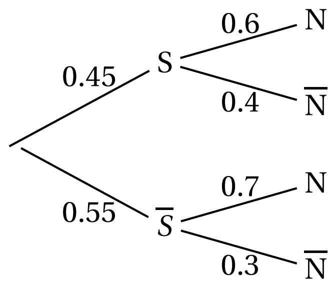
Exercice 1.

1. Construisons l'arbre de probabilité décrivant la situation.



2. (a) L'événement $S \cap N$ est l'événement : « le vacancier choisi fréquente la salle de sport et pratique la natation ».
$\mathbf{P}(S \cap N) = \mathbf{P}(S) \times \mathbf{P}_S(N)$ donc $\mathbf{P}(S \cap N) = 0.45 \times 0.6 = 0.27$.

   (b) S et $\overline{S}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N) &= \mathbf{P}(S) \times \mathbf{P}_S(N) + \mathbf{P}(\overline{S}) \times \mathbf{P}_{\overline{S}}(N) \\ &= 0.27 + 0.55 \times 0.7 \\ &= 0.655 \end{aligned}$$

   (c) Calculons $\mathbf{P}_N(S)$.

$\mathbf{P}_N(S) = \dfrac{\mathbf{P}(S \cap N)}{\mathbf{P}(N)}$ donc $\mathbf{P}_N(S) = \dfrac{0.27}{0.655}$ soit $\mathbf{P}_N(S) = \dfrac{54}{131}$ ce qui correspond à la probabilité que le vacancier fréquente une salle de sport sachant qu'il pratique la natation.

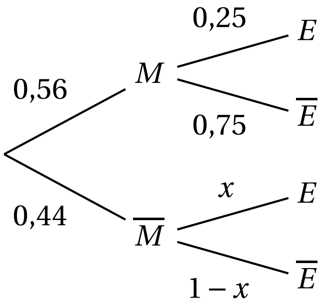
   (d) On a $\mathbf{P}_N(S) = \dfrac{54}{131}$ et $\mathbf{P}(S) = 0.45$.
On en déduit donc que $\mathbf{P}_N(S) \neq \mathbf{P}(S)$ ce qui prouve que les événements N et S ne sont pas indépendants, ils sont liés.

3. (a) D et N étant indépendants, il en est de même pour N et $\overline{D}$.
Or $\mathbf{P}(\overline{D} \cap N) = \mathbf{P}(\overline{D}) \times \mathbf{P}(N)$ donc $\mathbf{P}(\overline{D} \cap N) = 0{,}9 \times 0{,}655 = 0.5895$ ainsi la probabilité que le vacancier ne soit pas diabétique et pratique la natation est égale à 0.58995.

   (b) On cherche $\mathbf{P}_D(N)$.
N et D étant indépendants on a $\mathbf{P}_D(N) = \mathbf{P}(N) = 0{,}655$.

Exercice 2.

1. Voici l'arbre modélisant la situation :



2. (a) M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers.
   D'après la formule des probabilités totales :

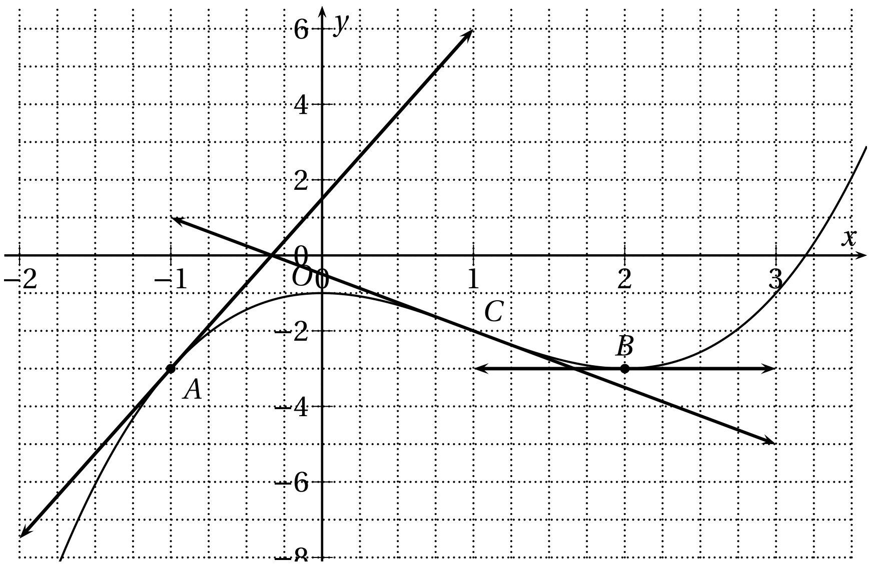
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E) &= \mathbf{P}(M\cap E)+\mathbf{P}\left(\overline{M}\cap E\right)\\ &= 0{,}14+\mathbf{P}(\overline{M})\times\mathbf{P}_{\overline{M}}(E)\\ &= 0{,}14+0{,}44x\end{aligned}$$

