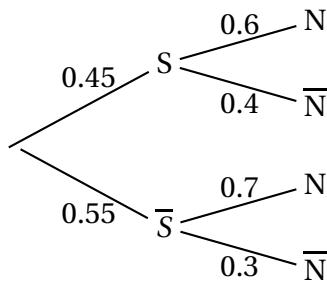


**Exercice 1.**

1. Construisons l'arbre de probabilité décrivant la situation.



2. (a) L'événement  $S \cap N$  est l'événement : « le vacancier choisi fréquente la salle de sport et pratique la natation ».  
 $P(S \cap N) = P(S) \times P_S(N)$  donc  $P(S \cap N) = 0.45 \times 0.6 = 0.27$ .

(b)  $S$  et  $\bar{S}$  forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(N) &= P(S) \times P_S(N) + P(\bar{S}) \times P_{\bar{S}}(N) \\ &= 0.27 + 0.55 \times 0.7 \\ &= 0.655 \end{aligned}$$

(c) Calculons  $P_N(S)$ .

$P_N(S) = \frac{P(S \cap N)}{P(N)}$  donc  $P_N(S) = \frac{0.27}{0.655}$  soit  $P_N(S) = \frac{54}{131}$  ce qui correspond à la probabilité que le vacancier fréquente une salle de sport sachant qu'il pratique la natation.

(d) On a  $P_N(S) = \frac{54}{131}$  et  $P(S) = 0.45$ .

On en déduit donc que  $P_N(S) \neq P(S)$  ce qui prouve que les événements  $N$  et  $S$  ne sont pas indépendants, ils sont liés.

3. (a)  $D$  et  $N$  étant indépendants, il en est de même pour  $N$  et  $\bar{D}$ .

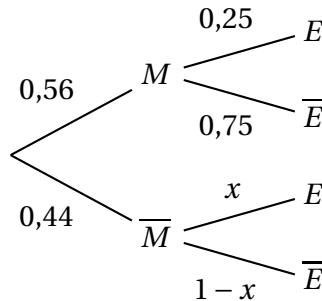
Or  $P(\bar{D} \cap N) = P(\bar{D}) \times P(N)$  donc  $P(\bar{D} \cap N) = 0.9 \times 0.655 = 0.5895$  ainsi la probabilité que le vacancier ne soit pas diabétique et pratique la natation est égale à 0.58995.

(b) On cherche  $P_D(N)$ .

$N$  et  $D$  étant indépendants on a  $P_D(N) = P(N) = 0,655$ .

**Exercice 2.**

1. Voici l'arbre modélisant la situation :



2. (a)  $M$  et  $\bar{M}$  forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales :

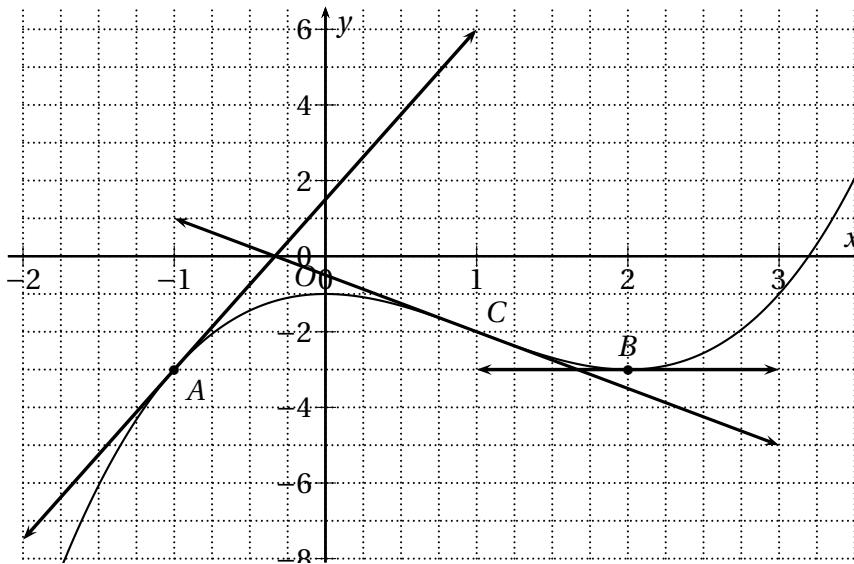
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E) &= \mathbf{P}(M \cap E) + \mathbf{P}(\bar{M} \cap E) \\ &= 0,14 + \mathbf{P}(\bar{M}) \times \mathbf{P}_{\bar{M}}(E) \\ &= 0,14 + 0,44x\end{aligned}$$

