Exercice 1 .

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**

   (a) g est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et pour tout réel x de cet intervalle, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x \\ &= (x^2+2x)\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

   Or pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ on a $\mathrm{e}^x > 0$ et $x^2+2x \geqslant 0$ car c'est la somme de deux quantités positives. On en déduit que $g'(x) \geqslant 0$ et par suite g est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par produit des limites}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^x = +\infty.$$

   D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^x - 1 = +\infty$ et par suite :

$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.}$$

x	0		α		$+\infty$
signe de $g'(x)$	0		$+$		
variations de g	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   (b) g est continue sur $[0\,;\,+\infty[$ et est strictement croissante.
   $0 \in [-1\,;\,+\infty[= g([0\,;\,+\infty[)$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   (c) $g(0,70) \simeq -0,013 < 0$ et $g(0,71) \simeq 0,025 > 0$ donc on a bien $0,70 \leqslant \alpha \leqslant 0,71$.

   (d) La valeur renvoyée par la fonction est $0,704$: c'est la valeur approchée par excès de α au millième.

   (e) La fonction g étant continue, strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, sachant de plus que $g(\alpha) = 0$, on en déduit le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

2. **Étude de la fonction f**

   (a) Calculons la limite de f en 0 : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \mathrm{e}^x = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par somme des limites}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty.$

   On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.

(b) Calculons la limite de f en $+\infty$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0\end{array}\right\} \overset{\text{par somme des limites}}{\Longrightarrow} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x} = +\infty.$

D'où :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) + \infty.}$$

(c) f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^x - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{x^2\mathrm{e}^x - 1}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

(d) Pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, on a $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$. On peut donc dresser le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

La fonction f est donc strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;\,\alpha]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha\,;\,+\infty[$.

(e) $f(\alpha) = \mathrm{e}^\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$. Or on sait que $g(\alpha) = 0$ donc $\alpha^2\mathrm{e}^\alpha - 1 = 0$.
Or $\alpha^2\mathrm{e}^\alpha - 1 = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha^2}$ car $\alpha \neq 0$.
On en déduit donc que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\alpha}$ ce qui prouve que le minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$ est bien $m = \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\alpha}$.

Exercice 2.

Partie A

1. Tout d'abord, on a $f(x) = 2x - 2x^2$.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle $f'(x) = 2 - 4x$.
   On étudie le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   Calcul de la racine : $2 - 4x = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$. On en déduit le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	

   On se restreint à l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$:

x	0		$\frac{1}{2}$
signe de $f'(x)$		$+$	
variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

   $f(0) = 0$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.
   La fonction f est bien strictement croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   - $u_1 = 2u_0(1 - u_0) = 2 \times 0,3 \times 0,7 = 0,42$.
   - Soit $\mathscr{P}_n : u_n \leqslant u_{n+1}$.
     — *Initialisation* : vérifions que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
     On a $u_0 \leqslant u_1$ car $0,3 \leqslant 0,42$.
     — *Hérédité :* soit n$\in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie, c'est-à-dire $u_n \leqslant u_{n+1}$ et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est également.
     Par hypothèse de récurrence, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
     f étant strictement croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, f conserve l'ordre sur cet intervalle.
     Comme on suppose que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ on a par croissance de la fonction f sur $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$,
     $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, soit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \dfrac{1}{2}$, ou encore $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \dfrac{1}{2}$: ce qui justifie que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

— $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 0$ donc en conclut que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.
$\forall n \in \mathbb{N}, , u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

3. Cet encadrement montre que
   — $\forall n \in \mathbb{N}, , u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
   — $\forall n \in \mathbb{N}, , u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$: la suite (u_n) est majorée par $\dfrac{1}{2}$.

   Conclusion : la suite (u_n) est croissante et majorée converge vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.
4. Soit ℓ la limite de la suite (u_n) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
   De même $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. Or $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Par passage à la limite il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$
   La limite ℓ vérifie donc $f(\ell) = \ell$ car f est continue en ℓ.
   On résout l'équation $f(\ell) = \ell$:
   $$\begin{aligned}\ell = 2\ell(1-\ell) &\iff \ell = 2\ell - 2\ell^2\\ &\iff 2\ell^2 - \ell = 0\\ &\iff \ell\,(2\ell - 1) = 0\\ &\iff \ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = \dfrac{1}{2}\end{aligned}$$
   $u_0 = 0,3$ et la suite (u_n) est croissante donc la seule solution acceptable est $\ell = \dfrac{1}{2}$.

Partie B

1. (a) La relation de récurrence s'écrit alors $P_{n+1} - P_n = P_n\,(1 - 0 \times P_n)$, soit
   $P_{n+1} - P_n = P_n \iff P_{n+1} = 2P_n$, donc $P_{n+1} = 2P_n$: cette égalité montre que la suite (P_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $P_0 = 3$.

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_0 \times q^n$ donc $P_n = 3 \times 2^n$: $2 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et comme $3 > 0$ la limite de la suite (P_n) est plus l'infini qui est impossible.
2. (a) On a $v_0 = 0,1 \times P_0 = 01 \times 3 = 0,3$.
   La relation de récurrence devient :
   $P_{n+1} - P_n = P_n\,(1 - 0,2 \times P_n) \iff P_{n+1} - P_n = P_n - 0,2P_n^2$, d'où
   $P_{n+1} = 2P_n - 0,2P_n^2$. (1)
   Or $v_{n+1} = 0,1P_{n+1} = 0,1\left(2P_n - 0,2P_n^2\right) = 0,2\left(P_n - 0,1P_n^2\right)$.
   Comme $v_n = 0,1 \times P_n \iff 10v_n = P_n$, l'égalité ci-dessus devient :
   $v_{n+1} = 0,2\left(10v_n - 0,1 \times (10v_n)^2\right)$, soit
   $v_{n+1} = 0,2\left(10v_n - 10v_n^2\right) = 2v_n\,(1 - v_n)$.

   (b) La relation de la question précédente montre que la suite (v_n) est la suite (u_n) de la **Partie A** et on a vu que cette suite converge vers $\dfrac{1}{2}$.
   On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.
   Or $P_n = 10v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 10 \times \dfrac{1}{2} = 5$.
   Finalement la population se rapprochera de 5000 individus.