   (b) D'après l'énoncé, on sait que $\mathbf{P}(E)=0{,}162$ car 16,2% des téléspectateurs ont regardé l'émission. On a donc

$$0{,}14+0{,}44x=0{,}162 \Longleftrightarrow x=\frac{0{,}162-0{,}14}{0{,}44}=0{,}05.$$

3. On a $\mathbf{P}(E)=0{,}162$ et $\mathbf{P}_M(E)=0{,}25$: on a donc $\mathbf{P}(E)\neq\mathbf{P}_M(E)$ ce qui prouve que les événements M et E ne sont pas indépendants.
   Par ailleurs, $\mathbf{P}(M\cap E)\neq 0$ ce qui prouve que les événements M et E ne sont pas incompatibles.

Exercice 3.



1. On a directement $f(-1) = -3$ et $f(2) = -3$.

2. Graphiquement $f'(a)$ désigne le coefficient directeur de la tangente (T_a) à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a. Ainsi,

   - $f'(-1) = \dfrac{\Delta_y}{\Delta_x} = \dfrac{9}{2}$
   - $f'(2) = 0$ (tangente horizontale).

3. On a $(T_{-1})\ :\ y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ or $f'(-1) = \dfrac{9}{2}$ et $f(-1) = -3$ donc $y = \dfrac{9}{2}(x+1) - 3$ soit $y = \dfrac{9}{2}x + \dfrac{9}{2} - \dfrac{6}{2}$ c'est-à-dire :

$$\boxed{(T_{-1})\ :\ y = \frac{9}{2}x + \frac{3}{2}}$$

4. On admet que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

   (a) $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 donc $f'(1) = -\dfrac{3}{2}$.

   (b) Pour représenter cette tangente sur la figure donnée, on se place sur la courbe au point d'abscisse 1 (je l'ai appelé C) et on utilise le coefficient directeur de cette droite qui est $-\dfrac{3}{2}$ (3 vers le bas et 2 vers la droite).

Exercice 4.

On considère les fonctions f et g définies sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=x^2+3$ et $g(x)=4\sqrt{x}$.

1. • Pour la fonction f : soit $h \neq 0$.

$$\begin{aligned}\tau_h(1) &= \frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\ &= \frac{(1+h)^2+3-4}{h}\\ &= \frac{1+2h+h^2+3-4}{h}\\ &= \frac{2h+h^2}{h}\\ &= \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}}\\ &= 2+h\end{aligned}$$

$\lim\limits_{h\to 0} 2+h=2$ donc $\lim\limits_{h\to 0}\tau_h(1)=2$ qui est une limite finie : la fonction f est ainsi dérivable en 1 et $f'(1)=2$.

• Pour la fonction g : soit $h \neq 0$.

$$\begin{aligned}\tau_h(1) &= \frac{g(1+h)-g(1)}{h}\\ &= \frac{4\sqrt{1+h}-4}{h}\\ &= \frac{4\left(\sqrt{1+h}-1\right)}{h}\\ &= \frac{4\left(\sqrt{1+h}-1\right)\left(\sqrt{1+h}+1\right)}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)}\\ &= \frac{4(1+h-1)}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)}\\ &= \frac{4\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{1+h}+1\right)}\\ &= \frac{4}{\sqrt{1+h}+1}\end{aligned}$$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4}{\sqrt{1+h}+1}=2$ donc $\lim\limits_{h\to 0}\tau_h(1)=2$ qui est une limite finie : la fonction g est ainsi dérivable en 1 et $g'(1)=2$.

2. On a $f'(1)=g'(1)$ et $f(1)=g(1)$ donc les courbes représentatives des fonctions f et g admettent la même tangente au point d'abscisse 1.

3. On a $(T_1)\ :\ y=g'(1)(x-1)+g(1)$ soit $(T_1)\ :\ y=2x+2$.
Pour x proche de 1 on a l'approximation affine $g(x)\approx 2x+2$.
En prenant la valeur $x=1{,}01$ il vient $4\sqrt{1{,}01}\approx 4{,}02$.

4. On pose $d(x) = f(x) - (2x+2)$.

   (a) Pour tout réel x, $d(x) = x^2 + 3 - (2x+2)$ soit $d(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.
   Cette quantité est toujours positive car un carré est toujours positif dans les réels.

   (b) L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f est $y = 2x+2$.
   D'après la question précédente, $d(x) \geqslant 0$ ce qui prouve que la courbe représentative de la fonction f est située au dessus de sa tangente au point d'abscisse 1.