Exercice 1 .

1. (a) $u_1 = \dfrac{3 \times u_0}{1+2u_0}$ donc $u_1 = \dfrac{3}{4}$
et $u_2 = \dfrac{3 \times u_1}{1+2u_1}$ soit $u_2 = \dfrac{9}{10}$.

(b) Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $0 < u_n$ ».

Initialisation : vérifions que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
On a $u_0 = \dfrac{1}{2} > 0$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

- *Hérédité*. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie, c'est-à-dire, $0 < u_n$. Montrons alors que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie c'est-à-dire $0 < u_{n+1}$.

  Par hypothèse de récurrence :
  $0 < u_n$ donc $0 < 3u_n$ et $0 < 1+2u_n$. Ainsi, u_{n+1} est le quotient de deux nombres strictement positifs, donc $0 < u_{n+1}$ et $\mathscr{P}_{nk+1}$ est vraie.
- $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.
  $\mathscr{P}_n$ est donc vraie pour tout entier naturel n.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$$

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3u_n}{1+2u_n} - u_n \\ &= \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n} \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$ donc $2u_n > 0$, $1 - u_n > 0$ et $1 + 2u_n > 0$ puis $\dfrac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n} > 0$ soit $u_{n+1} - u_n > 0$ ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante.

(b) La suite (u_n) est **croissante** et **majorée** par 1 ; elle converge donc vers une limite ℓ telle que $\ell \leq 1$.

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} \\ &= \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\dfrac{3u_n}{1+2u_n}} \\ &= \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{\dfrac{1+2u_n-3u_n}{1+2u_n}} \\ &= \frac{3u_n}{1-u_n} \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0}{1-u_0} = 1$.

(b) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$ donc $v_n = 3^n$.

(c) Pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n} \iff (1-u_n)v_n = u_n$

$$\begin{aligned} &\iff v_n = u_n + u_n v_n \\ &\iff u_n = \frac{v_n}{1+v_n} \\ &\iff u_n = \frac{3^n}{3^n+1} \end{aligned}$$

(d) $3 > 1 \implies \lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$. On a une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ », on change alors d'écriture.
$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{3^n}{3^n+1} \\ u_n &= \frac{\cancel{3^n}\times 1}{\cancel{3^n}\left(1+\frac{1}{3^n}\right)} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{3^n}} \end{aligned}$$

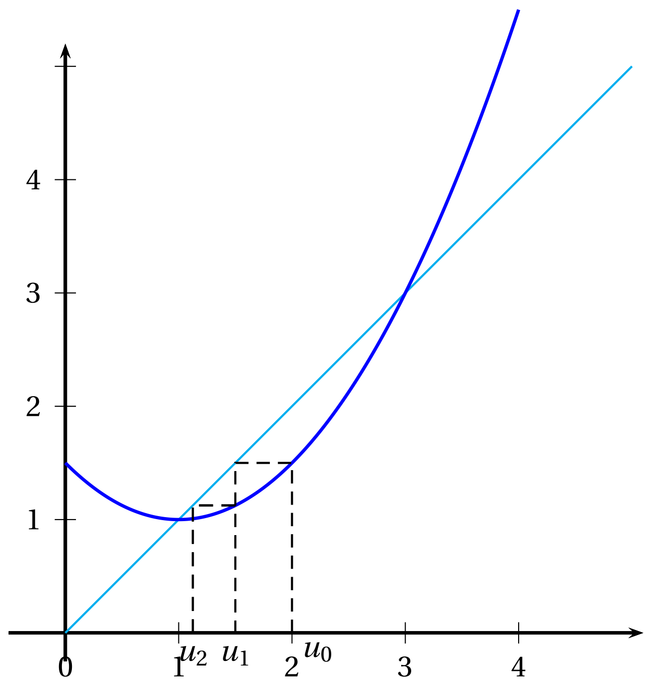
Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

D'où $\lim_{n\to+\infty} 1+\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1$, enfin, par inverse des limites $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

La suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 2.

