

Test d'ammissione per lo stage di fisica SNS 2026

RAVASIO LUCA

5 dicembre 2025

Indice

1	Soluzione al problema 1	2
1.1	Punti 1 e 2:	2
2	Soluzione al problema 2	3
2.1	Punto 1:	3
2.2	Punto 2:	3
2.3	Punto 3:	3
3	Tentativo soluzione al problema 3	4
3.1	Punto 1:	4
3.2	Punto 2:	5
3.3	Punto 3:	5
4	Soluzione al problema 4	5
4.1	Punto 1:	5
4.2	Punto 2:	6
4.3	Punto 3:	7
5	Soluzione al problema 5	9
5.1	Punto 1:	9
5.2	Punto 2:	10
5.3	Punto 3:	11
6	Soluzione al problema 6	12
6.1	Punto 1:	12
6.2	Punto 2:	13
7	Soluzione al problema 7	14
7.1	Punto 1:	14
7.2	Punto 2:	15
7.3	Punto 3:	16
7.4	Punto 4:	19
8	Soluzione al problema 8	19
9	Soluzione al problema 9	22
9.1	Punto 1:	22
9.2	Punto 2:	25
10	Soluzione al problema 10	26
10.1	Punto 1:	26
10.2	Tentativo punto 2:	28

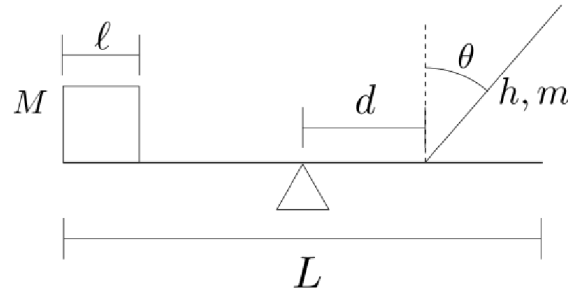


Figura 1.1: Immagine del sistema

Soluzione al problema 1

Punti 1 e 2:

Il Re e la cassa non ruotano e non si muovono (siamo in un sistema statico). Se supponiamo che siano in gioco solo la forza peso e la reazione vincolare data dall'asta ciò implica che la reazione vincolare è parallela alla forza peso e di uguale intensità - ma di verso opposto. Inoltre, visto che il momento rispetto al baricentro di entrambi è nullo (il Re e la cassa non ruotano) e la forza peso è applicata nel baricentro, segue che anche la reazione vincolare è applicata lungo una retta passante per il baricentro e parallela alla reazione vincolare stessa. La reazione vincolare deve essere applicata nella superficie di contatto tra i due oggetti. Dunque possiamo dire che la reazione vincolare è applicata nella proiezione ortogonale del baricentro sull'asta.

Da ciò possiamo dedurre, per il principio di azione-reazione, la forza esercitata da ciascun oggetto sull'asta.

Siccome è stato detto che l'asta è in equilibrio, la somma dei momenti rispetto al suo fulcro è nulla. E' possibile ignorare i momenti dovuti al peso di ciascun braccio perchè, per motivi di simmetria, questi sono di uguale intensità e direzione opposta. Da ciò segue:

$$\vec{B} \times M\vec{g} + \vec{b} \times m\vec{g} = 0$$

Dove B è il braccio della forza applicata dalla cassa e b è il braccio della forza applicata dal Re. B e b possono essere calcolati considerando che le rispettive forze sono applicate nelle proiezioni del baricentro di ciascun oggetto sull'asta, come detto in precedenza. Considerando che l'asta è orizzontale e le forze esercitate dai due corpi sono verticali (per quanto detto prima), segue che:

$$Mg \left(\frac{L-l}{2} \right) - mg \left(d + \frac{h \sin \theta}{2} \right) = 0$$

Dove il cambiamento di segno del secondo addendo è dovuto allo svolgimento del prodotto vettoriale. La posizione della proiezione del baricentro del Re è stata ottenuta sommando alla distanza fulcro-tallone l'ascissa del suo baricentro. Da cui:

$$M \left(\frac{L-l}{2} \right) = m \left(d + \frac{h \sin \theta}{2} \right) \Rightarrow \frac{2(\frac{M}{2m}(L-l) - d)}{h} = \sin \theta \Rightarrow \theta = \arcsin \left(\frac{M}{mh}(L-l) - \frac{2d}{h} \right)$$

Da cui si ottiene $\theta \approx 49.9^\circ$. Siccome abbiamo usato lo stesso angolo di figura 1.1, il Re pende di 49.9° verso destra.

Calcoliamo ora quanto dovrebbero essere lunghi i piedi del Re per riuscire a non cadere in quella posizione. Siccome la condizione perchè un oggetto pendente non cada è che la proiezione del baricentro sia nella base; la dimensione dei piedi è:

$$\text{PIEDONI} = h/2 \sin \theta \approx 66.9\text{cm}$$

Dove per $\sin \theta$ si è usato il valore appena trovato.

Una misura di piedi assolutamente irragionevole. Segue che il Re ha adoperato qualche sotterfugio.

Soluzione al problema 2

Punto 1:

E' ben noto che il rendimento di un ciclo di Carnot è:

[1, cap. 26]

$$e = 1 - \frac{T_L}{T_H} \quad (2.1)$$

da ciò segue che il rendimento del ciclo in questione è:

$$e = 1 - \frac{T_0}{T_1}$$

Punto 2:

Grazie a [1, cap. 26] sappiamo che il rendimento di una qualsiasi macchina termica (e quindi anche di una composta da più sotto-unità) è:

$$e = 1 - \frac{Q_C}{Q_A}$$

Dove Q_C è il calore ceduto e Q_A il calore assorbito. Da cui:

$$1 - \frac{T_1}{T_2} = e_{2 \rightarrow 1} = 1 - \frac{Q_{C_{2 \rightarrow 1}}}{Q_{A_{2 \rightarrow 1}}} \implies Q_{C_{2 \rightarrow 1}} = Q_{A_{2 \rightarrow 1}} \frac{T_1}{T_2} = Q_{A_{1 \rightarrow 0}} \quad (2.2)$$

Dove $e_{2 \rightarrow 1}$ è l'efficienza della macchina di Carnot che lavora tra le sorgenti a temperatura T_2 e T_1 . L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che il calore che la sorgente 1 assorbe è uguale a quello che cede. Analogamente si ricava (semplicemente scambiando 2 e 1 con 1 e 0 nell'equazione 2.2, senza mantenere l'ultima uguaglianza):

$$Q_{C_{1 \rightarrow 0}} = \frac{T_0}{T_1} Q_{A_{1 \rightarrow 0}}$$

Poichè, come già detto, il rendimento di una qualsiasi macchina termica è:

$$e = 1 - \frac{Q_{C_{TOT}}}{Q_{A_{TOT}}} \implies e = 1 - \frac{Q_{C_{2 \rightarrow 1}} + Q_{C_{1 \rightarrow 0}}}{Q_{A_{2 \rightarrow 1}} + Q_{A_{1 \rightarrow 0}}} \quad (2.3)$$

Possiamo esprimere tutti i calori in funzione di $Q_{A_{2 \rightarrow 1}}$, grazie alle relazioni precedentemente trovate:

$$e = 1 - \frac{Q_{A_{2 \rightarrow 1}} \frac{T_1}{T_2} + \frac{T_0}{T_1} \frac{T_1}{T_2} Q_{A_{2 \rightarrow 1}}}{Q_{A_{2 \rightarrow 1}} + Q_{A_{2 \rightarrow 1}} \frac{T_1}{T_2}} = 1 - \frac{\frac{T_1}{T_2} + \frac{T_0}{T_1} \frac{T_1}{T_2}}{1 + \frac{T_1}{T_2}} = \boxed{\frac{T_2 - T_0}{T_2 + T_1}}$$

Punto 3:

Possiamo generalizzare quanto detto nell'equazione 2.2 (semplicemente scambiando 2 e 1 con x e $x-1$):

$$Q_{C_{x \rightarrow x-1}} = \frac{T_{x-1}}{T_x} Q_{A_{x \rightarrow x-1}} = Q_{A_{x-1 \rightarrow x-2}} \quad \text{dove l'ultima uguaglianza vale solo } \forall x \geq 2 \quad (2.4)$$

Dove x deve essere compreso tra $[n, 1]$. Adesso, se vogliamo esprimere tutti i calori in funzione di $Q_{A_{n \rightarrow n-1}}$ possiamo farlo: basta utilizzare più volte l'equazione 2.4 con tutti i valori in $[n, x]$ e semplificare i denominatori-numeratori corrispondenti. Si ricava:

$$Q_{C_{x+1 \rightarrow x}} = \frac{T_x}{T_n} Q_{A_{n \rightarrow n-1}} = Q_{A_{x \rightarrow x-1}}$$

Da cui, riprendendo l'equazione 2.3:

$$e = 1 - \frac{Q_{C_{TOT}}}{Q_{A_{TOT}}} = 1 - \frac{Q_{A_2 \rightarrow 1} \sum_0^{n-1} \frac{T_i}{T_n}}{Q_{A_2 \rightarrow 1} \sum_1^n \frac{T_i}{T_n}} = 1 - \frac{\sum_0^{n-1} T_i}{\sum_1^n T_i} = \boxed{\frac{T_n - T_0}{\sum_1^n T_i}}$$

E' interessante notare come il rendimento è di gran lunga inferiore a quella di un normale ciclo di Carnot tra T_n e T_0 .

Tentativo soluzione al problema 3

Punto 1:

Orientiamo l'asse x in modo che sia parallelo alla traiettoria iniziale del punto materiale. Quando avviene il primo impatto, la circonferenza può essere approssimata, nei pressi del punto di impatto, come una retta nella forma $y = x + k$. Dunque l'impulso è perpendicolare ad essa e avrà direzione $(-1, -1)$.

Perciò possiamo impostare le seguenti:

$$\begin{cases} m_1 v_{i,1} - I = m_1 v_{f,1,x} \\ m_1 v_{f,1,y} = I \\ m_2 v_{f,2,x} = I \\ m_2 v_{f,2,y} = I \\ \frac{1}{2} m_1 v_{i,1}^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_{f,1,x}^2 + v_{f,1,y}^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_{f,2,x}^2 + v_{f,2,y}^2) \end{cases}$$

In questo sistema di equazioni $v_{i,1}$ è la velocità che aveva il punto materiale inizialmente (orientata perfettamente lungo l'asse x e uguale a v_0); $v_{f,1,x}, v_{f,1,y}$ sono le velocità dopo il primo impatto del punto materiale considerate rispettivamente lungo l'asse x e y ; $v_{f,2,x}, v_{f,2,y}$ sono lo stesso ma per l'anello. I invece è la componente orizzontale/verticale dell'impulso (fortunatamente sono uguali). L'ultima equazione è invece dovuta alla conservazione dell'energia cinetica.

