

Roll No

BT-102 (GS)**B.Tech., I & II Semester**

Examination, December 2024

Grading System (GS)**Mathematics-I****Time : Three Hours****Maximum Marks : 70****Note:** i) Attempt any five questions.

किन्हीं पाँच प्रश्नों को हल कीजिए।

ii) All questions carry equal marks.

सभी प्रश्नों के समान अंक हैं।

iii) In case of any doubt or dispute the English version question should be treated as final.

किसी भी प्रकार के संदेह अथवा विवाद की स्थिति में अंग्रेजी भाषा के प्रश्न को अंतिम माना जायेगा।

1. a) Find the points where the function $x^3 + y^3 - 3axy$ has maximum or minimum value.

उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जहाँ फलन $x^3 + y^3 - 3axy$ का अधिकतम या न्यूनतम मान है।

- b) Find the Taylor's expansion of $y = \sin x$ about point $x = \pi/2$.

बिंदु $x = \pi/2$ के परितः $y = \sin x$ का टेलर का विस्तार ज्ञात कीजिए।

BT-102 (GS)

[2]

2. a) The part of the parabola $y^2 = 4ax$ cut off by the latus rectum revolves about the tangent at the vertex. Find the volume of the reel thus generated.

परवलय $y^2 = 4ax$ का भाग, जो नाभिजीवा द्वारा काटा जाता है, शीर्ष पर स्पर्शरेखा के चारों ओर घूमता है। इस प्रकार उत्पन्न रील का आयतन ज्ञात कीजिए।

- b) Prove that:

सिद्ध कीजिए।

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^4} dx = \frac{\{\Gamma(1/4)\}^2}{6\sqrt{2\pi}}$$

3. a) Show that the following series is Convergent.

दिखाएँ कि निम्नलिखित श्रृंखला अभिसारी है।

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots$$

- b) Obtain Half Range Sine Series for $f(x) = e^x$ in $0 < x < 1$.

 $0 < x < 1$ में $f(x) = e^x$ के लिए अर्ध-श्रेणी फूरियर Sine श्रृंखला ज्ञात कीजिए।

4. a) Show that the set $w = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$ is subspace of \mathbb{R}^3 .

दिखाएँ कि समुच्चय $w = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$ \mathbb{R}^3 का उपसमष्टि है।

- b) Are the following vectors LD? If so express one of these as a LC of other two.

$$X_1 = (1, 3, 4, 2) \quad X_2 = (3, -5, 2, 2) \quad X_3 = (2, -1, 3, 2)$$

क्या निम्नलिखित सदिश LD हैं? यदि ऐसा है तो इनमें से एक को अन्य दो के LC के रूप में व्यक्त करें।

$$X_1 = (1, 3, 4, 2) \quad X_2 = (3, -5, 2, 2) \quad X_3 = (2, -1, 3, 2)$$

BT-102 (GS)

२२७७

[3]

5. a) Find a similarity transformation that diagonalise the matrix.

एक समानता परिवर्तन जो मैट्रिक्स को विकर्णित करता है।

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

- b) Find the Eigen value and Corresponding Eigen Vectors of the following Matrix.

निम्नलिखित मैट्रिक्स के Eigen मान और संगत Eigen वेक्टर खोजें।

$$\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

6. a) Define Beta and Gamma Function and show that relation

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

बीटा और गामा फंक्शन को परिभाषित करें और उस संबंध को दिखाइए।

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

- b) Evaluate:

ज्ञात कीजिए।

i) $\int_0^1 x^2 (1-x)^3 dx$

ii) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx$

PTO

BT-102 (GS)

[4]

7. a) Prove that the surface area of the solid generated by the revolution of the ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ about the major axis is :

$$2(\pi ab) \left\{ \sqrt{1-e^2} + \frac{\sin^{-1} e}{e} \right\}$$

सिद्ध कीजिये कि दीर्घवृत्त $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ की दीर्घ अक्ष की परिक्रमण से उत्पन्न ठोस का सतह क्षेत्र है :

$$2(\pi ab) \left\{ \sqrt{1-e^2} + \frac{\sin^{-1} e}{e} \right\}$$

- b) Show that the sequence $\langle n^{1/n} \rangle$ converge to 1.

दिखाएँ कि अनुक्रम $\langle n^{1/n} \rangle$, 1 में अभिसरित होता है।

8. a) Prove that a rectangular solid of maximum volume within a sphere is a cube.

सिद्ध कीजिए कि एक गोले के भीतर अधिकतम आयतन वाला आयताकार ठोस एक घन है।

- b) Verify Rolle's Theorem for the function

$$y = x^2 + 2, a = -2 \text{ and } b = 2.$$

फलन $y = x^2 + 2$, $a = -2$ और $b = 2$ के लिए रोले के प्रमेय को सत्यापित करें।

BT-102 (GS)