$. Să se verifice dacă cele două triunghiuri sunt paralele.

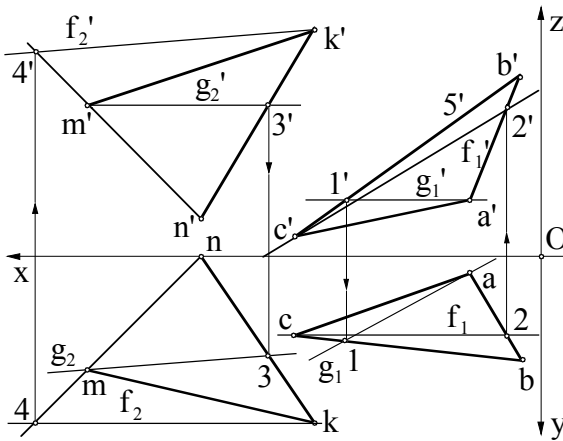


Fig.5.33 Rezolvarea problemei 2

Rezolvare : Pentru a verifica dacă triunghiurile ABC și MNK sunt paralele, se duce câte o orizontală $G_1 \in [ABC]$, $G_2 \in [MNK]$ și câte o frontală $F_1 \in [ABC]$, $F_2 \in [MNK]$ în fiecare plan al triunghiurilor. Deoarece proiecțiile orizontale ale orizontalelor g_1, g_2 și proiecțiile verticale ale frontalelor f_1', f_2' nu sunt paralele, nici triunghiurile nu sunt paralele (fig.5.33).

3. Să se determine punctul de intersecție dintre planele :

$[P] : OP_x = 10, OP_y = -10, OP_z = -10,$

$[Q] : OQ_x = 40, OQ_y = \infty, OQ_z = 20,$

$[R] : OR_x = 30, OR_y = 25, OR_z = \infty.$

Rezolvare : Se determină dreptele de intersecție dintre planul oarecare $[P]$ cu fiecare dintre planele $[Q]$, respectiv $[R]$ și se intersectează între ele (fig.5.34) :

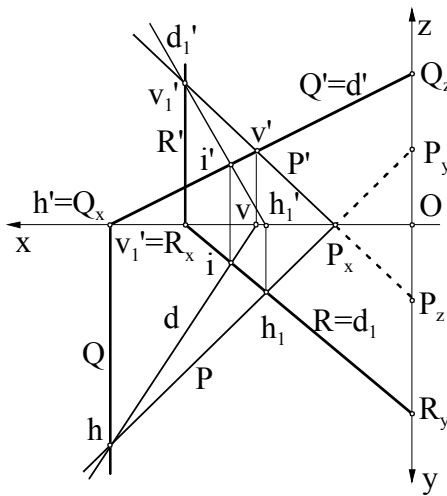


Fig.5.34 Rezolvarea problemei 3

$$[P] \cap [Q] = D(d, d') \quad \begin{cases} P' \cap Q' = v' \\ P \cap Q = h \\ h \cup v = d \\ h' \cup v' = d' \equiv Q' \end{cases}$$

$$[P] \cap [R] = D_1(d_1, d_1') \quad \begin{cases} P' \cap R' = v_1' \\ P \cap R = h_1 \\ h_1 \cup v_1 = d_1 \equiv R \\ h_1' \cup v_1' = d_1' \end{cases}$$

$$D \cap D_1 = I(i, i') \Rightarrow d \cap d_1 = i, d' \cap d_1' = i'$$

4. Să se determine dreptele de intersecție dintre planul $[P]$, definit prin urme : $OP_x = 40, OP_y = 25, OP_z = 20$ și planele de nivel, $[N]$ și de front, $[F]$, care conțin punctul $A(10,10,5)$.

Rezolvare : Dreapta de intersecție dintre planul $[P]$ și planul de nivel, $[N]$, este o dreaptă orizontală (de nivel), $G(g, g')$, care are proiecția verticală g' suprapusă peste urma verticală N' , $g' = N'$, iar proiecția orizontală g , paralelă cu urma orizontală P , trecând prin urma v : $P' \cap N' = v', g \parallel P$.

Dreapta de intersecție dintre planul $[P]$ și planul de front, $[F]$, este o dreaptă frontală (de front), $D(d, d')$, care are proiecția orizontală d suprapusă peste urma orizontală F , $d = F$, iar proiecția verticală d' , paralelă cu urma verticală P' , trecând prin urma h : $F \cap P = h, d' \parallel P'$ (fig.5.35).

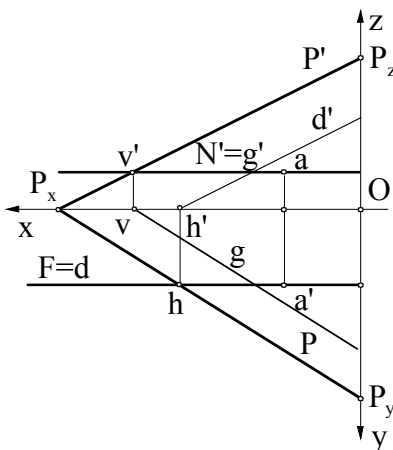


Fig.5.35 Rezolvarea problemei 4

5. Să se traseze dreapta de intersecție $\Delta(\delta, \delta')$ dintre planele $[P]$ și $[Q]$, definite astfel: $P_x = 55, \angle OP_x P = 30^\circ, \angle OP_x P' = 60^\circ$
 $Q_x = 10, \angle OQ_x Q = 60^\circ, \angle OQ_x Q' = 60^\circ$.

Rezolvare : La reprezentarea planelor se observă că, urmele verticale nu se intersectează în epură. Intersecția urmelor orizontale determină urma orizontală $H(h, h')$ a dreptei de intersecție. Pentru a găsi încă un punct $A(a, a')$ pentru dreaptă, se intersectează cele două plane date cu un plan de nivel :

$$[P] \cap [Q] \cap [N] = I(i, i') \Rightarrow \begin{cases} [P] \cap [N] = D_1(d_1, d_1') \\ [Q] \cap [N] = D_2(d_2, d_2') \\ d_1 \cap d_2 = a \\ D_1 \cap D_2 = A(a, a') \end{cases}$$

Dreapta de intersecție $\Delta(\delta, \delta')$ este dată de punctul $A(a, a')$ și de urma orizontală $H(h, h')$: $\delta = a \cup h$, $\delta' = a' \cup h'$ (fig.5.36).

6. Prin punctul $A(40, 15, 10)$, să se traseze o dreaptă $\Delta(\delta, \delta')$, paralelă cu planele $[P] : OP_x = 50$, $OP_y = 10$, $OP_z = 15$ și $[Q] : OQ_x = 20$, $OQ_y = 25$, $OQ_z = 20$.

Rezolvare : O dreaptă este paralelă cu un plan, dacă este paralelă cu o dreaptă din plan (fig.5.37). Se determină dreapta de intersecție dintre cele două plane : $[P] \cap [Q] = D(d, d')$, dreaptă comună ambelor plane și se trasează, prin punctul $A(a, a')$, dreapta $\Delta(\delta, \delta')$ paralelă cu ea : $a \in \delta$, $\delta \parallel d$, $a' \in \delta'$, $\delta' \parallel d'$.

7. Să se construiască urmele unui plan $[P]$, paralel cu dreapta D , determinată de punctele $A(40, 15, 10)$ și $B(30, 10, 5)$, care să conțină punctul $I(18, 8, 5)$ și să se intersecteze cu axa Ox la 5mm de planul lateral.

Rezolvare : Prin punctul $I(i, i')$ se trasează o dreaptă $\Delta(\delta, \delta')$, paralelă cu dreapta dată : $i \in \delta$, $\delta \parallel d$, $i' \in \delta'$, $\delta' \parallel d'$ și i se determină urma orizontală $H(h, h')$ și verticală $V(v, v')$. Planul căutat are $OP_x = 5$ și urmele sale se trasează prin urmele dreptei Δ : $P = P_x \cup h$, $P' = P_x \cup v'$. Planul $[P]$, astfel construit, este paralel cu dreapta D , deoarece conține dreapta Δ , paralelă cu dreapta D (fig.5.38).

8. Fie planul oarecare $[Q]$ definit prin dreptele $D(d, d') : A(30, 20, 15)$, $H(20, 10, 0)$ și $\Delta(\delta, \delta') : A$, $B(5, 5, 5)$. Să se determine punctul de intersecție $I(i, i')$ dintre planul $[Q]$ și dreapta de capăt ce trece prin punctul $C(15, 13, 10)$.

Rezolvare : Dreapta de capăt $D_I(d_I, d_I')$ are proiecția verticală suprapusă peste proiecția c' , $d_I' = c'$ și proiecția orizontală perpendiculară pe axa Ox , trecând prin proiecția c , $c \in d_I$. Pentru determinarea punctului de intersecție $I(i, i')$ dintre planul $[Q]$ și dreapta de capăt

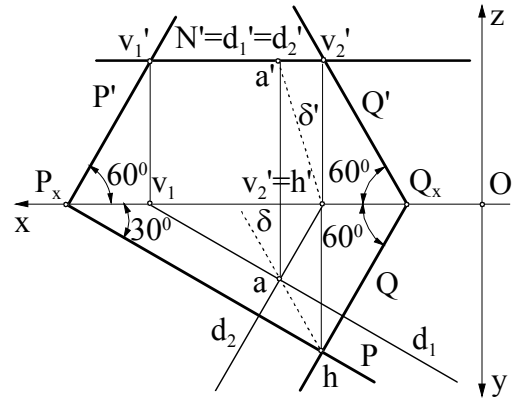


Fig.5.36 Rezolvarea problemei 5

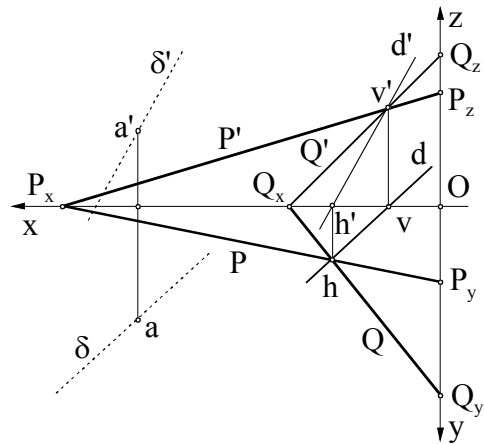


Fig.5.37 Rezolvarea problemei 6

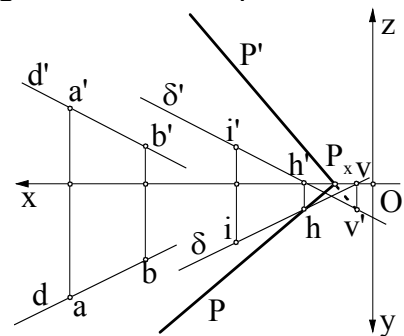


Fig.5.38 Rezolvarea problemei 7

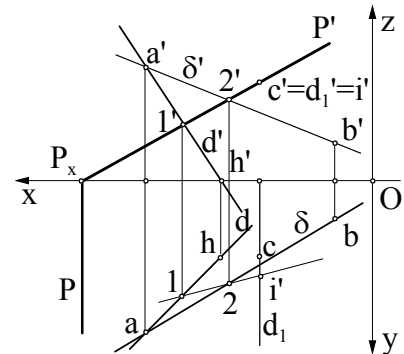


Fig.5.39 Rezolvarea problemei 8

$D_I(d_I, d_I')$, se duce prin dreaptă un plan de capăt $[P]$ ($d_I' \in P'$) și se găsește dreapta de intersecție $(I2, I'2')$ dintre acest plan și dreptele D și Δ , ce definesc planul $[P]$. Intersecția dintre dreapta $(I2, I'2')$ și dreapta de capăt $D_I(d_I, d_I')$ determină punctul de intersecție $I(i, i')$, în proiecția pe planul orizontal, $I2 \cap d_I = i$, unde cele două drepte se proiectează distinct (fig.5.39).

9. Să se determine punctul de intersecție dintre dreapta $D(d, d')$ definită de punctele $K(5, 10, 35)$ și $I(50, 15, 10)$ și placa triunghiulară $[ABC]$: $A(60, 10, 15)$, $B(35, 40, 45)$, $C(15, 5, 5)$. Considerând placa opacă, să se studieze vizibilitatea dreptei.

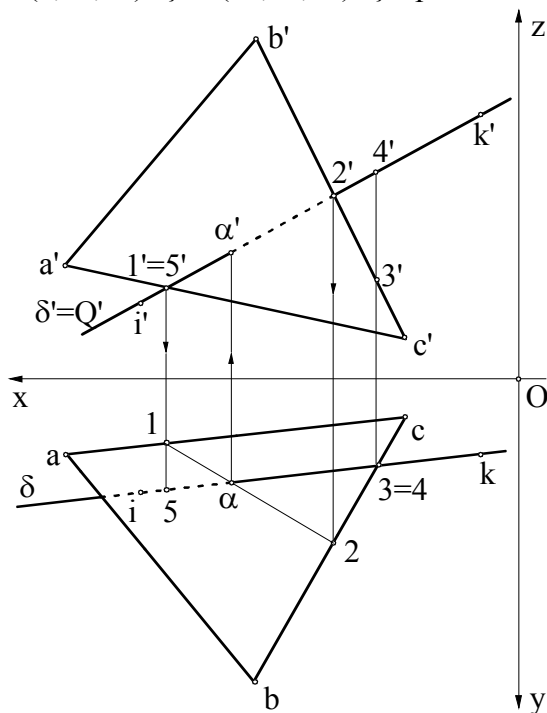


Fig.5.40 Rezolvarea problemei 9

Rezolvare : Se trasează un plan de capăt $[Q]$ prin dreaptă, $\delta' \equiv Q'$ și se determină dreapta $(I2, I'2')$ după care acesta intersectează placa : $[Q] \cap [ABC] = (I2, I'2')$. Această dreaptă se intersectează cu dreapta dată $\Delta(\delta, \delta')$ în punctul (α, α') , punct de intersecție ce se obține, mai întâi, în proiecția pe planul orizontal, $I2 \cap \delta = \alpha$, pentru ca apoi, cu ajutorul unei linii de ordine, să se determine și proiecția verticală α' .

Vizibilitatea dreptei în proiecția verticală, se stabilește pornind de la o intersecție aparentă a dreptei cu o latură a plăcii, considerând punctele $I' \equiv 5'$. Din proiecția orizontală rezultă că punctul 5 are depărtarea mai mare, deci în proiecția verticală punctul 5 este în fața punctului I și implicit proiecția δ' este vizibilă până în α' , iar până în $2'$, invizibilă. Analog, se studiază

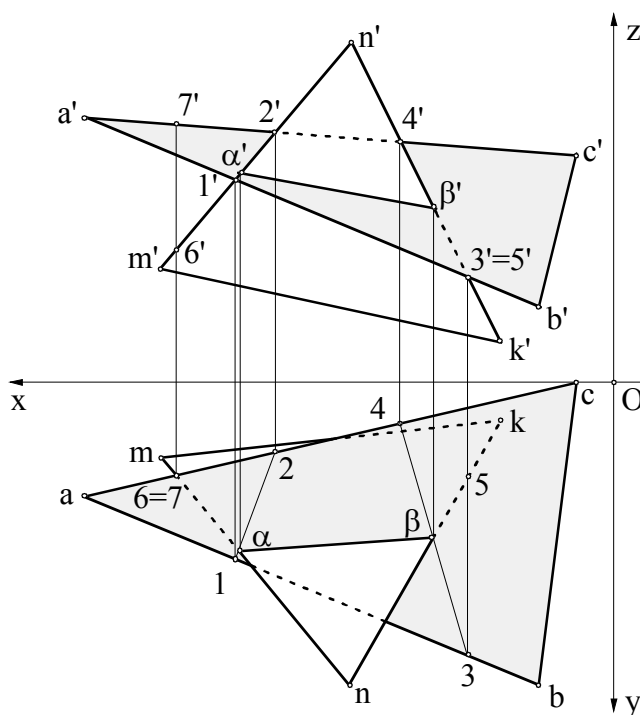


Fig.5.41 Rezolvarea problemei 10

vizibilitatea dreptei și în proiecția orizontală, considerând intersecția aparentă a proiecției δ cu latura bc , respectiv punctele $3 \equiv 4$ (fig.5.40).

10. Fie plăcile plane opace date prin coordonatele vârfurilor $[ABC]$: $A(70, 15, 35)$, $B(10, 40, 10)$, $C(5, 0, 30)$, și $[MNK]$: $M(60, 10, 15)$, $N(35, 40, 45)$, $K(15, 5, 5)$. Să se determine segmentul de dreaptă după care cele două plăci se intersectează și să se studieze vizibilitatea plăcilor.

Rezolvare : Segmentul de dreaptă după care cele două plăci se intersectează este determinat de punctele în care laturile MN și NK intersectează planul triunghiului $[ABC]$. Se procedează ca și la problema 9 și se determină punctele (α, α') și (β, β') .

Pentru stabilirea vizibilității plăcilor în proiecția orizontală s-au

considerat punctele aparent suprapuse $3'$ și $5'$, iar pentru proiecția verticală, punctele 6 și 7 (fig.5.41).

11. Să se determine segmentul de dreaptă după care se intersectează placa triunghiulară $[ABC]$: $A(60,10,15)$, $B(35,40,45)$, $C(15,5,5)$, și placa patrulateră $[EFGI]$: $E(5,10,35)$, $F(65,5,40)$, $G(55,35,5)$, $I(10,y_1,10)$. Să se studieze vizibilitatea plăcilor, considerându-le opace.

Rezolvare : placa $[EFGI]$ se reprezintă în epură determinând depărtarea punctului I , y_1 , astfel încât punctul I să aparțină plăcii. Grafic, aceasta se realizează folosind punctul $K(k,k')$ de intersecție al diagonalelor, ca în figura 5.42.

Pentru definirea segmentului de dreaptă după care se intersectează cele două plăci, se determină punctele (α, α') și (β, β') în care laturile AB și BC , ale triunghiului, înțepă placa patrulateră $[EFGI]$.

Vizibilitatea plăcilor se studiază având în vedere observația că vârful B al triunghiului are cea mai mare cotă și depărtare, deci este primul vizibil, atât în proiecția orizontală cât și în cea verticală, față de planul patrulaterului (fig.5.42).

12. Din punctul $K(40,5,35)$ să se traseze o perpendiculară pe planul triunghiului $[ABC]$: $A(60,10,15)$, $B(45,28,37)$, $C(15,5,5)$ și să se determine punctul în care aceasta îl intersectează.

Rezolvare : Construirea perpendicularei pe planul triunghiului se face utilizând o orizontală și o frontală a acestuia. Astfel, se trasează prin punctul $A(a,a')$ orizontala $G(g,g')$ și frontala $F(f,f')$. Din proiecția k se construiește proiecția orizontală d , perpendiculară pe orizontala g , iar din proiecția k' , proiecția verticală d' perpendiculară pe frontala f' : $d \perp g$, $d' \perp f'$, dreapta $D(d,d')$ fiind perpendiculara cerută (fig.5.43).

Perpendiculara intersectează planul triunghiului în punctul $I(i,i')$, punct determinat ca în rezolvarea problemei 9.

13. Se consideră planul $[P]$ definit prin urme: $OP_x = 10$, $OP_y = -5$, $OP_z = -10$ și un punct $A(20,10,20)$, exterior planului. Prin punctul A să se traseze o dreaptă $D(d,d')$ perpendiculară pe planul $[P]$.

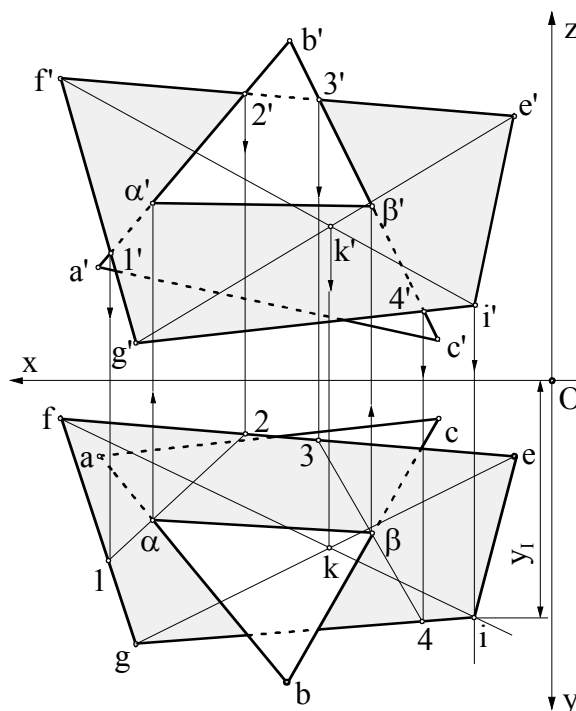


Fig.5.42 Rezolvarea problemei 11

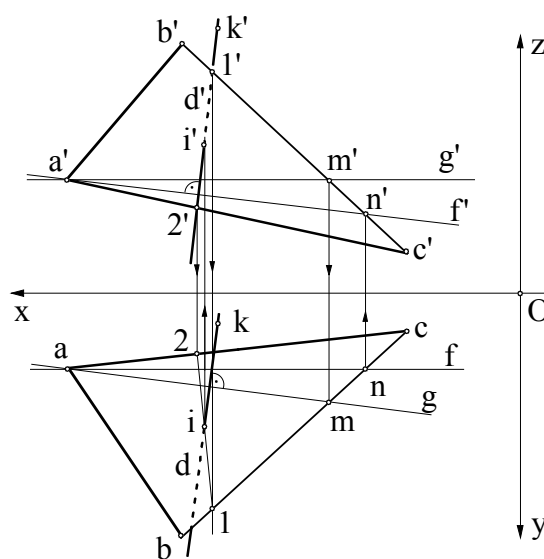


Fig.5.43 Rezolvarea problemei 12

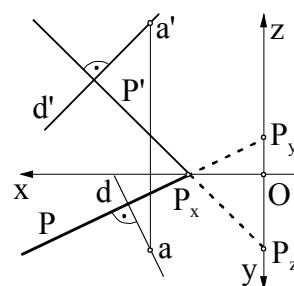


Fig.5.44 Rezolvarea problemei 13

Rezolvare : Dreapta $D(d,d')$, perpendiculară pe planul $[P]$, are proiecțiile perpendiculare pe urmele de același fel ale planului. Astfel, prin proiecția a se trasează proiecția d , $d \perp P$ și prin proiecția a' , proiecția d' , $d' \perp P'$ (fig.5.44).

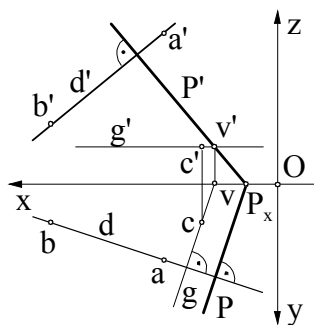


Fig.5.45 Rezolvarea problemei 14

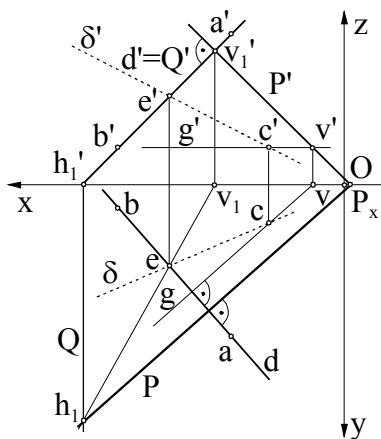


Fig.5.46 Rezolvarea problemei 15

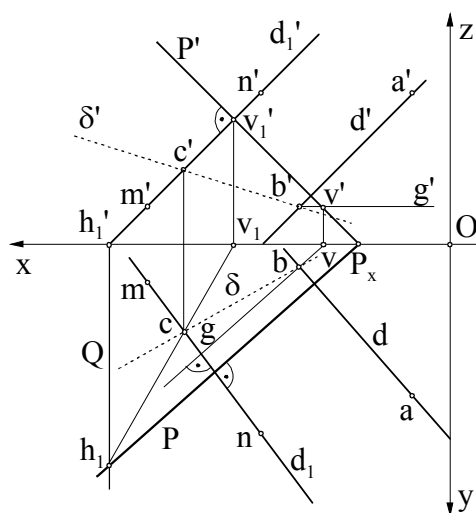


Fig.5.47 Rezolvarea problemei 16

14. Fie dreapta $D(d,d')$: $A(20,10,20)$, $B(30,5,8)$ și un punct $C(10,5,5)$, exterior ei. Prin punctul C să se traseze un plan $[P]$ perpendicular pe dreapta D .

Rezolvare : Prin punctul C se trasează o orizontală $G(g,g')$ a planului $[P]$, perpendiculară pe dreapta D : $g' \parallel Ox$, $c' \in g'$, $g \perp d$, $c \in d$. Se determină urma verticală $V(v,v')$ a orizontalei și prin proiecția v' se trasează urma verticală P' a planului $[P]$, perpendiculară pe proiecția d' a dreptei D : $P' \perp d'$, la intersecția cu axa Ox rezultând punctul P_x . Din P_x se trasează urma orizontală P a planului $[P]$, perpendiculară pe proiecția d a dreptei D : $P \perp d$ (fig.5.45).

15. Se consideră dreapta $D(d,d')$: $A(20,20,20)$, $B(30,3,5)$ și un punct $C(10,5,5)$, exterior ei. Prin punctul C să se traseze o dreaptă $\Delta(\delta,\delta')$ perpendiculară pe dreapta D .

Rezolvare : Prin punctul C se construiește un plan $[P]$ perpendicular pe dreapta D , cu ajutorul orizontalei $G(g,g')$ (vezi rezolvarea problemei 14).

Se determină punctul $E(e,e')$, în care dreapta $D(d,d')$ intersectează planul $[P]$, cu ajutorul unui plan de capăt $[Q]$, dus prin dreapta D , $[P] \cap [Q] = H_1V_1$, $h_1v_1 \cap d = e$.

Dreapta Δ este definită de punctele $C(c,c')$ și $E(e,e')$: $\delta = c \cup e$, $\delta' = c' \cup e'$. Observând epura din figura 5.46, se confirmă faptul că unghiul drept dintre două drepte oarecare se proiectează deformat pe cele două plane de proiecție.

16. Fie două drepte $D(d,d')$: $A(5,20,20)$, $B(20,3,5)$ și $D_1(d_1,d_1')$: $M(40,5,5)$, $N(25,25,20)$. Prin punctul B să se traseze o dreaptă $\Delta(\delta,\delta')$ perpendiculară pe dreapta D și concurentă cu dreapta D_1 .

Rezolvare : Prin punctul B se construiește un plan $[P]$ perpendicular pe dreapta D , cu ajutorul orizontalei $G(g,g')$ (vezi rezolvarea problemei 14).

Orice dreaptă din planul $[P]$ care trece prin punctul B este perpendiculară pe dreapta D , dar numai o anumită dreaptă intersectează și dreapta D_1 . Astfel, se determină punctul $C(c,c')$, în care dreapta $D_1(d_1,d_1')$ intersectează planul $[P]$, cu ajutorul unui plan de capăt $[Q]$, dus prin dreapta D_1 , $[P] \cap [Q] = H_1V_1$, $h_1v_1 \cap d_1 = c$. Dreapta $\Delta(\delta,\delta')$ căutată este definită de punctele $B(b,b')$ și $C(c,c')$: $\delta = b \cup c$, $\delta' = b' \cup c'$ (fig.5.47).

17. Prin punctul $A(35,15,28)$ să se construiască un plan $[R]$, perpendicular pe planul $[P] : OP_x = 50, OP_y = 25, OP_z = 35$ și care să intersecteze axa Ox la 10mm de planul lateral.

Rezolvare : Prin punctul $A(a,a')$ se construiește o dreaptă $D(d,d')$, perpendiculară pe planul $[P] : d \perp P, a \in d, d' \perp P', a' \in d'$ și i se determină urmele $H(h,h')$ și $V(v,v')$. Planul $[R]$ este definit de dreapta $D(d,d')$ și de punctul R_x , știind din enunțul problemei că $OR_x = 10$: $R = R_x \cup h, R' = R_x \cup v'$ (fig.5.48).

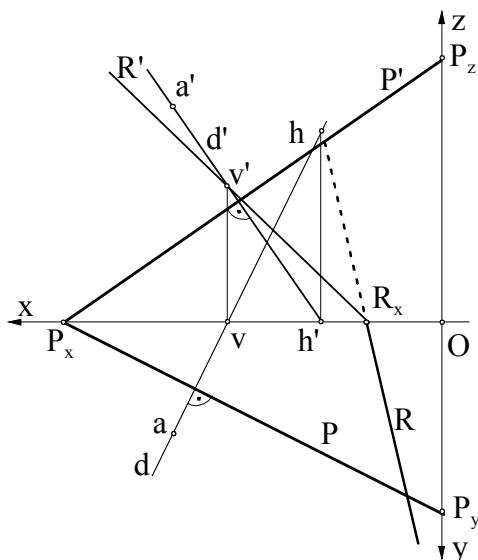


Fig.5.48 Rezolvarea problemei 17

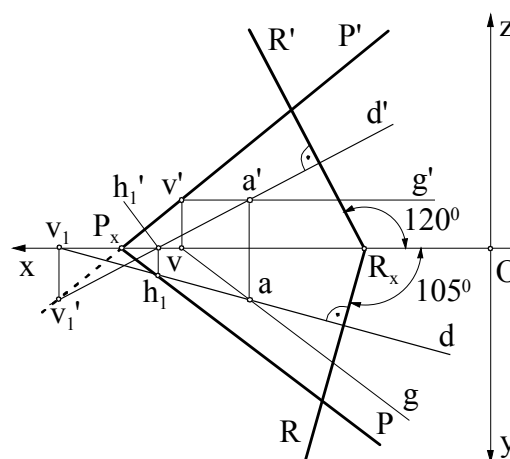


Fig.5.49 Rezolvarea problemei 18

18. Fie două plane definite prin urme, astfel : $[P] : OP_x = 50, \angle OP_x P = 35^\circ, \angle OP_x P' = 40^\circ$ și $[R] : OR_x = 17, \angle OR_x R = 105^\circ, \angle OR_x R' = 120^\circ$. Să se verifice dacă cele două plane sunt perpendiculare.

Rezolvare : Se consideră un punct $A(a,a')$ în planul $[P]$ (punctul se ia pe orizontala $G(g,g')$ a planului $[P]$) și prin el se construiește o dreaptă $D(d,d')$ perpendiculară pe planul $[R]$, astfel : $d \perp R, a \in d, d' \perp R', a' \in d'$. Se determină urmele $H_1(h_1, h_1')$, $V_1(v_1, v_1')$ ale dreptei D și se verifică dacă acestea sunt pe urmele planului $[P]$, respectiv dacă dreapta D aparține acestuia. După cum se observă în epura din figura 5.49 : $h_1 \in P$ și $v_1' \in P'$, deci planul $[P]$ conține dreapta D , care este perpendiculară pe planul $[R]$; rezultă că cele două plane sunt perpendiculare : $[P] \perp [R]$.

19. Prin punctul $A(40,15,10)$, să se construiască un plan $[R]$, perpendicular pe planele $[P] : OP_x = 50, OP_y = 10, OP_z = 15$ și $[Q] : OQ_x = 20, OQ_y = 25, OQ_z = 20$.

Rezolvare : Problema poate fi rezolvată în două moduri :

a) *varianta I de rezolvare* (fig.5.50, a) : Se determină dreapta de intersecție $D(d,d')$ dintre planele $[P]$ și $[Q] : P \cap Q = h, P' \cap Q' = v', h \cup v = d, h' \cup v' = d'$. Se trasează planul $[R]$ perpendicular pe dreapta $D(d,d')$, prin urma verticală $V(v,v')$ a orizontalei $G(g,g')$, dusă prin punctul $A(a,a')$, perpendiculară pe dreaptă : $g' \parallel Ox, a' \in g', g \perp d, a \in d, R' \perp d', v_1' \in R', R' \cap Ox = R_x, R \perp d$. Planul $[R]$ este perpendicular pe planele $[P]$ și $[Q]$, deoarece acestea conțin dreapta $D(d,d')$, care este perpendiculară pe planul $[R]$.

a) *varianta II de rezolvare* (fig.5.50, b) : Prin punctul $A(a,a')$ se trasează dreptele $D(d,d')$ și $\Delta(\delta,\delta')$, perpendiculare pe planele $[P]$ și $[Q] : d' \perp P', d \perp P, \delta' \perp Q', \delta \perp Q$. Se determină urmele celor două drepte și se trasează urmele planului $[R] : h \cup h_1 = R, v' \cup v_1' = R'$. Planul $[R]$ este perpendicular pe planele $[P]$ și $[Q]$, deoarece conține câte o dreapta perpendiculară pe acestea.

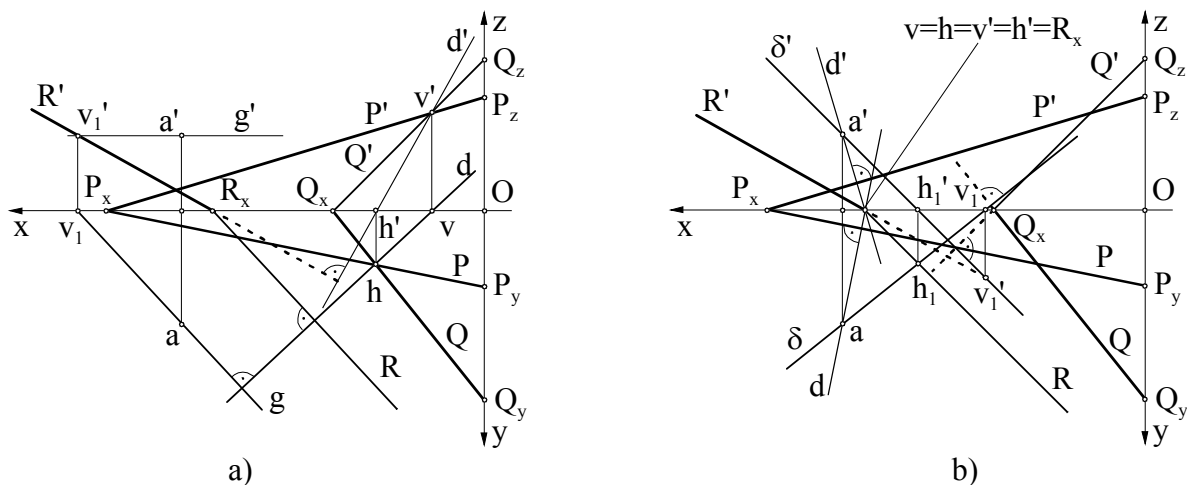


Fig.5.50 Rezolvarea problemei 19

5.5 Probleme propuse

1. Fie dreptele $D(d,d') : A(50,13,37), B(70,-12,52)$ și $\Delta(\delta,\delta') : E(20,5,70), F(40,20,35)$. Prin punctul $M(80,10,35)$ să se ducă un plan $[Q]$ paralel cu planul $[P]$, definit de cele două drepte.

2. Se dă planul $[P] : OP_x = 100, OP_y = 50, OP_z = 70$. Prin punctul $A(20,20,10)$ să se construiască un plan $[Q]$ paralel cu planul $[P]$.

3. Se consideră planul $[P]$, definit de dreapta $D(d,d') : A(80,40,50), B(20,15,10)$ și de punctul $M(45,10,40)$. Prin punctul $N(60,25,20)$ să se traseze un plan $[Q]$ paralel cu planul $[P]$.

4. Fie planul $[Q] : OQ_x = 30, OQ_y = -80, OQ_z = -30$. Prin punctul $A(20,10,20)$ să se ducă un plan $[R]$ paralel cu planul $[Q]$.

5. Fie triunghiurile ABC și EFG , date prin coordonatele vârfurilor : $A(0,30,20), B(40,70,90), C(80,10,70), E(150,90,20), F(60,70,30)$ și $G(130,10,80)$. Să se verifice dacă cele două triunghiuri sunt paralele.

6. Fie planele $[P] : OP_x = 140, \angle OP_x P = 60^\circ, OP_z = 80$ și $[Q] : OQ_x = 30, OQ_y = -80, OQ_z = -30$, a căror urme nu se întâlnesc în cadrul epurei. Să se determine dreapta de intersecție $D(d,d')$ dintre cele două plane.

7. Să se determine dreapta $\Delta(\delta,\delta')$ de intersecție dintre planul $[P] : OP_x = 30, OP_y = -20, OP_z = \infty$ și planul $[R] : OR_x = 100, OR_y = 55, OR_z = 70$.

8. Fie punctul $A(60,20,40)$, un plan de nivel $[N]$ și un plan de front $[F]$ care conțin acest punct. Să se determine coordonatele punctului de intersecție $I(i,i')$, dintre cele două plane și un plan de capăt $[Q]$, ce trece prin punctul $B(20,30,60)$ și face 60° cu planul orizontal de proiecție.

9. Să se determine dreapta de intersecție dintre planul $[P] : OP_x = 140, OP_y = 40, OP_z = 50$ și planul de front $[F]$ care trece prin punctul $M(90,30,10)$.

10. Să se determine dreapta de intersecție dintre planul $[Q] : OQ_x = 70, OQ_y = 80, OQ_z = 65$ și planul de nivel $[N]$ care trece prin punctul $A(90,30,10)$.

11. Prin punctul $I(90,30,10)$ să se ducă o dreapta $D(d,d')$ paralelă cu planele $[P] : OP_x = 140, OP_y = 40, OP_z = 50$ și $[Q] : OQ_x = 70, OQ_y = 80, OQ_z = 65$.

12. Se dau punctul $A(30,10,30)$ și dreapta $D(d,d') : B(60,40,10), C(80,15,40)$. Să se determine urmele unui plan $[P]$, paralel cu dreapta D , care taie axa Ox într-un punct de abscisă 120 și conține punctul A .

13. Se consideră planul $[P]$, definit de punctele $A(45,10,20)$, $B(70,0,40)$ și $C(100,40,0)$. Prin punctul $M(20,40,40)$ să se ducă o paralelă $D(d,d')$ la planul $[P]$.

14. Fie planul $[P]$ definit prin urme : $OP_x = 150$, $OP_y = 90$, $OP_z = 85$. Prin punctul $K(110,15,30)$ să se ducă o dreaptă $\Delta(\delta,\delta')$ paralelă cu planul $[P]$.

15. Se consideră planul $[P] : OP_x = 100$, $OP_y = 50$, $OP_z = 70$ și un punct $A(60,40,50)$, exterior planului. Să se construiască o dreaptă $D(d,d')$ paralelă cu planul $[P]$, care să treacă prin punctul A .

16. Fie punctul $M(50,10,20)$ și dreptele $D(d,d') : A(95,20,5)$, $B(70,10,25)$ și $\Delta(\delta,\delta') : E(35,5,30)$, $F(15,30,10)$, necoplanare. Să se construiască urmele planului $[P]$, care trece prin punctul M și este paralel cu cele două drepte

17. Prin punctul $B(70,60,70)$, să se traseze o dreaptă $\Delta(\delta,\delta')$, paralelă cu planul $[P]$ definit prin urme : $OP_x = 60$, $OP_y = 40$, $OP_z = 50$.

18. Se dă planul $[P]$ definit prin urme: $OP_x = 100$, $OP_y = 50$, $OP_z = 70$ și dreapta $D(d,d') : A(70,50,60)$, $B(20,20,10)$. Să se determine punctul de intersecție $I(i,i')$ dintre dreapta D și planul $[P]$.

19. Fie planul $[P]$ definit prin două drepte paralele $D_1(d_1,d_1') : A(70,5,20)$, $B(30,35,20)$, $D_2(d_2,d_2') : C(40,10,30)$ și o dreaptă oarecare $\Delta(\delta,\delta') : M(60,40,50)$, $N(10,10,5)$. Să se determine proiecțiile punctului de intersecție $I(i,i')$, dintre dreapta Δ și planul $[P]$, fără a se construi urmele planului

20. Prin punctul $E(60,30,50)$ să se traseze o dreaptă $\Delta(\delta,\delta')$, concurentă cu planul triunghiului $[ABC] : A(130,90,20)$, $B(40,70,30)$, $C(110,10,80)$ și să se determine punctul de concurență.

21. Să se determine punctul de intersecție dintre dreapta $D(d,d')$ definită prin urme : $H(55,30,0)$ și $V(30,0,20)$ și placa triunghiulară $[ABC] : A(60,10,5)$, $B(10,5,10)$, $C(30,25,25)$. Considerând placa opacă să se studieze vizibilitatea dreptei.

22. Fie plăcile plane opace date prin coordonatele vârfurilor $[ABCD] : A(120,75,10)$, $B(10,75,10)$, $C(10,15,65)$, $D(120,15,65)$ și $[KMN] : K(20,5,10)$, $M(100,20,5)$, $N(60,75,60)$. Să se determine dreapta de intersecție dintre cele două plăci și să se studieze vizibilitatea plăcilor.

23. Fie două plăci plane triunghiulare opace. Să se determine dreapta de intersecție dintre cele două plăci și să se studieze vizibilitatea plăcilor, în următoarele cazuri :

a) $[ABC] : A(100,10,20)$, $B(60,85,60)$, $C(30,30,30)$

$[KMN] : K(70,10,10)$, $M(120,60,50)$, $N(15,70,60)$;

b) $[ABC] : A(100,10,70)$, $B(60,70,90)$, $C(20,30,20)$

$[KMN] : K(120,50,40)$, $M(70,10,20)$, $N(30,60,80)$;

c) $[ABC] : A(160,40,50)$, $B(20,10,30)$, $C(80,70,90)$

$[KMN] : K(130,90,20)$, $M(40,70,30)$, $N(110,10,80)$;

d) $[ABC] : A(110,20,60)$, $B(25,10,75)$, $C(70,70,10)$

$[KMN] : K(90,10,20)$, $M(15,40,20)$, $N(40,65,80)$.

24. Să se determine dreapta de intersecție dintre o placă plană triunghiulară și una patrulateră, date prin coordonatele vârfurilor : $[ABC] : A(5,5,25)$, $B(70,55,35)$, $C(15,33,5)$ și $[IKNM] : I(45,5,5)$, $K(10,55,50)$, $N(60,40,45)$, $M(65,30,20)$. Să se studieze vizibilitatea plăcilor, considerându-le opace.

25. Fie triunghiul $ABC : A(50,20,50)$, $B(90,70,10)$ și $C(10,30,30)$. Din punctul $M(55,10,15)$ să se ducă o dreaptă $\Delta(\delta,\delta')$, perpendiculară pe planul triunghiului ABC și să se determine punctul $I(i,i')$ de intersecție dintre dreapta $\Delta(\delta,\delta')$ și planul triunghiului. Să se studieze vizibilitatea dreptei Δ , triunghiul fiind considerat opac.

26. Fie placa plană triunghiulară opacă $ABC : A(15,10,70), B(50,60,10), C(100,70,20)$. Din punctul $M(75,10,5)$ să se ducă o dreaptă $D(d,d')$ perpendiculară pe planul triunghiului, să se determine punctul $I(i,i')$ în care aceasta înțeapă triunghiul și să se studieze vizibilitatea perpendicularei.

27. Se consideră planul $[P]$ definit prin urme: $OP_x = 100, OP_y = 50, OP_z = 70$ și un punct $A(60,40,50)$, exterior planului. Să se determine segmentul de dreaptă $AI(a_i, a'_i)$, care definește distanța de la punctul A la planul $[P]$.

28. Să se ridice în punctul A o perpendiculară $\Delta(\delta, \delta')$ pe planul triunghiului ABC , dat prin coordonatele vârfurilor : $A(100,10,70), B(60,70,90), C(20,30,20)$.

29. Prin punctul $A(60,30,50)$ să se traseze o perpendiculară $D(d,d')$ pe planul triunghiului $EFG : E(130,90,20), F(40,70,30), G(110,10,80)$.

30. Prin punctul $C(30,30,15)$ să se ducă un plan $[P]$, perpendicular pe dreapta $D(d,d') : A(50,13,37), B(70,-12,52)$.

31. Fie dreapta $D(d,d') : A(40,10,10), B(70,5,30)$. Prin punctul B să se traseze un plan perpendicular pe această dreaptă.

32. Câte plane $[P]$, perpendiculare pe dreapta $D(d,d') : M(60,10,15), N(40,20,40)$ există? Să se traseze un astfel de plan.

33. Se consideră punctul $A(50,5,15)$ și dreapta $\Delta(\delta, \delta') : M(70,50,60), N(20,-20,10)$. Prin punctul A să se ducă o dreaptă $D(d,d')$, perpendiculară pe dreapta $\Delta(\delta, \delta')$.

34. Fie dreapta $D(d,d') : A(80,40,50), B(20,15,10)$ și punctul $M(45,10,40)$. Să se determine proiecțiile perpendicularei KM duse din punctul M pe dreapta $D, K \in D$.

35. Prin punctul $A(110,20,60)$ să se ducă o perpendiculară $\Delta(\delta, \delta')$ pe dreapta $MN : M(90,10,20), N(15,40,20)$.

36. Fie planul proiectant vertical $[P] : OP_x = 80, OP_y = 70, OP_z = \infty$ și punctul $A(20,20,40)$, exterior planului. Să se construiască planul proiectant vertical $[Q]$, care trece prin punctul A și face 90° cu planul $[P]$. Ce fel de dreaptă este dreapta de intersecție dintre cele două plane?

37. Fie planul de capăt $[Q] : OQ_x = 80, OQ_y = \infty, OQ_z = 70$ și punctul $M(20,40,20)$, exterior planului. Să se construiască planul de capăt $[R]$, care trece prin punctul M și face 90° cu planul $[Q]$. Ce fel de dreaptă este dreapta de intersecție dintre cele două plane?

38. Se consideră planul $[P]$ definit prin urme : $OP_x = 150, OP_y = 90, OP_z = 85$. Prin punctul $E(80,30,15)$ să se ducă un plan $[Q]$, perpendicular pe planul $[P]$, care întâlnește axa Ox în punctul $F(35,0,0)$;

39. Fie planul de capăt $[P] : OP_x = 10, OP_y = \infty, OP_z = -15$ și punctul $A(50,30,z_A)$, din acest plan. Prin punctul A să se ducă un plan $[Q]$, perpendicular pe planul $[P]$, care are urmele în prelungire.

40. Se consideră planul $[P]$ definit prin urme: $OP_x = 100, OP_y = 50, OP_z = 70$ și un punct $A(60,40,50)$, exterior planului. Prin punctul A să se ducă un plan $[Q]$, perpendicular pe planul $[P]$, care trece prin origine.

41. Se consideră dreapta $D(d,d') : A(100,40,30), B(70,60,70)$ și planul $[P] : OP_x = 60, OP_y = 40, OP_z = 50$. Să se determine proiecțiile unui triunghi $[ABC]$, al cărui plan să fie perpendicular pe planul $[P]$.

42. Fie planele $[P] : OP_x = 20, OP_y = -10, OP_z = -60$ și $[Q] : OQ_x = 70, OQ_y = -60, OQ_z = 50$. Să se verifice dacă acestea sunt perpendiculare.

43. Prin punctul $I(90,30,10)$, să se construiască un plan $[R]$, perpendicular pe planele $[P] : OP_x = 140, OP_y = 40, OP_z = 50$ și $[Q] : OQ_x = 70, OQ_y = 80, OQ_z = 65$.

6. METODELE GEOMETRIEI DESCRIPTIVE

Prin metodele geometriei descriptive se realizează modificarea proiecțiilor elementelor geometrice din pozițiile date în alte poziții, particulare față de planele de proiecție, poziții în care drepte, figurile geometrice sau unghiurile apar în adevărată mărime. Aceste transformări pot fi făcute în două moduri :

- modificând sistemul de referință, adică schimbând poziția planelor de proiecție și lăsând pe loc elementul geometric proiectat;
- rotind elementul geometric și lăsând neschimbate planele de proiecție.

Metodele geometriei descriptive, de transformare a proiecțiilor elementelor geometrice, studiate în continuare sunt :

- metoda schimbării planelor de proiecție;
- metoda rotației;
- metoda rabaterii.

6.1 Metoda schimbării planelor de proiecție

Prin metoda schimbării planelor de proiecție se poate schimba planul vertical de proiecție, planul orizontal de proiecție, sau alternativ ambele plane de proiecție (dubla schimbare de plan) astfel încât, elementul proiectat să ocupe o altă poziție față de noile plane de proiecție (în general, paralel sau perpendicular), în funcție de cerința problemei.

6.1.1 Schimbarea planului vertical de proiecție

Prin schimbarea planului vertical de proiecție, proiecția orizontală a elementului geometric rămâne neschimbată, iar proiecția verticală se schimbă în raport cu noul plan vertical.

a) *Schimbarea planului vertical de proiecție pentru un punct*

Fie punctul $A(a, a')$ în sistemul de referință inițial, format din cele două plane de proiecție perpendiculare, orizontal $[H]$ și vertical $[V]$ (fig.6.1).

Dacă se consideră un nou plan vertical de proiecție $[V_1]$, perpendicular pe planul $[H]$, linia de pământ devine O_1x_1 . În noul sistem de referință proiecțiile punctului A vor fi : pe planul orizontal, același punct a , $a \equiv a_1$, iar pe planul vertical $[V_1]$, punctul a_1' . Se observă că punctul A are aceeași cotă în noul sistem ($a_{x_1}a_1' = a_xa' = z$), iar depărtarea modificată ($a_1a_{x_1} \neq aa_x$), raportată la planul vertical de proiecție $[V_1]$.

Pentru realizarea schimbării de plan vertical pentru punctul $A(a, a')$, în epură (fig.6.1, b), se trasează noua linie de pământ O_1x_1 , se duce linia de ordine din proiecția orizontală a , perpendiculară pe O_1x_1 până în a_{1x} și se prelungește cu o distanță egală cu cota punctului, obținând proiecția a_1' .

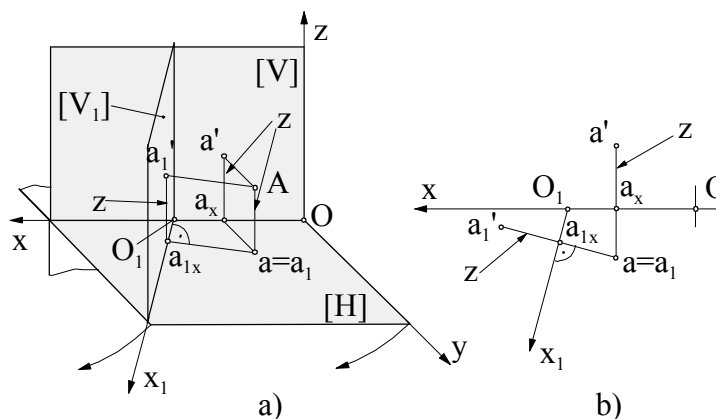


Fig.6.1 Reprezentarea schimbării de plan vertical de proiecție pentru punctul $A(a, a')$: a) în spațiu ; b) în epură

Orientarea liniei de pământ trebuie astfel făcută încât punctul să-și păstreze diedrul în care a fost inițial.

Observație : La schimbarea de plan vertical de proiecție, proiecția orizontală și cota unui punct rămân neschimbate, iar proiecția verticală și depărtarea punctului se modifică.

b) *Schimbarea planului vertical de proiecție pentru o dreaptă*

Fie o dreaptă fiind definită de două puncte. A schimba planul vertical de proiecție pentru aceasta înseamnă a face această schimbare pentru două puncte ale dreptei.

Fiind dat segmentul de dreaptă $AB(ab, a'b')$, schimbarea de plan vertical se face prin schimbarea de plan vertical pentru punctele $A(a, a')$ și $B(b, b')$, față de aceeași linie de pământ O_1x_1 , păstrând proiecțiile orizontale, a și b și cotele punctelor, $a_x a' = a_{1x} a'_1$, $b_x b' = b_{1x} b'_1$ (fig.6.2, a). Segmentul de dreaptă obținut în noul sistem este $A_1B_1(a_1b_1, a'_1b'_1)$.

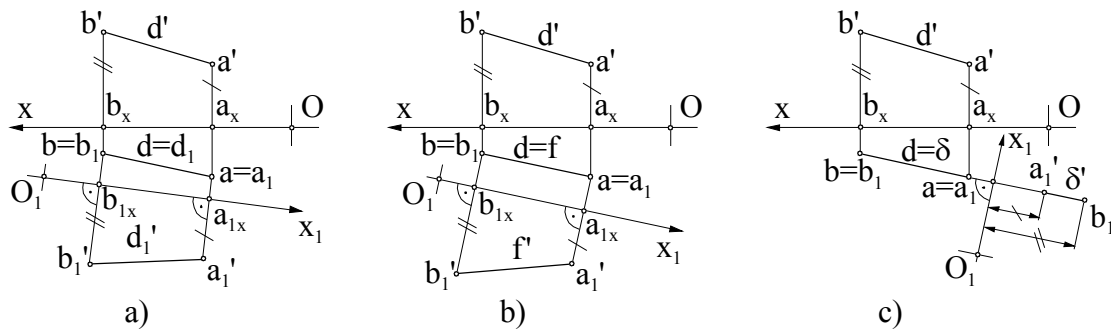


Fig.6.2 Schimbare de plan vertical pentru o dreaptă

Dreapta $D(d, d')$ și dreapta $D_1(d_1, d'_1)$ obținută sunt într-o poziție oarecare, dar de obicei, în probleme, dreapta oarecare este transformată într-o dreaptă particulară, alegând poziția noului plan vertical, convenabilă.

Prin schimbarea planului vertical de proiecție o dreaptă oarecare $D(d, d')$ se transformă într-o frontală $F(f, f')$ - luând linia de pământ O_1x_1 paralelă cu proiecția orizontală a dreptei, d (fig.6.2, b) - sau într-o dreaptă de profil $A(\delta, \delta')$ - luând linia de pământ O_1x_1 perpendiculară pe proiecția orizontală a dreptei, d (fig.6.2, c).

c) *Schimbarea planului vertical de proiecție pentru un plan*

Se consideră un plan oarecare $[P]$, dat prin urmele sale, P și P' și un nou plan vertical de proiecție $[V_1]$. Cele două plane verticale de proiecție și planul dat se

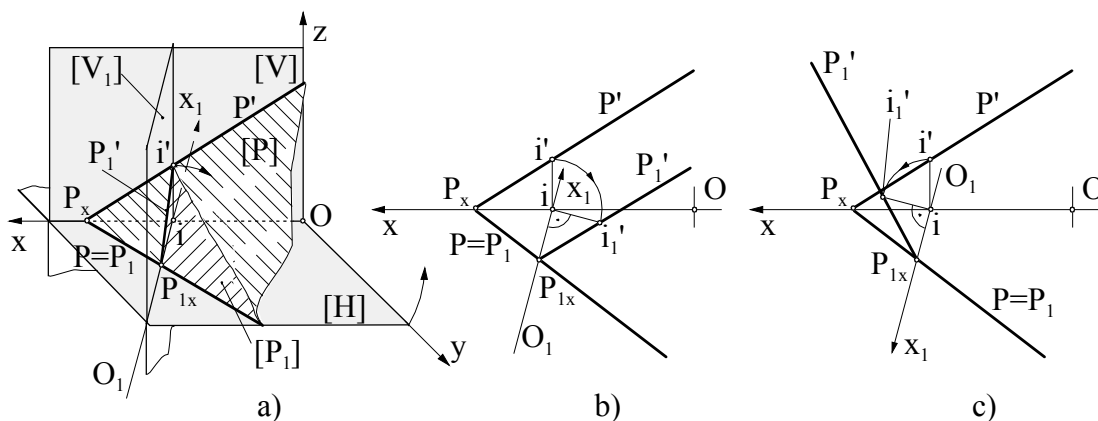


Fig.6.3 Reprezentarea schimbării de plan vertical de proiecție pentru planul $[P]$:

a) în spațiu; b) – c) în epură

intersectează într-un punct $I(i, i')$, a cărei proiecție orizontală i coincide cu intersecția celor două linii de pământ: $i = Ox \cap O_1x_1$ (fig.6.3, a).

Pentru a realiza schimbarea de plan vertical pentru planul $[P]$ în epură, se observă că urma orizontală a planului rămâne neschimbată, $P \equiv P_1$ și la intersecția ei cu axa O_1x_1 se obține punctul P_{1x} . Pentru aflarea noii urmei verticale P_1' se ține seama de faptul că punctul $I(i, i')$ aparține atât urmei verticale vechi P' cât și celei noi P_1' , deci se face schimbarea de plan vertical pentru punctul I . Noua proiecție verticală P_1' se obține măsurând cota punctului I , pe perpendiculara dusă din proiecția orizontală i pe axa O_1x_1 , sau rotind proiecția verticală i' în jurul lui i până se suprapune pe acea perpendiculară, în i_1' . Proiecția verticală i' , respectiv planul orizontal $[H]$, se poate roti în sensul prevăzut în figura 6.3, a, obținându-se epura din figura 6.3, b sau în sens contrar, ca și în epura din figura 6.3, c. În fiecare caz se stabilește sensul corespunzător pentru noua axă O_1x_1 . Punctul P_{1x} și proiecția verticală i_1' determină urma verticală a planului $[P_1]$, obținută după schimbarea de plan vertical: $P_1' = P_{1x} \cup i_1'$.

Schimbarea de plan vertical pentru un plan oarecare $[P]$, se aplică în general, atunci când se urmărește transformarea lui într-un plan particular și anume într-un plan proiectant de capăt $[P_1]$ (fig.6.4, a) sau într-un plan paralel cu linia de pământ $[P_2]$ (fig.6.4, b). Linia de pământ O_1x_1 se trasează perpendiculară pe urma orizontală P a planului, în transformarea din figura 6.4, a sau paralelă

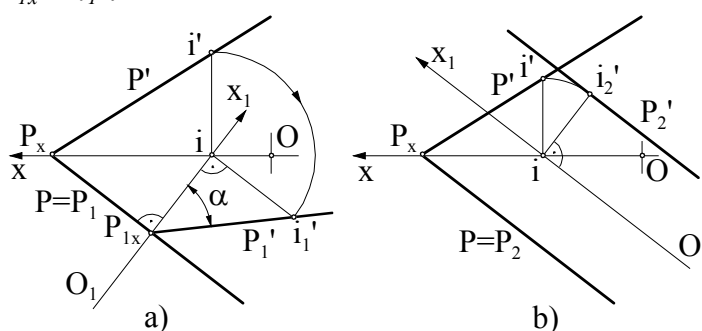


Fig.6.4 Plan oarecare transformat în :
a) plan de capăt ; b) plan paralel cu linia de pământ

cu aceasta, în transformarea din figura 6.4, b și în continuare, se aplică metodologia descrisă mai sus, pentru schimbarea planului vertical de proiecție. Prin planul $[P_1]$ astfel transformat, se obține mărimea reală a unghiului α pe care planul oarecare $[P]$ îl face cu planul orizontal de proiecție, unghi identic cu unghiul plan dintre urma P_1' și axa O_1x_1 .

6.1.2 Schimbarea planului orizontal de proiecție

Prin schimbarea planului orizontal de proiecție, proiecția verticală a elementelor geometrice rămâne neschimbată, iar proiecția orizontală se modifică în raport cu noul plan orizontal.

a) *Schimbarea planului orizontal de proiecție pentru un punct*

Se consideră un punct $A(a, a')$ și un nou plan orizontal de proiecție, $[H_1]$, perpendicular pe planul vertical de proiecție $[V]$, care se menține (fig.6.5, a). Planele de proiecție $[H_1]$ și $[V]$ se intersectează după linia de pământ, O_1x_1 . În noul sistem de proiecție

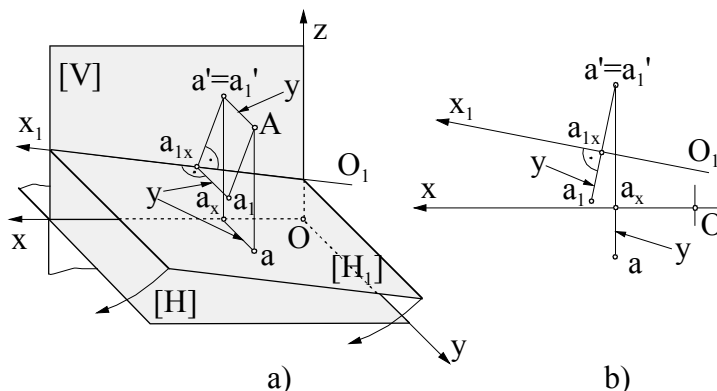


Fig.6.5 Reprezentarea schimbării de plan orizontal de proiecție pentru punctul $A(a, a')$: a) în spațiu; b) în epură

punctul A are aceeași proiecție verticală, $a' \equiv a_1'$ și o nouă proiecție orizontală, a_1 .

În epură (fig.6.5, b), pentru determinarea proiecției orizontale a_1 , se ține seama de faptul că punctul are aceeași depărtare. Astfel, după trasarea axei O_1x_1 se duce linia de ordine din a' până la intersecția cu aceasta, unde se obține a_{1x} și se prelungește cu o distanță egală cu depărtarea punctului, $a_1a_{1x} = aa_x = y$.

Sensul liniei de pământ se stabilește astfel încât punctul să rămână în diedrul în care a fost înainte de schimbarea planului de proiecție.

Observație : La schimbarea de plan orizontal de proiecție, proiecția verticală și depărtarea unui punct rămân neschimbate și se modifică proiecția orizontală și cota punctului.

b) Schimbarea planului orizontal de proiecție pentru o dreaptă

Schimbarea de plan orizontal de proiecție pentru o dreaptă se face prin schimbarea planului orizontal pentru două puncte ale dreptei.

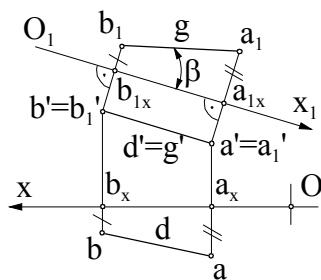


Fig.6.6 Schimbare de plan orizontal pentru o dreaptă

Fie segmentul de dreaptă $AB(ab, a'b')$. Printr-o schimbare de plan orizontal acesta poate fi adus paralel față de noul plan orizontal de proiecție $[H_1]$ (fig.6.6). Noua linie de pământ O_1x_1 se va lua astfel încât punctele $A(a, a')$ și $B(b, b')$ să aibă aceeași cotă în noul sistem de referință, adică paralelă cu proiecția verticală $a'b'$, care rămâne neschimbată, $O_1x_1 \parallel a'b'$. Trasarea axei O_1x_1 de o parte sau de alta a proiecției $a'b'$, nu modifică rezolvarea problemei, ci doar sensul axei. Din proiecțiile verticale ale punctelor A și B se duc linii de ordine perpendiculare pe axa O_1x_1 și pe acestea se măsoară depărtările punctelor, $a_{1x}a_1 = a_xa$ și $b_{1x}b_1 = b_xb$, obținându-se

proiecția orizontală a segmentului orizontal A_1B_1, a_1b_1 .

Astfel, pe epura din figura 6.6 se poate găsi adevărata mărime a segmentului AB , $AB = a_1b_1$ și unghiul pe care-l face cu planul vertical de proiecție, $\angle (AB, [V]) = \angle \beta$, acesta definind poziția unei drepte orizontale $G(g, g')$ (dreaptă de nivel).

c) Schimbarea planului orizontal de proiecție pentru un plan

Fie dat prin urme planul oarecare $[P]$. Dacă se face o schimbare de plan orizontal de proiecție pentru acest plan el se transformă într-un plan $[P_1]$, față de noul sistem de proiecție, alcătuit din planul vertical $[V]$ și noul plan orizontal $[H_1]$ (fig 6.7).

Urma verticală a noului plan P_1' rămâne neschimbată, $P_1' \equiv P'$. Pentru determinarea urmei orizontale P_1 se folosește punctul de intersecție a celor trei plane, $[H]$, $[P]$ și $[H_1]$, determinat la intersecția celor două linii de pământ, $Ox \cap O_1x_1 = I(i, i')$, punct

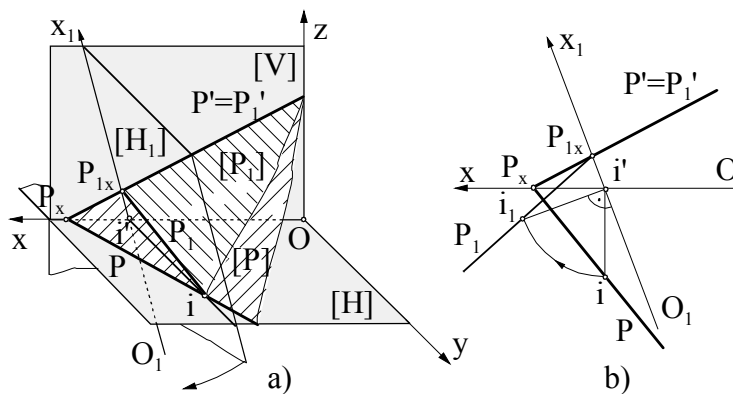


Fig.6.7 Schimbarea de plan vertical de proiecție pentru planul oarecare $[P]$

care are proiecția verticală i' pe linia de pământ și proiecția orizontală i pe urma P a planului. Se face schimbarea de plan orizontal pentru punctul I , măsurând depărtarea punctului pe linia de ordine dusă din i' , sau rotind proiecția orizontală i până se suprapune pe linia de ordine, față de axa O_1x_1 , în i_1 . Un alt punct al urmei orizontale este P_{1x} , unde urma verticală intersectează

linia de pământ O_1x_1 . Se unesc cele două puncte și se obține urma orizontală P_I a planului transformat, $P_I = P_{Ix} \cup i_1$. Rotirea proiecției i se poate face și în sens invers celui prezentat în epura din figura 6.7, b , în acest caz modificându-se și direcția axei O_1x_1 .

Dacă noua linie de pământ O_1x_1 se ia perpendiculară pe urma verticală a planului oarecare $[P]$, planul se transformă într-un plan proiectant vertical $[P_I]$ (fig.6.8). Astfel, se poate determina unghiul diedru dintre planul $[P]$ și planul vertical de proiecție $[V]$, ca fiind unghiul plan β , dintre urma orizontală P_I și noua linie de pământ O_1x_1 .

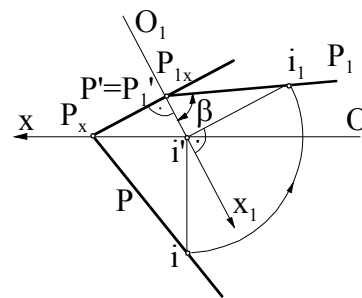


Fig.6.8 Plan oarecare transformat în plan proiectant vertical

6.1.3 Dubla schimbare a planelor de proiecție

Prin subiectele tratate mai sus se observă că printr-o singură schimbare de plan de proiecție, o dreaptă oarecare poate fi adusă *paralelă* cu un plan de proiecție, iar un plan oarecare poate fi transformat într-un *plan proiectant* față de unul din planele de proiecție.

În rezolvarea problemelor, uneori este necesar ca o dreaptă oarecare să fie transformată într-o dreaptă perpendiculară pe unul din planele de proiecție sau un plan oarecare să fie adus în poziția de plan paralel cu un plan de proiecție. Aceste modificări, a poziției dreptelor sau planelor, pot fi făcute prin două schimbări succesive ale planelor de proiecție.

a) Transformarea unei drepte oarecare în dreaptă perpendiculară pe unul din planele de proiecție

Aducerea unui segment de dreaptă, de poziție oarecare, $AB(ab, a'b')$ în poziția, perpendiculară pe unul din planele de proiecție, comportă două schimbări de plan succesive (fig.6.9).

În epura din figura 6.9, a s-a rezolvat transformarea dreptei $D(d, d')$, oarecare, în dreapta verticală $\Delta(\delta, \delta')$. Prima schimbare de plan de proiecție se face astfel încât segmentul de dreaptă să se transforme într-o frontală $F(f, f')$, deci planul vertical de proiecție $[V]$ se înlocuiește cu un plan $[V_1]$, paralel cu dreapta $D(d, d')$. Pentru schimbarea de plan vertical de proiecție, se ia linia de pământ O_1x_1 paralelă cu proiecția orizontală a dreptei, $O_1x_1 \parallel ab$ și păstrând cotele punctelor A și B se determină proiecțiile verticale a_1' și b_1' , pe liniile de ordine trasate din a și b .

Frontala $F(f, f')$ dă mărimea reală a segmentului AB , prin proiecția verticală, $AB = a_1'b_1'$ și unghiul α pe care-l face dreapta $D(d, d')$ cu planul orizontal de proiecție $[H]$, prin mărimea unghiului cuprins între proiecția verticală $a_1'b_1'$ și axa O_1x_1 .

Pentru a doua schimbare de plan, se va lua în locul planului orizontal de proiecție $[H]$ un nou plan $[H_1]$, perpendicular pe frontala A_1B_1 . În epură, schimbarea de plan orizontal de proiecție se materializează prin trasarea liniei de pământ O_2x_2 , perpendiculară pe proiecția verticală a frontalei A_1B_1 , $O_2x_2 \perp a_1'b_1'$. Proiecția verticală rămâne neschimbată, $a_1'b_1' \equiv a_2'b_2'$ ($f' = \delta'$), iar pentru determinarea proiecției orizontale se duce linia de ordine din $a_1' \equiv a_2'$ și din $b_1' \equiv b_2'$ și se măsoară depărtările punctelor A_1 și B_1 , care sunt identice, deci se obțin două puncte suprapuse, $a_2 \equiv b_2$. Depărtările punctelor A_1 și B_1 se iau din sistemul de proiecție ($[H], [V_1]$). Dreapta $\Delta(\delta, \delta')$, $\delta \equiv a_2 \equiv b_2$, $\delta' = a_2' \cup b_2'$, obținută prin cele două schimbări de plane de proiecție este o verticală.

În mod similar, o dreaptă oarecare $D(d, d')$ poate fi transformată într-o dreaptă de capăt $\Delta(\delta, \delta')$ (fig.6.9, b). Prin schimbarea de plan orizontal de proiecție dreapta oarecare

$D(d,d')$ se transformă în orizontala $G(g,g')$, iar apoi prin schimbare de plan vertical de proiecție, orizontala se transformă în dreaptă de capăt.

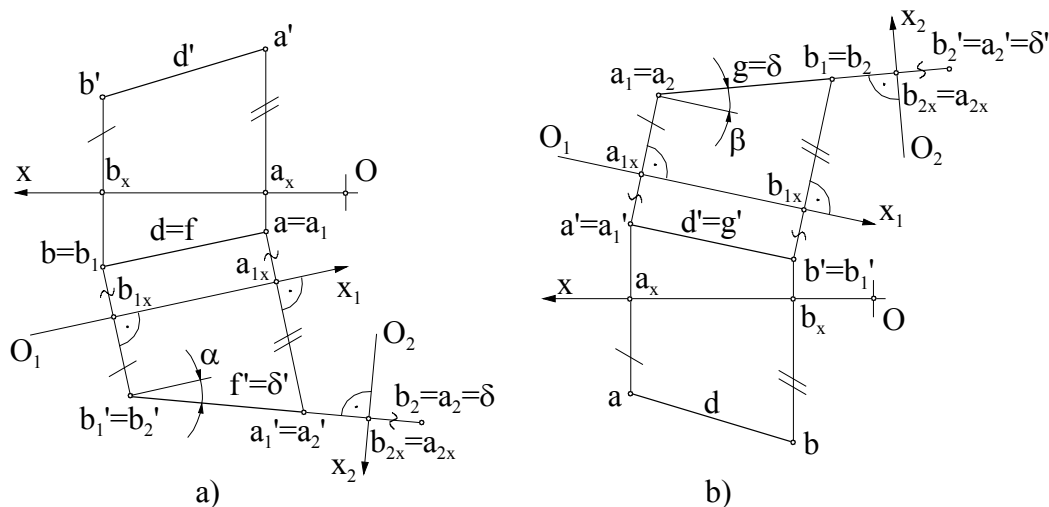


Fig. 6.9 Transformarea unei drepte oarecare în dreaptă perpendiculară pe unul din planele de proiecție : a) verticală ; b) dreaptă de capăt

b) Determinarea distanței de la un punct la o dreaptă

Fie dată dreapta $AB(ab, a'b')$ și un punct exterior ei $M(m, m')$ (fig. 6.10). Pentru determinarea distanței de la punct la dreaptă, se duce perpendiculara MN din punct pe dreaptă și se găsește mărimea acestei perpendiculare. Conform teoremei unghiului drept, pentru a se putea duce din punctul M perpendiculara pe dreapta AB , aceasta trebuie să fie paralelă cu unul din planele de proiecție, astfel încât în epură, unghiul drept să se proiecteze în adevărată mărime pe acel plan.

Dreapta AB se transformă într-o frontală, printr-o schimbare de plan vertical de proiecție, luând axa O_1x_1 paralelă cu proiecția orizontală ab și păstrând cotele punctelor A și B . Poziția punctului M în noul sistem de referință ($[H], [V_1]$) va fi $M_1(m_1, m_1')$. Din proiecția verticală m_1' se duce perpendiculara pe proiecția verticală a frontalei $a_1'b_1'$ și se găsește piciorul perpendicularei în punctul n_1' . Segmentul $M_1N_1(m_1n_1, m_1'n_1')$, este perpendiculara dusă din punctul M_1 pe dreapta A_1B_1 , care revenind în sistemul inițial devine $MN(mn, m'n')$.

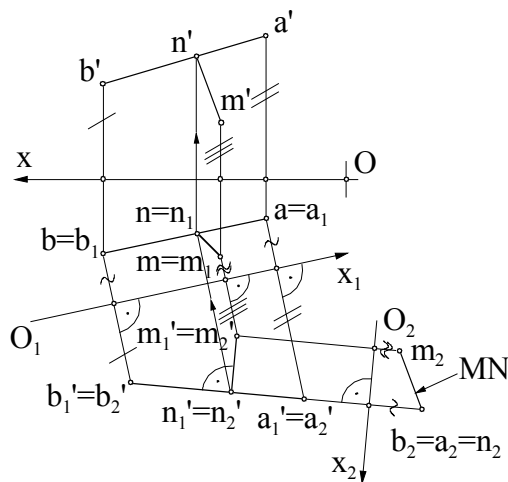


Fig. 6.10 Distanța de la un punct la o dreaptă oarecare

Atât în primul sistem de referință cât și în al doilea, această perpendiculară este o dreaptă oarecare. Pentru a se determina mărimea reală a segmentului M_1N_1 se face o schimbare de plan orizontal de proiecție, alegând poziția liniei de pământ O_2x_2 paralelă cu proiecția verticală $m_1'n_1'$, adică transformându-l în orizontala $M_2N_2(m_2n_2, m_2'n_2')$. Dreapta A_1B_1 devine în al doilea sistem de referință ($[H], [V_1]$), verticala A_2B_2 în planul orizontal O_2x_2 . Distanța reală de la punctul M la dreapta AB este dată de proiecția orizontală m_2n_2 a segmentului M_2N_2 .

c) Transformarea unui plan oarecare în plan paralel cu unul din planele de proiecție

Transformarea unui plan oarecare în plan paralel cu unul din planele de proiecție se poate face prin două schimbări de plan succesive (fig.6.11).

În epura din figura 6.11, a s-a rezolvat transformarea planului $[P]$, oarecare, într-un plan de nivel $[N]$. Printr-o schimbare de plan vertical de proiecție, planul $[P]$ se transformă în planul de capăt $[P_1]$, luând linia de pământ O_1x_1 perpendiculară pe urma orizontală P . A doua schimbare este de plan orizontal de proiecție, considerându-se un nou plan orizontal $[H_1]$, paralel cu planul de capăt $[P_1]$. În epură, aceasta se materializează prin linia de pământ O_2x_2 paralelă cu urma verticală a planului de capăt, P_1' , care devine și urma planului de nivel căutat: $P_1' \equiv N'$.

În mod similar, aplicând o schimbare de plan orizontal, prin care planul oarecare $[P]$ se transformă în planul proiectant vertical $[P_1]$ și apoi o schimbare de plan vertical, se obține planul de front $[F]$, a cărui urmă orizontală este aceeași cu urma orizontală a planului proiectant vertical: $P_1 \equiv F$ (fig.6.11, b).

d) Determinarea mărimii reale a unei figuri geometrice

Se știe că o figură geometrică se proiectează în adevărată mărime pe unul din planele de proiecție atunci când este paralelă cu acesta.