Partiamo proprio da questa. Dividiamo entrambi i membri per $\frac{1}{2}$ e m_1 .

$$v_{i,1}^2 = (v_{f,1,x}^2 + v_{f,1,y}^2) + \frac{m_2}{m_1} (v_{f,2,x}^2 + v_{f,2,y}^2)$$

Sfruttiamo il fatto che $m_1 v_{i,1} - I = m_1 v_{f,1,x}$ e che $m_1 v_{f,1,y} = I$ e che $m_2 v_{f,2,x} = I = m_2 v_{f,2,y}$:

$$v_{i,1}^2 = \left(\frac{v_{i,1} m_1 - I}{m_1} \right)^2 + \left(\frac{I}{m_1} \right)^2 + \frac{1}{m_1 m_2} 2I^2$$

Risolviamo i quadrati in modo da liberarci di $v_{i,1}^2$ e dividiamo tutto per I :

$$v_{i,1}^2 = \frac{v_{i,1}^2 m_1^2 + I^2 - 2I v_{i,1} m_1}{m_1^2} + \left(\frac{I}{m_1} \right)^2 + \frac{1}{m_1 m_2} 2I^2$$

$$0 = \frac{I - 2v_{i,1} m_1}{m_1^2} + \left(\frac{I}{m_1^2} \right) + \frac{1}{m_1 m_2} 2I$$

$$0 = I - 2v_{i,1} m_1 + I + \frac{m_1}{m_2} 2I \implies 2v_{i,1} m_1 = 2I + 2I \frac{m_1}{m_2}$$

Eliminiamo il fattore 2 e applichiamo la proprietà distributiva inversa:

$$v_{i,1} m_1 = I + I \frac{m_1}{m_2} = I \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)$$

$$v_{i,1} = I \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \quad (3.1)$$

Considerando ora che $\frac{I}{m_1} = v_{f,1,y}$ e che $\frac{I}{m_2} = v_{f,2,y}$:

$$v_{i,1} = v_{f,1,y} + v_{f,2,y}$$

Quest'equazione riguarda solo il modulo delle velocità, ma se consideriamo che il punto materiale a causa dell'impulso orientato verso l'alto si muoverà verso l'alto e che l'anello per l'impulso orientato verso il basso si muoverà verso il basso, possiamo concludere che la velocità relativa anello-punto materiale lungo l'asse delle y dopo il primo impatto è la stessa che avevano lungo l'asse x prima dell'impatto.

Se consideriamo ora il fatto che $I = m_1(v_{i,1} - v_{f,1,x})$ e che $I = m_2 v_{f,2,y}$, dalla 3.1 si ricava:

$$v_{i,1} = \frac{m_1(v_{i,1} - v_{f,1,x})}{m_1} + \frac{m_2 v_{f,2,y}}{m_2}$$

Ossia:

$$v_{f,1,x} = v_{f,2,y}$$

Il che significa che il punto materiale ora non si muove sull'asse delle x rispetto all'anello!!! In altre parole, siccome ora il punto materiale si muove relativamente all'anello con la velocità sull'asse delle y che aveva prima sull'asse delle x e vice-versa, la situazione dopo l'impatto è uguale a quella prima dell'impatto ma ruotata di 90 gradi! Quindi possiamo dire che il punto materiale orbita attorno al centro geometrico dell'anello in un'orbita quadrata! Perciò, mentre il baricentro del sistema si muove in avanti di moto uniforme, il punto materiale si muove in un'orbita quadrata all'interno dell'anello. Siccome il centro di massa si trova sempre ad una distanza che è la media pesata sulla massa delle posizioni del punto materiale e del centro geometrico dell'anello, segue che il punto materiale è anche in orbita quadrata attorno al baricentro. Più nello specifico, si tratta di un'orbita con semi-diagonale $\frac{Rm_2}{m_1+m_2}$. Il momento angolare del sistema attorno al baricentro è: $\frac{Rm_1m_2}{(m_1+m_2)\sqrt{2}}v_0$. Tuttavia la distanza baricentro-centro geometrico dell'anello e baricentro-punto materiale continua a cambiare. Più nello specifico

Punto 2:

Siccome nel punto 1 non abbiamo usato il fatto che si trattava di un anello per dimostrare che il punto materiale ruota in un'orbita quadrata attorno al centro geometrico questo fatto rimane vero. Tuttavia, se è necessario utilizzare il momento di inerzia dell'anello con il teorema di Steiner, bisogna tenere conto del fatto che il momento di inerzia dell'anello è metà di quello del disco.

Punto 3:

Sicuramente per $\pi/2$ e per $\pi/4$. (Per $\pi/2$ torna immediatamente al punto di partenza)

Soluzione al problema 4

Punto 1:

Siccome per ipotesi $m \ll M$, possiamo assumere che la guida non si muova. Inoltre, visto che possiamo dare per vera la tesi del punto 3, ci basta verificare che non cada nel punto più alto della guida:

$$\frac{v_{\text{top}}^2}{R} \geq g \quad (4.1)$$

Poichè non c'è attrito e la forza normale tra la guida e il punto materiale non fa lavoro (è sempre radiale, mentre il movimento del punto materiale è tangenziale), possiamo affermare che l'energia meccanica si conserva. Dunque:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 2Rmg + \frac{1}{2}mv_{\text{top}}^2$$

Da cui l'energia meccanica per unità di massa:

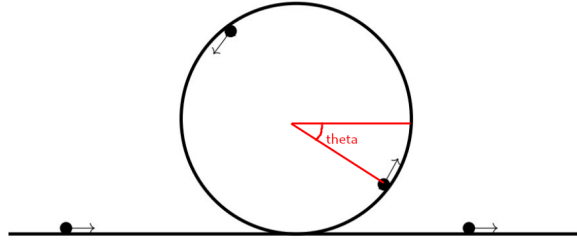


Figura 4.1: Immagine di theta

$$\frac{1}{2}v_0^2 = 2Rg + \frac{1}{2}v_{\text{top}}^2 \implies v_0^2 - 4Rg = v_{\text{top}}^2$$

Da cui, usando la disequazione 4.1:

$$v_0^2 - 4Rg \geq gR \implies v_0^2 \geq 5gR \implies \boxed{v_0 \geq \sqrt{5gR}}$$

Perciò, se vogliamo essere sicuri che completi il giro, è necessario che v_0 sia almeno $\sqrt{5gR}$

Punto 2:

Siccome non c'è nessuna forma d'attrito e le forze normali non fanno lavoro (quella tra la guida e il punto materiale è sempre radiale, mentre il punto si muove tangenzialmente; quella tra la guida e il piano è verticale mentre la guida si muove orizzontalmente) possiamo assumere che l'energia si conservi. Dunque:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{1}{2}MV(t)^2 + mgh(t)$$

Dove $v(t)$ è la velocità del punto materiale in funzione del tempo, $V(t)$ è la funzione della velocità della guida in funzione del tempo e $h(t)$ è l'altezza del punto materiale in funzione del tempo. Visto che la guida è vincolata a non staccarsi dal piano e a non rotolare, possiamo assumere che si muova sempre orizzontalmente. E' possibile anche imporre la conservazione della quantità di moto orizzontale:

$$mv_0 = -mv(t)\sin(\theta(t)) + MV(t)$$

Dove $\theta(t)$ è l'angolo tra l'orizzontale e il raggio che congiunge il centro della guida al punto materiale in un determinato istante t . Inizialmente vale $-\pi/2$ e dopo un giro completo vale $3/2\pi$.

Si può esprimere $\theta(t)$ in funzione di $h(t)$ grazie alle funzioni trigonometriche, anche se il codominio è limitato a $-\pi/2, \pi/2$:

$$\theta(t) = \arcsin\left(\frac{h(t) - R}{R}\right) \quad (4.2)$$

Consideriamo ora l'istante in cui il punto materiale si trova in cima alla guida. Poichè possiamo supporre la tesi del punto 3 senza averla dimostrata, possiamo dire che se la pallina non cade in quel punto riesce a compiere un giro completo senza staccarsi dalla guida. In quell'istante l'altezza del punto materiale è il doppio del raggio, ossia $h = 2R$. Inoltre, per la definizione precedentemente data di $\theta(t)$ esso è uguale a $\pi/2$ quando si trova alla sommità della guida. Dunque abbiamo tre equazioni e tre incognite. Possiamo provare a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{top}}^2 + \frac{1}{2}MV_{\text{top}}^2 + 2mgR \\ mv_0 = -mv_{\text{top}}\sin(\theta_{\text{top}}) + MV_{\text{top}} \\ \theta_{\text{top}} = \pi/2 \end{cases} \quad (4.3)$$

Da cui, sostituendo θ_{top} :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{top}}^2 + \frac{1}{2}MV_{\text{top}}^2 + 2mgR \\ mv_0 = -mv_{\text{top}} + MV_{\text{top}} \end{cases}$$

Ossia:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{top}}^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}(v_0 + v_{\text{top}})\right)^2 + 2Rmg$$

Da cui, adoperando alcune semplificazioni algebriche (dividiamo tutto per m , moltiplichiamo per 2, semplifichiamo un po' il quadrato):

$$v_0^2 = v_{\text{top}}^2 + \frac{m}{M}(v_0 + v_{\text{top}})^2 + 4Rg$$

La condizione affinché non cada quando è in cima è la 4.1. Dunque, si può sostituire $v_{\text{top}} \geq \sqrt{gR}$. Sostituendo:

$$v_0^2 \geq gR + \frac{m}{M}(v_0 + \sqrt{gR})^2 + 4Rg \implies v_0^2 \geq \frac{m}{M}(v_0^2 + gR + 2v_0\sqrt{gR}) + 5Rg$$

$$v_0^2\left(1 - \frac{m}{M}\right) - 2\frac{m}{M}\sqrt{gR}v_0 \geq \frac{m}{M}(gR) + 5Rg$$

$$\boxed{v_0^2\left(1 - \frac{m}{M}\right) - 2\frac{m}{M}\sqrt{gR}v_0 - \frac{m}{M}gR - 5Rg \geq 0} \quad (4.4)$$

La 4.4 è la condizione su v_0, m, M, R affinché il punto materiale faccia un giro completo senza staccarsi. Vale la pena notare che da questa disequazione si può ottenere un'equazione di secondo grado per ricavare la velocità più bassa che permette al punto materiale di fare un giro completo della guida senza mai staccarsi.

