Exercice 1.

1. Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} \dfrac{e^x}{4-x^2}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} e^x = e^{-2} > 0\\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} 4-x^2 = 0 \quad \text{avec} \quad 4-x^2<0\end{array}\right\} \overset{\text{par quotient des limites}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} \frac{e^x}{4-x^2} = -\infty.$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
signe de $4-x^2$		-	0	+	0	$-$	

2. Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^3+1}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+1 = -\infty\\ \lim\limits_{T\to-\infty} e^T = 0\end{array}\right\} \overset{\text{par composition des limites}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^3+1} = 0.$$

3. Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3+3x+1)e^x$

On reconnaît une forme indéterminée du type « $\infty \times 0$ » , on change d'écriture.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $(2x^3+3x+1)e^x = 2x^3e^x + 3xe^x + e^x$.
Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ (limite du cours) donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 3xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc par somme des limites $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3e^x + 3xe^x + e^x = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3+3x+1)e^x = 0$

4. Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x \sin(2025x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(2025x) \leqslant 1$ donc vu que $e^x > 0$ on a :

$$-e^x \leqslant e^x \sin(2025x) \leqslant e^x.$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -e^x = 0$.
D'après le théorème d'encadrement des limites :

$$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x \sin(2025x) = 0$$

5. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x + \cos(2x)$

Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(2x) \leqslant 1$ donc $-1 + e^x \leqslant e^x + \cos(2x) \leqslant \cancel{1+e^x}$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - 1 = +\infty$ d'après le théorème de comparaison des limites :

$$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x + \cos(2x) = +\infty$$

6. Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} e^{\frac{1}{x}}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty\\ \lim\limits_{T\to-\infty} e^T = 0\end{array}\right\} \overset{\text{par composition des limites}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

7. Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x+1}$

D'une part : $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.
D'autre part :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} -x+1 = +\infty\\ \lim\limits_{T\to+\infty} e^T = +\infty\end{array}\right\} \overset{\text{par composition des limites}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1} = +\infty.$$

Par produit des limites :

$$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x+1} = -\infty$$

8. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-2x}$

On reconnaît une forme indéterminée du type « $\infty \times 0$ » , on change d'écriture.

$$\begin{aligned} x^2e^{-2x} &= \frac{x^2}{e^{2x}}\\ &= \frac{x^2}{e^x} \times \frac{1}{e^x} \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$ (limite de cours) donc par inverse des limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$.

Par ailleurs $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ donc par produit des limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}\times\dfrac{1}{e^x}=0$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-2x}=0$.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3-1}$

On reconnaît une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » , on change d'écriture.

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{x^3-1} &= \frac{e^x}{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}\\ &= \frac{e^x}{x^3}\times\frac{1}{1-\frac{1}{x^3}}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=+\infty \text{ (limite de cours)}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-\frac{1}{x^3}}=1\end{array}\right\}\overset{\text{par produit des limites}}{\Longrightarrow}\frac{e^x}{x^3}\times\frac{1}{1-\frac{1}{x^3}}=+\infty.$$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3-1}=+\infty$.

10. Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{e^x}{x^3-1}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}e^x=e\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}x^3-1=0 \quad\text{avec}\quad x^3-1<0\end{array}\right\}\overset{\text{par quotient des limites}}{\Longrightarrow}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{e^x}{x^3-1}=-\infty.$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de x^3-1		-	0	+	

Exercice 2.

1. Calculons la limite de f en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1}=0\\ \lim\limits_{T\to0}e^T=1\end{array}\right\}\overset{\text{par composition des limites}}{\Longrightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x-1}}=1.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x-1}}-3=-2$.

De manière analogue $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{2}{x-1}}-3=-2$: d'après le théorème d'encadrement des limites $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-2$: la droite d'équation $y=-2$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

2. On a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}x-1=0\quad\text{avec } x-1>0\\ \lim\limits_{\substack{T\to0\\T>0}}\dfrac{1}{T}=+\infty\\ \lim\limits_{U\to+\infty}e^U=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{par composition des limites}}{\Longrightarrow}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty \text{ et par}$$

suite $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}e^{\frac{1}{x-1}}-3=+\infty$.

D'après le théorème de comparaison des limites $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=+\infty$: la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.