Dacă se dă placa triunghiulară $ABC(a'b'c')$, în poziție oarecare și se cere determinarea mărimii ei reale, trebuie ca planul triunghiului să devină paralel cu un plan de

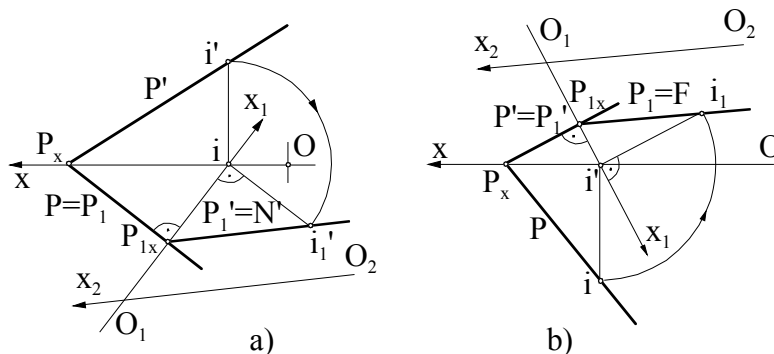


Fig.6.11 Transformarea unui plan oarecare în plan paralel cu un plan de proiecție : a) plan de nivel ; b) plan de front

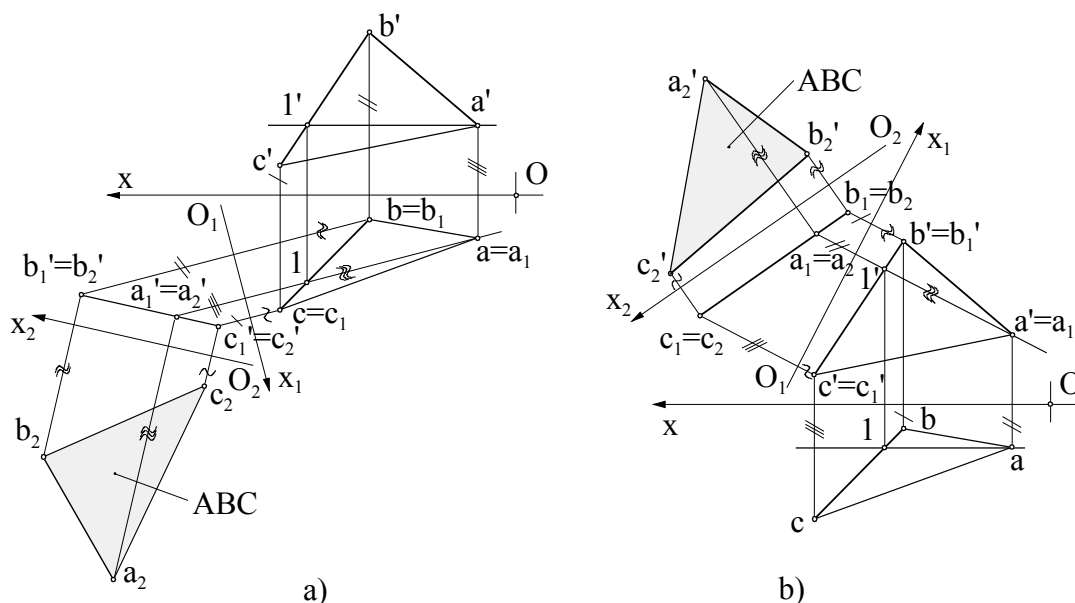


Fig.6.12 Adevărata mărime a triunghiului $[ABC]$

proiecție. Pentru aceasta trebuie schimbate succesiv ambele plane de proiecție, ordinea schimbărilor fiind indiferentă.

În epura din figura 6.12, *a*, asupra plăcii triunghiulare ABC se aplică o schimbare de plan vertical de proiecție, astfel încât să devină plan de capăt, $[A_1B_1C_1] \perp [V_1]$, iar apoi o schimbare de plan orizontal de proiecție, devenind plan de nivel, $[A_2B_2C_2] \parallel [H_1]$.

Pentru realizarea schimbării de plan vertical de proiecție se folosește o orizontală a triunghiului ABC , dusă printr-un vârf al triunghiului, $AI(aI, a'I')$. Linia de pământ O_1x_1 se trasează perpendiculară pe proiecția orizontală a orizontalei, $O_1x_1 \perp aI$, astfel încât aceasta se transformă într-o dreaptă de capăt. Din proiecțiile orizontale ale vârfurilor triunghiului a, b și c se duc linii de ordine și se măsoară cotele punctelor, obținând proiecțiile verticale a_1', b_1' și c_1' , coliniare, având în vedere că triunghiul $[A_1B_1C_1]$ este proiectant față de planul vertical de proiecție $[V_1]$ (plan de capăt).

La a doua schimbare de plan orizontal de proiecție, linia de pământ O_2x_2 se trasează paralelă cu urma verticală a planului triunghiului $[A_1B_1C_1]$, $O_2x_2 \parallel a_1'b_1'c_1'$ (triunghiul este paralel cu planul $[H_1]$). Din proiecțiile verticale ale vârfurilor triunghiului, a_1', b_1' și c_1' se trasează linii de ordine și se măsoară depărtările punctelor din al doilea sistem de referință ($[H], [V_1]$), obținându-se proiecțiile a_2, b_2 și c_2 , care unite dau adevărata mărime a triunghiului, $a_2b_2c_2 \equiv ABC$.

În mod similar, se poate începe cu o schimbare de plan orizontal de proiecție, ca și în epura din figura 6.12, *b*, placa triunghiulară ABC devenind plan proiectant vertical, $[A_1B_1C_1] \perp [H_1]$, iar apoi o schimbare de plan vertical de proiecție, devenind plan de front, $[A_2B_2C_2] \parallel [V_1]$. Adevărata mărime a triunghiului rezultă în proiecția verticală : $a_2'b_2'c_2' \equiv ABC$

Metoda se poate aplica și pentru determinarea unghiului real dintre două drepte oarecare, aducând planul celor două drepte paralel cu unul din planele de proiecție, prin două schimbări succesive de plan.

6.2 Metoda rotației

Prin metoda rotației, planele de proiecție orizontal și vertical rămân nemodificate ca poziție în spațiu și se modifică poziția elementelor geometrice față de acestea, prin rotirea lor în jurul unei *axe de rotație* Z , perpendiculară pe unul din planele de proiecție.

Planele în care se rotesc punctele sunt perpendiculare pe axa de rotație, deci sunt paralele cu planele de proiecție. Punctul în care axa de rotație înțeapă un astfel de plan se numește *centru de rotație*, se notează cu Ω și reprezintă centrul arcelor de cerc descrise de puncte în rotație. Raza arcelor de cerc este egală cu distanța de la puncte la centrul de rotație, iar când punctele sunt situate pe axa de rotație, ele nu se deplasează rămânând propriile lor puncte rotite. Sensul în care se rotesc punctele este indiferent, dar este important ca toate punctele unei figuri geometrice să fie rotite în același sens și cu același unghi.

6.2.1 Rotația de nivel

La rotația de nivel, axa de rotație $Z(z, z')$ este perpendiculară pe planul orizontal de proiecție $[H]$ (dreaptă verticală), iar planele în care se rotesc punctele sunt plane paralele cu planul $[H]$ (plane de nivel $[N]$). Arcele de cerc după care se rotesc punctele se proiectează în adevărată mărime pe planul orizontal de proiecție.

a) Rotația de nivel pentru un punct

Fie punctul $A(a, a')$ care se rotește în jurul axei de rotație $Z(z, z')$, în planul de nivel $[N]$. În spațiu (fig.6.13, a), punctul A se rotește cu unghiul α , descriind arcul de cerc AA_1 , cu raza $A\Omega = r$ și cu centrul în centrul de rotație Ω . În epură (fig.6.13, b), rotația punctului se transpune prin rotirea proiecției orizontale a punctului, a cu unghiul α , în jurul proiecției orizontale z a axei de rotație, cu raza za , descriind arcul aa_1 . Proiecția verticală a punctului rotit, a_1' se obține ridicând din proiecția orizontală a_1 o linie de ordine până pe urma verticală a planului de nivel N' , în care s-a produs rotația. Deci, în timpul rotației, proiecția verticală a' se deplasează paralel cu linia de pământ Ox , până în a_1' . Punctul rotit $A_1(a_1, a_1')$ își păstrează cota.

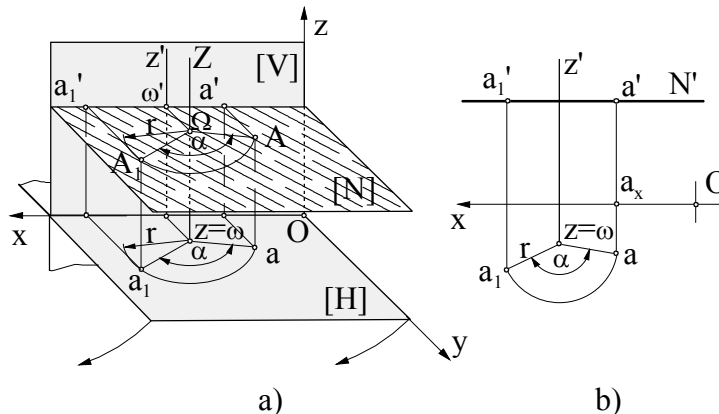


Fig.6.13 Reprezentarea rotației de nivel pentru punctul $A(a, a')$: a) în spațiu, b) în epură

Observație : La rotația de nivel punctele își modifică atât proiecția orizontală cât și cea verticală, dar își păstrează cota neschimbată.

b) rotația de nivel pentru o dreaptă

La rotația de nivel a unei drepte este suficient să se rotească două puncte ale ei pentru a obține poziția rotită a dreptei. Aici întâlnim două cazuri : axa de rotație este sau nu concurentă cu dreapta.

1) Rotația de nivel a dreptei neconcurentă cu axa de rotație

În principiu, dacă se dă dreapta $D(d, d')$ și se cere să se rotească în jurul axei de rotație $Z(z, z')$ cu unghiul α , aceasta se poate face prin rotirea cu unghiul α a oricăror două puncte ce aparțin dreptei.

Totuși, pentru a nu fi necesar să se măsoare acest unghi pentru fiecare punct rotit, se preferă să se lucreze cu perpendiculara comună dintre axa de rotație și dreapta. Astfel, în figura 6.14, a se duce perpendiculara zb pe proiecția orizontală d a dreptei și se rotește proiecția b cu unghiul α până în b_1 , în jurul axei z . Tangenta dusă în b_1 la arcul descris este chiar proiecția orizontală d_1 a dreptei rotite. Pentru a putea construi și proiecția verticală se mai rotește și punctul a până se suprapune pe d_1 , în a_1 . Se ridică linii de ordine din proiecțiile orizontale rotite a_1 și b_1 și la intersecția cu paralelele duse prin a' și b' la axa

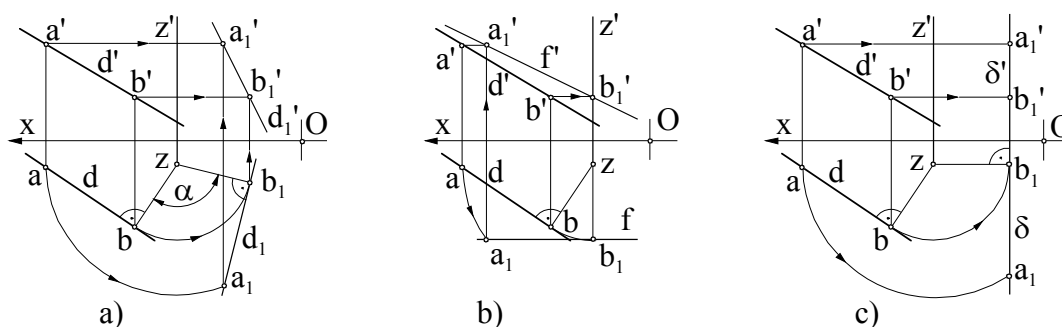


Fig.6.14 Rotația de nivel a dreptei $D(d, d')$, neconcurentă cu axa de rotație $Z(z, z')$

Ox , se obțin proiecțiile verticale a_1' și b_1' care definesc proiecția verticală d_1' a dreptei rotite D_1 .

Dacă tangenta la arcul după care se rotește punctul b se duce astfel încât să fie paralelă cu axa Ox , dreapta rotită va fi o frontală $F(f, f')$, ca în epura din figura 6.14, b , iar dacă tangenta este perpendiculară pe axa Ox , dreapta rotită va fi o dreaptă de profil $\Delta(\delta, \delta')$ (fig. 6.14, c).

2) Rotația de nivel a dreptei concurente cu axa de rotație

Când axa de rotație $Z(z, z')$ este concurentă cu dreapta dată $D(d, d')$ în punctul $I(i, i')$, este suficient să se rotească un singur punct al dreptei, al doilea punct pentru definirea dreptei rotite fiind chiar punctul de concurență, care rămâne propriul lui rotit.

În figura 6.15, a pentru determinarea poziției rotite cu unghiul α a dreptei $D(d, d')$ se rotește punctul a în a_1 , în jurul axei z și se găsește proiecția verticală a_1' . Dreapta rotită $D_1(d_1, d_1')$ este determinată de cele două puncte : punctul de concurență $I(i, i)$ și punctul rotit $A_1(a_1, a_1')$: $d_1 = i \cup a_1$ și $d_1' = i' \cup a_1'$.

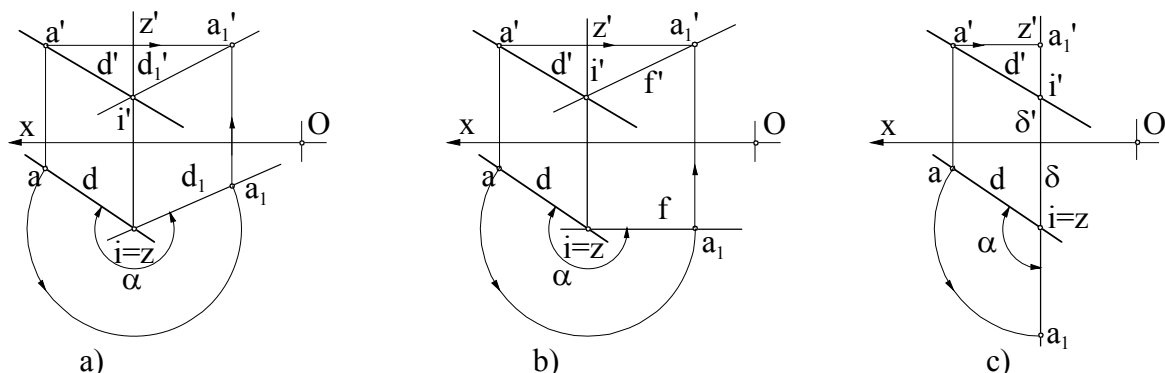


Fig. 6.15 Rotația de nivel a dreptei $D(d, d')$, concurentă cu axa de rotație $Z(z, z')$

Urmând aceeași metodologie, în epura din figura 6.15, b dreapta oarecare $D(d, d')$ s-a transformat în dreapta frontală $F(f, f')$, rotind proiecția orizontală a până segmentul $a_1 i$ a devenit paralel cu axa Ox . De asemenea dreapta oarecare $D(d, d')$ se poate roti până în poziția de dreaptă de profil $\Delta(\delta, \delta')$, ca în epura din figura 6.15, c .

c) Rotația de nivel pentru un plan

La rotația de nivel a unui plan oarecare $[P]$ cu un unghi α se întâlnesc două cazuri :

1) Rotația de nivel a planului când axa de rotație este o verticală oarecare

Fiind dat planul oarecare $[P]$ și axa de rotație $Z(z, z')$ se propune rotirea planului în jurul acesteia cu unghiul α (fig. 6.16, a). Se utilizează o orizontală $G(g, g')$ a planului, dusă prin punctul de intersecție $I(i, i')$ dintre plan și axa de rotație, punct care nu-și schimbă poziția în timpul rotației.

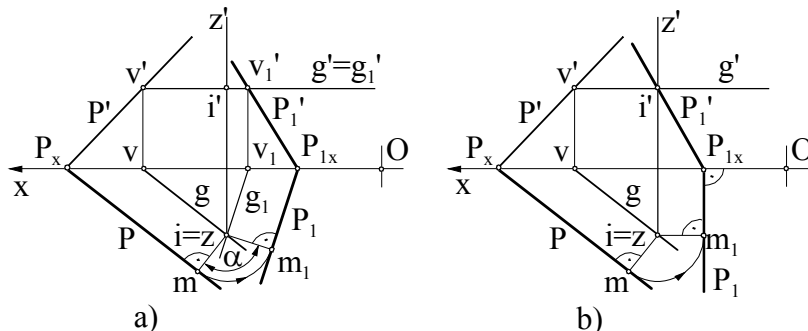


Fig. 6.16 Rotația de nivel a planului când axa de rotație este o verticală oarecare

Din z se duce perpendiculara zm , pe urma orizontală a planului, P și se rotește punctul m cu unghiul cerut α până în punctul m_1 , în jurul axei z . Ducând tangenta în m_1 la arcul de cerc descris de punctul m se obține urma orizontală P_1 a planului rotit $[P_1]$, iar la intersecția cu Ox

punctul P_{lx} . După rotire orizontală G va avea o nouă poziție $G_I(g_I, g_I')$. Proiecția orizontală g_I trece prin punctul i și este paralelă cu urma P_I , iar proiecția verticală rămâne neschimbată, $g_I' \equiv g'$. Se determină urma verticală a orizontalei G_I , $V_I(v_I, v_I')$, iar urma verticală a planului rotit P_I' va trece prin P_{lx} și prin v_I' , $P_I' = P_{lx} \cup v_I'$. Dacă tangenta în m_I la arcul de cerc descris de proiecția m este perpendiculară pe axa Ox , $P_I \perp Ox$, planul $[P_I]$ obținut este un plan de capăt (fig.6.16, b). În acest caz orizontală $G(g, g')$ s-a transformat într-o dreaptă de capăt, cu proiecția verticală în i' , $g_I' \equiv i'$.

2) *Rotația de nivel a planului când axa de rotație este o verticală cuprinsă în planul vertical de proiecție*

Dacă axa de rotație $Z(z, z')$ este o verticală din planul $[V]$ punctul de intersecție dintre aceasta și planul oarecare $[P]$, $I(i, i')$ se găsește la intersecția urmei verticale P' cu proiecția verticală z' a axei de rotație.

Deoarece, un plan oarecare se rotește în general cu scopul de a se transforma într-un plan cu o poziție particulară față de planele de proiecție, în figura 6.17 s-a transformat planul oarecare $[P]$ într-un plan de capăt $[P_I]$. Pentru aceasta s-a trasat perpendiculara zm pe urma orizontală P a planului și s-a rotit punctul m până se suprapune pe axa Ox în m_I . Urmă orizontală P_I a planului rotit $[P_I]$ este perpendiculară pe axa Ox în punctul m_I , $m_I \equiv P_{lx}$, iar urma verticală P_I' se obține unind punctul P_{lx} cu proiecția verticală i' , $P_I' = P_{lx} \cup i'$.

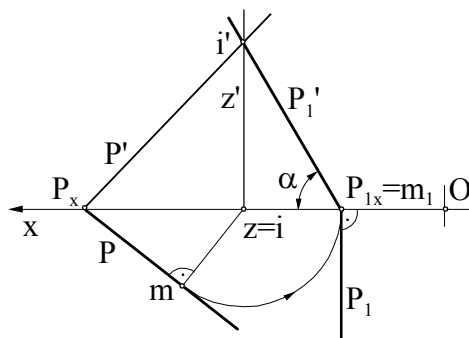


Fig.6.17 Rotația de nivel a planului când axa de rotație este o verticală din $[V]$

6.2.2 Rotația de front

Rotația de front a unui element geometric se face în jurul unei axe de rotație $Z(z, z')$ care este perpendiculară pe planul vertical de proiecție $[V]$ (dreaptă de capăt), punctele rotindu-se în plane paralele cu planul $[V]$ (plane de front). Arcele de cerc descrise de puncte sunt proiectate pe planul vertical de proiecție în adevărată mărime.

a) *Rotația de front pentru un punct*

Se consideră punctul $A(a, a')$ care se rotește cu unghiul α în jurul axei de rotație $Z(z, z')$ descriind un arc de cerc AA_1 cu centrul în punctul Ω și de rază $\Omega A = r$ (fig.6.18).

În epură, unghiul α după care s-a rotit punctul, se proiectează pe planul vertical de proiecție, deci proiecția verticală a' a punctului se rotește în jurul proiecției verticale z' a axei de rotație,

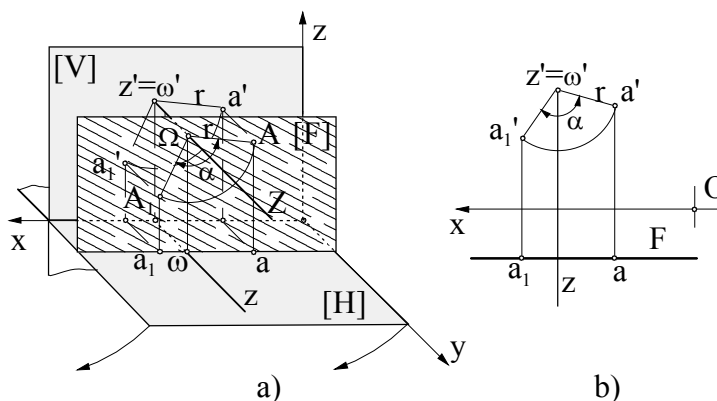


Fig.6.18 Reprezentarea rotației de front pentru punctul $A(a, a')$: a) în spațiu ; b) în epură

după arcul de cerc de rază $\omega'a'$ și de unghi α până ajunge în a_I' , proiecția verticală a punctului A_I rotit. Pentru determinarea proiecției orizontale a_I a punctului rotit se duce linie de ordine din a_I' până pe urma orizontală a planului de front F , în care se petrece rotația. Deci, proiecția orizontală a punctului rotit se deplasează paralel cu axa Ox , adică are aceeași depărtare.

Observație : La rotația de front punctele își modifică atât proiecția orizontală, cât și cea verticală, dar își păstrează depărtările neschimbate.

b) Rotația de front pentru o dreaptă

La rotația de front a drepte, raționamentul este similar cu cel de la rotația de nivel. Întâlnim și aici cele două cazuri, când axa de rotație este sau nu concurentă cu dreapta.

În figura 6.19, *a* se prezintă rotația dreptei $D(d, d')$ în jurul axei de rotație $Z(z, z')$, neconcurente cu dreapta, folosind perpendiculara comună între axa de rotație și dreaptă, $z'm'$. Proiecția m' se rotește cu unghiul dat α și odată cu ea și proiecția verticală a dreptei d' , care ajunge în poziția d_I' , tangentă la arcul $m'm_I'$ în m_I' . Proiecția orizontală m_I a punctului M_I , se obține prin translatarea proiecției orizontale m , paralel cu axa Ox , până întâlnește linia de ordine coborâtă din m_I' . Pentru definirea proiecției orizontale d_I a dreptei rotite se mai rotește punctul $N(n, n')$ al dreptei până în $N_I(n_I, n_I')$: mai întâi se determină proiecția verticală n_I' pe proiecția d_I' și apoi proiecția orizontală n_I . Proiecțiile orizontale m_I și n_I determină proiecția orizontală a dreptei rotite $D_I(d_I, d_I')$, $d_I = m_I \cup n_I$.

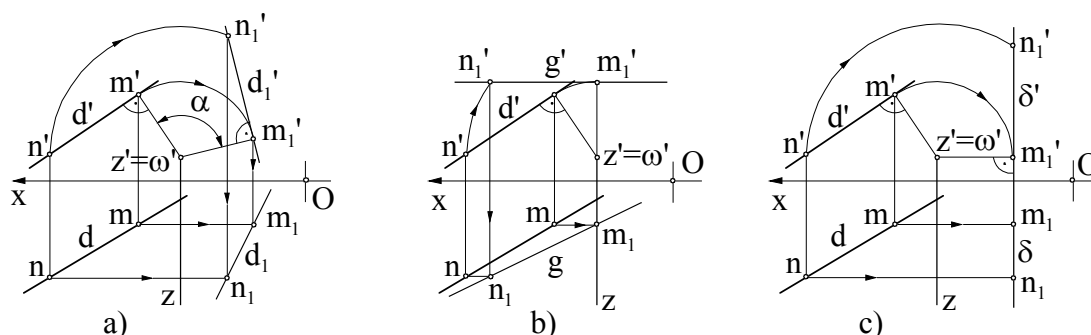


Fig.6.19 Rotația de front a dreptei $D(d, d')$, neconcurentă cu axa de rotație

În epura din figura 6.19, *b* dreapta oarecare $D(d, d')$ s-a transformat în dreaptă orizontală $G(g, g')$, prin rotirea proiecției m' , respectiv a proiecției d' , în jurul axei z' , până devine paralelă cu axa Ox . De asemenea, printr-o rotație de front, o dreaptă oarecare $D(d, d')$ se poate transforma într-o dreaptă de profil $\Delta(\delta, \delta')$, ca în epura din figura 6.19, *c*.

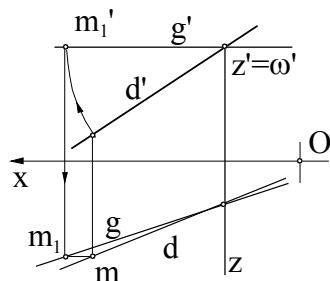


Fig.6.20 Rotația de front a dreptei $D(d, d')$, concurentă cu axa de rotație

Rotația dreptei $D(d, d')$ în jurul unei axe de rotație $Z(z, z')$, concurente cu dreapta, este prezentată în figura 6.20, unde printr-o rotație de front dreapta dată $D(d, d')$ este transformată într-o orizontală $G(g, g')$. Dreapta rotită G este determinată de punctul de intersecție cu axa de rotație $I(i, i')$ și de punctul $M_I(m_I, m_I')$, rotit convenabil, astfel încât proiecția verticală g' să fie paralelă cu axa Ox . Proiecția orizontală m_I s-a determinat coborând din m_I' o linie de ordine până la intersecția cu paralela la Ox , trasată prin proiecția orizontală m .

c) *Rotația de front pentru un plan*

Rotația de front a unui plan oarecare poate fi făcută în jurul unei axe de rotație $Z(z, z')$ care să fie perpendiculară pe planul vertical de proiecție într-un punct oarecare din spațiu sau să fie cuprinsă în planul orizontal de proiecție.

1) *Rotația de front a planului când axa de rotație este o dreaptă de capăt oarecare*

În figura 6.21, pentru rotirea planului $[P]$ cu unghiul α în jurul axei de rotație $Z(z, z')$, se utilizează o frontală $F(f, f')$ a planului, care nu-și schimbă depărtarea. Frontala se trasează prin punctul de intersecție $I(i, i')$ dintre axa de rotație și plan. În timpul rotației punctul I rămâne propriul lui rotit. Din proiecția verticală z' se duce perpendiculara $z'm'$ pe urma P' a planului și se rotește cu unghiul α până în punctul m'_1 . Tangenta dusă în m'_1 la arcul de cerc descris este chiar urma verticală P'_1 a planului $[P_1]$ rotit și întâlnește axa Ox în punctul P_{1x} . Poziția rotită a frontalei $F_1(f_1, f'_1)$ se obține trasând proiecția verticală f'_1 prin i' , paralelă cu urma verticală P'_1 . Urmă orizontală $H_1(h_1, h'_1)$ a frontalei rotite F_1 va fi al doilea punct care determină urma orizontală a planului $[P_1]$, $P_1 = h_1 \cup P_{1x}$.

Dacă perpendiculara $z'm'$ se rotește în jurul axei z' până devine paralelă cu axa Ox , urma verticală P'_1 devine perpendiculară pe axa Ox și urma orizontală P_1 este dată de punctul P_{1x} și punctul de intersecție i : $P_1 = i \cup P_{1x}$ (fig. 6.21, b). Planul astfel obținut este un plan proiectant vertical.

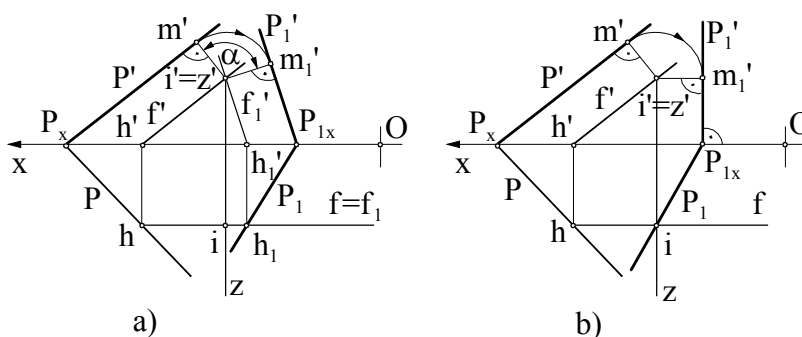


Fig. 6.21 Rotația de front a planului când axa de rotație este o dreaptă de capăt oarecare

2) *Rotația de front a planului când axa de rotație este o dreaptă de capăt cuprinsă în planul orizontal de proiecție*

Prin rotația de front un plan oarecare $[P]$ poate fi transformat în plan proiectant vertical, astfel încât să se determine unghiul diedru β pe care planul îl face cu planul vertical de proiecție. În figura 6.22 este rezolvată această problemă. Axa de rotație $Z(z, z')$ se alege o dreaptă de capăt cuprinsă în planul $[H]$. Astfel, punctul de intersecție $I(i, i')$, dintre planul $[P]$ și axa de rotație este situat în planul orizontal, pe urma orizontală P și rămâne propriul său rotit. Din z' se trasează perpendiculara pe urma orizontală P' în m' și se rotește perpendiculara $z'm'$ până se suprapune peste axa Ox , $z'm'_1$, respectiv urma verticală rotită P'_1 devine perpendiculară pe axa Ox și $m'_1 \equiv P_{1x}$. Urmă orizontală P_1 a planului rotit se obține unind P_{1x} cu proiecția orizontală i , $P_1 = P_{1x} \cup i$.

Unghiul β căutat este unghiul plan cuprins între urma P_1 și axa Ox .

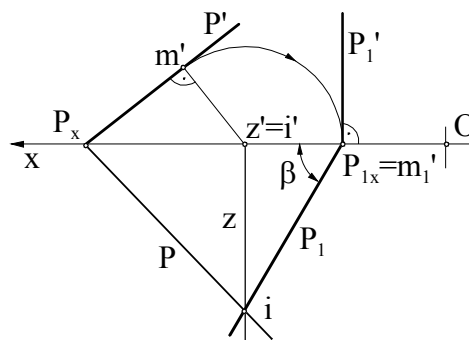


Fig. 6.22 Rotația de front a planului când axa de rotație este o dreaptă de capăt din $[H]$

6.2.3 Dubla rotație a dreptelor și planelor

Printr-o singură rotație, de nivel sau de front, o dreaptă poate fi transformată dintr-o poziție oarecare într-o poziție paralelă cu unul din planele de proiecție, iar poziția oarecare a unui plan poate fi modificată într-o poziție particulară, perpendiculară față de un plan de proiecție.

Pentru a transforma o dreaptă oarecare într-o dreaptă perpendiculară pe unul din planele de proiecție, sau un plan oarecare într-un plan paralel cu un plan de proiecție, se aplică două rotații succesive asupra acelui element.

a) Transformarea unei drepte oarecare într-o dreaptă de capăt

Pentru a transforma dreapta $D(d, d')$ într-o dreaptă de capăt, asupra ei se aplică două rotații succesive: o rotație de front, prin care dreapta $D(d, d')$ oarecare se transformă în dreapta $G(g, g')$ orizontală și o rotație de nivel, prin care orizontala G se transformă în dreapta $\Delta(\delta, \delta')$, dreaptă de capăt (fig.6.23, a).

La prima rotație axa de rotație $Z(z, z')$ este o dreaptă de capăt, concurentă cu dreapta dată în punctul $I(i, i')$. Este suficient să se rotească punctul $M(m, m')$, astfel încât proiecția verticală $i'm_1' \equiv g'$ să fie paralelă cu axa Ox . Proiecția orizontală a dreptei G trece prin punctele i și m_1 , $g = i \cup m_1$.

A doua rotație se realizează în jurul axei $Z_1(z_1, z_1')$, care este o dreaptă verticală, concurentă cu dreapta G în punctul M_1 . Se rotește punctul i de pe proiecția orizontală g până în i_1 , astfel încât proiecția orizontală $\delta = i_1 \cup m_1$ să fie perpendiculară pe axa Ox . Proiecția verticală i' se translatează paralel cu axa Ox până se suprapune cu m_1' , obținând proiecția verticală a dreptei Δ , un punct, $\delta' \equiv m_1' \equiv i_1'$.

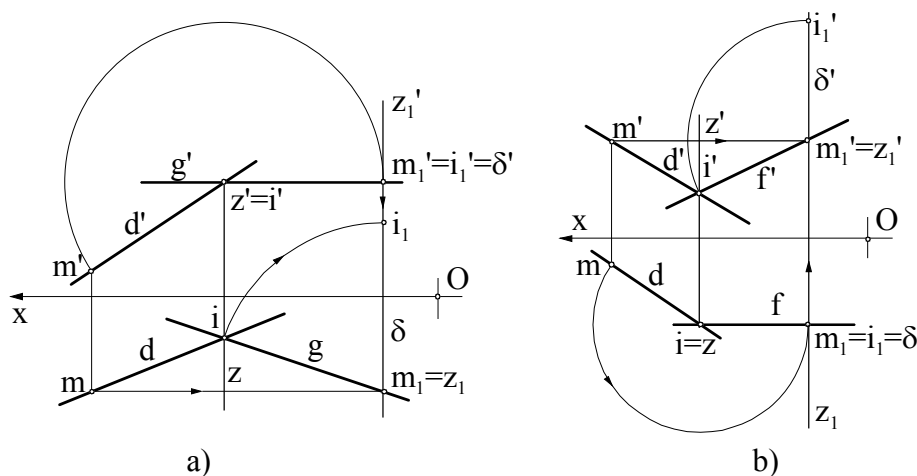


Fig.6.23 Transformarea unei drepte oarecare $D(d, d')$ într-o :

a) dreaptă de capăt ; b) dreaptă verticală

Pentru a transforma o dreaptă oarecare $D(d, d')$ într-o verticală $\Delta(\delta, \delta')$, se procedează similar (fig.6.23, b). Prima rotație este de nivel și se obține o dreaptă de front $F(f, f')$, iar apoi a doua rotație este de front, transformând frontala $F(f, f')$, obținută anterior, în verticala $\Delta(\delta, \delta')$.

b) Transformarea unui plan oarecare în plan paralel cu unul din planele de proiecție

Transformarea unui plan oarecare în plan paralel cu unul din planele de proiecție se poate face prin două rotații succesive (fig.6.24).

În epura din figura 6.24, a, s-a tratat transformarea planului $[P]$, oarecare, într-un plan de nivel $[N]$. Printr-o rotație de nivel în jurul unei axe $Z(z, z')$, dreaptă verticală

cuprinsă în planul vertical, planul $[P]$ se transformă în planul de capăt $[P_1]$. A doua rotație care se efectuează este de front, considerându-se o nouă axă de rotație $Z_1(z_1, z_1')$, dreaptă de capăt, conținută în planul orizontal. Se obține urma verticală N' a planului de nivel $[N]$.

În mod similar, aplicând o rotație de front, cu o axă de rotație $Z(z, z')$, dreaptă de capăt, conținută în planul orizontal, planul oarecare $[P]$ se transformă în planul proiectant vertical $[P_1]$, ca apoi printr-o rotație de nivel în jurul unei axe $Z_1(z_1, z_1')$, dreaptă verticală cuprinsă în planul vertical de proiecție, să se obțină planul de front $[F]$, cu urma orizontală F' (fig. 6.24, b).

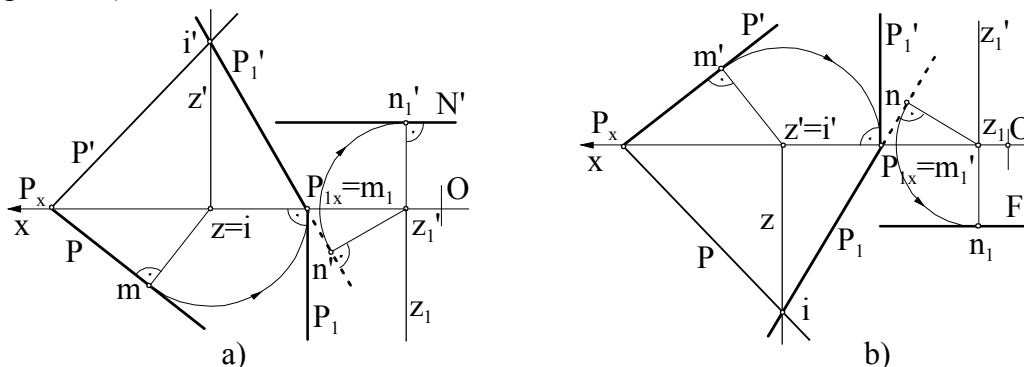


Fig. 6.24 Transformarea unui plan oarecare în plan paralel cu un plan de proiecție :
a) plan de nivel ; b) plan de front

c) Determinarea mărimii reale a unei figuri geometrice

Pentru a determina adevărata mărime a plăcii triunghiulare $[ABC]$, aflată într-o poziție oarecare în spațiu, planul triunghiului trebuie să se aducă în poziție paralelă cu unul din planele de proiecție, prin două rotații succesive. Astfel, în epura din figura 6.25, a, s-a făcut mai întâi o rotație de nivel, planul triunghiului devenind plan proiectant de capăt, iar apoi printr-o rotație de front, planul de capăt s-a transformat în plan de nivel. Se menționează că rotațiile triunghiului s-au făcut prin rotațiile punctelor care îl determină. Astfel, se are în vedere că la o rotație a triunghiului, unghiurile cu care se rotesc punctele A , B și C au aceeași valoare, placa triunghiulară fiind rigidă.

Rotația de nivel s-a făcut în jurul axei de rotație verticale $Z(z, z')$, care trece prin vârful A al triunghiului, deci punctul A este propriul lui rotit, $A(a, a') \equiv A_1(a_1, a_1')$. Pentru determinarea poziției rotite a triunghiului, s-a utilizat o orizontală, trasată prin vârful C , $G(g, g') \equiv C_1(c_1, c_1')$. Pentru ca triunghiul să devină plan de capăt, orizontala G s-a rotit cu ajutorul perpendicularei comune ai până a devenit dreaptă de capăt, $G_1 \equiv C_1I_1$.

Proiecția orizontală c a punctului C care a fost pe orizontala s-a rotit până s-a suprapus pe proiecția orizontală g_1 , iar proiecția verticală c' s-a traslatat paralel cu axa Ox până s-a suprapus pe linia de ordine trasată din c_1 , obținându-se proiecția c_1' . Pentru că nu se știe până unde să se rotească proiecția orizontală b a punctului B (fără a se măsura unghiul cu care s-a rotit orizontala G), s-a plecat invers, de la proiecția verticală b_1' , care trebuie să fie coliniară cu proiecțiile verticale c_1' și a_1' , pentru ca planul rotit să fie plan de capăt. Odată determinată proiecția verticală b_1' , la intersecția liniei $c_1'a_1'$ cu paralela prin b' la axa Ox , s-a coborât linie de ordine și s-a rotit proiecția orizontală b până s-a suprapus pe aceasta în b_1 . Proiecția orizontală a triunghiului rotit este $a_1b_1c_1$.

A doua rotație, *rotația de front* s-a făcut în jurul axei de rotație $Z_1(z_1, z_1')$, dreaptă de capăt trasată prin tot prin vârful A al triunghiului, care și de această dată rămâne propriul lui rotit $A(a, a') \equiv A_1(a_1, a_1') \equiv A_2(a_2, a_2')$. Proiecția verticală a triunghiului din poziția de capăt s-a rotit cu un unghi care rezultă din construcție, până a devenit paralelă cu axa Ox , adică s-a suprapus peste urma planului de nivel ce cuprinde triunghiul $[A_2B_2C_2]$. Din proiecțiile verticale b_2' și c_2' s-au trasat linii de ordine care la intersecția cu paralelele la

axa Ox duse prin proiecțiile orizontale a_1 și c_1 dau proiecțiile orizontale a_2 și c_2 . Proiecția triunghiului $[A_2B_2C_2]$ pe planul orizontal de proiecție reprezintă adevărata mărime a triunghiului dat, $[ABC] = a_2b_2c_2$.

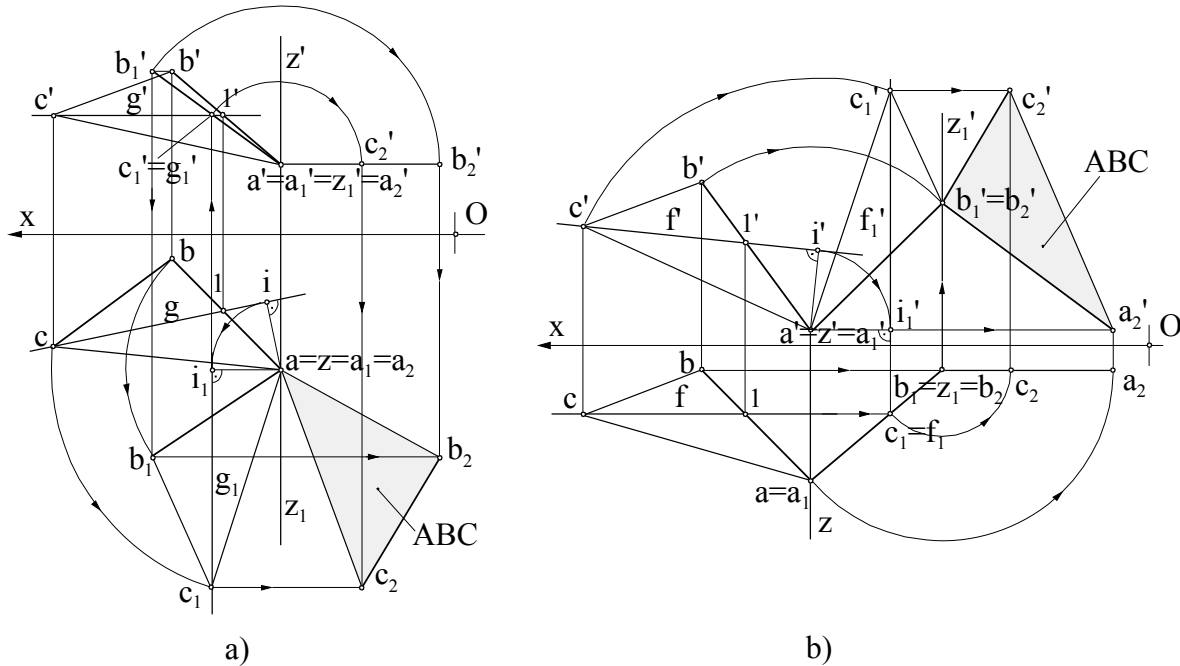


Fig.6.25 Adevărata mărime a triunghiului $[ABC]$

Adevărata mărime a plăcii triunghiulare $[ABC]$ se poate determina și începând cu *rotația de front*, care în epura din figura 6.25, b s-a făcut în jurul axei de rotație $Z(z')$, dreaptă de capăt trasată prin vârful A al triunghiului. Punctul A este propriul lui rotit, $A(a, a') \equiv A_1(a_1, a_1')$. Pentru determinarea poziției rotite a triunghiului s-a utilizat o frontală, trasată prin vârful C , $F(f, f') \equiv C_1(c_1, c_1')$. În noua poziție triunghiul $[A_1B_1C_1]$ este proiectant față de planul vertical, deci proiecțiile orizontale a_1, b_1, c_1 sunt coliniare.

A doua rotație, *rotația de nivel* s-a făcut în jurul axei de rotație $Z_1(z_1')$, trasată prin vârful B_1 al triunghiului, care rămâne propriul lui rotit $B_1(b_1, b_1') \equiv B_2(b_2, b_2')$. Planul triunghiului $[A_2B_2C_2]$ este în poziția de plan de front, deci adevărata mărime a triunghiului dat este proiecția triunghiului $[A_2B_2C_2]$ pe planul vertical de proiecție: $[ABC] = a_2b_2c_2$.

Se precizează că indiferent de succesiunea rotațiilor, pentru a determina adevărata mărime a unei figuri plane, rezultatul obținut este același.

6.3 Metoda rabaterii

Rabaterea este un caz particular al rotației și reprezintă suprapunerea a două plane, unul peste celălalt, prin rotirea unuia în jurul dreptei de intersecție dintre ele (axa de rabatere). Distingem două cazuri:

- *rabaterea pe planele de proiecție* – axa de rabatere este urma planului;
- *rabaterea pe plane paralele cu planele de proiecție* – axa de rabatere este o orizontală sau o frontală a planului.

Punctele aflate în plane care se rabat, se rotesc în plane perpendiculare pe axa de rabatere. Deci, proiecțiile punctelor pe planele pe care se face rabaterea (proiecțiile orizontale sau verticale) și proiecțiile rabătute sunt pe aceeași perpendiculară la axa de rabatere. Dacă punctele sunt situate chiar pe axa de rabatere, rămân neschimbate, fiind propriile lor rabătute.

6.3.1 Rabaterea unui plan oarecare pe planul orizontal de proiecție

Rabaterea unui plan oarecare pe planul orizontal de proiecție se face prin rotirea planului în jurul urmei orizontale (*axa de rabatere*), care rămâne fixă, deci aceasta este o dreaptă a planului rabătut. Pentru ca planul rabătut să fie determinat, este nevoie de încă un punct oarecare din plan, pentru care să se cunoască proiecția rabătută. Astfel, se deosebesc două cazuri pentru determinarea planului rabătut:

a) *Rabaterea unui plan oarecare pe planul orizontal de proiecție, cu ajutorul unui punct de pe urma verticală*

Fie planul oarecare $[P]$ și un punct $M(m, m')$, aparținând urmei verticale P' a planului (fig.6.26, a). În timpul rabaterii planului $[P]$ pe planul orizontal de proiecție, punctul M descrie, în spațiu, un arc de cerc cuprins în planul $[R]$, perpendicular pe axa de rabatere P , de rază ΩM (*raza de rabatere*) și cu centrul în punctul Ω - *centrul de rabatere*, până în punctul m_0 , cuprins în planul orizontal. Unind punctul P_x , care fiind pe axa de rabatere a rămas propriul lui rabătut, cu punctul m_0 , se obține proiecția rabătută a urmei verticale, P_0 .

În epură, proiecția rabătută a punctului M , m_0 , se poate determina în două moduri (fig.6.26, b):

1 – se observă că arcul $m'm_0$ descris de punctul M în spațiu se proiectează pe planul orizontal pe urma orizontală R a planului $[R]$, prin segmentul mm_0 . Astfel, în epură, din proiecția orizontală m , a punctului M , se duce perpendiculara $m\omega$ pe axa de rabatere P și se intersectează cu arcul de cerc cu centrul în P_x , de rază $P_x m'$, rezultând proiecția m_0 . Urma rabătută P_0 trece prin P_x și m_0 .

2 – raza ΩM cu care se rotește punctul M în timpul rabaterii este ipotenuza triunghiului dreptunghic $m'm\omega$, care în epură poate fi construit cunoscând cota punctului. Astfel, din proiecția orizontală m se trasează perpendiculara pe axa de rabatere și se determină centrul de rabatere ω . Prin m se duce o paralelă la axa de rabatere, pe care se măsoară cota punctului M , rezultând punctul m_1 . Se unește m_1 cu ω și se determină *raza de rabatere* ωm_1 , cât și *triunghiul de rabatere* (*triunghiul de poziție*) $\omega m m_1$. Se trasează arcul de cerc cu centrul în ω și de rază ωm_1 până la intersecția cu perpendiculara $m\omega$, unde se determină m_0 – proiecția rabătută a punctului M .

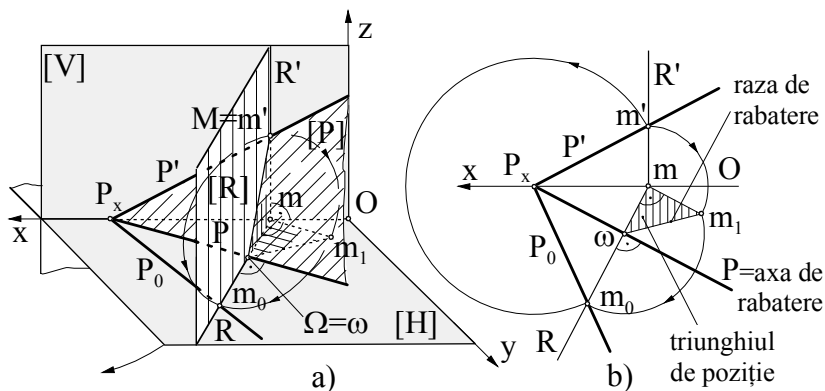


Fig.6.26 Reprezentarea rabaterii unui plan oarecare $[P]$ pe planul orizontal $[H]$: a) în spațiu ; b) în epură

Rabaterea unei figuri plane cuprinsă într-un plan oarecare, pe planul orizontal de proiecție, se obține prin rabaterea punctelor care definesc acea figură.

Fie triunghiul $[ABC]$ cuprins în planul oarecare $[P]$ (fig.6.27). Pentru determinarea proiecției rabătute a triunghiului pe planul orizontal de proiecție, se află în primul rând urma rabătută a planului, P_0 , obținută cu ajutorul punctului $V(v, v')$, de pe urma verticală P' a planului.

Vârfurile triunghiului se rabat pe planul orizontal de proiecție cu ajutorul orizontalelor planului G , G_1 și G_2 pe care se găsesc.

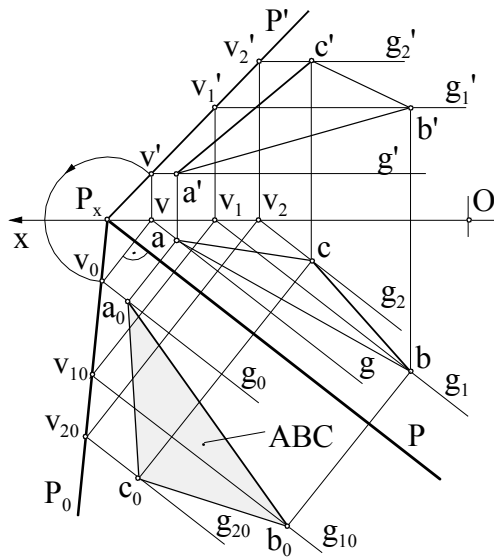


Fig. 6.27 Rabaterea ΔABC pe planul $[H]$

În figura 6.28 este prezentată rabaterea planului oarecare $[P]$ pe planul orizontal de proiecție cu ajutorul punctului $M(m, m')$ de pe urma verticală, caz studiat anterior. Aceeași rezolvare se obține cu ajutorul rabaterii unui punct oarecare $N(n, n')$ din planul $[P]$. Astfel, pentru rabaterea punctului N se determină triunghiul de poziție $n\omega n_1$, folosind cota punctului, se trasează arcul de cerc cu centrul în centrul de rabatere ω și de rază ωn_1 până la intersecția cu perpendiculara $n\omega$, unde se obține proiecția rabătată n_0 .

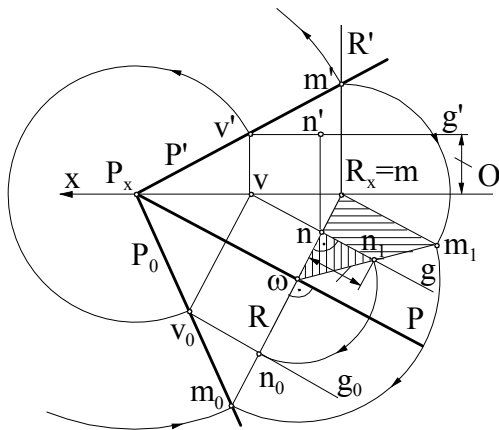


Fig. 6.28 Rabaterea planului $[P]$ pe planul $[H]$

Proiecția rabătată g_0 a orizontalei $G(g, g')$ se obține ducând o paralelă prin urma rabătată a orizontalei, v_0 , la urma orizontală P a planului. Proiecția v_0 s-a determinat la intersecția perpendicularei, dusă din proiecția orizontală v pe axa de rabatere P , cu urma rabătată a planului P_0 . Punctul $A(a, a')$ situat pe orizontala G , după rabatere se găsește pe orizontala rabătată g_0 , în a_0 , la intersecția cu perpendiculara dusă din proiecția orizontală a pe axa de rabatere. Similar se obțin și proiecțiile rabătute b_0 , pentru punctul $B(b, b')$ și c_0 , pentru punctul $C(c, c')$.

Triunghiul $[a_0b_0c_0]$ din planul orizontal reprezintă adevărata mărime a triunghiului $[ABC]$ din planul $[P]$.

b) *Rabaterea unui plan oarecare pe planul orizontal de proiecție, cu ajutorul unui punct oarecare din acel plan*

Punctul $N(n, n')$ fiind pe orizontala $G(g, g')$ a planului $[P]$, după rabatere se găsește tot pe aceea orizontală, rabătată. Prin proiecția rabătată n_0 se duce proiecția rabătată a orizontalei g_0 , paralelă cu urma orizontală P a planului. Urma verticală rabătată a orizontalei v_0 se află pe aceeași perpendiculară la axa de rabatere cu proiecția orizontală v . Unind v_0 cu P_x obținem proiecția rabătată a planului, P_0 .

6.3.2 Rabaterea unui plan oarecare pe planul vertical de proiecție

Rabaterea unui plan oarecare pe planul vertical de proiecție se face în jurul unei *axe de rabatere*, care este urma verticală a planului. Pentru determinarea urmei orizontale rabătute pe planul vertical se poate folosi un punct de pe urma orizontală a planului sau un punct oarecare al planului. În figura 6.29 sunt prezentate cele două cazuri.

Fie punctul $M(m, m')$ situat pe urma orizontală P a planului $[P]$, oarecare. În timpul rabaterii planului $[P]$ pe planul vertical de proiecție, în jurul urmei verticale P' , punctul M

descrie un arc de cerc cuprins într-un plan $[R]$ (plan de capăt) perpendicular pe axa de rabatere P' , care se proiectează pe urma verticală R' , după segmentul $m'm_0$.

În epură, proiecția rabătată m_0 a punctului M , se obține :

1 - ducând un arc de cerc de rază $P_x m$, cu centrul în punctul P_x , care intersectează perpendiculara dusă din proiecția verticală m' pe axa de rabatere P' , în m_0 ;

2 - construind *triunghiul de poziție* $\omega'm'm_1'$, folosind depărtarea punctului M , $m'm = m'm_1'$ și ducând un arc de cerc de rază $\omega'm_1'$, cu centrul în ω' , până la intersecția cu perpendiculara $m'\omega'$ în m_0 .

Urma rabătată trece prin punctul P_x și prin proiecția rabătată m_0 .

Rabaterea planului $[P]$ pe planul vertical de proiecție poate P_0 fi obținută și cu ajutorul unui punct oarecare $N(n, n')$ din acest plan. Astfel, se determină poziția rabătată pe planul vertical n_0 a punctului N , cu ajutorul triunghiului de poziție $\omega'n'n_1'$, construit folosind depărtarea punctului. Frontala $F(f, f')$ a planului $[P]$ trece prin punctul N , iar după rabatere, frontala rabătată f_0 trece prin n_0 și este paralelă cu urma P' a planului. Urma orizontală a frontalei, rabătată, h_0 , se găsește pe perpendiculara dusă din proiecția verticală h' pe axa de rabatere și pe frontala rabătată f_0 . Unind proiecția h_0 cu punctul P_x se determină urma rabătată a planului, P_0 .

Rabaterea unei figuri plane cuprinsă într-un plan oarecare, pe planul vertical de proiecție, se obține prin rabaterea punctelor care definesc acea figură.

Triunghiul $[ABC]$ cuprins în planul oarecare $[P]$ (fig.6.30) se rabate pe planul vertical de proiecție cu ajutorul frontalelor planului F, F_1 și F_2 pe care se găsesc vârfurile triunghiului. În primul rând se determină urma rabătată a planului, P_0 , obținută cu ajutorul punctului $H(h, h')$, de pe urma orizontală P a planului, apoi proiecțiile rabătute ale frontalelor, f_0, f_{10}, f_{20} și pe acestea vârfurile rabătute ale triunghiului a_0, b_0, c_0 , care reprezintă adevărata mărime a triunghiului $[ABC]$ din planul $[P]$.

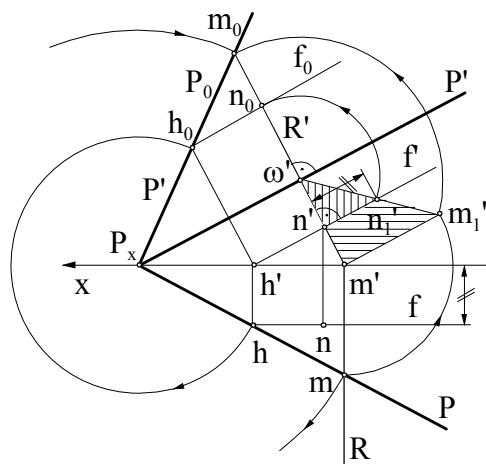


Fig.6.29 Rabaterea planului $[P]$ pe planul $[V]$

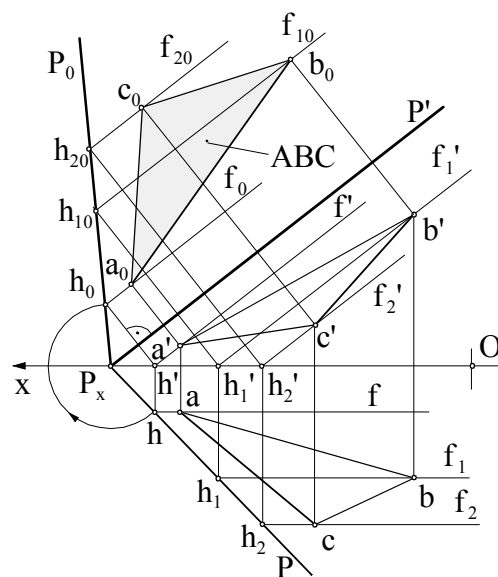


Fig.6.30 Rabaterea $\triangle ABC$ pe planul $[V]$

6.3.3 Rabaterea pe plane paralele cu unul din planele de proiecție

Rabaterea pe plane paralele cu unul din planele de proiecție se referă, în general, la *rabaterea pe plane de nivel sau de front*. Această rabatere se utilizează când prin rabaterea pe planele de proiecție construcțiile grafice ar scoate figura rabătată din cadrul epurei, sau când planul care trebuie rabătat este dat prin elementele geometrice care îl determină, iar aflarea urmelor planului ar fi o muncă în plus.

Rabaterea pe plane de nivel sau de front se face cu ajutorul triunghiului de poziție, cu observația că, în construirea acestuia cateta paralelă cu axa de rabatere are lungimea egală cu distanța de la punct la planul pe care se face rabaterea.

a) *Rabaterea pe un plan de nivel*

Fie punctul $M(m, m')$ cuprins în planul $[P]$ și planul de nivel $[N]$ (fig.6.31, a). Pentru rabaterea planului $[P]$ pe planul de nivel $[N]$ axa de rabatere este orizontala $G(g, g')$, dreapta de intersecție dintre cele două plane. Rabaterea punctului M pe planul de nivel se face prin rotirea punctului într-un plan perpendicular pe axa de rabatere G . Arcul de cerc descris de punctul M are centrul în ω_1 (centru de rabatere) și raza de rabatere $\omega_1 M$. După rabatere, punctul M ajunge în M_0 pe planul de nivel și se proiectează în m_0 pe planul orizontal.

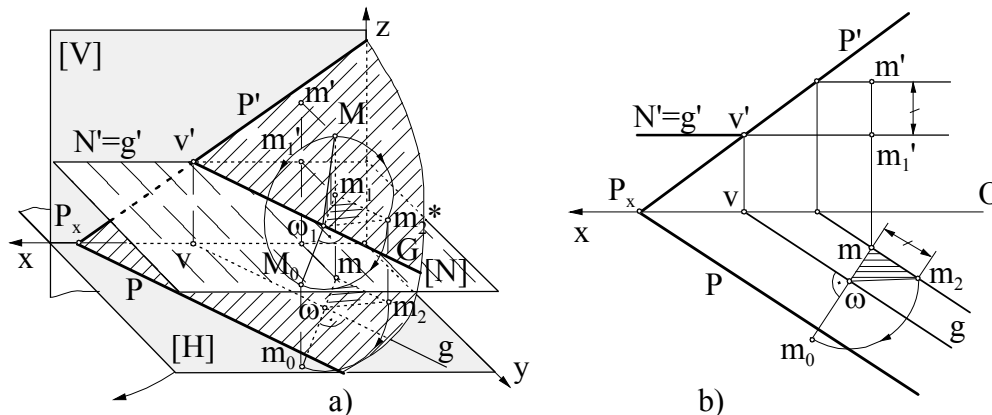


Fig.6.31 Reprezentarea rabaterii punctului $M(m, m')$ pe planul de nivel $[N]$, $M \in [P]$:

a) în spațiu ; b) în epură

În epură (fig.6.31, b), rabaterea punctului $M(m, m')$ se face considerând ca axă de rabatere, proiecția orizontală g a orizontalei G , cu ajutorul *triunghiului de poziție* $\omega m m_2$, construit folosind diferența de cotă $m'm_1' = mm_2$, de la punctul M la planul de nivel. Triunghiul de poziție $\omega m m_2$ este identic cu triunghiul $\omega_1 m_1 M$ din spațiu, fiind proiecția triunghiului $\omega_1 m_1 m_2^*$ din planul de nivel, pe planul orizontal de proiecție. Cu centrul în ω și de rază ωm_2 se descrie un arc de cerc până la intersecția cu perpendiculara dusă din proiecția orizontală m pe axa de rabatere g , unde se obține punctul m_0 , proiecția răbătită pe planul de nivel a punctului M din planul $[P]$.

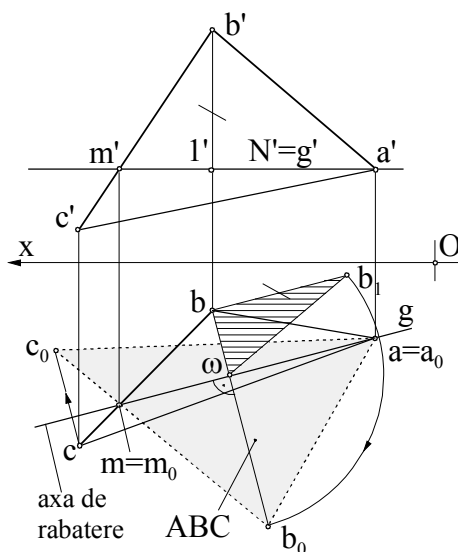


Fig.6.32 Rabaterea $\triangle ABC$ pe planul de nivel $[N]$

După cum se observă în figura 6.31, b, rabaterea pe un plan de nivel se rezolvă pe proiecția orizontală a epurei.

Pentru determinarea adevăratei mărimi a unei figuri plane, dată prin coordonatele vârfurilor, este mult mai ușor să se rabată aceasta pe un plan de nivel care o intersectează, decât să se determine urmele planului care o cuprinde și apoi să se facă rabaterea pe planul orizontal sau vertical.

Fiind dat triunghiul $[ABC]$ se determină proiecția lui răbătită pe un plan de nivel $[N]$ dus prin vârful A al triunghiului (fig.6.32). Dreapta de intersecție dintre planul triunghiului și planul de nivel este orizontala $G(g, g')$, determinată de punctul

$A(a, a')$ și punctul $M(m, m')$, unde latura BC a triunghiului intersectează planul $[N]$. Prin rabatere, triunghiul se rotește în jurul orizontalei G până se suprapune peste planul de nivel $[N]$ și astfel se proiectează pe planul orizontal în adevărată mărime.

În epură (fig.6.32), pentru rabaterea triunghiului pe planul de nivel, axa de rabatere este proiecția orizontală g a orizontalei G , $g = a \cup m$. Punctul A este propriul lui rabătut, $a \equiv a_0$, deci se mai rabat punctele B și C .

Pentru rabaterea punctului $B(b, b')$ se construiește triunghiul de poziție ωbb_1 , față de axa de rabatere g , folosind diferența de cotă a punctului B față de planul de nivel, $b'l' \equiv bb_1$ și se determină proiecția rabătută b_0 .

Proiecția rabătută c_0 a punctului C se determină cu ajutorul triunghiului de poziție sau ca și în figura 6.32, folosind proprietatea de coliniaritate a proiecțiilor orizontale ale punctelor B , M și C înainte de rabatere și după rabatere. Astfel, se unește b_0 cu m_0 și se prelungește până la intersecția cu perpendiculara dusă din proiecția orizontală c pe axa de rabatere, în c_0 .

Triunghiul $[a_0b_0c_0]$ reprezintă proiecția rabătută a triunghiului $[ABC]$ pe planul de nivel, deci adevărata mărime a acestei figuri.

b) Rabaterea pe un plan de front

La rezolvarea rabaterii pe un plan de front, construcțiile necesare se realizează pe proiecția verticală a epurei, unde elementele din planul de front se proiectează în mărime reală. În figura 6.33 punctul $A(a, a')$ se rabate pe planul de front $[F]$. Axa de rabatere este frontala $F(f, f')$ de intersecție dintre planul de front pe care se face rabaterea și planul $[P]$ care se rabate. Modul de lucru este similar rabaterii pe planul vertical, dar rezultă o construcție micșorată, având în vedere că pentru determinarea triunghiului de rabatere (triunghiul de poziție) se utilizează *diferența de depărtare* de la punct la planul de front.

Poziția rabătută a_0 se obține astfel : se trasează perpendiculara prin a' pe axa de rabatere f' și se determină centrul de rabatere ω , se măsoară pe o paralelă la axa de rabatere, trasată prin a' , diferența de depărtare $a'a_2 = aa_1$; se determină *triunghiul de poziție* $\omega a'a_2$ și cu centrul în ω și de rază ωa_2 se trasează un arc de cerc până la intersecția cu perpendiculara $a'\omega$, unde se găsește a_0 .

În epura din figura 6.34 s-a determinat adevărata mărime a plăcii triunghiulare $[ABC]$, prin rabaterea pe planul de front $[F]$, dus prin vârful A al triunghiului. Axa de rabatere este frontala $F = AM$. Vârfurile triunghiului rabătut se determină cu ajutorul triunghiului de poziție, pentru b_0 și utilizând coliniaritatea punctelor C, M, B , pentru c_0 .

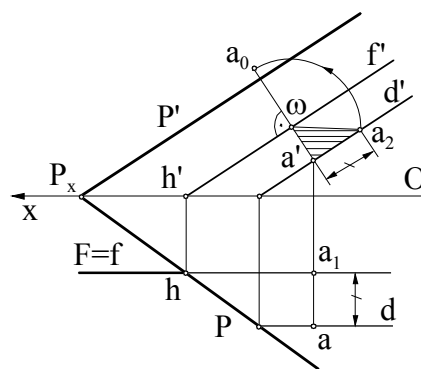


Fig.6.33 Rabaterea punctului $A(a, a')$ pe planul de front $[F]$, $A \in [P]$

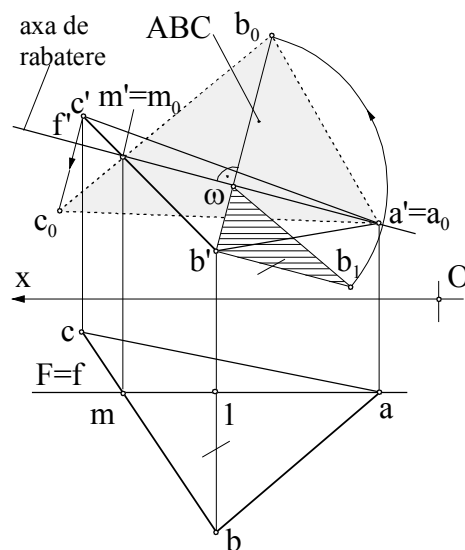


Fig.6.34 Rabaterea ΔABC pe planul de front $[F]$

6.3.4 Rabaterea planelor proiectante

Rabaterea unui plan proiectant se face prin rotirea planului în jurul axei de rabatere, care este urma orizontală, în cazul suprapunerii peste planul orizontal de proiecție, sau

urma verticală, în cazul suprapunerii peste planul vertical de proiecție. Rotirea planelor proiectante într-un sens sau într-altul nu influențează rabaterea.

Deoarece, planele proiectante au urmele perpendiculare între ele, rabaterea punctelor aflate în aceste plane se face mult mai ușor, urmele planelor rămânând perpendiculare și după rabaterea pe unul din planele de proiecție.

a) *Rabaterea unui plan proiectant vertical pe planul orizontal de proiecție*

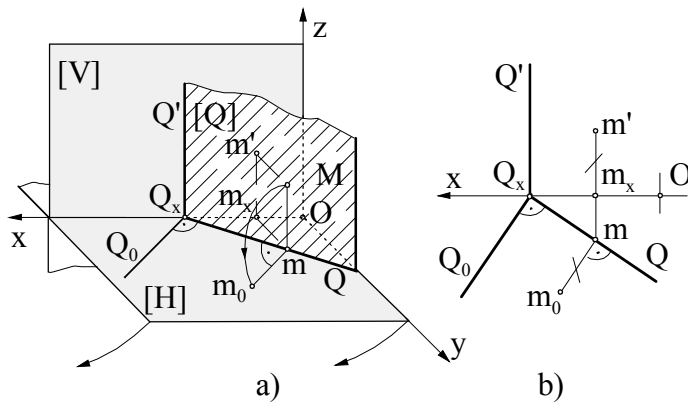


Fig.6.35 Reprezentarea rabaterii planului proiectant vertical $[Q]$ pe planul $[H]$, $M(m, m') \in [Q]$:

a) în spațiu ; b) în epură

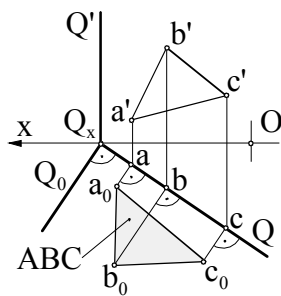


Fig.6.36 Rabaterea ΔABC pe planul $[H]$, $\Delta ABC \in [Q]$

Fie planul proiectant vertical $[Q]$ și punctul $M(m, m')$ care aparține acestui plan (fig.6.35, a). Pentru rabaterea planului $[Q]$ pe planul orizontal de proiecție acesta se rotește în jurul urmei orizontale Q (axa de rabatere) până se suprapune peste planul $[H]$, urma verticală Q' , devenind Q_0 . În timpul rabaterii, punctul M se rotește într-un plan perpendicular pe urma orizontală Q , descriind un arc de cerc cu centrul în proiecția m și de rază egală cu cota punctului, $mM = m_x m' = mm_0$. Astfel, în epură (fig.6.35, b) din proiecția orizontală m se duce o perpendiculară pe urma Q și se măsoară cota, obținând proiectia rabătită m_0 .

Adevărata mărime a unei figuri geometrice ABC , cuprinsă într-un plan proiectant vertical $[Q]$, se obține prin rabatere pe planul orizontal, astfel (fig.6.35, b) : pe perpendiculare, duse prin proiecțiile orizontale ale vârfurilor, pe urma Q (axa de rabatere), se măsoară cota acestora rezultând proiecțiile rabătute a_0, b_0, c_0 ; $a_0 b_0 c_0 = ABC$.

b) *Rabaterea unui plan proiectant vertical pe planul vertical de proiecție*

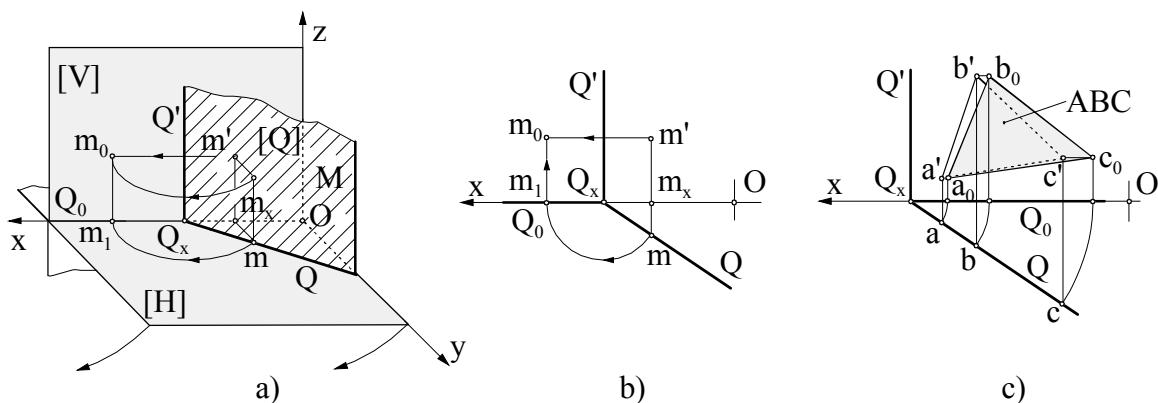


Fig.6.37 Rabaterea planului proiectant vertical $[Q]$ pe planul vertical $[V]$, $M \in [Q]$, $\Delta ABC \in [Q]$

În figura 6.37, *a*, se prezintă rabaterea planului proiectant vertical $[Q]$ pe planul vertical de proiecție $[V]$, reprezentare în spațiu. *Axa de rabatere* este urma verticală Q' , iar urma orizontală Q se rotește până se suprapune peste axa Ox . Punctul $M(m, m')$ se rotește într-un plan perpendicular pe axa de rabatere Q' (plan de nivel), până pe planul vertical în m_0 . Practic, punctul M efectuează o rotație de nivel în jurul axei Q' , arcul de cerc descris de acesta proiectându-se pe planul orizontal în mărime reală.

În epură (fig.6.37, *b*), proiecția orizontală m se rotește în jurul punctului Q_x până se suprapune pe axa Ox , în m_1 , de unde se ridică o perpendiculară egală cu cota punctului, până în m_0 , poziția rabătută a punctului M pe planul vertical de proiecție (punctul își păstrează cota neschimbată).

Adevărata mărime a unei figuri geometrice ABC , cuprinsă într-un plan proiectant vertical $[Q]$, (fig.6.37, *c*) se obține prin rabaterea pe planul vertical a vârfurilor care o definesc, în jurul axei de rabatere Q' , $a_0b_0c_0 = ABC$. Sensul de rotație a proiecțiilor orizontale ale punctelor este indiferent, obținându-se aceeași mărime pentru proiecția rabătută $a_0b_0c_0$ a triunghiului, dar o poziție diferită pe planul vertical, simetrică față de urma verticală Q' .

c) Rabaterea unui plan de capăt pe planul vertical de proiecție

La rabaterea planului de capăt $[Q]$ pe planul vertical de proiecție, *axa de rabatere* este urma verticală Q' , planul rotindu-se împreună cu punctele cuprinse în el, până la suprapunerea pe planul vertical. Astfel, urma orizontală Q se transformă în Q_0 , perpendiculară pe urma verticală Q' (fig.6.38, *a*). Punctul M se rotește într-un plan perpendicular pe axa de rabatere, descriind un arc de cerc cu centrul în proiecția verticală m' , de pe urma verticală Q' și de rază egală cu depărtarea punctului.

În epură (fig.6.38, *b*), pentru determinarea proiecției rabătute m_0 pe planul vertical, a unui punct M , din proiecția verticală m' se măsoară pe o perpendiculară la axa de rabatere, depărtarea punctului. Aplicând același raționament, în epura din figura 6.38, *c*, s-a obținut adevărata mărime a triunghiului $[ABC]$, cuprins în planul de capăt $[Q]$, prin determinarea proiecțiilor rabătute a_0, b_0 și c_0 , ale punctelor A, B și C .