Inoltre vale la pena notare che, nel caso $m \ll M$ si ottiene:

$$v_0^2(1 - 0) - 2 \cdot 0 \sqrt{gR}v_0 - 0gR - 5Rg \geq 0$$

Ossia:

$$v_0 \geq \sqrt{5Rg}$$

Che è quanto avevamo ottenuto nel punto 1. Questa è una verifica della correttezza della nostra idea.

Punto 3:

Affinché il punto materiale faccia un giro completo intorno alla guida è necessario che non si stacchi mai da essa, ossia che la guida applichi sempre una forza normale al punto materiale. In un mondo senza forza di gravità questo accadrebbe sempre. Nel nostro invece è necessario imporre la condizione: (schema in figura 4.2)

$$g \sin(\theta(t)) \leq F_n = \frac{v(t)^2}{R}$$

Da cui, sfruttando l'equazione 4.2 (siccome abbiamo un $\sin(\text{asin}(x))$), possiamo sostituire direttamente x senza rischiare di avere problemi per il codominio limitato a $-\pi/2$ $\pi/2$ di $\text{asin}(x)$):

$$g \frac{h(t) - R}{R} \leq \frac{v(t)^2}{R} \implies g(h(t) - R) \leq v(t)^2$$

Esprimere tutto in funzione di h potrebbe essere meglio:

$$g(h - R) \leq v(h)^2 \implies \sqrt{g(h - R)} \leq v(h) \quad (4.5)$$

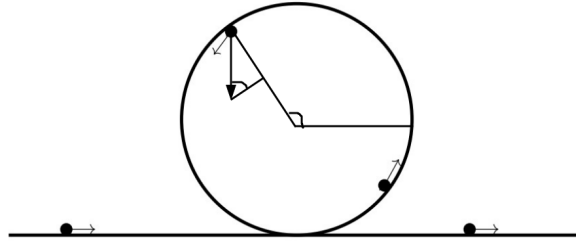


Figura 4.2: La nostra condizione

Adesso, possiamo riprendere una versione più generale del sistema 4.3:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{1}{2}MV(t)^2 + 2mgR \\ mv_0 = -mv(t)\sin(\theta(t)) + MV(t) \\ \theta(t) = \arcsin\left(\frac{h(t)-R}{R}\right) \end{cases}$$

Anche in questo caso, potrebbe essere meglio esprimere tutto in funzione di h :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv(h)^2 + \frac{1}{2}MV(h)^2 + 2mgR \\ mv_0 = -mv(h)\sin(\theta(h)) + MV(h) \\ \theta(h) = \arcsin\left(\frac{h-R}{R}\right) \end{cases}$$

Da cui, sostituendo θ e dividendo la prima equazione per m (pure qui visto che sostituiamo $\sin(\arcsin(x))$ con x non abbiamo problemi di dominio/codominio):

$$\begin{cases} \frac{1}{2}v_0^2 = \frac{1}{2}v(h)^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{m}V(h)^2 + 2gR \\ \frac{m}{M}(v_0 + v(h)\frac{h-R}{R}) = V(h) \end{cases}$$

Sostituendo $V(h)$:

$$\frac{1}{2}v_0^2 = \frac{1}{2}v(h)^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{m}\left(\frac{m}{M}\left(v_0 + v(h)\frac{h-R}{R}\right)\right)^2 + 2gR$$

Adottando alcune semplificazioni algebriche:

$$v_0^2 = v(h)^2 + \frac{m}{M}\left(v_0 + v(h)\frac{h-R}{R}\right)^2 + 4gR$$

Risolvendo il quadrato:

$$\begin{aligned} v_0^2 &= v(h)^2 + \frac{m}{M}\left(v_0^2 + v(h)^2\left(\frac{h-R}{R}\right)^2 + 2v_0v(h)\frac{h-R}{R}\right) + 4gR \\ 0 &= v(h)^2\left(1 + \frac{m}{M}\left(\frac{h-R}{R}\right)^2\right) + v(h)\frac{m}{M}\frac{h-R}{R}2v_0 + \frac{m}{M}v_0^2 + 4gR - v_0^2 \end{aligned}$$

Applicando la 4.5:

$$\boxed{0 \geq g(h-R)\left(1 + \frac{m}{M}\left(\frac{h-R}{R}\right)^2\right) + \sqrt{g(h-R)}\frac{m}{M}\frac{h-R}{R}2v_0 + \frac{m}{M}v_0^2 + 4gR - v_0^2} \quad (4.6)$$

Siccome il punto materiale non si può staccare prima di aver raggiunto un'altezza R supponiamo che $h - R > 0$. (Se non è ancora ad altezza h non si può staccare dalla guida per effetto della forza di gravità perchè questa

si trova immediatamente sotto di esso. Al più potrebbe succedere che l'energia cinetica si trasformi tutta in energia potenziale gravitazionale e non riesca più a salire. Tuttavia, se questo accade, sicuramente il punto materiale non raggiungerà il punto più alto della guida, per cui possiamo assumere $h - R > 0$

Ora, dimostriamo che il secondo membro aumenta all'aumentare di h . Consideriamo il primo addendo.

$$g(h - R) \left(1 + \frac{m}{M} \left(\frac{h - R}{R} \right)^2 \right)$$

Questo aumenta all'aumentare di h perchè $(h - R)^2$ aumenta all'aumentare di h per $h - R > 0$ e $h - R$ aumenta all'aumentare di h .

Lo stesso vale per il secondo addendo:

$$\sqrt{g(h - R)} \frac{m}{M} \frac{h - R}{R} 2v_0$$

Esiste solo per $h - R > 0$ ed aumenta all'aumentare di h . Tutti gli altri addendi della 4.6 sono indipendenti da h . Se dunque non si stacca quando è in cima alla guida (in altre parole, se la 4.6 è vera per il valore di h più alto possibile), allora sicuramente la disequazione 4.6 è vera anche per tutti i valori di h più piccoli, ossia quando non è ancora in cima alla guida o quando sta scendendo. CVD.

Vale la pena notare che un altro modo per dimostrare che per $h - R > 0$ la 4.6 aumenta all'aumentare di h è derivare la 4.6 e verificare che la derivata è positiva per $\forall h, h - R > 0$. Tuttavia non è necessario per una funzione di h così semplice.

Soluzione al problema 5

Punto 1:

Il piano dell'orbita di un pianeta è sempre perpendicolare al vettore del momento angolare del pianeta rispetto alla stella. Difatti il vettore distanza e il vettore velocità sono contenuti nel piano dell'orbita e il momento angolare è per definizione il loro prodotto vettoriale. Questo è dimostrato anche in [3, proposizione 1.11]. Segue che, se troviamo l'angolo tra il vettore del momento angolare iniziale e il vettore del momento angolare finale troviamo l'angolo di cui variano le due orbite.

Consideriamo l'istante in cui il sasso colpisce il pianeta. Il vettore del momento angolare del sasso è dato dal prodotto vettoriale tra il vettore distanza stella-sasso e il vettore velocità del sasso. Nell'istante dell'impatto il vettore distanza stella-sasso è uguale al vettore distanza stella-pianeta (si sta ipotizzando che le dimensioni del sasso e del pianeta siano trascurabili). Il vettore velocità del pianeta è invece perpendicolare al vettore velocità del sasso: i piani delle orbite sono infatti perpendicolari. Segue che il vettore del momento angolare del sasso è perpendicolare al vettore del momento angolare del pianeta.¹ Perciò, possiamo calcolare l'inclinazione del nuovo momento angolare rispetto all'originale nel seguente modo:

$$\alpha = \text{atan} \left(\frac{L_{\text{sasso}}}{L_{\text{pianeta}}} \right) = \text{atan} \left(\frac{rmv_{\text{sasso}}}{L_{\text{pianeta}}} \right) \quad (5.1)$$

Dove l'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che la tangente della parabola al perielio è una retta perpendicolare alla retta che congiunge il fuoco e il perielio (ossia l'asse della parabola).

Il momento angolare di un oggetto che orbita attorno ad un altro oggetto rimane sempre costante, come dimostrato in [3]. Dunque, se calcoliamo il momento di inerzia del pianeta al perielio, esso è lo stesso lungo tutta l'orbita. Non è necessario calcolare il prodotto vettoriale perchè si tratta di vettori perpendicolari (siamo al perielio). Da ciò:

$$\alpha = \text{atan} \left(\frac{rmv_{\text{sasso}}}{MRv} \right) \quad (5.2)$$

¹Inoltre, come detto in precedenza, il momento angolare è perpendicolare ai piani delle orbite dei pianeti e nel testo è detto che questi sono perpendicolari!

L'unica grandezza che non conosciamo è v_{sasso} . Tuttavia, sapendo che al momento dell'impatto il sasso è al perielio e che si muove di un'orbita parabolica, possiamo impostare la seguente equazione riguardante l'energia per unità di massa (che in un'orbita parabolica è zero):

$$\frac{1}{2}v_{\text{sasso}}^2 - G\frac{M}{r} = 0$$

Da cui:

$$v_{\text{sasso}} = \sqrt{2G\frac{M}{r}}$$

Mettendo l'espressione appena trovata nella 5.2:

$$\alpha = \text{atan}\left(\frac{rm}{MRv}\sqrt{2G\frac{M}{r}}\right) = \text{atan}\left(\frac{m}{Rv}\sqrt{2G\frac{r}{M}}\right)$$

Di quest'espressione conosciamo tutti i valori eccetto α , per cui possiamo calcolarlo.

Punto 2:

I vettori dei momenti angolari di tutti i sassi sono uguali perchè viene detto nel testo (\vec{L}). Poichè ogni volta che c'è un impatto tra il pianeta e uno dei sassi avviene una somma vettoriale dei momenti angolari, possiamo concludere che il momento angolare finale del pianeta sarà:

$$\vec{L}_f = \vec{L}_i + \underbrace{\vec{L} + \vec{L} + \dots + \vec{L}}_{n \text{ volte}}$$

Per la somma vettoriale vale la proprietà associativa, perciò quest'operazione è equivalente a:

$$\vec{L}_f = \vec{L}_i + \left(\underbrace{\vec{L} + \vec{L} + \dots + \vec{L}}_{n \text{ volte}}\right) = \vec{L}_i + n\vec{L}$$

Questa cosa è equivalente alla somma vettoriale di due vettori perpendicolari. Quindi ci riconduciamo alla situazione del punto 1 e possiamo utilizzare la 5.1:

$$\alpha = \text{atan}\left(\frac{nL}{L_i}\right) = \text{atan}\left(\frac{nL}{MRv}\right)$$

Dove l'ultimo passaggio è giustificato dalla conservazione del momento angolare, in modo analogo al punto 1. Sappiamo, per quanto detto nel testo del problema, che $\alpha \geq \pi/3$.

$$\pi/3 \leq \text{atan}\left(\frac{nL}{MRv}\right) \implies \tan(\pi/3) = \frac{nL}{MRv} \implies \sqrt{3}\frac{MRv}{L} = n$$

Ossia:

$$n = \frac{MRv\sqrt{3}}{L}$$

Punto 3:

Determiniamo il modulo del vettore del momento angolare del pianeta dopo che il pianeta è stato colpito da k sassi.

