

---

# FISICA I

---

RAVI SRINIVASAN

*dagli appunti di YURI TIRENDI*

*Basati sulle lezioni della prof. Daniela Petti*

*Università Politecnico di Milano*

A.A. 2018-2019

# Sommario

1. Introduzione .....	1
1.1. Il metodo scientifico .....	1
2. Meccanica .....	3
2.1. Le grandezze della meccanica.....	3
2.2. Cinematica.....	4
2.2.1. Il moto di punti materiali.....	5
2.2.2. Legge oraria, velocità e accelerazione.....	6
Calcolo della velocità media e velocità istantanea .....	6
Il problema inverso .....	7
Calcolo dell'accelerazione media e istantanea .....	8
Il problema inverso .....	9
2.2.3. Il moto rettilineo uniforme (m.r.u.).....	9
2.2.4. Moto rettilineo uniformemente accelerato (m.r.u.a.) .....	10
2.2.5. Il moto nel piano .....	12
2.2.6. Il moto parabolico .....	13
Traiettoria del moto parabolico .....	14
Gittata.....	14
Altezza massima raggiunta .....	15
2.2.7. Coordinate intrinseche .....	15
Velocità e accelerazione in coordinate intrinseche.....	17
Il problema inverso .....	17
Derivata di un vettore.....	17
Cerchio osculatore.....	18
Espressione finale dell'accelerazione.....	20
2.2.8. Il moto circolare .....	20
La velocità nel moto circolare .....	21
L'accelerazione nel moto circolare .....	21
2.2.9. Il moto circolare uniforme .....	22
Il periodo e la frequenza .....	23

## Sommario

2.2.11. Il moto armonico.....	24
Periodo e frequenza del moto armonico.....	24
Velocità e accelerazione .....	25
2.3. Dinamica.....	26
2.3.1. I tre principi della dinamica.....	26
Il primo principio della dinamica .....	26
Il secondo principio della dinamica .....	27
Il terzo principio della dinamica.....	27
2.3.2. Forze a distanza.....	28
2.3.3. Forze a contatto .....	28
La reazione vincolare.....	28
Tensione della fune.....	29
Forza di attrito statico .....	29
Forza di attrito dinamico .....	30
Forza elastica (o di richiamo) .....	32
2.3.4. Molla ideale e moto armonico.....	33
2.3.5. Il pendolo.....	35
Approssimazione a moto armonico.....	36
La tensione e l'accelerazione .....	37
2.3.6. L'attrito viscoso.....	38
Grafico della velocità .....	39
Velocità limite .....	40
La legge oraria .....	40
2.4. Moti relativi.....	40
2.4.1. Sistemi che si muovono a velocità costante .....	41
Generalizzazione.....	41
2.4.2. Moto relativo generale.....	42
Accelerazione relativa.....	43
2.5. Sistemi di riferimento inerziali .....	45
2.5.1. Il sistema terra .....	46
2.6. Lavoro ed energia.....	48
2.6.1. Il lavoro .....	48
La sovrapposizione degli effetti .....	49
2.6.2. La potenza.....	49

## Sommario

Kilowatt ora e cavalli vapore .....	50
2.6.3. Teorema dell'energia cinetica.....	50
2.6.4. Lavoro nei sistemi inerziali.....	51
2.6.5. Il lavoro compiuto dalla forza peso .....	52
2.6.6. Il lavoro compiuto dalla forza elastica .....	52
2.6.7. Forze conservative .....	53
Energia potenziale .....	54
Energia potenziale nei sistemi di riferimento.....	55
2.6.8. Energia meccanica .....	55
2.6.9. Forze non conservative .....	56
Forze non conservative ed energia meccanica .....	57
2.6.10. La quantità di moto e l'impulso .....	59
2.7. Il momento angolare .....	61
2.7.1. Il teorema del momento angolare .....	61
2.8. Forze centrali a simmetria sferica.....	63
La forza gravitazionale .....	64
La forza elettrostatica.....	64
2.8.1. Il momento torcente delle forze centrali a simmetria sferica .....	65
2.8.2. La velocità areale.....	65
2.9. Le leggi di Keplero .....	66
Prima legge (legge delle orbite ellittiche).....	67
Seconda legge (legge delle aree) .....	67
Terza legge (legge dei periodi) .....	67
L'accelerazione gravitazionale.....	69
Il lavoro della forza gravitazionale.....	69
2.9.1. Orbite attorno ai pianeti.....	71
L'orbita iperbolica .....	71
L'orbita parabolica .....	71
L'orbita chiusa .....	72
L'orbita ellittica.....	72
L'orbita circolare .....	72
2.9.2. Il campo gravitazionale .....	73
2.10. La forza elettrostatica.....	74

## Sommario

2.10.1.	Il campo elettrostatico.....	75
2.10.3.	Il modello di Bohr .....	77
	L'energia di legame.....	78
2.11.	Il centro di massa.....	79
2.11.1.	Il moto del centro di massa .....	79
2.11.2.	Il teorema del centro di massa.....	80
2.11.3.	La quantità di moto di un sistema di punti .....	81
2.11.4.	Il momento angolare di un sistema di punti .....	82
2.11.5.	I teoremi di König.....	83
	Il primo teorema di König.....	84
	Il secondo teorema di König.....	85
2.11.6.	Il teorema dell'energia cinetica.....	85
2.12.	Gli urti .....	86
2.12.1.	Gli urti e il momento angolare.....	88
2.12.2.	Urti totalmente anelastici.....	88
2.12.3.	Urti elastici .....	89
2.13.	Il corpo rigido .....	91
	Le equazioni del corpo rigido .....	91
2.13.1.	La densità .....	92
	La densità volumetrica .....	92
	La densità superficiale.....	93
	La densità lineare .....	93
	Centro di massa di corpi continui.....	93
2.13.4.	Il moto di traslazione.....	96
2.13.5.	Il moto di rotazione.....	97
2.13.6.	Rotazione rispetto a un asse fisso.....	98
2.13.7.	Il momento di inerzia .....	99
	Asse di simmetria coincidente con l'asse di rotazione.....	100
	Le equazioni del moto .....	101
	Il teorema dell'energia cinetica .....	102
	Il momento angolare .....	102
2.13.8.	Il teorema di Huygens-Steiner.....	102
2.13.9.	Il moto di roto-traslazione.....	103

## Sommario

Metodo grafico.....	104
Sistema solidale al corpo rigido .....	104
Asse di rotazione istantaneo.....	105
2.13.10. La dinamica del moto di puro rotolamento .....	105
Lo Yo-Yo.....	107
2.13.11. La conservazione dell'energia meccanica .....	108
2.13.12. Conservazione del momento angolare .....	109
2.14. Meccanica dei fluidi .....	111
2.14.1. I fluidi e la pressione .....	111
2.14.2. Forze di superficie e forze di volume .....	113
2.14.3. La legge di Stevino .....	115
2.14.4. La pressione nei gas comprimibili .....	116
2.14.5. Il principio di Pascal.....	117
I vasi comunicanti.....	117
Il barometro di Torricelli .....	117
2.14.6. Il principio di Archimede.....	118
3. Termodinamica.....	120
3.1. L'equilibrio in termodinamica .....	121
3.1.1. La temperatura.....	122
3.1.2. L'esperimento di Joule.....	123
3.2. Il primo principio della termodinamica.....	124
3.2.1. Il calore specifico.....	125
3.2.2. Lo scambio di calore tra corpi .....	126
3.2.3. I passaggi di stato.....	127
3.2.4. Il calore latente.....	128
Il punto triplo.....	129
3.2.5. Le trasformazioni.....	130
3.3. I gas ideali .....	130
3.3.1. Il principio di Avogadro .....	132
3.3.2. L'equazione di stato dei gas ideali .....	133
3.3.3. Il lavoro di un gas durante una trasformazione.....	133
3.3.4. Il calore scambiato da un gas durante una trasformazione.....	136

## Sommario

3.3.5. L'energia interna di un gas ideale .....	137
3.3.6. La relazione di Meyer .....	139
3.3.7. Le trasformazioni adiabatiche .....	140
3.3.8. Le macchine termiche.....	141
Il ciclo di Carnot.....	142
3.4. Il secondo principio della termodinamica.....	144
Violando l'enunciato di Kelvin Planck si viola l'enunciato di Clausius.....	145
Violando l'enunciato di Clausius si viola l'enunciato di Kelvin Planck.....	146
3.4.1. Il teorema di Carnot .....	146
Definizione della scala Kelvin .....	148
L'efficienza massima della macchina di Carnot.....	148
3.4.2. Il teorema di Clausius .....	149
3.5. L'entropia.....	151
3.5.1. L'entropia nei gas ideali .....	153
3.5.2. Il significato fisico dell'entropia .....	155
3.5.3. Il principio di accrescimento dell'entropia per i sistemi isolati .....	156
3.5.4. Esempi di calcolo dell'entropia.....	157
Scambio di calore tra sorgenti ideali a temperatura $T_2 > T_1$ .....	157
Macchine termiche.....	158
Scambio di calore tra corpi a temperatura $T_2 > T_1$ .....	159
Scambio di calore tra una sorgente $T_2$ e un corpo $T_1$ con $T_2 > T_1$ .....	160
Transizione di fase.....	160
Trasformazioni adiabatiche.....	161
La macchina di Carnot .....	161

# 1. Introduzione

La **fisica** è la scienza della natura nel senso più ampio. Il termine "fisica" deriva dal latino *physica*, a sua volta derivante dal greco (τὰ) φυσικά ((tà) *physiká*), "(le) cose naturali", nato da φύσις (*phýsis*), "natura".

Ha lo scopo di studiare i **fenomeni naturali**, ossia tutti gli eventi che possono essere descritti, ovvero quantificati, attraverso **grandezze fisiche** opportune, al fine di stabilire principi e leggi che regolano le interazioni tra le grandezze stesse e le loro variazioni, mediante **astrazioni matematiche**. Quest'obiettivo è raggiunto attraverso l'applicazione rigorosa del **metodo scientifico**, il cui scopo ultimo è fornire uno schema semplificato, o modello, del fenomeno descritto.

## 1.1. Il metodo scientifico

---

Il **metodo scientifico**, o **metodo sperimentale**, è la modalità tipica con cui la scienza procede per raggiungere una conoscenza della realtà oggettiva, affidabile, verificabile e condivisibile. Esso consiste, da una parte, nella raccolta di dati empirici sotto la guida delle ipotesi e teorie da vagliare; dall'altra, nell'analisi rigorosa, logico-razionale e, dove possibile, matematica di questi dati, associando cioè, come enunciato per la prima volta da **Galilei**, le «sensate esperienze» alle «dimostrazioni necessarie», ossia la sperimentazione alla matematica.

