Recherche Opérationnelle: graphes

IT UNIVERSITY

RAZAFINJATOVO M. Heriniaina

Chapitre 1

Graphe

Quoi :

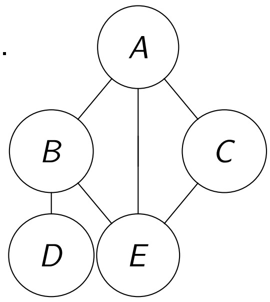
Un graphe non orienté est un couple de deux ensembles :

(a) Un ensemble des sommets dont le nombre est appelé ordre du graphe.

(b) Un ensemble des arêtes qui relient les sommets deux a deux. Deux sommets reliés par une arête sont adjacents. Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes reliées a ce sommet.

Quand les arêtes ont un sens, on dit que le graphe est orienté.

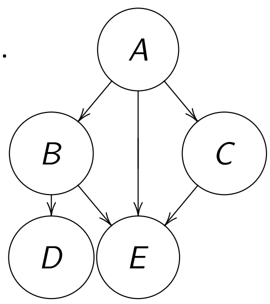
Exemple :graphe non orienté

. 

(1.1)

- On a ici un graphe non orienté avec 5 sommets ;
- Les sommets A et B, A et C,. . ., sont adjacents ;
- deg $A = 3$, deg $B = 3$, deg $C = 2$, deg $E = 3$, deg $D = 1$.

Exemple :graphe orienté

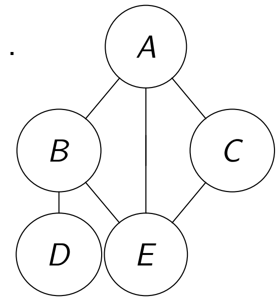
. 

(1.2)

1. Représentation non graphique

1.1. Tableau. Les X représentent les arêtes (les arcs si le graphe est orienté) ; ils peuvent être remplacé par les longueurs ou autre mesure de ces arêtes ou arcs.

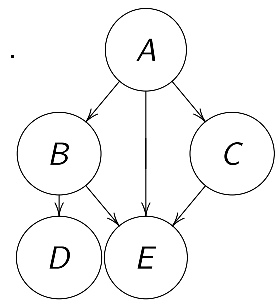
Graphe non orienté



-	A	B	C	D	E
A		X	X		X
B	X			X	X
C	X				X
D		X			
E	X	X	X		

(1.3)

Graphe orienté



$\rightarrow$	A	B	C	D	E
A		X	X		X
B				X	X
C					X
D					
E					

(1.4)

1.2. Dictionnaire. Utilisé seulement pour les graphes orientés. Il fournit pour chaque sommet la liste de ces prédécesseurs ou ces successeurs.

Sommets	Prédécesseurs
A	
B	A
C	A
D	B
E	A,B,C

(1.5)

ou

Sommets	Successeurs
A	B,C,E
B	D,E
C	E
D	
E	

(1.6)

1.3. Matrice d'adjacences. Cette représentation donne une matrice carrée dont les termes 1 indique la présence d'un arc entre deux sommets.

$\rightarrow$	A	B	C	D	E
A		X	X		X
B				X	X
C					X
D					
E					

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

2. Coloration d'un graphe

(a) Consiste a affecter a tous les sommets une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

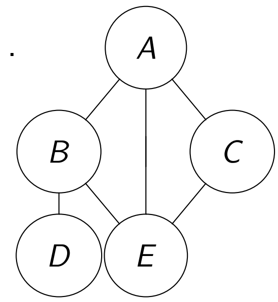
(b) Un sous-ensemble de l'ensemble des sommets est un stable s'il ne contient que des sommets non adjacents deux a deux.

(c) Une coloration avec k couleurs est une partition des sommets en k stables.

(d) Le nombre de stabilité d'un graphe est le cardinal de son plus grand stable.Le nombre chromatique d'un graphe est le plus petit entier t tel qu'il existe une partition de ses sommets en t stables (nombre minimum de couleur).

Dans le cas réel, colorer un graphe équivaut a séparer des événements incompatibles. En utilisant le nombre chromatique, la coloration d'un graphe peut-être perçu comme un problème d'optimisation.

Exemple :



Les stables sont par exemple $\{A, D\}$, $\{B, C\}$ et $\{E\}$. Le nombre chromatique est égal a 3. Remarquons qu'on peut aussi avoir $\{A\}$, $\{B, C\}$ et $\{D, E\}$. Il n'y a donc pas forcement unicité.

2.1. Algorithme de coloration.

- Ranger les sommets par ordre de degré décroissant.
- Attribuer au premier sommet de la liste une couleur.
- Suivre la liste en attribuant la même couleur au sommet non adjacent a ceux déjà colorés.
- Attribuer une deuxième couleur pour le premier sommet de la liste non coloré et répéter les étapes précédentes.

Pour notre exemple, on a :

Sommets	A	B	E	C	D
Degrés	3	3	3	2	1

— On colore A en rouge.

— Le seul sommet non adjacent a A est le sommet D, donc on colore D en rouge.

— On colore B en bleu, idem pour C.

— On colore E en vert.

Exercice 1.1. L'ITU doit organiser les examens de repêchage ; on suppose qu'il y a 7 cours A,B,C,D,E,F,G et que les pairs des examens suivants ont des étudiants en communs : A et B ; A et C ; A et D ; A et G ; B et C ; B et D ; B et E ; B et G ; C et D ; C et F ; C et G ; D et E ; D et F ; E et F ; E et G ; F et G.
Comment organiser ces examens de façon minimale ?