Recherche Opérationnelle: graphes

IT UNIVERSITY

RAZAFINJATOVO M. Heriniaina

Chapitre 1

Graphe

Quoi :

Un graphe non orienté est un couple de deux ensembles :

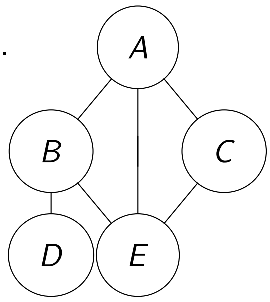
(a) Un ensemble des sommets dont le nombre est appelé ordre du graphe.

(b) Un ensemble des arêtes qui relient les sommets deux a deux. Deux sommets reliés par une arête sont adjacents. Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes reliées a ce sommet.

Quand les arêtes ont un sens, on dit que le graphe est orienté.

Exemple :graphe non orienté

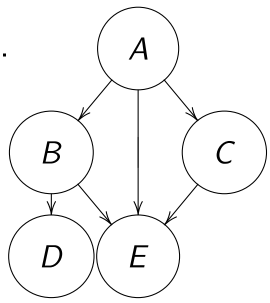
. (1.1)



- On a ici un graphe non orienté avec 5 sommets ;
- Les sommets A et B, A et C,. . ., sont adjacents ;
- $\deg A = 3$, $\deg B = 3$, $\deg C = 2$, $\deg E = 3$, $\deg D = 1$.

Exemple :graphe orienté

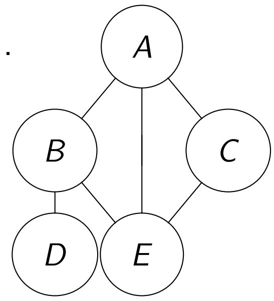
. (1.2)



1. Représentation non graphique

1.1. Tableau. Les X représentent les arêtes (les arcs si le graphe est orienté) ; ils peuvent être remplacé par les longueurs ou autre mesure de ces arêtes ou arcs.

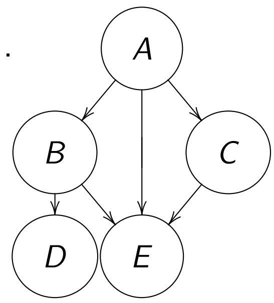
Graphe non orienté



-	A	B	C	D	E
A		X	X		X
B	X			X	X
C	X				X
D		X			
E	X	X	X		

(1.3)

Graphe orienté



$\rightarrow$	A	B	C	D	E
A		X	X		X
B				X	X
C					X
D					
E					

(1.4)

1.2. Dictionnaire. Utilisé seulement pour les graphes orientés. Il fournit pour chaque sommet la liste de ces prédécesseurs ou ces successeurs.

Sommets	Prédécesseurs
A	
B	A
C	A
D	B
E	A,B,C

(1.5)

ou

Sommets	Successeurs
A	B,C,E
B	D,E
C	E
D	
E	

(1.6)

1.3. Matrice d'adjacences. Cette représentation donne une matrice carrée dont les termes 1 indique la présence d'un arc entre deux sommets.

$\rightarrow$	A	B	C	D	E
A		X	X		X
B				X	X
C					X
D					
E					

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

2. Coloration d'un graphe

(a) Consiste a affecter a tous les sommets une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

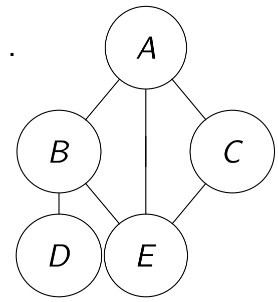
(b) Un sous-ensemble de l'ensemble des sommets est un stable s'il ne contient que des sommets non adjacents deux a deux.

(c) Une coloration avec k couleurs est une partition des sommets en k stables.

(d) Le nombre de stabilité d'un graphe est le cardinal de son plus grand stable.Le nombre chromatique d'un graphe est le plus petit entier t tel qu'il existe une partition de ses sommets en t stables (nombre minimum de couleur).

Dans le cas réel, colorer un graphe équivaut a séparer des événements incompatibles. En utilisant le nombre chromatique, la coloration d'un graphe peut-être perçu comme un problème d'optimisation.