Ai nostri fini possiamo dire che il **metodo scientifico** segue i seguenti passi:

1. Studiare le **grandezze fondamentali** (ad esempio tempo e spazio)
2. **Misurare** le grandezze fondamentali
3. Ricavare le **leggi** (formule analitiche matematiche)

Le misurazioni devono essere **riproducibili** (si deve ottenere la stessa misura ripetendo la misurazione) e **ripetibili** (ripetendo la misurazione, la misura ottenuta deve portare allo stesso risultato). Da queste due condizioni si ricava il concetto di **intervallo di incertezza**.



Le misure permettono quindi di definire le grandezze: si parla di **definizione operativa** quando si definisce una grandezza fondamentale attraverso una misurazione.

Le leggi che si ricavano valgono all'interno di condizioni particolari (ad esempio le leggi della **dinamica di Newton** valgono per la meccanica classica, ma vengono estese dalla **relatività di Einstein**).

Al fine di rendere universale il sistema di misurazione è stato introdotto il **sistema internazionale di unità di misura** (in francese: *Système international d'unités*), abbreviato in **SI**, che stabilisce le unità di misura delle grandezze fondamentali.

## 2. Meccanica

In questa sezione parleremo di una branca di fisica chiamata **meccanica**: la meccanica si occupa dello **studio dei corpi in movimenti**. La meccanica si divide in:

- **Cinematica**: con questo termine indichiamo il ramo della meccanica che si occupa di **descrivere quantitativamente il moto dei corpi**, indipendentemente dalle cause del moto stesso.
- **Dinamica**: con questo termine indichiamo quel ramo della meccanica che si occupa dello **studio del moto dei corpi e delle sue cause**, in termini più concreti, delle circostanze che lo determinano e lo modificano.

### 2.1. Le grandezze della meccanica

---

Le **grandezze fondamentali** della meccanica sono:

- **Lunghezza ( $L$ )**: nel S.I. viene misurata in **metri ( $m$ )**. Un metro è la lunghezza dello spazio percorso dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo pari a  $1/c$  [s] con:

$$c = 299792458 \text{ [m/s]}$$

$$s = vt = c \cdot \frac{1}{c} = 1 \text{ [m]}$$

- **Tempo ( $T$ )**: nel S.I. viene misurato in **secondi ( $s$ )**. Un secondo è l'intervallo di tempo corrispondente a 9192631770 oscillazioni della radiazione emessa da una particolare transizione iperfina dell'isotopo  $^{133}\text{Cs}$ .
- **Massa ( $M$ )**: nel S.I. viene misurata in **kilogrammi ( $kg$ )**. Dal 20/05/2019 si adotterà una nuova definizione di kilogrammo che si baserà sulla costante di Planck:

$$h = 6.62607040 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Queste grandezze sono dette **dimensionali**, esistono anche grandezze **adimensionali**:

- **Angolo**: in fisica per misurare gli angoli vengono usati i **radianti ( $rad$ )**. La definizione della misura di un angolo in radianti è:

$$\alpha = \frac{S}{R}$$

dove  $S$  è l'arco sotteso dall'angolo  $\alpha$  e  $R$  è il raggio della circonferenza a cui appartiene l'arco. Un radiante è quindi un angolo che sottende un arco  $S$  di lunghezza pari al raggio.

Quando si eseguono calcoli usando queste grandezze è utile compiere un'**analisi dimensionale**: sostituendo alle grandezze le loro unità di misura all'interno di una formula ricaviamo l'unità di misura della grandezza trovata. Se ad esempio facciamo l'analisi dimensionale per i radianti otteniamo:

$$\alpha = \frac{[L]}{[L]} = \frac{m}{m} = 1$$

Da cui ricaviamo che il radiante è un numero puro

Da ciò derivano le **grandezze derivate**, vediamo alcune:

- **Area (A)**: compiendo l'analisi dimensionale otteniamo:

$$[A] = [L_1] \cdot [L_2] = m \cdot m = m^2$$

Le aree vengono quindi misurate in **metri quadrati ( $m^2$ )**.

- **Velocità (v)**: misura la quantità di spazio percorso in un determinato tempo. Procediamo come per le aree:

$$[v] = \frac{[L]}{[T]} = \frac{m}{s}$$

L'unità di misura della velocità è quindi il **metro al secondo ( $m/s$ )**.

- **Forza (F)**: la forza viene definita come massa per accelerazione (misurata in **metri al secondo quadrato**), compiendo l'analisi dimensionale otteniamo:

$$[F] = [M] \cdot [a] = [M] \cdot \frac{[L]}{[T]^2} = kg \frac{m}{s^2}$$

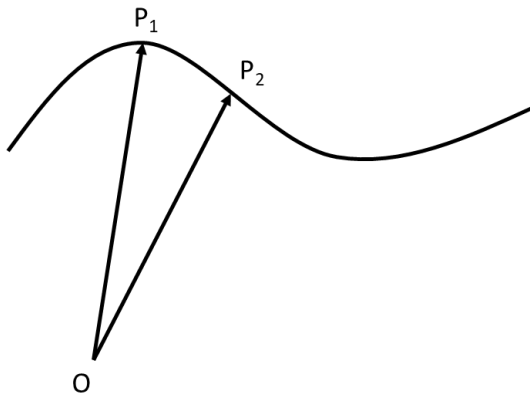
L'unità di misura della forza è il **Newton (N)**, che corrisponde a un **kilogrammo per metro al secondo quadrato**.

## 2.2. Cinematica

---

Come affermato prima, la cinematica si occupa di descrivere quantitativamente il moto dei corpi, indipendentemente dalle cause del moto stesso. Al fine di studiare il moto di un corpo è necessaria la presenza di un **sistema di riferimento** (composto da origine, assi orientati), un osservatore e uno strumento di misurazione del tempo. Gli ultimi due elementi sono indipendenti dal sistema di riferimento scelto.

### 2.2.1. Il moto di punti materiali



Consideriamo un oggetto (per ora ci limiteremo a studiare **punti materiali**, ossia oggetti privi di dimensioni e indeformabili) che si muove lungo una traiettoria (vedremo fra poco meglio cosa è la traiettoria).

Scriviamo il vettore coordinate del punto rispetto al tempo scegliendo un sistema di riferimento con origine  $O$ . Al tempo  $t$  il nostro oggetto si troverà in posizione  $P_1$ , al tempo  $t + \Delta t$  l'oggetto si troverà in posizione  $P_2$ .

Possiamo quindi scrivere i vettori coordinate dell'oggetto in funzione del tempo rispetto al sistema di riferimento scelto:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) \\ \vec{r}(t + \Delta t) \end{aligned}$$

Se osserviamo l'oggetto a istanti di tempo molto vicini (ossia facciamo tendere  $\Delta t \rightarrow 0$ ), lo spostamento sarà piccolo. Otteniamo quindi che:

$$|\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)| \rightarrow 0$$

Questa considerazione più avanti sarà molto utile. Il vettore  $\vec{r}(t)$  viene detto **vettore posizione**.

**Definizione 2.1.** *L'equazione  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  viene chiamata **equazione vettoriale del moto**.*

Considerando un sistema di riferimento cartesiano (ad esempio in due dimensioni), possiamo scrivere la **forma cartesiana** di  $\vec{r}(t)$ :

$$\vec{r}(t) = r_x \hat{x} + r_y \hat{y}$$

Dove  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  sono versori diretti lungo gli assi  $x$  e  $y$ .

**Definizione 2.2.** *Il luogo dei punti occupati dal punto materiale durante il suo moto viene detto **traiettoria**.*

In due dimensioni la traiettoria è definita da un'equazione del tipo:

$$f(x, y) = 0$$

In tre dimensioni invece viene definita dall'intersezione di due superfici, ossia dalla formula:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Notiamo che in quest'equazioni non è presente la variabile temporale  $t$ . Se invece consideriamo l'equazione vettoriale del moto e scomponiamo le componenti del vettore lungo i versori  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  (lavorando in tre dimensioni con sistema di riferimento cartesiano) otteniamo la **legge oraria**, ossia una formula che descrive le componenti del vettore posizione in funzione del tempo:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} r_x = r_x(t) \\ r_y = r_y(t) \\ r_z = r_z(t) \end{cases}$$

Le due formule sopra scritte sono equivalenti.

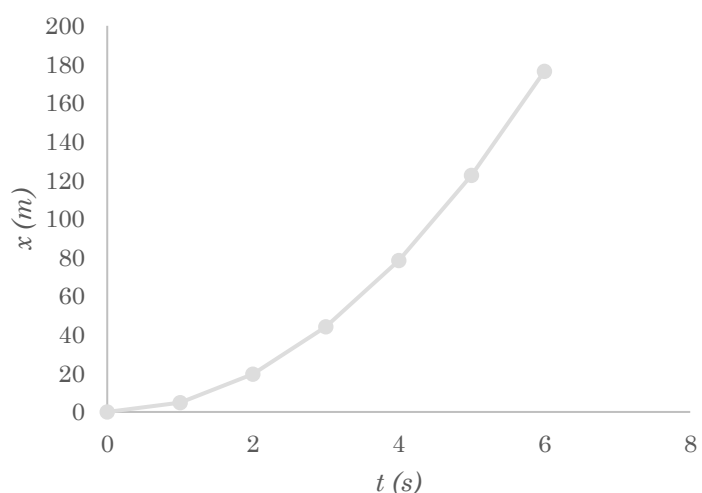
### 2.2.2. Legge oraria, velocità e accelerazione

Iniziamo a studiare i moti partendo dal più semplice, il moto unidimensionale rettilineo. Le formule ricavate in questo paragrafo possono essere estese ai moti in due e tre dimensioni, come vedremo più avanti.