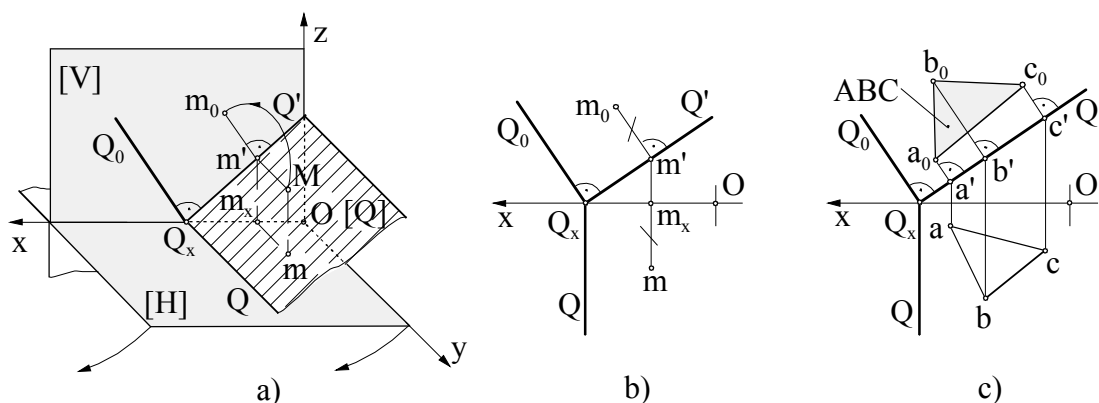


Fig.6.38 Rabaterea planului de capăt $[Q]$ pe planul $[V]$, $M \in [Q]$, $\Delta ABC \in [Q]$

d) Rabaterea unui plan de capăt pe planul orizontal de proiecție (fig.6.39)

În cazul rabaterii planului de capăt $[Q]$ pe planul orizontal de proiecție, *axa de rabatere* este urma orizontală Q . Planul se rotește în jurul urmei Q până la suprapunerea peste planul orizontal de proiecție, respectiv până la suprapunerea urmei verticale Q' peste

axa Ox . În timpul rabaterii punctele planului se rotesc în plane perpendiculare pe urma orizontală Q (plane de front), deci își păstrează neschimbată depărtarea, efectuând rotații de front, cu același unghi (fig.6.39, a). Arcul descris de punctul M se proiectează în adevărată mărime pe planul vertical.

În epură (fig.6.39, b), pentru determinarea proiecției rabătute m_0 pe planul orizontal, a punctului $M(m, m')$ cuprins în planul $[Q]$, se rotește proiecția m' în jurul punctului Q_x până la suprapunerea pe axa Ox , în m_1 și se măsoară depărtarea punctului pe perpendiculara dusă la axa Ox . Sensul de rotire al proiecției verticale m' nu contează și este impus eventual de spațiul oferit de epură pentru rezolvarea rabaterii. În epura din figura 6.39, c, s-a obținut adevărata mărime a triunghiului $[ABC]$, cuprins în planul de capăt $[Q]$, prin rabaterea triunghiului pe planul orizontal de proiecție : $a_0b_0c_0 = ABC$.

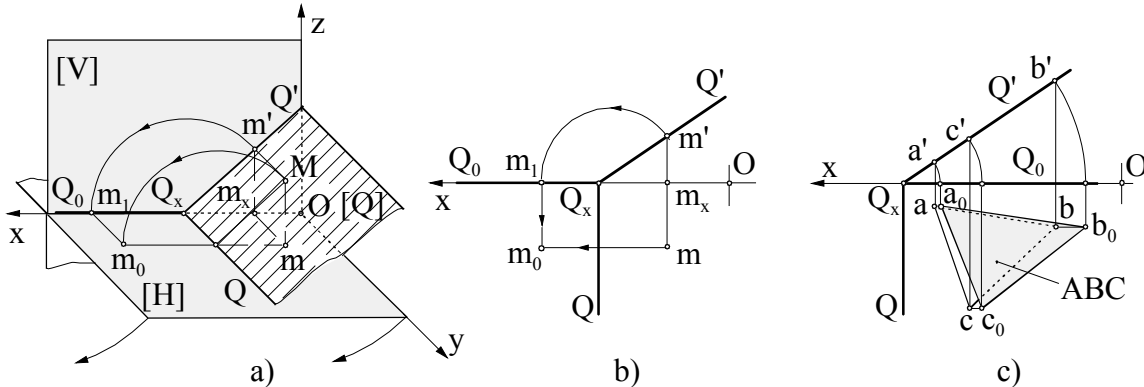


Fig.6.39 Rabaterea planului de capăt $[Q]$ pe planul $[H]$, $M \in [Q]$, $\Delta ABC \in [Q]$

6.3.5 Ridicarea rabaterii

Operația inversă rabaterii, adică readucerea planului sau a elementelor conținute într-un plan din poziția rabătuată în cea inițială, prin determinarea urmelor, în cazul planului, sau a proiecțiilor orizontale și verticale, în cazul elementelor geometrice, se numește *ridicarea rabaterii*.

Ridicarea rabaterii pentru un plan oarecare, când se cunosc un punct al planului și proiecția lui rabătuată pe planul orizontal de proiecție

În fig. 6.40 se consideră date punctul $M(m, m')$ și proiecția rabătuată a lui pe planul orizontal de proiecție, m_0 . Se cere să se determine urmele planului care conține punctul M .

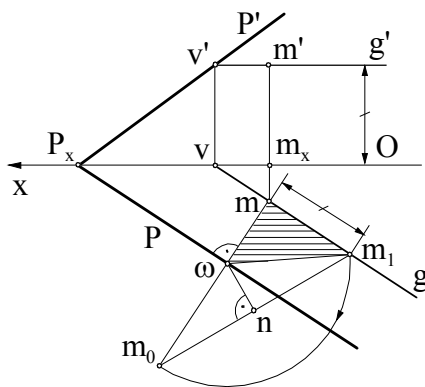


Fig.6.40 Ridicarea rabaterii pentru planul $[P]$

Se știe că proiecția orizontală m și proiecția rabătuată m_0 trebuie să fie pe perpendiculara la axa de rabatere (urma orizontală P), deci se unește m cu m_0 . Prin m se duce o perpendiculară g pe mm_0 (paralela la axa de rabatere) pe care se ia cota punctului, $mm_1 = m_x m'$. Centrul de rabatere ω este coliniar cu m și m_0 , iar pentru determinarea poziției lui pe acest segment se trasează mediatoarea segmentului $m_0 m_1$, din n până la intersecția cu mm_0 și se determină punctul ω . Astfel este determinat și triunghiul de poziție. Prin ω se trasează urma orizontală P a planului, perpendiculară pe mm_0 , iar la intersecția cu axa Ox se obține punctul P_x .

Pentru determinarea urmei verticale P' a

planului, se găsește urma verticală $V(v, v')$ a orizontalei $G(g, g')$ a planului care trece prin punctul M . Urma P' este dată de punctul P_x și de proiecția verticală v' .

Ridicarea rabaterii pentru o figură plană

Fie un hexagon $[ABCDEF]$, cuprins într-un plan oarecare $[P]$. Se cere să se determine proiecțiile hexagonului pe planele de proiecție, cunoscând urma orizontală P a planului (axa de rabatere), urma verticală rabătuță P_0 și proiecția rabătuță $[a_0b_0c_0d_0e_0f_0]$ a hexagonului pe planul orizontal de proiecție (fig.6.41, a).

Pentru ridicarea din rabatere a hexagonului, vârfurile lui sunt ridicate din rabatere cu ajutorul orizontalelor planului pe care sunt situate. Astfel, se observă că sunt așezate două câte două pe orizontalele g_0, g_{10} și g_{20} , paralele cu urma orizontală P a planului și a căror urme sunt v_0, v_{10} și v_{20} , pe urma verticală rabătuță P_0 (fig.6.41, b).

Urma verticală P' este dată de punctul P_x și de urma verticală v' a orizontalei G , a cărei ridicare din rabatere se face astfel :

- din proiecția rabătuță v_0 se duce o perpendiculară pe axa de rabatere P și la intersecția cu axa Ox se determină proiecția orizontală a urmei, v ,
- din proiecția orizontală v se ridică o linie de ordine care se intersectează cu arcul de cerc cu centrul în punctul P_x și de rază P_xv_0 , în v' .

Proiecțiile orizontalei $G(g, g')$ pe care se situează punctul $A(a, a')$ se trasează astfel :

- proiecția orizontală g , prin proiecția orizontală v a urmei verticale, paralelă cu urma orizontală P a planului,
- proiecția verticală g' , prin proiecția verticală v' a urmei verticale, paralelă cu axa Ox .

Proiecția orizontală a a punctului A se determină la intersecția perpendicularei duse din proiecția rabătuță a_0 pe axa de rabatere P cu proiecția orizontală g a orizontalei G , iar proiecția verticală a' a punctului A , trasând linie de ordine din a până pe proiecția verticală g' a orizontalei G . În mod analog se procedează și cu celelalte vârfuri ale hexagonului, în final obținându-se proiecțiile lui pe planele de proiecție $[abcdef]$ și $[a'b'c'd'e'f']$.

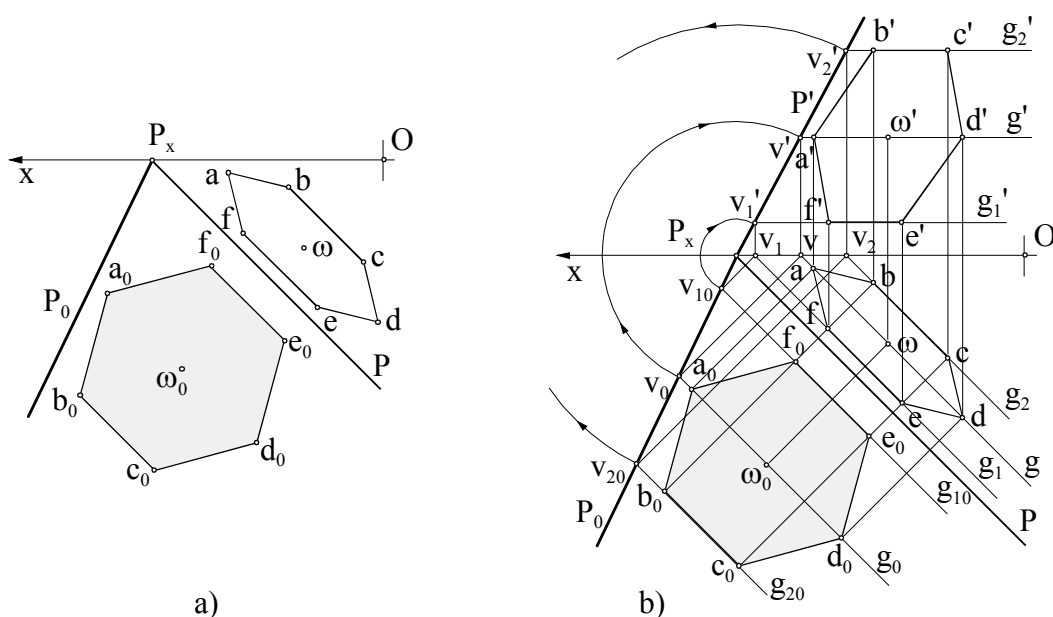


Fig.6.41 Ridicarea din rabatere pentru hexagonul $[ABCDEF]$

Ridicarea rabaterii pentru un cerc

Proiecțiile orizontale și verticale ale unui cerc conținut într-un plan oarecare sunt elipse. Pentru construirea acestor elipse se pornește de la proiecția rabătută a cercului pe unul din planele de proiecție și apoi se ridică din rabatere.

În figura 6.42, *a*, se consideră urma orizontală P a planului $[P]$ ce conține cercul, proiecția rabătută a urmei verticale P_0 pe planul orizontal de proiecție și proiecția rabătută a cercului pe același plan, cu centrul în ω_0 , tangent urmelor planului în punctele a_0 și k_0 .

Pentru început se ridică din rabatere urma verticală P' a planului, cu ajutorul urmei $V(v, v')$ a orizontalei $T(t, t')$ și se determină proiecțiile centrului cercului $\Omega(\omega, \omega')$.

La ridicarea din rabatere a cercului se are în vedere faptul că elipsele din proiecția orizontală și verticală au axa mare egală cu diametrul cercului, iar axa mică este situată pe direcția liniilor de cea mai mare pantă față de planul respectiv.

În proiecția verticală, elipsa este determinată de axa mare $RS(rs, r's')$, care se află pe frontala $F(f, f')$, obținută prin ridicarea din rabatere a frontalei f_0 , $f_0 \parallel P_0$, $\omega_0 \in f_0$ și de axa mică $KM(km, k'm')$, care este situată pe linia de cea mai mare pantă față de planul vertical a planului $[P]$ și se obține prin ridicarea din rabatere a diametrului k_0m_0 , perpendicular pe urma verticală rabătită P_0 .

Elipsa din proiecția orizontală este determinată de axa mare $CD(cd, c'd')$, situată pe orizontala $T(t, t') \equiv V\Omega(v\omega, v'\omega')$, obținută prin ridicarea din rabatere a orizontalei t_0 , $t_0 \parallel P$, $\omega_0 \in t_0$ și de axa mică $AB(ab, a'b')$, aflată pe linia de cea mai mare pantă față de planul orizontal a planului $[P]$ și se obține prin ridicarea din rabatere a diametrului a_0b_0 , perpendicular pe urma orizontală P .

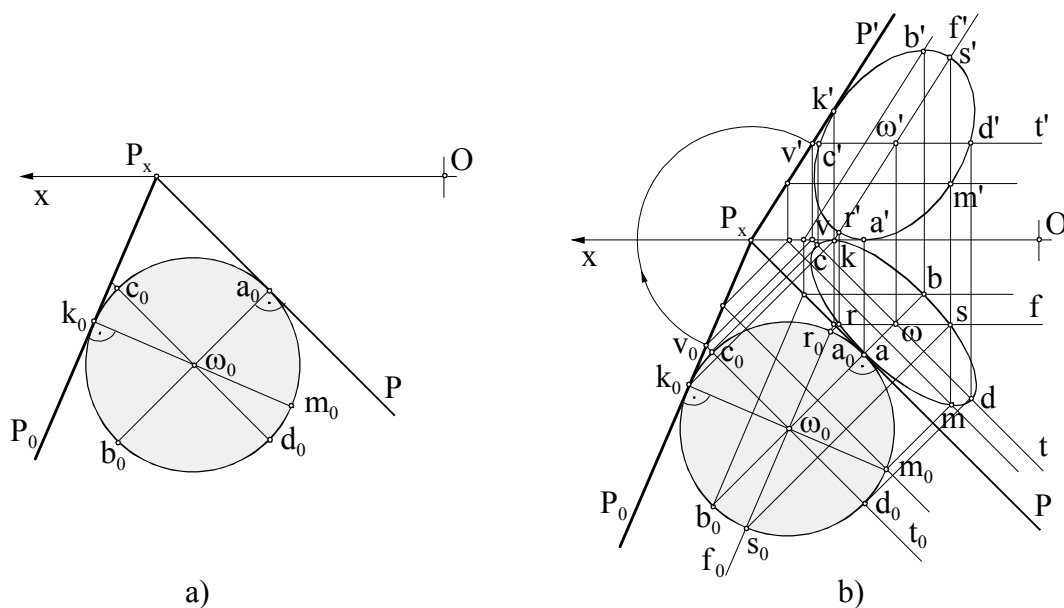


Fig.6.42 Ridicarea din rabatere pentru un cerc, cuprins într-un plan oarecare

6.4 Probleme rezolvate

1. Să se determine adevărata mărime a segmentului AB : $A(10,10,7)$, $B(30,5,20)$ și unghiurile pe care acesta le face cu planele de proiecție.

Rezolvare : Problema comportă rezolvare prin diferite metode :

- *Rezolvare utilizând metoda schimbării planelor de proiecție* :

- în epura din figura 6.43, *a*, segmentul AB , oarecare, se aduce paralel cu un nou plan vertical $[V_1]$, prin *schimbare de plan vertical de proiecție* ; astfel, axa O_1x_1 se trasează paralelă cu proiecția ab , din proiecțiile a și b se duc perpendiculare pe axa O_1x_1 și pe acestea se măsoară cotele punctelor, obținându-se proiecțiile a_1' și b_1' . Adevărata mărime a segmentului AB este dată de proiecția verticală a segmentului $A_1B_1(a_1b_1, a_1'b_1')$, iar unghiul α din epură reprezintă unghiul dintre segmentul AB și planul orizontal de proiecție.

- în epura din figura 6.43, *b*, segmentul AB , oarecare, se aduce paralel cu un nou plan orizontal $[H_1]$, prin *schimbare de plan orizontal de proiecție* ; astfel, axa O_2x_2 se trasează paralelă cu proiecția $a'b'$, din proiecțiile a' și b' se duc perpendiculare pe axa O_2x_2 și pe acestea se măsoară depărtările punctelor, obținându-se proiecțiile a_2 și b_2 . Adevărata mărime a segmentului AB este dată de proiecția orizontală a segmentului $A_2B_2(a_2b_2, a_2'b_2')$, iar unghiul β din epură reprezintă unghiul dintre segmentul AB și planul vertical de proiecție.

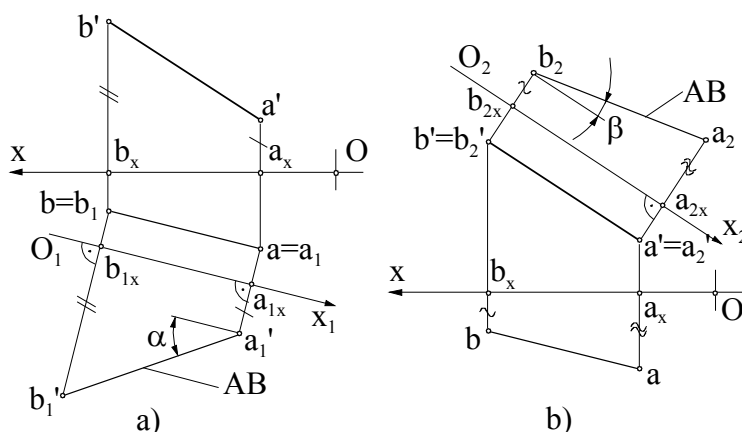


Fig.6.43 Rezolvarea problemei 1 – utilizând metoda schimbării de plan

- *Rezolvare utilizând metoda rotației* :

- în epura din figura 6.44, *a*, segmentului AB , oarecare, i se aplică o *rotație de nivel*, în jurul unui ax vertical $Z(z, z')$ dus prin punctul B . Proiecția a se rotește până proiecția a_1b_1 devine paralelă cu axa Ox , respectiv segmentul $A_1B_1(a_1b_1, a_1'b_1')$ este paralel cu planul vertical de proiecție : $AB = a_1'b_1'$, $\angle \alpha = \angle(AB, [H])$.

- în epura din figura 6.44, *b*, segmentului AB , oarecare, i se aplică o *rotație de front*, în jurul unui ax perpendicular pe planul $[V]$ $Z(z, z')$ dus prin punctul A . Proiecția b' se rotește până proiecția $a_2'b_2'$ devine paralelă cu axa Ox , respectiv segmentul $A_2B_2(a_2b_2, a_2'b_2')$ este paralel cu planul orizontal de proiecție : $AB = a_2b_2$, $\angle \beta = \angle(AB, [V])$.

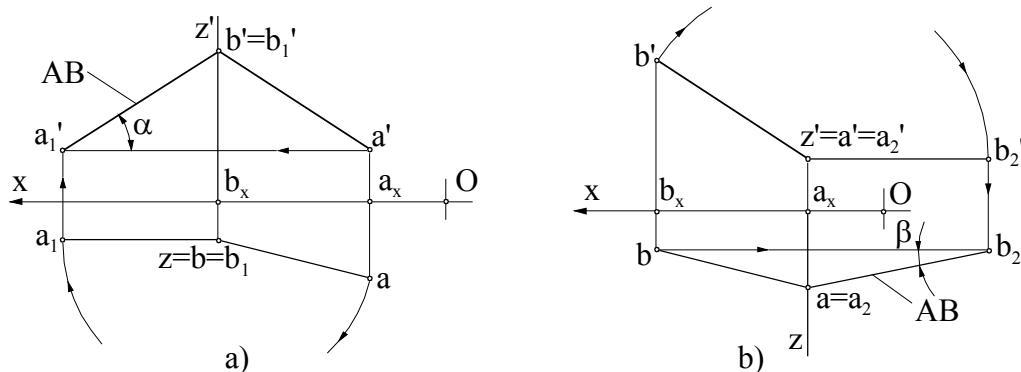


Fig.6.44 Rezolvarea problemei 1 – utilizând metoda rotației

2. Să se determine adevărata mărime a distanței l cuprinsă între dreptele paralele $D(d,d')$: $A(10,10,7)$ și $B(30,5,20)$ și $\Delta(\delta,\delta')$: $C(20,3,5)$.

Rezolvare : Problema se poate rezolva transformând cele două drepte oarecare în drepte perpendiculare pe unul din planele de proiecție, prin diferite metode :

- *Rezolvare utilizând metoda schimbării planelor de proiecție* : în epura din figura 6.45, *a* dreptele $D(d,d')$ și $\Delta(\delta,\delta')$ s-au transformat în dreptele $D_1(d_1,d_1')$ și $\Delta_1(\delta_1,\delta_1')$, frontale, prin schimbare de plan vertical de proiecție, luând noua linie de pământ O_1x_1 paralelă cu proiecțiile orizontale ale dreptelor și păstrând cotele punctelor ce definesc dreptele, neschimbate. Dreptele $D_1(d_1,d_1')$ și $\Delta_1(\delta_1,\delta_1')$ s-au adus în poziția de drepte verticale, $D_2(d_2,d_2')$ și $\Delta_2(\delta_2,\delta_2')$, printr-o schimbare de plan orizontal de proiecție, luând noua linie de pământ O_2x_2 perpendiculară pe proiecțiile verticale ale frontalelor și păstrând cotele punctelor din ultimul sistem. Distanța dintre proiecțiile orizontale d_2 și δ_2 este adevărata mărime a distanței l cuprinsă între dreptele paralele $D(d,d')$ și $\Delta(\delta,\delta')$.

- *Rezolvare utilizând metoda rotației* : în epura din figura 6.45, *b* dreptele $D(d,d')$ și $\Delta(\delta,\delta')$ s-au transformat în dreptele $D_1(d_1,d_1')$ și $\Delta_1(\delta_1,\delta_1')$, frontale, prin rotație de nivel, luând axul vertical $Z(z,z')$ prin punctul C al dreptei Δ . Pentru dreapta D , s-a executat rotația cu ajutorul perpendicularei ci . Printr-o rotație de front, în jurul unei drepte de capăt $Z_1(z_1,z_1')$, dusă prin punctul A_1 de pe dreapta D_1 , dreptele $D_1(d_1,d_1')$ și $\Delta_1(\delta_1,\delta_1')$ se aduc în poziția de drepte verticale și astfel : $d_2\delta_2 = l$.

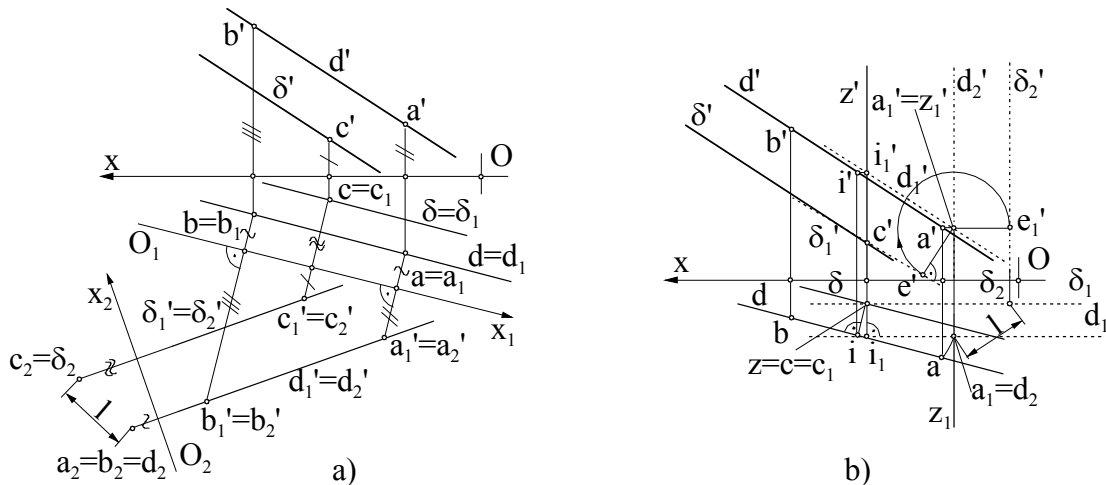


Fig.6.45 Rezolvarea problemei 2 – utilizând :
a) metoda schimbării planelor de proiecție ; b) metoda rotației

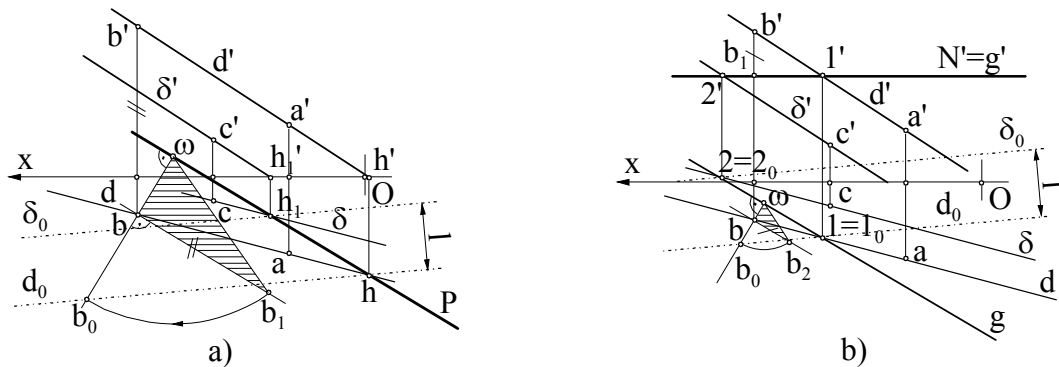


Fig.6.46 Rezolvarea problemei 2 – utilizând :
a) rabaterea pe planul orizontal ; b) rabaterea pe un plan de nivel

- *Rezolvare utilizând metoda rabaterii* : adevărata mărime a distanței dintre dreptele paralele $D(d, d')$ și $\Delta(\delta, \delta')$ este dată de distanța l dintre dreptele d_0 și δ_0 , obținute astfel :

a - prin *rabatere pe planul orizontal* de proiecție (fig.6.46, a) : axa de rabatere este urma orizontală P a planului definit de dreptele D și Δ . Se rabatează punctul B în b_0 , cu ajutorul triunghiului de poziție obb_1 , unde bb_1 este cota punctului B . Proiecția răbătită d_0 este dată de $b_0 \cup h$ și δ_0 , de o paralelă la d_0 , trasată prin urma din planul orizontal h_1 .

b - prin *rabatere pe planul de nivel* $[N]$ (fig.6.46, b) : axa de rabatere este orizontala $G(g, g')$ de intersecție dintre un plan de nivel N și planul definit de dreptele D și Δ . În proiecția orizontală axa de rabatere g este determinată de punctele 1 și 2 . Se rabatează punctul B în b_0 , cu ajutorul triunghiului de poziție obb_2 , unde $bb_2 = b'b_1$ este diferența de cotă a punctului B față de planul de nivel. Proiecția răbătită d_0 este dată de $b_0 \cup I_0$ și δ_0 , de o paralelă la d_0 , trasată prin punctul $2 = 2_0$ din planul de nivel.

3. Să se determine adevărata mărime a distanței l cuprinsă între planele paralele $[P]$: $OP_x = 50$, $OP_y = 20$, $OP_z = 30$ și $[Q]$: $OQ_x = 30$.

Rezolvare : problema se rezolvă prin transformarea planelor paralele, oarecare, $[P]$ și $[Q]$ în plane proiectante față de unul din planele de proiecție, astfel încât distanța l dintre ele să se măsoare între urmele de pe planul de proiecție față de care planele sunt proiectante. Acest lucru se poate realiza utilizând :

- *schimbarea planelor de proiecție* (fig.6.47):

a) în epura din figura 6.47, a planele $[P]$ și $[Q]$ se transformă în plane de capăt $[P_1]$ și $[Q_1]$, printr-o *schimbare de plan vertical de proiecție*, luând noua axă O_1x_1 perpendiculară pe urmele orizontale și folosind punctele I și J , din planele $[P]$, respectiv $[Q]$. Distanța l se măsoară între noile urme verticale P_1' și Q_1' , iar între axa O_1x_1 și urma P_1' se poate măsura și unghiul α , pe care planele $[P]$ și $[Q]$ îl fac cu planul orizontal de proiecție.

b) în epura din figura 6.47, b se aplică o *schimbare de plan orizontal de proiecție*, prin care planele $[P]$ și $[Q]$ devin plane proiectante verticale, $[P_1]$ și $[Q_1]$. Acest lucru se realizează cu ajutorul punctelor I și J , din planele $[P]$, respectiv $[Q]$, luând noua axă O_1x_1 perpendiculară pe urmele verticale. Distanța l se măsoară între noile urme orizontale P_1 și Q_1 , iar între axa O_1x_1 și urma P_1 se poate măsura și unghiul β , pe care planele $[P]$ și $[Q]$ îl fac cu planul orizontal de proiecție.

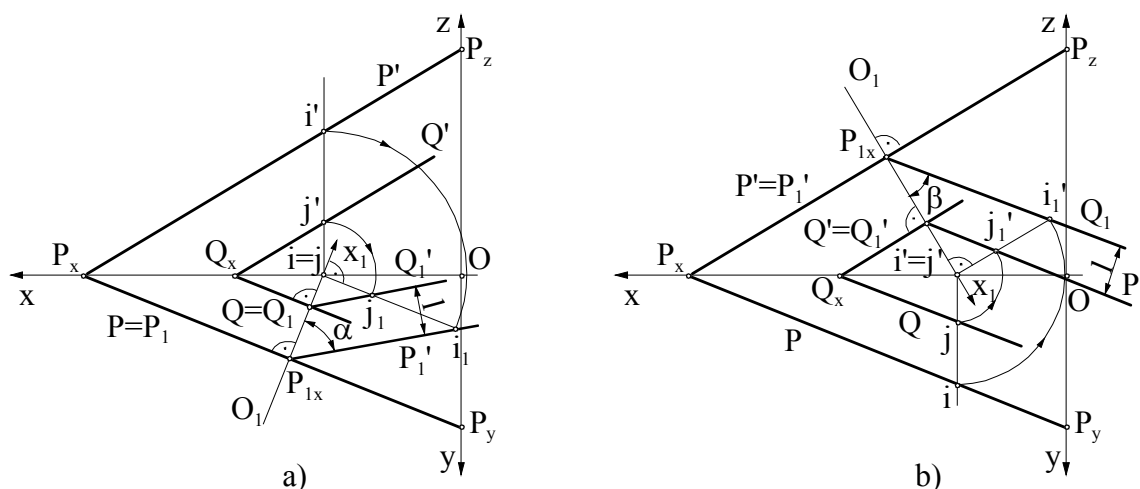


Fig.6.47 Rezolvarea problemei 3 – utilizând schimbarea planelor de proiecție

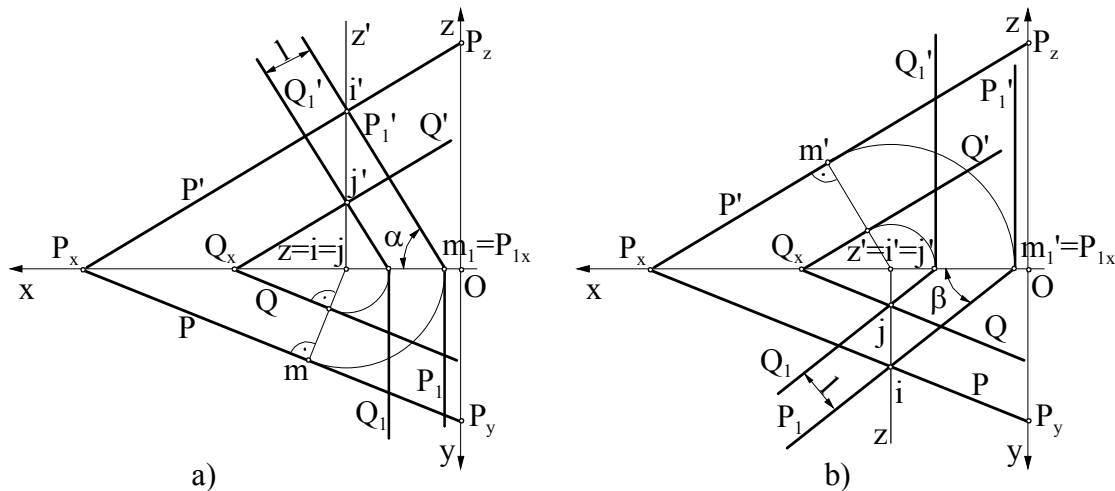


Fig.6.48 Rezolvarea problemei 3 – utilizând metoda rotației

- metoda rotației (fig.6.48):

a) în epura din figura 6.48, a planelor $[P]$ și $[Q]$ li se aplică o *rotație de nivel* în jurul unei axe verticale $Z(z, z')$, din planul vertical de proiecție, transformându-le în planele de capăt $[P_1]$ și $[Q_1]$. Urma verticală P_1' se trasează prin m_1 și prin i' , iar urma verticală Q_1' prin j' , paralelă cu P_1' . Punctele I și J sunt punctele în care axa de rotație intersectează planele $[P]$, respectiv $[Q]$.

b) în epura din figura 6.48, b planele $[P]$ și $[Q]$ se transformă în planele proiectante verticale $[P_1]$ și $[Q_1]$, printr-o *rotație de front*, în jurul unei axe de capăt $Z(z, z')$, din planul orizontal de proiecție, care intersectează planele $[P]$, respectiv $[Q]$ în punctele I și J .

4. Să se găsească adevărata mărime a distanței de la punctul $M(60, 15, 25)$ la dreapta $D(d, d') : A(90, 15, 10)$ și $B(20, 30, 20)$ și proiecțiile acestei distanțe.

Rezolvare : Pentru determinarea distanței de la punctul M la dreapta D , în spațiu se duce perpendiculara din punct pe dreaptă. Deoarece, atât dreapta D cât și perpendiculara pe ea sunt drepte oarecare, în epură unghiul drept nu se proiectează în adevărată mărime. Astfel, problema se poate rezolva diferențiat, aplicând metodele geometriei descriptive :

- *Rezolvare utilizând metoda schimbării planelor de proiecție* (fig.6.49, a): printr-o *schimbare de plan vertical de proiecție* dreapta $D(d, d')$ se transformă într-o frontală $D_1(d_1, d_1')$. În noul sistem de proiecție, aplicând teorema unghiului drept, din proiecția m_1' se trasează o perpendiculară pe proiecția d_1' , notând piciorul perpendicularei cu n_1' . Revenind în sistemul inițial de proiecție se obțin proiecțiile perpendicularei cerute $MN(mn, m'n')$. Adevărata mărime a segmentului MN s-a determinat prin schimbare de plan orizontal de proiecție, aducându-l paralel cu planul orizontal de proiecție din noul sistem O_2x_2 : $MN = m_2n_2$.

- *Rezolvarea utilizând metoda rotației* se face urmând aceiași pași ca și în cazul rezolvării prin schimbare de plan.

- *Rezolvare utilizând metoda rabaterii* (fig.6.49, b): se recurge la rabateria planului determinat de cele două elemente, dreapta D și punctul M , pe un plan de front $[F]$, ca apoi să se determine distanța cerută.

Rabaterea poate fi făcută pe orice plan de front, dar pentru ușurarea construcției se preferă planul de front care trece prin punctele M și B , astfel încât aceste puncte să nu mai necesite rabateria, $m' \equiv m_0$, $b' \equiv b_0$.

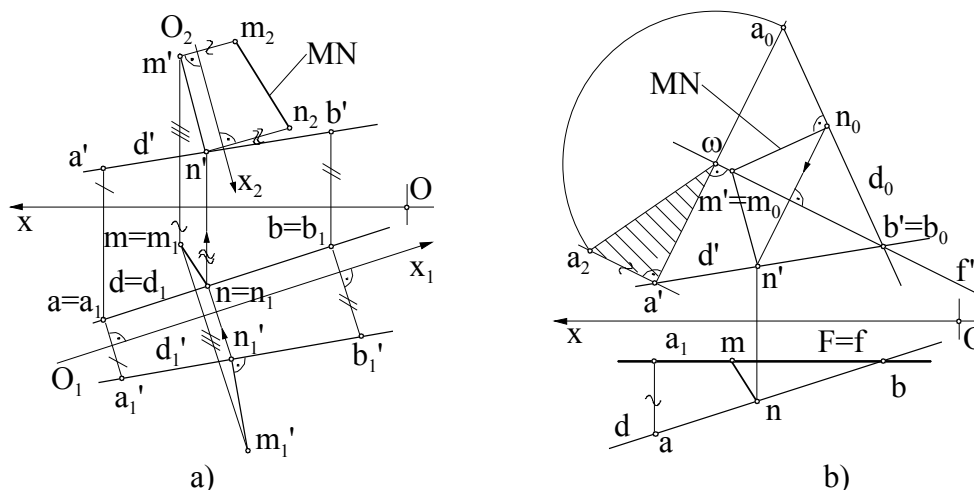


Fig.6.49 Rezolvarea problemei 4 – utilizând :
a) metoda schimbării planelor de proiecție ; b) rabaterea pe plan de front

Axa de rabatere este frontala $F(f'f'') = BM(bm, b'm')$, definită ca dreapta de intersecție dintre planul dat (dreapta D și punctul M) și planul de front $[F]$.

Pentru determinarea proiecției rabătute d_0 a dreptei D se mai rabate punctul A de pe dreaptă. Se formează triunghiul de poziție $\omega a'a_2$, cu cateta $a'a_2$ paralelă cu axa de rabatere f' și egală cu distanța de la punctul A la planul de front (diferența de depărtare), $a'a_2 = aa_1$ și se obține proiecția rabătuță a_0 . Dreapta rabătuță pe planul de front este $d_0 = a_0 \cup b_0$.

Distanța de la punctul M la dreapta D este egală cu lungimea perpendicularei duse din proiecția m_0 pe dreapta d_0 , $MN = m_0n_0$. Pentru determinarea acestei perpendiculare și în epură, se revine din rabatere și se obțin proiecțiile $m'n'$ și respectiv, mn , pe planele de proiecție.

5. Să se determine proiecțiile perpendicularei duse din punctul $M(20,7,18)$ pe planul $[P] : OP_x = 40, OP_y = 25, OP_z = 15$ și adevărata mărime a distanței de la punct la plan.

Rezolvare : Problema poate fi rezolvată aplicând oricare din metodele geometriei descriptive. În continuare se prezintă rezolvarea prin două dintre metode, rezolvarea aplicând metoda rotației, fiind similară cu cea prin schimbare de plan.

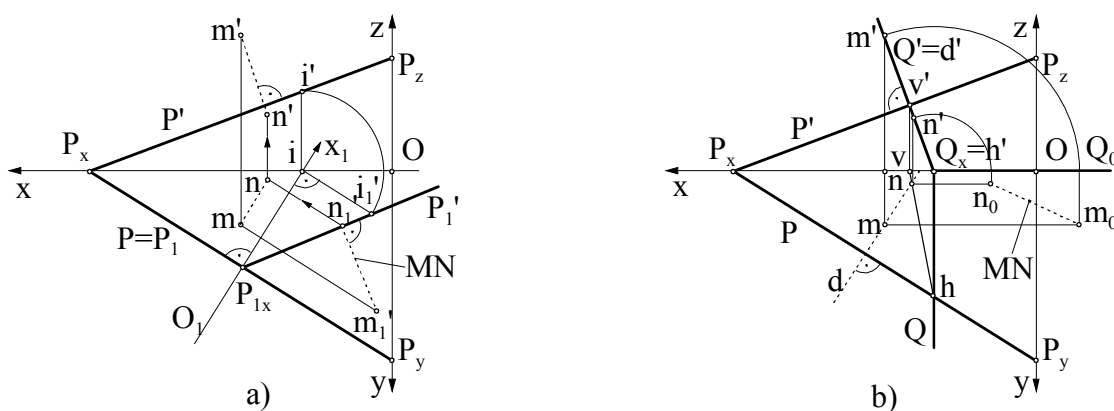


Fig.6.50 Rezolvarea problemei 5 – utilizând :
a) metoda schimbării planelor de proiecție ; b) rabaterea planului de capăt

- *Rezolvare utilizând metoda schimbării planelor de proiecție* (fig.6.50, a): printr-o schimbare de plan vertical de proiecție planul oarecare $[P]$ se transformă într-un plan de capăt $[P_1]$ și odată cu el punctul $M(m, m')$ în punctul $M_1(m_1, m_1')$. În noul sistem de proiecție se poate trasa perpendiculara din proiecția m_1' pe urma P_1' , piciorul perpendicularei fiind n_1' , $n_1' \in P_1'$. Proiecția n_1 se găsește pe o paralelă dusă la axa O_1x_1 , deoarece perpendiculara M_1N_1 este o frontală. Rezultă că adevărata mărime a distanței de la punct la plan, adică a perpendicularei MN , este proiecția $m_1'n_1'$. Proiecția n' se determină revenind în sistemul inițial, ducând o linie de ordine din proiecția n până la intersecția cu perpendiculara din m' pe urma P' .

- *Rezolvare utilizând metoda rabaterii* (fig.6.50, b): perpendiculara dusă din punctul M pe planul $[P]$ este dreapta $D(d, d')$, care are $d \perp P$, $m \in d$ și $d' \perp P'$, $m' \in d'$. Se determină punctul N de intersecție dintre perpendiculara D și planul $[P]$, utilizând planul de capăt $[Q]$. Pentru a afla adevărata mărime a distanței MN , care este distanța de la punct la plan, se rabate planul de capăt $[Q]$, împreună cu segmentul MN , pe planul orizontal de proiecție și se obține segmentul m_0n_0 .

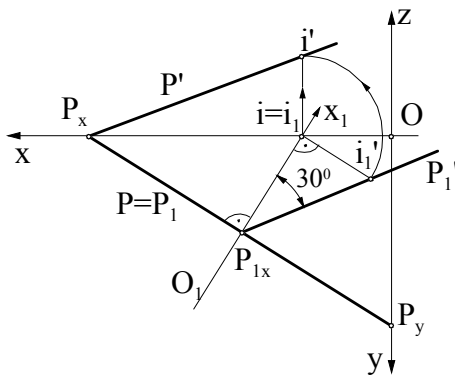


Fig.6.51 Rezolvarea problemei 6

6. Să se găsească urma verticală P' a planului $[P]$, cunoscând urma orizontală : $OP_x = 40$, $OP_y = 25$ și unghiul de 30° pe care planul $[P]$ îl face cu planul orizontal de proiecție.

Rezolvare : în epura din figura 6.51, cunoscând urma orizontală P , se face o schimbare de plan vertical de proiecție, luând noua linie de pământ perpendiculară pe urma orizontală P și din P_{1x} se trasează urma P_1' înclinată la 30° , față de axa O_1x_1 , deoarece noul plan obținut $[P_1]$ este plan de capăt. Se revine din schimbarea de plan, determinând punctul $I(i, i')$ din planul $[P]$, de pe urma P' .

Problema poate fi rezolvată similar

aplicând metoda rotației.

7. Fie dreptele $D(d, d') : A(10, 10, 7)$, $B(30, 5, 20)$ și $\Delta(\delta, \delta') : B$, $C(40, 15, 5)$, concurente în punctul B . Să se determine adevărata mărime a unghiului γ dintre cele două drepte.

Rezolvare : problema poate fi rezolvată aplicând succesiv două schimbări de plan de proiecție sau două rotații, prin aducerea planului definit de cele două drepte în poziția de plan de nivel (vezi rezolvarea de la adevărata mărime a unei figuri plane). Aici se va exemplifica rezolvarea prin metoda rabaterii :

- *rezolvare utilizând rabaterea pe planul orizontal de proiecție* (fig.6.52, a): se determină urma orizontală P a planului $[P]$ definit de cele două drepte. Se rabate punctul B pe planul orizontal de proiecție în jurul axei de rabatere P , în b_0 . Poziția rabătată a dreptelor d_0 și δ_0 este dată de urmele dreptelor din planul orizontal h_0 , h_{10} și de punctul de concurență b_0 : $d_0 = b_0 \cup h_0$, $\delta_0 = b_0 \cup h_{10}$, și între ele se măsoară adevărata mărime a unghiului γ dintre cele două drepte.

- *rezolvare utilizând rabaterea pe un plan de nivel* (fig.6.52, b): se intersectează planul definit de cele două drepte cu un plan de nivel $[N]$, rezultând orizontala $G(g, g')$, dată de punctele $(1, 1')$ și $(2, 2')$. Se rabat dreptele D și Δ pe planul de nivel $[N]$, având ca axă de rabatere orizontala g . Este nevoie de rabaterea punctului de concurență B , b_0 și de punctele 1_0 și 2_0 , care fiind în planul de nivel sunt identice cu proiecțiile 1 și 2 : $d_0 = b_0 \cup 1_0$, $\delta_0 = b_0 \cup 2_0$. Adevărata mărime a unghiului dintre dreptele D și Δ este unghiul γ măsurat între dreptele d_0 și δ_0 .

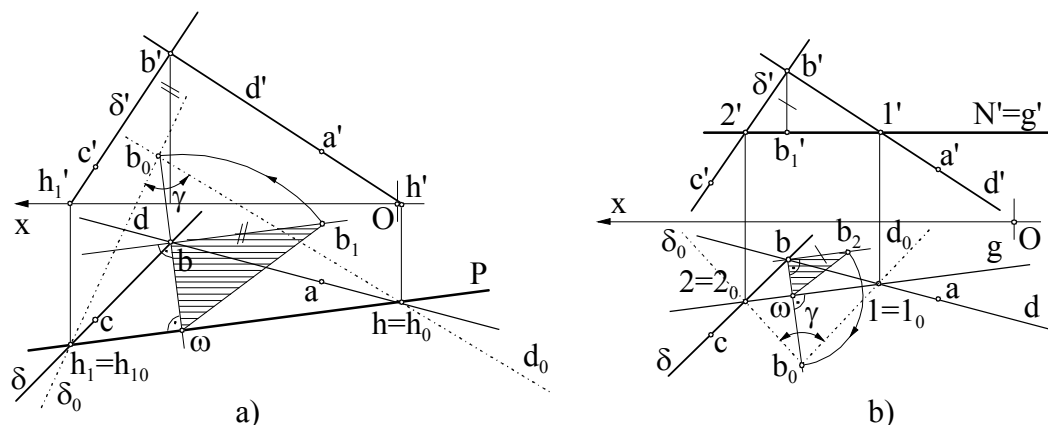


Fig.6.52 Rezolvarea problemei 7 – utilizând metoda rabaterii :
a) pe planul orizontal de proiecție ; b) pe planul de nivel $[N]$

8. Se dă dreapta $D(d, d')$: $A(10, 10, 7)$, $B(25, 15, 25)$ și planul $[P]$: $OP_x = 45$, $OP_y = -30$, $OP_z = -15$. Să se determine unghiul θ pe care-l face dreapta D cu planul $[P]$.

Rezolvare : unghiul θ dintre dreaptă și plan se determină ca fiind complementul unghiului γ , dintre dreapta D și o normală Δ , dusă prin punctul B al dreptei la planul $[P]$: $\theta = \pi/2 - \gamma$ (fig.6.53, a). Astfel, în epura din figura 6.53, b, prin punctul $B(b, b')$ se trasează perpendiculara $\Delta(\delta, \delta')$ pe planul $[P]$: $\delta \perp P$, $b \in \delta$ și $\delta' \perp P'$, $b' \in \delta'$. Deoarece interesează determinarea unghiului γ dintre dreapta D și normala Δ , în continuare se rabat aceste drepte pe planul de nivel $[N]$, ca și la rezolvarea de la problema 7. Pe proiecția orizontală s-a figurat măsura reală a unghiului θ căutat.

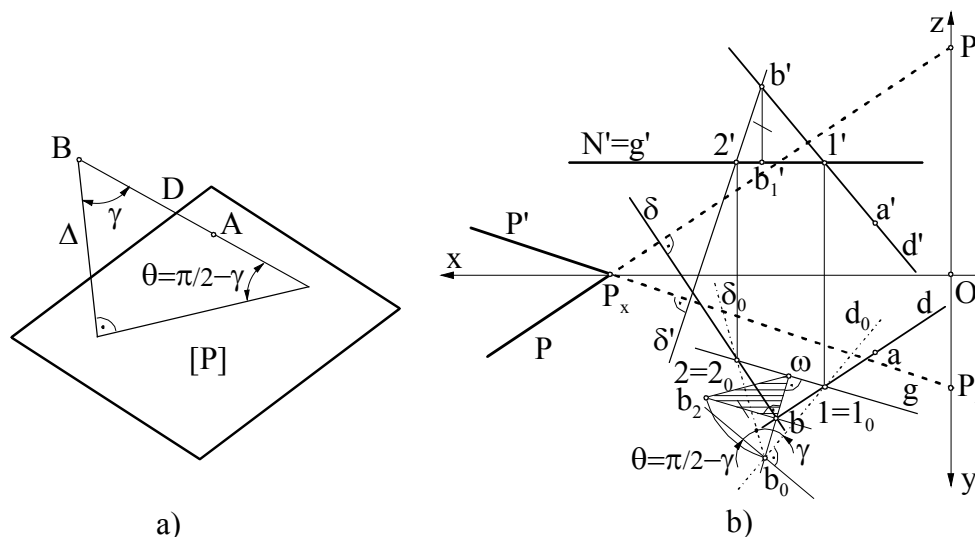


Fig.6.53 Rezolvarea problemei 8

9. Să se determine adevărata mărime a unghiului η dintre planele $[P]$: $OP_x = 45$, $OP_y = 15$, $OP_z = 30$ și $[Q]$: $OQ_x = 10$, $OQ_y = -5$, $OQ_z = -10$.

Rezolvare : Unghiului η dintre plane se poate determina utilizând *metoda normalelor* : se consideră un punct A , exterior celor două plane, din care se trasează normalele D și Δ pe planele $[P]$ și $[Q]$ (fig.6.54, a). Cele două normale definesc un plan $[R]$, care intersectează planele $[P]$ și $[Q]$ după dreptele D_1 și Δ_1 , care formează între ele unghiul η , egal cu unghiul

diedru dintre cele două plane. Pentru simplificarea rezolvării, se va determina unghiul ca fiind suplementul unghiului γ , dintre cele două normale D și Δ : $\eta = \pi - \gamma$. Unghiul γ dintre dreptele D și Δ se determină prin rabatere pe un plan de nivel $[N]$, ca și la rezolvarea problemei 7.

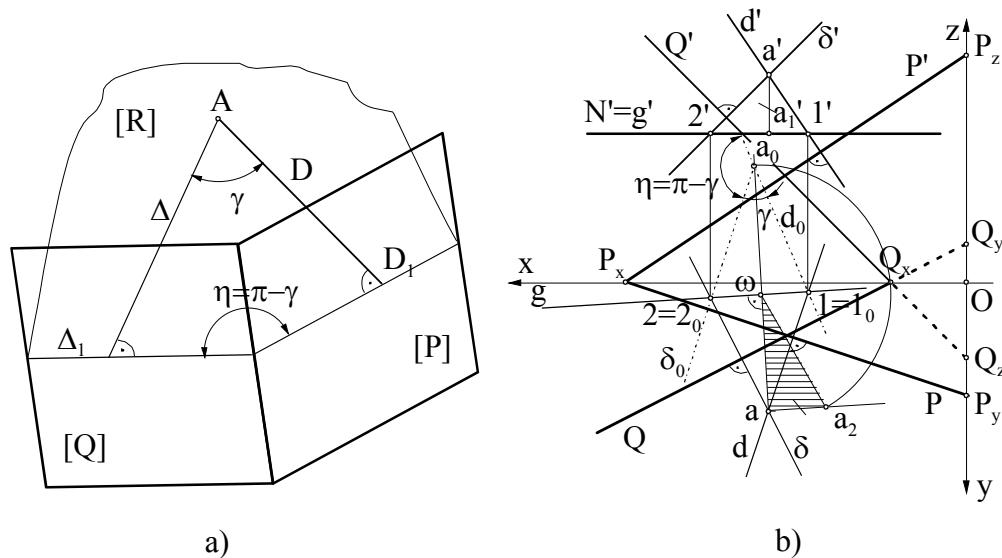


Fig.6.54 Rezolvarea problemei 9

10. Să se determine adevărata mărime a unui triunghi $[ABC]$: $A(22,3,4)$, $B(15,y,20)$, $C(5,14,7)$, situat într-un plan proiectant vertical, prin rabatere pe ambele plane de proiecție.

Rezolvare: deoarece triunghiul $[ABC]$ este situat într-un plan proiectant vertical, proiecțiile orizontale a , b și c sunt coliniare și definesc urma orizontală Q . Astfel se determină depărtarea y a punctului B .

Rabaterea triunghiul $[ABC]$ pe planul orizontal se face prin măsurarea cotelor, pe perpendiculare la urma Q , trasate prin proiecțiile orizontale a , b și c . Se obține triunghiul $a_0b_0c_0$, care reprezintă adevărata mărime a triunghiului $[ABC]$.

Rabaterea triunghiul $[ABC]$ pe planul vertical se obține prin rotirea proiecțiile orizontale a , b și c în jurul punctului Q_x , până pe axa Ox și ridicarea de perpendiculară pe axa Ox până la nivelul proiecțiilor verticale a' , b' și c' . Rezultă proiecția $a_0b_0c_0$.

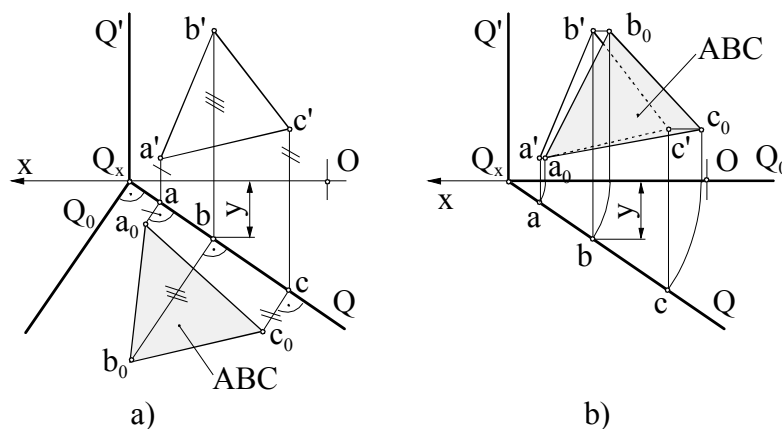


Fig.6.55 Rezolvarea problemei 10 :

a) prin rabatere pe planul orizontal ; b) prin rabatere pe planul vertical

11. Se consideră pătratul ABCE, aparținând planului $[P] : OP_x = 50, \angle OP_y = 50, OP_z = 80$. Să se determine proiecția dublu ortogonală a acestuia, cunoscând mărimea laturii $L = 15\text{mm}$, rabaterea vârfului A pe planul orizontal $A_0(55,38,0)$ și faptul că latura AB este paralelă cu planul orizontal de proiecție.

Rezolvare : în epura din figura 6.56, a sunt prezentate elementele de la care se pornește în rezolvarea problemei. Se determină proiecția rabătită a urmei verticale, P_0 , cu ajutorul punctului $V(v, v')$. Se trasează pătratul de latură 15mm și horizontalele g_{10} și g_{20} , pe care se găsesc vârfurile a_0, b_0 și c_0, e_0 . Se revine din rabatere, obținându-se astfel proiecțiile pătratului $abce$ și $a'b'c'e'$ (fig.6.56, b).

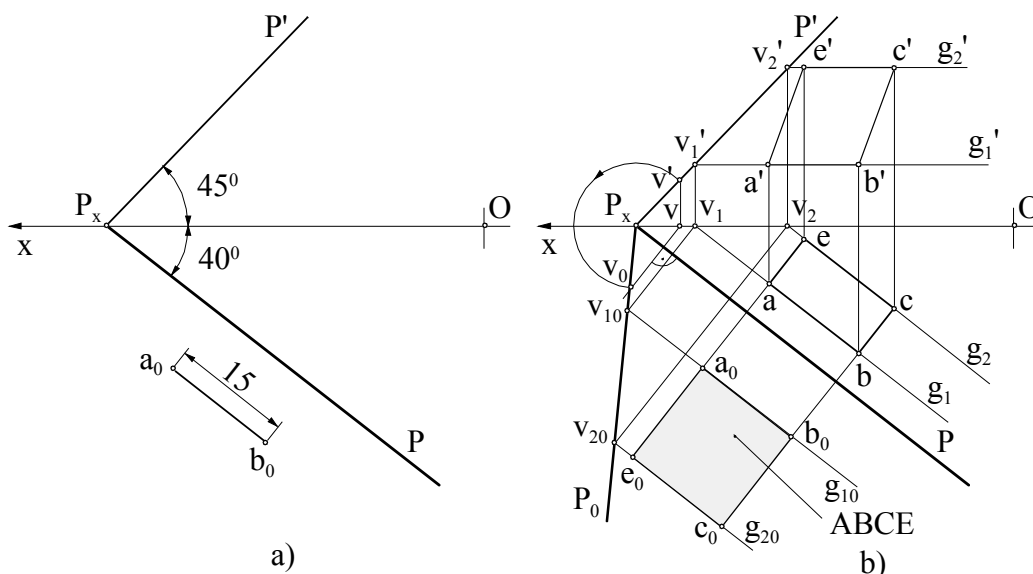


Fig.6.56 Rezolvarea problemei 11

6.5 Probleme propuse

Metoda schimbării planelor de proiecție

1. Prin metoda schimbării planelor de proiecție să se transforma dreapta $D(d, d')$ dată prin punctele $A(80, 20, 10)$ și $B(25, 15, 25)$ într-o orizontală. Precizați adevărata mărime a segmentului AB și unghiul pe care dreapta $D(d, d')$ îl face cu planul vertical de proiecție.

2. Printr-o schimbare de plan, să se transforme dreapta oarecare $D(d, d')$: $A(70, 25, 20)$ și $B(20, 15, 10)$ într-o dreaptă de profil.

3. Prin metoda schimbării planelor de proiecție să se transforme dreapta $D(d, d')$ dată prin punctele $A(75, 35, 20)$ și $B(30, 20, 10)$ într-o frontală. Precizați adevărata mărime a segmentului AB și unghiul pe care dreapta $D(d, d')$ îl face cu planul orizontal de proiecție.

4. Să se determine proiecția verticală d' a dreptei $D(d, d')$: $A(70, 20, 30)$ și $B(20, 40, z)$, cunoscând unghiul de 30° , pe care dreapta îl face cu planul orizontal de proiecție.

5. Fie punctul $A(90, 20, 20)$, situat în planul bisector $[B_1]$ și punctul $B(30, -30, 30)$, situat în planul bisector $[B_2]$. Să se găsească distanța dintre cele două puncte, printr-o schimbare de plan.

6. Printr-o schimbare de plan, să se transforme dreapta oarecare $D(d, d')$, dată prin urme $V(30, 0, 40)$ și $H(80, 25, 0)$, într-o dreaptă conținută în primul plan bisector (*Indicație :* noua linie de pământ O_1x_1 se trasează prin h , tangentă la un cerc cu centrul în v și rază vv').

7. Să se determine proiecțiile perpendicularei comune dusă între dreapta oarecare $D(d,d')$: $A(60,10,10)$, $B(15,20,30)$ și o dreaptă situată în planul orizontal de proiecție $F(f,f')$: $M(15,10,0)$, $N(50,25,0)$.

8. Fie planul $[P]$ dat prin urme : $OP_x = 90$, $OP_y = 45$, $OP_z = 40$. Printr-o schimbare de plan să se transforme planul $[P]$ în plan de capăt și să se determine unghiul pe care acesta îl face cu planul orizontal de proiecție.

9. Să se determine urma verticală a unui plan oarecare $[P]$, cunoscând urma sa orizontală $OP_x = 80$, $OP_y = 40$ și unghiul de 30° pe care acesta îl face cu planul orizontal de proiecție.

10. Să se determine, printr-o schimbare de plan, distanța de la punctul $A(50,25,30)$ la planul $[P]$: $OP_x = 100$, $OP_y = 50$, $OP_z = 70$.

11. Printr-o schimbare de plan, să se găsească proiecția verticală m' a unui punct $M(60,20,z)$, cunoscând distanța $l = 35\text{mm}$ de la punctul M la planul oarecare $[P]$: $OP_x = 110$, $OP_y = 40$, $OP_z = 60$ (*Indicație* : se transformă planul $[P]$ într-un plan de capăt $[P_1]$, se trasează o paralelă la urma P_1' , la distanța l , care va intersecta noua linie de ordine a punctului M_1 în m_1' , apoi se revine în vechiul sistem de proiecție și se determină m').

12. Să se determine, printr-o schimbare de plan, distanța l dintre planele paralele $[P]$ și $[Q]$, definite prin urme : $[P]$: $OP_x = 50$, $OP_y = 40$, $OP_z = 30$ și $[Q]$: $OQ_x = -10$.

13. Să se determine, printr-o schimbare de plan, urmele Q și Q' ale unui plan $[Q]$, paralel cu planul $[P]$: $OP_x = 90$, $OP_y = 50$, $OP_z = 35$, situat la distanța $l = 20\text{mm}$ față de planul $[P]$.

14. Să se găsească urmele verticale P' și Q' ale planelor $[P]$ și $[Q]$, paralele, știind că urmele lor orizontale fac 60° cu linia de pământ, $P_x(70,0,0)$, $Q_x(46,0,0)$ și că adevărata mărime a distanței dintre ele este de 15mm .

15. Printr-o schimbare de plan să se transforme planul $[P]$, definit prin urme : $OP_x = 80$, $OP_y = 30$, $OP_z = 40$, într-un plan $[P_1]$ a cărui urme P_1 și P_1' să fie în prelungire.

16. Să se determine urmele P și P' ale planului $[P]$, care conține punctul $A(50,45,40)$ și este perpendicular pe planul $[Q]$: $OQ_x = 80$, $OQ_y = 50$, $OQ_z = 80$ (*Indicație* : printr-o schimbare de plan orizontal se transformă planul $[Q]$ într-un plan proiectant vertical $[Q_1]$ și se trasează $P_1 \perp Q_1$, prin a_1 , apoi se revine din schimbarea făcută în vechiul sistem de proiecție).

17. Fie dreptele $D(d,d')$: $A(47,64,30)$, $B(75,32,10)$ și $\Delta(\delta,\delta')$: $M(20,10,15)$, $N(70,30,45)$, neparalele și neconcurente. Prin două schimbări de plan succesive să se determine proiecțiile perpendicularei comune duse pe cele două drepte date.

18. Prin două schimbări de plan succesive să se transforme dreapta oarecare $D(d,d')$: $A(80,30,20)$, $B(30,15,15)$ într-o verticală.

19. Să se transforme dreapta oarecare $D(d,d')$: $A(90,25,35)$, $B(20,10,15)$ într-o dreaptă de capăt, prin două schimbări de plan succesive.

20. Să se determine în adevărată mărime distanța l dintre dreptele paralele $D(d,d')$: $A(90,15,10)$, $B(25,7,20)$ și Δ : $C(80,25,22)$, aplicând două schimbări de plan succesive.

21. Prin două schimbări de plan succesive să se determine în adevărată mărime distanța l de la punctul $M(60,15,25)$ la dreapta $D(d,d')$: $A(90,15,10)$, $B(20,30,20)$.

22. Să se determine în adevărată mărime distanța l dintre dreapta $D(d,d')$: $H(80,25,0)$, $H(58,0,50)$ și planul $[Q]$: $OQ_x = 70$, $OQ_y = 45$, $OQ_z = 50$ (*Indicație* : se determină distanța l dintre dreapta $D(d,d')$ și o dreaptă $\Delta(\delta,\delta')$, paralelă cu aceasta și cuprinsă în planul $[P]$).

23. Fie dreapta $D(d,d')$: $A(80,15,30)$, $B(25,25,15)$. Prin două schimbări de plan succesive să se transforme dreapta oarecare $D(d,d')$ într-o fronto-orizantală.

24. Prin metoda schimbării planelor de proiecție să se determine adevărata mărime a unghiului ANB : $A(50,30,30)$, $B(70,15,15)$, $N(30,20,15)$.

25. Printr-o schimbare de plan să se aducă planul oarecare $[P]$: $OP_x = 100$, $OP_y = 50$, $OP_z = 70$ în poziția de plan paralel cu linia de pământ.

26. Prin punctul $A(50, y, 5)$ din planul $[P]$: $OP_x = 110$, $OP_y = 60$, $OP_z = 40$, să se ducă o dreaptă $D(d, d')$, conținută în planul $[P]$, care să facă 60° cu planul vertical de proiecție (*Indicație* : se transformă planul $[P]$ în planul de nivel $[P_2]$, prin două schimbări de plan succesive, se trasează prin a_2 proiecția d_2 , înclinată cu 60° față de axa O_2x_2 și se revine din schimbările făcute în vechiul sistem de proiecție).

27. Să se determine adevărată mărime a triunghiurilor de mai jos, aplicând două schimbări succesive de plan :

- a) $[ABC]$: $A(50, 10, 15)$, $B(90, 25, 25)$, $C(70, 45, 40)$;
- b) $[ABC]$: $A(55, 40, 43)$, $B(30, 25, 10)$, $C(90, 15, 20)$;
- c) $[ABC]$: $A(35, 30, 35)$, $B(90, 5, 20)$, $C(15, 5, 10)$;
- d) $[ABC]$: $A(90, 30, 10)$, $B(60, 10, 30)$, $C(20, 35, 15)$;
- e) $[ABC]$: $A(90, 10, 15)$, $B(65, 60, 50)$, $C(20, 30, 30)$;

Metoda rotației

28. Fie dreapta $D(d, d')$: $A(80, 35, 15)$, $B(30, 20, 40)$. Să se rotească dreapta D , astfel încât să devină paralelă cu planul orizontal de proiecție. Precizați adevărată mărime a segmentului AB și unghiul pe care dreapta $D(d, d')$ îl face cu planul vertical de proiecție.

29. Să se rotească dreapta $D(d, d')$: $A(90, 20, 20)$, $B(20, 50, 35)$ astfel încât să devină paralelă cu planul vertical de proiecție. Precizați adevărată mărime a segmentului AB și unghiul pe care dreapta $D(d, d')$ îl face cu planul orizontal de proiecție.

30. Fie dreapta $D(d, d')$: $A(80, 35, 15)$ și $B(30, 20, 40)$. Prin metoda rotației să se determine unghiurile pe care dreapta D le face cu planele de proiecție.

31. Să se determine adevărată mărime a segmentului AB : $A(90, 20, 20)$, $B(20, 50, 35)$, utilizând metoda rotației.

32. Să se determine proiecția verticală d' a dreptei D : $A(80, 15, 40)$, $B(25, 30, z)$, cunoscând unghiul de 45° pe care-l face dreapta cu planul orizontal de proiecție.

33. Fie punctul $M(15, 5, 5)$ și planul $[P]$: $OP_x = 40$, $OP_y = 30$, $OP_z = 45$. Să se determine distanța l de la punctul M la planul $[P]$, prin metoda rotației (*Indicație* : axa de rotație se ia prin punctul M).

34. Să se determine distanța de la punctul $M(50, 35, 30)$ la planul $[P]$: $OP_x = 100$, $OP_y = 50$, $OP_z = 70$, utilizând metoda rotației.

35. Se consideră dată urma orizontală P a planului oarecare $[P]$: $OP_x = 60$, $OP_y = 40$, punctul $A(35, 10, 15)$ și distanța $l = 7\text{mm}$ dintre acest punct și plan. Folosind metoda rotației să se determine urma verticală P' a planului $[P]$ (*Indicație* : se determină urma orizontală P_I a planului de capăt $[P_I]$, luând axa de rotație prin punctul A și se trasează P_I' prin P_{Ix} tangent la un cerc cu centrul în a' , de rază 7mm , apoi se revine din rotație și se determină P').

36. Să se determine adevărată mărime a unghiului pe care-l face ΔABC : $A(50, 10, 15)$, $B(90, 25, 25)$ și $C(70, 45, 40)$ cu planul orizontal de proiecție, utilizând metoda rotației. (*Indicație* : se transformă planul triunghiului într-un plan de capăt).

37. Se dă planul $[P]$: $OP_x = 80$, $OP_y = 40$, $OP_z = 40$. Să se determine unghiul dintre planul $[P]$ și planele de proiecție, rotind planul $[P]$ convenabil.

38. Să se determine urma P a unui plan $[P]$, cunoscând urma verticală : $OP_x = 80$, $OP_z = 50$ și unghiul de 45° pe care-l face planul $[P]$ cu planul $[V]$ (*Indicație* : prin rotație de front se obțin urmele planului $[P_I]$ proiectant vertical și se revine din rotație).

39. Să se determine urma verticală P' a unui plan $[P]$, cunoscând urma orizontală : $OP_x = 60$, $OP_y = 30$ și unghiul de 30° pe care-l face planul $[P]$ cu planul $[H]$ (*Indicație* : prin rotație de nivel se obțin urmele planului $[P]$ de capăt și se revine din rotație).

40. Să se determine adevărata mărime a distanței l cuprinsă între planele paralele $[P]$: $OP_x = 60$, $OP_y = 40$, $OP_z = 30$ și $[Q]$: $OQ_x = 10$, utilizând metoda rotației (*Indicație* : se transformă planele $[P]$ și $[Q]$ în plane proiectante).

41. Să se găsească urmele verticale P' și Q' ale planelor $[P]$ și $[Q]$, paralele, cunoscând urmele lor orizontale : $OP_x = 70$, $OP_y = 40$, $OQ_x = 40$ și că adevărata mărime a distanței dintre ele este de 10mm.

42. Se dă un plan $[P]$ definit de două drepte concurente : $D(d,d')$: $A(110,10,10)$, $B(75,30,30)$ și $\Delta(\delta,\delta')$: B și $C(30,15,20)$. Să se rotească planul $[P]$ astfel încât să devină plan de capăt, fără a utiliza urmele planului.

43. Să se determine adevărata mărime a triunghiului $[ABC]$: $A(10,10,30)$, $B(50,50,10)$, $C(30,30,70)$, folosind metoda rotației. Ce unghi face triunghiul cu planul vertical ? (*Obs. Atenție* : Triunghiul ABC este cuprins într-un plan proiectant vertical).

44. Să se determine adevărata mărime a triunghiului $[ABC]$: $A(10,30,10)$, $B(50,10,50)$, $C(30,70,30)$, folosind metoda rotației. Ce unghi face triunghiul cu planul orizontal de proiecție ? (*Obs. Atenție* : Triunghiul ABC este cuprins într-un plan de capăt).

45. Prin două rotații succesive să se transforme dreapta oarecare $D(d,d')$: $A(100,20,15)$, $B(20,40,40)$ într-o verticală.

46. Să se transforme planul $[P]$: $OP_x = 70$, $OP_y = 40$, $OP_z = 65$, într-un plan de nivel, utilizând dubla rotație.

47. Utilizând dubla rotație să se transforme dreapta $D(d,d')$: $M(70,40,40)$, $N(25,20,15)$ într-o dreaptă de capăt.

48. Să se transforme dreapta oarecare $D(d,d')$: $A(70,40,40)$, $B(25,20,15)$ într-o verticală, aplicând două rotații succesive.

49. Fie planul $[P]$: $OP_x = 90$, $OP_y = 50$, $OP_z = 55$. Să se transforme planul $[P]$ într-un plan de front, utilizând dubla rotație.

50. Fie dreapta $D(d,d')$: $A(60,17,20)$ și $B(20,40,50)$. Să se rotească dreapta D , astfel încât să devină paralelă cu axa Ox . (*Indicație* : se utilizează dubla rotație).

51. Să se rotească dreapta $D(d,d')$: $A(60,15,35)$ și $B(10,25,20)$, astfel încât să devină o fronto-orizantală.

52. Să se determine adevărata mărime a distanței dintre două drepte paralele, $D(d,d')$ și $\Delta(\delta,\delta')$, folosind metoda rotației ; $D(d,d')$: $A(90,60,50)$, $B(70,30,10)$; $\Delta(\delta,\delta')$: $C(60,70,60)$ (*Indicație* : se transformă dreptele în drepte verticale sau drepte de capăt).

53. Să se găsească adevărata mărime a distanței de la punctul $M(80,20,10)$ la dreapta $D(d,d')$: $A(60,15,35)$ și $B(10,25,20)$ prin metoda rotației (*Indicație* : axa de rotație se ia prin punct).

54. Să se determine adevărata mărime a unghiului MIN , folosind metoda rotației : $M(50,20,50)$, $I(90,70,10)$, $N(10,30,30)$ (*Indicație* : se transformă planul unghiului într-un plan de nivel sau de front).

55. Să se determine în adevărată mărime distanța l dintre dreapta $D(d,d')$: $H(100,25,0)$, $H(78,0,50)$ și planul $[P]$: $OP_x = 70$, $OP_y = 45$, $OP_z = 50$ (*Indicație* : se determină distanța l dintre dreapta $D(d,d')$ și o dreaptă $\Delta(\delta,\delta')$, paralelă cu aceasta și cuprinsă în planul $[P]$, rotindu-le în poziția de drepte perpendiculare pe unul din planele de proiecție).

56. Să se determine adevărată mărime a triunghiurilor de mai jos, aplicând două rotații succesive :

a) $[ABC]$: $A(50,10,15)$, $B(90,25,25)$, $C(70,45,40)$;

b) $[ABC]$: $A(55,40,43)$, $B(30,25,10)$, $C(90,15,20)$;

- c) $[ABC] : A(35,30,35), B(90,5,20), C(15,5,10);$
 d) $[ABC] : A(90,30,10), B(60,10,30), C(20,35,15);$
 e) $[ABC] : A(90,10,15), B(65,60,50), C(20,30,30);$

Metoda rabaterii

57. Să se determine adevărata mărime a triunghiului $[ABC] : A(90,5,20), B(35,30,35), C(15,20,10)$, prin rabatare pe planul orizontal de proiecție.

58. Fie triunghiul $[ABC] : A(11, y_a, 23), B(50, y_b, 21), C(31, y_c, 22)$ situat în planul $[P] : OP_x = 110, OP_y = 40, OP_z = 45$. Să se determine rabaterea triunghiului pe planul orizontal de proiecție.

59. Să se determine în adevărată mărime distanța de la punctul $M(60,15,25)$ la dreapta $D(d, d') : A(90,15,10)$ și $B(40,30,20)$, cât și proiecțiile acesteia, prin metoda rabaterii.

60. Se consideră dreapta $D(d, d') : A(30,20,30), B(80,35,15)$ și un punct $M(50,10,15)$, exterior dreptei. Să se determine proiecțiile punctelor situate pe dreapta D la distanța $l = 40\text{mm}$ față de punctul M , aplicând metoda rabaterii.

61. Fiind date dreapta $D(d, d') : A(20,15,10), B(80,40,45)$ și punctul $M(45,50,35)$, prin metoda rabaterii să se determine piciorul perpendicularei duse din punctul M pe dreapta D și mărimea reală a acesteia.

62. Să se determine distanța de la punctul $M(60,40,30)$ la planul $[P] : OP_x = 80, OP_y = 50, OP_z = 40$, folosind un plan proiectant vertical și rabaterea acestuia pe planul vertical de proiecție.

63. Fie dreptele $D(d, d') : A(90,30,10), B(60,10,30)$ și $\Delta(\delta, \delta') : B, C(20,35,15)$, concurente în punctul B . Să se determine adevărata mărime a unghiului dintre cele două drepte prin rabatare pe planul orizontal de proiecție și prin rabatare pe un plan de nivel. Comparați cele două rezultate.

64. Să se determine în adevărată mărime unghiului dintre dreapta oarecare $D(d, d') : A(30,30,20), B(50,15,10)$ și dreapta de profil $\Delta(\delta, \delta') : B, C(30,40,10)$, concurente în punctul B , prin rabatare pe planul orizontal de proiecție.

65. Se consideră un plan $[P]$ care trece prin linia de pământ și prin punctele $A(30,15,15)$ și $B(70,40,40)$. Să se determine proiecția unui punct $M(m, m')$ de pe linia de pământ situat la egală distanță de punctele A și B (*Indicație* : se rabat punctele A și B pe planul orizontal de proiecție, se trasează mediatoarea segmentului A_0B_0 până la intersecția cu axa Ox , unde se obține punctul M).

66. Se dă dreapta $D(d, d') : A(80,40,40), B(20,10,10)$ și planul $[P] : OP_x = 60, OP_y = 35, OP_z = 45$. Să se determine valoarea unghiului pe care-l face dreapta D cu planul $[P]$, prin rabatare.