Visto che ogni sasso viene lanciato con un momento angolare perpendicolare a quello che ha il pianeta in quel momento, possiamo applicare sempre il teorema di Pitagora. Dunque:

$$L_f = \underbrace{\sqrt{\left(\sqrt{L_i^2 + (k-1)L^2}\right)^2 + L^2}}_{\text{molti passaggi simili a questo}} = \sqrt{L_i^2 + kL^2}$$

Possiamo ora applicare la 5.1 per scoprire di quanto fa cambiare l'angolo d'impatto con il k -esimo sasso:

$$\alpha_k = \text{atan}\left(\frac{L}{\sqrt{(MRv)^2 + (k-1)L^2}}\right)$$

Dunque, il cambio di angolo totale sarà la somma di tutti i cambi di angolo:

$$\alpha = \sum_1^n \text{atan}\left(\frac{L}{\sqrt{(MRv)^2 + (k-1)L^2}}\right)$$

Da cui:

$$\pi/3 \leq \sum_1^n \text{atan}\left(\frac{L}{\sqrt{(MRv)^2 + (k-1)L^2}}\right)$$

Considerando che $\arctan(x) \approx x$ per $x \ll 1$, possiamo ricavare:

$$\pi/3 \leq \sum_1^n \frac{L}{\sqrt{(MRv)^2 + (k-1)L^2}} = \sum_0^{n-1} \frac{L}{\sqrt{(MRv)^2 + jL^2}} = \sum_0^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{MRv}{L}\right)^2 + j}}$$

Possiamo semplificare l'espressione sostituendo $\left(\frac{MRv}{L}\right)^2$ con X :

$$\sum_0^{n-1} \frac{1}{\sqrt{X+j}}$$

Per n molto alti, questa cosa può essere approssimata all'integrale (ogni n è come un "pezzettino" dell'integrale):

$$\int_X^{X+n-1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_X^{X+n-1} x^{-1/2} dx = \left| 2x^{1/2} \right|_X^{X+n-1} = 2(\sqrt{X+n-1} - \sqrt{X})$$

Procedendo le semplificazioni:

$$\pi/3 \leq 2(\sqrt{X+n-1} - \sqrt{X}) \implies \pi/6 + \sqrt{X} \leq \sqrt{X+n-1} \implies \frac{\pi^2}{36} + X + \sqrt{X}\frac{\pi}{6} \leq X+n-1$$

Da cui:

$$\frac{\pi^2}{36} + \sqrt{X}\frac{\pi}{6} - 1 \leq n$$

Bisogna approssimare per eccesso. Considerano che ci interessa il numero n più piccolo possibile:

$$\left\lceil \frac{\pi^2}{36} + \frac{MRv}{L} \frac{\pi}{6} - 1 \right\rceil = n$$

Siccome $\frac{MRv}{L}$ è molto molto grande ($L' \ll L_0$), possiamo pensare di eliminare anche $\frac{\pi^2}{36}$, siccome $\frac{\pi^2}{36} \ll \frac{MRv}{L} \frac{\pi}{6}$. In questo modo, potremmo sottostimare n di 1, ma considerando che n deve avere un ordine di grandezza molto grande, possiamo correre questo rischio (l'errore nel caso sarebbe trascurabile). Per lo stesso motivo, possiamo rimuovere l'arrotondamento per eccesso e il -1 .

$$n \approx \frac{MRv}{L} \frac{\pi}{6}$$

Questo è un numero di sassi circa 3.3 volte più piccolo di quello necessario usando il metodo del punto 2.

Soluzione al problema 6

Punto 1:

La quantità di moto si conserva sempre, quindi anche in questo caso. Inoltre, poichè i fotoni vengono totalmente riflessi, l'energia cinetica guadagnata dal granello di polvere è la stessa energia che perde il fotone. Si può dunque dire che:

$$\begin{cases} p_i = -p_f + mv \\ E_i = E_f + \frac{1}{2}mv^2 \end{cases} \quad (6.1)$$

Le formule per calcolare la quantità di moto e l'energia di un singolo fotone sono note: [2, cap. 45]

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

Perciò basta moltiplicare per il numero di fotoni:

$$\begin{cases} \frac{h}{\lambda} n N_A = -\frac{h}{\lambda'} n N_A + mv \\ \frac{hc}{\lambda} n N_A = \frac{hc}{\lambda'} n N_A + \frac{1}{2}mv^2 \end{cases}$$

Da cui possiamo ricavare:

$$\frac{h}{\lambda'} n N_A = \frac{h}{\lambda} n N_A - \frac{1}{2} \frac{m}{c} v^2 \implies \frac{h}{\lambda} n N_A = -\left(\frac{h}{\lambda'} n N_A - \frac{1}{2} \frac{m}{c} v^2 \right) + mv$$

Da cui:

$$\frac{2h}{\lambda} n N_A = \frac{1}{2} \frac{m}{c} v^2 + mv$$

$$0 = \frac{m}{c} v^2 + 2mv - \frac{4h}{\lambda} n N_A \implies v = \frac{-m + \sqrt{m^2 + \frac{4mh}{\lambda c} n N_A}}{\frac{m}{c}} \approx \underline{5.99 \cdot 10^8 \text{ m/s !!!}}$$

Questa è una velocità superiore a quella della luce. Ciò significa che dobbiamo tenere conto della quantità di moto ed energia cinetica relativistica. [1, cap. 21, eq. 23, eq. 27]

$$\begin{cases} \frac{h}{\lambda} n N_A = -\frac{h}{\lambda'} n N_A + \gamma mv \\ \frac{hc}{\lambda} n N_A = \frac{hc}{\lambda'} n N_A + (\gamma - 1)mc^2 \end{cases}$$

Dove γ è il coefficiente di Lorentz, che dipende dalla velocità dell'oggetto in questione: [1, cap. 21, eq. 15]

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Da ciò, ricavando $\frac{h}{\lambda}nN_A$ dalla seconda equazione e sostituendolo nella prima equazione:

$$\frac{h}{\lambda}nN_A = - \left(\frac{h}{\lambda}nN_A - (\gamma - 1)mc \right) + \gamma mv$$

Per semplificare i calcoli, cerchiamo di ricavare il coefficiente di Lorentz γ invece che v . Si ottiene la seguente:

$$\frac{2h}{\lambda}nN_A = (\gamma - 1)mc + \gamma mc \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = (\gamma - 1)mc + mc \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

Dividendo per mc entrambi i membri:

$$\frac{2h}{\lambda mc}nN_A = (\gamma - 1) + \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

Per semplificare i calcoli sostituiamo il primo membro con k :

$$k - \gamma + 1 = \sqrt{\gamma^2 - 1} \implies k^2 + 1 + \gamma^2 + 2k - 2\gamma - 2k\gamma = \gamma^2 - 1$$

$$\gamma = \frac{k^2 + 2k + 2}{2 + 2k} \approx 2.60$$

Ora possiamo ottenere v con la seguente:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 2.77 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Questa invece è una velocità inferiore a quella della luce, quindi è plausibile.

Specialmente perchè ho calcolato la velocità che assumerebbe se tutta l'energia del fotone diventasse energia cinetica relativistica del granello di polvere ed ho verificato che quest'ultima è più grande della velocità appena ottenuta, quindi tutto ok.

Punto 2:

E' importante notare che il tempo nella sonda scorre più lentamente a causa della sua alta velocità. Perciò, sebbene non ci sia moto relativo tra la sonda e il fascio di fotoni riflesso nel momento dell'impatto, c'è comunque una sorta di "effetto Doppler".

Più nello specifico, sia t_a il tempo che il fotone impiega a fare un'oscillazione misurato da un osservatore fermo. Siccome il tempo scorre più lentamente per la sonda, un osservatore da lì misurerebbe t_b . Vale la relazione $t_b = \gamma t_a$, dove γ è il fattore di Lorentz, calcolabile con la seguente: [1, cap. 21, eq. 15]

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ora possiamo passare ai reciproci, ottenendo:

$$f_b = \frac{1}{t_b} = \frac{1}{\gamma t_a} = \frac{f_a}{\gamma}$$

Da cui, considerando che la velocità in un mezzo è uguale alla lunghezza d'onda per la frequenza:

$$\lambda_b = \frac{c}{f_b} = \frac{c}{f_a} \gamma = \lambda_a \gamma$$

Perciò, si ricava che la lunghezza d'onda che misura la sonda è:

$$\lambda_{\text{sonda}} = \frac{\lambda'}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{sonda}}^2}{c^2}}}$$

Adesso non rimane altro che calcolare λ_a dal sistema 6.1. Per farlo, sfruttiamo il fatto di aver già calcolato v (del granello di polvere).

$$mv\gamma - \frac{h}{\lambda} nN_A = \frac{h}{\lambda'} nN_A \implies \lambda' = \frac{hnN_A}{mv\gamma - \frac{h}{\lambda} nN_A} \approx 4.99 \cdot 10^{-11} \text{m}$$

Da cui:

$$\lambda_{\text{sonda}} = \frac{\lambda'}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{sonda}}^2}{c^2}}} \approx 5.76 \cdot 10^{-11} \text{m}$$

Soluzione al problema 7

Cenni teorici e formule:

Secondo [2, eq. 29.7] l'espressione della velocità di deriva è:

$$\vec{j} = -en\vec{v}_d \quad (7.1)$$

Secondo [2, eq. 29.11] la formula della resistività in funzione del campo elettrico e della densità di corrente è:

$$\rho = \frac{E}{j} \quad (7.2)$$

Queste verranno d'ora in avanti ritenute corrette senza alcuna necessità di ulteriori dimostrazioni o citazioni da [2].

Punto 1:

In elettrostatica il campo elettrico interno di un conduttore è nullo. Il campo elettrico interno del conduttore in questione invece non è nullo. Ciò significa che non ci troviamo in condizioni elettrostatiche. Perciò possiamo immaginare che il conduttore in questione sia parte di un circuito. Ciò è molto comodo perchè possiamo immaginare che il “materiale conduttore non ideale” sia un resistore: in questi componenti il campo elettrico interno è costante, come richiesto dal testo.