#### *Calcolo della velocità media e velocità istantanea*

Consideriamo un punto che si muove su una retta (chiamiamola asse  $x$ ) e supponiamo di segnarci a determinati tempi le posizioni del punto, otterremo una tabella da cui possiamo ricavare un grafico della posizione in funzione del tempo, detto **diagramma orario**:

$t$ (s)	$x$ (m)
0	0
1	4,9
2	19,6
3	44,1
4	78,5
5	122,5
6	176,5



Se volessimo calcolare la velocità in  $t_1 = 5s$ , potremmo provare a vedere quanto spazio percorre il nostro punto tra  $t_1 = 5s$  e  $t_2 = 6s$ :

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_{t=6s} - x_{t=5s} = (176,5 - 122,6)m = 53,9m \\ \Delta t &= (6 - 5)s = 1s \\ v &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = 53,9 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Abbiamo quindi calcolato la **velocità media** nel tratto tra  $t_1 = 5s$  e  $t_2 = 6s$ , il che potrebbe però risultare troppo approssimativo e non corrispondere alla velocità reale in  $t_1 = 5s$ . Senza però altri dati sperimentali risulta impossibile essere più precisi. Supponiamo invece di avere la legge oraria del moto da studiare:

$$x = 4,9t^2$$

Per essere più precisi possiamo ridurre lo spazio tra gli intervalli in cui studiamo la posizione del punto materiale. Calcoliamo a  $t_1 = 5s$  e  $t_2 = 5,1s$ :

$$\begin{aligned}x(t = 5,1s) &= 4,9 \cdot 5,1^2 = 127,45m \\ v &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4,945m}{0,1s} = 49,49 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Più piccolo è l'intervallo considerato, maggiore sarà la precisione della misura della velocità nel momento considerato. Se facciamo tendere questo intervallo a 0 otteniamo:

$$v_{ist} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

**Definizione 2.3.** *La **velocità istantanea** di un punto materiale in moto è definita come la derivata della legge oraria valutata nel momento in cui la si vuole calcolare*

Calcoliamo quindi la velocità in  $t_1 = 5s$ :

$$v_{t=5s} = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=5s} = \left. \frac{d}{dt}(4,9t^2) \right|_{t=5s} = 2 \cdot 4,9t|_{t=5s} = 49m/s$$

### ***Il problema inverso***

Supponiamo ora di voler trovare la posizione di un punto materiale in un istante  $t = t^*$  data la velocità in funzione del tempo. Se e solo se la velocità è costante possiamo dire che:

$$\Delta x = v \cdot \Delta t$$

Se invece la velocità non è costante possiamo risolvere il problema nel seguente modo. Supponiamo che il punto materiale si trovi nella posizione  $x$  al tempo  $t$  e nella posizione

$x + dx$  al tempo  $t + dt$ : notiamo che lo spostamento  $dx$  è uguale al prodotto del tempo  $dt$  impiegato a percorrerlo per il valore della velocità al tempo  $t$ :

$$dx = v(t)dt$$

Lo spostamento complessivo in un intervallo finito di tempo  $\Delta t = t - t_0$  è dato da tutti i successivi valori di  $dx$ . Per far il calcolo utilizziamo l'operatore di integrazione e otteniamo:

$$\Delta x = \int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v(t)dt$$

Il primo integrale è immediato, da cui otteniamo:

$$\begin{aligned} x(t) - x_0 &= \int_{t_0}^t v(t)dt \\ x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t v(t)dt \end{aligned}$$

Questa è la relazione generale che permette il calcolo dello spazio percorso nel moto rettilineo, indipendentemente dal tipo di moto. Osserviamo che  $\Delta x$  rappresenta lo spostamento complessivo e non lo spazio percorso. Infatti, se il punto si spostasse e tornasse alla stessa posizione  $\Delta x$  risulterebbe nullo:  $\Delta x$  è la **somma algebrica** degli spostamenti infinitesimi. Per calcolare lo spazio percorso occorre utilizzare la formula:

$$\Delta x = \int_{t_0}^t |v(t)|dt$$

### ***Calcolo dell'accelerazione media e istantanea***

Un discorso analogo a quello delle velocità può essere fatto per l'**accelerazione**. L'accelerazione descrive la variazione di velocità in un determinato intervallo di tempo:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ [a] &= \frac{\frac{[L]}{[T]}}{[T]} = \frac{[L]}{[T]^2} = m/s^2 \end{aligned}$$

Come per le velocità, se possediamo dati sperimentali presi a determinati istanti, possiamo calcolare l'**accelerazione media** di un punto materiale tra due istanti di tempo utilizzando la formula scritta sopra.

Se invece è nota la legge che lega la velocità al tempo:

$$v = v(t)$$

possiamo, come per la velocità istantanea, misurare l'**accelerazione istantanea** del punto materiale:

$$a_{ist} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

**Definizione 2.4.** *L'accelerazione istantanea di un punto materiale in moto è definita come la derivata della legge che lega la velocità in funzione del tempo valutata nel momento in cui la si vuole calcolare*

Notiamo che il vettore velocità ha direzione e verso uguali al vettore spostamento, mentre il verso del vettore accelerazione indica se il corpo sta accelerando/decelerando.

### ***Il problema inverso***

Come per la velocità, nota la legge che lega l'accelerazione al tempo:

$$a = a(t)$$

Possiamo ricavare  $v(t)$  tramite l'integrazione dell'equazione differenziale:

$$dv = a(t)dt$$

$$\Delta v = \int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a(t)dt$$

Da cui ricaviamo che:

$$v(t) - v_0 = \int_{t_0}^t a(t)dt$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t)dt$$

### **2.2.3. Il moto rettilineo uniforme (m.r.u.)**

Definiamo **moto rettilineo uniforme** un moto unidimensionale in cui la velocità è costante e l'accelerazione è nulla. Riprendendo le formule scritte sopra possiamo scrivere:

$$v(t) = v$$

$$a(t) = 0$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v dt$$

Essendo  $v$  una costante raccogliamo e otteniamo:



$$x(t) = x_0 + v \int_{t_0}^t dt$$

Otteniamo quindi la **legge oraria del m.r.u.**:

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0)$$

Le **due formule** che descrivono il m.r.u. sono quindi:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v(t - t_0) \\ v(t) = v \end{cases}$$

## 2.2.4. Moto rettilineo uniformemente accelerato (m.r.u.a.)

Definiamo **moto rettilineo uniformemente accelerato** un moto in cui l'accelerazione è costante. Riprendendo le formule scritte sopra possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} a(t) &= a \\ v(t) &= v_0 + \int_{t_0}^t a dt \end{aligned}$$

Raccogliendo la costante  $a$  ricaviamo la dipendenza della velocità dal tempo:

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

Sviluppando ulteriormente:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt = x_0 + \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)] dt = x_0 + \int_{t_0}^t v_0 dt + \int_{t_0}^t a(t - t_0) dt \\ &= x_0 + v_0(t - t_0) + \left[ \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 \right]_{t_0}^t \end{aligned}$$

Da cui ricaviamo la **legge oraria del m.r.u.a.**:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2$$

Mettendo insieme quindi otteniamo le **tre formule** che descrivono il m.r.u.a.:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 \\ v(t) = v_0 + a(t - t_0) \\ a(t) = a \end{cases}$$

Vediamo un esempio che spesso ricorre di utilizzo di queste formule:

**Esempio 2.1.**

Supponiamo di avere un problema col seguente testo:

*“Un oggetto viene lanciato a velocità  $v_0$  verso l’alto da altezza  $x_0$ , calcolare l’altezza massima raggiunta  $x_{MAX}$  e il tempo che ci mette a raggiungerla  $t_{MAX}$ . Trovare in oltre il tempo impiegato dall’oggetto per arrivare a terra  $t_T$ ”*

Per risolvere il seguente problema poniamo  $t_0 = 0$  (il problema non dà informazioni riguardo al tempo). Scriviamo quindi le formule che ci servono:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v(t) = v_0 + a t \end{cases}$$

Indichiamo con  $g$  l'**accelerazione gravitazionale** ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ). Poiché l'accelerazione gravitazionale è diretta verso il basso mentre  $v_0$  è diretta verso l'alto scriviamo:

$$a = -g$$

Da cui:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v(t) = v_0 - g t \end{cases}$$

Il corpo raggiungerà l'altezza massima quando la velocità sarà nulla, imponiamo questa condizione:

$$\begin{aligned} v(t) &= 0 \\ v_0 - g t &= 0 \\ t &= \frac{v_0}{g} = t_{MAX} \end{aligned}$$

Abbiamo ricavato il primo risultato. Sostituiamo quindi il tempo nella legge oraria e otteniamo:

$$x_{MAX} = x_0 + v_0 t_{MAX} - \frac{1}{2} g t_{MAX}^2$$

Per rispondere alla terza richiesta del problema ci è sufficiente imporre  $x(t) = 0$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \\ x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 &= 0 \\ t_T &= \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2hg}}{g} \end{aligned}$$

Non consideriamo il risultato dato da:

$$t_T = \frac{v_0 - \sqrt{(v_0^2 + 2hg)}}{g}$$

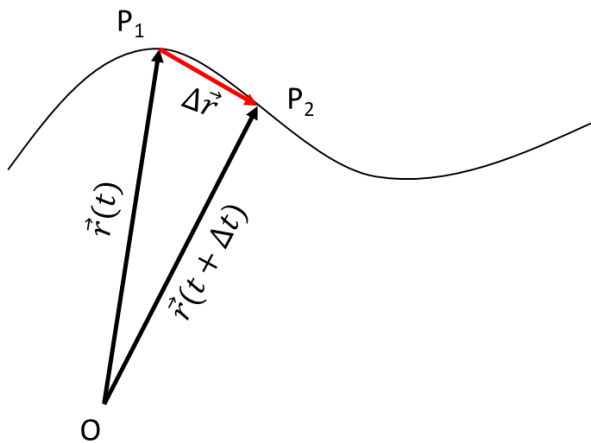
Che ha senso matematico ma non fisico.

