Recherche Opérationnelle: graphes

IT UNIVERSITY

RAZAFINJATOVO M. Heriniaina

Chapitre 1

Graphe

Quoi :

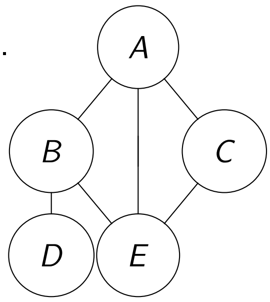
Un graphe non orienté est un couple de deux ensembles :

(a) Un ensemble des sommets dont le nombre est appelé ordre du graphe.

(b) Un ensemble des arêtes qui relient les sommets deux a deux. Deux sommets reliés par une arête sont adjacents. Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes reliées a ce sommet.

Quand les arêtes ont un sens, on dit que le graphe est orienté.

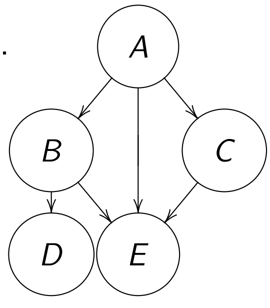
Exemple :graphe non orienté

. 

(1.1)

- On a ici un graphe non orienté avec 5 sommets;
- Les sommets A et B, A et C,..., sont adjacents;
- $\deg A = 3$, $\deg B = 3$, $\deg C = 2$, $\deg E = 3$, $\deg D = 1$.

Exemple :graphe orienté

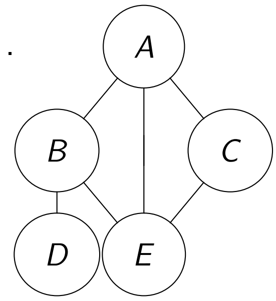
. 

(1.2)

1. Représentation non graphique

1.1. Tableau. Les X représentent les arêtes (les arcs si le graphe est orienté) ; ils peuvent être remplacé par les longueurs ou autre mesure de ces arêtes ou arcs.

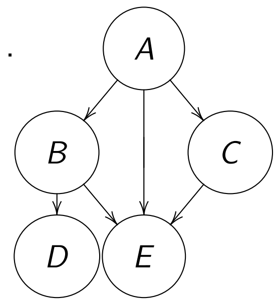
Graphe non orienté



-	A	B	C	D	E
A		X	X		X
B	X			X	X
C	X				X
D		X			
E	X	X	X		

(1.3)

Graphe orienté



$\rightarrow$	A	B	C	D	E
A		X	X		X
B				X	X
C					X
D					
E					

(1.4)

1.2. Dictionnaire. Utilisé seulement pour les graphes orientés. Il fournit pour chaque sommet la liste de ces prédécesseurs ou ces successeurs.

Sommets	Prédécesseurs
A	
B	A
C	A
D	B
E	A,B,C

(1.5)

ou

Sommets	Successeurs
A	B,C,E
B	D,E
C	E
D	
E	

(1.6)

1.3. Matrice d'adjacences. Cette représentation donne une matrice carrée dont les termes 1 indique la présence d'un arc entre deux sommets.

$\rightarrow$	A	B	C	D	E
A		X	X		X
B				X	X
C					X
D					
E					

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

2. Coloration d'un graphe

(a) Consiste a affecter a tous les sommets une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

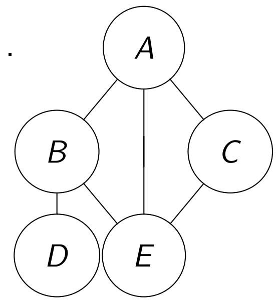
(b) Un sous-ensemble de l'ensemble des sommets est un stable s'il ne contient que des sommets non adjacents deux a deux.

(c) Une coloration avec k couleurs est une partition des sommets en k stables.

(d) Le nombre de stabilité d'un graphe est le cardinal de son plus grand stable.Le nombre chromatique d'un graphe est le plus petit entier t tel qu'il existe une partition de ses sommets en t stables (nombre minimum de couleur).

Dans le cas réel, colorer un graphe équivaut a séparer des événements incompatibles. En utilisant le nombre chromatique, la coloration d'un graphe peut-être perçu comme un problème d'optimisation.

Exemple :



Les stables sont par exemple $\{A, D\}$, $\{B, C\}$ et $\{E\}$. Le nombre chromatique est égal a 3. Remarquons qu'on peut aussi avoir $\{A\}$, $\{B, C\}$ et $\{D, E\}$. Il n'y a donc pas forcement unicité.

2.1. Algorithme de coloration.

- Ranger les sommets par ordre de degré décroissant.
- Attribuer au premier sommet de la liste une couleur.
- Suivre la liste en attribuant la même couleur au sommet non adjacent a ceux déjà colorés.
- Attribuer une deuxième couleur pour le premier sommet de la liste non coloré et répéter les étapes précédentes.

Pour notre exemple, on a :

Sommets	A	B	E	C	D
Degrés	3	3	3	2	1

— On colore A en rouge.

— Le seul sommet non adjacent a A est le sommet D, donc on colore D en rouge.

— On colore B en bleu, idem pour C.

— On colore E en vert.