Consideriamo la formula:

$$\vec{F} = -e\vec{E} - \alpha\vec{v} \quad (7.3)$$

Possiamo immaginare che inizialmente tutti gli elettroni siano fermi. Dunque inizialmente $\vec{F} = -e\vec{E}$. Siccome nella formula 7.3 \vec{F} è legato a $-\vec{v}$ (e invece $d\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m} dt$) segue che finché \vec{F} è non nullo \vec{v} aumenta e dunque \vec{F} diminuisce. Ciò significa che prima o poi raggiungeremo le condizioni stazionarie in cui $\vec{F} = 0$. Allora tutti gli elettroni avranno raggiunto una velocità massima di v_d , ossia la velocità di deriva.²

$$e\vec{E} = -\alpha\vec{v}_d$$

²Ora che ci penso, al posto di dare tutte queste spiegazioni, avrei anche potuto dire che in tutti i resistori gli elettroni raggiungono una velocità di deriva perchè è un fatto noto.

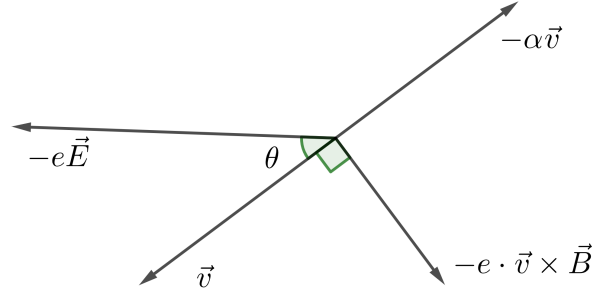


Figura 7.1: Immagine situazione punto 2. Le lunghezze dei vettori non sono proporzionali al loro modulo.

Considerando che la velocità degli elettroni è nella stessa direzione e verso opposto del campo elettrico, possiamo passare ad un'espressione scalare :

$$eE = \alpha v_d$$

Da cui, usando l'espressione per la velocità di deriva 7.1:

$$eE = \alpha \frac{j}{en} \implies \frac{E}{j} = \frac{\alpha}{e^2 n}$$

Dove j è la densità di corrente, e la carica elementare e n la densità elettronica. Da ciò, utilizzando la formula 7.2

$$\boxed{\rho = \frac{\alpha}{e^2 n}}$$

Punto 2:

Consideriamo per comodità il sistema in condizioni già stazionarie (quindi con tutti gli elettroni che si muovono a velocità costante). Scegliamo come asse x' l'asse parallelo a \vec{v} e nel suo stesso verso, come asse y' quello parallelo a $-\vec{e} \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ e nel verso opposto. Siccome la risultante in condizioni stazionarie è nulla, anche le risultanti lungo gli assi sono nulle. Perciò:

$$\begin{cases} x' : eE \cos \theta = \alpha v \\ y' : eE \sin \theta = eBv \end{cases}$$

Da ciò si può ricavare:

$$\begin{cases} eE \cos \theta = \alpha v \\ \frac{E}{B} \sin \theta = v \end{cases}$$

Ossia:

$$eE \cos \theta = \alpha \frac{E}{B} \sin \theta \implies Be \cos \theta = \alpha \sin \theta$$

Elevando entrambi i membri al quadrato ed usando $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$B^2 e^2 (1 - \sin^2 \theta) = \alpha^2 \sin^2 \theta \implies \sin^2 \theta (\alpha^2 + B^2 e^2) = B^2 e^2$$

Da cui:

$$\boxed{\sin \theta = \frac{Be}{\sqrt{\alpha^2 + B^2 e^2}}}$$

Questo è uno dei due angoli che il vettore \vec{v} forma con l'asse delle x , più nello specifico il più piccolo (quello tra \vec{v} e $-\vec{x}$). Se invece si vuole quello con \vec{x} bisogna fare $\pi - \theta$. Per ricavare J_x possiamo ricavare v_x e poi da quella usare la formula 7.1. (tanto l'intensità di corrente è un vettore parallelo alla velocità degli elettroni...)

$$\frac{E}{B} \sin \theta = v \Rightarrow \frac{E}{B} \frac{Be}{\sqrt{\alpha^2 + B^2 e^2}} = v = \frac{Ee}{\sqrt{\alpha^2 + B^2 e^2}}$$

Da ciò, con semplici relazioni trigonometriche ($\cos^2 x + \sin^2 x = 1$):

$$1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{B^2 e^2}{\alpha^2 + B^2 e^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + B^2 e^2} = \cos^2 \theta$$

$$v_x = v \cos \theta = \frac{Ee}{\sqrt{\alpha^2 + B^2 e^2}} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + B^2 e^2}} = \frac{Ee\alpha}{\alpha^2 + B^2 e^2}$$

Da cui:

$$j_x = env_x = \frac{Ee^2 n \alpha}{\alpha^2 + B^2 e^2}$$

Punto 3:

Inizialmente a causa della forza magnetica gli elettroni andranno tutti sulla faccia rivolta verso l'alto (y positive). Infatti gli elettroni scorrono in direzione $-\vec{x}$ ed il campo magnetico è in direzione \vec{z} . Da cui, se non consideriamo il modulo ma solo direzione e verso, la legge di Lorentz ci dice che:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \propto -e \times -\vec{x} \times \vec{z} = \vec{y}$$

Comunque l'importante è che gli elettroni si accumulano su una faccia $a \times l$ finché non generano un campo elettrico E_n che annulla l'effetto del campo magnetico B . In altre parole, dopo un po':

$$ev_d B = E_n e$$

Oltre al campo elettrico E_n c'è anche il campo elettrico E generato dalla ddp ΔV che fa muovere gli elettroni lungo il circuito. In condizioni stazionarie la forza che E esercita sugli elettroni è uguale alla forza frenante del resistore αv_d , infatti le altre due forze si bilanciano ed è come se "non esistessero":

$$Ee = \alpha v_d$$

Sostituiamo dalle ultime due formule la velocità di deriva con la formula 7.1:

$$\begin{cases} Bj = E_n en \\ Ee^2 n = \alpha j \end{cases}$$

Isoliamo in entrambe j :

$$\begin{cases} j = \frac{E_n en}{B} \\ j = \frac{Ee^2 n}{\alpha} \end{cases}$$

Il campo elettrico totale è $\vec{E}_n + \vec{E}$, che ha per modulo $\sqrt{E_n^2 + E^2}$. Utilizzando la formula 7.2 su entrambe le equazioni possiamo ottenere:

$$\begin{cases} \rho = \frac{\frac{\sqrt{E_n^2 + E^2}}{E_n en}}{B} \\ \rho = \frac{\frac{\sqrt{E_n^2 + E^2}}{E e^2 n}}{\alpha} \end{cases}$$

Siccome possiamo ricavare E dalla ddp ai capi del resistore e la lunghezza di quest'ultimo, questo è un sistema con due equazioni e due incognite: E_n e ρ .

$$\begin{cases} \rho = \frac{B\sqrt{E_n^2 + E^2}}{E_n en} \\ \rho = \frac{\alpha\sqrt{E_n^2 + E^2}}{E e^2 n} \end{cases}$$

Isolando E_n dalla seconda equazione si ricava:

$$\sqrt{\left(\frac{\rho E e^2 n}{\alpha}\right)^2 - E^2} = E_n$$

Da cui, sostituendo nella prima:

$$\rho = \frac{B\sqrt{\left(\frac{\rho E e^2 n}{\alpha}\right)^2}}{en\sqrt{\left(\frac{\rho E e^2 n}{\alpha}\right)^2 - E^2}}$$

Sistemando la radice al numeratore:

$$\rho = \frac{B\left(\frac{\rho E e^2 n}{\alpha}\right)}{en\sqrt{\left(\frac{\rho E e^2 n}{\alpha}\right)^2 - E^2}}$$

Dividendo numeratore e denominatore per E :

$$\rho = \frac{B\left(\frac{\rho e^2 n}{\alpha}\right)}{en\sqrt{\left(\frac{\rho e^2 n}{\alpha}\right)^2 - 1}}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per α e dividendo per en :

$$\rho = \frac{B\rho e}{\sqrt{(\rho e^2 n)^2 - \alpha^2}}$$

Dividendo entrambi i membri per ρ :

$$\sqrt{(\rho e^2 n)^2 - \alpha^2} = Be$$

$$\rho e^2 n = \sqrt{B^2 e^2 + \alpha^2}$$

$$\rho = \frac{\sqrt{B^2 e^2 + \alpha^2}}{e^2 n}$$

Dunque la resistenza equivalente del circuito (ossia la resistenza del resistore visto che è l'unico componente del circuito) dopo molto tempo che è stato acceso è (in base alla seconda legge di Ohm):

$$R = \frac{\sqrt{B^2 e^2 + \alpha^2}}{e^2 n} \frac{l}{ab}$$

E' molto interessante come la resistenza non dipenda dalla ddp applicata agli estremi del materiale. Quindi il materiale, in queste condizioni, si comporta comunque come un resistore ohmico.

Nel nostro conduttore ci sono due facce $a \times l$ tra le quali è presente una ddp. Infatti su una si accumulano tutti gli elettroni che generano il campo E_n . E' quindi come se avessimo un condensatore a facce piane parallele: gli elettroni non possono andare da una faccia all'altra perchè anche se lo facessero E_n diminuirebbe e verrebbero sostituiti da altri elettroni. Perciò possiamo applicare la formula per il campo elettrico in un condensatore a facce piane parallele.

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon} \implies \sigma = E_n \varepsilon$$

Dove ε è il coefficiente dielettrico del materiale in questione, ottenibile con $\varepsilon_0 \varepsilon_r$. Se supponiamo che $\varepsilon_r = 1$ (come detto da segreteria.stagefisica@sns.it), $\varepsilon = \varepsilon_0$. Dunque:

$$\sigma = E_n \varepsilon_0$$

Perciò, dobbiamo ricavare E_n dalle formule precedenti. Sfruttiamo il fatto di aver già calcolato ρ .

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\sqrt{B^2 e^2 + \alpha^2}}{e^2 n} = \frac{\alpha \sqrt{E_n^2 + E^2}}{E e^2 n} \implies E \sqrt{B^2 e^2 + \alpha^2} = \alpha \sqrt{E_n^2 + E^2} \\ \implies \frac{E^2}{\alpha^2} (B^2 e^2 + \alpha^2) - E^2 &= E_n^2 \implies E \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} (B^2 e^2 + \alpha^2) - 1} = E_n \end{aligned}$$

Da cui:

$$E \frac{Be}{\alpha} = E_n$$

Da cui:

$$\sigma = E \varepsilon_0 \frac{Be}{\alpha}$$

$$\sigma = \frac{\Delta V B e}{l \alpha} \varepsilon_0 \quad (7.4)$$

Che è la densità di carica superficiale del conduttore. Possiamo ignorare le facce $l \times b$ e $a \times b$ perchè sono piccole, quindi anche se non hanno carica superficiale ciò è trascurabile nel calcolo della densità di carica superficiale totale. Se invece della densità di carica superficiale vogliamo la densità di carica volumetrica, basta fare:

$$\rho_c = \frac{2la \cdot \sigma}{lab} = 2 \frac{\Delta V B e}{lb \alpha} \varepsilon_0$$

Infatti ci sono due fasce $a \times l$ con densità superficiale σ . Le cariche della corrente possono essere trascurate nel calcolo della densità di carica volumetrica perchè quelle che entrano sono le stesse che escono, quindi la carica totale del resistore rimane nulla (ammesso che fosse nulla all'inizio).