## 2.2.5. Il moto nel piano

Possiamo estendere i discorsi fatti precedentemente riguardo a velocità e accelerazione per i moti nel piano. Come abbiamo detto prima la velocità descrive la variazione della posizione nel tempo. Chiamiamo  $\Delta\vec{r}$  il vettore che descrive lo spostamento del punto materiale nello spazio in un intervallo di tempo  $\Delta t$ . Possiamo scrivere:

$$\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta\vec{r}$$

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta\vec{r}$$



Riprendendo quindi la formula della velocità media scriviamo:

$$\vec{v}_M = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Facendo tendere quindi  $\Delta t \rightarrow 0$  otteniamo:

$$\vec{v}_{ist} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Il vettore  $\vec{v}_{ist}$  è un vettore **tangente alla traiettoria in ogni istante di tempo**. Studiando invece l'accelerazione abbiamo che:

$$\vec{a}_M = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_{ist} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Per ricavare la derivata di un vettore è sufficiente scomporlo nei suoi componenti lungo gli assi del sistema di riferimento:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$$

Utilizziamo la formula della derivata del prodotto:

$$\vec{v}_{ist} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}_x \frac{d}{dt}x(t) + x(t) \frac{d\vec{u}_x}{dt} + \vec{u}_y \frac{d}{dt}y(t) + y(t) \frac{d\vec{u}_y}{dt}$$

Essendo  $\vec{u}_x$  e  $\vec{u}_y$  costanti nel tempo le loro derivate sono nulle, da cui la **velocità istantanea**:

$$\vec{v}_{ist} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}_x \frac{d}{dt}x(t) + \vec{u}_y \frac{d}{dt}y(t) = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y$$

Per calcolare l'**accelerazione istantanea** procediamo allo stesso modo:

$$\vec{a}_{ist} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{u}_x + \frac{dv_y}{dt} \vec{u}_y = \frac{d}{dt} \left[ \frac{dx}{dt} \right] \vec{u}_x + \frac{d}{dt} \left[ \frac{dy}{dt} \right] \vec{u}_y$$

Da cui:

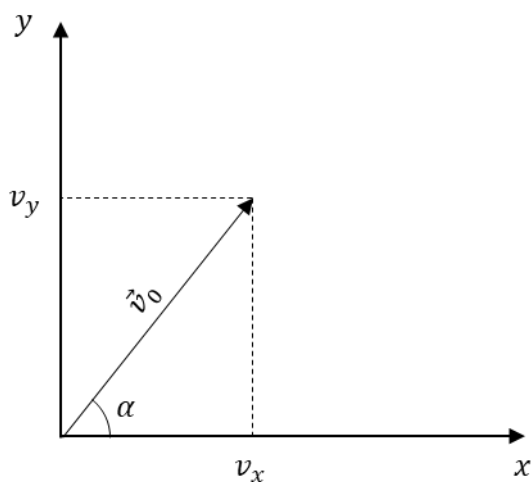
$$\vec{a}_{ist} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{u}_y$$

Un modo di studiare i moti nello spazio è quello di scomporli lungo gli assi del sistema di riferimento e studiare separatamente le due componenti del moto.

## 2.2.6. Il moto parabolico

Uno dei moti principali nello spazio è il **moto parabolico**. Se un oggetto è lanciato nel piano a un determinato angolo  $\alpha$  in presenza di un'accelerazione gravitazionale, esso seguirà una traiettoria parabolica.

Consideriamo un punto materiale che viene lanciato a velocità  $v_0$  con angolo  $\alpha$  rispetto all'asse  $x$ . Scriviamo subito:



$$v_x = |\vec{v}_0| \cdot \cos(\alpha)$$

$$v_y = |\vec{v}_0| \cdot \sin(\alpha)$$

Possiamo ora studiare i due moti separatamente. Lungo l'asse  $x$  il corpo non è soggetto ad alcuna accelerazione quindi si muoverà di moto rettilineo uniforme. Lungo l'asse  $y$  invece il corpo è soggetto ad accelerazione costante (sulla terra  $g$ ) verso il basso. Possiamo quindi scrivere la **legge oraria generale del moto parabolico**

combinando le informazioni che abbiamo per ora:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v(t - t_0) \\ y(t) = y_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \end{cases}$$

Quando scriviamo queste leggi orarie dobbiamo essere coerenti con la scelta dei segni da utilizzare. Nel caso del punto materiale in figura (assumendo che l'accelerazione gravitazionale sia  $g$ ) la legge oraria sarà:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) \cdot \cos(\alpha) \\ y(t) = y_0 + v_0(t - t_0) \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \end{cases}$$

Notiamo inoltre che:

$$\alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

Vediamo ora come ricavare alcune informazioni utili sul moto parabolico (per semplicità considereremo  $t_0 = 0$  e  $x_0 = 0$ ):

### ***Traiettoria del moto parabolico***

Abbiamo precedentemente detto che la legge oraria di un moto è data da una formula del tipo:

$$f(x, y) = 0$$

Per ricavare la traiettoria del moto parabolico è sufficiente ricavare la variabile  $t$  nella legge oraria da una delle due equazioni e sostituirla nell'altra. Ricaviamo  $t$  dalla prima equazione:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \cos(\alpha) \\ t &= \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \end{aligned}$$

Sostituiamo nella seconda:

$$\begin{aligned} y(t) &= v_0 t \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2 \\ y(x) &= v_0 \sin(\alpha) \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} \end{aligned}$$

Da cui la **traiettoria**:

$$y(x) = \tan(\alpha) x - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)}$$

### ***Gittata***

Con **gittata** si intende la quantità di spazio orizzontale percorso dal punto materiale dal momento del lancio fin quando non tocca terra. Ciò equivale a dire trovare  $x$  per cui:

$$y(x) = 0$$

Procediamo coi calcoli:

$$\tan(\alpha) x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} = 0$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{1}{2} g \frac{x}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} = 0$$

Da cui la formula della gittata:

$$x = \frac{2v_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g}$$

Notiamo che la gittata è massima per  $\alpha = 45^\circ$ . Alternativamente la gittata può essere trovata calcolando il tempo che il punto materiale impiega a tornare a terra per poi sostituirlo nella legge oraria del moto sull'asse  $x$ .

### ***Altezza massima raggiunta***

Possiamo procedere a calcolare l'altezza massima raggiunta come per l'ESEMPIO 2.1 studiando il moto lungo l'asse  $y$ . In alternativa notiamo che il punto materiale raggiunge l'altezza a metà della gittata, ossia per:

$$x = \frac{v_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g}$$

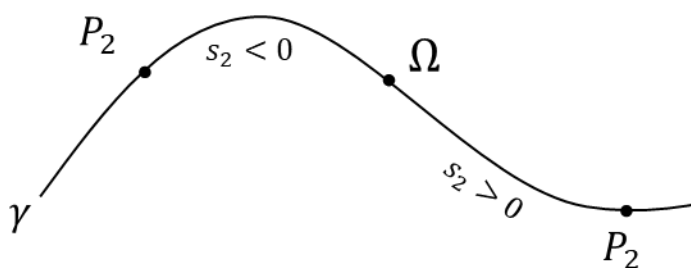
Sostituendo nella formula della traiettoria:

$$y_{MAX} = \tan(\alpha) \left[ \frac{v_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g} \right] - \frac{1}{2} g \frac{\left[ \frac{v_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g} \right]^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)}$$

$$y_{MAX} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g}$$

## **2.2.7. Coordinate intrinseche**

Conoscendo la traiettoria di un punto materiale posso individuarne la posizione supponendo di rettificare la curva, trasformandola in una successione di segmenti



infinitesimi.

Vediamo ora la definizione di **ascissa curvilinea**. Consideriamo quindi sulla traiettoria  $\gamma$  un punto  $\Omega$  che chiameremo **origine**. Ad ogni punto  $P$  sulla traiettoria assoceremo un

numero  $s$  detto **ascissa curvilinea**, il cui modulo fornisce la lunghezza dell'arco rettificato  $\Omega P$ . Il segno è definito positivo rispetto al verso della traiettoria.

Usando l'ascissa curvilinea l'equazione vettoriale del moto diventa:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(s) \\ s = s(t) \end{cases}$$

La prima equazione può essere esplicitata scomponendo il vettore lungo gli assi, ottenendo quindi:

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ s = s(t) \end{cases}$$

Per comprendere meglio possiamo vedere un esempio:

### Esempio 2.2.

Consideriamo un punto che si muove su una traiettoria circolare di equazione:

$$\gamma: x^2 + y^2 = R^2$$

Ricordando le proprietà trigonometriche avremo quindi che le coordinate di un punto  $P$  sulla circonferenza saranno:

$$\begin{aligned} x &= R \cos \alpha \\ y &= R \sin \alpha \end{aligned}$$

Ricordando la definizione di angolo ( $\theta = s/R$ ), possiamo scrivere il variare dell'angolo in funzione del tempo:

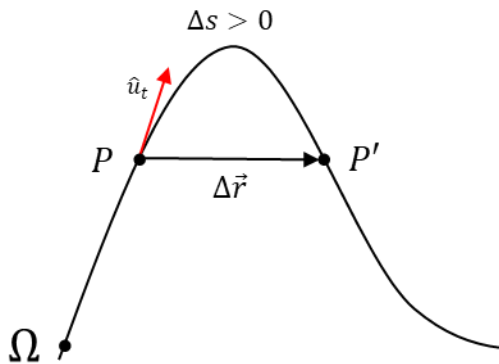
$$\theta(t) = \frac{s(t)}{R}$$

Chiameremo  $\alpha(t)$  **velocità angolare** (spesso indicata con  $\omega$ ). Sostituendo nelle due equazioni scritte sopra otteniamo la legge oraria in coordinate intrinseche:

$$\begin{cases} x = R \cos \left( \frac{s(t)}{R} \right) \\ y = R \sin \left( \frac{s(t)}{R} \right) \\ \theta(t) = \frac{s(t)}{R} \end{cases}$$

Queste informazioni torneranno utili nello studio dei moti circolari.

## Velocità e accelerazione in coordinate intrinseche



Allo stesso modo è possibile calcolare la velocità in coordinate curvilinee. Procediamo come fatto in precedenza facendo tendere l'intervallo tra le due misurazioni a zero, il che equivale a dire che:

$$P' \rightarrow P$$

Il vettore  $\Delta \vec{r} = \overrightarrow{PP'}$ , che per  $\Delta t$  finiti ha direzione secante ai due punti, tende quindi ad avere direzione parallela al versore  $\hat{u}_t$  tangente alla traiettoria. La corda  $\overline{PP'}$  tende quindi a diventare l'arco  $PP'$ . Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned}\lim_{P' \rightarrow P} \Delta \vec{r} &= d\vec{r} \\ \lim_{P' \rightarrow P} |\Delta \vec{r}| &= |d\vec{r}| = ds \\ \lim_{P' \rightarrow P} \Delta \vec{r} &= ds \cdot \hat{u}_t\end{aligned}$$

Ricordando che  $P \rightarrow P'$  per  $\Delta t \rightarrow 0$ , procediamo quindi per il solito calcolo della velocità istantanea e otteniamo:

$$v_{ist} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_t$$

Il vettore velocità sarà quindi sempre tangente alla traiettoria (il modulo sarà positivo se il punto materiale si muove nel verso della traiettoria, negativo nell'altro caso).