67. Să se determine valoarea unghiului pe care-l face dreapta $D(d, d') : A(15,5,40), B(50,30,10)$ cu un plan paralel cu linia de pământ $[R] : OR_x = \infty, OR_y = 50, OR_z = 40$, prin rabatare pe planul orizontal de proiecție (*Indicație* : se utilizează și proiecția pe planul lateral, pentru determinarea urmei orizontale).

68. Să se determine în adevărată mărime unghiului dintre dreapta oarecare $D(d, d') : H(80,40,0), V(30,0,20)$ și un plan de profil $[P] : OP_x = 30, OP_y = \infty, OP_z = \infty$, prin rabatare pe planul orizontal de proiecție.

69. Fie dreapta oarecare $D(d, d') : A(20,25,15), B(70,50,40)$ și planul paralel cu linia de pământ $[R] : OR_x = \infty, OR_y = 30, OR_z = 20$. Să se determine valoarea unghiului pe care-l face dreapta D cu planul $[R]$, prin rabatare pe planul orizontal de proiecție.

70. Să se determine adevărata mărime a unghiului dintre planele $[P]$: $OP_x = 90$, $OP_y = 50$, $OP_z = 60$ și $[Q]$: $OQ_x = 30$, $OQ_y = -10$, $OQ_z = -30$, prin rabatare pe un plan de front.

71. Să se determine adevărata mărime a unghiului dintre planele $[P]$: $OP_x = 90$, $\angle OP_yP = 60^\circ$, $\angle OP_zP' = 30^\circ$ și $[Q]$: $OQ_x = 20$, $OQ_y = -10$, $OQ_z = -20$, prin rabatare pe un plan de nivel.

72. Să se determine adevărata mărime a distanței dintre dreptele paralele $D(d,d')$: $A(130,70,30)$, $B(40,40,80)$ și $\Delta(\delta,\delta')$: $C(70,90,30)$ prin rabatare pe un plan de nivel.

73. Să se determine adevărata mărime a distanței dintre dreptele paralele $D(d,d')$: $A(85,35,15)$, $B(40,20,40)$ și $\Delta(\delta,\delta')$: $C(55,45,15)$ prin rabatare pe un plan de front.

74. Să se determine proiecțiile înălțimilor triunghiului $[ABC]$: $A(30,10,15)$, $B(90,25,25)$, $C(75,45,40)$, utilizând rabaterea (*Indicație* : se trasează înălțimile pe proiecția rabătată a triunghiului, pe un plan de nivel ce trece prin vârful B).

75. Utilizând rabaterea, să se determine adevărata mărime a triunghiurilor :

a) $[ABC]$: $A(50,10,15)$, $B(90,25,25)$, $C(70,45,40)$;

b) $[ABC]$: $A(55,40,43)$, $B(30,25,10)$, $C(90,15,20)$;

c) $[ABC]$: $A(35,30,35)$, $B(90,5,20)$, $C(15,5,10)$;

d) $[ABC]$: $A(90,30,10)$, $B(60,10,30)$, $C(20,35,15)$;

e) $[ABC]$: $A(90,10,15)$, $B(65,60,50)$, $C(20,30,30)$;

76. Dreapta oarecare $D(d,d')$: $A(80,25,15)$, $B(30,20,40)$ și punctul $M(50,50,z)$ sunt cuprinse în același plan de capăt. Să se determine proiecțiile perpendicularei din punctul M pe dreapta D , utilizând rabaterea.

77. Se dă punctul $M(78,50,52)$ și planul $[P]$: $OP_x = 100$, $OP_y = 55$, $OP_z = 90$. Să se determine adevărata mărime a distanței de la punctul M la planul $[P]$.

78. Să se determine adevărata mărime a unui triunghi $[ABC]$: $A(90,9,15)$, $B(65,y,50)$, $C(20,32,27)$, situat într-un plan proiectant vertical, prin rabatare pe ambele plane de proiecție. Să se compare rezultatele.

79. Să se determine adevărata mărime a unui triunghi $[ABC]$: $A(90,15,9)$, $B(65,50,z)$, $C(20,27,32)$, situat într-un plan de capăt, prin rabatare pe ambele plane de proiecție. Să se compare rezultatele.

80. Se consideră triunghiul echilateral ABC , aparținând planului $[P]$: $OP_x = 60$, $OP_y = 50$, $OP_z = 80$. Cunoscând rabaterea triunghiului pe planul orizontal $A_0(55,38,0)$, $B_0(46,66,0)$, să se determine proiecția dublu ortogonală a acestuia.

81. Să se găsească urmele P și P' ale unui plan $[P]$, cunoscând un punct $M(40,30,20)$ ce aparține planului și rabaterea acestuia pe planul orizontal $M_0(80,50,0)$.

82. Se consideră orizontala $D(d,d')$ care face 45° cu planul vertical de proiecție și are urma $V(90,0,30)$ și un punct $M(40,0,0)$ de pe axa Ox . Să se determine proiecțiile punctelor A și B , situate pe dreapta D , astfel încât triunghiul AMB să fie echilateral (*Indicație* : se rabate orizontala pe planul orizontal de proiecție, se stabilesc punctele A_0 și B_0 și se revine din rabatare).

83. Să se determine urma verticală P' a planului $[P]$: $OP_x = 70$, $OP_y = 40$, cunoscând rabaterea $A_0(45,35,0)$ a punctului $A(30,10,z)$ din planul $[P]$.

84. Fiind date planul $[P]$: $OP_x = 110$, $OP_y = 70$, $OP_z = 60$ și punctul $\Omega(30,20,z)$ din acest plan, să se traseze proiecțiile unui poligon regulat cu 6 laturi, de lungime 25mm și cu centrul în punctul Ω (*Indicație* : se determină proiecția rabătată a poligonului și se revine din rabatare).

85. Să se determine proiecțiile unui triunghi echilateral, cunoscând latura AB care este o orizontală : $A(50,11,23)$, $B(20,25,23)$ și că vârful C este situat în planul orizontal (*Indicație* : se determină pe planul de nivel ce conține orizontala AB proiecția rabătată $a_0b_0c_0$ a triunghiului și se revine din rabatare cu punctul C).

7. PROBLEME DE SINTEZĂ

(punct, dreaptă, plan, metode)

7.1 Probleme rezolvate

1. Se dă forma geometrică din figura 7.1. Să se reprezinte epura ei și să se studieze tipurile de drepte, plane și pozițiile relative dintre acestea, cu referire la elementele din care este alcătuită această formă.

Rezolvare :

a) Epura formei geometrice din figura 7.1 se trasează prin determinarea proiecțiilor fiecărui segment de dreaptă care o alcătuiește, respectiv a tuturor punctelor care definesc aceste segmente. În acest scop, corpul dat trebuie imaginat în spațiu, în sistemul celor trei plane de proiecție, ca în figura 7.2, a. Din toate punctele formei geometrice se imaginează proiectante duse pe planele de proiecție, obținându-se cele trei proiecții. Dacă ne imaginăm în continuare că planele orizontal $[H]$ și lateral

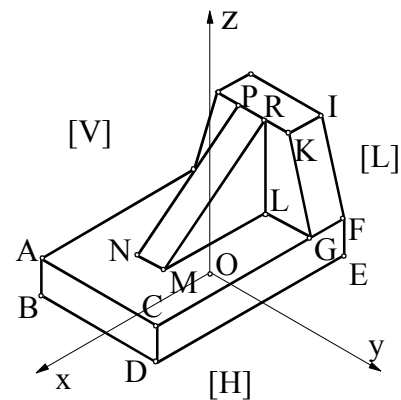


Fig. 7.1 Formă geometrică

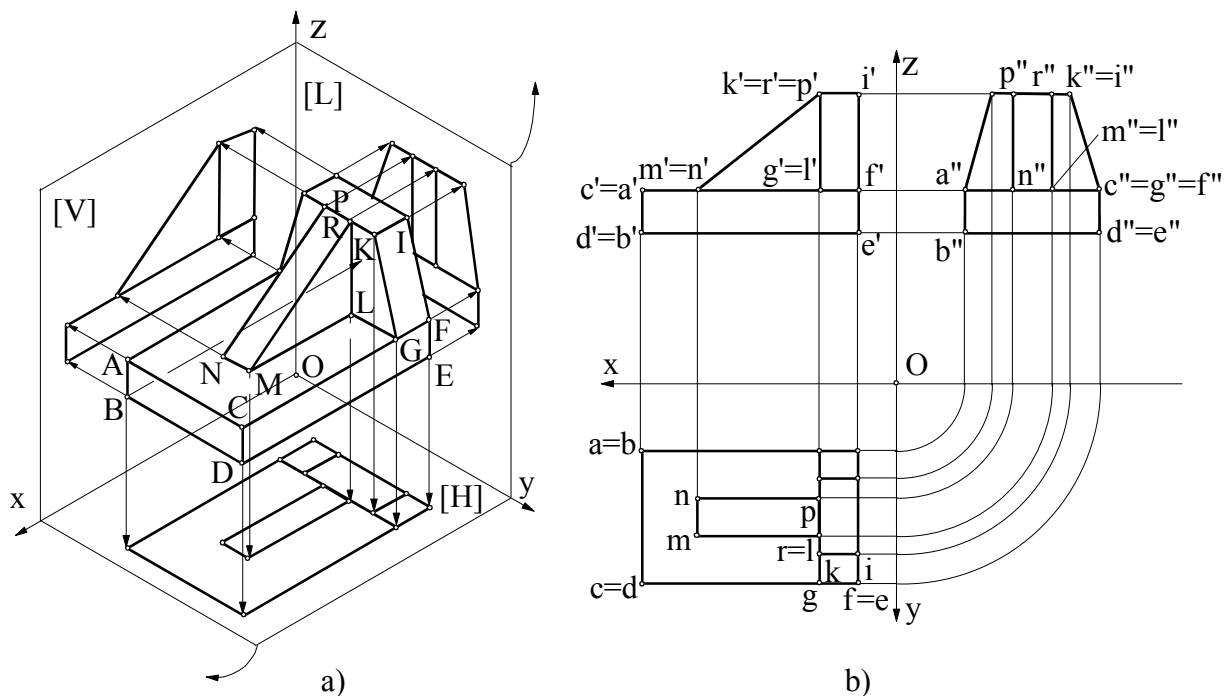


Fig. 7.2 Rezolvarea problemei 1

$[L]$ se rotesc, în sensurile arătate pe figură, până la suprapunerea peste planul vertical $[V]$, se obține epura din figura 7.2, b, care este epura formei geometrice date.

b) Corelând forma geometrică dată cu epura ei se identifică următoarele segmente de dreaptă situate în poziții particulare față de planele de proiecție (în paranteză se specifică proiecția din epură în care segmentele se proiectează în adevărată mărime) :

- drepte paralele cu planele de proiecție :

$PN \parallel [V] (p'n' \equiv PN), MR \parallel [V] (m'r' \equiv MR);$

$IF \parallel [L] (i''f'' \equiv IF), KG \parallel [L] (k''g'' \equiv KG);$

- drepte perpendiculare pe planele de proiecție :

$RL \perp [H] (r'l' \equiv r''l'' \equiv RL), AB \perp [H] (a'b' \equiv a''b'' \equiv AB),$

$CD \perp [H] (c'd' \equiv c''d'' \equiv CD);$

$AC \perp [V] (ac \equiv a''c'' \equiv AC), BD \perp [V] (bd \equiv b''d'' \equiv BD);$

$CF \perp [L] (cf \equiv c'f' \equiv CF), DE \perp [L] (de \equiv d'e' \equiv DE).$

c) Analizând corpul dat, se exemplifică pozițiile relative dintre drepte, pentru câteva segmente :

- drepte paralele : $AB \parallel CD (ab \parallel cd, a'b' \parallel c'd'), NP \parallel MR (np \parallel mr, n'p' \parallel m'r'),$

$ML \parallel CF (ml \parallel cf, m'l' \parallel c'f'), KG \parallel IF, (kg \parallel if, k'g' \parallel i'f');$

- drepte concurente : $AC \cap CF = C (ac \cap cf = c, a'c' \cap c'f' = c'),$

$ML \cap LG = L (ml \cap lg = l, m'l' \cap l'g' = l'),$

$PK \cap KG = K (pk \cap kg = k, p'k' \cap k'g' = k');$

- drepte disjuncte : $AC \cap KG = \emptyset (ac \cap kg = \emptyset, a'c' \cap k'g' = \emptyset),$

$ML \cap PR = \emptyset (ml \cap pr = \emptyset, m'l' \cap p'r' = \emptyset),$

$BD \cap IF = \emptyset (bd \cap if = \emptyset, b'd' \cap i'f' = \emptyset),$

d) La reprezentarea în epură a punctelor date pe forma geometrică unele proiecții s-au suprapus, adică unele puncte au proiecții identice. Totuși se poate spune care punct este vizibil, în funcție de distanța dintre acestea și planul de proiecție respectiv. Exemplu :

- proiecții identice pe planul orizontal :

$c \equiv d$, vizibil $C (z_C > z_D), r \equiv l$, vizibil $R (z_R > z_L), f \equiv e$, vizibil $F (z_F > z_E),$

- proiecții identice pe planul vertical :

$c' \equiv a'$, vizibil $C (y_C > y_A), m' \equiv n'$, vizibil $M (y_M > y_N), g' \equiv l'$, vizibil $G (y_G > y_L),$

- proiecții identice pe planul lateral :

$c'' \equiv e''$, vizibil $D (x_D > x_E), k'' \equiv i''$, vizibil $K (x_K > x_I), m'' \equiv l''$, vizibil $M (x_M > x_L).$

e) Fețele care mărginesc corpul studiat fac parte din plane care au diferite poziții față de planele de proiecție (proiectante sau paralele). Cele care sunt paralele cu acestea se proiectează pe ele în adevărată mărime. Exemplu :

- plane proiectante față de planele de proiecție :

$[FGKI] \perp [L] (f'', g'', k'', i'' - \text{coliniare}), [MNPR] \perp [V] (m', n', p', r' - \text{coliniare})$

- plane paralele față de planele de proiecție :

$[MLR] \parallel [V] (m'l'r' \equiv MLR),$

$[LGKR] \parallel [L] (l''g''k''r'' \equiv LGKR),$

$[PRI] \parallel [H] (pri \equiv PRI).$

f) Fețele plane se intersectează după segmente de dreaptă. Dacă planele sunt particulare și dreptele obținute din intersecția lor sunt particulare, după cum se arată în exemplele de mai jos :

$[ABDC](\text{plan de profil}) \cap [CDEF](\text{plan de front}) = CD(\text{dreaptă verticală});$

$[CDEF](\text{plan de front}) \cap [KIFG](\text{plan} \parallel \text{cu } Ox) = GF(\text{dreaptă fronto-orizontală});$

$[MNPR](\text{plan de capăt}) \cap [PRKI](\text{plan de nivel}) = PR(\text{dreaptă de capăt});$

$[MNPR](\text{plan de capăt}) \cap [MRL](\text{plan de front}) = MR(\text{dreaptă frontală});$

$[KGLR](\text{plan de profil}) \cap [KIFG](\text{plan} \parallel \text{cu } Ox) = KG(\text{dreaptă de profil}).$

2. Fie dreapta oarecare $D : M(20,12,20), N(10,30,5).$

a) Să se determine urmele planului $[P]$, pentru care dreapta D este linie de cea mai mare pantă față de planul vertical de proiecție;

b) Să se traseze urmele unui plan $[Q]$, paralel cu linia de pământ și care se intersectează cu planul $[P]$ după dreapta D ;

- c) Să se construiască proiecțiile unui triunghi ABC , al cărui plan să fie perpendicular pe planul $[P]$, cunoscând latura sa, $AB : A(35,25,35), B(60,32,25)$;
 d) Să se determine adevărata mărime a triunghiului ABC .

Rezolvare : se determină urmele orizontală $H(h,h')$ și verticală $V(v,v')$ pentru dreapta $D(d,d')$. Prin proiecția v' se trasează urma P' perpendiculară pe proiecția d' . Aceasta intersectează axa Ox în P_x . Urma P este dată de P_x și proiecția h (fig.7.3)

Planul $[Q]$ are urme paralele cu axa Ox și concurente în v' , respectiv h , cu urmele planului $[P]$. Astfel, planul $[Q]$ și planul $[P]$ au comună dreapta D .

Pentru triunghiul ABC există o infinitate de soluții. Se alege una dintre ele : din punctul B se trasează o dreaptă $\Delta(\delta,\delta')$ perpendiculară pe planul $[P]$. Dacă pe această dreaptă se consideră orice punct $C(c,c')$, planul triunghiului $[ABC]$ este perpendicular pe planul $[P]$.

Adevărata mărime a triunghiului ABC se poate determina aplicând oricare din metodele geometriei descriptive. Aici s-a ales rabaterea pe un plan de nivel. Prin vârful B se imaginează un plan de nivel, care intersectează triunghiul după orizontala $(bI,b'I')$, care este și axă de rabatere. Vârful B este propriul lui răbătit, deci se rabate vârful C , utilizând triunghiul de rabatere $c\omega c_2$, cu cateta $cc_2 = c'c_1'$, iar pentru proiecția răbătită a vârfului A se utilizează coliniaritatea punctelor c , I și a . Proiecția $a_0b_0c_0$ reprezintă adevărata mărime a triunghiului ABC .

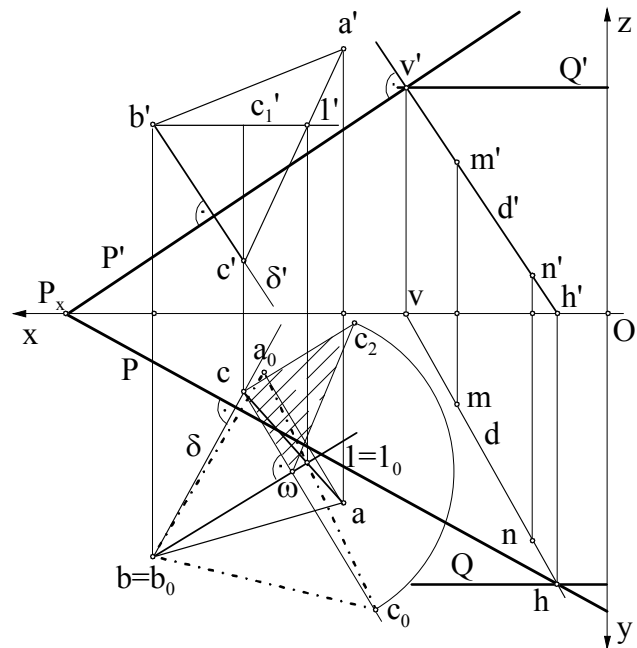


Fig.7.3 Rezolvarea problemei 2

7.2 Probleme propuse

- Pentru formele geometrice din figura 7.4, să se rezolve următoarele cerințe :
 - să se reprezinte epura formelor geometrice, indicând pe aceasta proiecțiile punctelor marcate;
 - să se identifice câte un segment de dreaptă pentru pozițiile particulare față de planele de proiecție și să se numească acestea. În care proiecție din epură segmentele se regăsesc în adevărată mărime?
 - să se precizeze câte două drepte care să fie:
 - paralele
 - concurente
 - disjuncte
 - în cazul punctelor aparent suprapuse (care au una din proiecții identice), să se precizeze care dintre ele este vizibil și de ce ?
 - menționați suprafețele poligonale care ocupă în spațiu poziții particulare față de planele de proiecție și numiți-le. Care dintre proiecțiile lor din epură reflectă adevărata mărime?
 - numiți trei perechi de plane concurente și arătați ce fel de dreaptă este dreapta lor de intersecție.

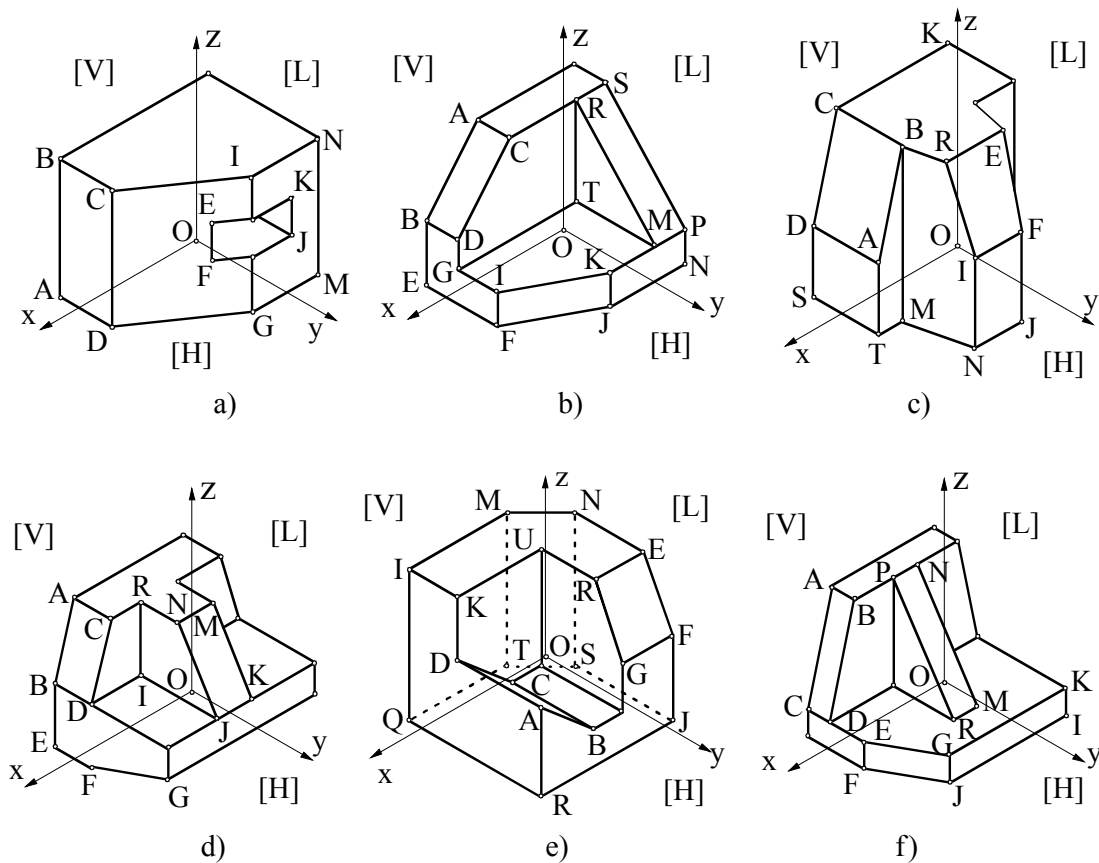


Fig.7.4 Figuri geometrice pentru problema 1

2. Se dau punctele $A(45,10,20)$, $B(70,0,40)$ și $C(100,40,0)$.

- Să se construiască urmele planului $[P]$, definit de punctele A , B și C ;
- Prin punctul $M(20,40,40)$ să se ducă o paralelă $D(d,d')$ la planul $[P]$;
- Prin punctul $N(80,10,20)$ să se ducă un plan $[Q]$, paralel cu planul $[P]$;
- Să se determine adevărata mărime a triunghiului ABC , prin rabatere pe planul orizontal $[H]$ de proiecție.

3. Se consideră planul $[P]$ definit prin : $OP_x = 30$, $OP_y = -20$, $OP_z = \infty$ și punctele $A(50, y_A, 30)$ și $B(70, y_B, 20)$ din acest plan.

- Să se determine proiecțiile pătratului $ABCD$, situat în planul $[P]$;
- Prin punctul $M(90,10,30)$ să se ducă un plan oarecare $[Q]$, perpendicular pe planul $[P]$ dat ;
- Să se determine dreapta $\Delta(\delta, \delta')$ de intersecție dintre planul $[P]$ și planul $[R]$: $OR_x = 100$, $OR_y = 55$, $OR_z = 70$ și unghiul α , pe care această dreaptă îl face cu planul orizontal $[H]$ de proiecție.

4. Se dă triunghiul ABC : $A(50,20,50)$, $B(90,70,10)$ și $C(10,30,30)$.

- Din punctul $M(55,10,15)$ să se ducă o dreaptă $\Delta(\delta, \delta')$, perpendiculară pe planul triunghiului $[ABC]$;
- Să se determine punctul $I(i, i')$ de intersecție dintre dreapta $\Delta(\delta, \delta')$ și planul triunghiului, să se studieze vizibilitatea dreptei Δ și să se determine adevărata mărime a segmentului MI , prin metoda rotației ;

c) Să se determine adevărata mărime a triunghiului ABC prin metoda schimbării planelor de proiecție.

5. Fie două plăci plane triunghiulare opace, $[ABC] : A(100,10,20), B(60,85,60), C(30,30,30)$ și $[KMN] : K(70,10,10), M(120,60,50), N(15,70,60)$.

a) Să se determine dreapta de intersecție dintre cele două plăci și să se studieze vizibilitatea plăcilor ;

b) Prin punctul $I(40,15,10)$ să se ducă dreapta $\Delta(\delta, \delta')$, paralelă cu planele celor două triunghiuri și dreapta $D(d, d')$ concurentă cu triunghiurile;

c) Să se determine adevărata mărime a triunghiului ABC, prin metoda rotației.

6. Fie dreptele $D(d, d') : A(50,13,37), B(70,-12,52)$ și $\Delta(\delta, \delta') : E(20,5,70), F(40,20,35)$.

a) Să se determine urmele planului $[P]$ definit de cele două drepte

b) Prin punctul $M(80,10,35)$ să se ducă un plan $[Q]$ paralel cu planul $[P]$;

c) Prin punctul $N(30,30,15)$ să se ducă un plan $[R]$, perpendicular pe dreapta $D(d, d')$;

d) Să se determine distanța l dintre planele $[P]$ și $[Q]$, prin metoda schimbării planelor de proiecție;

7. Fie plăcile plane opace $[ABCD] : A(120,75,10), B(10,75,10), C(10,15,65), D(120,15,65)$ și $[KMN] : K(20,5,10), M(100,20,5), N(60,75,60)$.

a) Să se determine dreapta de intersecție dintre cele două plăci și să se studieze vizibilitatea plăcilor ;

b) Să se determine adevărata mărime a triunghiului KMN prin metoda schimbării planelor de proiecție;

c) Prin punctul $I(110,15,60)$, exterior celor două plăci, să se ducă un plan oarecare $[P]$, concurent cu plăcile și care să taie axa Ox în punctul $E(150,0,0)$. Să se precizeze coordonatele punctului de intersecție dintre cele trei plane.

8. Se consideră dreptele $D_1(d_1, d_1') : A(50,15,40), B(10,70,5)$ și $D_2(d_2, d_2') : M(23,10,60), N(70,60,-10)$.

a) Să se determine urmele planului $[P]$ definit de cele două drepte ;

b) Prin punctul $E(80,30,15)$ să se ducă un plan $[Q]$, perpendicular pe planul $[P]$, care întâlnește axa Ox în punctul $F(35,0,0)$;

c) Prin punctul $K(110,15,30)$ să se ducă o dreaptă $\Delta(\delta, \delta')$ paralelă cu planul $[P]$;

d) Să se determine unghiul α dintre dreptele D_1 și D_2 , prin rabatere pe planul orizontal de proiecție.

9. Fie date planele $[P] : OP_x = 140, OP_y = 40, OP_z = 50$ și $[Q] : OQ_x = 70, OQ_y = 80, OQ_z = 65$.

a) Să se determine unghiul α dintre cele două plane ;

b) Prin punctul $M(90,30,10)$ să se ducă o dreaptă $D(d, d')$ paralelă cu cele două plane ;

c) Să se determine punctul de intersecție $I(i, i')$ dintre planele $[P]$, $[Q]$ și planul de front $[F]$ care trece prin punctul M .

10. Se dă planul $[P] : OP_x = 100, OP_y = 50, OP_z = 70$ și dreapta $D(d, d') : A(70,50,60), B(20,20,10)$.

a) Să se determine punctul de intersecție $I(i, i')$ dintre dreapta D și planul $[P]$;

- b) Să se construiască linia de cea mai mare pantă a planului [P] față de planul orizontal de proiecție, care trece prin punctul $C(50,10,z_c)$; $z_c = ?$
 c) Prin punctul B să se construiască un plan [Q] paralel cu planul [P] ;
 d) Să se determine unghiul α dintre dreapta D și planul [P].

11. Se dau plăcile plane opace [ABC] : $A(100,10,70)$, $B(60,70,90)$, $C(20,30,20)$ și [KMN] : $K(120,50,40)$, $M(70,10,20)$, $N(30,60,80)$.

- a) Să se determine dreapta de intersecție dintre cele două plăci și să se studieze vizibilitatea plăcilor ;
 b) Să se determine unghiul α pe care dreapta de intersecție dintre plăci îl face cu planul vertical de proiecție, utilizând metoda rotației ;
 c) Să se ridice în punctul A o perpendiculară $\Delta(\delta,\delta')$ pe planul triunghiului [ABC] ;
 d) Să se determine adevărata mărime a triunghiului KMN prin metoda schimbării planelor de proiecție.

12. Se consideră planul [P] : $OP_x = 10$, $OP_y = \infty$, $OP_z = -15$ și punctele $A(50,30,z_A)$, $B(20,20,z_B)$ din acest plan.

- a) Să se determine proiecțiile triunghiului echilateral ABC, cuprins în acest plan ;
 b) Prin punctul A să se ducă un plan [Q], perpendicular pe planul [P], care are urmele în prelungire ;
 c) Să se determine dreapta de intersecție $D(d,d')$ dintre planele [P] și [Q] și unghiul α pe care aceasta îl face cu planul vertical de proiecție.

13. Fie placa plană triunghiulară opacă ABC : $A(15,10,70)$, $B(50,60,10)$, $C(100,70,20)$.

- a) Din punctul $M(75,10,5)$ să se ducă o dreaptă $D(d,d')$ perpendiculară pe planul triunghiului, să se determine punctul $I(i,i')$ în care aceasta înțeapă triunghiul și să se studieze vizibilitatea perpendicularei ;
 b) Să se determine urmele planului [P], definit de punctele A, B și C ;
 c) Prin punctul C să se ducă o paralelă $\Delta(\delta,\delta')$ la planul [P] ;
 d) Să se determine adevărata mărime a triunghiului ABC.

14. Se consideră planul [P] : $OP_x = 100$, $OP_y = 50$, $OP_z = 70$ și un punct $A(60,40,50)$, exterior planului .

- a) Să se determine distanța de la punctul A la planul [P] ;
 b) Prin punctul A să se ducă un plan [Q], perpendicular pe planul [P], care trece prin origine;
 c) Să se construiască o dreaptă $D(d,d')$ paralelă cu planul [P], care să treacă prin punctul A.

15. Fie date planele paralele [P] : $OP_x = 110$, $OP_y = 60$, $OP_z = 80$ și [Q]: $OQ_x = 60$.
 a) Să se determine distanța l dintre cele două plane și unghiul α pe care îl fac cu planul orizontal de proiecție ;

- b) Prin punctul $M(80,30,50)$, exterior planelor să se construiască un plan [R], perpendicular pe plane și care întâlnește axa Ox în același punct ca și planul [Q] ;
 c) Prin punctul $A(30,y_A,25)$ din planul [P], să se ducă linia de cea mai mare pantă față de planul vertical de proiecție, a planului [P]; $y_A = ?$

16. Se consideră dreptele $D(d,d')$: $A(50,5,15)$, $B(35,30,5)$ și $\Delta(\delta,\delta')$: $M(70,50,60)$, $N(20,-20,10)$.

- a) Să se determine urmele planului [P] care are dreapta D ca linie de cea mai mare pantă față de planul vertical de proiecție ;
- b) Să se determine unghiul α pe care dreapta $\Delta(\delta, \delta')$ îl face cu planul [P];
- c) Prin punctul A să se ducă o dreaptă $D_1(d_1, d_1')$, perpendiculară pe dreapta $\Delta(\delta, \delta')$.

17. Fie punctul $A(60, 20, 40)$ și un plan de nivel [N] și un plan de front [F] care conțin acest punct.

- a) Să se determine coordonatele punctului de intersecție $I(i, i')$, dintre cele două plane și un plan de capăt [Q], ce trece prin punctul $B(20, 30, 60)$ și face 60° cu planul orizontal de proiecție;
- b) Să se determine urmele planului [P] definit de punctele A, B și $C(80, 30, 20)$;
- c) Prin punctul A să se traseze o linie de cea mai mare pantă față de planul vertical de proiecție a planului [P] ;
- d) Să se determine adevărata mărime a triunghiului ABC, prin metoda schimbării planelor de proiecție.

18. Fie planul proiectant vertical [P] : $OP_x = 80$, $OP_y = 70$, $OP_z = \infty$ și punctul $A(20, 20, 40)$, exterior planului.

- a) Să se construiască planul proiectant vertical [Q], care trece prin punctul A și face 90° cu planul [P]. Ce fel de dreaptă este dreapta de intersecție dintre cele două plane ?
- b) Să se găsească proiecțiile triunghiului ABC cu latura BC, $B(60, y_B, 60)$, $C(10, y_C, z_C)$, situată în planul [P] și înălțimea corespunzătoare vârfului A în planul [Q] ;
- d) Să se determine adevărata mărime a triunghiului ABC, prin metoda rotației.

19. Fie planul de capăt [P] : $OP_x = 80$, $OP_y = \infty$, $OP_z = 70$ și punctul $A(20, 40, 20)$, exterior planului.

- a) Să se construiască planul de capăt [Q], care trece prin punctul A și face 90° cu planul [P]. Ce fel de dreaptă este dreapta de intersecție dintre cele două plane ?
- b) Să se găsească proiecțiile triunghiului ABC cu latura BC, $B(60, 60, z_C)$, $C(10, y_C, z_C)$, situată în planul [P] și înălțimea corespunzătoare vârfului A în planul [Q] ;
- d) Să se determine adevărata mărime a triunghiului ABC, prin metoda rotației.

20. Se dau punctul $A(30, 10, 30)$ și dreapta $D(d, d') : B(60, 40, 10)$, $C(80, 15, 40)$.

- a) Să se determine urmele unui plan [P], care trece prin punctul A, este paralel cu dreapta D și taie axa Ox într-un punct de abscisă 120;
- b) Să se determine distanța l dintre dreapta D și planul [P];
- c) Să se construiască planul [Q] definit de dreapta D și punctul A și să se găsească dreapta după care acest plan intersectează planul [P].

21. Fie punctul $A(50, 10, 20)$ și dreptele $D(d, d') : B(95, 20, 5)$, $C(70, 10, 25)$ și $\Delta(\delta, \delta') : E(35, 5, 30)$, $F(15, 30, 10)$, necoplanare.

- a) Să se construiască urmele planului [P], care trece prin punctul A și este paralel cu cele două drepte ;
- b) Să se determine unghiul α dintre două drepte paralele cu dreptele D și Δ , concurente în punctul A;
- c) Să se determine dreptele după care se intersectează planul [P] cu un plan de front [F], respectiv un plan de nivel [N], care trec prin punctul A.

22. Fie dreapta $D(d, d') : A(80, 40, 50)$, $B(20, 15, 10)$ și punctul $M(45, 10, 40)$.

- a) Să se determine urmele planului [P], definit de dreapta D și de punctul M;

- b) Prin punctul $N(60,25,20)$ să se traseze un plan $[Q]$ paralel cu planul $[P]$;
 c) Să se determine proiecțiile perpendicularei KM duse din punctul M pe dreapta D , $K \in D$;
 d) Să se găsească distanța l dintre planele $[P]$ și $[Q]$.

23. Fie planul $[P]$ definit prin două orizontale paralele $D_1(d_1, d_1') : A(70,5,20), B(30,35,20)$, $D_2(d_2, d_2') : C(40,10,30)$ și o dreaptă oarecare $\Delta(\delta, \delta') : M(60,40,50), N(10,10,5)$.

- a) Să se determine proiecțiile punctului de intersecție $I(i, i')$, dintre dreapta Δ și planul $[P]$, fără a construi urmele planului;
 b) Să se construiască urmele planului $[P]$ definit de cele două orizontale;
 c) Care este distanța l dintre cele două orizontale ;
 d) Să se determine unghiul α pe care dreapta Δ îl face cu planul $[P]$.

24. Fie planele $[P] : OP_x = 140, \angle OP_x P = 60^\circ, OP_z = 80$ și $[Q] : OQ_x = 30, OQ_y = -80, OQ_z = -30$, a căror urme nu se întâlnesc în cadrul epurei .

- a) Să se determine dreapta de intersecție $D(d, d')$ dintre cele două plane;
 b) Prin punctul $A(20,10,20)$ să se ducă un plan $[R]$ paralel cu planul $[Q]$;
 c) Să se determine unghiul α dintre planul $[P]$ și planul $[Q]$.

25. Fie plăcile plane triunghiulare opace, $[ABC] : A(160,40,50), B(20,10,30), C(80,70,90)$ și $[KMN] : K(130,90,20), M(40,70,30), N(110,10,80)$.

- a) Să se determine dreapta de intersecție dintre cele două plăci și să se studieze vizibilitatea plăcilor ;
 b) Prin punctul $E(60,30,50)$ să se traseze o perpendiculară $D(d, d')$ pe planul triunghiului $[KMN]$;
 c) Prin punctul E să se ducă o dreaptă $\Delta(\delta, \delta')$, concurentă cu planul triunghiului $[KMN]$ și să se determine punctul de concurență.
 d) Să se determine adevărata mărime a triunghiului ABC , prin metoda rotației.

26. Se consideră dreapta $D(d, d') : A(100,40,30), B(70,60,70)$ și planul $[P] : OP_x = 60, OP_y = 40, OP_z = 50$.

- a) Să se determine proiecțiile unui triunghi $[ABC]$, al cărui plan să fie perpendicular pe planul $[P]$ și adevărata mărime a lui;
 b) Să se determine urmele planului $[Q]$ care conține triunghiul ABC ;
 c) Ce valoare are unghiul α pe care planul $[P]$ îl face cu planul orizontal de proiecție $[H]$;
 d) Prin punctul B să se traseze o dreaptă $\Delta(\delta, \delta')$, paralelă cu planul $[P]$.

27. Fie plăcile plane triunghiulare opace, $[ABC] : A(110,20,60), B(25,10,75), C(70,70,10)$ și $[EFG] : E(90,10,20), F(15,40,20), G(40,65,80)$.

- a) Să se determine dreapta de intersecție dintre cele două plăci și să se studieze vizibilitatea plăcilor ;
 b) Să se determine adevărata mărime a triunghiului EFG ;
 c) Prin punctul $M(30,25,30)$ să se traseze o dreaptă $D(d, d')$, paralelă cu planele celor două triunghiuri ;
 d) Prin punctul A să se ducă o perpendiculară $\Delta(\delta, \delta')$ pe dreapta EF .

8. POLIEDRE

Un corp mărginit de suprafețe plane, poligoane regulate sau neregulate se numește *poliedru*. Două fețe ale unui poliedru se intersectează după o dreaptă, numită *muchie*, iar trei sau mai multe fețe se intersectează într-un punct, numit *vârf*.

Un poliedru poate fi *convex* sau *concav*, după cum rămâne în întregime, sau nu, de aceeași parte a oricărei fețe.

În practică cele mai folosite poliedre sunt *prismele* și *piramidele*.

Poliedrele care au fețele poligoane regulate, cu același număr de laturi, se numesc *poliedre regulate*. Acestea au *unghiurile diedre* (unghiul format de două fețe plane) și *poliedre* (unghiul format de fețele care se întâlnesc într-un vârf) egale între ele.

8.1 Reprezentarea poliedrelor

Reprezentarea poliedrelor, în epură, se face prin reprezentarea punctelor (vârfurilor) și a dreptelor (muchii) care le determină. Astfel, un poliedru se dă, în probleme, prin coordonatele vârfurilor sale, muchiile rezultând ca segmente de drepte concurente.

Totalitatea dreptelor care limitează un poliedru, într-una din cele trei proiecții pe planele de proiecție, formează un poligon închis, numit *contur aparent*. Deci, în epură, un poliedru are maxim trei contururi aparente distincte.

Reprezentarea poliedrelor, în epură, se face cu respectarea regulilor de vizibilitate stabilite la dreptele disjuncte, cât și a următoarelor *criterii de vizibilitate*, specifice poliedrelor :

- poliedrele se presupun opace, astfel, unele muchii sunt vizibile, iar altele invizibile;
- conturul aparent este vizibil;
- o față a poliedrului este vizibilă când conține un punct vizibil, dar nu de pe conturul aparent;
- dintre două fețe, care se intersectează după o muchie a conturului aparent, una este vizibilă și cealaltă invizibilă;
- două fețe sunt vizibile sau invizibile, după cum muchia de intersecție (care nu aparține conturului aparent) este vizibilă sau invizibilă;
- muchiile ce se întâlnesc într-un vârf din interiorul conturului aparent sunt vizibile sau invizibile, după cum punctul (vârful) este vizibil sau invizibil.

8.1.1 Reprezentarea poliedrelor regulate

Conform teoremelor lui Euler, în spațiu, pot exista cinci poliedre regulate :

a) *Tetraedrul* – este poliedrul cu patru fețe triunghiuri echilaterale congruente. Pentru construirea epurei tetraedrului $SABC$ din figura 8.1, *a*, cu baza ABC situată în planul de nivel $[N]$, atunci când se cunoaște latura triunghiului, trebuie să se determine înălțimea Ss , care va fi diferența de cotă a vârfului S față de planul de nivel. În proiecție orizontală s este ortocentrul, iar înălțimea Ss este o catetă a triunghiului dreptunghic SsB .

În epură (fig.8.1, *b*), acest triunghi se construiește ducând o perpendiculară în s pe muchia bs și un arc de cerc cu centrul în punctul b și de rază bc . Intersecția lor determină punctul s_1 , iar segmentul ss_1 este chiar înălțimea căutată, $ss_1 = Ss$ și se construiește în proiecție verticală în mărime reală, fiind în poziția de dreaptă verticală.

b) *Cubul* (hexaedrul) – este poliedrul cu șase fețe pătrate congruente. În figura 8.2 este reprezentat cubul $ABCD_1B_1C_1D_1$, cu fața $ABCD$ situată în planul orizontal de

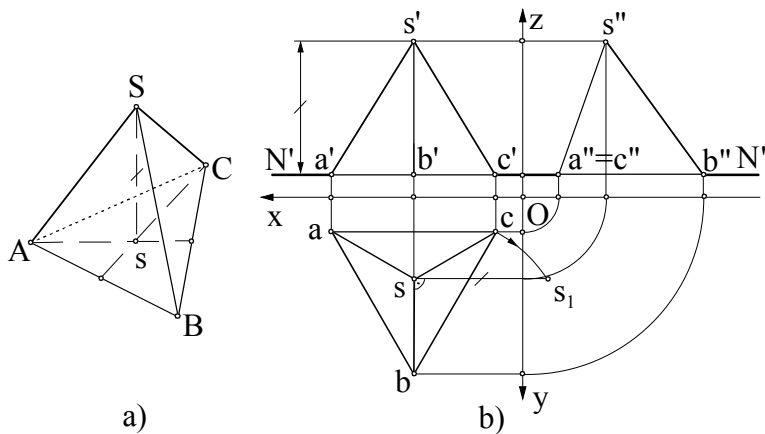


Fig.8.1 Reprezentarea tetraedrului : a) în spațiu ; b) în epură

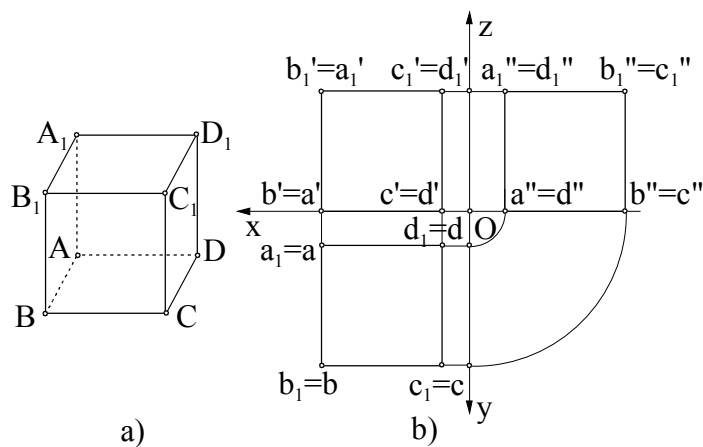


Fig.8.2 Reprezentarea cubului: a) în spațiu ; b) în epură

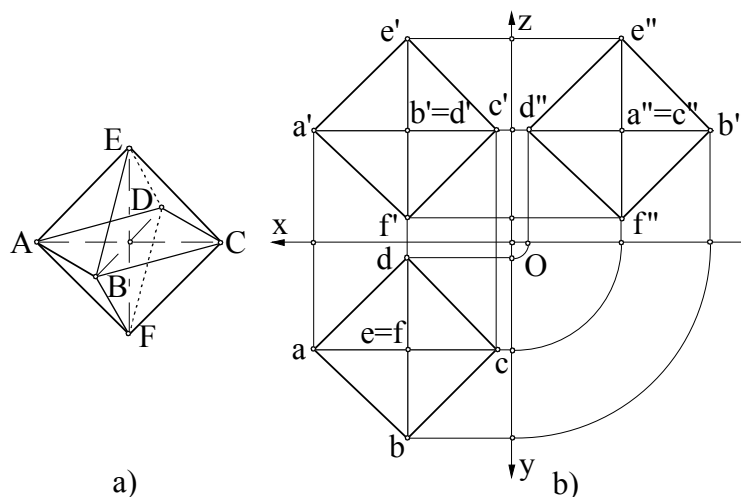


Fig.8.3 Reprezentarea octaedrului : a) în spațiu; b) în epură

DC paralelă cu axa Ox . Apoi se construiește o piramidă având ca bază acest pentagon, vârful în punctul K și muchiile egale cu laturile pentagonului.

proiecție. Toate muchiile cubului, astfel poziționat, sunt drepte perpendiculare pe unul din planele de proiecție, iar fețele lui sunt situate în plane paralele cu planele de proiecție.

c) *Octaedrul* – este poliedrul cu opt fețe triunghiuri echilaterale congruente (fig.8.3, a). Diagonalele AC , BD și EF sunt egale, iar în poziția prezentată în epura din

figura 8.3, b, acestea sunt perpendiculare pe planele de proiecție.

Pătratele $ABCD$, $BEDF$ și $AECF$ sunt plane de simetrie și se numesc pătrate diagonale.

d) *Dodecaedrul* – este poliedrul cu douăsprezece fețe pentagoane congruente (fig.8.4, a). Fețele dodecaedrului sunt paralele două câte două.

La reprezentarea în epură a dodecaedrului, pentagonul inferior $PQSRT$ și pentago-

nul superior $ABCDE$ s-au considerat cuprinse în plane de nivel paralele și situate astfel încât una din laturi, SR , respectiv CD , să fie paralele cu axa Ox (fronto-orizontal).

e) *Icosaedrul* – este poliedrul care are douăzeci de fețe triunghiuri echilaterale congruente (fig.8.5, a). Epura icosaedrului se construiește pornind de la proiecția orizontală, înscriind într-un cerc (de rază r), cuprins într-un plan de nivel, pentagonul $ABCDE$, cu latura

Construcția se repetă cu pentagonul $FGHIJ$, cuprins într-un alt plan de nivel, la o distanță egală cu raza cercului, r . Pe acest pentagon se construiește piramida cu vârful în punctul L și muchiile egale cu latura pentagonului (fig.8.5, a).

Toate poliedrele regulate pot fi obținute din cub prin secționări plane ale acestuia. De asemenea, ele sunt inscriptibile și circumscriptibile sferei.

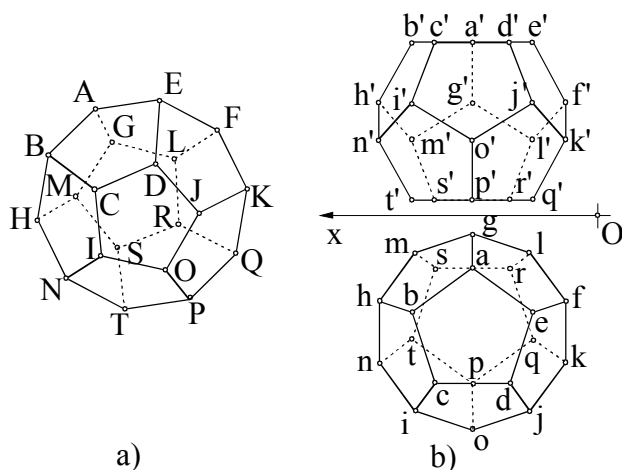


Fig.8.4 Reprezentarea dodecaedrului :
a) în spațiu ; b) în epură

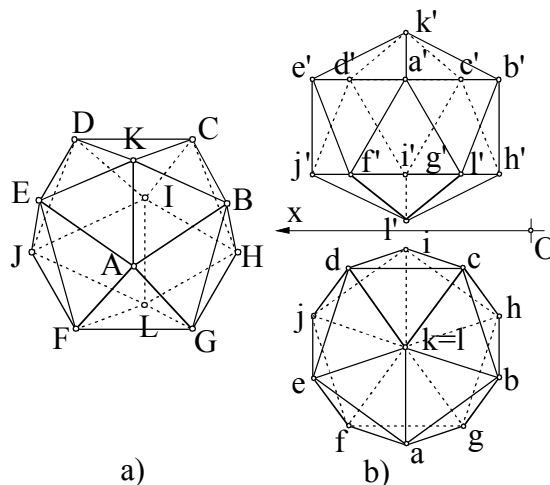


Fig.8.5 Reprezentarea icosaedrului :
a) în spațiu ; b) în epură

8.1.2 Reprezentarea prisme. Punct pe suprafața prismatică

Suprafața prismatică este generată de o *dreaptă mobilă* G , care se sprijină pe un poligon director $[D] \equiv ABC$, fiind paralelă în timpul mișcării cu o dreaptă dată Δ (fig.8.6).

O prismă se obține prin intersecția suprafeței prismatice cu două plane, astfel încât fiecare plan să taie toate muchiile, secțiunile respective purtând numele de *baze*, *inferioară* și *superioară* (fig.8.7, a).

Bazele prisme pot să fie cuprinse în plane oarecare (fig.8.7, a) sau în plane paralele. Se consideră o prismă oblică, a cărei baze sunt în planul orizontal, baza inferioară ABC și într-un plan de nivel $[N]$, baza superioară $A_1B_1C_1$ (fig.8.7, b). Pentru construirea unei astfel de prisme, în epură, sunt necesare coordonatele vârfurilor bazei inferioare, A, B, C și ale unui vârf al bazei superioare, A_1 , spre exemplu. Se trasează baza inferioară ($abc, a'b'c'$) și muchia ($aa_1, a'a_1'$), iar apoi se duc paralele prin vârfurile (b, b') și (c, c') la

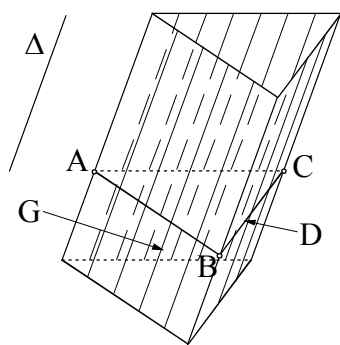


Fig.8.6 Generarea
suprafeței prismatice

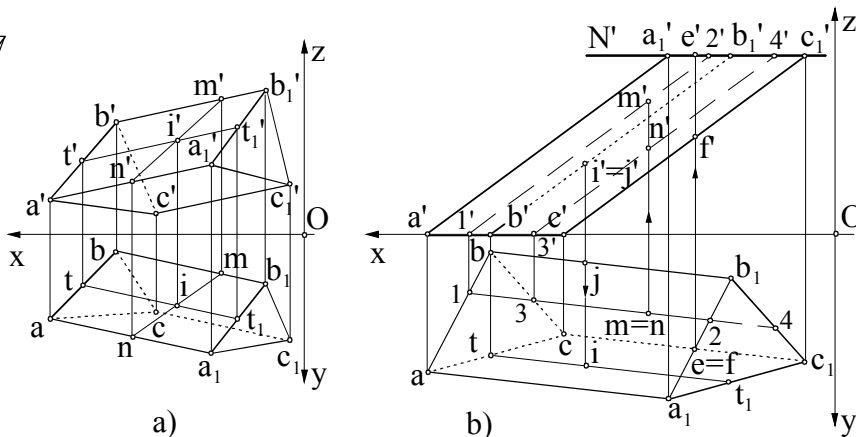


Fig.8.7 Reprezentarea prisme $ABCA_1B_1C_1$ în epură

această muchie, obținându-se celelalte vârfuri ale bazei superioare, (b_1, b_1') , respectiv (c_1, c_1') .

Pentru ca prisma să fie complet reprezentată, se stabilește vizibilitatea muchiilor. Astfel, în proiecția orizontală latura bazei superioare a_1b_1 și muchia cc_1 se intersectează aparent. Aici se suprapun proiecțiile orizontale e și f . Găsind proiecțiile verticale e' și f' se constată că este vizibil punctul E (are cota mai mare decât punctul F), deci implicit în proiecția orizontală latura a_1b_1 este vizibilă, iar muchia cc_1 este invizibilă. Conform criteriilor de vizibilitate și fețele bcc_1b_1 și acc_1a_1 sunt invizibile.

În proiecția verticală se pune problema vizibilității numai pentru muchia $b'b_1'$, celelalte aparținând conturului aparent. Muchia $b'b_1'$ este invizibilă, fiind acoperită de fața $a'c'c_1'a_1'$. Acest lucru se studiază considerând dreapta tt_1 de pe fața acc_1a_1 , paralelă cu muchiile prismei și suprapusă în proiecție verticală peste muchia $b'b_1'$. Analizând depărtările punctelor I , de pe TT_1 și J de pe BB_1 , se constată că punctul I este vizibil în proiecție verticală ($y_I > y_J$), deci fața $a'c'c_1'a_1'$ acoperă muchia $b'b_1'$.

Dacă un punct M de pe suprafața prismei este dat prin proiecția orizontală m , pentru determinarea proiecției verticale se găsesc două poziții, astfel : prin m se trasează două drepte generatoare, paralele cu muchiile, $(12, 1'2')$ pe fața ABB_1A_1 și $(34, 3'4')$ pe fața CBB_1C_1 (care se suprapun parțial, în proiecția orizontală). Se intersectează cele două drepte cu linia de ordine ridicată din proiecția orizontală m și se determină proiecțiile verticale m' și n' (fig.8.7, b).

Observație : Pentru ca un punct să aparțină unei prismе trebuie să fie situat pe o dreaptă ce aparține suprafeței prismatice.

În figura 8.7, a pentru ca punctul $I(i, i')$ să aparțină prismei, poate să fie situat pe o dreaptă oarecare MN , $M \in MN$ sau pe o generatoare paralelă cu muchiile $T T_1$, $M \in T T_1$, ambele aparținând feței ABB_1A_1 .

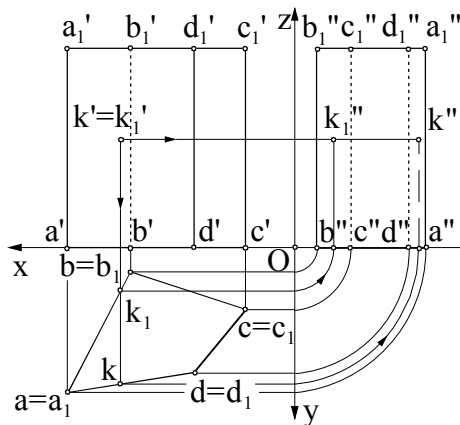


Fig.8.8 Reprezentarea unei prismei drepte

Dacă muchiile prismei sunt perpendiculare pe baze, se obține o *prismă dreaptă* (fig.8.8), iar când aceasta are bazele poligoane regulate, prisma este *regulată*.

Având în vedere că în epură fețele unei prismе se suprapun total sau parțial, în funcție de felul acestora, unei proiecții verticale a unui punct, îi pot corespunde două proiecții orizontale și laterale, adică avem două puncte pe două fețe diferite ale prismei, ale căror proiecții verticale se suprapun. *Exemplu :* în figura 8.8, $K_1 \in [ABB_1A_1]$ și $K \in [ADD_1A_1]$.

8.1.3 Reprezentarea piramidei. Punct pe suprafața piramidală

Suprafața piramidală este generată de o dreaptă generatoare G , care trece printr-un punct fix S și se sprijină pe un poligon director $[D] \equiv ABC$ (fig.8.9).

Piramida este un corp limitat de o suprafață piramidală și un plan care intersectează toate muchiile piramidei. Secțiunea plană rezultată se numește *bază*.

Piramida $SABCD$ din figura 8.10 este definită de baza $ABCD$ (plan oarecare) și vârful S . Pentru reprezentarea în epură a piramidei, se reprezintă punctele care o definesc, A, B, C și S , se unesc proiecțiile orizontale și verticale cu linii continue sau întrerupte, după cum acestea sunt vizibile sau invizibile.

Un punct care aparține suprafeței piramidale $SABCD$, trebuie să fie situat pe o dreaptă generatoare a piramidei. *Exemplu* : punctul $J(j, j')$ aparține piramidei, deoarece este situat pe generatoarea $SI(s, i, s', i')$, de pe fața SAB : $j \in si$ și $j' \in s'i'$.

În figura 8.11 este reprezentată o piramidă oblică, având baza $ABCD$ în planul orizontal de proiecție. Astfel, aceasta se proiectează pe planul orizontal în adevărată mărime, iar pe planul vertical și lateral, suprapusă pe axa Ox .

Pentru studiul vizibilității, în proiecția orizontală se consideră dreptele disjuncte SA și BC cu punctul de concurență aparentă $i \equiv j$. Este vizibil punctul i , deci muchia sa , deoarece punctul I are cota mai mare decât

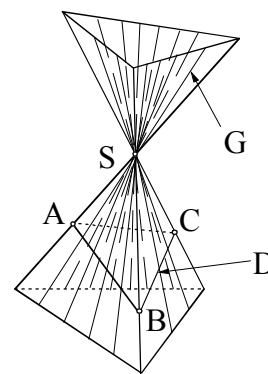


Fig. 8.9 Generarea suprafeței piramidale

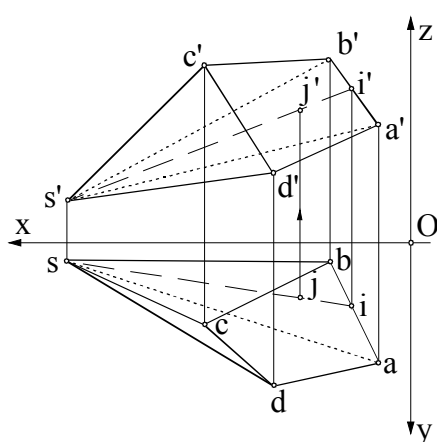


Fig. 8.10 Reprezentarea piramidei $SABCD$

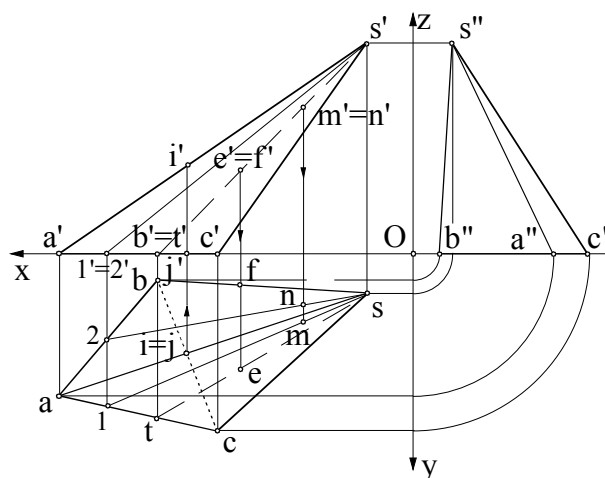


Fig. 8.11 Reprezentarea unei piramide oblice $SABC$ cu baza în planul $[H]$

punctul J de pe latura bazei BC . În proiecția verticală, muchia $s'b'$ este invizibilă, fiind acoperită de fața $s'a'c'$, care are depărtarea mai mare decât muchia SB . Acest lucru se studiază considerând dreapta generatoare st de pe fața sac , suprapusă în proiecție verticală peste muchia $s'b'$. Analizând depărtările punctelor E , de pe ST și F de pe SB , se constată că punctul E este vizibil în proiecție verticală ($y_E > y_F$), deci fața $s'a'c'$ acoperă muchia $s'b'$.

În proiecția laterală toate muchiile sunt vizibile. Se analizează vizibilitatea numai pentru muchia $s''a''$, care este vizibilă, având abscisa mai mare decât fața $s''b''c''$.

Dacă un punct M de pe suprafața prisme este dat prin proiecția verticală m' , pentru determinarea proiecției orizontale se găsesc două poziții, astfel : prin m' se trasează două drepte generatoare, care se suprapun : $s'l' \equiv s'2'$. Se determină corespondentele lor în proiecția orizontală, $s1$ pe fața sac și $s2$ pe fața sab . Se intersectează cele două drepte cu linia de ordine coborâtă din proiecția verticală m' și se determină proiecțiile orizontale m și n (fig. 8.11). Rezultă că, deoarece proiecțiile fețelor piramidei pe planele de proiecție

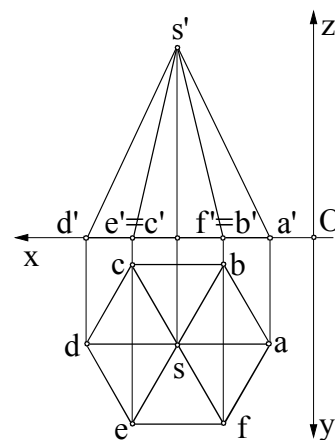


Fig. 8.12 Piramidă dreaptă, regulată

se suprapun, total sau parțial, unei proiecții verticale a unui punct ce aparține piramidei, îi pot corespunde două proiecții orizontale și laterale. Raționamentul este analog și pentru o proiecție orizontală a unui punct.

Dacă baza piramidei este un poligon regulat, piramida este *regulată*, iar dacă înălțimea coincide cu axa, piramida este *dreaptă* (fig.8.12).

8.2 Secțiuni plane în poliedre

Poligonul rezultat ca urmare a secționării unui poliedru cu un plan se numește *secțiune plană*.

În epură, poligonul de secțiune poate fi determinat prin :

- *vârfurile poligonului* – determinate ca puncte de intersecție dintre muchiile poliedrului și planul de secțiune;
- *laturile poligonului* – determinate ca drepte de intersecție dintre fețele poliedrului și planul de secțiune.

a) Secțiune plană într-o prismă oblică

Fie prisma oblică triunghiulară $ABCA_1B_1C_1$ și planul oarecare $[P]$, care o secționează (fig.8.13). Pentru determinarea triunghiului de secțiune, se găsesc punctele în care muchiile prisme intersectează planul $[P]$, folosind plane proiectante duse prin muchii. Planul de capăt $[Q]$, trasat prin muchia AA_1 , intersectează planul $[P]$ după dreapta $HV(hv, h'v')$, iar aceasta la rândul ei, intersectează muchia AA_1 în punctul $R(r, r')$, $aa_1 \cap hv = r$. Punctul R se determină prin proiecția sa orizontală. În mod similar, se determină și punctele $S(s, s')$ și $T(t, t')$, unde muchiile BB_1 și CC_1 intersectează planul $[P]$. Rezultă astfel, triunghiul RST , ca secțiune plană determinată de planul oarecare în prisma oblică.

La reprezentarea triunghiului de secțiune s-a respectat vizibilitatea prisme : laturile triunghiului sunt vizibile sau invizibile, după cum sunt situate pe fețe vizibile sau invizibile ale prisme.

La secționarea unei prisme cu un plan proiectant, poligonului de secțiune se obține direct, fără a utiliza plane auxiliare, suprapus într-una din proiecții pe urma acestuia.

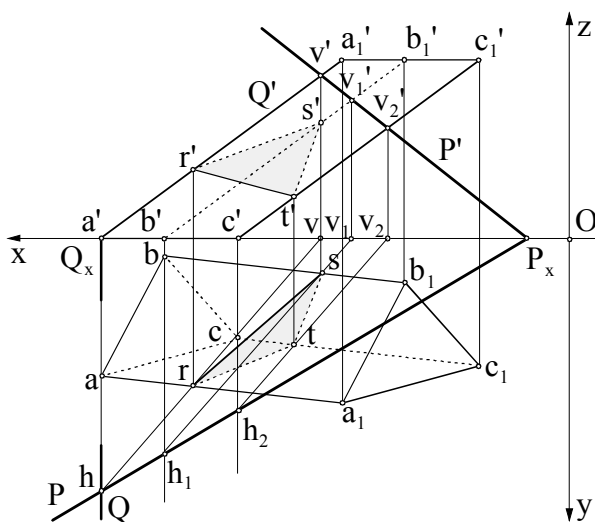


Fig.8.13 Secționarea unei prisme oblice cu un plan oarecare

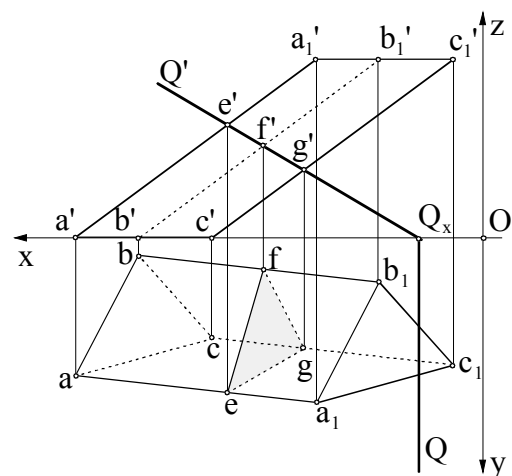


Fig.8.14 Secționarea unei prisme oblice cu un plan de capăt

În figura 8.14 prisma oblică $ABCA_1B_1C_1$ s-a secționat cu planul de capăt $[Q]$. Triunghiul de secțiune EFG se obține în primul rând în proiecția verticală, intersectând muchiile prisme cu urma verticală Q' : $a'a_1' \cap Q' = e'$, $b'b_1' \cap Q' = f'$, $c'c_1' \cap Q' = g'$, iar apoi coborând linii de ordine și în proiecția orizontală, $e \in aa_1$, $f \in bb_1$, $g \in cc_1$.

b) *Secțiune plană într-o prismă dreaptă*

Se consideră prisma dreaptă din figura 8.15, secționată cu un plan oarecare $[P]$. Polygonul de secțiune $RSTU$ se cunoaște în proiecția orizontală, fiind suprapus peste proiecția orizontală a bazei prisme, $rstu \equiv abcd$. Pentru determinarea proiecției verticale a polygonului, se ține seama de faptul că fiecare punct care îl determină este cuprins în planul $[P]$ și aparține totodată și unei muchii a prisme. Astfel, prin proiecția orizontală t se trasează o orizontală a planului $[P]$, $tv \parallel P$, și se determină urma verticală v' a ei. Prin v' se duce proiecția verticală a orizontalei, paralelă cu axa Ox , iar la intersecția cu muchia $c'c_1'$ se obține proiecția verticală t' . Se procedează în mod analog și pentru obținerea celorlalte proiecții verticale ale punctelor ce determină polygonul de secțiune.

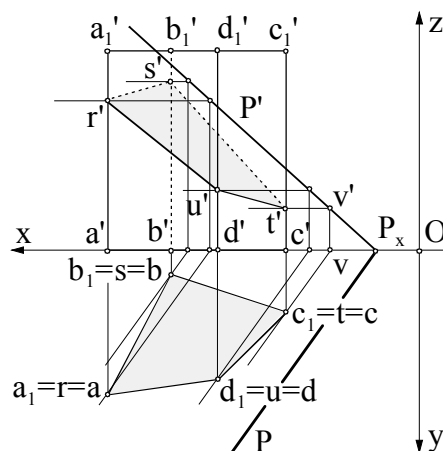


Fig. 8.15 Secționarea unei prisme drepte cu un plan oarecare

c) *Secțiune plană într-o piramidă oblică*

Prin secționarea unei piramide cu un plan, care întâlnește toate muchiile se obține un *trunchi de piramidă*.

Pentru aflarea polygonului de secțiune determinat de planul oarecare $[P]$ în piramida oblică $SABC$, se procedează ca și la prismă, găsind punctele în care muchiile piramidei intersectează planul $[P]$, utilizând plane auxiliare proiectante de capăt (fig. 8.16).

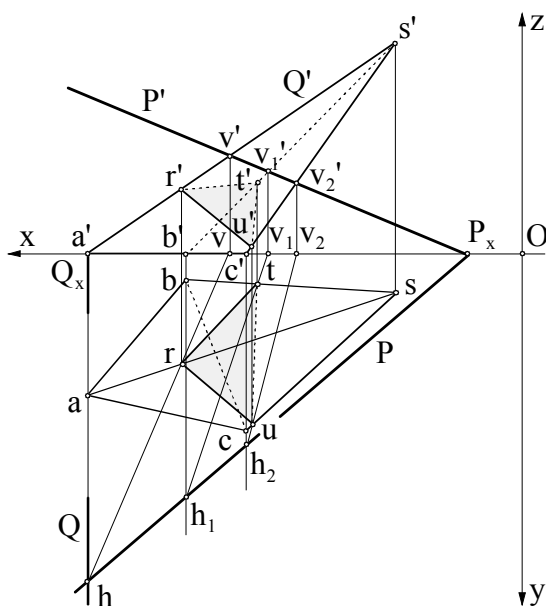


Fig. 8.16 Secționarea unei piramide oblice cu un plan oarecare

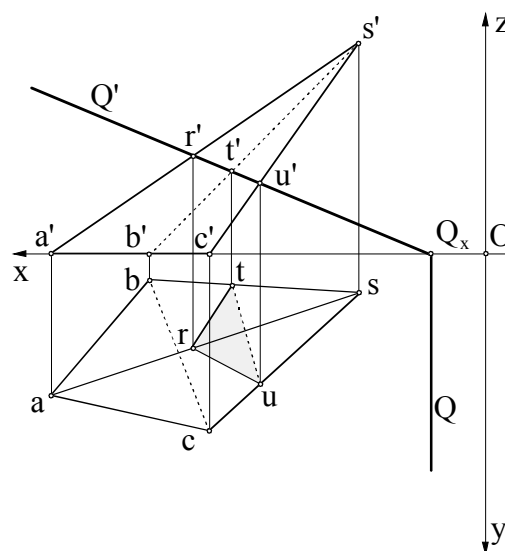


Fig. 8.17 Secționarea unei piramide oblice cu un plan de capăt

Planul $[Q]$ dus prin muchia SA intersectează planul $[P]$ după dreapta $HV(hv, h'v')$, care la rândul ei, intersectează muchia SA în punctul $R(r, r')$, un vârf al poligonului de secțiune. La fel se procedează și cu celelalte muchii, obținându-se succesiv vârfurile $T(t, t')$ și $U(u, u')$.

Dacă planul de secțiune este un plan proiectant, construcția se simplifică, deoarece proiecția poligonului de secțiune pe planul de proiecție, față de care este proiectant planul secant, se suprapune pe urma acestuia.

Piramida oblică $SABC$, din figura 8.17, s-a intersectat cu planul de capăt $[Q]$, rezultând triunghiul RTU , cu proiecția verticală $r't'u'$ suprapusă pe urma verticală Q' .

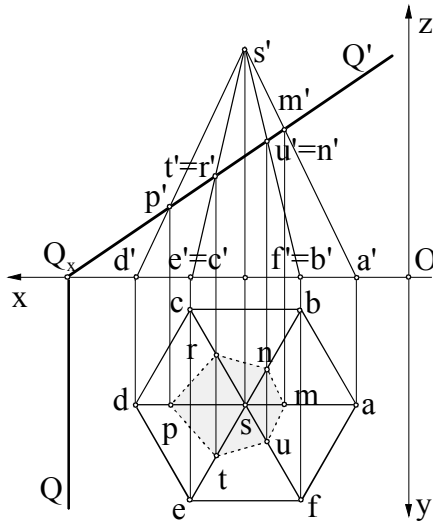


Fig. 8.18 Secționarea unei piramide drepte cu un plan de capăt

d) Secțiune plană într-o piramidă dreaptă

Fie piramida dreaptă $SAB CDEF$ și planul de capăt secant $[Q]$. Poligonul de secțiune rezultă direct în proiecția verticală, $m'n'r'p't'u'$, suprapusă pe urma verticală Q' a planului de secțiune. Pentru determinarea proiecției orizontale a acestuia se duc linii de ordine din proiecțiile verticale până la intersecția cu muchiile piramidei în proiecția orizontală, determinând punctele m, n, r, p, t și u (fig. 8.18).

8.3 Intersecția unui poliedru cu o dreaptă

O dreaptă intersectează un poliedru convex în cel mult două puncte, situate pe două fețe distincte ale lui. Pentru determinarea lor se duce un plan secant prin dreaptă, care intersectează poliedrul după o secțiune plană, iar punctele de intersecție dintre conturul acestei secțiuni și dreaptă, sunt punctele căutate.

Planul secant dus prin dreaptă poate determina o secțiune transversală în poliedru, caz în care planul este proiectant față de unul din planele de proiecție, sau o secțiune longitudinală.

8.3.1 Intersecția unei prisme cu o dreaptă

a) Metoda secțiunilor transversale

Se consideră prisma triunghiulară oblică $ABCA_1B_1C_1$ și dreapta D (fig. 8.19, a). Pentru determinarea punctelor de intersecție dintre dreaptă și prismă, prin dreaptă se duce un plan de capăt $[Q]$ care determină secțiunea plană triunghiulară $I23$, secțiune care este intersectată de dreapta D în punctele α și β , punctele de intersecție cu prisma, căutate.

În epură (fig. 8.19, b), urma verticală Q' a planului de capăt este suprapusă cu proiecția verticală d' a drepte, $P' \equiv d'$. Triunghiul de secțiune se determină, prima dată, în proiecție verticală, $I'2'3'$, fiind dat de punctele de intersecție dintre urma Q' și muchiile prisme, iar apoi ducând linii de ordine se găsesc și proiecțiile orizontale $1, 2$ și 3 . Proiecția orizontală d a drepte intersectează triunghiul de secțiune în punctele α și β , $d \cap I2 = \alpha$ și $d \cap 23 = \beta$. Ridicând linii de ordine din α și β , până pe proiecția verticală d' , se determină punctele α' și β' , proiecțiile verticale ale punctelor de intersecție cu prisma.

Studiind poziția punctelor de intersecție pe fețele prisme, se determină vizibilitatea dreptei : în proiecția orizontală porțiunea de la α la muchia bb_1 este invizibilă, iar în cea verticală, porțiunea $1'3'$ este invizibilă, fiind acoperită de fața acc_1a_1 .

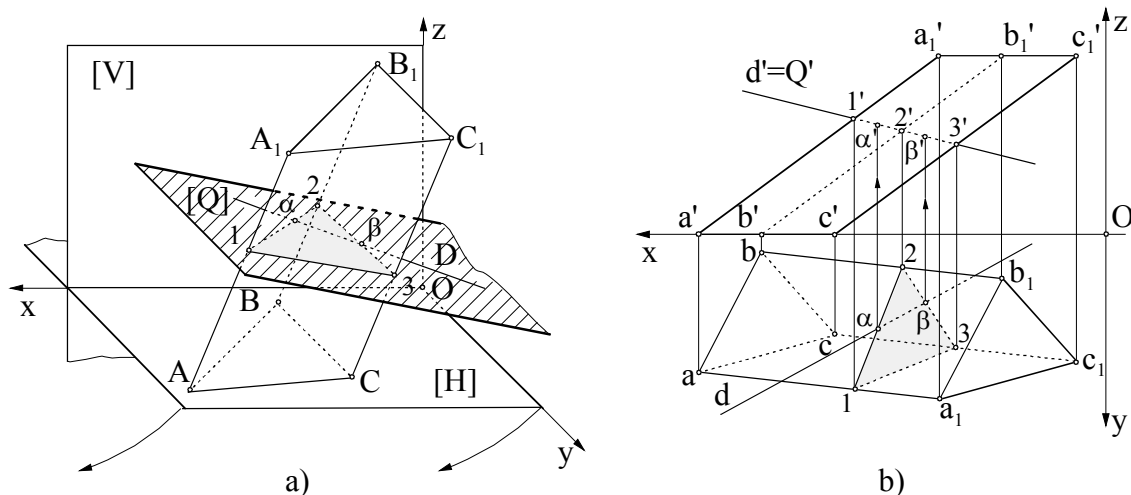


Fig.8.19 Reprezentarea intersecției unei prisme cu o dreaptă – metoda secțiunilor transversale : a) în spațiu ; b) în epură

b) Metoda secțiunilor longitudinale

Fie prisma triunghiulară oblică $ABCA_1B_1C_1$, cu baza ABC în planul orizontal de proiecție și dreapta D , care o intersectează în două puncte (fig. 8.20, a). Pentru aflarea acestor puncte se folosește un plan auxiliar secant $[P]$, dus prin dreapta D , care determină în prismă o secțiune longitudinală $[1234]$, paralelă cu muchiile prisme. Planul secant $[P]$ este determinat de dreapta dată și o dreaptă Δ , concurentă cu aceasta și paralelă cu muchiile prisme.