EXERCICE 1.1. L'ITU doit organiser les examens de repêchage ; on suppose qu'il y a 7 cours A,B,C,D,E,F,G et que les pairs des examens suivants ont des étudiants en communs : A et B ; A et C ; A et D ; A et G ; B et C ; B et D ; B et E ; B et G ; C et D ; C et F ; C et G ; D et E ; D et F ; E et F ; E et G ; F et G.
Comment organiser ces examens de façon minimale ?

3. Plus court chemin

On a un graphe orienté tel que pour tout arc (i,j) reliant les sommets i et j, on associe le nombre l_{ij} appelé longueur de l'arc.On dit alors que le graphe est valué par les l_{ij}.
Arc=arête pour un graphe orienté.
Le problème du plus court chemin entre deux sommets quelconque est de trouver un chemin(ensemble d'arcs) reliant ces deux sommets dont la longueur totale est minimum.

3.1. Algorithme de Moore Djikstra.

(a) La longueur d'un arc est positive.

(b) On veut savoir le plus court chemin entre un sommet spécifique appelé sommet source et les autres sommet d'un graphe.

(c) On note par $\pi(i)$ la longueur du chemin de la source vers le sommet i.

Voici l'algorithme :

— On divise les sommets en deux sous-ensembles :

  (a) S={sommet tel que le plus court chemin venant de la source est connu},

  (b) $\bar{S}$={sommet tel que le plus court chemin venant de la source est inconnu }

— Sommets={1,2,...,n} ;

  (a) S={1}

  (b) $\bar{S}$={2,3,...,n}

  (c) $\pi(1) = 0$

  (d) Si $i \in \bar{S}$, alors

$$\pi(i) = \begin{cases} l_{ij} & \text{s'il existe un arc (1,i)} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

— Prendre $j \in \bar{S}$ tel que $\pi(j) = \min_{k \in \bar{S}} \{\pi(k)\}$, $\bar{S} = \bar{S} \setminus \{j\}$.
Si $\bar{S}$ est vide, on arrête.

— Pour tout $i \in \bar{S}$ tel qu'il existe un arc (j,i), on a $\pi(i) = \min\{\pi(i), \pi(j) + l_{ji}\}$

— On reprend la troisième étape.

Remarques :

(a) Les valeurs de π utilisées sont les dernières valeurs calculées,

(b) Si $i \in S$, alors $\pi(i)$ représente la valeur du plus court chemin vers i.

3.2. Algorithme de Bellmann.

(a) Plus court chemin entre la source et un sommet destination prédéfini ;

(b) La longueur d'un chemin peut-être négative.

Sommets={1,2,...,n} tel que 1 est la source et n est la destination.
Voici l'algorithme :

— $\pi(1) = 0$ et $\pi(i) = l_{1i} + \pi(1)$ s'il existe un arc (1,i).

— Pour un certain sommet k, $\pi(k) = \min\{l_{jk} + \pi(j)\}$ s'il existe un arc (j,k) ;

— Répéter la dernière étape jusqu'à la destination. La longueur du plus court chemin de la source vers la destination est alors la somme des longueurs des arcs parcourus avec les plus petites valeurs.

4. Flot maximal

(a) Graphe orienté,

(b) A chaque arc ou affecte une valeur positive appelée coût ou capacité,

(c) On a un sommet source et un sommet puits (destination), les autres sont des sommets intermédiaires,

(d) Un flot est l'affectation pour chaque arc d'une valeur réelle représentant une quantité transportée sur cet arc, tel que en chaque sommet la somme des flots entrants est la même que la somme des flots sortants,

(e) Pour chaque arc la capacité est plus grande que le flot.

(f) Un arc est saturé si le flot sur cet arc est la même que sa capacité,

(g) Un flot est saturé si pour toute chemin , il existe un arc saturé.

4.1. FORD FULKERSON.

(a) Procédure de marquage :

- On cherche un chemin de la source vers le puits tels que les sommets seront marqués,
- La source est marqué (+),
- Un sommet de chemin est marquée (+) si l'arc dont il est l'origine n'est pas saturé et si cet arc est dans le sens du chemin,
- Un sommet du chemin est marquée (-) si l'arc dont il est l'origine n'est pas dans le sens du chemin est si le flot qui passe par cet arc n'est pas nul.

(b) Variation du flot :

- Le flot pour chaque arc dans le sens du chemin peut augmenter d'une valeur égale a la différence entre sa capacité et son flot actuel,
- Le flot pour chaque arc dans le sens contraire du chemin peut diminuer d'une valeur égale a son flot actuel.

(c) Flot maximal :

- S'il existe un chemin de la source vers le puits dont les sommets peuvent êtres marqués alors le flot passant par ce chemin peut être augmenté.
- La valeur de l'augmentation du flot sur le chemin est égale a la valeur minimum de la possible augmentation et de la diminution du flot pour chaque arc du chemin.
- La valeur du flot en générale est la somme des valeurs des flots pour les arcs issus de la source.
- Le flot passant sur le graphe est maximal si on ne peut plus avoir un nouveau chemin de la source vers le point avec des sommets marqués.