Allo stesso modo possiamo ricavare l'accelerazione:

$$\vec{a}_{ist} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v(t)\hat{u}_t) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + \frac{d\hat{u}_t}{dt}v$$

## Il problema inverso

Nota la quantità scalare  $v(t)$  possiamo ricostruire  $s(t)$ , conoscendo poi la direzione del vettore  $\hat{u}_t$  ricaviamo la traiettoria  $\vec{r}$ :

$$s = s_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt$$

Al tempo  $t$  il punto materiale avrà percorso uno spazio pari a:

$$\Delta s = \int_{t_0}^t |v(t)| dt$$

## Derivata di un vettore

Nell'equazione dell'accelerazione compare il termine:



$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} v$$

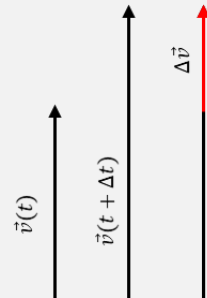
Questo termine influisce sull'accelerazione e può essere scritto in modo esplicito. Prima vediamo però come si calcola la derivata di un vettore:

### Esempio 2.3.

Se un vettore  $\vec{v}(t)$  non cambia la sua direzione è chiaro che il vettore derivata

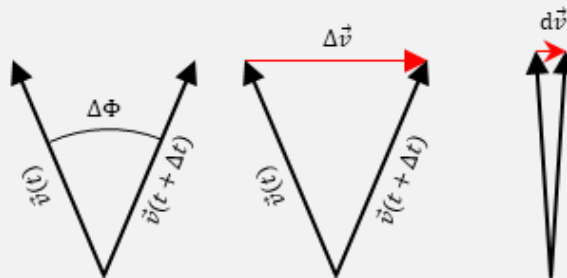
$$\frac{d\vec{v}}{dt}$$

mantiene la direzione mentre. Invece verso e modulo dipendono dalla variazione del modulo di  $\vec{v}(t)$ . Nell'equazione dell'accelerazione ciò corrisponde al primo termine.



### Esempio 2.4.

Se un vettore  $\vec{v}$  mantiene modulo costante ma cambia la sua direzione, il vettore derivata  $\frac{d\vec{v}}{dt}$

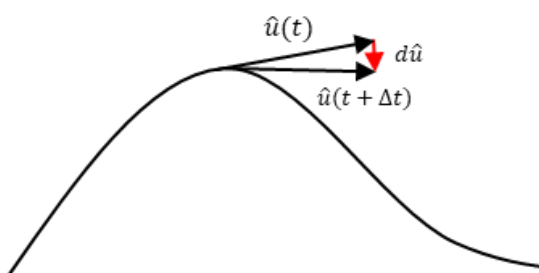


è diretto (calcolando la derivata per  $\Delta t \rightarrow 0$ , con  $\Delta\Phi \rightarrow 0$ ) perpendicolarmente al vettore  $\vec{v}(t)$ . Questo corrisponde al caso della derivata del versore  $\frac{d\hat{u}_t}{dt}$  che compare nel secondo termine dell'espressione di  $\vec{a}$ .

## Cerchio osculatore

Calcoliamo quindi il termine:

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt}$$



Come detto precedentemente, questo termine corrisponde alla derivata del versore tangente alla traiettoria. Un versore è caratterizzato da un modulo costante pari a 1, pertanto l'unica cosa che può variare è la direzione, come nel caso dell'ESEMPIO 2.4.

Possiamo quindi procedere coi calcoli. Per  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\Delta \hat{u}_t \rightarrow d\hat{u}_t$$

Inoltre,  $\Delta \hat{u}_t$  tende a essere perpendicolare a  $\hat{u}_t$ , ovvero parallelo a  $\hat{u}_n$  (vedere FIGURA A). Abbiamo quindi trovato la direzione del vettore derivata:

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} \parallel \hat{u}_n$$

Calcoliamo ora il modulo. Per farlo consideriamo due versori  $\hat{u}_t(t)$  e  $\hat{u}_t(t + \Delta t)$ . Il vettore  $\Delta \hat{u}_t$  avrà modulo:

$$|\Delta \hat{u}_t| = 2 \underbrace{|\hat{u}_t|}_{=1} \left[ \text{sen} \left( \frac{\Delta \Phi}{2} \right) \right] = 2 \left[ \text{sen} \left( \frac{\Delta \Phi}{2} \right) \right]$$

Per trovarla abbiamo lavorato sul triangolo isoscele con lati  $\hat{u}_t(t)$  e  $\hat{u}_t(t + \Delta t)$  e con angolo compreso tra di essi pari a  $\Delta \Phi$ . Facciamo tendere  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\left| \frac{d\hat{u}_t}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \hat{u}_t}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \text{sen} \left( \frac{\Delta \Phi}{2} \right)}{\Delta t} \stackrel{\rightarrow 0}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \frac{\Delta \Phi}{2}}{\Delta t} = \frac{d\Phi}{dt}$$

FIGURA A

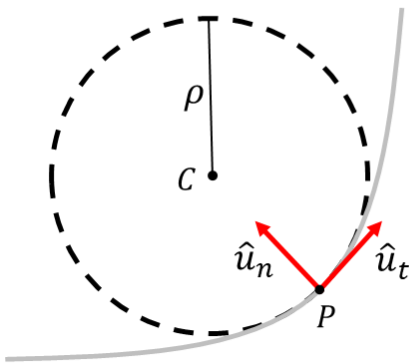
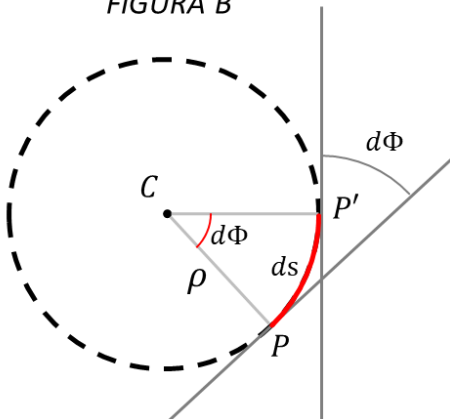


FIGURA B



Possiamo quindi concludere che:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{u}_t}{\Delta t} = \frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} \hat{u}_n \quad (1)$$

Per esplicitare meglio ci si può affidare al concetto di **cerchio osculatore**. Costruiamo la circonferenza tangente alla traiettoria in  $P$ . Chiamiamo **raggio osculatore** ( $\rho$ ) il raggio di questa circonferenza mentre  $1/\rho$  è detta **curvatura**. Ora, considerando la FIGURA B e che l'angolo  $d\Phi$  tra  $\hat{u}_t(t)$  e  $\hat{u}_t(t + \Delta t)$  è equivalente all'angolo al centro del cerchio osculatore che sottende l'arco  $ds$ , possiamo scrivere:

$$d\Phi = \frac{ds}{\rho}$$

Sostituendo questo risultato nell'equazione (1) otteniamo:

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt} \hat{u}_n$$

### Espressione finale dell'accelerazione

Possiamo quindi, in base a quello che abbiamo scritto prima, ricavare la formula esplicita dell'accelerazione:

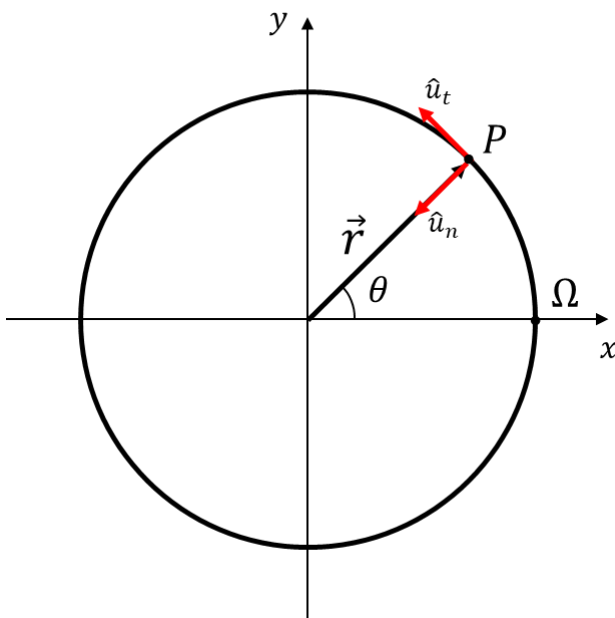
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \hat{u}_t + v(t) \frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{dv}{dt} + v(t) \frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt} \hat{u}_n = \frac{dv}{dt} \hat{u}_t + \frac{v(t)^2}{\rho} \hat{u}_n$$

Il termine  $\frac{dv}{dt} \hat{u}_t$  è detto **accelerazione tangenziale** ed è responsabile della variazione del **modulo** delle velocità.

Il secondo termine  $\frac{v(t)^2}{\rho} \hat{u}_n$  è detto **accelerazione normale** o **centripeta** ed è responsabile della variazione della **direzione** e del **verso** della velocità.

Vediamo quindi che ogni spostamento che avviene su una traiettoria curva è un moto di tipo accelerato. Infatti, il termine  $1/\rho$  è diverso da zero ed è finito, per cui deve esistere un termine di accelerazione normale.

### 2.2.8. Il moto circolare



Vediamo ora il **moto circolare** in ascisse curvilinee. Per farlo consideriamo una circonferenza e un sistema di riferimento. Prendiamo come origine il punto  $\Omega$ .

Per scrivere la legge oraria del moto iniziamo dallo scrivere:

$$s(t) = \theta(t) \cdot R$$

$$\theta(t) = \frac{s(t)}{R}$$

Possiamo quindi scrivere il vettore  $\vec{r}$  in funzione dell'arco  $s$ :

$$\vec{r}(s) = R \cos\left(\frac{s}{R}\right) \hat{u}_x + R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \hat{u}_y$$

Unendo le due equazioni otteniamo la legge oraria del moto in coordinate intrinseche:

$$\begin{cases} \vec{r}(s) = R \cos\left(\frac{s(t)}{R}\right) \hat{u}_x + R \sin\left(\frac{s(t)}{R}\right) \hat{u}_y \\ s(t) = \theta(t) \cdot R \end{cases}$$

**Definizione 2.5.** Chiamiamo **sistema di coordinate polari** un sistema di coordinate bidimensionali nel quale ogni punto del piano è identificato da un angolo e da una distanza da un punto fisso detto polo. Un generico punto  $P$  avrà coordinate:

$$P = (\theta, R)$$

### **La velocità nel moto circolare**

Per calcolare la velocità seguiamo il procedimento per il calcolo della velocità in coordinate intrinseche:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_t = v \hat{u}_t$$

Lo scalare  $v_t$  viene detto **velocità tangenziale**.