La densità di corrente si può calcolare con la formuletta:

$$j = \frac{i}{A} = \frac{\frac{\Delta V}{R}}{ab} = \frac{\frac{\Delta V}{\frac{\sqrt{B^2 e^2 + \alpha^2} l}}{e^2 n}}{ab} = \frac{\Delta V}{\frac{\sqrt{B^2 e^2 + \alpha^2} l}{e^2 n}} = \frac{\Delta V e^2 n}{l \sqrt{B^2 e^2 + \alpha^2}}$$

$$\boxed{j = \frac{\Delta V e^2 n}{l \sqrt{B^2 e^2 + \alpha^2}}}$$

3

Punto 4:

Visto che il materiale conduttore in questione ha due facce cariche piane parallele, è come se fosse un condensatore a facce piane parallele. L'energia potenziale di un condensatore di questo tipo è:

$$U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Visto che conosciamo la capacità di un condensatore a facce piane parallele e che la quantità di carica depositata è $A\sigma$ e che sappiamo che $\varepsilon_r = 1$:

$$U = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} A d$$

Da cui, sostituendo σ da 7.4:

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{B^2 e^2}{\alpha^2} \frac{\Delta V^2}{l^2} A d$$

Da cui, considerando che la distanza tra le piastre è b e che l'area delle piastre è la :

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{B e \Delta V}{\alpha} \right)^2 \frac{ab}{l}}$$

Soluzione al problema 8

Come prima cosa viene da domandarsi se c'è sempre una parte dell'acqua che non entra, oppure se l'acqua entra sempre tutta, oppure se fino ad un certo punto ne entra solo una parte e poi entra tutta.

Siccome il contenitore ha una massa trascurabile e “un meccanismo ignoto esercita sul contenitore una forza diretta verso l'alto, di modulo uguale alla quantità di moto che l'acqua in caduta trasferisce al contenitore nell'unità di tempo. Inoltre il riempimento è sufficientemente lento da poter considerare il contenitore, in ogni istante, nella sua posizione di equilibrio idrostatico”, possiamo dire che il livello dell'acqua nel contenitore è sempre uguale a quello dell'acqua nella vasca (inoltre siccome la vasca è molto grande si può considerare nullo l'innalzamento d'acqua di quest'ultima). Perciò possiamo dire che l'altezza del coperchio rispetto al livello dell'acqua è sempre H meno il livello dell'acqua nel contenitore (misurato dal fondo). Perciò inizialmente il coperchio si trova $H' - H$ metri sotto al rubinetto; mentre quando è pieno si trova a H' metri sotto al rubinetto. Cerchiamo ora di scoprire a che distanza dal rubinetto il raggio del flusso d'acqua diventa inferiore a quello del foro. Se questa distanza è inferiore a $H' - H$ entra sempre tutta l'acqua, se è compresa tra $H' - H$ e H' fino ad un certo punto l'acqua non entra tutta e poi entra tutta, se è superiore a H' non entra mai tutta l'acqua.

Si sfrutti il fatto che la portata non cambia lungo tutto il flusso d'acqua:

$$S_0 v_0 = S_R v_R \implies \pi r^2 v_0 = \pi R^2 v_R$$

³Quando avevo già risolto questo problema ho scoperto che questa situazione è nota come effetto Hall

v_R è ignota, ma può essere ricavata dalla conservazione dell'energia per unità di massa. (Usando un metodo simile a quello di [3, par. 1.3.4]. Il concetto di energia per unità di massa ha senso per un qualsiasi insieme di particelle molto piccole aventi tutte la stessa massa e la stessa energia, come le molecole d'acqua in questo caso).

$$\frac{1}{2}v_0^2 + dg = \frac{1}{2}v_R^2 \implies \sqrt{v_0^2 + 2dg} = v_R$$

Da cui:

$$r^2 v_0 = R^2 \sqrt{v_0^2 + 2dg}$$

$$\left(\frac{r}{R}\right)^4 v_0^2 - v_0^2 = 2dg$$

$$\left(\frac{r^4}{R^4} - 1\right) \frac{v_0^2}{2g} = d$$

Che dà $d \approx 4.63\text{m}$. Dunque fino ad un certo punto entra solo parte dell'acqua, poi entra tutta. Quindi finché la distanza h del coperchio dal rubinetto è tale che $H' - H < h < d$ c'è una perdita d'acqua. Visto che R rimane costante e possiamo calcolare la velocità con cui l'acqua arriva al buco in funzione di h , possiamo calcolare la portata con cui l'acqua entra in funzione di h .

$$Q(h) = \pi R^2 \cdot \sqrt{v_0^2 + 2hg} \quad \text{se } H' - H < h < d$$

Se h non è in quel range non c'è perdita d'acqua, quindi entra tutta.

$$Q(h) = \pi r^2 v_0 \quad \text{se } d < h < H'$$

Dunque abbiamo per $Q(h)$ la seguente funzione definita a tratti:

$$Q(h) = \begin{cases} \pi R^2 \cdot \sqrt{v_0^2 + 2hg} & \text{se } H' - H < h < d \\ \pi r^2 v_0 & \text{se } d < h < H' \end{cases}$$

Non ci interessa definire bene il comportamento quando $h = d, H', H' - H$ perchè tanto ci rimane per un tempo infinitesimo. Sia t_c l'istante in cui l'acqua smette di traboccare dal buco. Se $0 < t < t_c$ possiamo impostare la seguente:

$$h(t) = H' - H + \frac{\int_0^t \pi R^2 \sqrt{v_0^2 + 2gh(\tau)} d\tau}{\pi R'^2}$$

Infatti inizialmente il coperchio si trova ad una distanza $H' - H$ dal rubinetto, poi, man mano che il contenitore si riempie, scende di $\frac{V(t)}{\pi R'^2}$. La portata in entrata è la derivata del volume rispetto al tempo, da ciò segue quanto detto nella precedente equazione differenziale. Semplifichiamo un po':

$$h(t) = H' - H + \frac{R^2}{R'^2} \int_0^t \sqrt{v_0^2 + 2gh(\tau)} d\tau$$

Deriviamo entrambi i membri rispetto al tempo:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{R^2}{R'^2} \sqrt{v_0^2 + 2gh(t)}$$

Cerchiamo di tenere tutti gli $h(t)$ da una parte e tutti i dt dall'altra:

⁴Ora che ci penso avrei potuto utilizzare più semplicemente l'accelerazione gravitazionale g

$$\frac{dh(t)}{\sqrt{v_0^2 + 2gh(t)}} = \frac{R^2}{R'^2} dt$$

Abbiamo quindi ottenuto una relazione tra un piccolo cambiamento del valore h (che è una funzione che dipende da t) e un piccolo cambiamento del valore t . Se integriamo dalla situazione iniziale (in cui avevamo $t = 0, h = H' - H$) alla situazione finale (in cui avevamo $t = t_c, h = d$) otteniamo qualcosa di sensato.

$$\int_{H'-H}^d \frac{dh(t)}{\sqrt{v_0^2 + 2gh(t)}} = \frac{R^2}{R'^2} \int_0^{t_c} dt$$

Per l'integrale a sinistra possiamo adoperare la sostituzione $f(h) = v_0^2 + 2gh$. Vale che $dh(t) = df/2g$. Da ciò:

$$\int_{f(H'-H)}^{f(d)} \frac{\frac{df}{2g}}{\sqrt{f}} = \frac{1}{2g} \int_{f(H'-H)}^{f(d)} \frac{df}{\sqrt{f}} = \frac{1}{2g} \left| 2\sqrt{f} \right|_{f(H'-H)}^{f(d)} = \frac{R^2}{R'^2} \int_0^{t_c} dt = \frac{R^2}{R'^2} t_c$$

Con alcune semplificazioni algebriche e risolvendo gli integrali:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2g} \left| 2\sqrt{v_0^2 + 2gh} \right|_{H'-H}^d &= \frac{1}{g} \left(\sqrt{v_0^2 + 2gd} - \sqrt{v_0^2 + 2g(H' - H)} \right) = \frac{R^2}{R'^2} t_c \\ \frac{1}{g} \left(\sqrt{v_0^2 + 2gd} - \sqrt{v_0^2 + 2g(H' - H)} \right) &= \frac{R^2}{R'^2} t_c \\ \frac{R'^2}{R^2} \frac{1}{g} \left(\sqrt{v_0^2 + 2gd} - \sqrt{v_0^2 + 2g(H' - H)} \right) &= t_c \approx 131s \end{aligned} \quad (8.1)$$

Dunque il coperchio per scendere da H a $H' - d$ ci impiega circa 131 secondi. Il tempo che ci impiega a scendere da $H' - d$ a 0 può essere calcolato in modo molto più semplice poichè la portata è costante e l'acqua entra tutta:

$$\pi R'^2 (H' - d) = \pi r^2 v_0 t_2$$

Da cui:

$$\frac{R'^2}{r^2} \frac{H' - d}{v_0} = t_2 \approx 370s$$

Quindi, il tempo totale che ci impiega è $t_c + t_2 \approx 5.0 \cdot 10^2 s$. (Ho tenuto 2 cifre significative nei risultati perchè la maggior parte delle misure avevano 2 cifre significative).

L'approssimazione sui tempi citata nel testo del problema è giustificabile per il seguente motivo: da $t = 0$ a $t = t_c$ il cilindro scende molto lentamente, mentre l'acqua ci impiega una frazione di secondo a raggiungere il fondo (in prossimità della superficie della vasca la velocità dell'acqua è di circa 10 m/s). Quindi, anche se in un determinato istante $0 < t' < t_c$ sovrastimiamo di un po' l'acqua presente nel cilindro, otteniamo per il coperchio l'altezza sul livello dell'acqua che avrebbe in un istante $t' + \delta t$ non troppo diverso da t' . Si consideri infatti la funzione inversa della 8.1. Essa è nella forma:

$$\frac{\left(t_c \frac{R^2 g}{R'^2} + \sqrt{v_0^2 + 2g(H' - H)} \right)^2 - v_0^2}{2g} = d$$

Siccome $\frac{R^2 g}{R'^2} \ll 1$ Possiamo considerare piccole variazioni di t' trascurabili.