(b) D'après l'énoncé, on sait que  $\mathbf{P}(E) = 0,162$  car 16,2% des téléspectateurs ont regardé l'émission. On a donc

$$0,14 + 0,44x = 0,162 \iff x = \frac{0,162 - 0,14}{0,44} = 0,05.$$

3. On a  $\mathbf{P}(E) = 0,162$  et  $\mathbf{P}_M(E) = 0,25$  : on a donc  $\mathbf{P}(E) \neq \mathbf{P}_M(E)$  ce qui prouve que les événements  $M$  et  $E$  ne sont pas indépendants.

Par ailleurs,  $\mathbf{P}(M \cap E) \neq 0$  ce qui prouve que les événements  $M$  et  $E$  ne sont pas incompatibles.

**Exercice 3.**

1. On a directement  $f(-1) = -3$  et  $f(2) = -3$ .
2. Graphiquement  $f'(a)$  désigne le coefficient directeur de la tangente  $(T_a)$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $a$ . Ainsi,

- $f'(-1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9}{2}$
- $f'(2) = 0$  (tangente horizontale).

3. On a  $(T_{-1})$  :  $y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$  or  $f'(-1) = \frac{9}{2}$  et  $f(-1) = -3$  donc  $y = \frac{9}{2}(x + 1) - 3$  soit  $y = \frac{9}{2}x + \frac{9}{2} - \frac{6}{2}$  c'est-à-dire :

$$(T_{-1}) : y = \frac{9}{2}x + \frac{3}{2}$$

4. On admet que la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 1 a pour équation  $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ .
  - (a)  $f'(1)$  est le coefficient directeur de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 1 donc  $f'(1) = -\frac{3}{2}$ .
  - (b) Pour représenter cette tangente sur la figure donnée, on se place sur la courbe au point d'abscisse 1 (je l'ai appelé  $C$ ) et on utilise le coefficient directeur de cette droite qui est  $-\frac{3}{2}$  (3 vers le bas et 2 vers la droite).

**Exercice 4.**

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = x^2 + 3$  et  $g(x) = 4\sqrt{x}$ .

1. • Pour la fonction  $f$  : soit  $h \neq 0$ .

$$\begin{aligned}\tau_h(1) &= \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \frac{(1+h)^2 + 3 - 4}{h} \\ &= \frac{1 + 2h + h^2 + 3 - 4}{h} \\ &= \frac{2h + h^2}{h} \\ &= \frac{h(2+h)}{h} \\ &= 2 + h\end{aligned}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} 2 + h = 2$  donc  $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_h(1) = 2$  qui est une limite finie : la fonction  $f$  est ainsi dérivable en 1 et  $f'(1) = 2$ .

- Pour la fonction  $g$  : soit  $h \neq 0$ .

$$\begin{aligned}\tau_h(1) &= \frac{g(1+h) - g(1)}{h} \\ &= \frac{4\sqrt{1+h} - 4}{h} \\ &= \frac{4(\sqrt{1+h} - 1)}{h} \\ &= \frac{4(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \\ &= \frac{4(1+h-1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \\ &= \frac{4h}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \\ &= \frac{4}{\sqrt{1+h} + 1}\end{aligned}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{\sqrt{1+h} + 1} = 2$  donc  $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_h(1) = 2$  qui est une limite finie : la fonction  $g$  est ainsi dérivable en 1 et  $g'(1) = 2$ .

2. On a  $f'(1) = g'(1)$  et  $f(1) = g(1)$  donc les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  admettent la même tangente au point d'abscisse 1.

3. On a  $(T_1) : y = g'(1)(x-1) + g(1)$  soit  $(T_1) : y = 2x + 2$ .

Pour  $x$  proche de 1 on a l'approximation affine  $g(x) \approx 2x + 2$ .

En prenant la valeur  $x = 1,01$  il vient  $4\sqrt{1,01} \approx 4,02$ .

4. On pose  $d(x) = f(x) - (2x + 2)$ .

(a) Pour tout réel  $x$ ,  $d(x) = x^2 + 3 - (2x + 2)$  soit  $d(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ .

Cette quantité est toujours positive car un carré est toujours positif dans les réels.

(b) L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  est  $y = 2x + 2$ .

D'après la question précédente,  $d(x) \geqslant 0$  ce qui prouve que la courbe représentative de la fonction  $f$  est située au dessus de sa tangente au point d'abscisse 1.