Risulta spesso anche utile calcolare la **velocità angolare**, ossia l'angolo percorso in un determinato intervallo di tempo  $\Delta t$ . Per calcolare la velocità angolare istantanea  $\omega$  procediamo come al solito:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{s}{R} \right) = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} v$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Il vettore  $\vec{\omega}$  è un vettore perpendicolare al piano di rotazione. In particolare:

- è **uscente** dal piano se la rotazione avviene in **senso antiorario**
- è **entrante** nel piano se la rotazione avviene in **senso orario**

Da ciò derivano la **direzione** e il **verso** della velocità tangenziale:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Vediamo inoltre che:

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}| |\vec{r}| \underbrace{\sin(\alpha)}_{=1} = \omega r$$

Facendo l'analisi dimensionale otteniamo che:

$$[\omega] = \frac{[v]}{[R]} = \frac{\frac{m}{s}}{m} = \frac{rad}{s}$$

### **L'accelerazione nel moto circolare**

Utilizziamo la formula dell'accelerazione in coordinate intrinseche trovata in precedenza (ricordando che  $\rho = R$ ):

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{u}_t + \frac{1}{R} v(t)^2 \hat{u}_n$$

$$\vec{a} = \frac{d^2 s}{dt^2} \hat{u}_t + \frac{v(t)^2}{R} \hat{u}_n$$

In termini di vettori possiamo quindi scrivere:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} =$$

Sappiamo che  $\omega$  cambia solo in modulo e che  $\vec{r}$  ha modulo costante, quindi:

$$= \underbrace{\frac{d\omega}{dt} \hat{u}_z}_{\vec{a}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times R \frac{d\hat{u}_r}{dt} =$$

Il termine  $\vec{a}$  viene detto **accelerazione angolare**. Continuando con i calcoli (ricordando la direzione del prodotto vettoriale):

$$\begin{aligned} &= \vec{a} \times R\hat{u}_r + \vec{\omega} \times R \frac{d\hat{u}_r}{dt} = \\ &= \alpha R \hat{u}_t + \vec{\omega} \times R \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{=\omega} \hat{u}_t = \\ &= \underbrace{\alpha R \hat{u}_t}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\omega^2 R \hat{u}_n}_{\vec{a}_n} \end{aligned}$$

Siamo riusciti quindi a esprimere l'accelerazione in termini di angoli. Osserviamo che  $\vec{a}$  ha la stessa direzione di  $\vec{\omega}$ . Se confrontiamo tra di loro le due equazioni troviamo per quanto riguarda l'accelerazione tangenziale:

$$\begin{cases} \vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \hat{u}_t = a_t \hat{u}_t \\ \vec{a}_t = \alpha R \hat{u}_t \end{cases} \rightarrow \boxed{a_t = \alpha R}$$

E per quanto riguarda l'accelerazione centripeta:

$$\begin{cases} \vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \hat{u}_z \\ \vec{a}_n = \omega^2 R \hat{u}_z \end{cases} \rightarrow \boxed{v = \omega R}$$

## 2.2.9. Il moto circolare uniforme

Se il vettore velocità nel moto circolare ha modulo costante nel tempo si parla di **moto circolare uniforme**. In simboli:

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= k \rightarrow \text{costante} \\ |\vec{\omega}| &= \frac{v}{R} = \frac{k}{R} \rightarrow \text{costante} \end{aligned}$$

Considerando accelerazione tangenziale e angolare otteniamo:

$$|\vec{a}_t| = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$|\vec{\alpha}| = \frac{d\omega}{dt} = 0$$

Da ciò possiamo ricavare la **legge oraria in coordinate intrinseche** (ricordando che  $s(t) = \omega R$ ):

$$\frac{ds}{dt} = v \rightarrow s = s_0 + \int_{t_0}^t v dt = s_0 + v(t - t_0)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \rightarrow \theta = \theta_0 + \int_{t_0}^t \omega dt = \theta_0 + \omega(t - t_0)$$

Riprendendo la formula dell'accelerazione in coordinate intrinseche, ricaviamo che:

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{a}_t}_{=0} + \vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \rightarrow \text{costante}$$

### ***Il periodo e la frequenza***

Il moto circolare uniforme è un **moto periodico**. Poiché il punto si muove su una circonferenza alla stessa velocità, dopo un tempo  $T$  costante il punto si ritroverà nella stessa posizione avendo percorso l'intera circonferenza. In simboli:

$$\theta(T) = 2\pi$$

$$\theta(t + T) = \theta(t) + 2\pi$$

Sostituendo nella legge oraria otteniamo:

$$\theta_0 + \omega(t - t_0 + T) = \theta_0 + \omega(t - t_0) + 2\pi$$

$$\omega(t - t_0) + \omega T = \omega(t - t_0) + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

Da ciò ricaviamo le formule di **periodo** e **frequenza**:

$$\boxed{\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ f &= \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \end{aligned}}$$

## **2.2.10. Moto circolare uniformemente accelerato**

Se il vettore accelerazione nel moto circolare ha modulo costante nel tempo si parla di **moto circolare uniformemente accelerato**. Possiamo quindi procedere con il calcolo simbolico:

$$|\vec{a}_t| = \frac{dv}{dt} = k \rightarrow \text{costante} \rightarrow v = v_0 + a_t(t - t_0)$$

$$|\vec{a}| = \frac{a_t}{R} = \frac{k}{R} \rightarrow \text{costante} \rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

Da qui possiamo ricavare le leggi orarie del moto:

$$s = s_0 + \int_{t_0}^t v(t)dt = s_0 + \int_{t_0}^t [v_0 + a_t t]dt = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_t(t - t_0)^2$$

Analogamente per  $\vec{\alpha}$ :

$$\theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \alpha(t - t_0)^2$$

Ricaviamo inoltre che la formula dell'accelerazione è:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t \hat{u}_t + \underbrace{\frac{v(t)^2}{R}}_{\substack{\text{non} \\ \text{costante}}} \hat{u}_n$$

Poiché la velocità cambia, il punto materiale impiegherà tempi diversi a percorrere l'intera circonferenza. Per tanto il moto circolare uniformemente accelerato non è armonico.

## 2.2.11. Il moto armonico

Il modello più semplice di moto oscillatorio, in cui si trascurano gli effetti degli attriti che smorzano l'oscillazione, è quello del **moto armonico**. Si chiama moto armonico il movimento che si ottiene proiettando su un diametro le posizioni di un punto materiale che si muove di moto circolare uniforme. La legge oraria del moto armonico è:

$$s(t) = A \cos(\underbrace{\omega_0 t + \varphi_0}_{\text{numero puro}})$$

A viene detta **ampiezza** del moto, mentre  $\varphi_0$  indica la **fase iniziale** del moto (ossia da dove parte il moto). Da questa legge oraria notiamo che il punto materiale si muoverà tra le posizioni  $-A$  e  $A$ .

Nel moto armonico  $\omega$  viene detta **pulsazione**. Notiamo inoltre che le seguenti scritture sono equivalenti:

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) = A \sin\left[\omega t + \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

### **Periodo e frequenza del moto armonico**

Il moto circolare è un moto periodico. Come per il moto circolare, il punto materiale torna nella posizione di partenza ogni  $T$  (detto **periodo**).

$$s(t) = s(t + T)$$

Perché l'equazione si valida, le due fasi devono differire di  $2\pi$ :

$$A\cos[\omega t + (\varphi_0 + 2\pi)] = A\cos[\omega(t + T) + \varphi_0]$$

$$\omega t + \varphi_0 + 2\pi = \omega(t + T) + \varphi_0$$

$$\omega t + 2\pi = \omega t + \omega T$$

Da cui:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

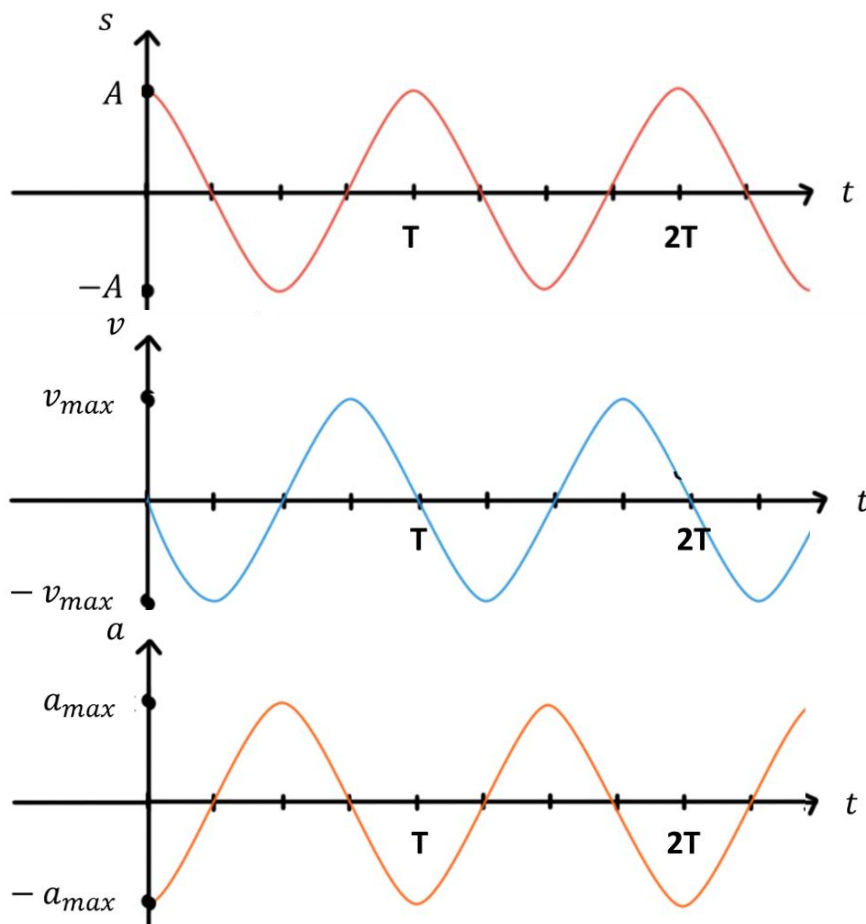
### ***Velocità e accelerazione***

Per calcolare velocità e accelerazione istantanea si procede come per gli altri moti:

$$v_{ist} = \frac{ds}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$a_{ist} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Costruendo i grafici di spazio, velocità e accelerazione in funzione del tempo otteniamo:





Considerando quindi le due equazioni:

$$\begin{aligned}s(t) &= A \cos(\omega t + \varphi_0) \\ a_{ist} &= -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)\end{aligned}$$

Otteniamo:

$$a_{ist} = -\omega^2 s(t)$$

Da cui l'**equazione del moto armonico**:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega^2 s(t) = 0$$

Per trovare ampiezza e fase iniziale scriviamo:

$$\begin{aligned}s_0 &= s(t=0) = A \cos(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = A \cos(\varphi_0) \\ v_0 &= v(t=0) = -A\omega \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = -A\omega \sin(\varphi_0)\end{aligned}$$

## 2.3. Dinamica

---

La **dinamica** è il ramo della meccanica che si occupa dello studio del moto dei corpi e delle sue cause o, in termini più concreti, delle circostanze che lo determinano e lo modificano.