În epură (fig.8.20, b), se trasează dreapta $\Delta(\delta, \delta')$ paralelă cu muchiile prisme și concurentă cu dreapta $D(d, d')$ în punctul $M(m, m')$. Se determină urmele orizontale $H(h, h')$ și $H_1(h_1, h_1')$ ale celor două drepte și se unesc proiecțiile orizontale ale urmelor, obținându-se urma orizontală a planului secant, $P = h \cup h_1$. Paralelogramul de secțiune $[1234]$ are o latură egală cu segmentul 12 , după care urma orizontală P taie baza inferioară

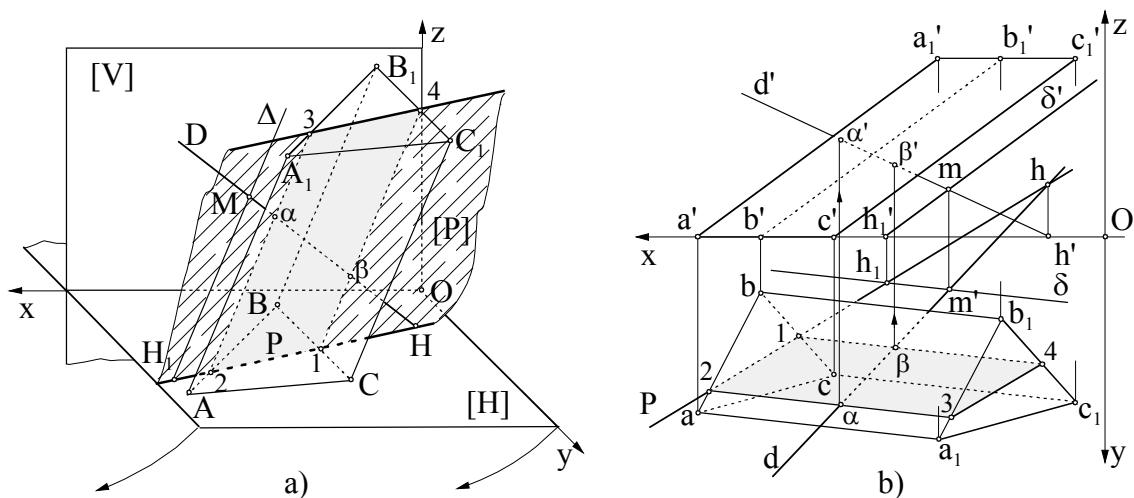


Fig.8.20 Reprezentarea intersecției unei prisme cu o dreaptă – metoda secțiunilor longitudinale - a) în spațiu ; b) în epură

a prisme, iar alte două, paralelele trasate prin 1 și 2 la muchiile prisme.

Proiecția orizontală d a dreptei intersectează paralelogramul de secțiune în punctele α și β . Pentru determinarea proiecțiilor verticale, α' și β' ale punctelor de intersecție, se ridică linii de ordine din α și β până pe proiecția verticală d' a dreptei, sau se determină proiecția verticală a paralelogramului de secțiune și se intersectează aceasta cu proiecția d' .

În proiecția orizontală vizibilitatea dreptei D se determină observând că punctul de intersecție α este pe o față vizibilă, iar punctul β pe o față invizibilă a prisme, deci proiecția d este invizibilă din punctul α până la muchia bb_1 . În proiecția verticală, d' este invizibilă de la muchia aa_1 la muchia cc_1 , fiind acoperită de fața $a'c'c_1'a_1'$.

8.3.2 Intersecția unei piramide cu o dreaptă

a) Metoda secțiunilor transversale

În figura 8.21, a se dă o piramidă oblică $SABC$ și o dreaptă $D(d, d')$. Pentru determinarea punctelor în care dreapta intersectează piramida, se utilizează un plan de capăt $[Q]$, care se duce prin dreapta D . Acesta determină secțiunea plană triunghiulară 123 , care intersectează dreapta D în punctele α și β , punctele de intersecție dintre dreaptă și piramidă.

În epură (fig.8.21, b), urma verticală a planului de capăt este suprapusă cu proiecția verticală a dreptei de intersecție: $Q' = d'$. Se găsește proiecția verticală a poligonului de secțiune, $1'2'3'$, determinată de punctele în care urma Q' intersectează muchiile piramidei. Ducând liniile de ordine corespunzătoare se determină proiecția orizontală a poligonului de secțiune, 123 , care este intersectată de proiecția orizontală d a dreptei în punctele α și β . Se ridică linii de ordine până pe proiecția verticală d' a dreptei și se determină și proiecțiile verticale α' și β' , ale punctelor de intersecție.

Dreapta D este invizibilă în proiecție orizontală între α și muchia bs , iar în proiecția verticală între α' și $3'$.

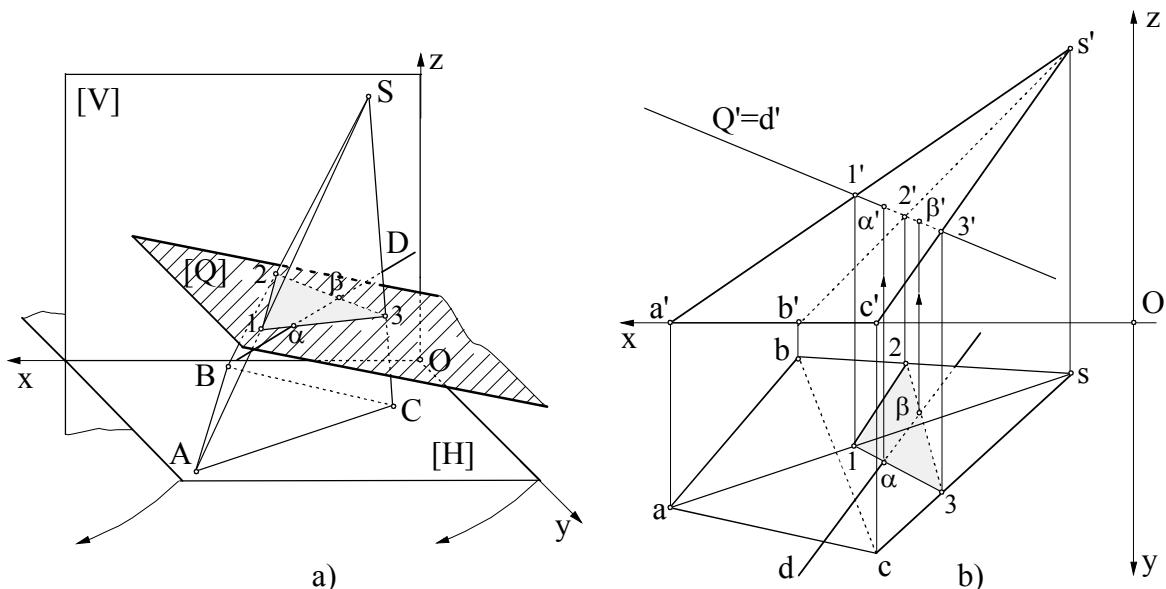


Fig.8.21 Reprezentarea intersecției unei piramide cu o dreaptă – metoda secțiunilor transversale : a) în spațiu ; b) în epură

b) *Metoda secțiunilor longitudinale*

Pentru determinarea punctelor în care dreapta $D(d, d')$ intersectează piramida triunghiulară oblică $SABC$, se folosește un plan auxiliar $[P]$, determinat de dreapta D și vârful piramidei S (fig 8.22, a). Acest plan determină în piramidă secțiunea longitudinală SI_2 , care este intersectată de dreapta D în punctele α și β .

În epură (fig.8.22, b), se determină urma orizontală P a planului $[P]$, ducând prin vârful $S(s, s')$ o dreaptă $\Delta(\delta, \delta')$ concurentă cu dreapta D în punctul $M(m, m')$ și determinând urmele orizontale $H(h, h')$ și $H_1(h_1, h_1')$: $P = h \cup h_1$. Urmă orizontală P intersectează proiecția orizontală a bazei piramidei abc după segmentul I_2 , generând în piramidă secțiunea longitudinală I_2s . Intersecția proiecției orizontale d a dreptei cu proiecțiile secțiunii longitudinale determină proiecțiile α și β . Ridicând linii de ordine se obțin și proiecțiile verticale α' și β' pentru punctele de intersecție dintre dreapta D și piramidă.

Dacă la trasarea laturilor secțiunii longitudinale se respectă vizibilitatea fețelor pe care se găsesc, se determină ușor și vizibilitatea dreptei de intersecție. Proiecția verticală d' a dreptei este invizibilă între punctul α' și muchia $c's'$, iar proiecția orizontală d este invizibilă de la punctul α până la muchia bs .

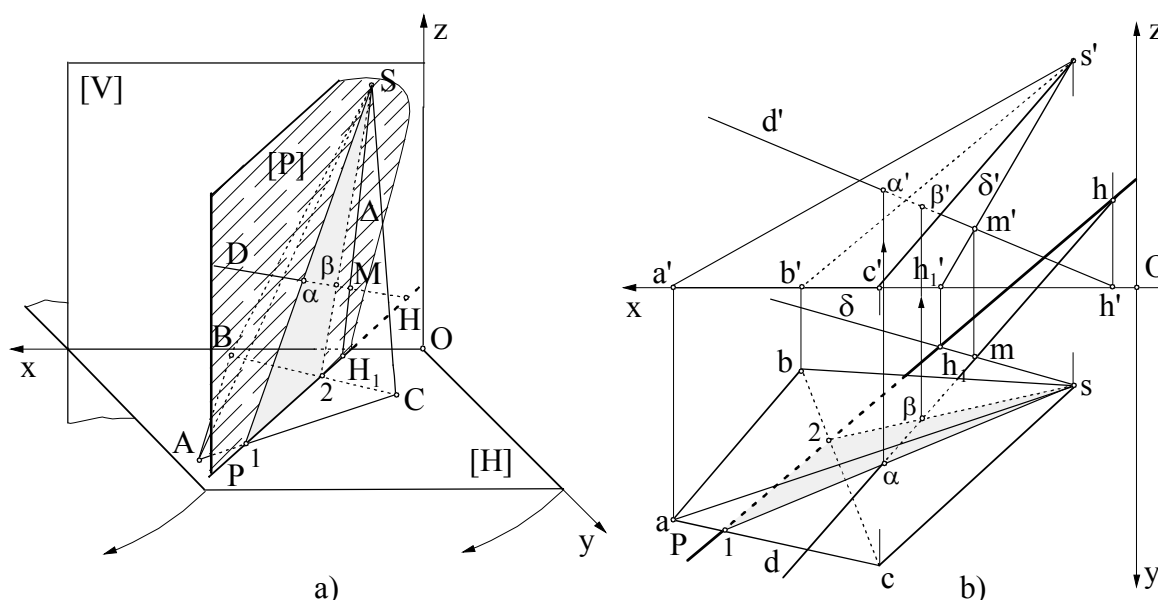


Fig.8.22 Reprezentarea intersecției unei piramide cu o dreaptă – metoda secțiunilor longitudinale - a) în spațiu ; b) în epură

8.4 Desfășurarea suprafețelor poliedrale

Cunoașterea regulilor de construcție a desfășuratelor unor suprafețe poliedrale este necesară în activitatea tehnică, având în vedere că unele piese componente ale mașinilor și instalațiilor se obțin prin înfășurarea din tablă.

Desfășurarea unei suprafețe poliedrale se face prin aducerea fețelor suprafeței într-un singur plan. Astfel, la desfășurarea unui poliedru se obține o figură geometrică plană, dată de alăturarea succesivă a poligoanelor fețelor acestuia.

Pentru a construi grafic desfășurata unui poliedru trebuie să se cunoască forma și dimensiunile fețelor laterale cât și bazele care o delimitează.

8.4.1 Desfășurarea prisme

Pentru desfășurarea suprafeței laterale a unei prisme trebuie să se cunoască *adevărată mărime a unei secțiuni plane normale* a ei (perpendiculară pe muchii), astfel încât să se poată efectua desfășurata în linie dreaptă a poligonului de secțiune și *mărimea reală a muchiilor*.

a) Desfășurarea prisme drepte

Se consideră prisma dreaptă cu baza $ABCD$ un patrulater oarecare (fig.8.23, a). Pentru determinarea desfășuratei prisme, se desfășoară conturul unei secțiuni normale, care în acest caz este chiar baza prisme. Astfel, segmentul $A_0B_0C_0D_0A_0$ este egal cu perimetrul patrulaterului de bază $ABCD$, $A_0B_0 = ab$, $B_0C_0 = bc$, $C_0D_0 = cd$, $D_0A_0 = da$ (fig.8.23, b).

Având în vedere că direcțiile muchiilor sunt perpendiculare pe baza prisme, în punctele A_0, B_0, C_0, D_0 se ridică perpendiculare egale cu proiecțiile muchiilor din proiecția verticală, unde acestea se proiectează în adevărată mărime. Pentru construirea bazei pe desfășurată, se împarte patrulaterul $ABCD$ în două triunghiuri, ABC și ADB , folosind diagonala BD și se construiesc aceste triunghiuri alăturate, pornind de la latura B_0C_0 existentă pe desfășurata suprafeței laterale.

Dacă prisma este secționată cu un plan $[P]$ (plan de capăt) se obține *trunchiul de prismă* $ABCD A_1B_1C_1D_1$ (fig.8.23, a). Desfășurata trunchiului de prismă s-a reprezentat suprapus peste desfășurata prisme, adică s-a mai reprezentat desfășurata secțiunii plane $A_1B_1C_1D_1$, prin punctele $A_{10}, B_{10}, C_{10}, D_{10}$, măsurând muchiile trunchiului de prismă din proiecția verticală: $A_0A_{10} = a'a_1'$, $B_0B_{10} = b'b_1'$, $C_0C_{10} = c'c_1'$, $D_0D_{10} = d'd_1'$ (fig.8.23, b). Pentru construirea pe desfășurată a bazei superioare a trunchiului de prismă, este necesar să se determine adevărata mărime a secțiunii plane $A_1B_1C_1D_1$. Astfel, s-a făcut rabaterea planului secant $[P]$, împreună cu secțiunea, pe planul vertical de proiecție și s-a determinat patrulaterul $a_{10}b_{10}c_{10}d_{10}$. Pe desfășurată acest patrulater s-a reprezentat plecând de la latura $C_{10}D_{10}$ și folosind diagonalele $a_{10}c_{10}$ și $b_{10}d_{10}$, cu ajutorul cărora s-au determinat punctele A_{10} și B_{10} .

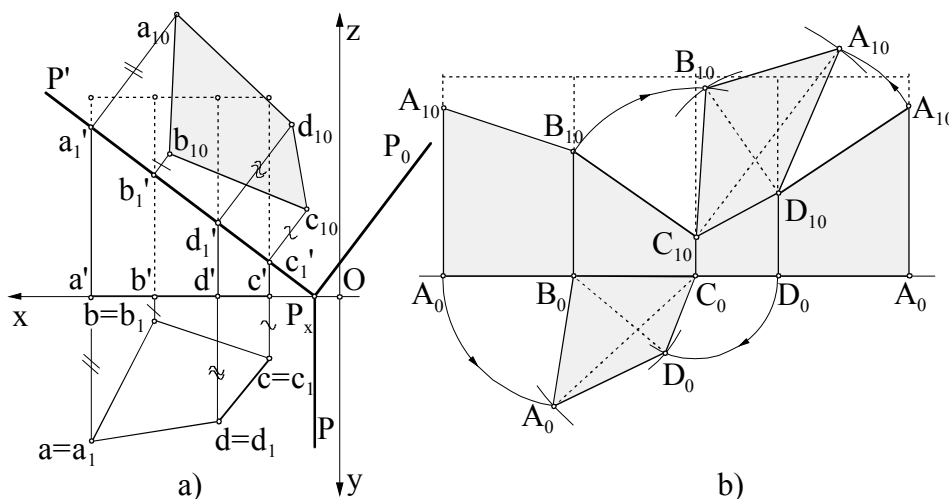


Fig.8.23 Desfășurarea prisme drepte :

a) epura prisme drepte ; b) desfășurata prisme drepte și a trunchiului de prismă

b) Desfășurarea prismei oblice

Fie prisma triunghiulară oblică $ABCDEF$, cu baza ABC în planul orizontal de proiecție (fig.8.24, a). Muchiile prisme sunt drepte oarecare, iar pentru a desfășura suprafața prismatică dată este necesar, în primul rând, să se cunoască adevărata mărime a muchiilor. Se poate aplica una dintre metodele Geometriei descriptive, cea mai practică în acest caz fiind schimbarea planului de proiecție. Astfel, se alege un nou plan vertical de proiecție $[V_1]$, paralel cu muchiile prisme (muchii devin frontale), ceea ce în epură se materializează prin trasarea liniei de pământ O_1x_1 paralelă cu proiecțiile orizontale ale muchiilor : $O_1x_1 \parallel ad \parallel be \parallel cf$. Baza inferioară rămâne în planul orizontal de proiecție, deci noua proiecție verticală a bazei inferioare, $a_1'b_1'c_1'$ este pe axa O_1x_1 , iar noua bază superioară rămâne în planul de nivel de cotă z , proiectându-se pe noul plan vertical în $d_1'e_1'f_1'$. În noua proiecție verticală muchiile prisme sunt în adevărată mărime : $a_1'd_1' = AD$, $b_1'e_1' = BE$, $c_1'f_1' = CF$.

Al doilea pas în desfășurarea prisme este determinarea unei secțiuni normale în prismă. Pentru aceasta se duce un plan normal pe muchii, $[P] : P \perp ad, P' \perp a_1'd_1'$, se determină secțiunea plană $MNQ(mnq, m'n'q')$ și apoi prin rabatere pe planul orizontal de proiecție, se determină adevărata mărime a acestei secțiuni, $m_0n_0q_0$. Secționarea prisme cu planul $[P]$ se poate face oriunde pe lungimea muchiilor, deoarece secțiunea normală are aceeași mărime. Adevărata mărime a secțiunii normale este necesară pentru a cunoaște lungimile laturilor poligonului care o determină și pentru a putea reprezenta apoi, transformată prin desfășurare a acesteia.

Pe o linie dreaptă se măsoară lungimea laturilor triunghiului de secțiune și se obțin punctele $M_0, N_0, Q_0, M_0, M_0N_0 = m_0n_0, N_0Q_0 = m_0n_0, Q_0M_0 = q_0m_0$. Având în vedere că muchiile sunt normale pe secțiune, vor fi normale și în desfășurată pe transformată prin desfășurare a secțiunii. În punctele M_0, N_0, Q_0 și M_0 se duc perpendiculare pe care se măsoară lungimile muchiilor, de o parte și de alta a secțiunii normale: $A_0M_0 = a_1'm'$, $D_0M_0 = d_1'm'$, $B_0N_0 = b_1'n'$, $E_0N_0 = e_1'n'$, $C_0Q_0 = c_1'q'$, $F_0Q_0 = f_1'q'$.

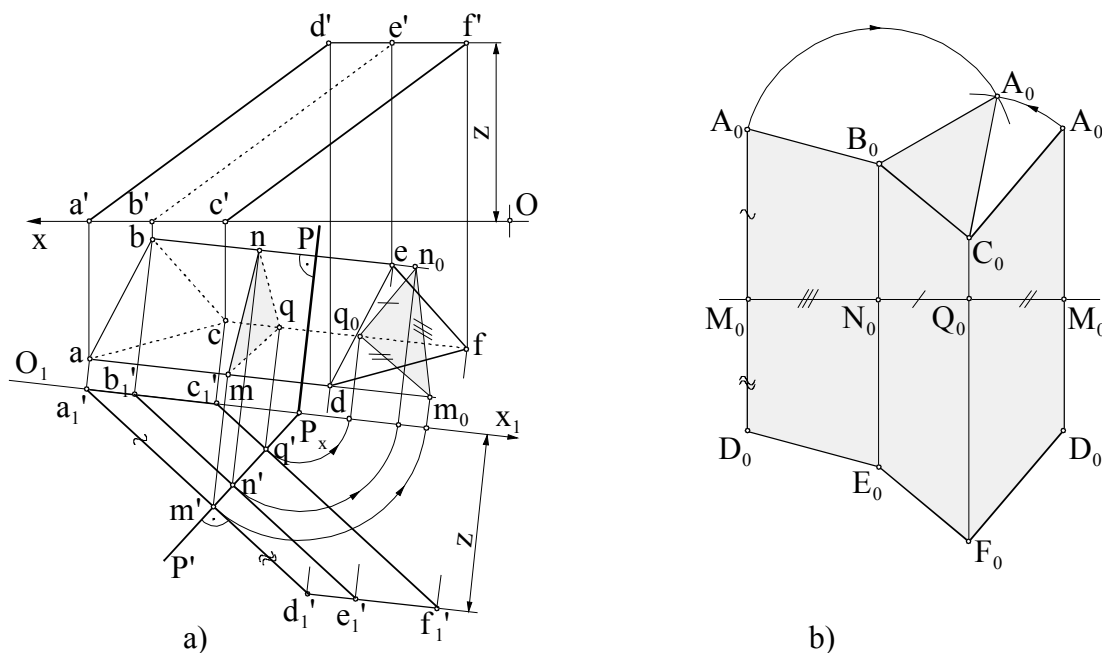


Fig. 8.24 Desfășurarea prisme oblice :
a) epura prisme oblice ; b) desfășurata prisme oblice

Unind punctele A_0, B_0, C_0, A_0 și D_0, E_0, F_0, D_0 se obține desfășurata suprafeței prismatice, care se completează cu cele două baze. În figura 8.24, *b* s-a reprezentat numai baza inferioară $A_0B_0C_0$, pornind de la latura B_0C_0 .

c) Desfășurarea prismei oblice cu muchiile frontale

Pentru trasarea desfășuratei prisme din figura 8.25, *a* se urmărește metodologia de la punctul b), cu observația că muchiile sunt în adevărată mărime în proiecția verticală, fiind drepte frontale. Astfel, se duce un plan secant $[P]$ (plan de capăt), perpendicular pe muchii, se determină secțiunea normală $[KLMN]$, se rabate planul $[P]$, împreună cu secțiunea, pe planul orizontal de proiecție și se determină adevărata mărime a acestei secțiuni, $[k_0l_0m_0n_0]$.

Transformata prin desfășurare a acestei secțiuni este segmentul $K_0L_0M_0N_0$ (perimetrul secțiunii normale rabătute). Prin aceste puncte se duc perpendiculare și se măsoară pe ele lungimile corespunzătoare muchiilor, ca în figura 8.25, *b*. Acestea se iau din proiecția verticală : $A_{10}K_0 = a_1'k'$, $K_0A_0 = k'a'$, $B_{10}L_0 = b_1'l'$, $L_0B_0 = l'b'$,

Desfășurata suprafeței laterale a prisme se completează cu bazele prisme, acestea construindu-se cu ajutorul diagonalelor $B_0D_0 = bd$ și $C_0A_0 = ca$ și a laturilor, care se cunosc din proiecția orizontală.

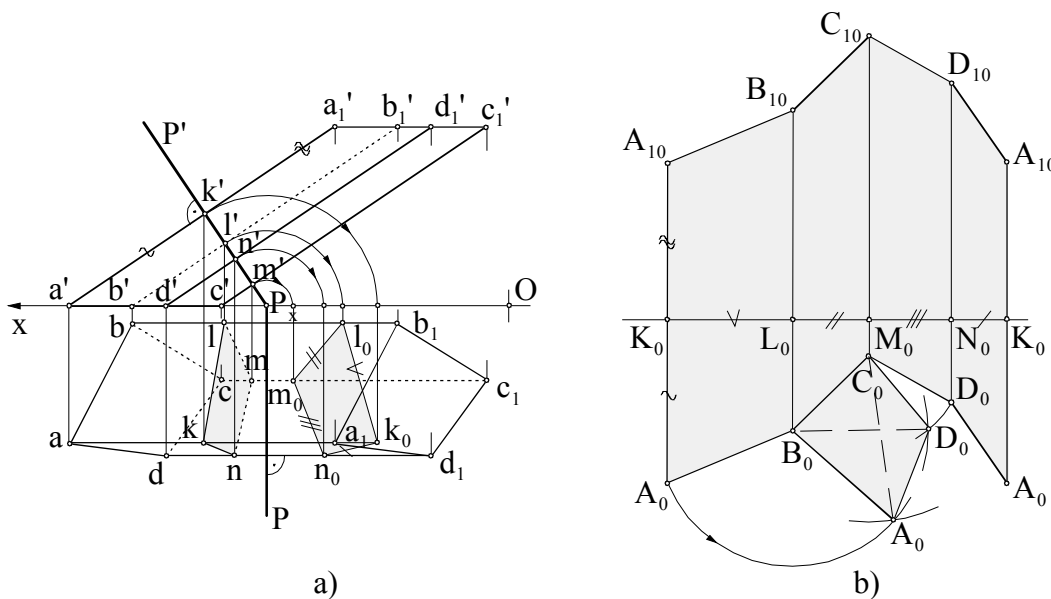


Fig.8.25 Desfășurarea prisme oblice cu muchiile frontale :
a) epura prisme oblice frontale ; b) desfășurata prisme oblice frontale

Observație : Pentru determinarea desfășuratei unei prisme se parcurg următoarele etape :

- 1 - se determină adevărata mărime a muchiilor prisme (dacă este necesar);
- 2 - se secționează prisma cu un plan normal pe muchii;
- 3 - se determină adevărata mărime a secțiunii normale;
- 4 - pe o linie dreaptă se trasează desfășurata secțiunii normale;
- 5 - se măsoară pe perpendiculare trasate prin punctele de pe desfășurata secțiunii normale, lungimile muchiilor;
- 6 - se unesc extremitățile muchiilor și se reprezintă bazele, alăturat unei fețe de pe desfășurată.

8.4.2 Desfășurarea piramidei

Pentru desfășurata laterală a unei piramide trebuie să se cunoască adevărata mărime a muchiilor care o determină, cât și a laturilor bazei.

a) Desfășurarea piramidei oblice

Fie piramida oblică $SABC$, cu baza ABC în planul orizontal de proiecție (fig.8.26, a). Laturile patrulaterului de bază sunt în adevărată mărime în proiecția orizontală, iar pentru determinarea adevăratei mărimi a muchiilor, se aplică una din metodele Geometriei descriptive.

În acest caz, cea mai practică este metoda rotației. Se aplică o rotație de nivel, tuturor muchiilor piramidei, în jurul unei axe verticale, $Z(z, z')$, care trece prin vârful $S(s, s')$ al piramidei. Muchiile se transformă în drepte frontale și se proiectează în adevărată mărime pe planul vertical de proiecție, $s_1'a_1' = SA$, $s_1'b_1' = SB$ și $s_1'c_1' = SC$.

Pentru a realiza desfășurata piramidei se poate trasa, undeva în afara epurei, o dreaptă pe care să se măsoare un segment egal cu una dintre muchii și să se înceapă cu construirea feței care conține acea muchie, ca în figura 8.26, b. Aici desfășurata a început de la fața SAB . S-a trasat segmentul de dreaptă $S_0A_0 = s_1'a_1'$. Pentru determinarea punctului B_0 , s-au trasat două arce de cerc : unul cu centrul în S_0 , de rază $s_1'b_1' = S_0B_0$ și altul cu centrul în A_0 , de rază $ab = A_0B_0$. La intersecția lor s-a determinat vârful B_0 și astfel, fața $S_0A_0B_0$ a desfășuratei piramidei. Celelalte fețe se construiesc similar și alăturate primei fețe.

Desfășurata suprafeței laterale se completează prin construcția triunghiului de bază, alăturat laturii B_0C_0 .

Dacă în practică se cere localizarea pe desfășurată a punctului $M(m, m')$, situat pe muchia SA și a punctului $K(k, k')$, situat pe fața SAC , se procedează astfel :

- pentru punctul M : se găsește proiecția m_1' pe muchia rotită, prin translatarea proiecției verticale m' paralel cu axa Ox , până pe muchia $s_1'a_1'$, se măsoară lungimea segmentului $s_1'm_1'$ și se transpune pe desfășurată pe muchia S_0A_0 , $s_1'm_1' = S_0M_0$;

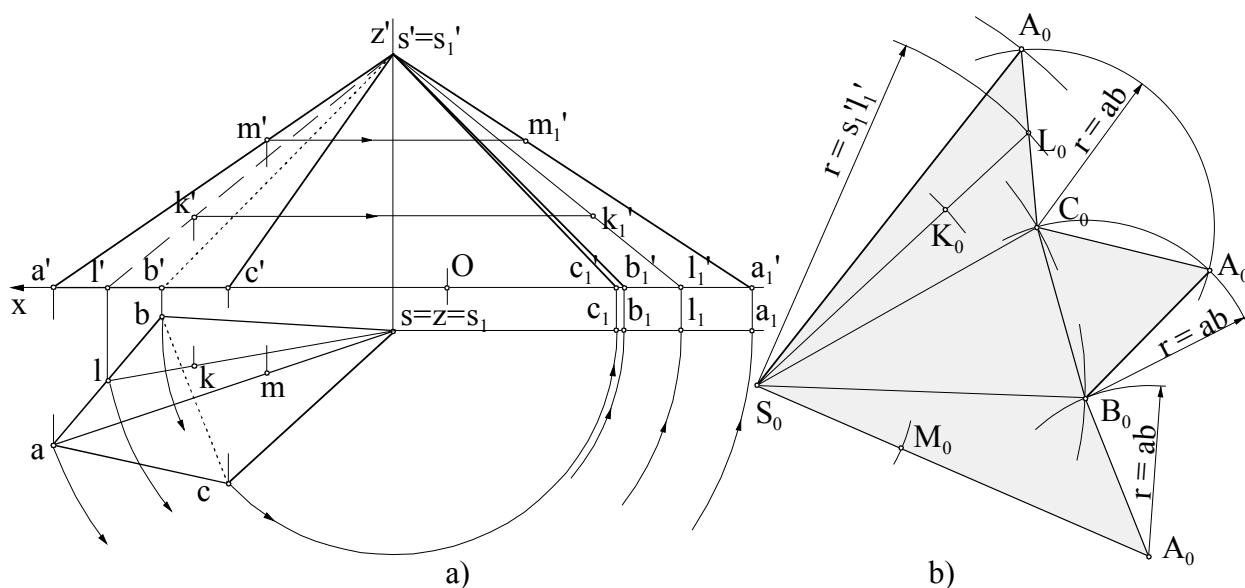


Fig.8.26 Desfășurarea piramidei triunghiulare oblice :

a) epura piramidei triunghiulare oblice ; b) desfășurata piramidei triunghiulare oblice

- pentru punctul K : se determină dreapta generatoare $SL(sl, s'l')$ pe care este situat punctul K , $k \in sl$, $k' \in s'l'$, se efectuează rotația de nivel pentru această dreaptă, se determină proiecția k_l' pe generatoarea rotită, se găsește poziția generatoarei pe desfășurată, S_0L_0 și apoi se marchează pe ea punctul K_0 , luând segmentul $s_l'k_l' = S_0K_0$.

b) *Desfășurarea unei piramide drepte și a trunchiului de piramidă*

Se consideră piramida dreaptă $SABCDEF$ din figura 8.27, cu baza $ABCDEF$ un poligon cu șase laturi, situat în planul orizontal de proiecție cu centrul în s . Prin secționarea piramidei cu un plan $[Q]$ se obține trunchiul de piramidă cuprins între bază și secțiunea plană determinată de planul $[Q]$. Pentru desfășurarea trunchiului de piramidă este necesar să se facă, mai întâi, desfășurarea piramidei căreia îi aparține.

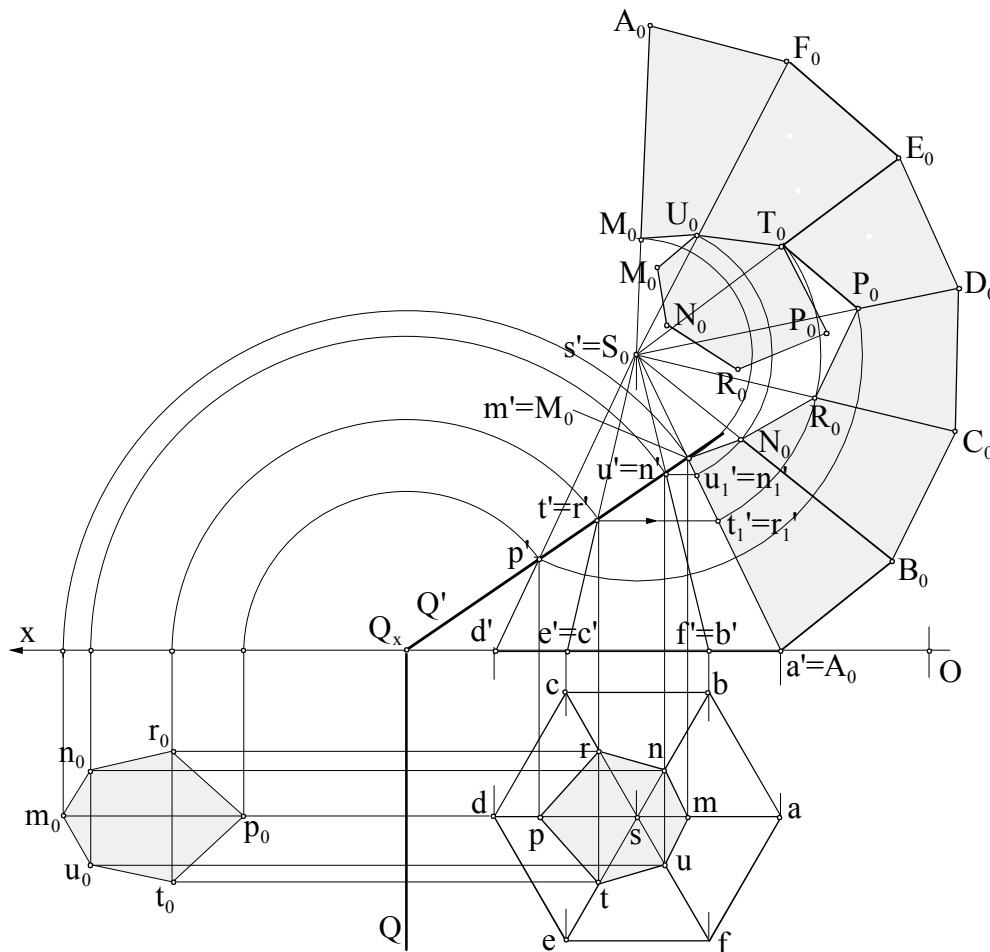


Fig.8.27 Desfășurarea piramidei drepte și a trunchiului de piramidă

Desfășurata piramidei se face pornind de la muchia SA , cu observația că aceasta este în poziția de frontală, deci în proiecția verticală se proiectează în adevărată mărime, $s'a' = SA$ și că toate celelalte muchii au lungimea egală cu aceasta. Astfel, cunoscând lungimea muchiei și luând din proiecția orizontală lungimile laturilor bazei, s-au construit cele șase triunghiuri alăturate care alcătuiesc desfășurata piramidei.

Poligonul de secțiune făcut de planul $[Q]$ în piramidă, $[MNRPTU]$, este determinat direct, prin intersecția dintre urma verticală Q' și muchiile piramidei. Desfășurarea trunchiului de piramidă se obține prin trasarea pe desfășurata piramidei a transformatei prin desfășurare a poligonului de secțiune $M_0N_0R_0P_0T_0U_0M_0$, care este o linie frântă.

Aceasta se poate face în două moduri :

1 - prin rotirea fiecărei muchii, împreună cu punctele secțiunii, în poziția de frontală (suprapusă peste muchia SA) și transpunerea punctelor secțiunii pe muchiile corespunzătoare de pe desfășurată ; *Exemplu* : proiecția $t' \equiv r'$ se translatează paralel cu axa Ox până pe proiecția verticală $s'a'$ a generatoarei frontale, în punctul $t_1' \equiv$, de unde se rotește până pe generatoarea de pe desfășurată căruia îi aparține : t_1' pe generatoarea S_0E_0 , în T_0 , respectiv r_1' pe generatoarea S_0C_0 , în R_0 ;

2 – prin determinarea adevăratei mărimi a secțiunii (rabatere pe planul orizontal de proiecție, a planului de capăt $[Q]$, împreună cu secțiunea), $[m_0n_0r_0p_0t_0u_0]$, măsurarea fiecărei laturi a secțiunii și transpunerea ei pe desfășurată, plecând din M_0 cu segmentul $M_0N_0 = m_0n_0$, $N_0R_0 = n_0r_0, \dots$, $U_0M_0 = u_0m_0$.

Desfășurata trunchiului de piramidă se completează cu baza superioară, a cărei mărime se cunoaște după rabaterea pe planul orizontal de proiecție și dacă este necesar și cu baza inferioară, a cărei mărime este cea din proiecția orizontală.

Observație : Desfășurarea unei piramide se face urmărind pașii de mai jos :

- 1 – se determină adevărata mărime a muchiilor piramidei;
- 2 – se construiesc, în ordine, triunghiurile care alcătuiesc fețele laterale ale piramidei;
- 3 – se construiește baza piramidei, alăturat uneia din fețe.

8.5 Intersecția suprafețelor poliedrale

Din intersecția a două suprafețe poliedrale rezultă, în general, unul sau două poligoane. Acestea pot fi plane sau strâmbe în spațiu.

Poligoanele de intersecție se pot determina printr-una din metodele de mai jos :

- 1 – determinarea punctelor poligonului, ca puncte în care muchiile unui poliedru intersectează fețele celui alt poliedru și reciproc;
- 2 – determinarea laturilor poligonului, ca segmente de drepte rezultate din intersecția reciprocă a fețelor celor două poliedre între ele.

Se utilizează de obicei prima metodă, reducând problema intersecției a două poliedre la intersecția unei drepte cu un poliedru, problemă tratată în subcapitolul 8.3. Determinarea punctelor liniei de intersecție se face cu ajutorul unor plane auxiliare, convenabil alese și poartă numele de *metoda planelor secante comune*.

În rezolvarea intersecției dintre două poliedre, în epură, se respectă următoarele etape:

- 1) determinarea planelor auxiliare secante utile;
- 2) determinarea punctelor de intersecție dintre muchiile unui poliedru și fețele celui alt;
- 3) determinarea poligonului de intersecție prin unirea într-o anumită ordine a punctelor de intersecție aflate;
- 4) determinarea vizibilității laturilor poligonului de intersecție.

Construcția planelor auxiliare secante depinde de natura suprafețelor intersectate. La intersecția poliedrelor se întâlnesc următoarele cazuri :

- a) intersecția a două piramide – planele auxiliare secante trec prin vârful piramidelor;
- b) intersecția a două prisme - planele auxiliare secante sunt paralele cu muchiile prismelor;
- c) intersecția unei piramide cu o prismă - planele auxiliare secante trec prin vârful piramidei și sunt paralele cu muchiile prisme.

Ordinea de unire a punctelor poligonului de intersecție se face utilizând *metoda mobilului* sau *metoda diagramelor desfășuratelor convenționale* după cum se va vedea în exemplele următoare.

Vizibilitatea laturilor poligonului de intersecție se determină odată cu unirea punctelor de intersecție dintre muchii și fețe, având în vedere că o latură a poligonului este vizibilă dacă rezultă din intersecția a două fețe vizibile ale poliedrelor, în caz contrar latura este invizibilă.

Dacă poligonul de intersecție este un poligon continuu, intersecția se numește *rupere*, iar dacă în urma intersecției rezultă două poligoane, intersecția este o *pătrundere*.

Natura intersecției dintre două poliedre poate fi stabilită încă de la trasarea planelor secante comune. Astfel, odată stabilită direcția lor, când bazele celor două poliedre sunt în același plan (planul orizontal), se duc urmele orizontale ale planelor prin vârfurile unei baze, acestea intersectând cealaltă bază în două puncte (fig.8.28). Sunt utile numai acele plane care intersectează ambele baze, cel puțin într-un punct. Primul și ultimul dintre acestea sunt numite *plane limită*, iar cu ajutorul lor se stabilește tipul de intersecție dintre poliedre.

Dacă planele limită separă porțiuni nestrăbătute de planele secante pe ambele baze ale poliedrelor, intersecția este o *rupere*, poligonul de intersecție fiind o linie frântă continuă, iar dacă aceste porțiuni sunt pe aceeași bază, intersecția este o *pătrundere*, poligonul de intersecție despărțindu-se în două, unul la intrarea și altul la ieșirea unuia dintre poliedre din celălalt. În figura 8.28, *a*, urmele orizontale ale planelor limită sunt P_q și P_c , porțiunile separate de acestea sunt cele hașurate - intersecția este o *rupere*, iar în figura 8.28, *b*, urmele orizontale ale planelor limită sunt P_b și P_c , intersecția fiind o *pătrundere*.

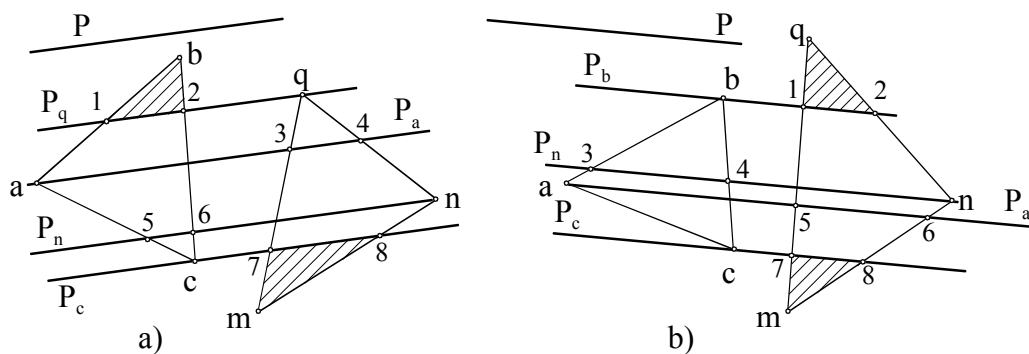


Fig.8.28 Stabilirea tipului de intersecție dintre poliedre : a) rupere ; b) pătrundere

8.5.1 Intersecția a două piramide

Fie piramidele triunghiulare oblice, S_1MNP și S_2ABC , cu bazele în planul orizontal de proiecție (fig.8.29).

Pentru determinarea poligonului de intersecție dintre cele două piramide se trasează, în primul rând, planele secante comune. Acestea trebuie să conțină vârfurile celor două piramide și să treacă pe rând prin muchiile acestora. Având în vedere că piramidele au baza în planul orizontal de proiecție, este suficientă determinarea urmelor orizontale ale acestor plane, care vor fi date de urma orizontală h , a dreptei $\Delta(\delta, \delta')$ care unește vârfurile piramidelor și de urmele muchiilor, care sunt însăși vârfurile triunghiurilor bazelor. Planul auxiliar secant, dus prin urma h și printr-un vârf al bazei uneia dintre piramide, determină în cealaltă o secțiune plană longitudinală, de formă triunghiulară, care va fi intersectată cu muchia prin care s-a dus planul, rezultând puncte ale poligonului de intersecție.

Planele secante utile, în acest caz, sunt cele duse prin vârfurile m , c , n și b , iar dintre acestea planele $[P_m]$ și $[P_b]$ sunt plane limită, ele determinând porțiuni nestrăbătute de planele secante pe ambele baze (porțiunile hașurate). Rezultă că intersecția este o *rupere*.

Planul $[P_m]$ dus prin muchia din m intersectează piramida S_2ABC după triunghiul $(Is_22, I's_2'2')$, iar acesta la rândul lui este intersectat de muchia MS_1 în punctele $M_1(m_1, m_1')$ și $M_2(m_2, m_2')$. Aceste puncte sunt punctele în care muchia MS_1 înțeapă fețele piramidei S_2ABC . În mod analog, se determină punctele $C_3(c_3, c_3')$, $C_4(c_4, c_4')$ și respectiv $B_7(b_7, b_7')$, $B_8(b_8, b_8')$, unde muchiile CS_2 , respectiv BS_2 înțeapă fețele piramidei S_1MNP și de asemenea, punctele $N_5(n_5, n_5')$, $N_6(n_6, n_6')$ unde muchia NS_1 înțeapă fețele piramidei S_2ABC .

Pentru stabilirea ordinii de unire a punctelor de intersecție obținute mai sus se aplică una din cele două metode :

- *metoda mobilului* : se consideră un punct mobil care se deplasează pe poligonul de intersecție din spațiu, ocupând consecutiv pozițiile M_1 , C_3 , B_7 , M_2 , N_6 , B_8 , N_5 , C_4 și M_1

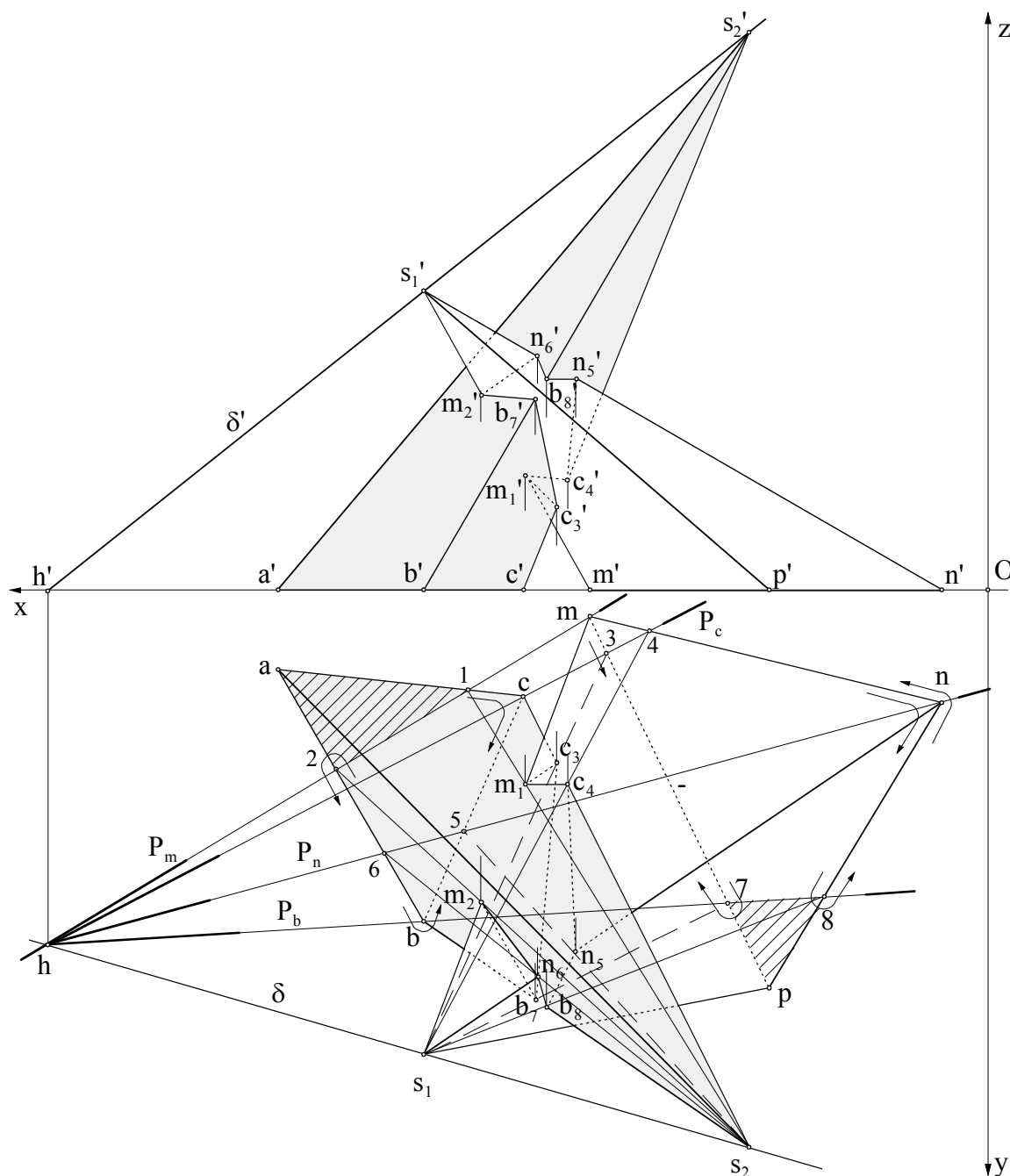


Fig.8.29 Intersecția a două piramide oblice

parcurgând astfel întreg poligonul. Dacă se proiectează, paralel cu muchiile piramidelor, respectiv cu fețele acestora, fiecare poziție ocupată de punctul mobil în spațiu, pe cele două baze, se obțin punctele $m, 3, 7, 3, m, 4, n, 8, n, 4, m$, pe baza mnp , respectiv punctele $1, c, b, 6, 2, 6, b, 5, c, 1$, pe baza abc . Adică, în timp ce punctul mobil parcurge poligonul de intersecție, proiecțiile lui parcurg cele două baze, de două ori fiecare porțiune, fără a străbate și zona hașurată. Între pozițiile punctului mobil și proiecțiile sale pe baze se creează o legătură biunivocă.

Metoda mobilului utilizată pentru unirea punctelor de intersecție se bazează pe principiul invers : pornind de la proiecțiile punctului mobil din spațiu pe cele două baze, proiecții situate pe aceeași urmă a unui plan auxiliar secant, se determină punctele din spațiu. Pentru urmărirea ușoară a regulii mobilului se întocmește tabelul 8.1, în care se înscriu punctele corespunzătoare în ordinea de parcurgere pe cele două baze, cât și punctele poligonului de intersecție.

Dacă se pornește de la planul limită $[P_m]$, proiecția mobilului pe baza MNP , în planul orizontal, pleacă din punctul m (spre stânga sau spre dreapta), iar pe baza ABC din punctul 1 sau 2 ; s-a ales punctul 1 . Acestor două puncte le corespund, în spațiu, punctul $M_1(m_1, m_1')$. Proiecțiile mobilului se deplasează pe cele două baze în sensul arătat de săgeți, întâlnind în continuare planul secant $[P_c]$ în punctul c , pe baza abc , și în punctul 3 , pe baza mnp , generând punctul $C_3(c_3, c_3')$ în spațiu. Punctul M_1 se unește cu punctul C_3 , formând o latură a poligonului de intersecție. Parcurgând în continuare bazele, proiecțiile mobilului întâlnesc planul secant $[P_n]$ în punctul 5 , pe baza abc și într-un punct notat cu liniuță (-), pe baza mnp , deoarece nu generează punct în spațiu.

Planul limită $[P_b]$ este întâlnit de proiecțiile mobilului în punctul 7 pe baza mnp și în punctul b pe baza abc , rezultând punctul $B_7(b_7, b_7')$, care se unește cu punctul C_3 . Proiecția mobilului pe baza mnp se întoarce spre punctul m , iar proiecția mobilului de pe baza abc continuă spre punctul 6 .

Ordinea de unire a punctelor, în continuare, poate fi urmărită în tabelul 8.1. Tot aici este stabilită și vizibilitatea laturilor poligonului de intersecție în cele două proiecții, fiind reprezentate cu linie continuă fețele (respectiv laturile bazelor) văzute și cu linie întreruptă fețele nevăzute. Vizibilitatea laturilor poligonului de intersecție se obține pe baza principiului că o latură vizibilă se găsește pe fețe vizibile ale ambelor poliedre, altfel este invizibilă.

În proiecția orizontală se obțin vizibile segmentele : m_2n_6 , n_6b_8 și c_4m_1 , iar în proiecția verticală, segmentele : $c_3'b_7'$, $b_7'm_2'$, $n_6'b_8'$ și $b_8'n_5'$.

Tabelul 8.1

Piramida S_1MNP			m	3	-	7	-	3	m	4	n	8	n	4	m
Piramida S_2ABC			1	c	5	b	6	-	2	-	6	b	5	c	1
Poligonul de intersecție (PI)			m_1	c_3	-	b_7	-	-	m_2	-	n_6	b_8	n_5	c_4	m_1
Vizibilitatea în planul	[H]	Piram. S_1MNP	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		Piram. S_2ABC	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		PI	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	[V]	Piram. S_1MNP	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		Piram. S_2ABC	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		PI	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

- metoda diagramelor desfășuratelor convenționale : se consideră o desfășurare aproximativă a celor două piramide, suprapuse, ducând muchiile paralele și începând cu muchiile care nu participă la intersecție (dacă acestea există) la fiecare piramidă.

În figura 8.30, *a* este reprezentată diagrama pentru proiecția pe planul orizontal de proiecție, începând pentru piramida S_2ABC cu muchia s_2a , iar pentru piramida S_1MNP , cu muchia s_1p . S-a format astfel o rețea de linii paralele suprapuse. Convențional muchiile piramidelor au fost duse paralele, cu toate că ele sunt concurente în vârful piramidelor. Schematic, suprafața dintre două linii consecutive ale rețelei reprezintă o față a piramidei. Se notează cu semnul (+) fețele vizibile, iar cu semnul (-) fețele invizibile din proiecția orizontală a piramidelor. Se pun pe diagramă punctele în care muchiile unei piramide intersectează fețele celeilalte (cu excepția muchiilor s_1p și s_2a). *Exemplu* : muchia s_1n intersectează fața s_2ab în punctul n_6 și fața s_2bc în punctul n_5 .

Unirea punctelor de intersecție se face ținând seama că o latură a poligonului de intersecție rezultă ca intersecția a două fețe, iar din punct de vedere al vizibilității, că linia care unește două puncte de intersecție este vizibilă, dacă fețele din intersecția cărora s-a obținut sunt vizibile.

Diagrama se repetă, cu aceeași structură și pentru proiecția piramidelor pe planul vertical de proiecție (fig.8.30, *b*). Cele două diagrame sunt identice, mai puțin în ce privește vizibilitatea, la cea din figura 8.30, *b* ținându-se seama de vizibilitatea fețelor piramidelor din proiecția verticală.

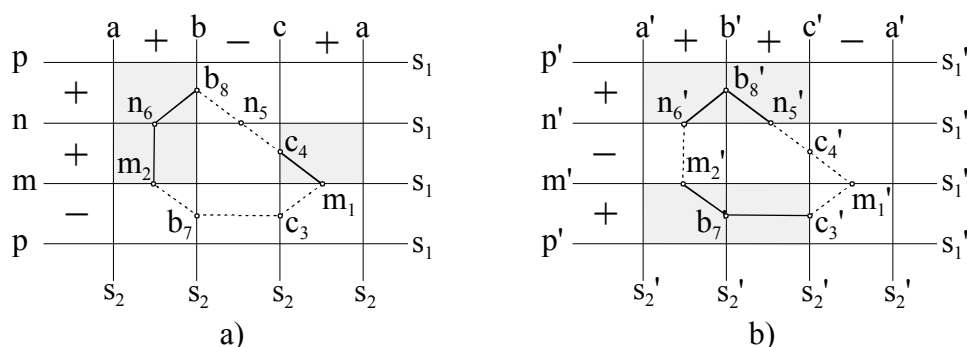


Fig.8.30 Diagrama desfășurăturilor convenționale pentru intersecția prismă - prismă:
a) proiecția pe planul orizontal ; b) proiecția pe planul vertical

8.5.2 Intersecția unei piramide cu o prismă

Fie piramida triunghiulară oblică $SABC$ și prisma triunghiulară oblică $MNQMN_1Q_1$, cu bazele situate în planul orizontal de proiecție (fig.8.31).

Pentru aflarea poligonului de intersecție dintre cele două corpuri, se determină planele secante comune. Acestea trec prin vârful piramidei și sunt paralele cu muchiile prisme. Planele secante sunt determinate de două drepte : dreapta $D(d, d')$, care trece prin vârful piramidei și este paralelă cu muchiile prisme și muchiile fiecărui poliedru în parte. Deoarece poliedrele au bazele în planul orizontal de proiecție, este suficientă determinarea urmelor orizontale ale planelor auxiliare, care sunt date de urma orizontală h a dreptei D și vârfurile triunghiurilor de bază. Aceste plane secante determină în cele două poliedre secțiuni plane longitudinale.

Planele utile sunt planele duse prin urma h și prin vârfurile a , b și c , dintre care planele $[P_c]$ și $[P_a]$ sunt plane limită. Porțiunile nestrăbătute de planele secante (porțiunile hașurate) rămân pe aceeași bază, mng ; rezultă că intersecția celor două corpuri este o *pătrundere* și se obțin două poligoane de intersecție.

Planul auxiliar $[P_c]$ intersectează prisma după un paralelogram cu una din laturi dată de segmentul l_2 , după care urma orizontală P_c intersectează baza mng . Muchia sc

intersectează paralelogramul de secțiune în punctele c_1 și c_2 , puncte ale poligonului de intersecție.

Planul auxiliar $[P_b]$ intersectează baza prisme după segmentul 34 , generând în prismă un paralelogram ca secțiune, ce este intersectat de muchia sb în punctele b_3 și b_4 .

Analog, cu ajutorul planului limită $[P_a]$ se determină punctele a_5 și a_6 , în care muchia sa intersectează prisma.

Odată determinate punctele poligonului de intersecție în proiecție orizontală, cu ajutorul liniilor de ordine corespunzătoare, se găsesc punctele și în proiecția verticală.

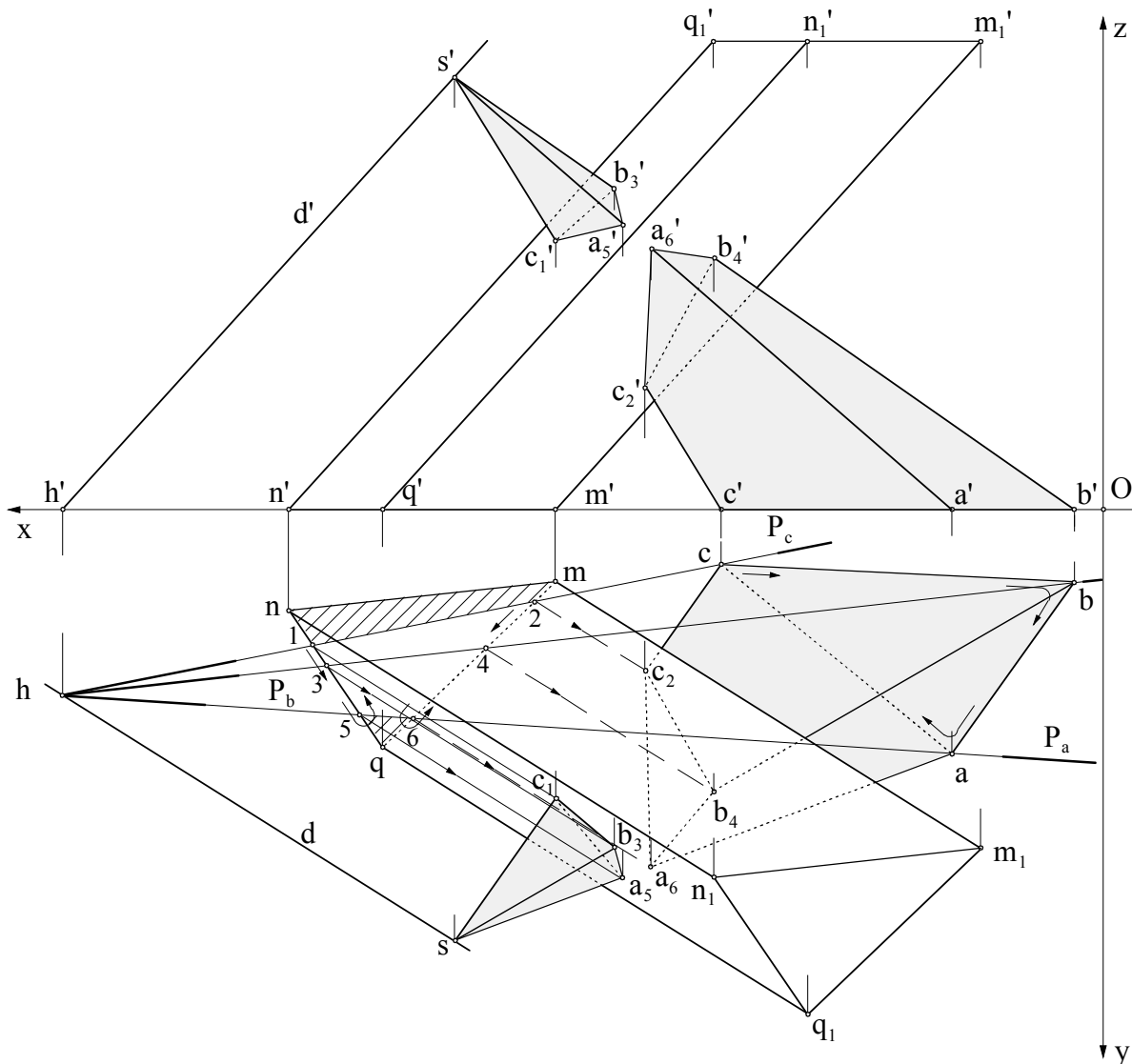


Fig.8.31 Intersecția unei piramide oblice cu o prismă oblică

Pentru aflarea ordinii de unire a punctelor de intersecție se întocmește tabelul 8.2 și se aplică regula mobilului, plecând cu proiecțiile mobilului pe baza abc din punctul c înspre b , iar pe baza $m'nq$ din punctul l înspre 3 . La prima parcurgere a bazei abc , proiecția mobilului de pe baza $m'nq$ se mișcă pe porțiunea $1-3-5-3-1$, neputând trece de planul limită $[P_a]$, iar la a doua parcurgere a bazei abc , proiecția mobilului pe baza $m'nq$ se deplasează pe traseul $2-4-6-4-2$. Se identifică două poligoane de intersecție, $(c_2b_4a_6c_2)$, de intrare și $(c_1b_3a_5c_1)$, de ieșire a piramidei din prismă. În acest tabel se studiază și vizibilitatea fețelor poliedrelor în cele două proiecții și respectiv, vizibilitatea poligoanelor de intersecție. În

proiecția orizontală sunt vizibile segmentele c_1b_3 și a_5b_3 , iar în proiecția verticală, segmentele $b_3'a_5'$ și $a_5'c_1'$, de la un poligon și $b_4'a_6'$, $a_6'c_2'$, de la cel de al doilea poligon.

Tabelul 8.2

Piramida $SABC$		c	b	a	c	c	b	a	c
Prisma $MNQM_1N_1Q_1$		1	3	5	1	2	4	6	2
Poligonul de intersecție (PI)		c_1	b_3	a_5	c_1	c_2	b_4	a_6	c_2
Vizibilitatea în planul	[H]	Piram. $SABC$	—	—	—	—	—	—	—
		Prisma $MNQM_1N_1Q_1$	—	—	—	—	—	—	—
		PI	—	—	—	—	—	—	—
	[V]	Piram. $SABC$	—	—	—	—	—	—	—
		Prisma $MNQM_1N_1Q_1$	—	—	—	—	—	—	—
		PI	—	—	—	—	—	—	—

În figura 8.32, a și b s-a studiat modul de unire al punctelor de intersecție prin metoda diagramelor desfășuratelor convenționale, cât și vizibilitatea laturilor poligonului de intersecție în planul orizontal, respectiv vertical de proiecție.

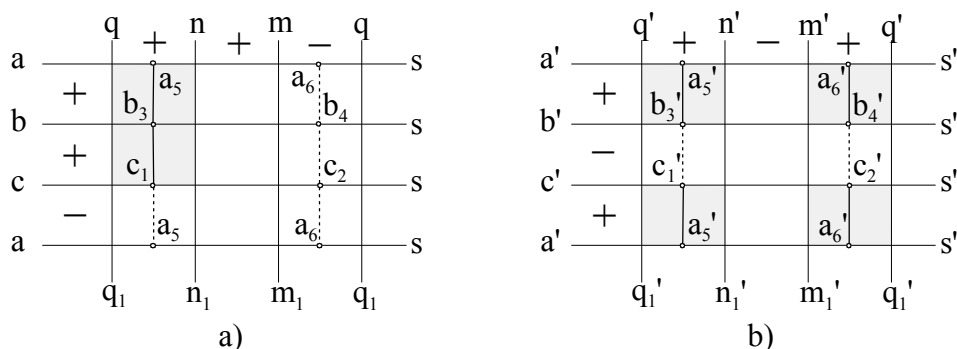


Fig.8.32 Diagrama desfășuratelor convenționale pentru intersecția piramidă - prismă:
a) pentru proiecția pe planul orizontal ; b) pentru proiecția pe planul vertical

8.5.3 Intersecția a două prisme

Se consideră prismele oblice cu bazele ABC și EFG , situate în planul orizontal de proiecție (fig.8.33).

Pentru construirea poligonului de intersecție dintre cele două prisme se determină direcția urmei orizontale a planelor auxiliare, care să fie paralele cu muchiile celor două prisme. Astfel, printr-un punct oarecare $I(i, i')$ din spațiu, se trasează două drepte concurente, paralele cu muchiile prismelor și se determină urmele lor orizontale, $H_1(h_1, h_1')$ și $H_2(h_2, h_2')$. Urma orizontală P a planului auxiliar va trece prin urmele orizontale h_1 și h_2 , ale dreptelor, $P = h_1 \cup h_2$.

Ducând plane secante comune, paralele cu urma orizontală P , prin muchiile prismelor se observă că rămân porțiuni nestrăbătute de acestea pe ambele baze, deci intersecția va fi o *rupere* și se va obține un singur poligon de intersecție.

Planele utile limită sunt $[P_m]$, dus prin vârful m al bazei mnr și $[P_c]$, dus prin vârful c al bazei abc . Planele auxiliare secționează longitudinal prismele, determinând secțiuni de forma unor paralelograme care au una din laturi segmentul de intersecție dintre urmele orizontale ale planelor secante și bazele prismelor. Aceste secțiuni sunt intersectate de muchia prin care s-a dus planul secant în două puncte, puncte care aparțin poligonului de intersecție dintre cele două prisme.

Planul $[P_m]$ dus prin muchia din m determină o secțiune în prisma cu baza abc cu una din laturi, segmentul $l2$, care este intersectată de muchia ml în punctele m_1 și m_2 .

Analog, cu ajutorul planului $[P_b]$ se determină punctele b_3 și b_4 , în care muchia bf intersectează prisma mnr , iar cu ajutorul planului $[P_r]$, punctele r_5 și r_6 , în care muchia rt intersectează fețele prismei mnr .

Planul limită dus prin muchia din c determină o secțiune longitudinală în prisma mnr , care este intersectată în punctele c_7 și c_8 de muchia cg .

Pentru determinarea punctelor poligonului de intersecție în proiecția verticală, fie se găsesc secțiunile plane și în proiecția verticală și se intersectează cu proiecțiile verticale ale muchiilor, fie se trasează liniile de ordine corespunzătoare din proiecția orizontală până pe muchiile respective în proiecția verticală.

Odată determinate cele două proiecții ale punctelor poligonului de intersecție, pentru aflarea ordinii de unire a lor, se completează tabelul 8.3 conform regulii mobilului studiată anterior. Proiecțiile mobilului pe cele două baze pleacă de la punctele determinate pe cele două baze de planul limită P_c . Astfel, pe baza abc se pleacă din punctul c , iar pe

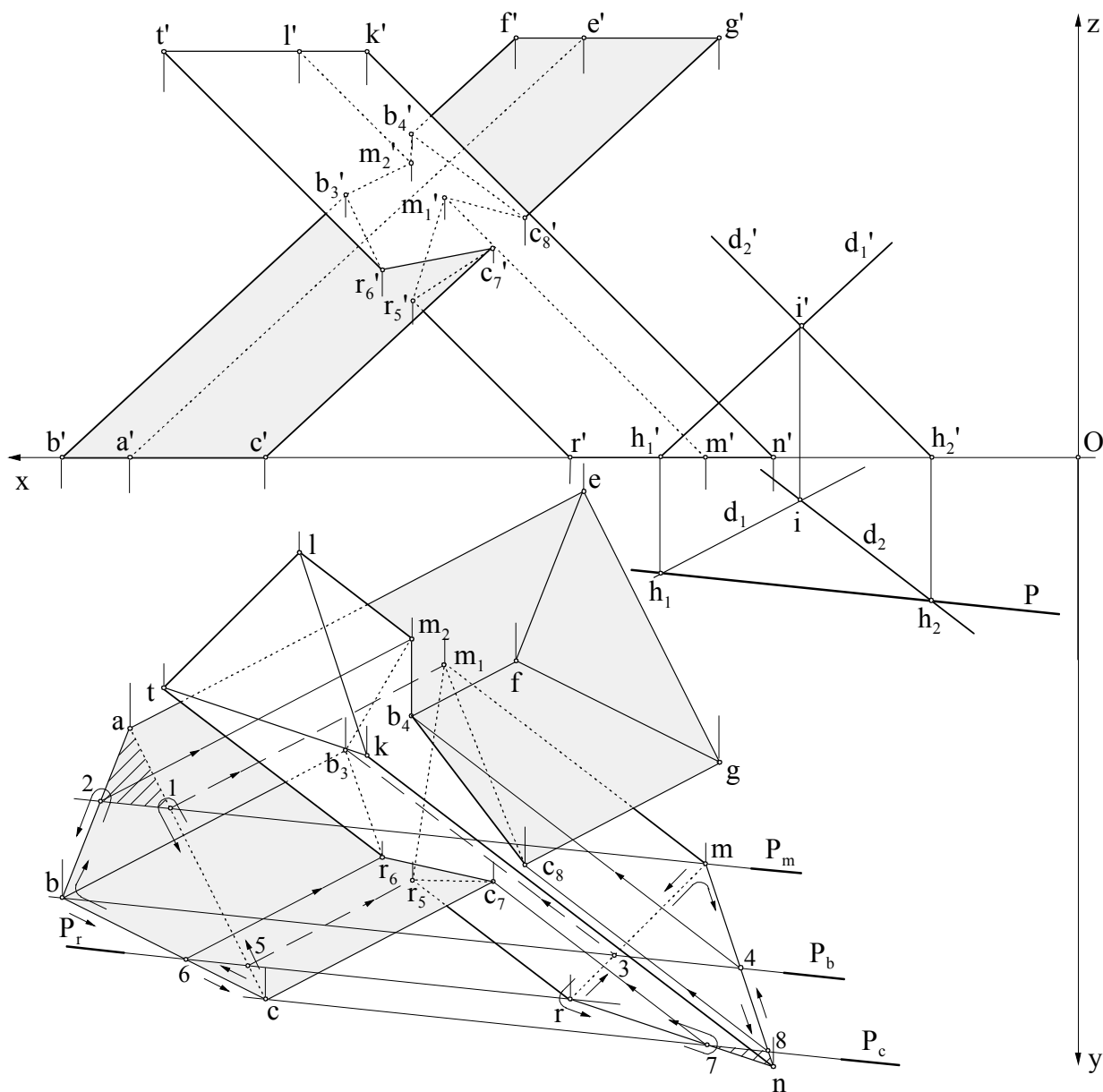


Fig.8.33 Intersecția a două prisme oblice

baza mnr , din punctul 8, urmărind săgețile marcate pe cele două baze (tabelul 8.3).

În tabelul 8.3 s-a analizat și vizibilitatea laturilor poligonului de intersecție, pornind de la vizibilitatea fețelor prismelor, respectiv a laturilor bazelor pe care se deplasează proiecțiile mobilului în cele două plane de proiecție, orizontal și vertical. În plan orizontal sunt vizibile segmentele c_7r_6 , m_2b_4 și b_4c_8 , iar în plan vertical, doar segmentul $c_7'r_6'$. Cu aceste observații se pot uni punctele de intersecție în ordinea stabilită în tabelul 8.3.

Tabelul 8.3

Prisma $ABCEFG$			c	5	1	5	c	6	b	2	b	c
Prisma $MNREKT$			8	-	m	r	7	r	3	m	4	8
Poligonul de intersecție (PI)			c_8	-	m_1	r_5	c_7	r_6	b_3	m_2	b_4	c_8
Vizibilitatea în planul	[H]	Prisma $ABCEFG$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		Prisma $MNREKT$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		PI	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	[V]	Prisma $ABCEFG$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		Prisma $MNREKT$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		PI	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Și în acest caz se poate determina ordinea de unire al punctelor de intersecție prin metoda diagramelor desfășuratelor convenționale, pentru prisma $ABCEFG$ pornind cu muchia AE , iar pentru prisma $MNREKT$, cu muchia NF , ambele neparticipând la intersecție. În figura 8.34, a s-a reprezentat metoda diagramelor cu ordinea de unire a punctelor și cu studiul vizibilității pentru proiecția pe planul orizontal, iar în figura 8.34, b, aceeași diagramă dar pentru proiecția prismelor pe planul vertical de proiecție.

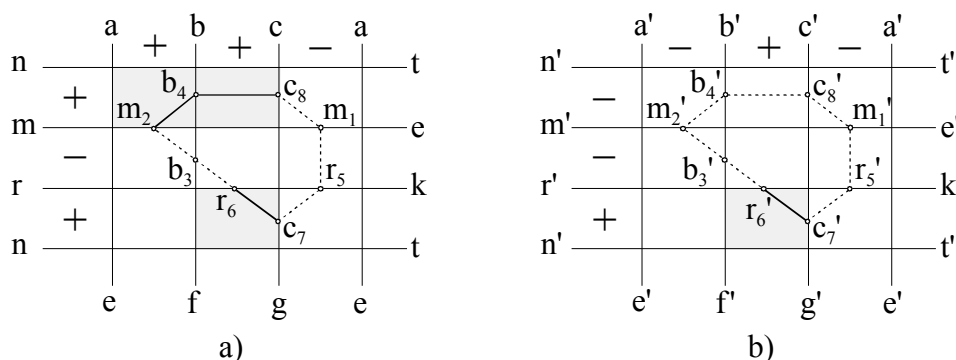


Fig.8.34 Diagrama desfășuratelor convenționale pentru intersecția prismă - prismă:
a) pentru proiecția pe planul orizontal ; b) pentru proiecția pe planul vertical

În cazul poliedrelor aflate în poziții particulare, determinarea poligonului de intersecție se face după metodele stabilite în cazurile generale, rezolvarea simplificându-se datorită pozițiilor poliedrelor.

În figura 8.35 se prezintă intersecția dintre o prismă dreaptă, cu baza $ABCDE$ și o prismă frontală, cu baza KMN , ambele baze fiind situate în planul orizontal de proiecție.

Pentru determinarea punctelor poligonului de intersecție se folosesc plane auxiliare de front, care se duc prin muchiile uneia dintreisme, intersectându-o pe cealaltă. Planele limită sunt cele duse prin muchia din n , F_n și din m , F_m . Porțiunile din baze nestrăbătute de planele secante sunt pe aceeași bază (porțiunile hașurate), deci intersecția va fi o *pătrundere* și se vor obține două poligoane de intersecție.

Planul limită $[F_n]$ conține muchia NN_1 și intersectează cealaltă prismă după o secțiune dreptunghiulară verticală, cu una din laturi segmentul 12 . Intersecția dintre

8.6 Probleme rezolvate

1. Fie o prismă triunghiulară oblică, ce are baza ABC în planul orizontal de proiecție : $A(130,50,0)$, $B(85,25,0)$, $C(120,15,0)$ și muchia $AA_1 : A_1(50,80,60)$. Să se determine proiecțiile punctelor de intersecție dintre dreapta $D(d,d')$: $M(110,50,30)$, $N(60,22,10)$ și prismă și să se figureze acestea pe desfășurata prisme.

Rezolvare : pentru determinarea punctelor de intersecție dintre dreaptă și prismă se trasează prin dreaptă un plan de capăt $Q' \equiv d'$, care secționează prisma după triunghiul $(123,1'2'3')$. Acesta este intersectat de dreapta D în punctele (α, α') și (β, β') , punctele de intersecție cu prisma.