Exemple :



Les stables sont par exemple $\{A, D\}$, $\{B, C\}$ et $\{E\}$. Le nombre chromatique est égal a 3. Remarquons qu'on peut aussi avoir $\{A\}$, $\{B, C\}$ et $\{D, E\}$. Il n'y a donc pas forcement unicité.

2.1. Algorithme de coloration.

- Ranger les sommets par ordre de degré décroissant.
- Attribuer au premier sommet de la liste une couleur.
- Suivre la liste en attribuant la même couleur au sommet non adjacent a ceux déjà colorés.
- Attribuer une deuxième couleur pour le premier sommet de la liste non coloré et répéter les étapes précédentes.

Pour notre exemple, on a :

Sommets	A	B	E	C	D
Degrés	3	3	3	2	1

— On colore A en rouge.

— Le seul sommet non adjacent a A est le sommet D, donc on colore D en rouge.

— On colore B en bleu, idem pour C.

— On colore E en vert.

EXERCICE 1.1. L'ITU doit organiser les examens de repêchage ; on suppose qu'il y a 7 cours A,B,C,D,E,F,G et que les pairs des examens suivants ont des étudiants en communs : A et B ; A et C ; A et D ; A et G ; B et C ; B et D ; B et E ; B et G ; C et D ; C et F ; C et G ; D et E ; D et F ; E et F ; E et G ; F et G.
Comment organiser ces examens de façon minimale ?

3. Plus court chemin

On a un graphe orienté tel que pour tout arc (i,j) reliant les sommets i et j, on associe le nombre l_{ij} appelé longueur de l'arc.On dit alors que le graphe est valué par les l_{ij}.
Arc=arête pour un graphe orienté.
Le problème du plus court chemin entre deux sommets quelconque est de trouver un chemin(ensemble d'arcs) reliant ces deux sommets dont la longueur totale est minimum.

3.1. Algorithme de Moore Djikstra.

(a) La longueur d'un arc est positive.

(b) On veut savoir le plus court chemin entre un sommet spécifique appelé sommet source et les autres sommet d'un graphe.

(c) On note par $\pi(i)$ la longueur du chemin de la source vers le sommet i.

Voici l'algorithme :

— On divise les sommets en deux sous-ensembles :

  (a) S={sommet tel que le plus court chemin venant de la source est connu},

  (b) $\bar{S}$={sommet tel que le plus court chemin venant de la source est inconnu }

— Sommets={1,2,...,n} ;

  (a) S={1}

  (b) $\bar{S}$={2,3,...,n}

  (c) $\pi(1) = 0$

  (d) Si $i \in \bar{S}$, alors

$$\pi(i) = \begin{cases} l_{ij} & \text{s'il existe un arc (1,i)} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

— Prendre $j \in \bar{S}$ tel que $\pi(j) = \min_{k \in \bar{S}} \{\pi(k)\}$, $\bar{S} = \bar{S} \setminus \{j\}$.
Si $\bar{S}$ est vide, on arrête.

— Pour tout $i \in \bar{S}$ tel qu'il existe un arc (j,i), on a $\pi(i) = \min\{\pi(i), \pi(j) + l_{ji}\}$

— On reprend la troisième étape.

Remarques :

(a) Les valeurs de π utilisées sont les dernières valeurs calculées,

(b) Si $i \in S$, alors $\pi(i)$ représente la valeur du plus court chemin vers i.

3.2. Algorithme de Bellmann.

(a) Plus court chemin entre la source et un sommet destination prédéfini ;

(b) La longueur d'un chemin peut-être négative.

Sommets={1,2,...,n} tel que 1 est la source et n est la destination.
Voici l'algorithme :

— $\pi(1) = 0$ et $\pi(i) = l_{1i} + \pi(1)$ s'il existe un arc (1,i).

— Pour un certain sommet k, $\pi(k) = \min\{l_{jk} + \pi(j)\}$ s'il existe un arc (j,k) ;

— Répéter la dernière étape jusqu'à la destination. La longueur du plus court chemin de la source vers la destination est alors la somme des longueurs des arcs parcourus avec les plus petites valeurs.