Le basi concettuali della dinamica vengono poste per la prima volta in maniera sintetica e completa **da Isaac Newton** nel 1687 con la pubblicazione della sua opera fondamentale, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, anche se Newton le aveva recepite da studente nel saggio “Delle riflessioni” del gennaio 1665, manoscritto sul suo Waste Book

### 2.3.1. I tre principi della dinamica

Nella prima parte di quest'opera, dopo aver definito i concetti fondamentali di massa, quantità di moto, e forza, Newton introduce i **tre assiomi o leggi del moto**:

#### ***Il primo principio della dinamica***

Il primo principio della dinamica, anche detto principio di inerzia:

*Un corpo non soggetto a forze persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.*

Una **forza** è una grandezza fisica vettoriale che si manifesta nell'interazione reciproca tra due o più corpi.

## ***Il secondo principio della dinamica***

Il **secondo principio della dinamica**, anche detto **principio di azione e reazione**, afferma che:

*Il cambiamento di moto è proporzionale alla forza motrice risultante applicata, ed avviene lungo la linea retta secondo la quale la forza stessa è stata esercitata. Quindi:*

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Facciamo alcune precisazioni e commenti:

1. Il vettore  $\vec{a}$  ha stessa direzione e verso del vettore  $\vec{F}$
2. La massa  $m$  è detta **massa inerziale** ed è intrinseca alla materia. Ricaviamo quindi per analisi dimensionale:

$$[F] = [M] \cdot [a] = kg \frac{m}{s^2} = N$$

3. Vale che  $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$ . Ritroviamo quindi il principio di inerzia, che però non è un caso particolare del secondo principio ma un principio a sé stante
4. Risolvere l'equazione richiede la conoscenza a priori di  $\vec{a}$  che si può trovare sperimentalmente (descrizione dinamica della forza)
5. Se sul corpo agiscono  $n$  forze  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$  vale che:

$$\sum_i^n \vec{F}_i = m\vec{a}$$

6. Si definisce **quantità di moto** il vettore diretto nella direzione e verso della velocità:

$$\vec{p} = \vec{q} = m\vec{v}$$

7. Diciamo che il corpo è in equilibrio se:

$$\sum_i^n \vec{F}_i = 0$$

Ossia se è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme.

Dalla **quantità di moto** deriva la **definizione generale del secondo principio**:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Il primo termine dell'equazione è non nullo se la massa varia durante il moto (ad esempio un serbatoio che si svuota) e/o per velocità vicine alla velocità della luce (teoria della relatività).

## ***Il terzo principio della dinamica***

Il terzo principio della dinamica afferma che:

*Ad ogni azione corrisponde una reazione pari e contraria.*

Il che vuol dire che se un corpo  $A$  applica una forza  $\vec{F}_{AB}$  su un corpo  $B$ , allora il corpo  $B$  applica una forza  $\vec{F}_{BA}$  su  $A$  con modulo e direzioni uguali a quelli di  $\vec{F}_{AB}$  e verso opposto. In simboli:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

### 2.3.2. Forze a distanza

È una forza a distanza ad esempio la **forza peso**:

$$\vec{P} = m_g \vec{g}$$

Dove  $g$  è detta **accelerazione gravitazionale**, ha modulo  $|\vec{g}| = 9,81 \text{ m/s}^2$  e direzione perpendicolare al terreno. La massa  $m_g$  è detta **massa gravitazionale** o **intrinseca**. Con Newton si è arrivati a definire:

$$m = m_g$$

In fisica viene a volte utilizzata l'**unità ingegneristica**:

$$[P] = kgf$$

Dove  $P$  è la forza peso corrispondente alla forza a cui è sottoposta una massa di  $1 \text{ kg}$  sottoposta a  $g = 9,8066 \text{ m/s}^2$

### 2.3.3. Forze a contatto

Esistono due tipi di forze a contatto:

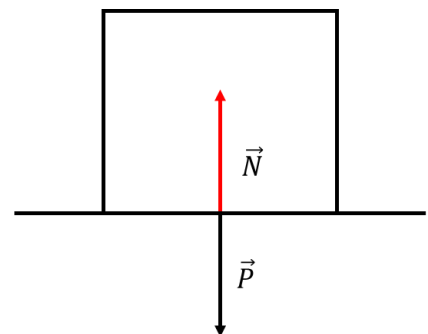
1. Forze  $\perp$  alla superficie di contatto
2. Forze  $\parallel$  alla superficie di contatto

Vediamo alcuni esempi:

#### ***La reazione vincolare***

Se un corpo è appoggiato a una superficie ed è in equilibrio, la forza che mantiene il corpo in equilibrio è detta reazione vincolare  $\vec{N}$ . Il vettore  $\vec{N}$  è perpendicolare alla superficie ed è applicata dalla superficie stessa al corpo.

La reazione vincolare non deriva dal secondo principio della dinamica in quanto le forze in gioco sono applicate tutte allo stesso corpo.



### Tensione della fune

Consideriamo un corpo appeso tramite una **fune ideale** (ossia priva di massa e inestensibile) al soffitto. Supponiamo che il sistema sia in equilibrio statico. Per il secondo principio della dinamica vale che:

$$\begin{aligned}\vec{P} + \vec{T}_1 &= 0 \\ \vec{P} &= -\vec{T}_1\end{aligned}$$

Ogni punto della fune è “tirato” dai punti adiacenti. Poiché il sistema è in equilibrio statico, per il secondo principio della dinamica vale:

$$\begin{aligned}\vec{T}_1 &= -\vec{T}_2 \\ |\vec{T}_1| &= |\vec{T}_2|\end{aligned}$$

Ricaviamo quindi che la tensione è in modulo uguale e costante in ogni punto della fune. Se cade l'ipotesi dell'equilibrio statico, quindi se  $a \neq 0$ , otteniamo che:

$$\begin{aligned}\vec{P} + \vec{T}_1 &= ma \\ \vec{T}_1 + \vec{T}_2 &= a \underbrace{m_{fune}}_{=0} = 0\end{aligned}$$

Anche in questo caso la tensione è in modulo uguale in ogni punto della fune, inoltre essendo la fune inestensibile **anche  $a$  è uguale** in ogni punto della fune.

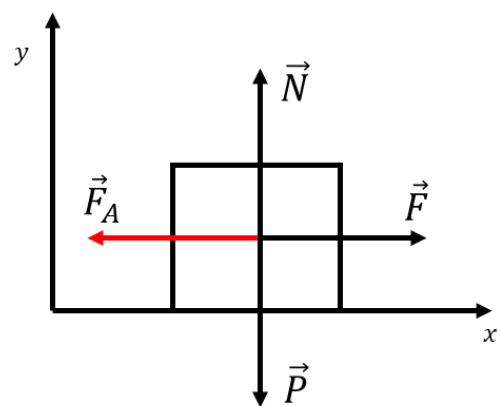
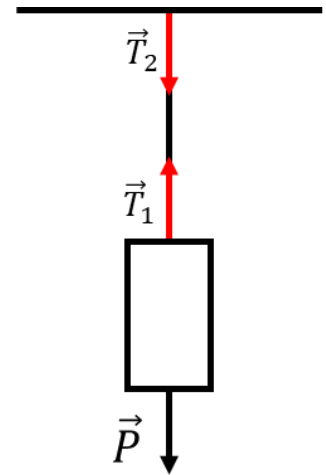
### Forza di attrito statico

La forza di attrito statico è una forza di contatto parallela alla superficie di contatto. La forza di attrito statico è una forza variabile che tende a mantenere il sistema fermo.

Supponiamo di avere un oggetto appoggiato su un piano e di applicare una forza  $\vec{F}$ , abbiamo quindi detto che la forza di attrito cercherà di mantenere il corpo fermo. Per il secondo principio otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}y: N - P &= 0 \\ x: F - F_A &= 0\end{aligned}$$

Sperimentalmente osserviamo che se la forza  $F$  raggiunge un certo valore allora il corpo inizia a muoversi. Ciò succede perché la forza di attrito statico è una forza variabile, ma



raggiunge un **valore massimo**. Questo valore dipende dalle due superfici a contatto ed è descritto dal **coefficiente di attrito statico**  $\mu_s$ :

$$|\vec{F}_A| \leq \mu_s N$$

L'analisi dimensionale ci dice che il coefficiente di attrito statico è un numero puro:

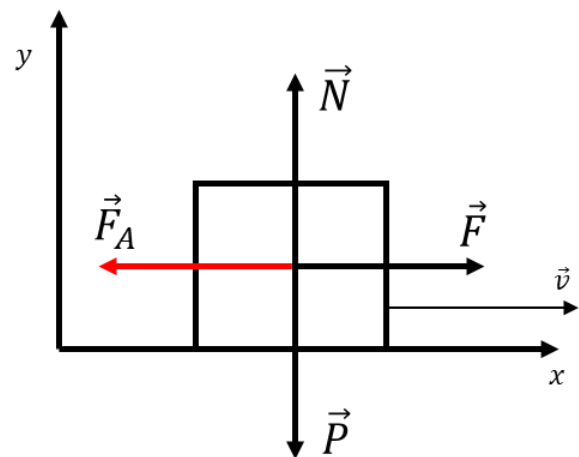
$$[\mu_s] = \frac{[F]}{[F]} = 1$$

Superato questo valore l'oggetto inizia quindi a muoversi. La forza di attrito statico inoltre non interviene più sul corpo una volta che il corpo ha iniziato a muoversi.

### **Forza di attrito dinamico**

La forza di attrito dinamico è una forza di contatto parallela alla superficie di contatto che si oppone, a differenza dell'attrito dinamico, al movimento di un corpo (ossia ha stessa direzione del vettore  $\vec{v}$  e verso opposto) e non alla forza applicata al corpo.