Pentru desfășurata prisme se trasează o nouă linie de pământ O_1x_1 , paralelă cu proiecțiile orizontale ale muchiilor, în vederea efectuării unei schimbări de plan vertical de proiecție. Se obțin astfel, noile proiecții verticale ale muchiilor prisme $a_2'a_3' = b_2'b_3' = c_2'c_3'$ în adevărată mărime. Cu ajutorul planului $[P]$ se determină o secțiune normală pe muchii RST , a cărei adevărată mărime se obține prin rabatere pe planul orizontal de proiecție în $r_0s_0t_0$. Se desfășoară în linie dreaptă secțiunea normală $R_0S_0T_0R_0$ și se trasează perpendicular pe ea, muchiile prisme : $a_2'a_3' = A_0A_{10}$, $b_2'b_3' = B_0B_{10}$, $c_2'c_3' = C_0C_{10}$. Se unesc extremitățile muchiilor și se obține desfășurata laterală a prisme.

Pentru a figura pe desfășurată punctele de intersecție cu dreapta, în epură s-au trasat dreptele generatoare pe care sunt situate acestea : punctul α pe 4α , iar punctul β pe 5β , atât în proiecție orizontală cât și în noua proiecție verticală. S-au determinat pe desfășurată punctele 4_0 și 5_0 , de pe bază : $C_04_0 = c_4$, $C_05_0 = c_5$, și s-au trasat, paralel cu muchiile segmentele : $4_0\alpha_0 = 4_1'\alpha_1'$ și $5_0\beta_0 = 5_1'\beta_1'$.

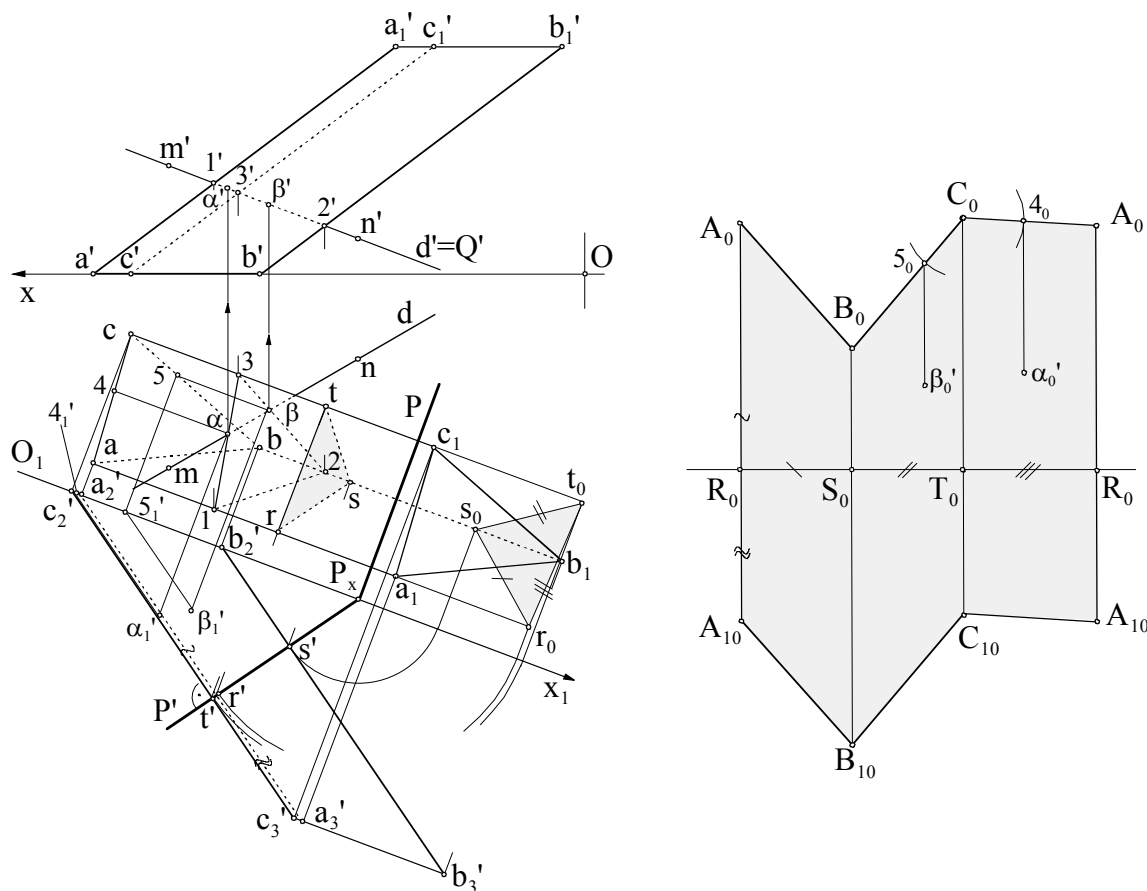


Fig.8.36 Rezolvarea problemei 1

Problema are aplicabilitate în tehnică la diferite rezervoare din tablă, de formă poliedrală, străbătute de conducte, fiind necesară localizarea pe desfășurată a punctelor prin care trec acestea.

2. Se consideră piramida triunghiulară oblică $SABC$, având baza situată în planul orizontal de proiecție, $A(120,75,0)$, $B(75,55,0)$, $C(135,30,0)$, și vârful $S(45,15,90)$ și planul $[P] : OP_x = 8, OP_y = -8, OP_z = -5$. Să se determine adevărata mărime a secțiunii plane făcută de planul $[P]$ în piramidă și să se determine desfășurata trunchiului de piramidă obținut.

Rezolvare : în urma intersecției dintre fiecare muchie a piramidei cu planul $[P]$ se obține triunghiul de secțiune $RTU : hv \cap as = r, h_1v_1 \cap bs = t, h_2v_2 \cap cs = u$. Adevărata mărime a triunghiului RTU , $r_0t_0u_0$, se obține prin rabatare pe planul orizontal de proiecție, având ca axă de rabatare urma orizontală P (fig.8.37).

Desfășurata trunchiului de piramidă obținut prin secționarea piramidei $SABC$ cu planul $[P]$, se determină pe desfășurata piramidei. Se determină pozițiile vârfurilor triunghiului de secțiune pe muchiile rotite : r_1', t_1', u_1' , prin translatarea proiecțiilor verticale r', t', u' , paralel cu axa Ox și apoi rotirea lor pe muchiile de pe desfășurată, în jurul vârfului $s' : s_1'r_1' = S_0R_0, s_1't_1' = S_0T_0, s_1'u_1' = S_0U_0$. Alăturat desfășuratei laterale se mai reprezintă și bazele $A_0B_0C_0 = abc, R_0T_0U_0 = r_0t_0u_0$, care completează desfășurata trunchiului de piramidă.

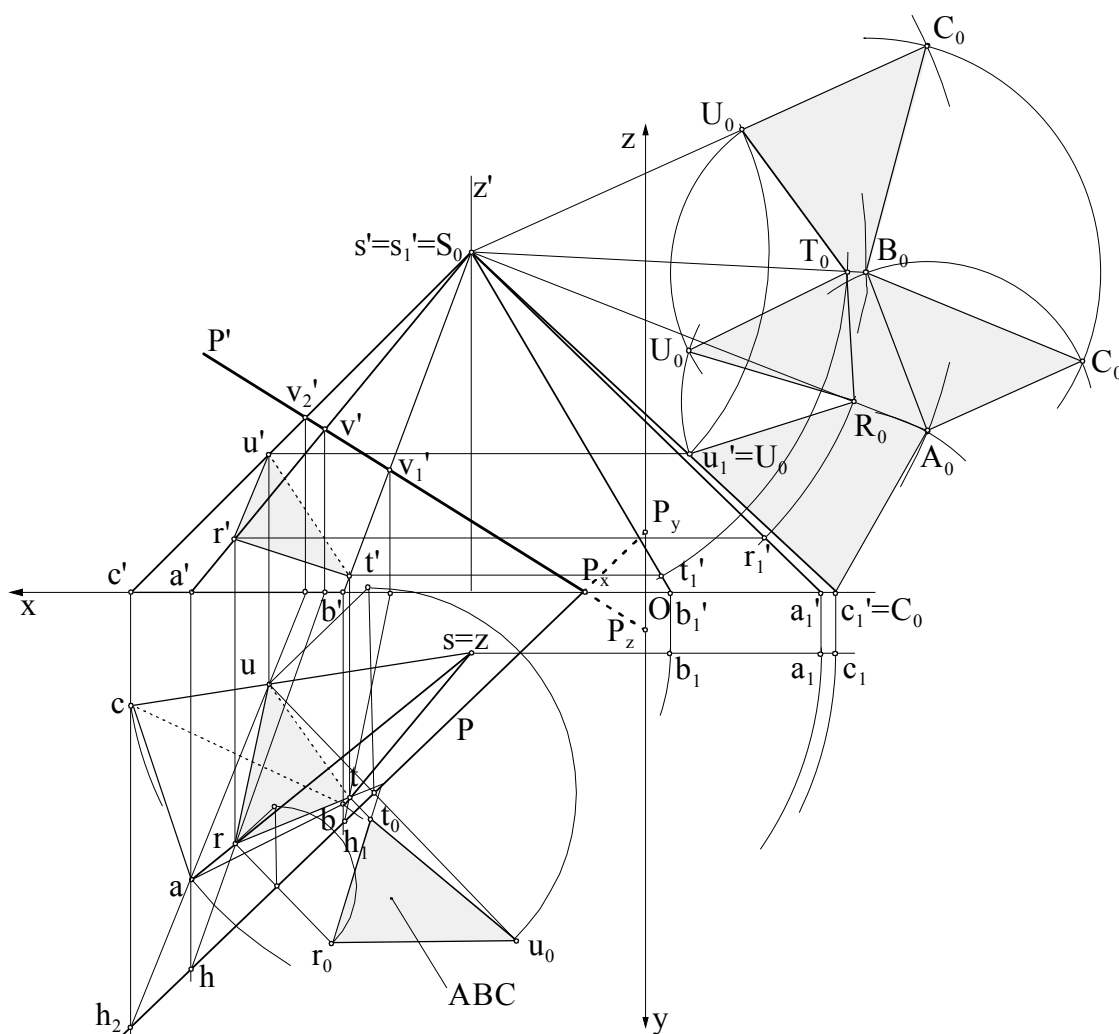


Fig.8.37 Rezolvarea problemei 2

8.7 Probleme propuse

1. Să se desfășoare prisma frontală $ABCA_1B_1C_1$, cu baza un triunghi echilateral ABC situat în planul orizontal de proiecție : $A(90,50,0)$, $B(65,20,0)$ și muchia AA_1 , $A_1(25,50,50)$.

2. Să se desfășoare piramida oblică SABCD, cu baza un pătrat ABCD situat în planul orizontal de proiecție : $A(120,40,0)$, $B(90,15,0)$ și vârful $S(10,10,80)$.

3. Se consideră prisma triunghiulară oblică $ABCA_1B_1C_1$, având baza inferioară ABC situată în planul orizontal de proiecție : $A(100,30,0)$, $B(95,10,0)$, $C(75,5,0)$, iar baza superioară într-un plan de nivel : $A_1(40,60,40)$ și planul $[P]$: $OP_x = 35$, $P' \perp a'a_1$, $P \perp aa_1$. Să se determine adevărata mărime a secțiunii făcută de planul $[P]$ în prismă și să se desfășoare prisma.

4. Se consideră piramida patrulateră oblică, având baza ABCE situată în planul orizontal de proiecție : $A(20,35,0)$, $B(10,10,0)$, $C(30,5,0)$, $E(45,15,0)$ și vârful $S(70,65,60)$. Să se determine desfășurata piramidei și să se găsească punctele de intersecție dintre dreapta $D(d,d')$: $M(60,30,15)$, $N(10,50,40)$ și piramida VABCE și să se figureze acestea pe desfășurată.

5. Să se determine adevărata mărime a secțiunii plane făcută de planul $[P]$: $OP_x = 20$, $OP_y = -45$, $OP_z = -24$, în prisma triunghiulară oblică, definită de baza ABC : $A(135,45,0)$, $B(75,20,0)$, $C(120,15,0)$ și muchia AA_1 : $A_1(30,90,90)$. Să se determine și desfășurata prisme.

6. Să se construiască secțiunea plană determinată de planul $[P]$: $OP_x = 30$, $OP_y = \infty$, $OP_z = -20$, în piramida SABCE : $S(20,5,75)$, $A(100,10,0)$, $B(75,45,0)$, $C(110,55,0)$, $E(120,35,0)$ și să se desfășoare trunchiul de piramidă obținut în urma secționării cu planul $[P]$.

7. Se consideră prisma patrulateră oblică $ABCEA_1B_1C_1E_1$, având baza situată în planul orizontal de proiecție, muchiile paralele cu AA_1 : $A(40,46,0)$, $B(23,50,0)$, $C(17,36,0)$, $E(30,23,0)$, $A_1(78,24,35)$ și dreapta $D(d,d')$: $H(75,60,0)$, $V(29,0,26)$. Să se determine punctele de intersecție dintre dreapta și prismă, să se desfășoare prisma și să se figureze pe desfășurată punctele de intersecție cu dreapta.

8. Se consideră piramida patrulateră oblică SABCE, având baza situată în planul orizontal de proiecție, $A(20,35,0)$, $B(10,10,0)$, $C(30,5,0)$, $E(45,15,0)$ și vârful $S(70,65,60)$ și planul $[P]$: $OP_x = 90$, $OP_y = \infty$, $OP_z = 45$. Să se determine adevărata mărime a secțiunii plane făcută de planul $[P]$ în piramidă și să se determine desfășurata piramidei.

9. Să se construiască secțiunea plană determinată de planul $[P]$: $OP_x = 10$, $OP_y = -10$, $OP_z = \infty$, în prisma patrulateră oblică $ABCEA_1B_1C_1E_1$: $A(45,65,0)$, $B(60,40,0)$, $C(90,60,0)$, $E(75,95,0)$, $E_1(135,65,60)$, cu muchiile paralele cu EE_1 . Să se determine adevărata mărime a secțiunii și să se desfășoare prisma.

10. Să se figureze pe desfășurata piramidei triunghiulare oblice SABC : $S(10,5,60)$, $A(105,35,0)$, $B(45,45,0)$, $C(90,70,0)$, punctele de intersecție dintre piramidă și dreapta $D(d,d')$: $M(60,25,30)$, $N(40,40,15)$.

11. Se consideră prisma frontală $ABCEA_1B_1C_1E_1$ cu baza un pătrat ABCE, situată în planul orizontal de proiecție, $A(60,20,0)$, $B(40,10,0)$, $A_1(20,19,30)$. Pe muchia AA_1 se fixează punctul $M(47, y_M, z_M)$. Să se determine proiecțiile celui mai scurt drum care unește punctele A_1 și M , înconjurând prisma.

12. Se consideră piramida triunghiulară oblică, având baza ABC situată în planul orizontal de proiecție, $A(70,55,0)$, $B(33,38,0)$, $C(83,26,0)$ și vârful $S(7, 5,50)$. Să se determine desfășurata piramidei și să se figureze pe aceasta punctele de intersecție dintre dreapta $D(d,d')$: $H(15,50,0)$, $V(62,0,38)$ și piramidă.

13. Să se desfășoare piramida oblică $SABC$, cu baza un triunghi echilateral ABC situat în planul orizontal de proiecție : $A(120,70,0)$, $B(90,20,0)$ și vârful $S(20,10,70)$. Să se vizualizeze pe desfășurată punctul $M(60,30,z_M)$, de pe fața SAB .

14. Să se determine în adevărată mărime secțiunea plană determinată de planul $[P]$: $OP_x = 170$, $OP_y = \infty$, $OP_z = 55$, în piramida triunghiulară oblică $SABC$: $A(55,20,0)$, $B(105,35,0)$, $C(70,75,0)$, $S(150,95,80)$ și să se desfășoare piramida.

15. Se consideră prisma patrulateră oblică $ABCEA_1B_1C_1E_1$, având baza $ABCE$ situată în planul orizontal de proiecție, $A(10,28,0)$, $B(5,17,0)$, $C(17,4,0)$, $E(28,7,0)$, $A_1(48,41,42)$ și planul $[P]$: $OP_x = 50$, $P' \perp a'a_1$, $P \perp aa_1$. Să se determine adevărata mărime a secțiunii făcută de planul $[P]$ în prismă și să se desfășoare prisma.

16. Fie o piramidă patrulateră oblică, cu baza $ABCE$ situată în planul orizontal de proiecție, $A(50,50,0)$, $B(25,35,0)$, $C(40,20,0)$, $E(55,30,0)$, vârful $S(110,10,50)$ și planul $[P]$: $OP_x = 125$, $OP_y = \infty$, $OP_z = 40$. Să se determine adevărata mărime a secțiunii făcute de planul $[P]$ în piramidă și să se desfășoare piramida.

17. Să se desfășoare prisma frontală $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, cu baza un pătrat $ABCD$ situat în planul orizontal de proiecție : $A(60,20,0)$, $B(50,5,0)$ și muchia AA_1 : $A_1(10,20,50)$. Să se figureze pe desfășurată punctul $M(30,10,z_M)$, de pe fața $ABB_1 A_1$.

18. Să se determine adevărata mărime a secțiunii plane făcută în piramida $SABC$: $S(95,5,75)$, $A(20,40,0)$, $B(35,20,0)$, $C(55,65,0)$ de planul $[P]$, care trece prin linia de pământ și prin punctul $M(10,15,20)$ (*Indicație* : secțiunea se obține direct în proiecția pe planul lateral). Să se desfășoare trunchiul de piramidă obținut.

19. Fie o prismă patrulateră oblică, ce are baza $ABCE$ în planul orizontal de proiecție : $A(60,65,0)$, $B(35,45,0)$, $C(25,20,0)$, $E(45,30,0)$ și muchia CC_1 : $C_1(115,30,50)$. Să se determine proiecțiile punctelor de intersecție dintre dreapta $D(d,d')$: $I(80,40,10)$, $J(65,55,20)$ și prismă și să se figureze acestea pe desfășurata prisme.

20. Să se desfășoare piramida $SABC$: $S(20,10,100)$, $A(110,100,0)$, $B(50,70,0)$, $C(140,50,0)$ și să se noteze pe aceasta punctele în care dreapta $D(d,d')$: $H(30,90,0)$, $V(160,0,60)$ intersectează piramida.

21. Se dă prismă patrulateră oblică, ce are baza $ABCD$ în planul orizontal de proiecție : $A(70,30,0)$, $B(60,60,0)$, $C(10,70,0)$, $D(30,10,0)$ și muchia AA_1 : $A_1(125,70,95)$. Să se determine pe suprafața prisme cel mai scurt traseu care unește vârfurile A și A_1 , înconjurând prisma.

22. Se consideră piramida triunghiulară oblică $SABC$: $S(60,35,40)$, $A(20,25,0)$, $B(5,10,0)$, $C(40,10,0)$. Să se desfășoare piramida și să se găsească pe desfășurată poziția punctelor în care dreapta $D(d,d')$: $E(35,30,20)$, $F(15,35,30)$ intersectează piramida.

23. Să se determine poligonul de intersecție dintre prisma $ABCA_1B_1C_1$ și piramida $SMNR$: a) $A(76,10,0)$, $B(113,14,0)$, $C(100,33,0)$, $A_1(17,47,65)$, $S(90,60,60)$, $M(21,44,0)$, $N(4,20,0)$, $R(53,18,0)$;

b) $A(240,80,0)$, $B(205,123,0)$, $C(155,90,0)$, $A_1(170,10,120)$, $S(240,0,160)$, $M(20,120,0)$, $N(60,60,0)$, $R(140,100,0)$.

24. Să se determine poligonul de intersecție dintre prisma $ABCA_1B_1C_1$ și prisma $MNRM_1N_1R_1$: a) $A(140,40,0)$, $B(150,65,0)$, $C(120,80,0)$, $A_1(73,5,62)$, $M(55,60,0)$, $N(45,90,0)$, $R(75,80,0)$, $M_1(115,14,60)$;

b) $A(240,67,0)$, $B(257,28,0)$, $C(180,24,0)$, $A_1(75,140,120)$, $M(54,53,0)$, $N(87,102,0)$, $R(132,28,0)$, $N_1(170,105,145)$.

25. Să se determine poligonul de intersecție dintre piramida S_1ABC și piramida S_2MNR (S_2MNRT): a) $S_1(85,70,45)$, $A(60,4,0)$, $B(7,17,0)$, $C(33,60,0)$, $S_2(36,84,84)$, $M(107,12,0)$, $N(85,50,0)$, $R(70,160,0)$;

b) $S_1(275,17,152)$, $A(115,90,0)$, $B(15,70,0)$, $C(80,140,0)$, $S_2(165,63,95)$, $M(240,75,0)$, $N(185,10,0)$, $R(124,35,0)$, $T(150,105,0)$.

9. SUPRAFEȚE CURBE

Suprafețele curbe sunt suprafețe generate prin mișcarea unor linii drepte sau curbe, numite generatoare, după anumite legi.

Clasificarea suprafețelor curbe, după forma generatoarei :

- a) *suprafețe riglate* : au generatoarea o linie dreaptă (suprafețele cilindrice, conice, etc.);
- b) *suprafețe neriglate* : au generatoarea o curbă (suprafața sferei, a torului, etc.).

9.1 Reprezentarea suprafețelor curbe

Reprezentarea suprafețelor curbe, în epură, se face prin reprezentarea conturului aparent, cu respectarea regulilor generale de vizibilitate și a criteriilor stabilite la poliedre.

La reprezentarea suprafețelor curbe închise se trasează și axele de rotație, de simetrie și de centre.

9.1.1 Reprezentarea cilindrului. Punct pe suprafața cilindrică

Suprafața cilindrică este generată de o dreaptă mobilă G (*generatoare*) care se sprijină pe o curbă deschisă sau închisă (C), numită *curbă directoare*, fiind paralelă în timpul mișcării cu o direcție dată Δ (fig.7.1, a).

Făcând analogia cu suprafața prismatică, suprafața cilindrică este o suprafață prismatică cu un număr infinit de fețe. Un *corp cilindric* se obține dacă suprafața cilindrică se secționează cu două plane care taie toate generatoarele, obținând bazele cilindrului.

Dacă generatoarea se rotește în jurul unei axe O_1O_2 , cu care este paralelă, iar curba directoare (C) este un cerc, se obține *cilindrul de revoluție* (fig.7.1, b). Bazele cilindrului de revoluție, cercuri cu centrele în O_1 și O_2 , pot fi situate în două plane paralele.

Un cilindru care are axa O_1O_2 perpendiculară pe cercul de bază (C) și respectiv, pe baza cilindrului, este un cilindru *circular drept* (fig.7.1, c). Acesta este o suprafață proiectantă, orice punct situat pe suprafața cilindrului se proiectează pe cercul de bază (C).

Un cilindru este determinat în epură prin proiecția curbei directoare pe planul de proiecție și direcția cu care generatoarele sunt paralele, construindu-se apoi conturul aparent orizontal și vertical. În probleme, cilindrul este dat prin coordonatele centrelor cercurilor de bază și prin raza acestora.

În figura 9.2 se consideră un cilindru oblic, cu bazele cercuri situate în planul orizontal de proiecție și într-un plan de nivel, având axa O_1O_2 . Bazele se proiectează pe planul orizontal de proiecție ca cercuri cu centrul în o_1 și o_2 , iar pe planul vertical de

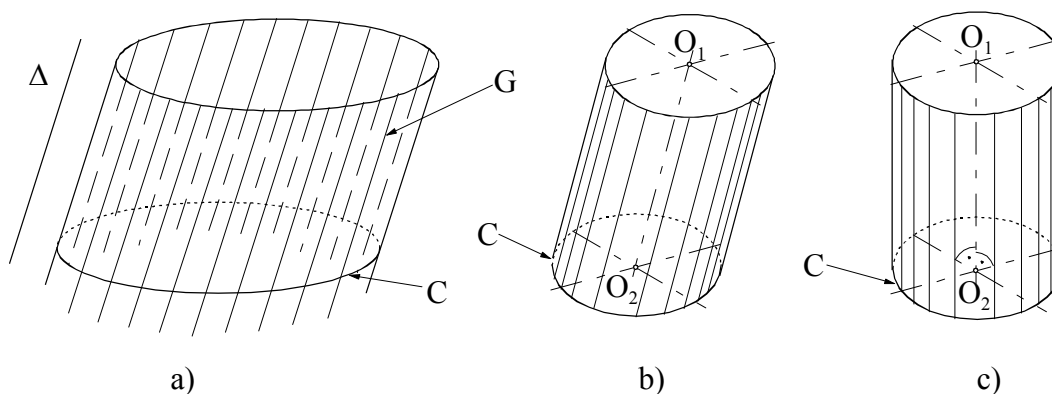


Fig.9.1 Generarea suprafețelor cilindrice

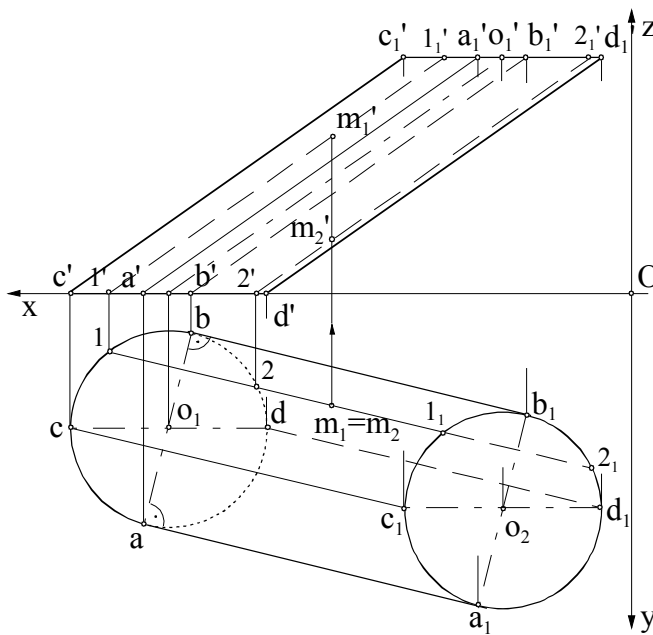


Fig.9.2 Punct pe suprafața cilindrică

verticală a generatoarei ce trece prin punctul m_1 . Prin punctul m_1 se pot trasa două generatoare, suprapuse, una pe fața vizibilă 11_1 și una pe fața invizibilă 22_1 . Găsind proiecțiile verticale ale acestora, $1'1'_1$ și $2'2'_1$ și ridicând o linie de ordine din proiecția orizontală m_1 , se găsesc două proiecții verticale m_1' și m_2' , $m_1' \in 1'1'_1$, $m_2' \in 2'2'_1$, ale celor două puncte $M_1(m_1, m_1')$ și $M_2(m_2, m_2')$, care în proiecție orizontală se suprapun, $m_1 \equiv m_2$.

9.1.2 Reprezentarea conului. Punct pe suprafața conică

Suprafața conică este generată de o dreaptă mobilă G (*generatoare*) care se sprijină pe o curbă deschisă sau închisă (C), numită *curbă directoare* și trece printr-un punct fix S (*vârful conului*) (fig.9.3, a). Când generatoarea depășește vârful conului, se obține suprafața conică cu două pânze.

Prin analogie cu piramida, suprafața conică este o suprafață piramidală cu un număr infinit de fețe.

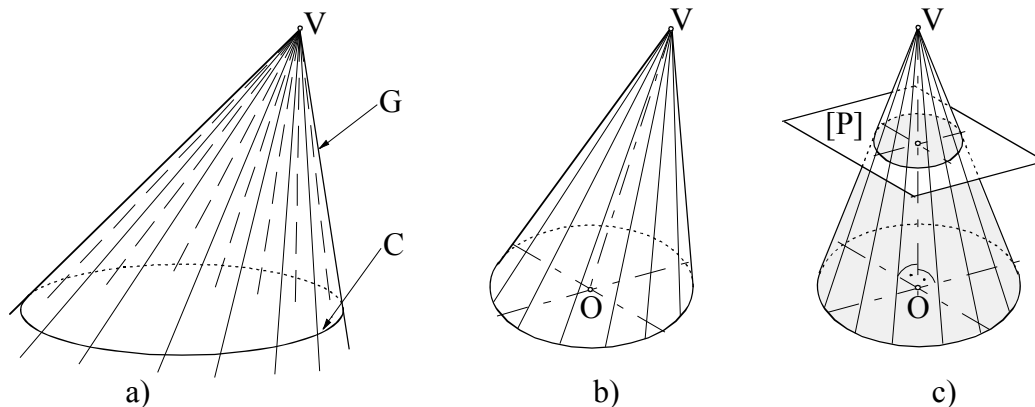


Fig.9.3 Generarea suprafețelor conice

proiecție ca segmente egale cu diametrul cercurilor, $c'd' \subset Ox$ și $c_1'd_1' \parallel Ox$.

Pentru reprezentarea conturului aparent, în cele două proiecții pe planele de proiecție, se duc tangentele exterioare la baze: aa_1 și bb_1 , în proiecția orizontală, respectiv $c'c_1'$ și $d'd_1'$, în proiecția verticală.

În general, în spațiu, un punct se află pe suprafața cilindrică dacă se află pe o generatoare a cilindrului. În epură, pentru ca un punct să aparțină unui cilindru, proiecțiile lui trebuie să se găsească pe proiecțiile de același nume ale unei generatoare a cilindrului.

Fie dată proiecția orizontală m_1 a unui punct M_1 pe suprafața cilindrului din figura 9.2. Proiecția verticală m_1' va fi situată pe proiecția

În practică se utilizează numai una dintre pânzele suprafeței conice, numită *con de revoluție* și obținută prin deplasarea generatoarei în jurul unei axe OS , care trece prin vârful conului S , având curba directoare (baza) un cerc cu centrul în O (fig.9.3, b). Dacă axa conului, OS , este perpendiculară pe planul bazei se obține un *con drept* (fig 9.3, c).

Dacă un con se secționează cu un plan $[P]$ paralel sau nu cu baza lui, corpul delimitat de bază și această secțiune plană se numește *trunchi de con* (fig 9.3, c).

Un con este determinat, în epură, prin proiecțiile curbei directoare și prin proiecțiile vârfului conului, construindu-se apoi și generatoarele care limitează conturul aparent, atât în plan orizontal, cât și în plan vertical. În probleme, conul este dat prin coordonatele centrului cercului de bază, raza acestuia și coordonatele vârfului conului.

Conul oblic din figura 9.4 are baza un cerc cu centrul în O , situat în planul orizontal de proiecție și vârful, punctul oarecare $V(v, v')$. În proiecția orizontală, conturul aparent este format din arcul de cerc ab , al bazei, vizibil și din generatoarele extreme sa și sb , tangente în a și b la bază. În proiecția verticală, conturul aparent este compus din proiecția verticală a bazei (diametrul frontal $c'd'$, suprapus pe axa Ox) și generatoarele $s'c'$ și $s'd'$.

În proiecția orizontală vizibilitatea este evidentă, iar în proiecția verticală toate generatoarele care se sprijină pe arcul bazei $c'b'd'$ sunt vizibile, iar celelalte invizibile. Generatoarea $s'a'$ este invizibilă, iar generatoarea $s'b'$, vizibilă.

Un punct aparține unei suprafețe conice dacă este situat pe o generatoare a acestei suprafețe. Fie un punct N_I , dat prin proiecția verticală n_1' , pe suprafața conică din proiecția verticală (fig.9.4). Pentru determinarea proiecției orizontale n_I , se trasează generatoarea $s'n_1'$, pe care este situat punctul, se găsește proiecția urmei orizontale a acesteia, $1' \equiv 2'$ și se coboară o linie de ordine până pe proiecția orizontală a bazei, unde se determină proiecțiile orizontale 1 și 2 , ale urmelor generatoarelor. Unind vârful s cu urmele 1 și cu 2 se găsesc două proiecții orizontale pentru proiecția verticală a generatoarei $s'n_1'$, pe care ar putea fi situată proiecția orizontală a punctului N_I . Problema are două soluții : fie punctul $N_I(n_I, n_1')$ cu $n_I \in 1s$, fie punctul $N_2(n_2, n_2')$ cu $n_2 \in 2s$, cu proiecțiile verticale suprapuse, $n_1' \equiv n_2'$.

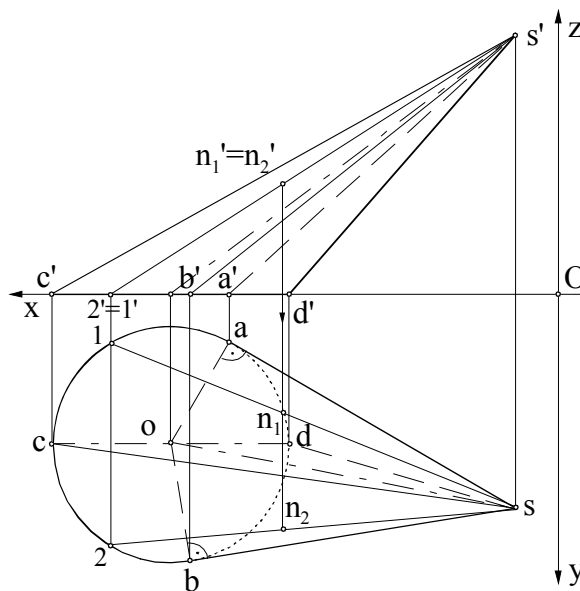


Fig.9.4 Punct pe suprafața conică

9.1.3 Reprezentarea sferei. Punct pe suprafața sferică

Sfera este definită ca locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix, numit *centrul sferei*.

O *suprafață sferică* este generată de un cerc care se rotește în jurul uneia dintre axe.

În tripla proiecție ortogonală o sferă cu centrul în $\Omega(\omega, \omega', \omega'')$ se proiectează prin conturul ei aparent, care este câte un cerc egal cu cercul generator (fig.9.5).

Conturul aparent din planul vertical de proiecție, numit *meridian principal*, este un cerc cu centrul în ω' , de rază egală cu raza sferei și se obține prin secționarea sferei cu un plan de front $[F]$, care trece prin centrul sferei.

Conturul aparent din planul orizontal de proiecție se obține prin secționarea sferei cu un plan de nivel $[N]$, dus prin centrul sferei și este un cerc cu centrul în ω , de rază egală cu raza sferei și se numește *ecuator*.

Cercul de contur aparent din planul lateral este tot un *meridian* și reprezintă proiecția secțiunii făcute, în sferă, de un plan de profil $[P]$, dus prin centrul sferei.

În spațiu, ecuatorul și cele două meridiane, sunt perpendiculare două câte două. Orice alte plane de front, de nivel sau de profil vor intersecta sfera după cercuri de diferite diametre, care se vor proiecta, în epură, concentric cu proiecția meridianului principal, a ecuatorului, respectiv a cercului meridian din planul lateral.

Un punct situat pe o suprafață sferică este definit prin proiecțiile lui, care sunt situate pe cercul de secțiune determinat prin secționarea sferei cu un plan perpendicular pe

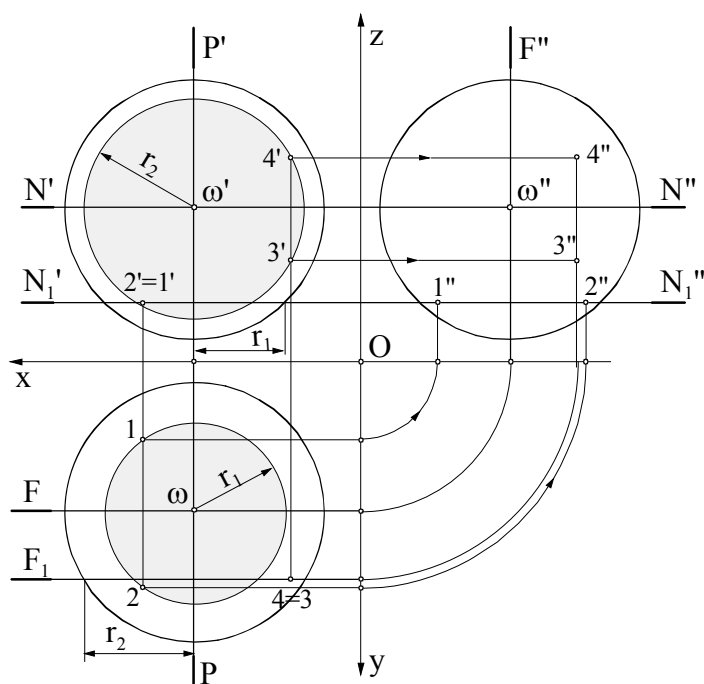


Fig.9.5 Tripla proiecție ortogonală a sferei. Punct pe suprafața sferică

axă și care trece prin punctul respectiv (fig.9.5). Dacă se cunoaște proiecția verticală I' , a unui punct I de pe sferă, se duce prin I' un plan de nivel $[N_I]$, care determină în sferă o secțiune circulară cu centrul în ω și de rază r_I , proiectată pe planul orizontal în adevărată mărime. Proiecției I' îi corespund două proiecții orizontale, I și 2 , și deci și în proiecția verticală avem $I' \equiv 2'$, proiecțiile verticale ale punctelor I și 2 , situate pe sferă de o parte și de alta a cercului meridian.

În mod similar, se procedează dacă se cunoaște proiecția orizontală a unui punct dublu, $3 \equiv 4$, situat pe sferă de o parte și de alta a cercului ecuator, folosind planul de front $[F_I]$ și obținând în final, proiecțiile verticale $3'$ și $4'$ (fig.9.5).

9.2 Plane tangente la suprafețe curbe

Planul tangent la o suprafață curbă poate avea o infinitate de puncte comune cu suprafața respectivă sau numai unul, în funcție de forma acelei suprafețe.

Din multitudinea de probleme ce se pot pune în ce privește determinarea planelor tangente la suprafețe curbe, în continuare se vor trata planele tangente duse printr-un punct pe suprafață și dintr-un punct exterior acesteia.

9.2.1 Plan tangent la o suprafață cilindrică

Planul tangent la suprafața unui cilindru conține o generatoare a acestei suprafețe și tangenta la curba directoare în punctul în care generatoarea o intersectează. Planele tangente sunt paralele cu generatoarele suprafeței cilindrice.

a) *Plan tangent într-un punct pe suprafața unui cilindru*

Fie cilindru oblic, cu baze cercuri situate în planul orizontal de proiecție și într-un plan de nivel și un punct $M(m, m')$ pe suprafața lui laterală (fig.9.6).

Pentru determinarea urmelor planului tangent în punctul M la suprafața cilindrică se trasează generatoarea $(12, 1'2')$, care trece prin M și care va fi conținută de planul tangent $[T]$. Urma orizontală T a planului tangent este tangentă bazei cilindrului în punctul $(1, 1')$, urma orizontală a generatoarei 12 . Intersecția urmei orizontale T cu axa Ox determină punctul T_x , un punct al urmei verticale T' a planului tangent. Pentru a afla încă un punct al acestei urme, se determină urma verticală a generatoarei 12 sau urma verticală $V(v, v')$ a orizontalei $G(g, g')$ a planului $[T]$, ce trece prin punctul M , $T' = T_x \cup v'$.

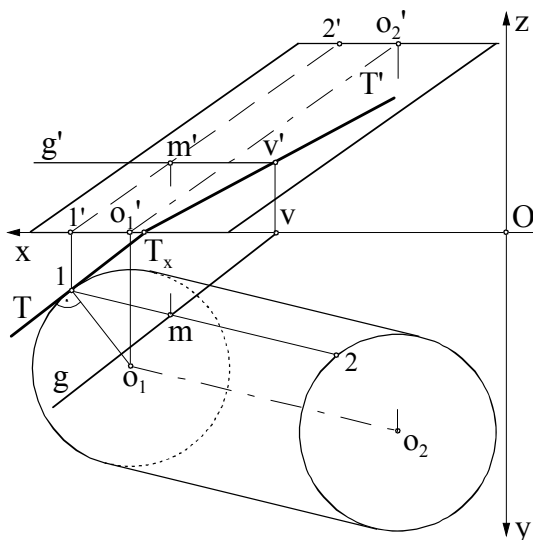


Fig.9.6 Plan tangent în punctul $M(m, m')$ pe suprafața cilindrului

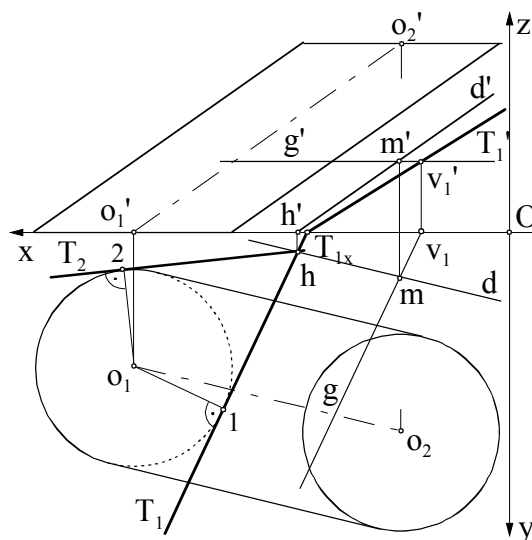


Fig.9.7 Plan tangent la cilindru dintr-un punct $M(m, m')$, exterior cilindrului

b) *Plan tangent la cilindru dintr-un punct exterior cilindrului*

În figura 9.7 se consideră un cilindru oblic, cu baze cercuri situate în planul orizontal de proiecție și într-un plan de nivel și un punct $M(m, m')$, exterior cilindrului.

Dacă se cere construirea unui plan tangent la cilindru prin punctul M , problema are două soluții. Pentru rezolvare, se duce prin $M(m, m')$ dreapta $D(d, d')$ paralelă cu generatoarele cilindrului și se determină urma ei orizontală $H(h, h')$. Planul tangent la cilindru va conține această dreaptă, deci urmele orizontale T_1 și T_2 trec prin urma h și sunt tangente la baza cilindrului din planul orizontal de proiecție, în punctele 1 și 2 . Pentru determinarea urmei verticale T_1' a planului tangent $[T_1]$, se folosește urma verticală a dreptei D sau urma verticală $V_1(v_1, v_1')$ a orizontalei $G(g, g')$ a planului tangent, trasată prin punctul M , $T_1' = T_{1x} \cup v_1'$. Analog, se poate construi și urma T_2' .

9.2.2 Plan tangent la o suprafață conică

Planul tangent la o suprafață conică trece prin vârful conului, conține o generatoare a conului și tangenta la curba directoare în punctul în care generatoarea o intersectează.

a) *Plan tangent într-un punct pe suprafața unui con*

Se consideră dat conul cu vârful în punctul $S(s, s')$ și baza un cerc situat în planul orizontal de proiecție (fig.9.8).

Planul tangent dus printr-un punct $N(n, n')$ de pe suprafața conului va conține generatoarea $IS(I, s')$ pe care este situat punctul. Astfel, urma orizontală T este tangentă în punctul I la curba directoare. Pentru trasarea urmei verticale T' se determină urma verticală a generatoarei IS sau se găsește urma verticală v' a unei orizontale $G(g, g')$ a planului tangent $[T]$, care trece prin punctul N , $T' = T_x \cup v'$.

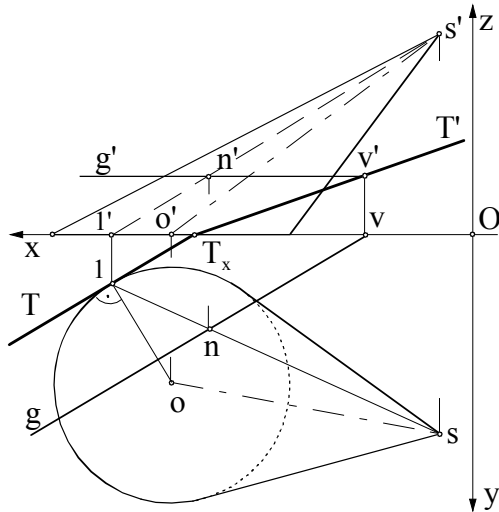


Fig.9.8 Plan tangent în punctul $N(n, n')$ pe suprafața conului

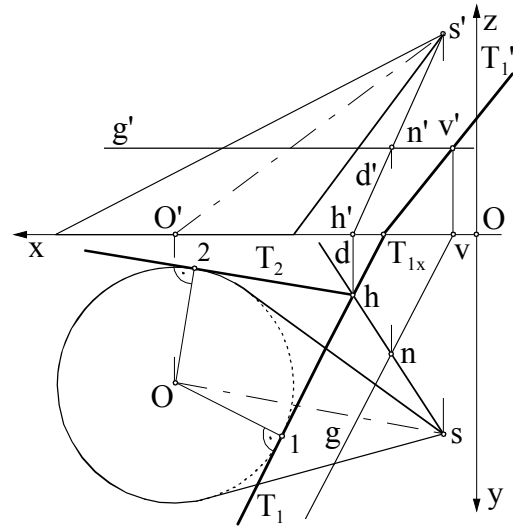


Fig.9.9 Plan tangent la con dintr-un punct $N(n, n')$, exterior conului

b) Plan tangent la con dintr-un punct exterior conului

Fie conul circular oblic cu vârful în punctul $S(s, s')$, baza în planul orizontal de proiecție și un punct $N(n, n')$, exterior conului (fig.9.9).

Planul tangent conului dus prin punctul N trece prin vârful $S(s, s')$ și este tangent la cercul de bază. Se trasează dreapta $D(d, d')$ prin punctul N și prin vârful conului și se determină urma orizontală $H(h, h')$ a acestei drepte. Din punctul N se pot duce două plane tangente la con, a căror urme orizontale, T_1 și T_2 , trec prin urma orizontală h și sunt tangente la bază în punctele I și 2 . Pentru trasarea urmei verticale T_1' se determină urma verticală a dreptei D sau se utilizează urma verticală $V(v, v')$ a orizontalei $G(g, g')$ a planului $[T_1]$, trasată prin punctul N , $T_1' = T_{1x} \cup v'$. Analog, se procedează și pentru urma T_2' .

9.2.3 Plan tangent la o suprafață sferică

Planul tangent la o suprafață sferică are un punct comun cu aceasta și este perpendicular pe raza care trece prin punctul de tangență.

a) Plan tangent într-un punct pe suprafața sferei

Se consideră o sferă cu centrul în $\Omega(\omega, \omega')$ și un punct $M(m, m')$ situat pe suprafața ei (fig.9.10). Pentru a se trasa urmele planului $[T]$ tangent la sferă, dus prin punctul M , se folosește o orizontală $D(d, d')$ a acestui plan. Deoarece planul tangent este perpendicular pe raza $\Omega M(\omega m, \omega' m')$, proiecția orizontală d a orizontalei se trasează prin punctul m , perpendiculară pe raza ωm . Se determină urma verticală $V(v, v')$ a orizontalei și prin proiecția verticală v' se trasează urma verticală T' a planului tangent, perpendicular pe raza $\omega' m'$. Urmă orizontală T trece prin T_x și este paralelă cu proiecția orizontală d a orizontalei (sau perpendiculară pe raza ωm).

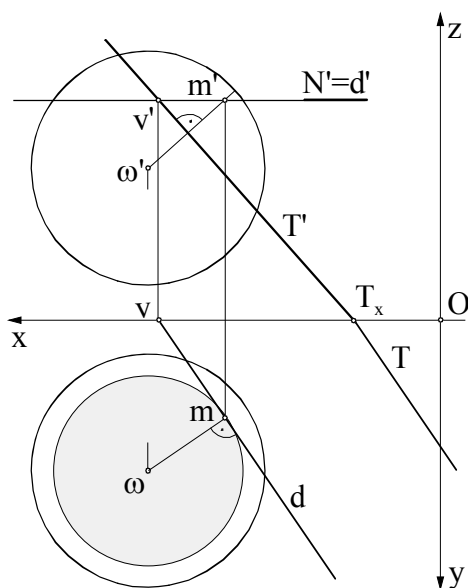


Fig.9.10 Plan tangent într-un punct $M(m, m')$, pe suprafața sferei

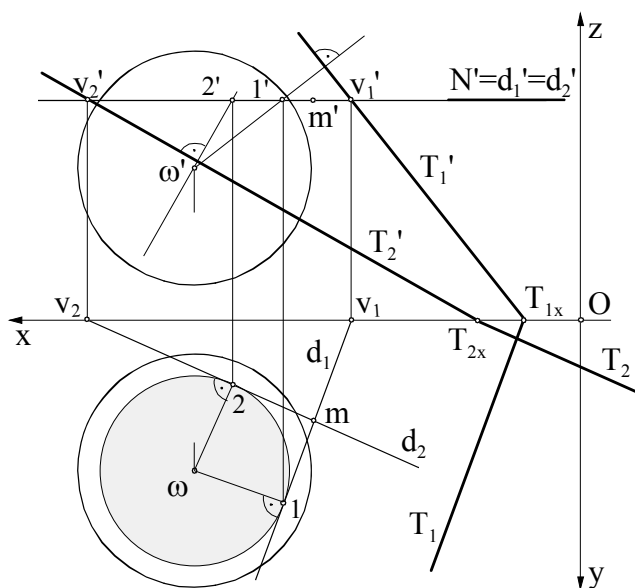


Fig.9.11 Plan tangent la sferă dintr-un punct $M(m, m')$, exterior sferei

b) Plan tangent la sferă dintr-un punct exterior ei

Fie sfera cu centrul în $\mathcal{A}(\omega, \omega')$ și un punct $M(m, m')$ exterior ei (fig.9.11). Problema trasării unui plan tangent la suprafața sferică prin punctul $M(m, m')$ are o infinitate de soluții.

În continuare, se vor trasa două astfel de plane, folosind tangentele duse din punctul $M(m, m')$ la secțiunea circulară determinată în sferă de planul de nivel $[N]$, care trece prin acest punct.

În epură, secțiunea circulară determinată de planul de nivel se proiectează în adevărată mărime pe planul orizontal de proiecție. Tangentele duse din punctul m la acest cerc sunt orizontalele $D_1(d_1, d_1') \equiv M1(m1, m'1')$ și $D_2(d_2, d_2') \equiv M2(m2, m'2')$. Planele tangente $[T_1]$ și $[T_2]$ au urme verticale T_1' și T_2' perpendiculare pe razele $\omega'1'$, respectiv $\omega'2'$ și trec prin urmele verticale v_1' și v_2' , ale celor două orizontale. Urmele orizontale T_1 și T_2 se trasează prin T_{1x} și T_{2x} și sunt paralele cu proiecțiile orizontale ale orizontalelor tangente, d_1 și respectiv d_2 .

9.3 Secțiuni plane în suprafețe curbe

Secțiunea plană într-o suprafață curbă este, în general, o curbă plană, definită de punctele de intersecție ale generatoarelor cu planul secant. Determinarea secțiunii plane se face utilizând metodele de la determinarea secțiunilor plane în poliedre, alegând un număr suficient de generatoare, în special cele pe care sunt situate punctele de maxim, de inflexiune, de schimbare a vizibilității, etc. Punctele astfel determinate se vor uni printr-o linie curbă continuă.

9.3.1 Secțiuni plane în cilindri

În funcție de poziția relativă plan-cilindru, secțiunea plană într-un cilindru circular poate fi :

- un paralelogram – dacă planul secant este paralel cu axa cilindrului sau o conține (fig.9.12, a);

- un cerc - dacă planul secant este paralel cu planul bazei (fig.9.12, b);
- o elipsă sau o porțiune de elipsă – după cum planul secant intersectează toate generatoarele cilindrului (fig.9.12, c) sau doar o parte dintre ele (fig.9.12, d).

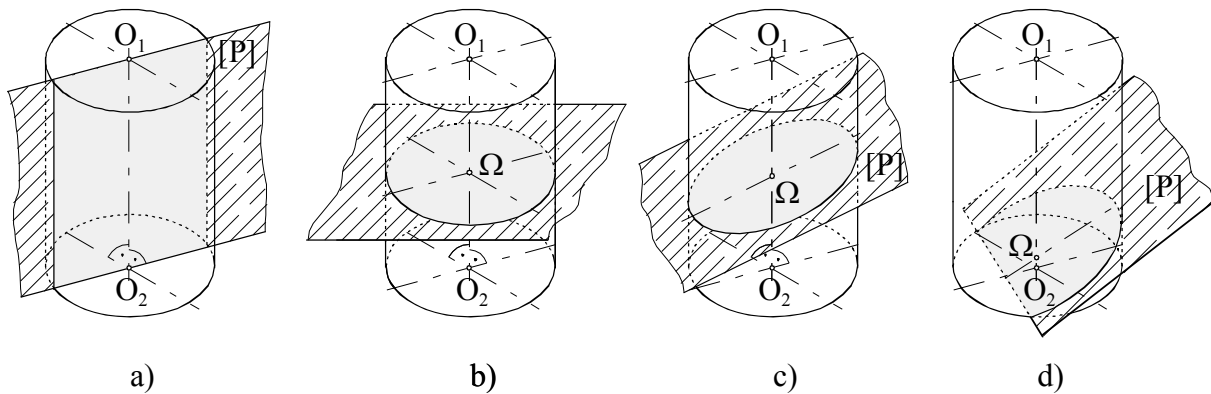
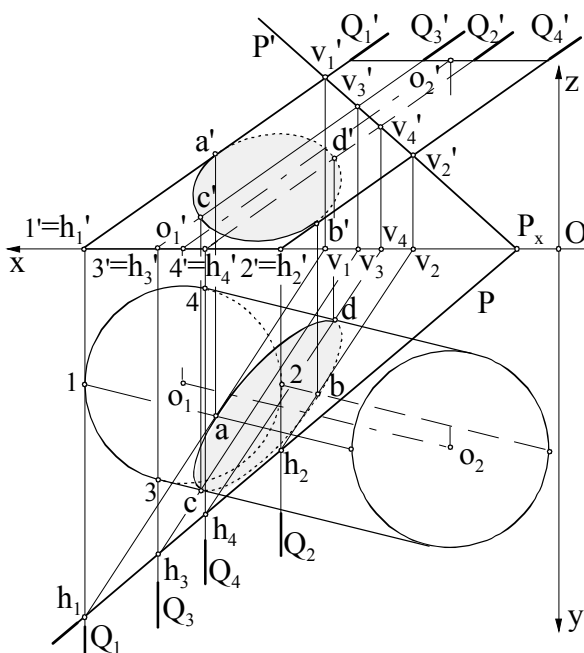


Fig.9.12 Secțiuni plane în cilindri

a) Secțiune plană în cilindru, determinată de un plan oarecare

Fig.9.13 Secțiune plană în cilindru, determinată de un plan oarecare $[P]$

Fie un cilindru circular oblic cu baza inferioară în planul orizontal de proiecție și un plan oarecare $[P]$, care îl secționează (fig.9.13). Secțiunea plană este o elipsă și se găsește determinând punctele în care generatoarele intersectează planul secant. Se folosesc plane auxiliare de capăt $[Q_1] \div [Q_4]$, duse prin generatoarele de contur aparent vertical și orizontal (cele care trec prin punctele 1, 2, 3, și 4). Generatoarele din punctele 1 și 2 determină punctele $A(a, a')$ și $B(b, b')$ ale elipsei de secțiune (punctele în care proiecția verticală a elipsei își schimbă vizibilitatea), iar generatoarele din punctele 3 și 4 determină punctele $C(c, c')$ și $D(d, d')$ ale secțiunii (punctele în care proiecția orizontală a elipsei își schimbă vizibilitatea).

Pentru o determinare mai exactă a elipsei de secțiune pot fi intersectate și alte generatoare cu planul secant $[P]$.

b) Secțiune plană într-un cilindru frontal, determinată de un plan de capăt

Secțiunea plană făcută de planul de capăt $[P]$, perpendicular pe generatoarele cilindrului frontal, cu baza inferioară în planul orizontal de proiecție, se numește *secțiune normală* și este o elipsă (fig.9.14).

Planul secant fiind proiectant față de planul vertical de proiecție, dacă se consideră un număr oarecare de generatoare, convenabil alese, proiecția verticală a secțiunii $[m'r'n'q']$ rezultă direct prin punctele în care acestea intersectează urma verticală P' a planului de capăt. Ducând liniile de ordine corespunzătoare se obține și proiecția orizontală

a elipsei de secțiune $[mrnq]$. Pentru a se trasa elipsa, s-au mai luat patru generatoare intermediare celor de contur aparent, care trec prin punctele E, G, F și I , determinând încă patru puncte ale elipsei $1, 2, 3$ și 4 .

Elipsa de secțiune se proiectează deformat pe cele două plane de proiecție. Conturul secțiunii eliptice s-a trasat respectând vizibilitatea cilindrului. Pentru a afla adevărata mărime a secțiunii, se rabate planul secant $[P]$, împreună cu secțiunea, pe planul orizontal de proiecție, obținând elipsa $[m_0r_0n_0q_0]$. Secțiunea normală într-un cilindru frontal servește la trasarea desfășurării cilindrului (subcapitolul 9.5.1)

c) Secțiune plană într-un cilindru drept

Se consideră cilindrul circular drept din figura 9.15 și un plan de capăt $[P]$, care îl secționează. Secțiunea plană obținută este o elipsă și se proiectează pe planul orizontal de proiecție suprapusă peste baza cilindrului, pe planul vertical sub forma segmentului $1'5'$, suprapus pe urma verticală P' a planului de capăt, iar pe planul lateral după o elipsă cu axe $3''7''$ și $1''5''$. În toate cele trei proiecții, elipsa de secțiune se proiectează deformat, iar pentru a afla mărimea ei reală, se rabate planul de capăt, împreună cu secțiunea, pe planul vertical de proiecție, obținând elipsa cu axe 1_05_0 și 3_07_0 .

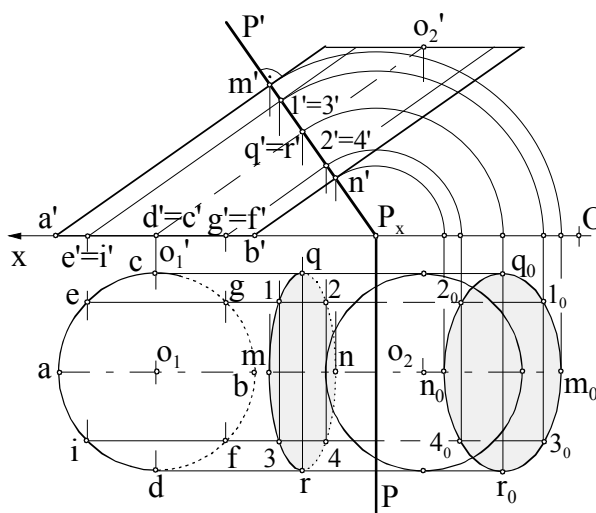


Fig.9.14 Secțiune plană într-un cilindru frontal, determinată de un plan de capăt $[P]$

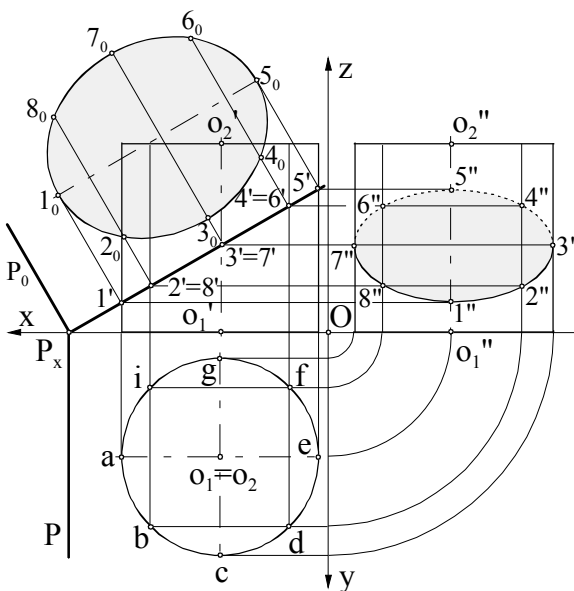


Fig.9.15 Secțiune plană într-un cilindru drept, determinată de planul de capăt $[P]$

9.3.2 Secțiuni plane în conuri

După poziția relativă pe care o are un plan secant față de conul pe care îl secționează, secțiunea plană obținută poate avea următoarele forme :

- *un triunghi* – dacă planul secant conține vârful conului (fig.9.16, a);
- *un cerc sau o elipsă* – după cum planul secant este paralel (fig.9.16, b), respectiv înclinat față de planul bazei (fig.9.16, c) și intersectează toate generatoarele conului;
- *o parabolă* – dacă planul secant este paralel cu o generatoare a conului (fig.9.16, d)
- *o hiperbolă* – dacă planul secant este paralel cu un plan ce trece prin vârful conului (fig.9.16, e).

Știind că suprafața conică este alcătuită din două pânze (de o parte și de alta a vârfului), Dandelin a emis următoarea teoremă în ce privește secțiunile în conuri : *secțiunea făcută de un plan într-un con este o elipsă, o hiperbolă sau o parabolă, după cum planul de secțiune taie o singură pânză a conului, ambele pânze ale acestuia sau este paralel cu un plan tangent la con.*

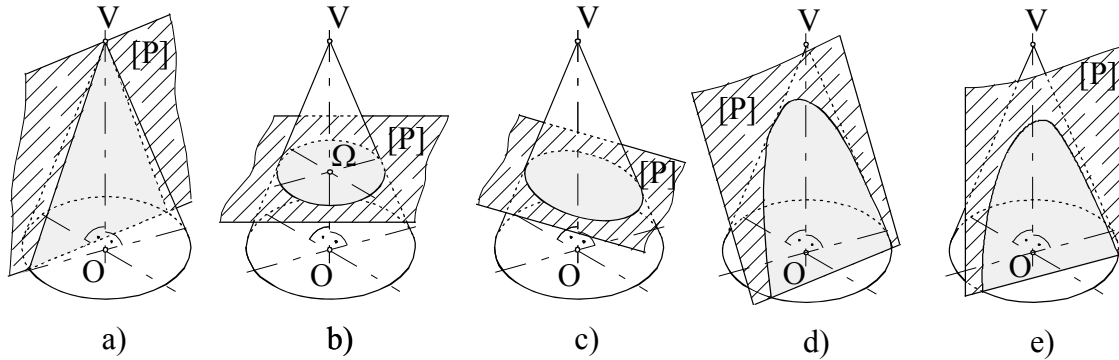


Fig.9.16 Secțiuni plane în conuri

a) Secțiune eliptică în con

Fie conul circular oblic cu baza în planul orizontal de proiecție, secționat de un plan oarecare $[P]$ (fig.9.17). Secțiunea eliptică este determinată de punctele în care generatoarele conului intersec-

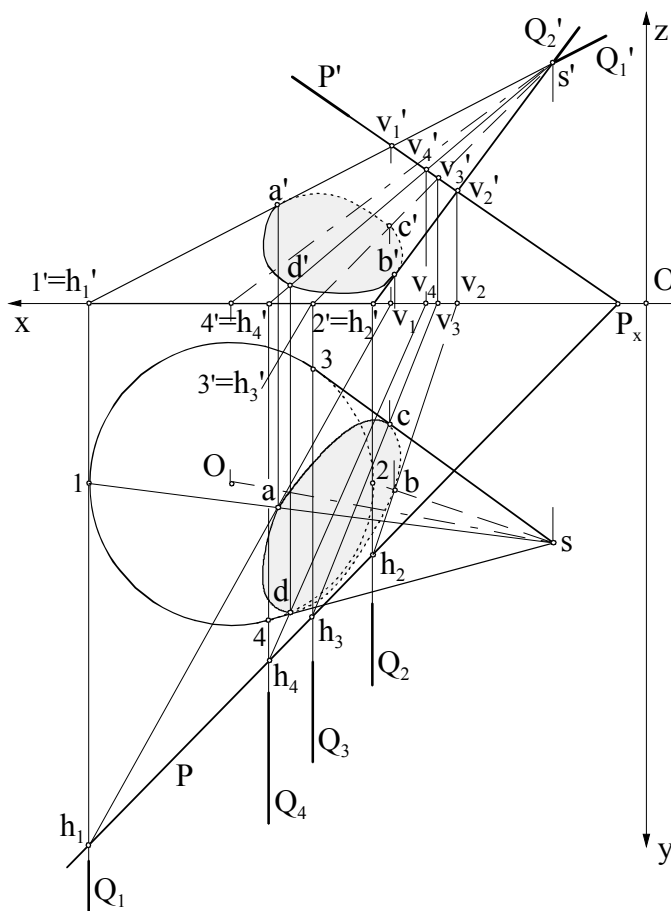


Fig.9.17 Secțiune eliptică în con circular oblic, determinată de un plan oarecare $[P]$

tează planul secant $[P]$. Astfel, se utilizează planele auxiliare de capăt $[Q_1] \div [Q_4]$ duse prin generatoarele care definesc conturul aparent în cele două proiecții : $1S$ și $2S$, în proiecția orizontală și $3S$, $4S$, în proiecția verticală. Se obțin, mai întâi în proiecția orizontală, punctele a , b , c și d , de pe conturul orizontal al elipsei de secțiune ($h_1v_1 \cap 1s = a$, $h_2v_2 \cap 2s = b$, $h_3v_3 \cap 3s = c$, $h_4v_4 \cap 4s = d$), iar apoi cu linii de ordine corespunzătoare și proiecțiile verticale a' , b' , c' , d' ($a' \in 1's'$, $b' \in 2's'$, $c' \in 3's'$, $d' \in 4's'$).

Acestea sunt și punctele care delimitează conturul vizibil al elipsei în cele două proiecții : cad , pentru proiecția orizontală și $a'b'd'$, pentru proiecția verticală.

Pentru trasarea mai exactă a elipsei se pot intersecta și alte generatoare cu planul $[P]$, obținând alte puncte de pe conturul secțiunii eliptice.

O secțiune eliptică se poate obține și prin secționarea unui con circular drept, având baza în planul orizontal de proiecție, cu un plan de capăt. Condiția este ca unghiul de înclinare a planului secant față de planul orizontal să fie mai mic decât unghiul dintre generatoarele conului și planul curbei directoare (fig.9.18).

În acest caz, elipsa de secțiune este dată în proiecția verticală de segmentul $a_1'b_1'$ (axa mare a elipsei), suprapus peste urma verticală P' a planului secant, punctele $A_1(a_1, a_1')$ și $B_1(b_1, b_1')$ fiind punctele de intersecție dintre generatoarele SA și SB cu acest plan. În proiecția orizontală, secțiunea este elipsa cu axele a_1b_1 și mn . Axa mică a elipsei $MN(mn, m'n')$ se obține cu ajutorul planului auxiliar de nivel $[N]$ dus la jumătatea segmentului $a_1'b_1'$, adică prin centrul elipsei din proiecția verticală și reprezintă punctele de intersecție dintre planul $[P]$, suprafața conică și planul de nivel. Se procedează astfel : se intersectează planul $[N]$ cu suprafața conică și se obține cercul de rază r_1 , cu centrul în centrul bazei (se proiectează pe planul orizontal în adevărată mărime), se determină dreapta de capăt $MN(mn, m'n')$, de intersecție dintre planul $[N]$ și planul $[P]$ și apoi se intersectează cele două elemente rezultate : cercul și dreapta de capăt.

Proiecțiile orizontale c_1 și d_1 de pe conturul orizontal al elipsei de secțiune se determină cu ajutorul proiecției laterale a conului, fiind punctele de tangență a elipsei cu conturul aparent din planul lateral, fiind situate pe generatoarele $s''c''$ și $s''d''$.

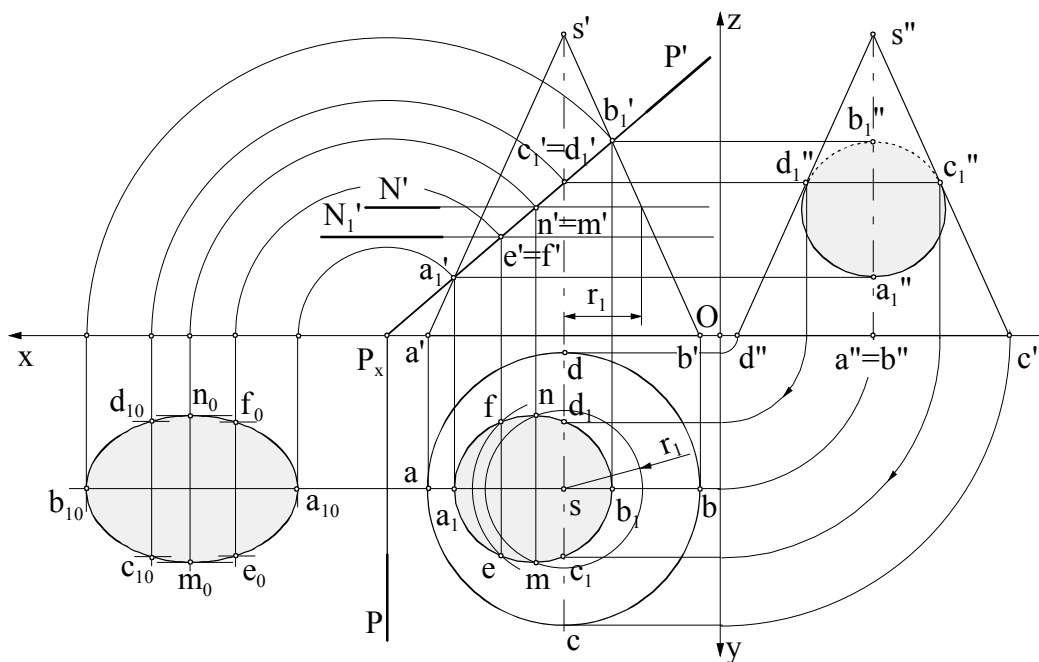


Fig.9.18 Secțiune eliptică în conul circular drept, determinată de un plan de capăt $[P]$

Alte puncte ale secțiunii eliptice se determină ducând alte plane de nivel. Cu ajutorul planului $[N_1]$ se determină punctele $E(e, e', e'')$ și $F(f, f', f'')$ de pe conturul elipsei, conform metodologiei explicate mai sus.

Adevărata mărime a secțiunii se poate determina prin rabaterea planului de capăt $[P]$, împreună cu secțiunea, pe planul orizontal de proiecție. Aceasta este elipsa cu axele $a_{10}b_{10}$ și m_0n_0 .

b) Secțiune parabolică în con

Se consideră conul circular drept cu baza în planul orizontal de proiecție și planul de capăt $[P]$, paralel cu generatoarea SA a conului.

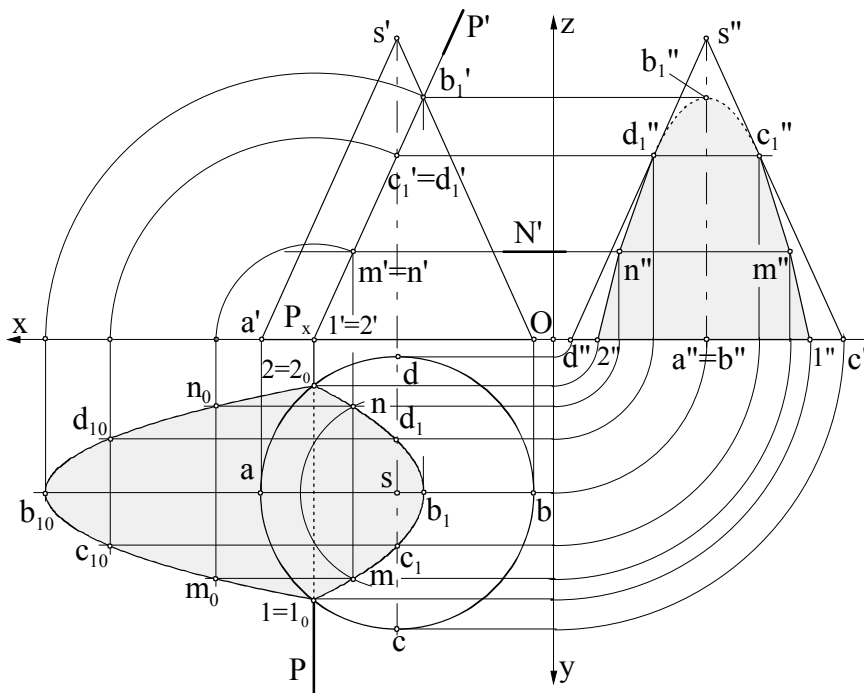


Fig. 9.19 Secțiune parabolică în conul circular drept, determinată de un plan de capăt $[P]$

Secțiunea determinată de acest plan în con este o parabolă și se observă că planul secționează numai o pânză a conului, având unghiul de înclinare față de planul orizontal egal cu unghiul dintre generatoarea conului și planul bazei (fig. 9.19).

Proiecția verticală a parabolei este confundată cu urma verticală P' a planului. Ura orizontală P intersectează baza conului în punctele $(1, 1')$ și $(2, 2')$, care aparțin

parabolei. Vârful parabolei $B_1(b_1, b_1')$ este dat de intersecția generatoarei SB cu planul secant $[P]$. Punctele $C_1(c_1, c_1')$ și $D_1(d_1, d_1')$, de intersecție a generatoarelor SC și SD cu planul $[P]$, sunt determinate cu ajutorul proiecției laterale a conului, c_1'' și d_1'' fiind punctele de tangență a proiecției laterale a parabolei cu conturul aparent lateral al conului.

Alte puncte utile pentru trasarea parabolei, cum sunt punctele $M(m, m')$ și $N(n, n')$ se determină cu ajutorul planului de nivel $[N]$, ca fiind punctele de intersecție dintre dreapta de capăt MN și cercul de secțiune rezultat în urma intersecției conului cu planul de nivel (intersecția este vizibilă pe proiecția orizontală).

Secțiunea parabolică se proiectează deformat pe cele trei plane de proiecție, iar pentru determinarea mărimii ei reale se rabate planul de capăt, împreună cu secțiunea, pe planul orizontal, obținând parabola $I_0b_{10}2_0$.

c) Secțiune hiperbolică în con

O secțiune hiperbolică se obține prin secționarea unui con circular drept, cu baza în planul orizontal de proiecție, cu un plan de capăt $[P]$ paralel cu un plan $[Q]$, care trece prin vârful conului (fig. 9.20).

Se observă că planul $[P]$ intersectează ambele pânze ale conului, generând două hiperbole ca secțiune. Acestea au vârfurile în punctele $A_1(a_1, a_1')$ și $B_1(b_1, b_1')$, în care generatoarele $SA(sa, s'a')$ și $SB(sb, s'b')$ intersectează planul secant $[P]$.

Punctele $(1, 1')$, $(2, 2')$, $(3, 3')$ și $(4, 4')$ rezultă ca intersecția planului $[P]$ cu cercurile bazelor celor două pânze ale conului și aparțin hiperbolelor.

Punctele $C_1(c_1, c_1')$ și $D_1(d_1, d_1')$ de intersecție a generatoarelor SC , respectiv SD , cu planul $[P]$ se determină fie prin construirea proiecției laterale a conului, fie ca în figură, ducând un plan auxiliar de nivel $[N_1]$, care secționează conul după un cerc.

Planul $[Q]$ secționează conul după generatoarele $SM(sm, s'm')$ și $SN(sn, s'n')$. Ura orizontală P a planului secant $[P]$ intersectează în punctele m_1 și n_1 tangentele la curba generatoare, duse prin punctele m și n .

Asimptotele hiperbolelor din proiecția orizontală trec prin punctele m_l și n_l și au direcția paralelă cu generatoarele sm și sn . Intersecția lor reprezintă centrul hiperbolei (α, α') . Alte puncte ale hiperbolelor de secțiune se găsesc ducând plane de nivel ajutătoare; cu planul $[N_2]$ se determină punctele $(7, 7')$ și $(8, 8')$, iar cu planul $[N_3]$, punctele $(5, 5')$ și $(6, 6')$.

Adevărata mărime a secțiunilor hiperbolice se determină prin rabatere pe planul orizontal de proiecție. Odată cu hiperbolele s-au rabătut și asimptotele, prin rabaterea centrului hiperbolelor (α, α') în α_0 , punctele m_l și n_l fiind în planul orizontal.