Dopo t_c invece la portata diventa costante, perciò non sbagliamo mai a calcolarla. Inoltre, verso la fine, quando il coperchio raggiunge il livello dell'acqua, è effettivamente vero che il tempo che ci impiega dal rubinetto a raggiungere il livello dell'acqua è lo stesso che ci impiega dal rubinetto a raggiungere il coperchio.

Perciò questa è una buona approssimazione, specialmente considerando che teniamo solo 2 cifre significative.

Soluzione al problema 9

Punto 1:

La scatola è soggetta a due forze. Una è \vec{F} , l'altra è la risultante della pressione su tutte le facce interne della scatola. Il sistema è simmetrico rispetto alla retta parallela al vettore \vec{v}_0 passante per il centro del parallelepipedo. Dunque la risultante della pressione su tutte le facce non perpendicolari alla direzione del movimento è 0: infatti si può affermare per simmetria che la pressione su una qualsiasi faccia è la stessa sulla faccia opposta. Dunque il gas può esercitare sulla scatola solo forze parallele a \vec{v}_0 . Segue per il principio di azione-reazione che la scatola esercita sul gas solo forze parallele a \vec{v}_0 .⁵

Dunque vale la seguente:

$$\vec{F}_p = m\vec{a} \quad (9.1)$$

Dove F_p è la forza che la scatola esercita sul gas e \vec{a} è l'accelerazione del gas. Siccome scatola e gas si muovono assieme e vale il principio di azione-reazione, possiamo dire che:

$$\vec{F} - \vec{F}_p = M\vec{a}$$

Da cui:

$$\vec{F} - m\vec{a} = M\vec{a} \implies \vec{F} = (m + M)\vec{a}$$

Da cui:

$$a = \frac{F}{m + M}$$

Abbiamo dunque ottenuto l'accelerazione a cui vengono sottoposti scatola e gas. E' importante notare che questo sistema in accelerazione è equivalente ad un sistema dove la scatola è ferma ma si trova in un campo gravitazionale con accelerazione di gravità $\frac{F}{m+M}$. Se il gas fosse incompressibile o L fosse di piccole dimensioni si potrebbe applicare la legge di Stevino:

$$p(x) = p_0 + \rho x \frac{F}{m + M} \quad (9.2)$$

Tuttavia, visto che queste assunzioni non sono fatte nel testo, non possiamo farle. Consideriamo ora un sottile strato piano di gas contenuto nella scatola, anch'esso perpendicolare a \vec{v}_0 e di spessore dx . Nel sistema non sono presenti forze che non siano parallele a \vec{v}_0 , dunque la pressione all'interno dello "strato" deve essere costante, altrimenti non ci sarebbe nessuna forza ad impedirgli di compensarsi. Sappiamo che la forza esercitata da tutto il gas che sta davanti su questo strato è $Sp(x + dx)$, mentre quella tutto il gas che gli sta dietro esercita su questo strato è $Sp(x)$. Il gas (come tutta la scatola) sta decelerando, quindi segue che:

$$Sp(x + dx) > Sp(x)$$

Dunque, applicando $F = ma$

$$Sp(x + dx) - Sp(x) = m_{dx} \frac{F}{m + M} \quad (9.3)$$

Dove m_{dx} è la massa dello strato sottile. Se dividiamo ambo i membri per Sdx , ossia il volume dello strato sottile, otteniamo:

⁵Si potrebbe dedurre questo risultato anche dalla 9.1 e dal fatto che \vec{a} e \vec{F} hanno la stessa direzione

$$\frac{p(x+dx) - p(x)}{dx} = \frac{dp}{dx} = \rho(x) \frac{F}{m+M} \quad (9.4)$$

Per risolvere quest'equazione differenziale ci serve qualche altra informazione. Proviamo con la legge di stato dei gas:

$$pV = nRT$$

Possiamo calcolare n con m_{dx}/μ :

$$pV = \frac{m_{dx}}{\mu} RT$$

Visto che nella 9.3 ci siamo liberati da m_{dx} dividendo per il volume, proviamo a fare la stessa cosa:

$$p = \rho(x) \frac{RT}{\mu} \quad (9.5)$$

Dunque possiamo sostituire nella 9.4 la relazione appena trovata:

$$\frac{dp}{dx} = p \frac{\mu}{RT} \frac{F}{m+M} \implies \frac{dp}{p} = \frac{\mu}{RT} \frac{F}{m+M} dx$$

Integrando ambo i membri:

$$\int_{p_0}^{p(x)} \frac{dp}{p} = \int_0^x \frac{\mu}{RT} \frac{F}{m+M} dx = \frac{\mu}{RT} \frac{F}{m+M} x$$

Dove p_0 è la pressione dove $x = 0$. Da cui:

$$\ln p(x) - \ln(p_0) = \frac{\mu}{RT} \frac{F}{m+M} x \implies \ln \frac{p(x)}{p_0} = \frac{\mu}{RT} \frac{F}{m+M} x$$

Elevando alla e :

$$\frac{p(x)}{p_0} = e^{\frac{\mu F x}{RT(m+M)}}$$

Da cui:

$$p(x) = p_0 e^{\left(\frac{\mu F x}{RT(m+M)} \right)} \quad (9.6)$$

Vale la pena notare che per x che tende a zero la 9.6 è equivalente a:

$$p(x) = p_0 + \frac{p_0 \mu F}{RT(m+M)} x$$

Questa è simile alla legge di Stevino (9.2), che è proprio quanto ci aspetteremmo per una funzione che descrive la pressione. Infatti per altezze non ragguardevoli, si può applicare Stevino anche ai gas. Ciò conferma la correttezza del ragionamento fin qui svolto.

Non ci resta che ricavare p_0 . Riprendiamo la 9.1:

$$\vec{F}_p = m\vec{a}$$

Da cui, visto che devono essere nella stessa direzione e conosciamo l'espressione di a :

$$F_p = F \frac{m}{m+M}$$

Da cui, siccome F_p è uguale alla differenza della forza esercitata dalla faccia anteriore sul gas meno quella che la faccia posteriore esercita sul gas:

$$S(p(L) - p_0) = F \frac{m}{m+M}$$

Sostituendo:

$$S \left(p_0 e^{\left(\frac{\mu FL}{RT(m+M)} \right)} - p_0 \right) = F \frac{m}{m+M}$$

Ossia:

$$Sp_0 \left(e^{\left(\frac{\mu FL}{RT(m+M)} \right)} - 1 \right) = F \frac{m}{m+M}$$

Da cui:

$$p_0 = \frac{F \frac{m}{m+M}}{Se \left(\frac{\mu FL}{RT(m+M)} \right) - S}$$

Dunque, segue che:

$$p(x) = \frac{F \frac{m}{m+M}}{Se \left(\frac{\mu FL}{RT(m+M)} \right) - S} e^{\left(\frac{\mu Fx}{RT(m+M)} \right)}$$

Semplifichiamo un po':

$$p(x) = \frac{\frac{Fm}{S(m+M)}}{e^{\left(\frac{\mu FL}{RT(m+M)} \right)} - 1} e^{\left(\frac{\mu Fx}{RT(m+M)} \right)}$$

Oppure, sostituendo $k = \frac{\mu F}{RT(m+M)}$:

$$p(x) = \frac{Fm}{S(m+M)} \frac{e^{kx}}{e^{kL} - 1} \quad (9.7)$$

La pressione è indipendente dal tempo, eccetto negli istanti iniziale e finale, per il seguente motivo. Nell'istante iniziale, quando la pressione è uguale in tutta la scatola e la forza \vec{F} comincia a venir applicata alla scatola, avviene una migrazione di atomi del gas verso la faccia su cui è applicata la forza. Questo perchè, per il principio di inerzia, gli atomi tendono ad "andare avanti" nonostante la forza \vec{F} . L'unica cosa che impedisce a tutti gli atomi di "schiacciarsi" sulla faccia su cui è applicata \vec{F} è che la pressione crea velocemente una forza opposta che annulla la forza apparente dovuta alla decelerazione in tutti i punti del gas. Si raggiunge dunque molto velocemente un comportamento asintotico. Un'argomentazione simile si può fare per l'istante finale.

Un'altra giustificazione è che un sistema che decelera è caratterizzato da una forza per unità di massa apparente. Questa forza presenta molte analogie con la forza di gravità: su un pianeta come la terra la pressione atmosferica non varia in base al tempo ^{6!!!}

Punto 2:

Una volta che cessa \vec{F} la scatola e il gas sono fermi, dunque il centro di massa del sistema non si sposta più (non vengono infatti più applicate forze esterne). Tuttavia il centro di massa del gas si sposta perchè la pressione diventa costante in tutta la scatola, perciò si deve spostare anche il centro di massa della scatola per compensare. Per scoprire di quanto si sposta la scatola dopo che la forza \vec{F} cessa, dobbiamo impostare la seguente:

$$\int_0^L \rho(x) S dx \cdot x + \frac{L}{2} M = \left(\frac{L}{2} + X \right) (m + M)$$

Dove nell'integrale $\rho(x) S dx$ è la densità per il volume (quindi la massa) e x è la distanza. Da ciò, sfruttando la 9.5:

$$S \int_0^L \frac{\mu}{RT} p(x) x dx + \frac{L}{2} M = \left(\frac{L}{2} + X \right) (m + M)$$

Applicando la 9.7:

$$m \frac{\mu F}{RT(m + M)} \int_0^L \frac{e^{kx}}{e^{kL} - 1} x dx + \frac{L}{2} M = \left(\frac{L}{2} + X \right) (m + M)$$

Integrando e sostituendo k :

$$mk \left(\frac{Le^{kL}}{k(e^{kL} - 1)} - \frac{1}{k^2} \right) + \frac{L}{2} M = \left(\frac{L}{2} + X \right) (m + M)$$

Da cui:

$$m \left(\frac{Le^{kL}}{e^{kL} - 1} - \frac{1}{k} \right) + \frac{L}{2} M = \left(\frac{L}{2} + X \right) (m + M)$$

Da cui:

$$\frac{\left(\frac{Le^{kL}}{e^{kL} - 1} - \frac{1}{k} \right) m + \frac{L}{2} M}{m + M} - \frac{L}{2} = X$$

Ora che sappiamo di quanto si sposta il centro geometrico della scatola una volta che la forza \vec{F} smette di agire, scopriamo quanto si sposta mentre la forza \vec{F} agisce. Bisogna imporre l'equazione del moto uniformemente accelerato e sfruttare il fatto che $\Delta v = at$ per determinare l'istante in cui il sistema si ferma.