1. (a) La suite (u_n) semble être **décroissante** et **converger** vers 1.
   (b) À l'aide de la calculatrice, il semble que lorsque $u_0 = 3,1$, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. Dans cette question, on prend $a = 2,9$.
   (a) f est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et pour tout réel $x \in [1\,;+\infty[$,
   $$f'(x) = x - 1.$$
   $\forall x \in [1\,;+\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$ donc f est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.
   (b) Soit $\mathscr{P}_n$: « $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ »
   Initialisation. Si $n = 0$ on a $u_0 = 2,9$ et $u_1 = f(2,9) = 2,805$ ce qui prouve que $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie c'est-à-dire que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ c'est-à-dire que $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.
   Par hypothèse de récurrence $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ donc $f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$ car la fonction f est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.
   Or $f(1) = 1$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ donc $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$ ce qui prouve que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   Conclusion : $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.
   On en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
   (c) — $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est décroissante.
   — $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n$: la suite (u_n) est donc minorée par 1.
   — (u_n) converge vers une limite ℓ telle que $\ell \geqslant 1$.
   Résolvons l'équation $f(x) = x$.
   $$\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = x \iff \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0$$
   x_1 est solution évidente de cette équation. L'autre est $x_2 = 3$.
   Par ailleurs $u_0 = 2,9$ et la suite (u_n) est décroissante donc on ne peut avoir $\ell = 3$ donc $\ell = 1$.
3. Dans cette question, on prend $a = 3,1$ et on admet que la suite (u_n) est croissante.
   (a) Pour tout entier naturel n, on a donc $3,1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$ car la suite (u_n) est supposée croissante et $u_0 = 3,1$. Soit A un réel quelconque. Il existe donc un rang n tel que $u_n > A$ ce qui prouve que la suite (u_n) n'est pas majorée.
   (b) D'après la question précédente, il existe un entier naturel n tel que $u_n > A$. De plus, la suite (u_n) est croissante donc pour tout $n \geqslant k$ on a donc $u_n \geqslant u_n > A$.
   Tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à l'intervalle $]A\,;+\infty[$ à partir du rang n ce qui prouve que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.



Exercice 3.

Partie 1.

1. $f'(-1)=0$: la tangente au point d'abscisse -1 est horizontale.
   $f'(0)=\dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}$ donc $f'(0)=-1$.

2. f semble concave sur $]-\infty;0]$ donc $f''<0$ sur cet intervalle et ainsi $f''(-1)<0$.
   De même f semble convexe sur $[0;+\infty]$ donc $f''>0$ sur cet intervalle : ainsi $f''(3)>0$.
   Enfin $f''(0)=0$ car f semble changer de convexité au point d'abscisse 0.

3. À l'aide des questions précédentes, on en déduit le tableau de variation de f' sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de f'	↗		↘

4. — Pour f' : on utilise la question précédente.
   f' est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$ donc seule la courbe C_4 peut représenter f'.
   — Pour f'' : f est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$ donc on doit avoir $f''\geqslant 0$ sur $[0;+\infty[$ et $f''\leqslant 0$ sur $]-\infty;0]$.
   On doit avoir $\mathscr{C}f''$ située au dessus de l'axe des abscisses sur $[0;+\infty[$ et en dessous de l'axe des abscisse sur $]-\infty;0]$.
   On en déduit que la courbe C_2 peut représenter f''.

Partie 2.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\mathrm{e}^{-x}+(x+2)(-1)\mathrm{e}^{-x}\\ &= (1-x-2)\mathrm{e}^{-x}\\ &= (-x-1)\mathrm{e}^{-x}\end{aligned}$$

2. On étudie le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x}>0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-x-1$.
   Calcul de la racine : $-x-1=0 \iff x=-1$.
   On en déduit le signe de $f'(x)$ et les variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f		↗	e	↘	

$f(-1)=\mathrm{e}$

3. Pour étudier la convexité de f on étudie le signe de $f''(x)$.
   f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1\mathrm{e}^{-x} + (-x-1)(-1)\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-1+x+1)\mathrm{e}^{-x} \\ &= x\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f'		$\searrow$		$\nearrow$	

   — f est concave sur $]-\infty\,; 0]$.
   — f est convexe sur $[0\,; +\infty[$.

4. f change de convexité au point d'abscisse 0 : le point $B(0\,; f(0))$ soit $B(0\,; 2)$ est le seul point d'inflexion de $\mathscr{C}$.