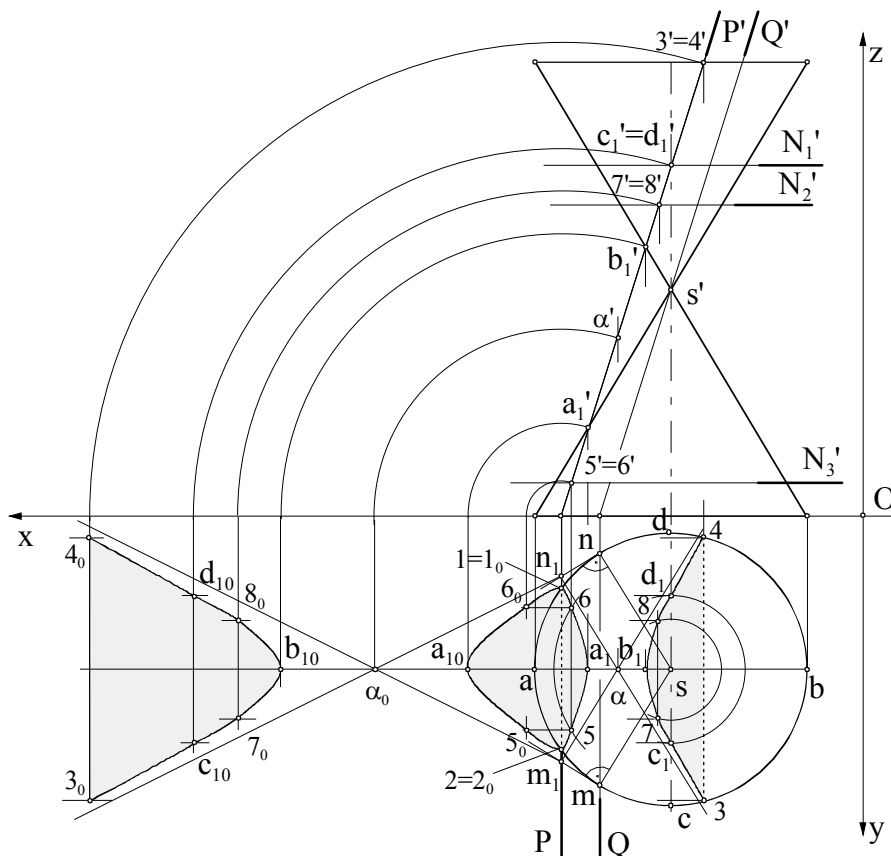


Fig.9.20 Secțiune hiperbolică în conul circular drept, determinată de un plan de capăt $[P]$

9.3.3 Secțiuni plane în sferă

Secțiunea făcută de un plan într-o sferă este un cerc. Punctele secțiunii circulare se determină cu ajutorul unor plane auxiliare, de regulă de nivel sau de front, care intersectează sfera după cercuri paralele cu cercul meridian sau cu ecuatorul, iar planul secant după drepte particulare. Elementele rezultate se intersectează la rândul lor după puncte, care aparțin cercului de secțiune al sferei.

a) Secționarea sferei cu un plan oarecare

Fie sfera cu centrul în punctul $\Omega(\omega, \omega')$ și planul oarecare $[P]$. Secțiunea plană determinată de planul $[P]$ în sferă este un cerc și se proiectează pe cele două plane de proiecție sub forma unor elipse (fig.9.21).

Planul de nivel $[N]$ dus prin centrul sferei, $\omega' \in N'$, secționează sfera după cercul ecuator (proiecția orizontală a sferei) și intersectează planul $[P]$ după orizontala $G(g, g')$, iar acestea la rândul lor se intersectează în punctele $(3, 3')$ și $(4, 4')$, determinând axa mare a

elipsei din proiecția orizontală, 34. Planul de front $[F]$ dus prin centrul sferei, $\omega \in F$, secționează sfera după cercul meridian (proiecția verticală a sferei) și intersectează planul $[P]$ după frontala $F(f, f')$, iar din intersecția lor rezultă punctele $(1, 1')$ și $(2, 2')$, care determină axa mare a elipsei de secțiune din proiecția verticală, $1'2'$.

Pentru determinarea altor puncte aparținând elipsei s-au mai folosit alte două plane de nivel $[N_1]$ și $[N_2]$, echidistante față de centrul sferei, astfel încât acestea determină în sferă secțiunile circulare c_1 și c_2 , a căror proiecții orizontale sunt confundate. Orizontalele $G_1(g_1, g_1')$ și $G_2(g_2, g_2')$ determină la intersecția cu cercul $c_1 \equiv c_2$, punctele 5, 6, respectiv 7, 8 ale secțiunii.

Punctele $1'$, $2'$ și respectiv 3, 4 limitează porțiunile vizibile pentru cele două proiecții ale secțiunii în sferă.

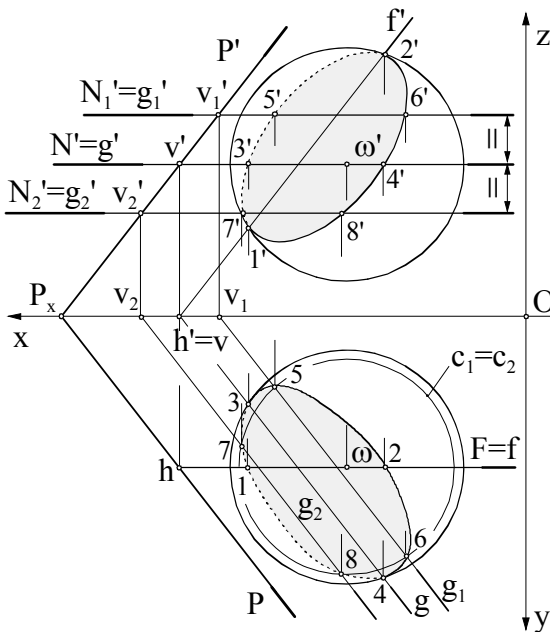


Fig.9.21 Secționarea sferei cu un plan oarecare $[P]$

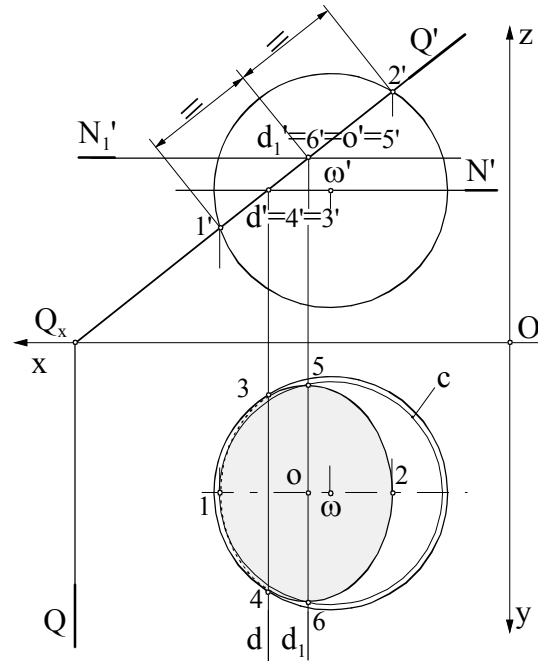


Fig.9.22 Secționarea sferei cu un plan de capăt $[Q]$

b) Secționarea sferei cu un plan proiectant

Dacă sfera este secționată cu un plan de capăt $[Q]$, cercul de secțiune se determină în proiecția verticală direct prin segmentul $1'2'$, suprapus pe urma verticală Q' , dat de punctele în care planul intersectează cercul meridian (fig.9.22). Acesta este diametrul cercului de secțiune și este în adevărată mărime, fiind paralel cu planul vertical de proiecție, iar în proiecția orizontală 12 reprezintă axa mică a elipsei după care se proiectează cercul de secțiune. Axa mare a elipsei, 56 , este situată pe dreapta de capăt $D_1(d_1, d_1')$, care trece prin centrul $O(o, o')$ al secțiunii ($1'o' = o'2'$), iar pentru determinarea ei în proiecția orizontală, se utilizează planul de nivel $[N_1]$, dus prin punctul O , $o' \in N_1'$, care secționează sfera după cercul c , $d_1 \cap c = 5$, $d_1 \cap c = 6$.

Pentru trasarea elipsei în proiecția orizontală sunt importante și punctele de pe conturul cercului ecuator, unde curba de secțiune își schimbă vizibilitatea. Astfel, se trasează planul de nivel $[N]$, dus prin centrul sferei, $\omega' \in N'$, și se determină punctele 3 și 4 pe proiecția orizontală a conturului aparent al sferei, prin intersecția acestuia cu dreapta de capăt d , rezultată ca intersecția planului de capăt $[Q]$ cu planul de nivel.

9.4 Intersecția suprafețelor curbe cu drepte

Problema determinării punctelor de intersecție dintre o dreaptă și o suprafață curbă se rezolvă ducând prin dreaptă un plan auxiliar. Punctele de intersecție dintre dreapta dată și conturul secțiunii determinate de planul auxiliar sunt punctele căutate.

Când corpurile sunt situate în poziții particulare față de planele de proiecție, punctele în care o dreaptă intersectează un astfel de corp pot să rezulte direct, fără a mai utiliza plane auxiliare.

9.4.1 Intersecția unui cilindru cu o dreaptă

Fie cilindrul circular oblic cu baza în planul orizontal de proiecție și dreapta $D(d, d')$ (fig.9.23). Pentru determinarea punctelor în care dreapta intersectează cilindrul, se poate aplica una din cele două metode studiate la intersecția poliedrelor cu drepte (având în vedere că cilindrul este o prismă cu un număr infinit de muchii și respectiv de fețe).

Dacă se folosește metoda secțiunilor transversale, secțiunea determinată în cilindru de planul auxiliar este o elipsă, iar exactitatea determinării punctelor de intersecție este influențată de precizia de construire a elipsei de secțiune. Astfel, se preferă metoda secțiunilor longitudinale.

Planul auxiliar dus prin dreapta $D(d, d')$, paralel cu generatoarele cilindrului, este determinat de două drepte concurente în punctul $M(m, m')$, $M \in D$, dreapta D și o dreaptă $\Delta(\delta, \delta')$, paralelă cu generatoarele cilindrului. Urma orizontală P , $P = h \cup h_1$, a planului secant intersectează cercul bazei cilindrului după segmentul 12 , iar suprafața laterală a cilindrului după generatoarele $(13, 1'3')$ și $(24, 2'4')$.

Dreapta D intersectează cilindrul în punctele (α, α') și (β, β') , care rezultă ca puncte de intersecție dintre proiecțiile dreptei și paralelogramul de secțiune.

Vizibilitatea dreptei în cele două proiecții este dată de vizibilitatea generatoarelor $(1\alpha, 1'\alpha')$ și $(2\beta, 2'\beta')$.

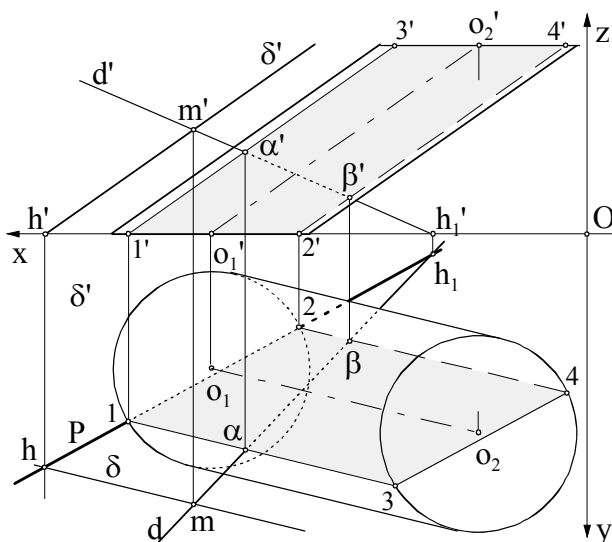


Fig.9.23 Intersecția unui cilindru circular oblic cu o dreaptă oarecare $D(d, d')$

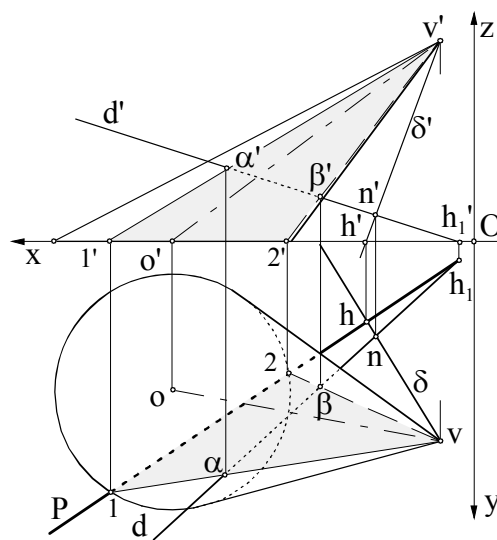


Fig.9.24 Intersecția unui con circular oblic cu o dreaptă oarecare $D(d, d')$

9.4.2 Intersecția unui con cu o dreaptă

Și în cazul intersecției dintre un con și o dreaptă, metoda care dă rezultatele cele mai exacte este metoda secțiunilor longitudinale.

Punctele în care dreapta $D(d, d')$ intersectează conul circular oblic, cu baza în planul orizontal de proiecție, din figura 9.24, se determină ducând un plan auxiliar prin dreaptă și prin vârful $V(v, v')$ al conului. Planul secant $[P]$ este determinat de două drepte concurente în punctul $N(n, n')$, $N \in D$: dreapta dată D și o dreaptă $\Delta(\delta, \delta')$, definită de punctul N și de vârful conului, $\delta = n \cup v$, $\delta' = n' \cup v'$. Se determină urmele orizontale ale celor două drepte și se trasează urma orizontală P a planului secant, $P = h_l \cup h$. Aceasta intersectează cercul de bază al conului în punctele 1 și 2, iar planul $[P]$ intersectează suprafața conului după generatoarele $V1$ și $V2$, rezultând o secțiune longitudinală triunghiulară în con, $[1V2]$.

Punctele (α, α') și (β, β') în care dreapta $D(d, d')$ intersectează triunghiul de secțiune $(1v2, 1'v'2')$ sunt punctele în care dreapta intersectează conul.

Atât în proiecția orizontală, cât și în proiecția verticală vizibilitatea dreptei este dată de cele două generatoare pe care le intersectează. Astfel cele două proiecții sunt invizibile de la punctul (α, α') până la punctul (β, β') și mai departe până la generatoarea de contur aparent, deoarece punctul (β, β') este situat pe suprafața invizibilă a conului.

9.4.3 Intersecția unei sfere cu o dreaptă

În general, o dreaptă intersectează o sferă în două puncte. Se disting două cazuri: dreapta trece sau nu prin centrul sferei. Pentru determinarea punctelor de intersecție se folosesc metodele Geometriei descriptive, simplificând rezolvarea problemei.

a) *Intersecția sferei cu o dreaptă care trece prin centrul sferei*

Se consideră sfera cu centrul în punctul $\Omega(\omega, \omega')$ și dreapta $D(d, d')$, care trece prin centrul sferei (fig.9.25). Proiecția sferei pe planul vertical de proiecție este cercul meridian obținut prin secționarea sferei cu planul de front $[F]$, ce trece prin centrul sferei. Printr-o

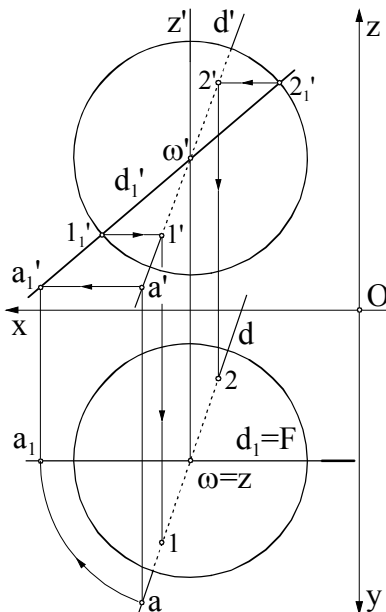


Fig.9.25 Intersecția sferei cu o dreaptă care trece prin centrul sferei

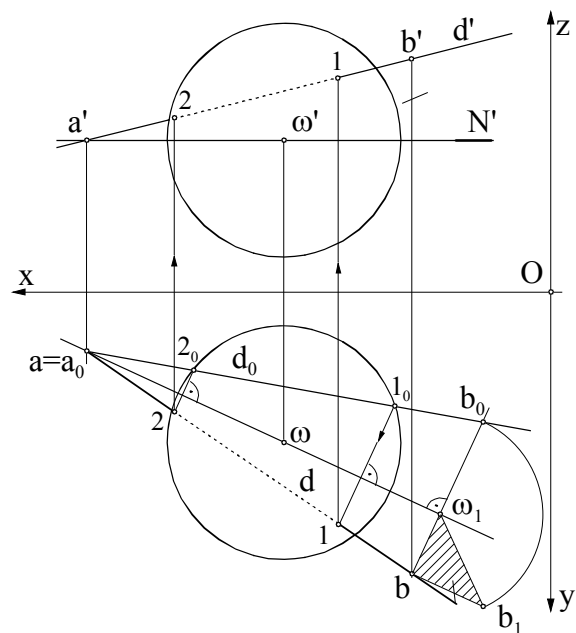


Fig.9.26 Intersecția sferei cu o dreaptă care nu trece prin centrul sferei (rabatere pe plan de nivel)

rotație de nivel, luând axa de rotație $Z(z, z')$ prin centrul sferei, se transformă dreapta D în frontala $D_I(d_I, d_I')$, conținută în planul $[F]$, cu ajutorul punctului $A(a, a')$. Astfel, cercul meridian și dreapta D_I sunt coplanare și se intersectează în punctele $1_I'$ și $2_I'$. Revenind din rotație, în proiecția verticală se obțin proiecțiile $1'$ și $2'$ pe proiecția d' , iar apoi cu linii de ordine se determină și proiecțiile orizontale 1 și 2 pe proiecția orizontală d . Punctele $(1, 1')$ și $(2, 2')$ sunt punctele în care dreapta $D(d, d')$ intersectează sfera.

În proiecția orizontală, dreapta este invizibilă de la conturul aparent până în punctul 2 , iar în proiecția verticală este invizibilă între punctele $1'$ și $2'$, în funcție de poziția punctelor de intersecție pe sferă.

b) *Intersecția sferei cu o dreaptă care nu trece prin centrul sferei*

Determinarea punctelor în care o dreaptă care nu trece prin centrul sferei o intersectează, se poate face utilizând metodele Geometriei descriptive, în mai multe moduri.

Fie sfera cu centrul în punctul $\Omega(\omega, \omega')$ și dreapta $D(d, d')$, care o intersectează (fig.9.26). Dreapta D și centrul sferei determină un plan care se rabate pe planul de nivel $[N]$, ce trece prin centrul sferei. Axa de rabatere este orizontala $a\omega$ și pentru determinarea poziției rabătute d_0 a dreptei, se mai rabate punctul $B(b, b')$, cu ajutorul triunghiului de poziție, $d_0 = a_0 \cup b_0$. Planul de nivel $[N]$ taie sfera după cercul ecuator, iar dreapta rabătuată d_0 îl intersectează în punctele 1_0 și 2_0 . Ridicând din rabatere aceste puncte, se obțin proiecțiile orizontale 1 și 2 , pe proiecția d și ducând liniile de ordine corespunzătoare, punctele $1'$ și $2'$, pe proiecția verticală d' , acestea fiind punctele de intersecție dintre dreaptă și sferă.

Vizibilitatea dreptei $D(d, d')$ rezultă din epură, proiecțiile dreptei fiind invizibile între punctele de intersecție cu sfera.

Aceeași problemă se poate rezolva ducând prin dreaptă un plan proiectant vertical $[P]$, $P \equiv d$ (fig.9.27). Se rabate planul împreună cu dreapta și cu secțiunea circulară, pe care

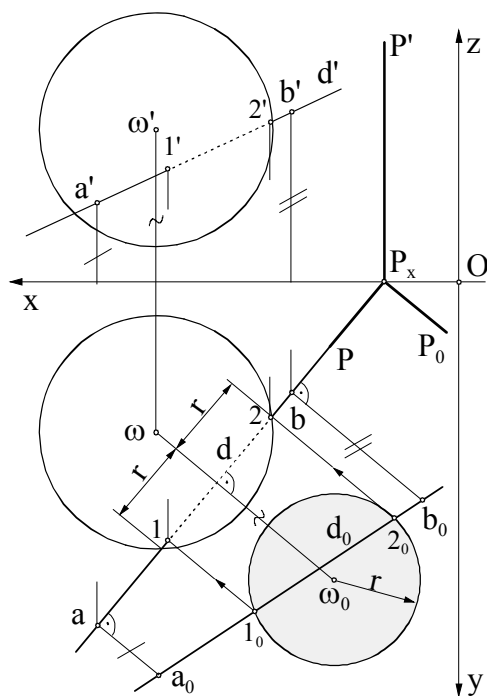


Fig.9.27 Intersecția sferei cu o dreaptă care nu trece prin centrul sferei

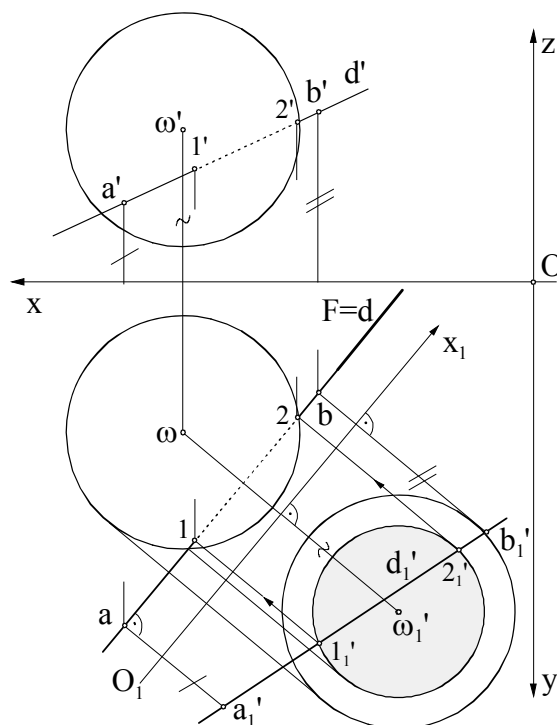


Fig.9.28 Intersecția sferei cu o dreaptă care nu trece prin centrul sferei

o determină în sferă, pe planul orizontal de proiecție. Proiecția rabătată d_0 a dreptei intersectează cercul de secțiune în punctele 1_0 și 2_0 . Se revine din rabatere și se obțin proiecțiile orizontale 1 și 2 , pe proiecția d , iar apoi cu linii de ordine se determină proiecțiile verticale $1'$ și $2'$, pe proiecția d' a dreptei, punctele $(1, 1')$ și $(2, 2')$ fiind punctele de intersecție dintre sferă și dreapta $D(d, d')$.

În figura 9.28 determinarea punctelor în care dreapta $D(d, d')$ intersectează sfera cu centrul în punctul $\Omega(\omega, \omega')$, se face utilizând metoda schimbării planului de proiecție vertical. Astfel, dreapta $D(d, d')$ se transformă în dreapta $D_1(d_1, d_1')$, care este o frontală, luând noua linie de pământ O_1x_1 paralelă cu proiecția d . Se secționează sfera cu un plan de front $[F]$, ce conține proiecția d . Cercul de secțiune obținut se proiectează pe noul plan vertical de proiecție în adevărată mărime, concentric cu proiecția sferei în ω_1' . Proiecția verticală d_1' intersectează cercul de secțiune în punctele $1_1'$ și $2_1'$. Revenind din schimbarea de plan, în sistemul inițial de proiecție, se obțin punctele $(1, 1')$ și $(2, 2')$, puncte în care dreapta $D(d, d')$ intersectează sfera.

Vizibilitatea dreptei $D(d, d')$, în ambele proiecții, rezultă analizând poziția punctelor de intersecție pe sferă.

9.5 Desfășurarea suprafețelor curbe

Desfășurarea suprafețelor curbe riglate se face, în principiu, după metodologia de la desfășurarea poliedrelor, înscriind în curba lor directoare un poligon cu n laturi, suprafața curbă transformându-se într-o suprafață poliedrală cu un număr n de fețe. Precizia obținută la desfășurarea unei suprafețe curbe este direct proporțională cu mărimea numărului n .

Pentru trasarea desfășuratei suprafeței curbe se unesc punctele de pe desfășurata poliedrului înscris cu linii curbe, ținând seama de *Teorema lui Olivier*: *Transformata prin desfășurare a secțiunii făcute de un plan într-un cilindru sau un con, prezintă inflexiuni (punctele în care transformata curbei de secțiune își schimbă sensul concavității) în punctele în care planul tangent la suprafața cilindrică sau conică este perpendicular pe planul secant.*

În cazurile când suprafața curbă are o generatoare perpendiculară pe planul secant, transformata prin desfășurare a curbei de secțiune nu are puncte de inflexiune.

9.5.1 Desfășurarea suprafețelor cilindrice

Pentru desfășurarea unui cilindru, elementele necesare sunt mărimea reală a generatoarelor și lungimea curbei de secțiune normală (perpendiculară) pe generatoare.

Secțiunea normală pe generatoare este aceeași indiferent unde este făcută pe lungimea generatoarelor și este necesară pentru determinarea distanței dintre două generatoare consecutive. Lungimea curbei de secțiune se aproximează prin coardele arcelor de curbă din care este formată aceasta, pe care le subîntind.

Lungimea generatoarelor, când acestea nu sunt într-o poziție particulară, paralele sau perpendiculare pe planul de proiecție, se determină cu una din metodele Geometriei descriptive, de obicei prin schimbarea planelor de proiecție.

a) Desfășurarea cilindrului drept

Fie dat cilindrul circular drept, cu baza în planul orizontal de proiecție și un plan de capăt $[P]$, care îl secționează (fig.9.29). Pentru desfășurarea suprafeței cilindrice cuprinsă între planul $[P]$ și planul orizontal, se face desfășurarea întregului cilindru, peste care se suprapune desfășurata curbei de secțiune, determinată de planul secant $[P]$, în cilindru.

Desfășurata cilindrului drept este un dreptunghi cu lungimea egală cu circumferința cercului bazei, iar lățimea, înălțimea generatoarelor (în adevărată mărime în proiecția verticală, având în vedere că sunt drepte verticale).

Pentru trasarea grafică a desfășuratei, se înscrie în cilindru o prismă cu opt fețe. Secțiunea normală necesară pentru desfășurare este chiar cercul bazei, care se desfășoară pe o linie dreaptă A_0A_0 , măsurând segmentele $A_0B_0 = ab$, $B_0C_0 = bc, \dots K_0A_0 = ka$, din proiecția orizontală. Prin punctele $A_0, B_0, \dots A_0$ se ridică segmente egale cu lungimea generatoarelor. Transformata secțiunii eliptice se obține prin măsurarea pe generatoarele de pe desfășurată a segmentelor $A_0I_0 = a'1'$, $B_02_0 = b'2'$, $C_03_0 = c'3'$, $\dots K_08_0 = k'8'$ și unirea punctelor $I_0, 2_0, 3_0, \dots 8_0, I_0$.

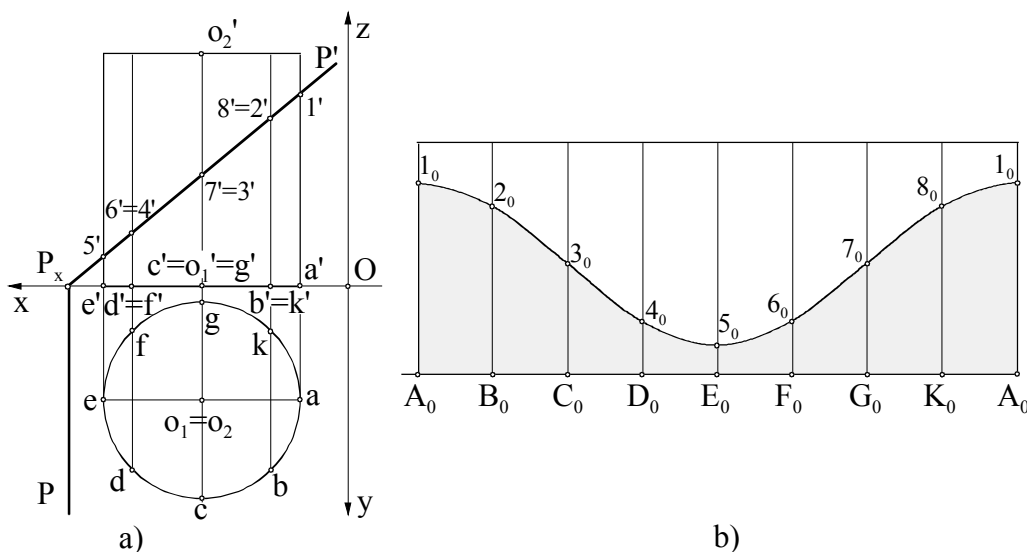


Fig.9.29 Desfășurarea cilindrului drept :

a) epura cilindrului drept ; b) desfășurata cilindrului drept și a trunchiului de cilindru

b) Desfășurarea cilindrului oblic

Pentru a trasa desfășurata cilindrului oblic din figura 9.30, se procedează ca și la desfășurarea prisme oblice, parcurgându-se următoarele etape :

1) Se determină adevărata mărime a generatoarelor cilindrului, printr-o schimbare de plan vertical de proiecție, acestea devenind frontale. Noua linie de pământ se ia paralelă cu proiecțiile orizontale ale generatoarelor. Axa O_1O_2 a cilindrului devine O_3O_4 , în noul sistem de proiecție $([H], [V_I])$, baza inferioară cu centrul în O_3 având cota zero, iar baza superioară cu centrul în O_4 , păstrându-și cota egală cu cota punctului O_2 ;

2) Se înscrie în cilindrul transformat o prismă cu opt fețe;

3) Se determină o secțiune normală în cilindru, prin intersectarea lui cu un plan de capăt $[P]$, $P' \perp a_1'5'$, $P \perp a5$. Secțiunea obținută ($I \div 8$) este o elipsă, care se proiectează pe planul vertical $[V_I]$ după segmentul $I'5'$;

4) Se determină mărimea reală a elipsei de secțiune, prin rabaterea planului $[P]$, împreună cu secțiunea, pe planul orizontal de proiecție;

5) Pe o linie dreaptă se trasează desfășurata secțiunii normale, aproximând lungimile arcelor de elipsă cu coardele corespunzătoare : $I2 = I_02_0$, $23 = 2_03_0, \dots 8I = 8_0I_0$;

6) În punctele care determină desfășurata secțiunii normale se trasează direcțiile generatoarelor, perpendiculare pe aceasta și se măsoară pe ele lungimile reale ale

generatoarelor corespunzătoare, din noua proiecție verticală, de o parte și de alta a urmei verticale P' . Exemplu : $1A_0 = a_1'1'$, $5E_0 = e_1'5'$;

7) Se unesc extremitățile generatoarelor cu arce de curbă, ținând seama că punctele de inflexiune în trasarea transformatelor cercurilor bazelor sunt în punctele C_0 și G_0 , unde planele tangente la suprafața cilindrică este perpendiculară pe planul secant, care este planul orizontal de proiecție;

8) Pentru ca desfășurata cilindrului să fie completă, după caz, se pot adăuga și suprafețele celor două cercuri de bază.

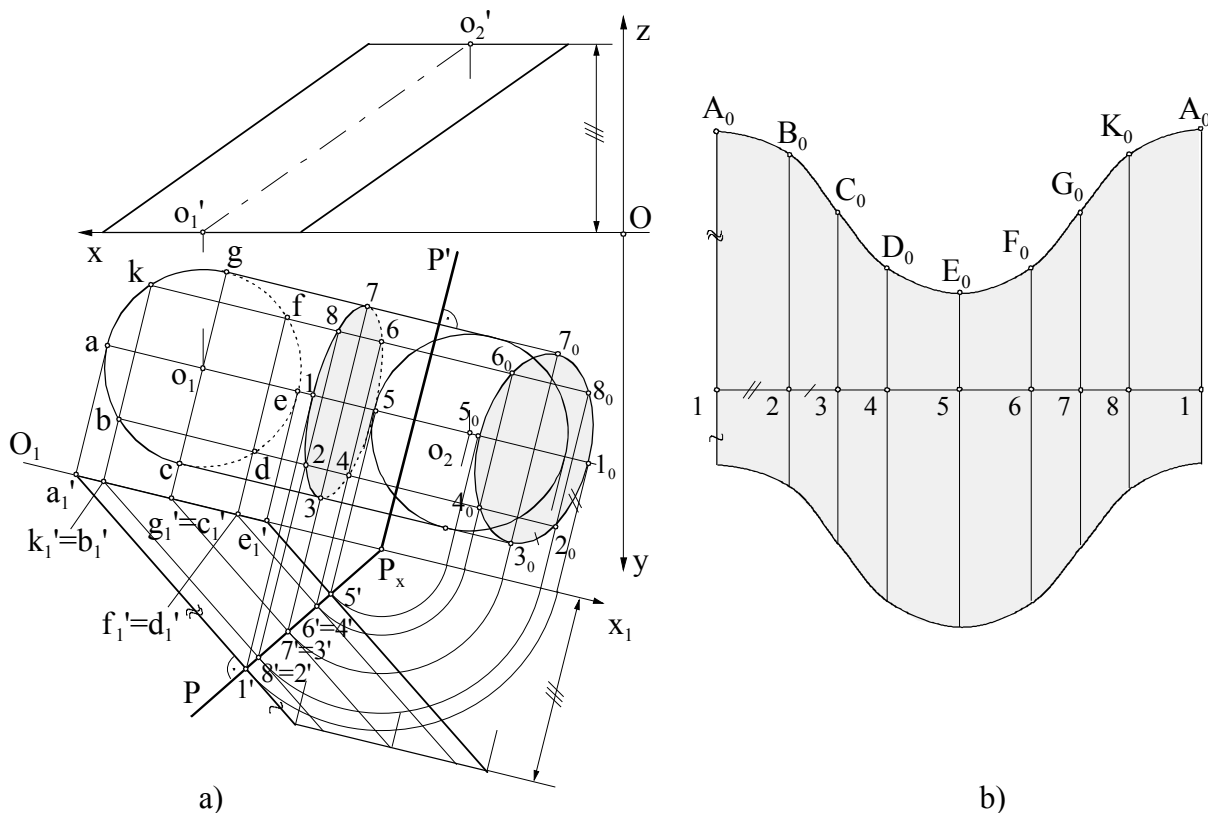


Fig.9.30 Desfășurarea cilindrului oblic :
a) epura cilindrului oblic ; b) desfășurata cilindrului oblic

9.5.2 Desfășurarea suprafețelor conice

Desfășurarea suprafeței laterale a unui con se face considerând conul ca o piramidă cu un număr infinit de laturi și respectând raționamentul făcut la desfășurarea piramidei.

Elementele necesare desfășurării unei suprafețe conice sunt lungimea reală a generatoarelor conului și lungimea curbei de bază.

a) Desfășurarea conului drept

Se consideră conul circular drept cu baza în planul orizontal de proiecție și un plan de capăt $[Q]$, care îl secționează (fig.9.31).

Pentru desfășurarea trunchiului de con obținut se face desfășurarea suprafeței laterale a întregului con, iar apoi pe aceasta se trasează transformata prin desfășurare a curbei de secțiune generată de planul $[Q]$.

Desfășurata conului drept este un sector de cerc de rază egală cu generatoarea extremă, $S_0A_0 \equiv s'a'$ (generatoare în poziție de frontală) și cu lungimea arcului egală cu lungimea cercului de bază. Pentru trasarea grafică a desfășuratei conului se construiește un arc de cerc cu vârful în punctul $s' \equiv S_0$, de rază $s'a'$, pe care se transpun lungimile coardelor care aproximează lungimile arcelor bazei, $A_0B_0 = ab$, $B_0C_0 = bc, \dots K_0A_0 = ka$. Desfășurarea conului este aproximată prin desfășurarea unei piramide cu 8 fețe înscrisă în con. Punctele de pe desfășurata bazei se unesc cu vârful S_0 și se obțin generatoarele transpuse pe desfășurată.

Secțiunea făcută de planul $[Q]$ în con este o elipsă, punctele ce o determină obținându-se la intersecția generatoarelor conului cu urma verticală Q' a planului, $a's' \cap Q' = 1'$, $b's' \cap Q' = 2'$, $\dots k's' \cap Q' = 8'$. Punctele obținute se transpun pe generatoarele de pe desfășurată, după ce în prealabil generatoarele lor au fost rotite și transformate în frontale, pentru a fi în adevărată mărime în proiecția verticală (rotație de nivel în jurul unei axe care este chiar axa conului, astfel încât fiecare generatoare se suprapune peste generatoarea SA). În timpul rotației, proiecțiile verticale ale punctelor de secțiune $1' \div 8'$ se translatează paralel cu axa Ox până pe generatoarea $s'a'$, de unde sunt rotite pe generatoarele corespunzătoare de pe desfășurată, obținând punctele $1_0 \div 8_0$. Curba generată de aceste puncte reprezintă transformata prin desfășurare a secțiunii eliptice și delimitează în partea superioară desfășurata trunchiului de con.

Pentru precizia trasării curbei de secțiune, se determină *punctele de inflexiune*.

Aceste puncte există când conul admite plan tangent perpendicular pe planul secant $[Q]$ și se verifică, dacă dreapta $D(d, d')$, trasată prin vârful conului și perpendiculară pe planul secant are urma orizontală h în afara cercului de bază. Urmele orizontale ale celor două plane tangente sunt date de tangentele duse din urma h la cercul de bază, hm și hn , iar generatoarele de tangentă, SM și SN , dau la intersecția cu planul $[Q]$ punctele de inflexiune. Acestea sunt $\alpha' \equiv \beta' = s'm' \cap Q'$.

Se trasează pe desfășurată generatoarele S_0M_0 și S_0N_0 , măsurând coardele $en = E_0N_0$ și $fm = F_0M_0$, iar apoi se transpun pe generatoare punctele de inflexiune α_0 și β_0 , după procedeul descris mai sus.

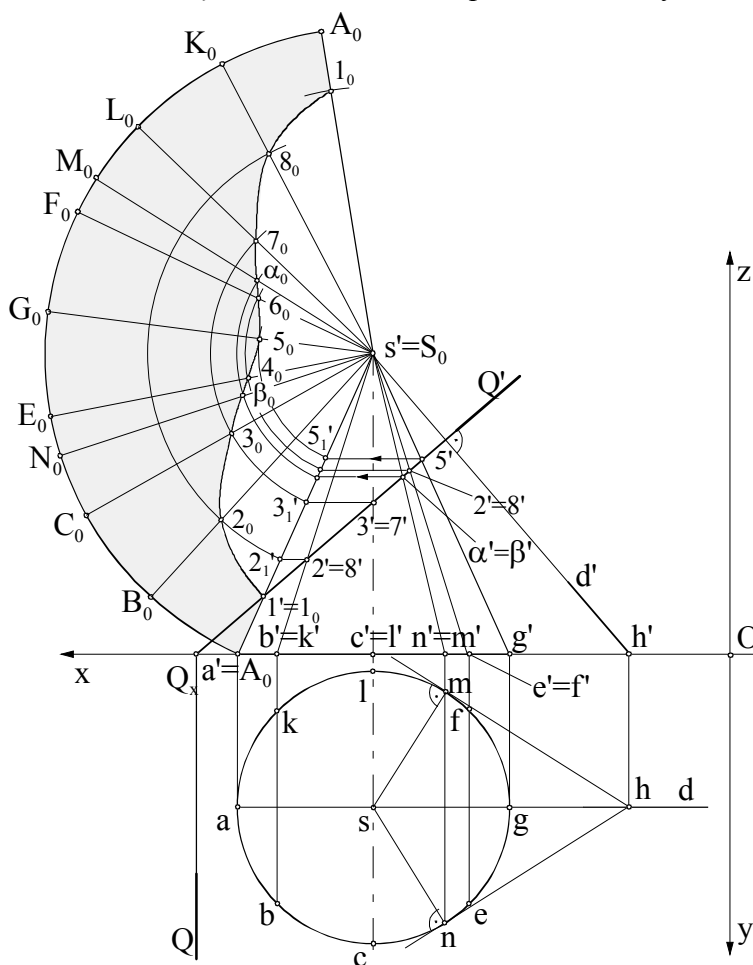


Fig.9.31 Desfășurarea conului drept

b) Desfășurarea conului oblic

Fie conul oblic, cu baza un cerc în planul orizontal de proiecție și vârful în punctul $S(s, s')$ (fig.9.32). Pentru a trasa desfășurata suprafeței laterale a conului, avem adevărata mărime a bazei, în proiecția din planul orizontal, iar pentru a determina lungimea reală a generatoarelor se face o rotație de nivel, în jurul axei $Z(z, z')$, dusă prin vârful conului. Astfel, generatoarele se transformă în frontale și se proiectează în adevărată mărime pe planul vertical de proiecție.

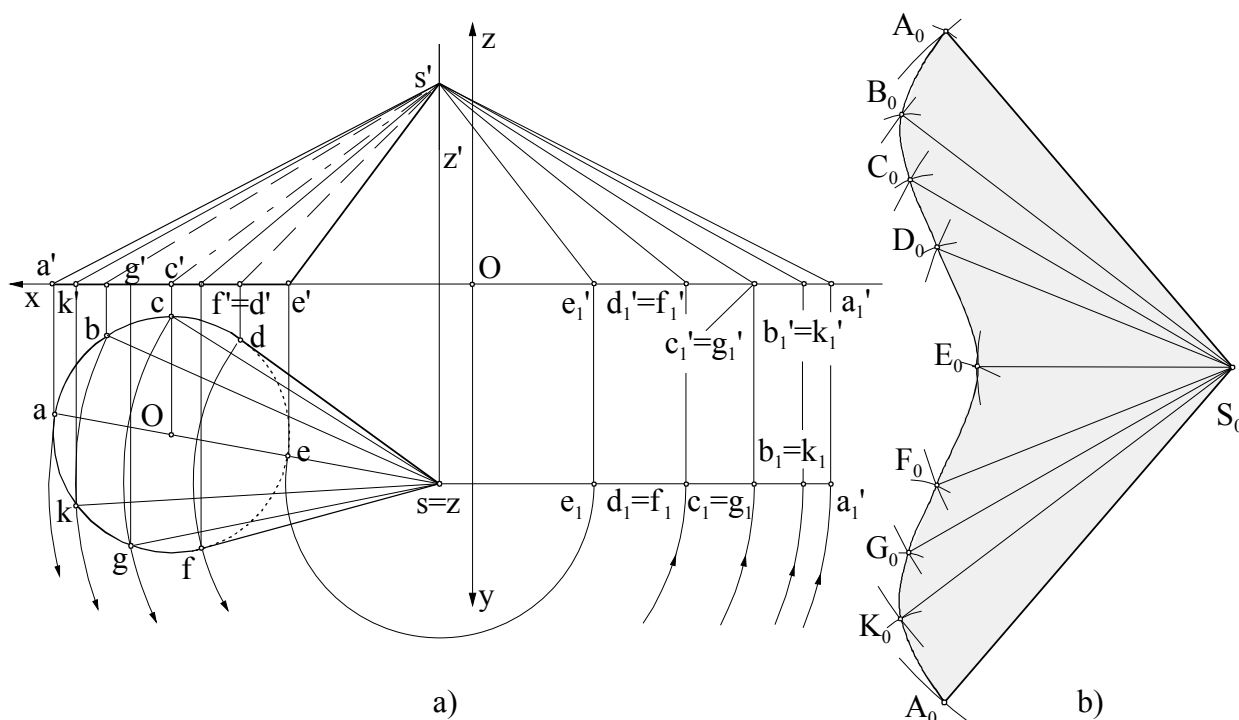


Fig.9.32 Desfășurarea conului oblic :
a) epura conului oblic ; b) desfășurata conului oblic

Având elementele necesare desfășurării conului, se trasează desfășurata piramidei înscrise – generatoarele reprezintă muchiile, iar coardele arcelor subînscrise între două generatoare consecutive sunt laturile poligonului înscris în cercul de bază.

Punctele de inflexiune ale transformatei bazei prin desfășurare sunt punctele $D(d, d')$ și $F(f, f')$, unde generatoarele de contur aparent orizontal sunt tangente la curba de bază. În orice punct al generatoarelor SD și SF , planul tangent la con este perpendicular pe planul orizontal de proiecție.

Desfășurata conului s-a făcut pornind de la generatoarea SA , $S_0A_0 = s'a_1'$, construind triunghiul $S_0A_0B_0$, cu ajutorul arcelor de cerc $A_0B_0 = ab$ și $S_0B_0 = s'b_1'$.

La trasarea desfășuratei cercului de bază cu arce de curbă, s-a ținut seama de punctele de inflexiune D_0 și F_0 , unde aceasta își schimbă concavitatea.

9.5.3 Desfășurarea sferei

Sfera este o suprafață nedefășurabilă. Desfășurarea sferei poate fi obținută prin metode aproximative, împărțind suprafața sferei în elemente mici. Metodele cele mai cunoscute sunt : prin fusuri sferice, prin zone sferice, prin pentagoane sau triunghiuri sferice și altele. Se exemplifică desfășurarea sferei prin *fusuri sferice*.

Fusul sferic este o porțiune din suprafața sferei, cuprinsă între două semimeridiane consecutive, obținută prin secționarea sferei cu plane proiectante verticale.

Fie sfera din figura 9.33 cu centrul în punctul $\mathcal{Q}(\omega, \omega')$ și de rază R .

Se secționează sfera cu patru plane proiectante verticale echidistante, care trec prin centrul sferei și divizează sfera în opt fusuri sferice. Se prezintă, în continuare, metoda de obținere a desfășurării fusului cuprins între planele $[T_1]$ și $[T_2]$, pentru celelalte procedându-se în mod similar.

Pentru a desfășura aproximativ un fus sferic, se consideră patru plane auxiliare de nivel $[N_1]$, $[N_2]$, $[N_3]$ și $[N_4]$, duse astfel încât arcele determinate pe cercul meridian să fie egale între ele: $1'2' = 2'3' = 3'4' = 4'5'$. Aceste plane secționează sfera după cercuri, iar fusul considerat, după arcele de cerc lj , mn , pq și ab , care se regăsesc în adevărată mărime în proiecția orizontală. Înălțimea unui fus sferic desfășurat este jumătate din lungimea cercului meridian, adică πR . Astfel, pentru desfășurare se trasează un segment de această lungime și jumătatea superioară se împarte în patru părți egale (lungimile determinate de planele de nivel): $1_02_0 = 2_03_0 = 3_04_0 = 4_05_0$. În aceste puncte, pe perpendiculare pe axa fusului, se măsoară segmente egale cu arcele determinate de planele de nivel pe fus: $J_0L_0 = jl$, $M_0N_0 = mn$, $P_0Q_0 = pq$ și $A_0B_0 = ab$. Construcția se repetă și pentru jumătatea inferioară a fusului, având în vedere că acesta este simetric față de cercul ecuator. Se obține astfel o desfășurare aproximativă a sferei, eroarea fiind invers proporțională cu numărul fusurilor în care se împarte sfera.

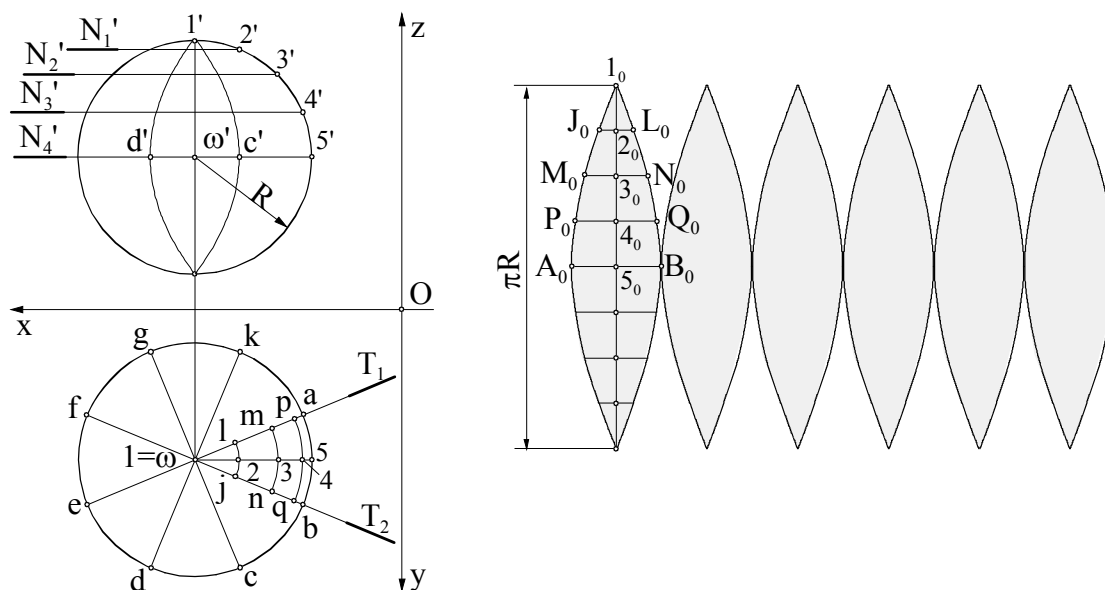


Fig.9.33 Desfășurarea sferei prin fusuri sferice

9.6 Intersecția suprafețelor curbe

Din intersecția a două corpuri geometrice, mărginite de suprafețe curbe, rezultă o curbă strâmbă în spațiu, numită *curbă de intersecție*.

Metoda generală de construcție a curbei de intersecție a două suprafețe curbe, constă în a determina atâtea puncte ale ei încât să poată fi trasată cât mai exact. Aceste puncte se găsesc cu ajutorul unor suprafețe auxiliare, plane sau sferice, care să le intersecteze pe cele date, alese astfel încât din intersecția lor să rezulte linii drepte sau curbe simple (cercuri). Suprafețele auxiliare se aleg în funcție de tipul și de poziția relativă a suprafețelor curbe care se intersectează.

9.6.1 Intersecția suprafețelor cilindro - conice

Prin intersecția suprafețelor cilindro – conice se înțelege intersecția a doi cilindri, a două conuri sau a unui cilindru cu un con. La intersecția suprafețelor cilindro – conice se folosesc aceleași reguli stabilite la intersecția poliedrelor, asemănând cilindrul și conul cu o prismă, respectiv o piramidă cu un număr de muchii convenabil ales și parcurgând aceleași faze, descrise în paragraful 8.5. Intersecția se reduce deci, la determinarea punctelor de intersecție dintre un număr suficient de generatoare ale unuia dintre corpuri cu suprafața celuilalt și reciproc.

Aceste puncte de intersecție se determină utilizând plane auxiliare secante, după cum urmează :

- *pentru intersecția a doi cilindri* : planele auxiliare vor fi paralele cu generatoarele celor doi cilindri, determinând în aceștia secțiuni longitudinale, de formă patrulateră;

- *pentru intersecția a două conuri* : planele auxiliare vor conține dreapta care unește cele două vârfuri ale conurilor, determinând în aceștia secțiuni longitudinale, de formă triunghiulară;

- *pentru intersecția dintre un cilindru și un con* : planele auxiliare vor conține vârful conului și vor fi paralele cu generatoarele cilindrului.

Planele auxiliare secante, descrise mai sus, vor conține generatoarele unei suprafețe care se intersectează cu cealaltă suprafață.

Pentru unirea punctelor de intersecție se folosesc arce de curbe plane, care înlocuiesc laturile poligonului de intersecție din cazul poliedrelor, rezultând curba de intersecție. Ordinea de unire a punctelor de intersecție și vizibilitatea curbei de intersecție în epură se stabilește ca și la poliedre cu *metoda mobilului* sau cu *metoda desfășuratelor convenționale*.

Din totalul planelor auxiliare utile folosite, planele limită vor fi tangente la una din baze și o vor intersecta pe cealaltă în două puncte, în general. Zonele din baze care nu sunt străbătute de plane utile, nu participă la intersecție și sunt numite *zone interzise* (zonele hașurate).

În funcție de poziția planelor auxiliare limită, față de bazele celor două corpuri care

se intersectează, distingem următoarele tipuri de intersecții :

- *rupere* : urmele orizontale ale planelor auxiliare limită, P_1 și P_a , sunt tangente la fiecare bază, determinând în cealaltă o zonă interzisă (fig. 9.34). Rezultă o singură curbă de intersecție.

- *pătrundere* : urmele orizontale ale planelor auxiliare limită, P_1 și P_a , sunt tangente la aceeași bază, determinând pe cealaltă două zone interzise (fig.9.35). Rezultă două curbe de intersecție.

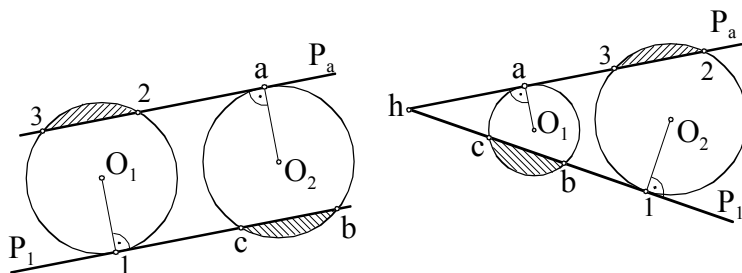


Fig.9.34 Stabilirea naturii intersecției : rupere

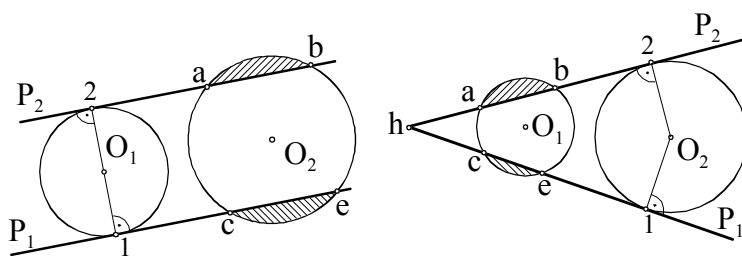


Fig.9.35 Stabilirea naturii intersecției : pătrundere

- *pătrundere cu simplă tangentă* : urma orizontală a unuiu dintre planele auxiliare limită, P_1 , este tangentă la ambele baze, iar cealaltă urmă orizontală, P_2 , este tangentă la una dintre baze și determină pe cealaltă o zonă interzisă (fig.9.36). Cele două curbe de intersecție rezultate au un punct comun.

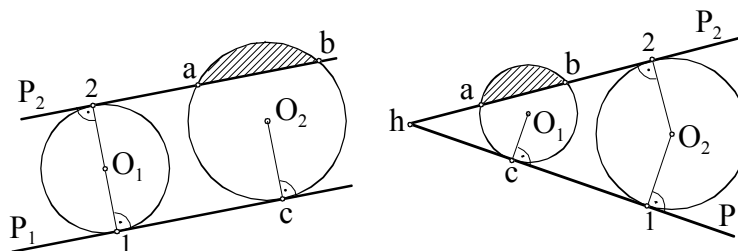


Fig.9.36 Stabilirea naturii intersecției : pătrundere cu simplă tangentă

- *pătrundere cu dublă tangentă* : urmele orizontale ale planelor auxiliare limită, P_1 și P_2 , sunt tangente la ambele baze (fig.9.37). Intersecția este formată din două curbe, care au două puncte comune, punctele determinate de intersecția generatoarelor care trec prin punctele de tangentă.

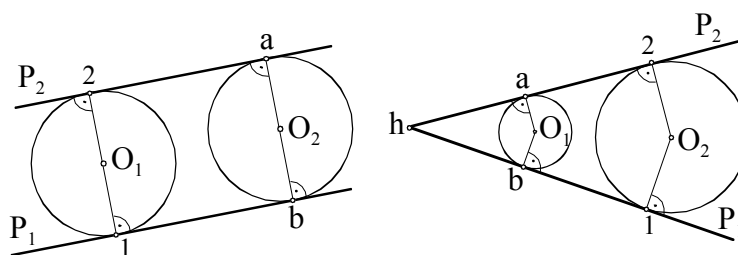


Fig.9.37 Stabilirea naturii intersecției : pătrundere cu dublă tangentă

Intersecția a doi cilindri circulari oblici

Fie dați doi cilindri oblici, cu bazele cercuri conținute în planul orizontal de proiecție, având centrele în punctele $O_1(o_1, o_1')$ și $O_2(o_2, o_2')$ (fig.9.38).

Pentru determinarea curbei de intersecție dintre cei doi cilindri, planele auxiliare secante se duc prin generatoarele cilindrilor, convenabil alese, astfel încât să fie paralele cu acestea. Pentru aceasta se ia un punct oarecare $T(t, t')$, în spațiu și se trasează prin el două drepte $D_1(d_1, d_1')$ și $D_2(d_2, d_2')$, paralele cu generatoarele celor doi cilindri. Planul determinat de ele dă direcția cu care vor fi paralele planele auxiliare secante. Deoarece cilindrii au bazele inferioare în planul orizontal, este suficientă utilizarea urmelor orizontale ale planelor auxiliare secante la determinarea secțiunilor în cilindri. Acestea vor fi paralele cu urma orizontală P , $P = h_1 \cup h_2$.

Planele auxiliare limită sunt : planul $[P_a]$, tangent la baza cilindrului O_2 în punctul a și planul $[P_{13}]$, tangent la baza cilindrului O_1 în punctul 13 . După poziția acestor plane față de cele două baze ale cilindrilor intersecția este o *rupere*, deci se va obține o singură curbă de intersecție.

Planul auxiliar secant dus prin generatoarea unui cilindru, determină în celălalt o secțiune longitudinală, care intersectată cu generatoarea dă puncte ale curbei de intersecție. *Exemplu* : planul P_a dus prin generatoarea din a taie baza cilindrului O_1 după segmentul 12 , care este o latură a secțiunii longitudinale. Generatoarele trasate din punctele 1 și 2 sunt intersectate de generatoarea din a în punctele a_1 și a_2 , puncte ale curbei de intersecție, fiind puncte comune celor doi cilindri. Proiecțiile lor verticale se obțin cu linii de ordine pe generatoarea corespunzătoare. La fel se procedează și pentru celelalte plane auxiliare secante.

În figura 9.38 s-au dus plane auxiliare secante prin toate generatoarele de contur aparent, cuprinse în zona utilă, deoarece în punctele de intersecție situate pe acestea, curba de intersecție își schimbă vizibilitatea. Aceste plane sunt : P_d, P_j și P_i , pentru cilindrul O_2 și P_6, P_{12}, P_7 și P_3 , pentru cilindrul O_1 .

Tabelul 9.1

Cilindrul O_1	l	4	6	8	12	13	9	7	5	3	2	3	7	11	13	12	10	6	l
Cilindrul O_2	a	d	e	j	l	n	j	g	d	b	a	c	k	i	r	m	i	f	a
Curba de int. (CI)	a_1	d_4	e_6	j_8	l_{12}	n_{13}	j_9	g_7	d_5	b_3	a_2	c_3	k_7	i_{11}	r_{13}	m_{12}	i_{10}	f_6	a_1
Vizibilitatea în planul	[H]	Cil O_1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
		Cil O_2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
		CI	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	[V]	Cil O_1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		Cil O_2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		CI	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

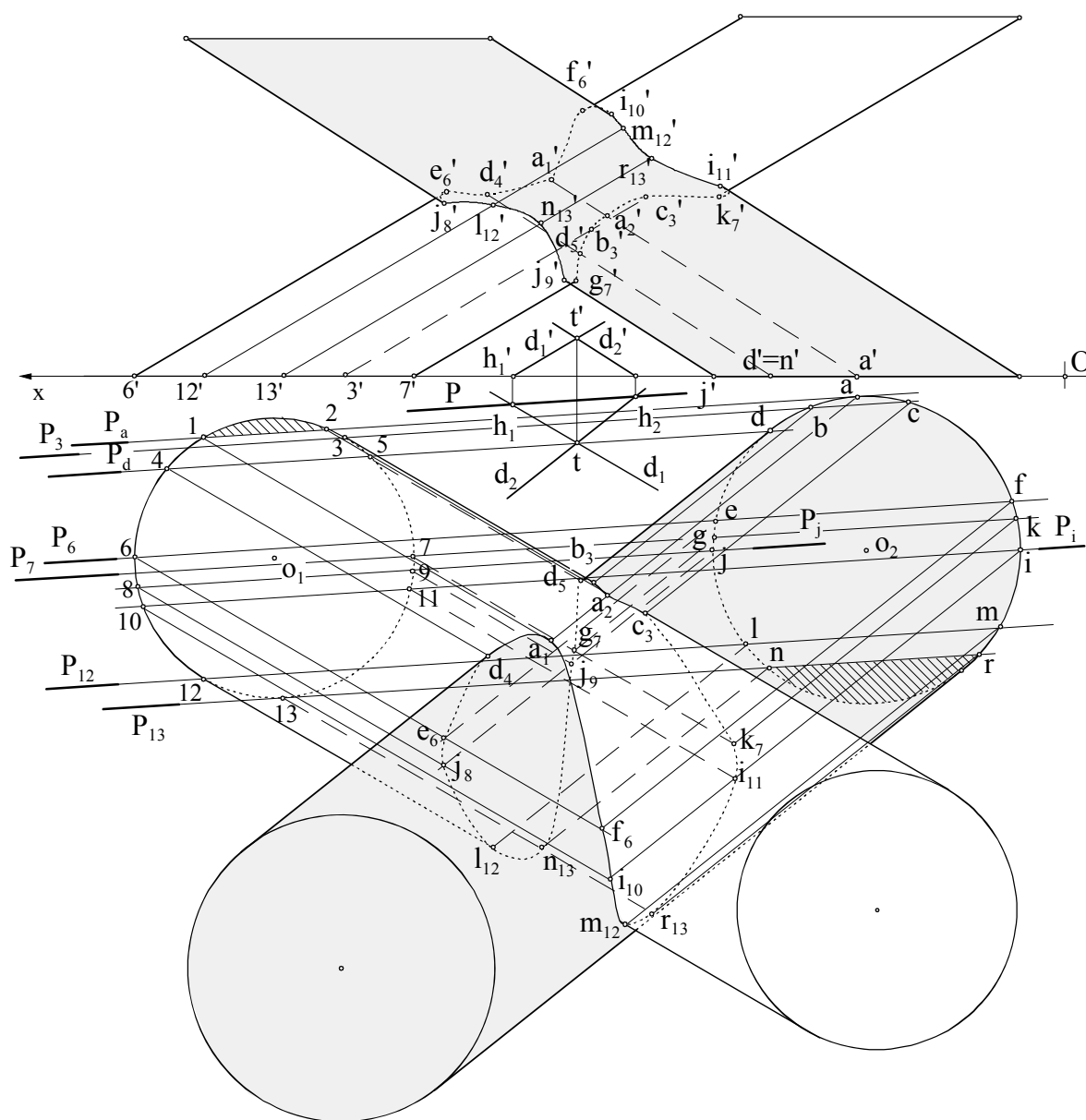


Fig.9.38 Intersecția a doi cilindri circulari oblici

Ordinea de unire a punctelor de intersecție, obținute cu ajutorul planelor de mai sus, se face ca și la poliedre, folosind regula mobilului, întocmind tabelul 9.1. Pe baza cilindrului O_1 s-a pornit din punctul a , spre d , iar pe baza cilindrului O_2 , din punctul corespunzător, a , conform urmei P_a , spre d . În acest tabel s-a studiat și vizibilitatea curbei de intersecție, pornind de la vizibilitatea bazelor celor doi cilindri, în cele două proiecții.

9.6.2 Intersecția suprafețelor de rotație utilizând suprafețe auxiliare sferice

În cazurile în care corpurile cilindrice și conice care se intersectează sunt situate în poziții particulare în spațiu și au axele concurente și paralele cu planul de proiecție, punctele curbei de intersecție se determină utilizând suprafețe auxiliare sferice. Aceste cazuri sunt des întâlnite în practică. Se folosește proprietatea că o suprafață sferică având centrul pe axa unui corp geometric de rotație, se intersectează cu acesta după două cercuri.

Intersecția dintre un cilindru și o sferă

Fie cilindrul circular drept cu baza inferioară în planul orizontal de proiecție (fig.9.39). Locul geometric al punctelor comune cilindrului și sferei S , de rază egală cu raza cilindrului și cu centrul în punctul $O_1(o_1, o_1')$, situat pe axa cilindrului, este cercul de tangență dintre sferă și cilindru. Acesta este notat în epură ($I-I, I'-I'$) și fiind paralel cu planul orizontal (plan de nivel) se proiectează pe acesta suprapus cu baza cilindrului, iar pe planul vertical după diametrul $I'-I'$.

Intersecția dintre cilindru și sfera S_1 cu centrul tot în $O_1(o_1, o_1')$, de rază mai mare decât raza cilindrului este o pătrundere, curbele de intersecție fiind cercurile ($2-2, 2'-2'$) și ($3-3, 3'-3'$). Acestea se proiectează pe planul orizontal suprapuse cu proiecția orizontală a cilindrului, fiind concenrice cu ecuatorul, iar pe planul vertical după diametrele $2'-2'$ și $3'-3'$, fiind cuprinse în plane de nivel. Punctele ($2, 2'$) și ($3, 3'$) sunt determinate de intersecția conturului aparent al sferei (cercul meridian) și proiecția cilindrului pe planul vertical.

Intersecția dintre un con și o sferă

Fie conul circular drept cu baza în planul orizontal de proiecție (fig.9.40) și o sferă S cu centrul în punctul $O_1(o_1, o_1')$ situat pe axa conului, astfel încât să fie tangentă suprafeței laterale a acestuia. Locul geometric al punctelor comune conului și sferei este un cerc ($I-I, I'-I'$) (cercul de tangență) situat într-un plan de nivel. Acesta se proiectează pe planul orizontal în adevărată mărime cu centrul în o_1 și pe planul vertical după diametrul $I'-I'$, dat de punctele de tangență dintre conturul aparent vertical

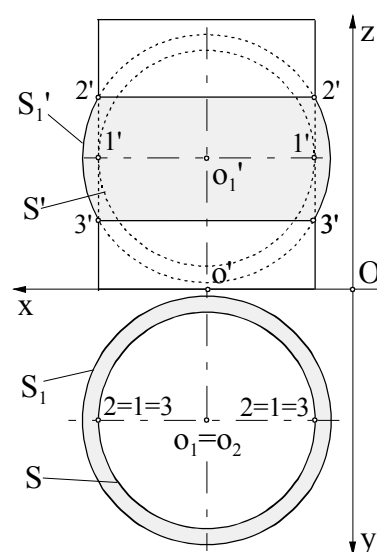


Fig.9.39 Intersecția cilindru - sferă

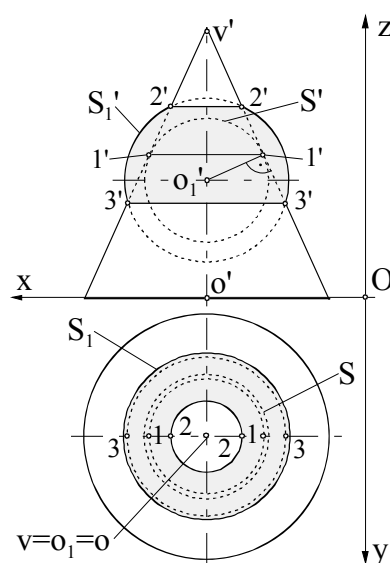


Fig.9.40 Intersecția con - sferă

al conului și cercul meridian al sferei.

Intersecția dintre con și sfera S_1 , cu centrul tot în punctul $O_1(o_1, o_1')$, dar de rază mai mare decât sfera S este o pătrundere și se realizează după două curbe, cercurile $(2-2, 2'-2')$ și $(3-3, 3'-3')$. Acestea sunt perpendiculare pe axa conului, astfel încât se proiectează pe planul vertical, deformate, prin diametrele $2'-2'$ și $3'-3'$, iar pe planul orizontal în adevărată mărime, fiind cercuri concentrice cu baza conului.

În continuare, se va studia intersecția suprafețelor cilindrice și conice, folosind suprafețe auxiliare sferice, metoda fiind numită *metoda sferă – cerc*. Astfel, ducând o sferă cu centrul în punctul de intersecție al axelor celor două corpuri, aceasta este coaxială cu cele două suprafețe și le intersectează pe fiecare după câte două cercuri. Intersecția celor patru cercuri rezultate pe sferă determină opt puncte de intersecție, care aparțin curbelor de intersecție ale corpurilor.

Pentru construcția curbei de intersecție a două corpuri prin această metodă, este suficientă proiecția corpurilor pe planele de proiecție cu care axele corpurilor sunt paralele.

Cele mai întâlnite corpuri în practică sunt:

a) Intersecția a doi cilindri

Fie cilindrii C_1 și C_2 cu axele concurente și paralele cu planul vertical de proiecție (fig.9.41). Cei doi cilindri sunt reprezentați prin proiecțiile lor pe planul vertical. Cilindrul C_1 are diametrul ϕ_1 și bazele situate în plane de profil, cilindrul C_2 are diametrul ϕ_2 , $\phi_2 < \phi_1$ și bazele situate în plane de nivel.

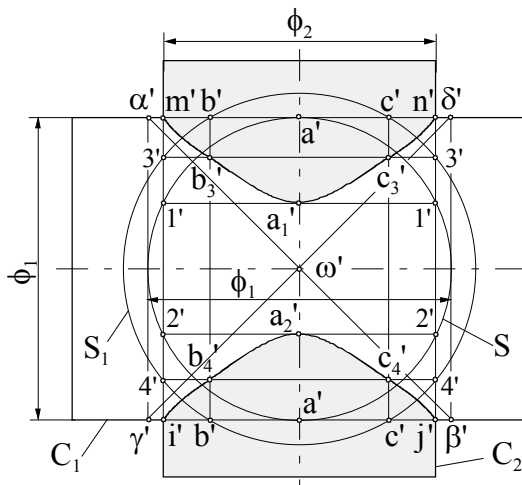


Fig.9.41 Intersecția a doi cilindri, $\phi_2 < \phi_1$

Suprafețele auxiliare sferice utilizate pentru determinarea curbei de intersecție au centrul în punctul ω' , punctul de intersecție al axelor celor doi cilindri. Sfera cea mai mică utilă este sfera S , tangență la cilindrul cel mai mare, C_1 . Sfera S intersectează cilindrul C_1 după cercul $a'-a'$, iar cilindrul C_2 după cercurile $1'-1'$ și $2'-2'$. Punctele comune celor trei cercuri sunt a_1' și a_2' , puncte duble în proiecția pe planul vertical :

$$(a'-a') \cap (1'-1') = a_1'$$

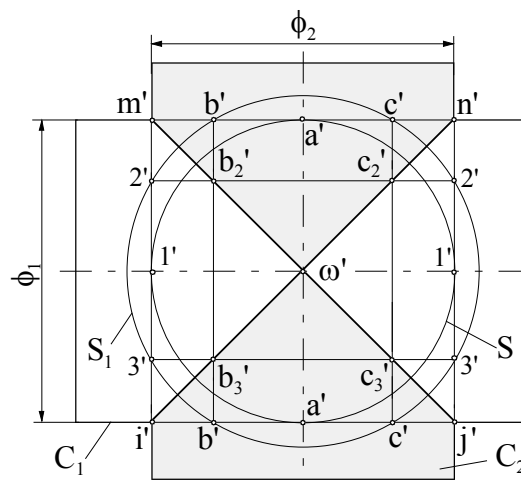
$$(a'-a') \cap (2'-2') = a_2'$$

Aceste puncte sunt comune celor doi cilindri, deci aparțin curbei de intersecție.

Sfera cea mai mare utilă este sfera S_1 ce trece prin punctele de intersecție ale generatoarelor de contur aparent, m', n', i', j' , puncte care aparțin implicit curbei de intersecție. Pentru a se trasa cât mai exact curbele de intersecție, se mai determină și alte puncte de intersecție, ducând alte sfere concentrice cu sfera S , de rază mai mare decât aceasta. Sfera S_1 intersectează cilindrul C_1 după cercurile $b'-b'$ și $c'-c'$, iar cilindrul C_2 după cercurile $3'-3'$ și $4'-4'$. Intersecția acestor patru cercuri determină opt puncte, două câte două identice, c_3', c_4' și b_3', b_4' .

Unind punctele determinate anterior se obțin proiecțiile verticale ale curbelor de intersecție dintre cei doi cilindri, care sunt părți din ramurile unei hiperbole, cu vârfurile în punctele a_1' și a_2' și axa transversală a hiperbolei identică cu axa cilindrului C_2 . Asimptotele hiperbolei, $\alpha'\beta'$ și $\gamma'\delta'$ s-au construit considerând intersecția a doi cilindri cu același diametru ϕ_1 , diametrul maxim.

În figura 9.42 cilindri C_1 și C_2 au diametrele egale $\phi_2 = \phi_1$, axele concurente și coplanare. Repetând raționamentul de mai sus, s-au determinat curbele de intersecție dintre cei doi cilindri, care se proiectează pe planul vertical după segmentele $m'j'$ și $i'n'$, concurente în punctul ω' , de intersecție al axelor celor doi cilindri. Sfera minimă utilă în acest caz este sfera S , cu centrul în punctul ω' și tangentă celor doi cilindri, după cercurile $l'-l'$ și $a'-a'$. Cele două cercuri au două puncte comune, confundate cu ω' . Pentru verificare s-a mai trasat și sfera S_1 , cu diametrul mai mare decât diametrul cilindrului, aceasta determinând punctele $b_2', b_3', c_2',$ și c_3' , situate într-adevăr pe curba de intersecție.

Fig.9.42 Intersecția a doi cilindri, $\phi_2 = \phi_1$

În figura 9.43, cazul intersecției celor doi cilindri este similar cilindrilor din figura 9.41, doar că de această dată cilindrul fronto-orizantal C_1 are diametrul ϕ_1 mai mic decât diametrul ϕ_2 al cilindrului C_2 , $\phi_1 < \phi_2$.

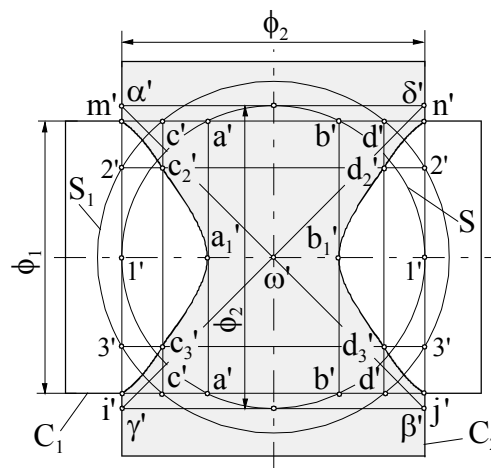
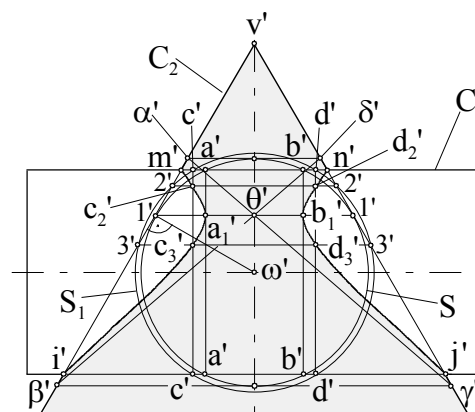
b) *Intersecția unui cilindru cu un con*

În cazul intersecției dintre un cilindru fronto-orizantal C_1 , cu bazele situate în plane de profil și un con circular drept C_2 , cu baza situată într-un plan de nivel, curbele de intersecție se pot determina utilizând sfere auxiliare cu centrul în punctul ω' , de intersecție al axelor celor două corpuri.

Există trei cazuri distincte de intersecție după cum sunt circumscrise corpurile : ambele aceleași sfere sau sfera minimă utilă este intersectată de un corp și tangentă celuilalt.

În figura 9.44, sfera minimă utilă S este tangentă conului C_2 , după cercul $l'-l'$ și intersectează cilindrul C_1 după cercurile $a'-a'$ și $b'-b'$. Cele trei cercuri au patru puncte comune, punctele a_1' și b_1' , puncte duble suprapuse care aparțin curbei de intersecție.

Acestea sunt vârfurile hiperbolei după care se proiectează curba de intersecție pe planul vertical. Asimptotele $\alpha'\beta'$ și $\gamma'\delta'$, concurente în θ' , s-au obținut ducând un cilindrul coaxial cu cilindrul C_1 și tangent sferei S .