$$\begin{cases} D = v_0 t - \frac{1}{2} \frac{F}{m+M} t^2 \\ 0 = v_0 - \frac{F}{m+M} t \end{cases}$$

Da cui:

⁶se si trascurano le stagioni e il meteo e il riscaldamento globale

$$D = v_0 \frac{v_0(m+M)}{F} - \frac{1}{2} \frac{F}{m+M} \left(\frac{v_0(m+M)}{F} \right)^2$$

$$D = v_0^2 \frac{m+M}{F} - \frac{1}{2} \frac{m+M}{F} v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{m+M}{F} v_0^2$$

Da cui la distanza percorsa dall'istante $t = 0$:

$$D_{tot} = \frac{1}{2} \frac{m+M}{F} v_0^2 + \frac{\left(\frac{Le^{kL}}{e^{kL}-1} - \frac{1}{k} \right) m + \frac{L}{2} M}{m+M} - \frac{L}{2} \quad \text{con } k = \frac{\mu F}{RT(m+M)}$$

Soluzione al problema 10

Punto 1:

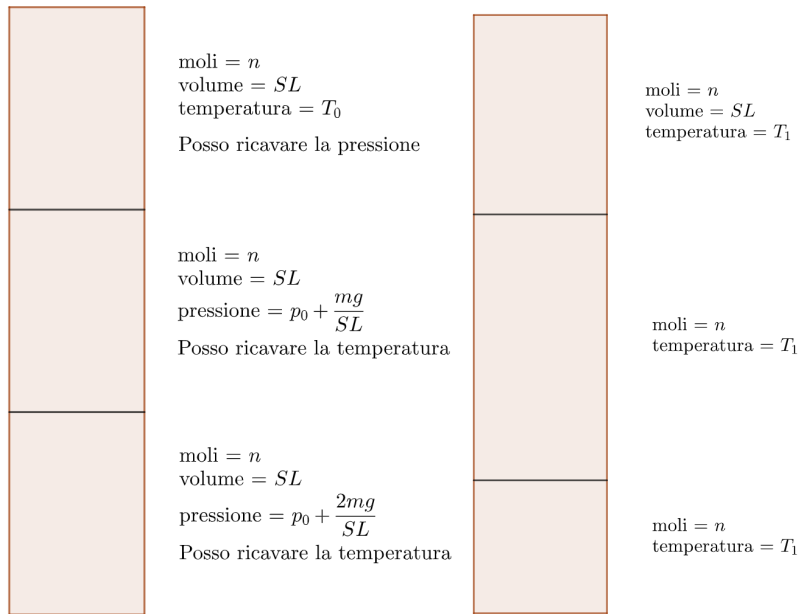


Figura 10.1: La situazione iniziale e finale

L'energia interna finale è uguale all'energia interna iniziale più la perdita di energia potenziale gravitazionale del pistone più basso, poichè il cilindro ha pareti isolanti. Perciò:

$$\frac{9}{2} nRT_1 = \frac{3}{2} nRT_0 + \frac{3}{2} nRT_{0,1} + \frac{3}{2} nRT_{0,2} + \left(\frac{V_{1,1}}{S} - \frac{SL}{S} \right) mg$$

Dove $T_{0,1}$ è la temperatura iniziale della sezione centrale, $T_{0,2}$ è la temperatura iniziale della sezione inferiore e $V_{1,1}$ è il volume finale della sezione centrale. L'ultimo addendo è il cambio di energia potenziale gravitazionale del secondo pistone. Considerando la legge di stato dei gas e il fatto che nella situazione iniziale il volume di ciascuna sezione è SL :

$$\frac{9}{2} nRT_1 = \frac{3}{2} SLp_0 + \frac{3}{2} SLp_{0,1} + \frac{3}{2} SLp_{0,2} + \left(\frac{V_{1,1}}{S} - L \right) mg$$

Adesso dobbiamo considerare che, nella situazione iniziale, la pressione nella sezione centrale è uguale a quella nella sezione superiore più il peso per unità di superficie del primo pistone. La pressione nella sezione inferiore invece è la pressione nella sezione centrale più il peso per unità di superficie del secondo pistone. Ossia:

$$p_{0,1} = p_0 + \frac{mg}{S} \quad p_{0,2} = p_{0,1} + \frac{mg}{S} = p_0 + \frac{2mg}{S} \quad (10.1)$$

Unendo all'espressione precedente:

$$\frac{9}{2}nRT_1 = \frac{9}{2}SLp_0 + \frac{9}{2}\frac{mg}{S}SL + \left(\frac{V_{1,1}}{S} - L\right)mg$$

Da cui, sostituendo $SLp_0 = nRT_0$:

$$\frac{9}{2}nRT_1 = \frac{9}{2}nRT_0 + \frac{9}{2}mgL + \left(\frac{V_{1,1}}{S} - L\right)mg$$

Da cui:

$$\frac{9}{2}nRT_1 - \frac{9}{2}nRT_0 = \frac{9}{2}mgL + V_{1,1}\frac{mg}{S} - mgL \quad (10.2)$$

Serve dunque un modo per esprimere $V_{1,1}$ in funzione di quantità note. Possiamo innanzitutto affermare che:

$$V_{1,1} + V_{1,2} = 2SL \quad (10.3)$$

Dove $V_{1,1}$ è il volume della sezione centrale e $V_{1,2}$ è il volume della sezione inferiore nella situazione finale. Se riprendiamo la 10.1 e usiamo la legge di stato dei gas:

$$\frac{nRT_1}{V_{1,1}} + \frac{mg}{S} = \frac{nRT_1}{V_{1,2}}$$

Da cui, grazie alla 10.3:

$$\frac{nRT_1}{V_{1,1}} + \frac{mg}{S} = \frac{nRT_1}{2SL - V_{1,1}}$$

Adesso, con alcune semplificazioni algebriche, possiamo esprimere $V_{1,1}$ in funzione di tutto il resto.

$$nRT_1(2SL - V_{1,1}) + \frac{mg}{S}V_{1,1}(2SL - V_{1,1}) = nRT_1V_{1,1}$$

$$2nRT_1(SL - V_{1,1}) + \frac{mg}{S}V_{1,1}(2SL - V_{1,1}) = 0$$

$$2nRT_1SL - 2nRT_1V_{1,1} + \frac{mg}{S}V_{1,1}2SL - \frac{mg}{S}V_{1,1}^2 = 0$$

$$0 = \frac{mg}{S}V_{1,1}^2 + 2(nRT_1 - mgL)V_{1,1} - 2nRT_1SL$$

Da cui:

$$V_{1,1} = \frac{mgL - nRT_1 \pm \sqrt{(nRT_1 - mgL)^2 + 2nRT_1SL\frac{mg}{S}}}{\frac{mg}{S}}$$

Scegliamo il più perchè il volume nella sezione centrale è maggiore a quello della sezione inferiore.

$$V_{1,1} = \frac{mgL - nRT_1 + \sqrt{n^2R^2T_1^2 - m^2g^2L^2}}{\frac{mg}{S}}$$

Ora possiamo ricavare con la 10.2:

$$\frac{9}{2}nRT_1 - \frac{9}{2}nRT_0 = \frac{9}{2}mgL + mgL - nRT_1 + \sqrt{n^2R^2T_1^2 - m^2g^2L^2} - mgL$$

Da cui, semplificando:

$$\frac{9}{2}nRT_1 - \frac{9}{2}nRT_0 = \frac{9}{2}mgL - nRT_1 + nRT_1 \left(1 - \frac{m^2 g^2 L^2}{n^2 R^2 T_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Secondo il testo del problema, dobbiamo utilizzare l'approssimazione di Taylor del second'ordine:

$$\frac{9}{2}nRT_1 - \frac{9}{2}nRT_0 = \frac{9}{2}mgL - nRT_1 + nRT_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m^2 g^2 L^2}{n^2 R^2 T^2} + \frac{-\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2})}{2} \frac{m^4 g^4 L^4}{n^4 R^4 T_1^4}\right)$$

Semplificando:

$$\frac{9}{2}nRT_1 - \frac{9}{2}nRT_0 = \frac{9}{2}mgL - \frac{1}{2} \frac{m^2 g^2 L^2}{nRT_1} - \frac{1}{8} \frac{m^4 g^4 L^4}{n^3 R^3 T_1^3}$$

Se teniamo l'ultimo addendo (che è molto piccolo) esce un'equazione di quarto grado molto complessa, per la quale non esiste una formula chiusa. Perciò, in virtù del fatto che $nRT_0, nRT_1 \gg Lgm$:

$$\frac{9}{2}T_1^2 - \frac{9}{2}T_0T_1 = \frac{9}{2} \frac{mgL}{nR}T_1 - \frac{1}{2} \frac{m^2 g^2 L^2}{n^2 R^2}$$

$$T_1^2 - T_0T_1 - \frac{mgL}{nR}T_1 + \frac{1}{9} \frac{m^2 g^2 L^2}{n^2 R^2} = 0$$

Da cui:

$$T_1 = \frac{T_0 + \frac{mgL}{nR} + \sqrt{\left(T_0 + \frac{mgL}{nR}\right)^2 + \frac{4}{9} \frac{m^2 g^2 L^2}{n^2 R^2}}}{2}$$

Che è l'espressione più precisa che possiamo ottenere senza utilizzare termini di grado molto alto/basso.

Tentativo punto 2:

Possiamo procedere in maniera analoga al punto 1.

$$\frac{3}{2}nRT_1 = \sum_0^{N-1} \frac{3}{2} \frac{n}{N} RT_{0,k} + \sum_N^1 \left(L - \frac{V_{1,k-1}}{S}\right) \left(\frac{mg}{N-1}(k-2)\right)$$

Da cui:

$$\frac{3}{2}nRT_1 = \frac{3}{2}nRT_0 + \frac{3}{4}mgL \frac{N-1}{N} + \sum_N^1 \left(L - \frac{V_{1,k-1}}{S}\right) \left(\frac{mg}{N-1}(k-2)\right)$$

Riferimenti bibliografici

- [1] Halliday, Resnick e Krane. *Fisica (Vol. 1)*. 4^a ed. 1994. ISBN: 88-408-0776-4.
- [2] Halliday, Resnick e Krane. *Fisica (Vol. 2)*. 5^a ed. 2004. ISBN: 978-88-08-08677-8.
- [3] Daniele Serra. *Elementi di Meccanica Celeste*. Appunti del corso della prof.ssa Anna Maria Nobili, anno accademico 2011/2012; aggiornamento 22 marzo 2024. 2012. URL: <https://poisson.phc.dm.unipi.it/~dserra/downloads/emc.pdf>.