Fig.9.43 Intersecția a doi cilindri, $\phi_1 < \phi_2$ Fig.9.44 Intersecția unui cilindru cu un con
– sfera minimă tangentă conului

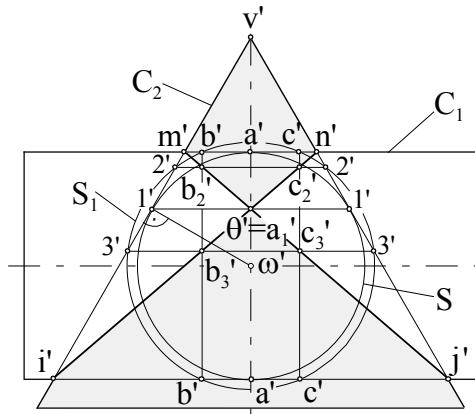


Fig.9.45 Intersecția unui cilindru cu un con – sfera minimă tangentă conului și cilindrului

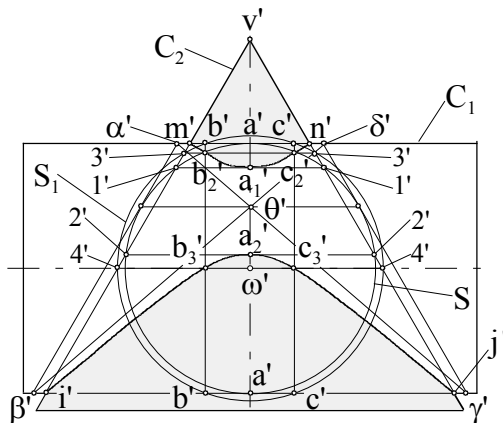


Fig.9.46 Intersecția unui cilindru cu un con – sfera minimă tangentă cilindrului

Alte puncte ale curbei de intersecție se obțin ducând și alte sfere de diametre mai mari decât diametrul sferei S .

c) Intersecția a două conuri

Se consideră două conuri circulare drepte, cu axe concurente și paralele cu planul vertical. Conul vertical C_1 are axa V_1O_1 verticală și baza în planul orizontal, iar conul C_2 are axa V_2O_2 fronto-orizentală și baza într-un plan de profil.

Curbele de intersecție dintre cele două corpuri se determină folosind sfere auxiliare, cu centrul în punctul ω' , de intersecție al axelor celor două corpuri. Se întâlnesc două situații : sfera minimă utilă - tangentă ambelor conuri sau sfera minimă utilă - tangentă unui con și intersectată de celălalt.

În cazul intersecției din figura 9.47 cele două conuri sunt circumscrise aceleiași sfere S , fiind tangente după cercurile $a'-a'$ (conul C_1) și $l'-l'$ (conul C_2). Curba de intersecție se proiectează pe planul vertical deformată, după diagonalele patrulaterului $m'n'j'i'$, concurente în punctul $\theta' \equiv a_1'$, punct dublu de intersecție dintre cercurile de tangență.

În situația din figura 9.48, sfera minimă utilă S este tangentă conului C_2 , după cercul $a'-a'$ și intersectează conul C_1 după cercurile $l'-l'$ și $2'-2'$. Acestea au patru puncte

Pentru a se obține și alte puncte ale curbei de intersecție, s-a mai dus și sfera S_1 care intersectează conul C_2 după cercurile $2'-2'$ și $3'-3'$, iar cilindrul C_1 după cercurile $c'-c'$ și $d'-d'$. Cele patru cercuri au opt puncte comune, suprapuse două câte două în proiecția verticală : c_2', c_3', d_2' și d_3' .

În cazul intersecției din figura 9.45 cele două corpuri sunt circumscrise aceleiași sfere S , fiind tangente după cercurile $l'-l'$ (conul C_2) și $a'-a'$ (cilindrul C_1). Curba de intersecție formată din două elipse se proiectează pe planul vertical deformată, după diagonalele trapezului isoscel $m'n'j'i'$, concurente în punctul $\theta' \equiv a_1'$, punct dublu de intersecție dintre cercurile de tangență.

În figura 9.46 sfera minimă utilă S este tangentă cilindrului C_1 , după cercul $a'-a'$ și intersectează conul C_2 după cercurile $l'-l'$ și $2'-2'$, determinând vârfurile hiperbolei după care se proiectează curba de intersecție pe planul vertical, a_1' și a_2' .

Asimptotele hiperbolei, $\alpha'\beta'$ și $\gamma'\delta'$, se obțin trasând generatoarele extreme ale unui con coaxial cu C_2 , cu același unghi al generatoarei față de axă și tangent la aceeași sferă S .

comune, determinând vârfurile hiperbolei după care se proiectează curba de intersecție pe planul vertical, a_1' și a_2' (puncte duble).

Pentru trasarea curbelor de intersecție se determină și alte puncte, folosind alte sfere de diametre mai mari decât diametrul sferei S și concentrice cu aceasta.

Asimptotele hiperbolei, $\alpha'\beta'$ și $\gamma'\delta'$, se obțin trasând generatoarele extreme ale unui con coaxial cu conul C_1 , cu același unghi al generatoarei față de axă și tangent la aceeași sferă S .

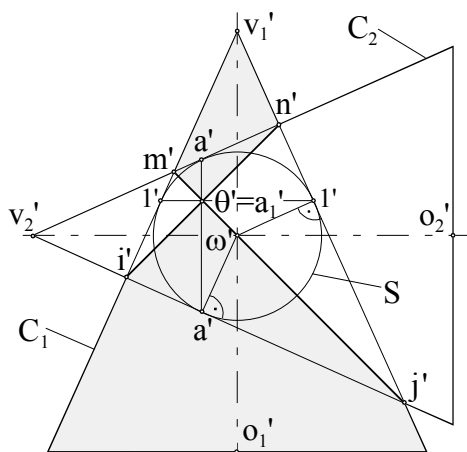


Fig.9.47 Intersecția a două conuri – sfera minimă tangentă ambelor conuri

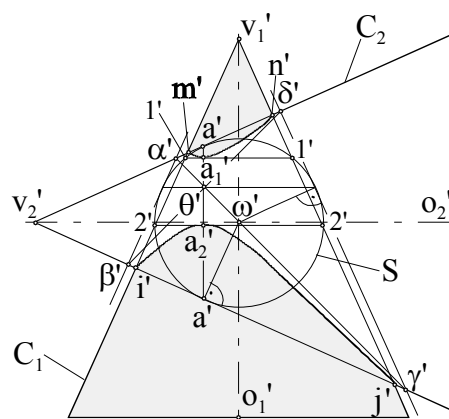


Fig.9.48 Intersecția a două conuri - sfera minimă tangentă conului C_1

Observație : În exemplele tratate în figurile 9.41 ÷ 9.48 cercurile de intersecție dintre sfere și cilindri sau conuri sunt paralele cu bazele acestora, astfel încât s-au proiectat pe planul vertical prin diametrele lor, perpendiculare pe axele corpurilor, fiind cercuri de nivel sau de profil.

Curbele de intersecție dintre corpurile de rotație se regăsesc pe piesele metalice din construcțiile de mașini și vor fi folosite în reprezentarea ortogonală a acestora în desenul tehnic.

9.7 Desfășurarea corpurilor de rotație intersectate

Corpurile de rotație aflate în poziții particulare, intersectate, se întâlnesc în practică la intersecții de conducte, racorduri, coturi și mai ales în diferite confecții metalice. Pentru realizarea confecțiilor metalice, din diferite materiale, este necesară determinarea desfășuratelor acestor corpuri.

În continuare, se dau câteva exemple de astfel de desfășurate.

În figura 9.49 se prezintă racordul între un cilindru fronto-orizantal C_1 și unul vertical C_2 . Diametrele celor doi cilindri sunt diferite și cu ajutorul sferelor S , S_1 și S_2 se determină curba de intersecție dintre ei : $a-b-c-d-c_1-b_1-a_1$.

Pentru desfășurarea suprafeței laterale a celor doi cilindri se aplică teoria de la paragraful 9.5.1, a), rabătând alături de fiecare cilindru jumătate din bază și ducând generatoarele corespunzătoare punctelor de pe curba de intersecție.

În continuarea bazelor cilindrilor se trasează o linie dreaptă, pe care se desfășoară bazele cilindrilor, aproximând arcele cu coarde. Se duc pe desfășurate generatoarele corespunzătoare punctelor de pe bază și se transferă pe acestea, punctele de pe curba de intersecție.

Pentru cilindrul C_1 , punctele curbei de intersecție se transferă pe generatoarele de pe desfășurată din punctele 4_0 , 5_0 , 6_0 și 7_0 și rezultă punctele A_0 , B_0 , C_0 , D_0 , C_{10} , B_{10} și A_{10} .

Unind aceste puncte se obține transformata prin desfășurare a curbei de intersecție și respectiv partea care trebuie exclusă din desfășurarea cilindrului C_1 .

Pentru cilindrul C_2 punctele curbei de intersecție se translatează pe generatoarele de pe desfășurată din punctele 1_{10} , 2_{10} , 3_{10} , 4_{10} , 5_{10} , 6_{10} și 7_{10} , obținându-se punctele A_0 , B_0 , C_0 , D_0 , C_{10} , B_{10} și A_{10} . Curba obținută prin unirea acestor puncte reprezintă transformata prin desfășurare a curbei de intersecție și mărginește în partea inferioară desfășurata cilindrului C_2 .

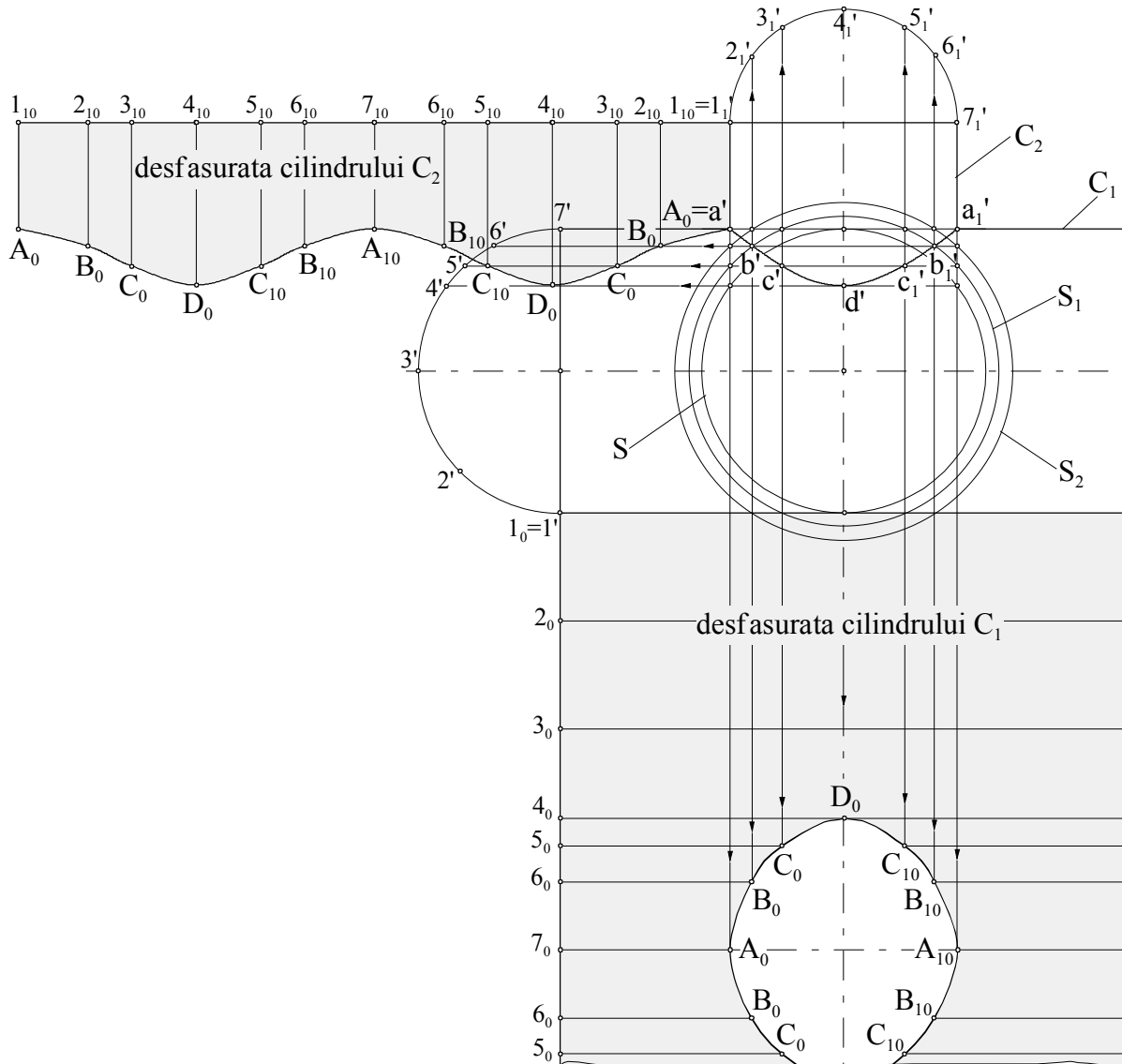


Fig.9.49 Desfășurarea a doi cilindri intersecți

În figura 9.50 este reprezentată intersecția dintre cilindrul frontal C_1 și cilindrul fronto-orizantal C_2 , precum și desfășuratele suprafețelor laterale ale celor doi cilindri. Aceștia au diametre egale și conform celor prezentate pe marginea figurii 9.42, curba de intersecție dintre ei se va proiecta pe planul vertical după segmentele $a-e-h$, unde punctul e reprezintă punctul de intersecție dintre axe ale cilindrilor.

Pentru stabilirea desfășuratei suprafeței laterale a porțiunii din cilindrul C_1 cuprinsă în acest racord, se determină desfășurata cilindrului, pe care se reprezintă transformata prin desfășurare a curbei de intersecție $A_0-B_0-C_0-D_0-E_0-F_0-G_0-I_0-H_0$ și transformata prin desfășurare a secțiunii eliptice care mărginește cilindrul în partea superioară.

În mod similar se procedează și pentru desfășurarea cilindrului C_2 .

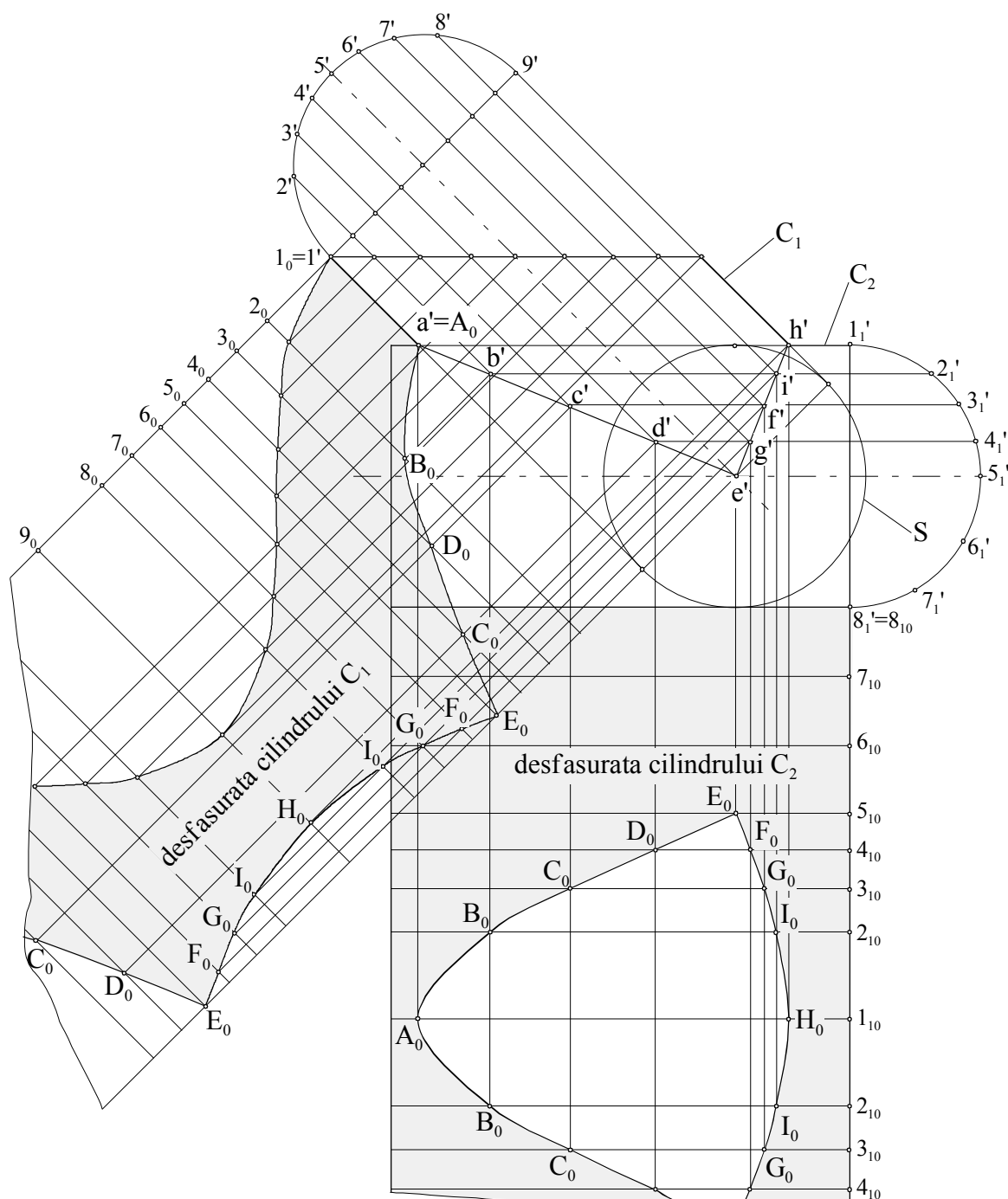


Fig.9.50 Desfășurarea a doi cilindri de diametre egale, intersecți

În unele cazuri racordarea trebuie făcută între un cilindru și un con. Astfel, în figura 9.51 este prezentat racordul dintre un con circular drept C_1 și un cilindru fronto-orizantal. Cele două corpuri au axele concurente și sunt tangente aceleiași suprafețe sferice S .

Curba de intersecție dintre ele se proiectează pe planul vertical după segmentul $a-d-a_1$, trecând prin punctele b și b_1 , determinate cu ajutorul sferei S_1 .

Desfășurarea suprafeței laterale a trunchiului de con care intră în componența racordului, se face pornind de la desfășurarea conului drept, studiată în paragraful 9.5.2, a). Aceasta este mărginită în partea inferioară de transformata prin desfășurare a curbei de intersecție dată de punctele $A_0-B_0-D_0-B_{10}-A_{10}$, iar în partea superioară de desfășurata bazei mici a trunchiului de con.

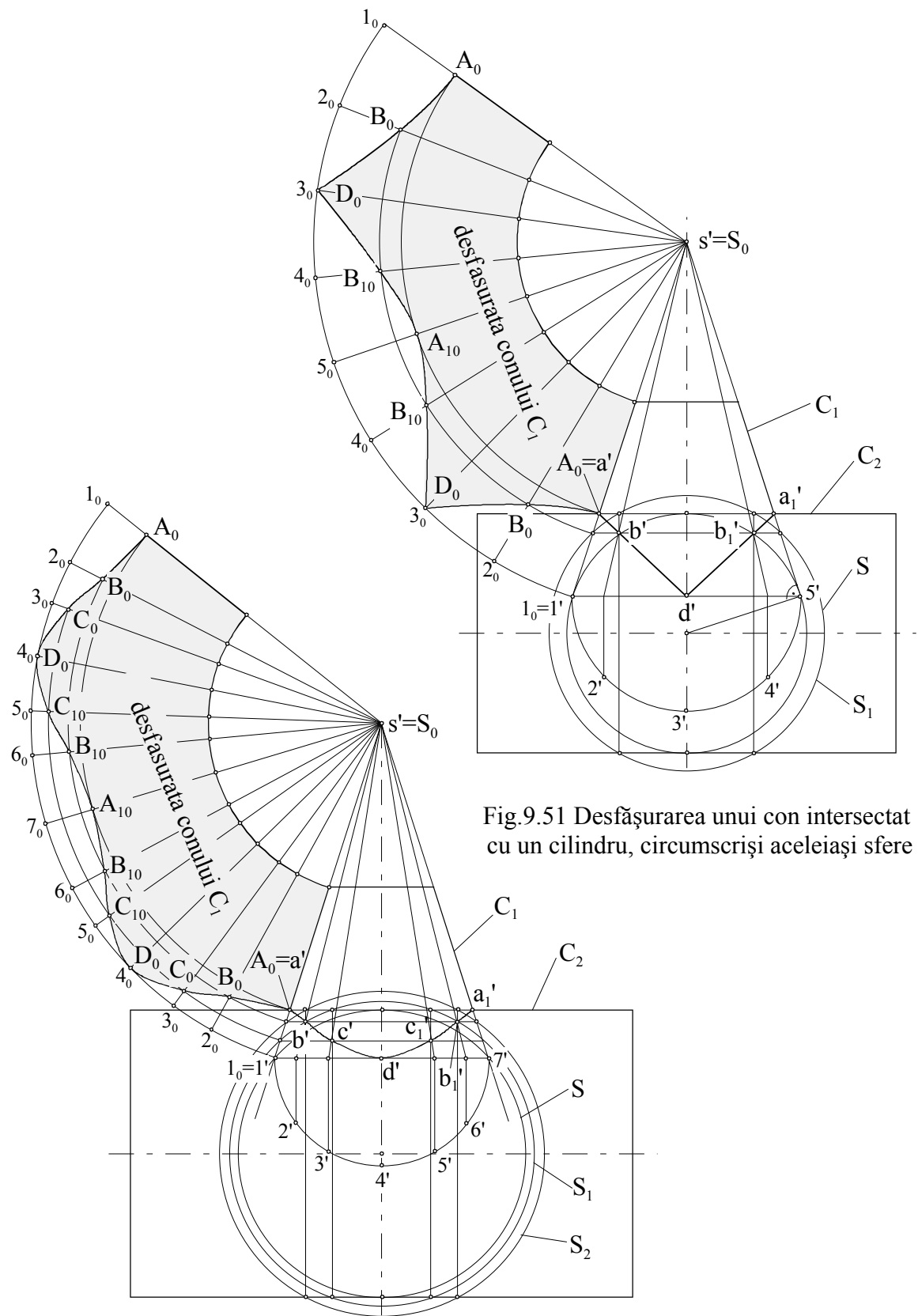


Fig.9.51 Desfășurarea unui con intersectat cu un cilindru, circumscrisi aceleași sfere

Fig.9.52 Desfășurarea unui con intersectat cu un cilindru

Racordul dintre un con circular drept C_1 și un cilindru C_2 poate avea și forma din figura 9.52, unde sfera S_1 , tangentă cilindrului C_2 , intersectează conul C_1 . Curba de intersecție are în proiecție pe planul vertical forma unui arc de hiperbolă, dat de punctele $a-b-c-d-c_1-b_1-a_1$, determinate cu ajutorul sferelor S , S_1 și S_2 .

Desfășurarea trunchiului de con se obține în mod similar cu desfășurarea de la figura 9.51.

9.8 Probleme rezolvate

1. Se consideră cilindrul frontal definit prin curba directoare care este un cerc cu centrul în punctul $O_1(80,25,0)$, de rază $R = 18$ și cealaltă bază cu centrul în punctul $O_2(20,25,45)$ și dreapta $D(d,d')$: $H(50,5,0)$ și $N(110,50,25)$.

a) Să se desfășoare cilindrul ;

b) Să se determine punctele de intersecție dintre dreapta D și cilindru și să se figureze aceste puncte pe desfășurată.

Rezolvare : Pentru trasarea desfășuratei cilindrului frontal din figura 9.53, *a* se urmărește metodologia de la paragraful 9.5.1 b), cu observația că nu mai este nevoie de efectuarea schimbării de plan, deoarece generatoarele sunt în adevărată mărime în proiecția verticală, fiind drepte frontale. Astfel, se înscrie în cilindru o prismă cu opt fețe, se duce un plan secant $[Q]$ (plan de capăt), perpendicular pe generatoarele cilindrului și se determină secțiunea normală $[ABCEFGHK]$. Se rabate planul $[Q]$, împreună cu secțiunea, pe planul orizontal de proiecție și se determină adevărata mărime a acestei secțiuni, $[a_0b_0c_0e_0f_0g_0l_0k_0]$. Transformata prin desfășurare a acestei secțiuni este segmentul $A_0B_0C_0E_0F_0G_0L_0K_0$ (perimetrul secțiunii normale rabătute), care se trasează aproximând lungimile arcelor de elipsă cu coardele corespunzătoare : $A_0B_0 = a_0b_0$, $B_0C_0 = b_0c_0, \dots, L_0K_0 = l_0k_0$, $K_0A_0 = k_0a_0$. Prin aceste puncte se duc perpendiculare și se măsoară pe ele lungimile

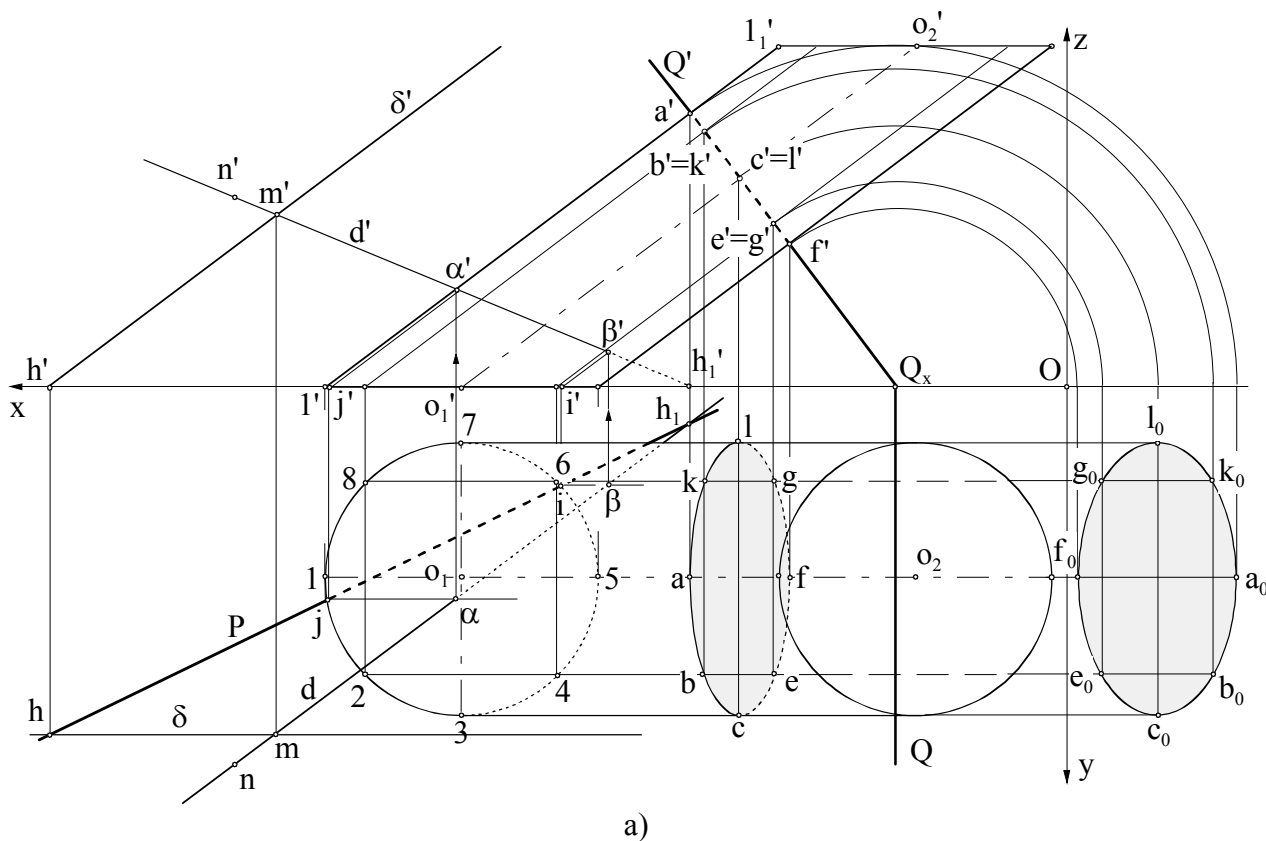


Fig.9.53 Rezolvarea problemei 1

corespondente generatoarelor, ca în figura 9.53, *b*, luându-le din proiecția verticală, de o parte și de alta a urmei verticale $Q' : A_0I_0 = a'I_1', A_0I_{10} = a'I_1', \dots$. Extremitățile acestor

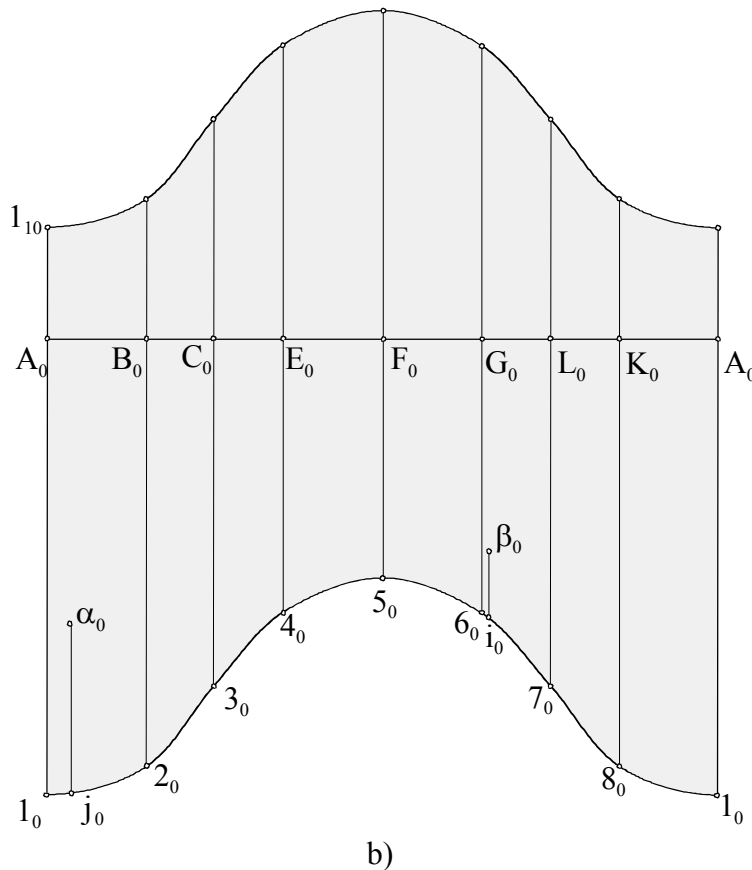


Fig.9.53 Rezolvarea problemei 1

face marcând arcul $Ij = I_0j_0$, respectiv $6i = 6_0i_0$ și lungimea generatoarelor (din proiecția verticală) de la bază până la aceste puncte : $j_0\alpha_0 = j'\alpha'$, $i_0\beta_0 = i'\beta'$.

2. Se dă conul oblic având curba directoare un cerc situat în planul orizontal de proiecție, cu centrul în punctul $\Omega(50,25,0)$, de rază $R = 20$ și vârful în punctul $V(10,10,40)$.

a) Să se determine secțiunea făcută de planul de nivel $[N]$, de cotă 18, în con;

b) Să se desfășoare trunchiul de con cuprins între planul orizontal și planul de nivel $[N]$.

Rezolvare : se trasează conul considerând pentru conturul aparent din proiecția orizontală generatoarele vd și vg , iar pentru conturul aparent din proiecția verticală generatoarele $v'a'$ și $v'e'$. Secțiunea determinată de planul de nivel $[N]$ în con are formă eliptică și rezultă în proiecția orizontală în adevărată mărime. Pentru trasarea ei se consideră și alte generatoare ale conului : VB, VC, VF, VK . Punctele care definesc elipsa de secțiune se determină mai întâi în proiecția verticală, la intersecția generatoarelor cu urma verticală N' și apoi se coboară cu linii de ordine pe proiecția orizontală, obținându-se elipsa ($I \div 8$).

Desfășurata trunchiului de con, se determină pe desfășurata conului. Astfel, se figurează pe fiecare generatoare de pe desfășurată punctele de intersecție cu planul de nivel și se unesc acestea cu o curbă, obținându-se transformata prin desfășurare a secțiunii eliptice. Pentru desfășurarea conului se determină adevărata mărime a generatoarelor, prin rotația lor în jurul unei axe verticale $Z(z, z')$ ce trece prin vârful conului. Punctele secțiunii se translatează, paralel cu axa Ox , pe generatoarele rotite, în punctele $I_1' \div 8_1'$ și apoi se figurează pe desfășurata conului, considerând distanțele : $v'I_1' = V_0I_0$, $v'2_1' = V_02_0, \dots$, $v'8_1' = V_08_0$.

generatoare se unesc cu arce de curbă, obținând transformatele prin desfășurare a bazelor. Acestea mărginesc desfășurata cilindrului.

Punctele de intersecție dintre dreapta D și cilindrul frontal se obțin cu metoda secțiunilor longitudinale. Prin punctul $M(m, m')$ de pe dreapta $D(d, d')$ se trasează o dreaptă $\Delta(\delta, \delta')$ paralelă cu generatoarele cilindrului și se determină urma orizontală P a planului definit de aceste două drepte. Planul intersectează cilindrul după o secțiune longitudinală determinată de punctele i și j de pe baza din planul orizontal. Dreapta D intersectează această secțiune în punctele (α, α') și (β, β') . Se determină vizibilitatea dreptei, considerând vizibilitatea generatoarelor cilindrului.

Vizualizarea punctelor de intersecție pe desfășurată se

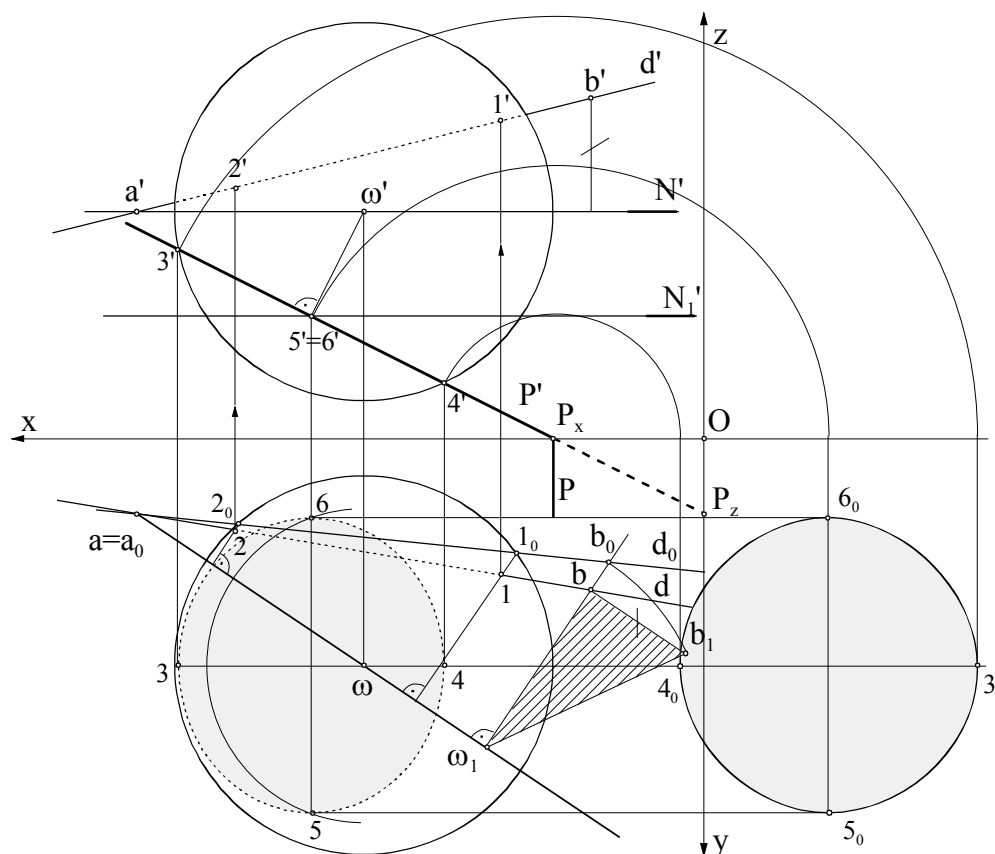


Fig.9.55 Rezolvarea problemei 3

4. Să se determine curba de intersecție a corpurilor din figura 9.56 și desfășurata acestora.

Rezolvare : racordul din figura 9.56 este format dintr-un cilindru și un trunchi de con. Se observă că cilindrul și conul au axe concurente în punctul o' și sunt tangente aceleiași sfere S . Conform teoriei prezentate în paragraful 9.6.2, b) cele două corpuri se intersectează după o curbă care în proiecția verticală din figura 9.56, a se proiectează după segmentul $a' - m_1' - h'$. Punctul M_1 aparține curbei de intersecție și este dat de intersecția cercurilor de tangență $(l'-l')$ și $(m'-m')$, dintre cilindrul C_1 , respectiv conul C_2 , și sfera S .

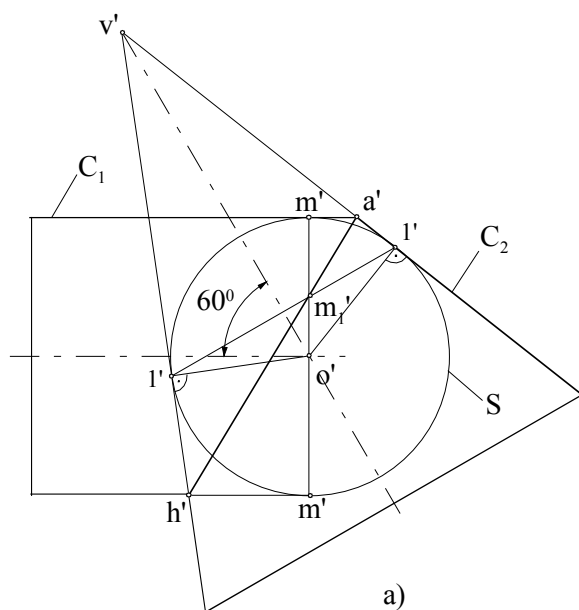


Fig.9.56 Rezolvarea problemei 4

Desfășuratele celor două corpuri sunt prezentate în figura 9.56, b și se bazează pe teoria prezentată la desfășurata cilindrului drept și a conului (trunchiului de con) drept, secționare cu un plan de capăt și a teoriei de la paragraful 9.7.

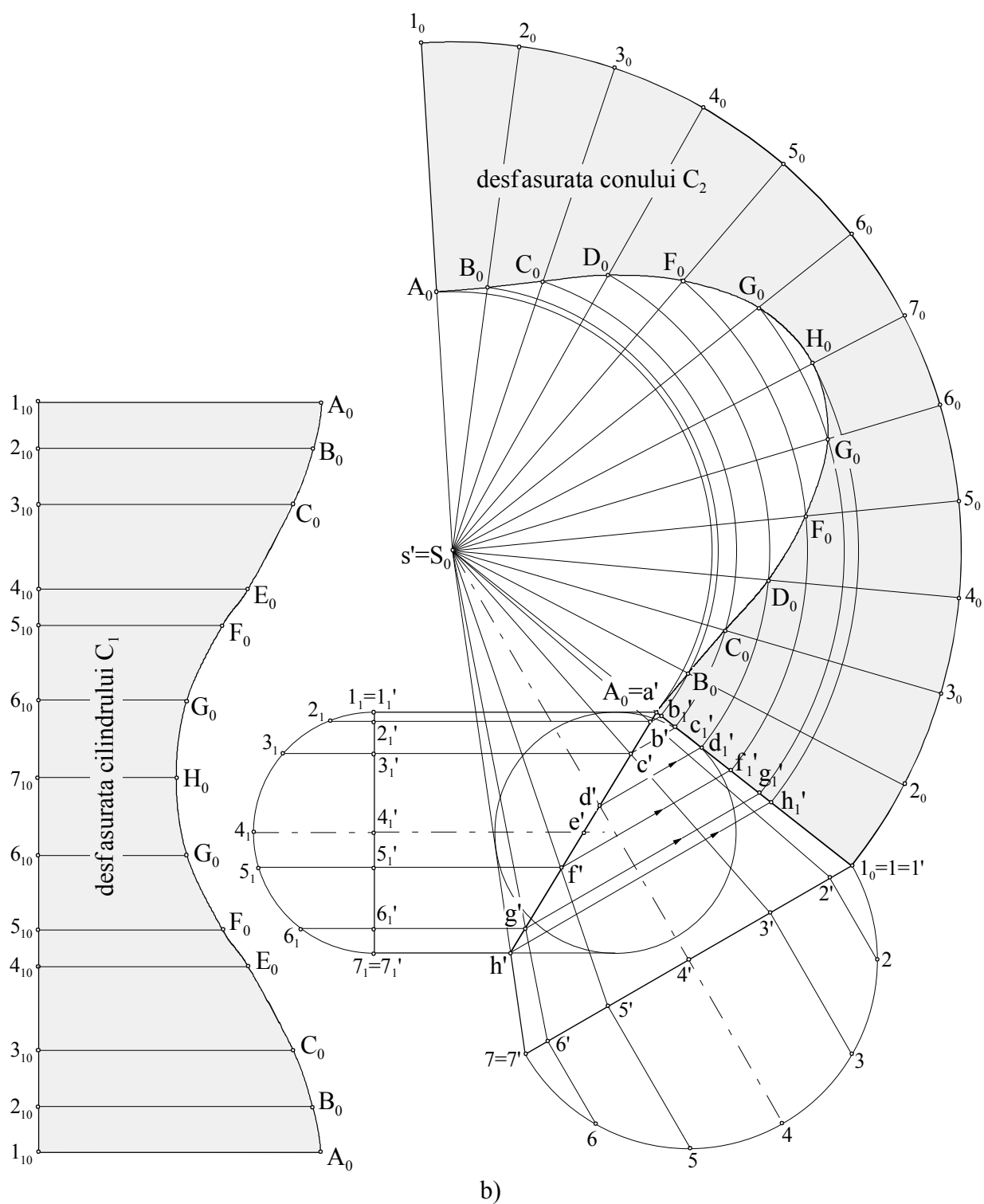


Fig.9.57 Rezolvarea problemei 4

9.9 Probleme propuse

1. Fie cilindrul oblic cu bazele cercuri situate în plane paralele, cu centrele în punctele $\Omega(100,35,0)$ și $\Omega_1(20,65,70)$, de rază $R = 30$ și dreapta $D(d,d')$: $A(110,70,50)$ și $B(30,20,10)$.

a) Să se desfășoare cilindrul ;

b) Să se determine punctele de intersecție dintre dreapta D și cilindru și să se figureze aceste puncte pe desfășurată.

2. Se consideră cilindrul oblic definit prin curba directoare care este un cerc cu centrul în punctul $\Omega(75,20,0)$, de rază $R = 20$ și cealaltă bază cu centrul în punctul $\Omega_1(130,55,80)$ și dreapta $D(d,d')$: $H(150,5,0)$ și $M(40,50,70)$.

a) Să se desfășoare cilindrul ;

b) Să se determine punctele de intersecție dintre dreapta D și cilindru și să se figureze aceste puncte pe desfășurată.

3. Se dă dreapta $D(d,d')$: $A(40,50,70)$, $B(110,15,10)$ și cilindrul oblic cu bazele cercuri situate în plane paralele, cu centrele în punctele $\Omega(60,20,0)$ și $\Omega_1(130,55,60)$, de raze $R = 20$.

a) Să se desfășoare cilindrul;

b) Să se determine punctele de intersecție dintre dreapta D și cilindru și să se figureze aceste puncte pe desfășurată.

4. Să se construiască desfășurata cilindrului frontal cu bazele cercuri situate în plane paralele, cu centrele în punctele $\Omega(110,50,0)$ și $\Omega_1(55,50,60)$, de raze $R = 25$. Considerând că pe aceasta trebuie practicate două găuri cu diametrul de 6mm și știind că centrul lor este în punctele $M(90,30,z_M)$, $z_M < 30$ și $N(60,y_M,35)$, $y_M < 40$, să se figureze aceste găuri pe desfășurată.

5. Fie cilindrul oblic cu bazele cercuri situate în plane paralele, cu centrele în punctele $\Omega(30,30,0)$ și $\Omega_1(80,60,60)$, de raze $R = 20$ și un punct $M(20,y_M,8)$ aparținând cilindrului.

a) Să se ducă prin punctul M un plan $[T]$ tangent la cilindru;

b) Să se desfășoare cilindrul.

6. Să se traseze prin punctul $M(60, 30,z_M)$ aparținând cilindrului oblic cu bazele cercuri situate în plane paralele, cu centrele în punctele $\Omega(30,30,0)$ și $\Omega_1(80,60,60)$, de raze $R = 20$, un plan tangent la cilindru și să se desfășoare cilindrul.

7. Se consideră cilindrul oblic cu bazele cercuri situate în plane paralele, cu centrele în punctele $\Omega(50,40,0)$ și $\Omega_1(110,50,70)$, de raze $R = 25$ și un punct $M(60,30,z_M)$ aparținând cilindrului.

a) Să se ducă prin punctul M un plan $[T]$ tangent la cilindru;

b) Să se desfășoare cilindrul.

8. Să se desfășoare cilindrul circular oblic, cu centrele bazelor în punctele : $O(100,25,0)$ și $O_1(50,40,50)$, de raze $R = 20$ și să se determine urmele planului tangent cilindrului trasat prin punctul $M(50,8,20)$, exterior lui.

9. Se dă cilindrul drept definit de curbele directoare, cercuri cu centrele în punctele $O(100,40,0)$ și $O_1(100,40,100)$, de raze $R = 20$ și planul oarecare $[P]$: $OP_x = 30$, $OP_y = -40$, $OP_z = -25$.

a) Să se construiască secțiunea plană determinată de planul $[P]$ în cilindru (*Indicație* : pentru determinarea punctelor secțiunii se utilizează plane de front auxiliare);

b) Să se desfășoare porțiunea de cilindru cuprinsă între planul orizontal și planul $[P]$.

10. Fie cilindrul frontal cu bazele cercuri situate în plane paralele, cu centrele în punctele $\Omega(82,35,0)$ și $\Omega_1(25,35,75)$, de raze $R = 25$ și dreapta $D(d,d')$: $H(45,5,0)$, $M(80,55,90)$.

- a) Să se construiască desfășurata cilindrului;
 b) Să se determine punctele de intersecție dintre dreapta D și cilindru.

11. Se consideră cilindrul frontal cu bazele cercuri situate în plane paralele, cu centrele în punctele $\Omega(90,30,0)$ și $\Omega_1(35,30,50)$, de raze $R = 25$.

a) Să se ducă prin punctul $M(75,20,z_M)$, de pe suprafața cilindrului, un plan tangent la acesta;

b) Să se desfășoare cilindrul.

12. Să se desfășoare cilindrul circular oblic, cu centrele bazelor în punctele : $O(55,30,0)$ și $O_1(110,60,50)$, de raze $R = 25$ și să se determine urmele planului tangent cilindrului trasat prin punctul $M(110,15,20)$, exterior lui.

13. Se consideră conul oblic cu baza cerc situat în planul orizontal, cu centrul în punctul $\Omega(40,60,0)$ de rază $R = 30$, vârful în punctul $S(110,10,70)$ și dreapta $D(d,d')$: $A(90,10,20)$, $B(30,70,60)$.

a) Să se determine punctele de intersecție dintre con și dreapta D ;

b) Să se desfășoare trunchiul de con cuprins între planul orizontal și planul de capăt [Q], dus prin dreapta D.

14. Se dă conul oblic având curba directoare un cerc situat în planul orizontal de proiecție, cu centrul în punctul $O(75,40,0)$, de rază $R = 30$, vârful în punctul $S(0,70,65)$ și planul proiectant vertical [P] : $OP_x = -20$, $\angle OP_x P = 45^\circ$, $\angle OP_x P' = 90^\circ$.

a) Să se determine adevărata mărime a secțiunii plane determinate de planul [P] în con ;

b) Să se desfășoare trunchiul de con cuprins între planul orizontal și planul [P].

15. Se consideră conul oblic cu baza un cerc, cu centrul în punctul $O(90,40,0)$, de rază $R = 30$ și vârful în punctul $S(10,80,70)$ și dreapta $D(d,d')$: $H(30,40,0)$, $M(100,90,60)$.

a) Să se determine punctele de intersecție dintre dreapta D și con;

b) Să se desfășoare conul și să se figureze aceste puncte pe desfășurată.

16. Să se traseze desfășurata trunchiului de con cuprins între planul orizontal și planul de capăt [P] : $OP_x = 15$, $OP_y = \infty$, $OP_z = -10$, rezultat din conul drept cu baza un cerc situat în planul orizontal, cu centrul în punctul $O(60,30,0)$, de rază $R = 25$ și vârful $S(60,30,90)$. Să se determine adevărata mărime a secțiunii plane făcută de planul [P] în con.

17. Fie conul oblic având curba directoare un cerc situat în planul orizontal de proiecție, cu centrul în punctul $\Omega(100,40,0)$, de rază $R = 30$ și vârful în punctul $S(20,20,70)$.

a) Să se ducă prin punctul $M(44,40,z_M)$, de pe suprafața conului, un plan [T] tangent la cilindru ;

b) Să se desfășoare trunchiul de con cuprins între planul orizontal de proiecție și planul de nivel de cotă $z = 30$.

18. Fie conul oblic cu baza un cerc din planul orizontal, cu centrul în punctul $O(77,34,0)$, de rază $R = 25$, vârful în punctul $S(11,0,70)$ și punctul $M(40,40,5)$ exterior conului.

a) Să se traseze prin punctul M un plan tangent la con ;

b) Să se desfășoare conul.

19. Se consideră conul oblic cu baza un cerc, cu centrul în punctul $\Omega(100,30,0)$, de rază $R = 25$ și vârful în punctul $S(5,80,65)$, planul [P] : $OP_x = 30$, $OP_y = \infty$, $OP_z = -20$ și dreapta $D(d,d')$: $A(50,40,30)$, $B(110,30,10)$.

a) Să se determine punctele de intersecție dintre dreapta D și con;

b) Să se desfășoare trunchiului de con cuprins între planul orizontal și planul de capăt [P].

20. Se consideră conul oblic cu baza un cerc, cu centrul în punctul $\Omega(5,40,0)$, de rază $R = 30$ și vârful în punctul $S(80,80,65)$ și punctul $M(20,y_M,20)$ aparținând conului.

a) Să se determine urmele planului [T] tangent la con în punctul M ;

b) Să se traseze desfășurata trunchiului de con, cuprins între planul orizontal și planul de capăt [P] : $OP_x = 70$, $OP_y = \infty$, $OP_z = 60$.

21. Să se desfășoare trunchiul de con determinat de planul [P] : $OP_x = 30$, $OP_y = \infty$, $OP_z = -25$, în conul oblic cu baza un cerc, cu centrul în punctul $O(80,65,0)$, de rază $R = 30$ și vârful în punctul $S(5,80,65)$. Să se determine adevărata mărime a secțiunii plane făcută de planul [P] în con.

22. Se consideră conul oblic cu baza un cerc, cu centrul în punctul $\Omega(25,65,0)$, de rază $R = 30$, vârful în punctul $S(100,60,65)$ și punctul $M(40, y_M, 20)$ aparținând conului.

a) Să se determine urmele planului [T] tangent la con în punctul M ;

b) Să se traseze desfășurata trunchiului de con, cuprins între planul orizontal și planul de nivel [N], ce trece prin punctul M.

23. Să se construiască desfășurata conului oblic cu baza un cerc situat în planul orizontal, cu centrul în punctul $\Omega(35,30,0)$, de rază $R = 25$ și vârful în punctul $S(100,50,80)$. Considerând că pe aceasta trebuie practicate două găuri cu diametrul de 6 mm și știind că centrul lor este în punctele $M(60,30, z_M)$ și $N(35, y_M, 15)$, $y_M > 40$, să se figureze aceste găuri pe desfășurată.

24. Să se desfășoare trunchiul de con și să se afle adevărata mărime a secțiunii în conul drept cu centru în punctul $\Omega(100,40,0)$, de rază $R = 35$ și vârful în punctul $S(100,40,100)$, determinată de planul [P] : $OP_x = 40$, $OP_y = \infty$, $OP_z = -30$.

25. Fie sfera de rază $R = 30$, cu centrul în punctul $\Omega(50,40,50)$ și dreapta $D(d, d')$: $A(100,10,80)$, $B(10,30,10)$.

a) Să se găsească punctele de intersecție dintre dreapta D și sferă și să se studieze vizibilitatea dreptei (*Indicație* : se rabate dreapta D pe un plan de nivel ce trece prin centrul sferei, axa de rabatere fiind dată de centrul sferei Ω și de punctul de intersecție dintre dreapta D și planul de nivel) ;

b) Prin punctul $M(35, y_M, 60)$ de pe sferă să se ducă un plan [T] tangent la aceasta (*Indicație* : prin M se duce o orizontală a planului [T], perpendiculară pe raza sferei ΩM) ;

c) Să se determine adevărata mărime a secțiunii făcută de planul de capăt [Q] : $OQ_x = 10$, $OQ_y = \infty$, $OQ_z = -7$ în sferă (*Indicație* : se utilizează rabaterea planelor proiectante).

26. Se consideră sfera de rază $R = 30$, cu centrul în punctul $\Omega(50,40,50)$.

a) Prin punctul $M(65, y_M, 60)$ de pe sferă să se ducă un plan [T] tangent la aceasta;

b) Să se găsească punctele de intersecție dintre dreapta $D(d, d')$, care trece prin centrul sferei și prin punctul $A(90,80,10)$, exterior sferei și să se studieze vizibilitatea dreptei (*Indicație* : se transformă dreapta într-o frontală, prin rotație, luând axa de rotație prin centrul sferei, Ω) ;

c) Să se determine secțiunea făcută de planul de capăt [Q] : $OQ_x = 70$, $OQ_y = \infty$, $OQ_z = 80$ în sferă și să se determine adevărata mărime a acesteia.

27. Fie sfera de rază $R = 35$, cu centrul în punctul $\Omega(60,40,50)$ și dreapta $D(d, d')$: $A(20,20,10)$, $B(110,30,50)$.

a) Să se găsească punctele de intersecție dintre dreapta D și sferă și să se studieze vizibilitatea dreptei (*Indicație* : se rabate dreapta D pe un plan de nivel ce trece prin centrul sferei, axa de rabatere fiind dată de centrul sferei, Ω și de punctul B) ;

b) Prin punctul $M(80, y_M, 70)$ de pe sferă să se ducă un plan [T] tangent la aceasta;

c) Să se determine adevărata mărime a secțiunii făcută de planul de capăt [Q] : $OQ_x = 90$, $OQ_y = \infty$, $OQ_z = 110$ în sferă.

28. Se consideră sfera de rază $R = 35$, cu centrul în punctul $\Omega(80,60,40)$.

a) Prin punctul $M(70,35, z_M)$ de pe sferă să se ducă un plan [T] tangent la aceasta;

b) Să se găsească punctele de intersecție dintre dreapta $D(d, d')$, care trece prin centrul sferei și prin punctul $A(130,10,80)$, exterior sferei și să se studieze vizibilitatea dreptei;

c) Să se determine secțiunea făcută de planul de capăt [Q] : $OQ_x = 120$, $OQ_y = \infty$, $OQ_z = 55$ în sferă și să se determine adevărata mărime a acesteia.

29. Fie sfera de rază $R = 35$, cu centrul în punctul $\Omega(80,40,50)$ și dreapta $D(d,d')$: $A(120,20,10)$, $B(30,30,50)$.

a) Să se găsească punctele de intersecție dintre dreapta D și sferă și să se studieze vizibilitatea dreptei (*Indicație* : se rabate dreapta D pe un plan de nivel ce trece prin centrul sferei, axa de rabatere fiind dată de centrul sferei Ω și de punctul B) ;

b) Prin punctul $M(60,y_M,70)$ de pe sferă să se ducă un plan [T] tangent la aceasta;

c) Să se determine adevărata mărime a secțiunii făcute de planul de capăt [Q] : $OQ_x = 50$, $OQ_y = \infty$, $OQ_z = -60$ în sferă.

30. Se consideră sfera de rază $R = 35$, cu centrul în punctul $\Omega(80,60,40)$.

a) Prin punctul $M(90,35,z_M)$ de pe sferă să se ducă un plan [T] tangent la aceasta;

b) Să se găsească punctele de intersecție dintre dreapta $D(d,d')$, care trece prin centrul sferei și prin punctul $A(30,10,80)$, exterior sferei și să se studieze vizibilitatea dreptei;

c) Să se determine secțiunea făcută de planul de capăt [Q] : $OQ_x = 40$, $OQ_y = \infty$, $OQ_z = -20$ în sferă și să se determine adevărata mărime a acesteia.

31. Fie sfera de rază $R = 30$, cu centrul în punctul $\Omega(60,40,50)$ și dreapta $D(d,d')$: $A(10,10,80)$, $B(100,30,10)$.

a) Să se găsească punctele de intersecție dintre dreapta D și sferă și să se studieze vizibilitatea dreptei;

b) Prin punctul $M(40,y_M,60)$ de pe sferă să se ducă un plan [T] tangent la aceasta;

c) Să se determine adevărata mărime a secțiunii făcute de planul de capăt [Q] : $OQ_x = 100$, $OQ_y = \infty$, $OQ_z = 65$ în sferă.

32. Se consideră sfera de rază $R = 30$, cu centrul în punctul $\Omega(70,40,50)$.

a) Prin punctul $M(55,y_M,60)$ de pe sferă să se ducă un plan [T] tangent la aceasta;

b) Să se găsească punctele de intersecție dintre dreapta $D(d,d')$, care trece prin centrul sferei și prin punctul $A(30,80,10)$, exterior sferei și să se studieze vizibilitatea dreptei;

c) Să se determine secțiunea făcută de planul de capăt [Q] : $OQ_x = 50$, $OQ_y = \infty$, $OQ_z = -55$ în sferă și să se determine adevărata mărime a acesteia.

33. Să se determine curba de intersecție a corpurilor din figura 9.58, $a \div h$ și desfășurata acestora.

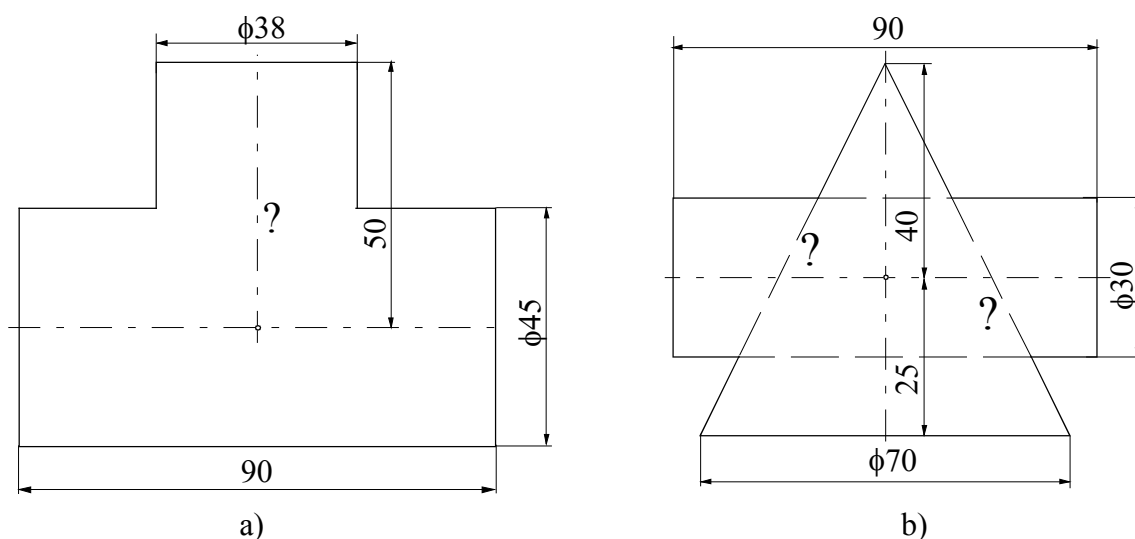


Fig.9.58

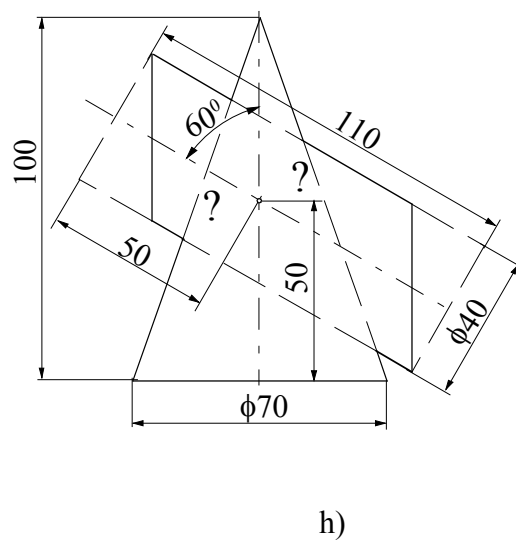
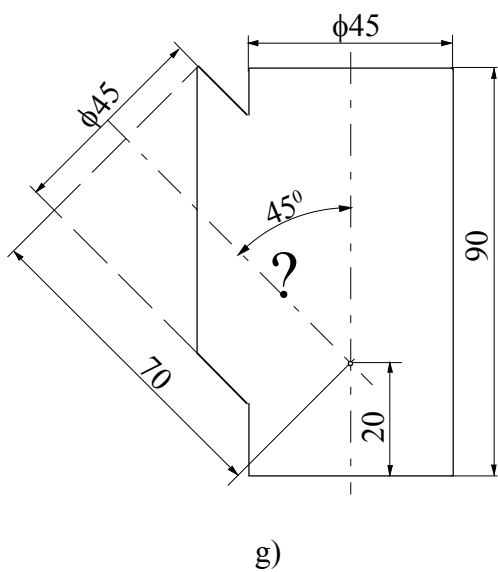
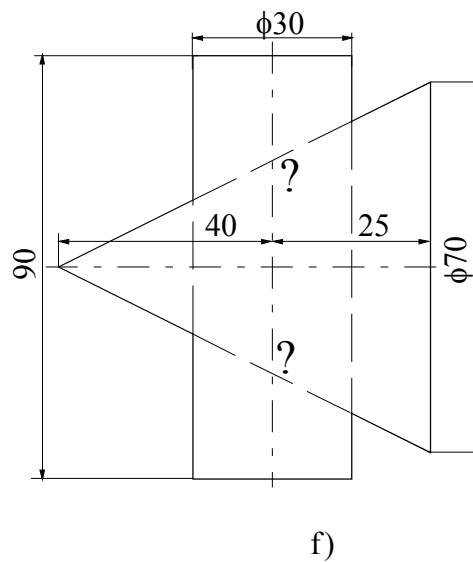
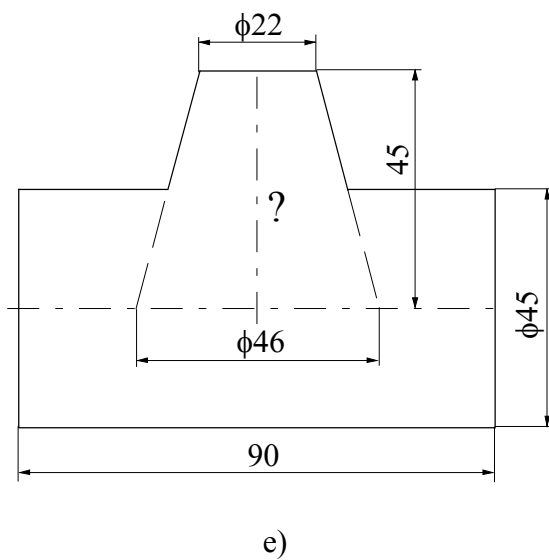
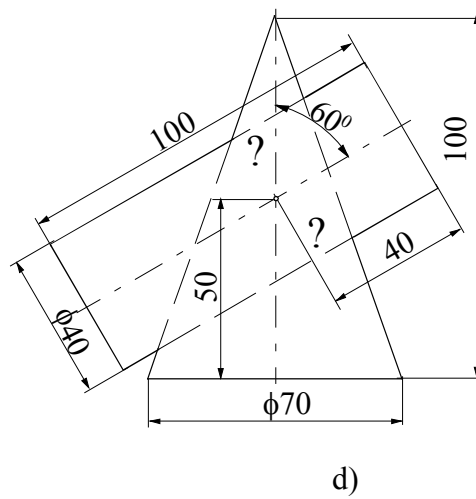
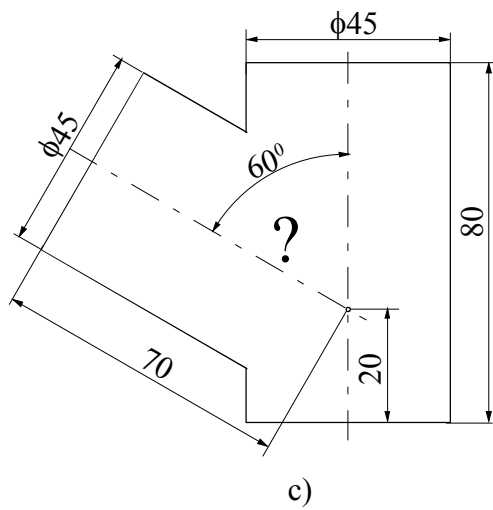


Fig.9.58

BIBLIOGRAFIE

1. Alb, T. ș. a., Curs de reprezentări tehnice, Litografia Institutului Politehnic, Cluj-Napoca, 1970.
2. Bibennikov, A. V., Gromov, M., Nacertatelnaia geometria, Moscova, 1965.
3. Boloș, C., Geometrie descriptivă, Editura Universității Petru Maior, Tîrgu-Mureș, 1998.
4. Bodea, S., Crișan, N.-I., Enache, I., Geometrie descriptivă, Editura RISOPRINT, Cluj-Napoca, 2003.
5. Bodea, S., Desen tehnic – Elemente de bază, Editura RISOPRINT, Cluj-Napoca, 2005.
6. Botez, M. Șt., Geometrie descriptivă, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965.
7. Buțu, A., Sass, L., Grafică inginerescă – Geometrie descriptivă – teste grilă, Editura Universitaria, Craiova, 1999.
8. Crișan, N.-I., Stănescu, G., Bodea, S., ș. a., Bazele geometriei descriptive, Editura Universitaria, Craiova, 2004.
9. Crișan, N.-I., Noțiuni fundamentale în Desenul Tehnic Industrial, Editura RISOPRINT, Cluj-Napoca, 2001.
10. Drăgan, D., Mârza, C., Geometrie descriptivă, Editura U.T.PRES, Cluj-Napoca, 2002.
11. Enache, I. ș. a., Geometrie descriptivă și desen tehnic – Probleme și aplicații, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
12. Florea, C. ș. a., Elemente de geometrie descriptivă și aplicații, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1997.
13. Gogu, M., Olariu, F., Geometrie descriptivă, Editura U.T.PRES, Cluj-Napoca, 1999.
14. Hulpe, Gh. ș. a., Desen industrial, Litografia Institutului Politehnic, Cluj-Napoca, 1980.
15. Iancău, V. ș. a., Reprezentări geometrice și desen tehnic, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
16. Iancău, V., Zetea, E., Reprezentări geometrice – Îndrumător de lucrări, Litografia Institutului Politehnic, Cluj-Napoca, 1980.
17. Iordache, D., Bendic, V., Graphique Industrielle, Editura Tehnică, București, 1995.
18. Kiraly, A., Grafică inginerescă, Editura U.T.PRES, Cluj-Napoca, 2002.
19. Marin, D. ș. a., Geometrie descriptivă – probleme și aplicații, Editura BREN, București, 1999.
20. Matei, A. ș. a., Geometrie descriptivă, Editura Tehnică, București, 1982.
21. Mănescu, M. ș. a. Geometrie descriptivă – Aplicații, vol. I și vol. II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1995.
22. Mănescu, M. ș. a. Geometrie descriptivă – curs practic, Litografia Universității Valahia din Tîrgoviște, Tîrgoviște, 2002.
23. Moncea, J., Geometrie descriptivă, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.

24. Noveanu, L., Orban, M., Geometrie descriptivă și aplicații, Litografia Universității Tehnice din Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, 1997.
25. Orban, M., Geometrie descriptivă – Sinteze și aplicații, Editura U.T.PRES, Cluj-Napoca, 2003.
26. Orban, M. ș. a., Geometrie descriptivă – Suprafețe și corpuri cu aplicații în tehnică, Editura U.T.PRES, Cluj-Napoca, 2002.
27. Raicu, L., Grafic și vizual între clasic și modern, Editura PAIDEIA, București, 2002.
28. Simion, I., Geometrie descriptivă, Litografia Universității Politehnica București, București, 2001.
29. Tănăsescu, A., Geometrie descriptivă – Probleme, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1967.
30. Tănăsescu, A., Geometrie descriptivă, perspectivă, axonometrie, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975.
31. Vasilescu, E., ș. a., Geometrie descriptivă, Culegere de probleme, I.P.B., 1987.
32. Voilquin, M., Géométrie descriptive, Editura Classiques, Nancy, 1983.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MECANICĂ
CATEDRA GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ ȘI GRAFICĂ INGINEREASCĂ

PORTOFOLIU DE LUCRĂRI
LA
GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ

an universitar 2008 - 2009

Student :

Grupa :

la GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ - an universitar 2008-2009

An I Facultatea de Mecanică

(Ingineria Autovehiculelor + Inginerie Mecanică + Mecatronică)

PLANȘA 1- Epura dreptei și a planului (săptămâna 13 – 17 octombrie 2008)

1. Să se stabilească valorile coordonatelor punctelor M(?,2,2) și N(2,2,?), astfel încât acestea să determine succesiv o orizontală, o frontală, o dreaptă de profil, o verticală, o dreaptă de capăt și o fronto-orizentală. Să se construiască epura acestor drepte. (model - [1] – fig.3.5, *b*, fig.3.6, *b*, fig.3.7, *b*, fig.3.10, *b*, fig.3.11, *b*, fig.3.12, *b*).

2. Să se determine urmele planului definit de :

a) două drepte paralele (model - [1] - fig.4.8 și problema 1, pag.51);

b) două drepte concurente (model - [1] - fig.4.9 și problema 2, pag.52).

PLANSA 2- Epura planului (săptămâna 20 – 24 octombrie 2008)

1. În planul oarecare [P], definit prin $OP_x = __, OP_y = __, OP_z = __$, să se reprezinte următoarele drepte : G – orizontală, F – frontală, D – dreaptă de profil, D₁ - linie de cea mai mare pantă față de [H], D₂- linie de cea mai mare pantă față de [V]. (model - [1] – fig.4.10, *b*, fig.4.12, *b*, fig.4.14, *b*, fig.4.15, *b*, fig.4.18, *b*).

2. Să se stabilească valorile coordonatelor punctelor A(?,?,?), B(?,?,?), C(?,?,?) și să se reprezinte epura triunghiului ABC, astfel încât acesta să fie cuprins succesiv într-un : a) plan proiectant vertical ; b) plan de capăt ; c) plan paralel cu axa Ox. (model - [1] – fig.4.19, b, fig.4.21, b, fig.4.23, b)

3. Să se stabilească valorile coordonatelor punctelor $M(\underline{2,2,2})$, $N(\underline{2,2,2})$, $S(\underline{2,2,2})$, $T(\underline{2,2,2})$ și să se reprezinte epura pătratului MNST, astfel încât acesta să fie cuprins succesiv într-un : a) plan de nivel ; b) plan de front ; c) plan de profil . (model - [1] – fig.4.26, b, fig.4.27, b, fig.4.28, b)

PLANSA 3 –Pozitii relative (săptămâna 27 octombrie – 31 octombrie 2008)

1. [1] - problema 1 pentru una din figurile a – f, pag.117.

2. Să se determine dreapta de intersecție dintre două plăci plane opace și să se studieze vizibilitatea plăcilor. (model - [1] – una din problemele 22, 23 b, c, d, 24, pag.73).

PLANȘA 4 – Metoda schimbării planelor de proiectie (săpt. 10– 14 noiembrie 2008)

1. O problemă rezolvabilă printr-o schimbare de plan. ([1] - una din problemele 1 ÷ 16, pag.110).

2. O problemă rezolvabilă prin două schimbări de plan succesive. ([1] - una din problemele $17 \div 26$, pag.111).

3. Să se determine adevărata mărime a triunghiului ABC dat de punctele A(____,____,____), B(____,____,____) și C(____,____,____), prin dubla schimbare de plan. ([1] - problema 27, pag.111).

PLANȘA 5 – Metoda rotației (săptămâna 17 – 21 noiembrie 2008)

1. O problemă rezolvabilă printr-o rotație. ([1] - una din problemele 28 ÷ 44, pag.111).

2. O problemă rezolvabilă prin două rotații succesive. ([1] - una din problemele 45 ÷ 55, pag.112).

3. Să se determine adevărata mărime a triunghiului ABC dat de punctele A(____,____,____), B(____,____,____) și C(____,____,____), prin dubla rotație. ([1] - problema 56, pag.112).

PLANȘA 6 – *Metoda rabaterii* (săptămâna 24 – 28 noiembrie 2008)

1. Să se determine măsura unghiul dintre două drepte concurente prin :

a) rabatare pe planul [H] de proiecție (model - [1] problema 7 rezolvată sau problema 63, pag.113) ;

b) rabatare pe un plan de nivel (model - [1] problema 7 rezolvată sau problema 63, pag.113).

2. Să se determine măsura unghiul diedru format de două plane oarecare concurente. (model - [1]
problema 9 rezolvată sau problema 70, 71, pag.114)

3. Să se determine adevărata mărime a triunghiului ABC dat de punctele A(____,____,____), B(____,____,____) și C(____,____,____), prin rabatere. (model - [1] - problema 75, pag.114).

PLANȘA 7 – Poliedre (săptămâna 1 – 5 decembrie 2008)

1. Să se traseze desfășurata unei prisme patrulatere oblice.
2. Să se traseze desfășurata unei piramide patrulatere obice.

PLANȘA 8 – Cilindro – Conice (săptămâna 8 – 12 decembrie 2007)

1. Să se traseze desfășurata unui cilindru circular oblic.
2. Să se traseze desfășurata unui con circular oblic.

PLANȘA 9 – Sfera (săptămâna 15 – 19 decembrie 2008)

1. Intersecția sferei cu o dreaptă, plan tangent la sferă și secțiuni plane în sferă ([1] – una din problemele 25 - 32, pag.194).

PLANȘA 10 – Metoda sferă - cerc (săptămâna 5 – 9 ianuarie 2008)

1. Să se determine curba de intersecție (prin metoda sferă - cerc) și să se desfășoare corpurile de rotație în cazul intersecției dintre ([1] – două din problemele 33, a - h, pag.197):

a) un cilindru drept frontoorizontal C_1 și un cilindru drept vertical C_2 , având axele coplanare și concurente;

b) un cilindru drept frontoorizontal C_1 și un con circular drept C_2 , având axele coplanare și concurente.

BILIOGRAFIE

1. Bodea, S., *Geometrie descriptivă*, Editura RISOPRINT, Cluj–Napoca, 2006.
2. Bodea, S., Crișan, N.-I., Enache I., *Geometrie descriptivă*, Editura RISOPRINT, Cluj–Napoca, 2003.
3. Noveanu, L., Orban, M., *Geometrie descriptivă și aplicații*, Litografia Universității Tehnice din Cluj–Napoca, Cluj–Napoca, 1997.
4. Tănăsescu, A., *Geometrie descriptivă – Probleme*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1967.
5. Florea, C. ș. a., *Elemente de geometrie descriptivă și aplicații*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1997.

Responsabil disciplină : conf.dr.ing. Sanda BODEA

= EXAMEN PARȚIAL =

Examenul parțial este **opțional** și se dă din materia aferentă cursurilor 1 – 6, respectiv planșelor 1 – 6 din portofoliul de lucrări (examenul parțial promovat poate înlocui componenta P_1 din formula de calcul a notei la examen, la cererea studentului).

- Anul I - Ingineria Autovehiculelor - sâmbătă, 6 decembrie 2008, ora 9 – 11, sala A123
- Anul I - Inginerie Mecanică + Mecatronică - sâmbătă, 6 decembrie 2008, ora 11 – 13, sala A123

Modul de examinare și atribuire a notei	
Modul de examinare	Examen oral (3 ore). Lucrările din portofoliu se predau și se corectează săptămânal.
Componentele notei	P – nota portofoliului de lucrări, T_G – nota testului grilă teorie, P_1 – nota problema I ex. oral, P_2 – nota problema II ex. oral.
Formula de calcul a notei	$N = 1 + 0,2P + 0,2T_G + 0,25P_1 + 0,25P_2$ Condiție de promovare: $P > 5$; $P_1 > 5$; $P_2 > 5$