Se abbiamo quindi un corpo su una superficie che si muove a velocità  $v$  e applichiamo una forza  $\vec{F}$ , scrivendo le equazioni secondo il secondo principio otteniamo:



$$y: N - P = 0$$

$$x: F - F_A = ma$$

Come per l'attrito statico, la forza di attrito dinamico raggiunge un valore massimo che dipende dalla **costante di attrito dinamico**  $\mu_d$  (come il coefficiente di attrito statico  $\mu_d$  è un numero puro) che dipende dalla natura delle superfici a contatto:

$$|\vec{F}_A| \leq \mu_d N$$

Da ciò otteniamo che se:

$$|\vec{F}| > \mu_d N \Rightarrow a > 0$$

$$|\vec{F}| = \mu_d N \Rightarrow a = 0$$

$$|\vec{F}| < \mu_d N \Rightarrow a < 0$$

Sperimentalmente si osserva che tra due superfici:

$$\mu_d \leq \mu_s$$

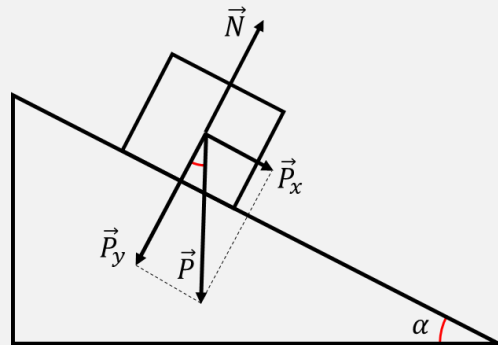
Diciamo che una superficie è:

- **liscia** se  $\mu_d = 0$  e  $\mu_s = 0$
- **scabra** se  $\mu_d \neq 0$  e  $\mu_s \neq 0$

Vediamo due esempi sulle forze in gioco nel **piano inclinato**:

### Esempio 2.5.

Consideriamo un piano inclinato liscio con un corpo di massa  $m$  appoggiato su di esso:



Scomponendo le forze parallelamente e perpendicolarmente al piano scriviamo le equazioni delle forze:

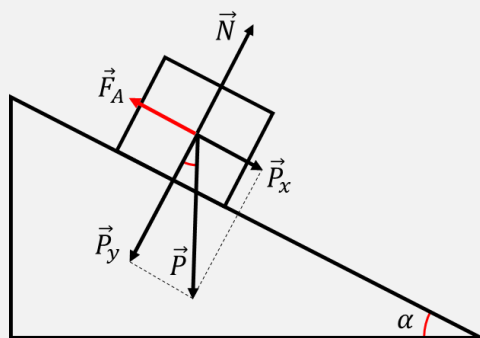
$$\begin{aligned} x: P_x &= ma \\ y: N - P_y &= 0 \end{aligned}$$

Notiamo che nessuna forza si oppone all'azione di  $\vec{P}_x$ , pertanto il corpo si muoverà con un'accelerazione pari a:

$$\begin{aligned} x: \vec{a}_x &= \frac{P_x}{m} = \frac{mg \sin \alpha}{m} = g \sin \alpha \\ y: \vec{a}_y &= 0 \end{aligned}$$

### Esempio 2.6.

Consideriamo ora lo stesso problema, ma con un piano inclinato scabro, quindi con  $\mu_s, \mu_d \neq 0$ .



Procediamo come prima scrivendo l'equazione delle forze:

$$x: P_x - F_A = ma$$

$$y: N - P_y = 0$$

Se imponiamo  $a = 0$  troviamo l'angolo massimo che permette al corpo di rimanere fermo:

$$P_x - F_A = 0$$

$$mg \sin \alpha - mg \mu_s \cos \alpha = 0$$

$$\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha = 0$$

$$\tan \alpha = \mu_s$$

Da cui troviamo il massimo valore di  $\alpha$  tale che il corpo resti fermo:

$$\alpha \leq \arctan(\mu_s)$$

### Esempio 2.7.

Considerando il problema precedente, se il corpo si sta muovendo a velocità  $v_0$  verso il basso, possiamo trovare l'accelerazione del corpo in funzione di  $\alpha$ :

$$P_x - F_A = ma$$

$$mg \sin \alpha - mg \mu_d \cos \alpha = ma$$

$$g \sin \alpha - g \mu_d \cos \alpha = a$$

Da cui:

$$a = g(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha) = 0$$

Notiamo quindi che  $\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha$  decide il valore e il segno dell'accelerazione:

$$\alpha > \arctan(\mu_d) \rightarrow a > 0$$

$$\alpha = \arctan(\mu_d) \rightarrow a = 0$$

$$\alpha < \arctan(\mu_d) \rightarrow a < 0$$

### Forza elastica (o di richiamo)

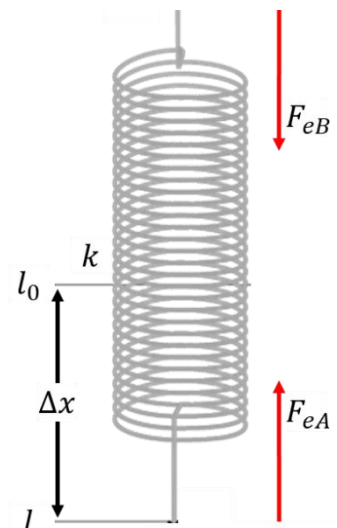
Se abbiamo un corpo attaccato ad esempio ad una molla ideale, esso sarà soggetto a una forza che viene determinata dalla **legge di Hooke**:

$$\vec{F}_e = -k \Delta x \hat{u}_x$$

Con **molla ideale** intendiamo una molla priva di massa. Abbiamo quindi che:

$$F_{eA} - F_{eB} = \underbrace{m}_{=0} a = 0$$

$$|\vec{F}_{eA}| = |\vec{F}_{eB}|$$



In una molla ideale quindi la forza elastica è in modulo uguale agli estremi della molla.

Facciamo alcune precisazioni sulla legge di Hooke:

- $\Delta x = (l - l_0)$  dove  $l_0$  è detta **lunghezza a riposo** e dipende dalla molla
- Il segno negativo indica che  $\vec{F}_e$  si oppone all'allungamento o alla compressione della molla
- $\hat{u}_x$  indica che  $\vec{F}_e$  ha direzione uguale all'allungamento della molla
- La **costante elastica**  $k$  dipende dalla molla. Facendo l'analisi dimensionale otteniamo che:

$$[k] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{N}{m}$$

La forza elastica viene detta forza di richiamo perché tende a spostare il corpo in modo da raggiungere la lunghezza a riposo della molla.

### 2.3.4. Molla ideale e moto armonico

Risulta interessante studiare la legge oraria di un corpo attaccato a una molla ideale appoggiato su un piano liscio. Per comodità consideriamo  $l_0$  come origine del nostro sistema di riferimento. Abbiamo quindi che:

$$\Delta x = (x - l_0) = x$$

Procediamo scrivendo le equazioni delle forze:

$$x: -kx = ma$$

$$y: N - P = 0$$

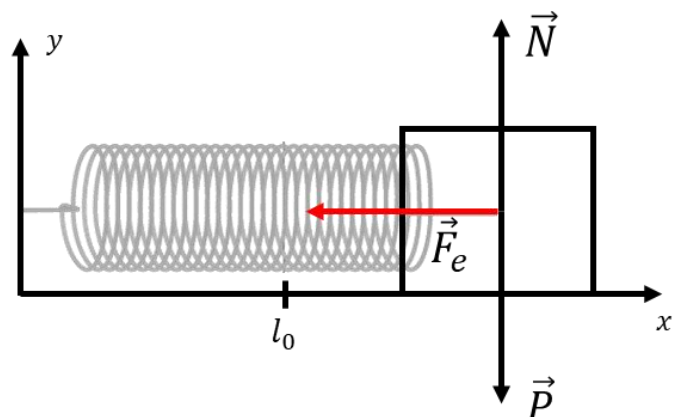
Concentriamoci sull'asse delle  $x$ , scriviamo quindi:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

Notiamo quindi la somiglianza con l'equazione del moto armonico:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega^2 s(t) = 0$$





Ricaviamo quindi **pulsazione** e **periodo**:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Possiamo a questo punto scrivere le equazioni del moto:

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) \\ a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

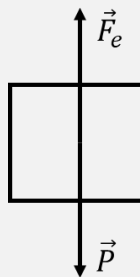
Da cui possiamo ricavare  $\varphi_0$  e  $A$ :

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 = A\cos(\varphi_0) \\ v(t=0) = v_0 = -A\sin(\varphi_0) \end{cases}$$

Vediamo un problema riguardo al moto di un corpo attaccato a una molla:

### Esempio 2.8.

Immaginiamo di avere un corpo appeso al soffitto tramite una molla con coefficiente elastico  $k$ . Il problema ci chiede, conoscendo  $k$  di trovare la massa in funzione dell'allungamento della molla  $\Delta x$ . Procediamo disegnando lo schema delle forze:



Scriviamo l'equazione delle forze (il corpo dovrà essere in equilibrio statico):

$$P - F_e = 0$$

$$mg - k\Delta x = 0$$

$$m = \frac{k\Delta x}{g}$$

### Esempio 2.9.

Il problema ora ci chiede di trovare l'ampiezza del moto se il corpo viene rilasciato quando la molla è allungata di  $\Delta x_0$  a tempo  $t_0 = 0$ . Per semplicità consideriamo il sistema di riferimento con origine in  $l_0$ . Abbiamo quindi che  $\Delta x = x$ .

Come prima, scriviamo l'equazione delle forze:

$$P - F_e = ma$$

$$mg - kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx - mg = 0$$

$$\frac{m}{k} \frac{d^2x}{dt^2} + \left(x - \frac{m}{k}g\right) = 0$$

Per comodità facciamo una sostituzione:  $X = x - \frac{m}{k}g$ , da cui otteniamo:

$$\frac{m}{k} \frac{d^2}{dt^2} \left(X + \frac{m}{k}g\right) + X = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(X + \frac{m}{k}g\right) + \frac{k}{m}X = 0$$

Da cui otteniamo:

$$X(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{mg}{k}$$

Il corpo oscillerà quindi attorno a  $\frac{mg}{k}$  che, guardando il problema precedente, risulta essere la posizione di equilibrio.

Conoscendo quindi  $x_0$  (e considerando che rilasciamo il corpo a  $t_0 = 0$  sappiamo che  $v(t_0) = v_0 = 0$ ) possiamo ricavare  $A$ :

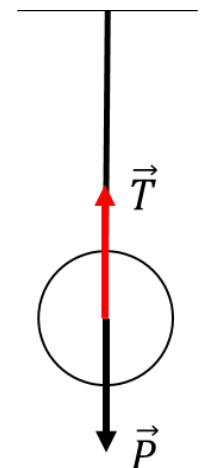
$$\begin{cases} x_0 = A \cos(\varphi_0) + \frac{mg}{k} \\ v_0 = -A \omega \sin(\varphi_0) \end{cases}$$

### 2.3.5. Il pendolo

Consideriamo ora un corpo appeso al soffitto con una fune ideale di lunghezza  $L$ . Nel caso in cui la fune è perpendicolare al terreno saremo in equilibrio. Le uniche forze in gioco sono in fatti la tensione della fune ideale e la forza peso:

$$T - P = 0$$

Pensiamo ora di prendere il corpo e inclinarlo in modo che la fune formi un angolo  $\theta$  con il soffitto (quindi con il terreno). Risulta comodo ora considerare un nuovo sistema di riferimento con origine sul corpo e con asse  $x$  e  $y$  rispettivamente perpendicolare e parallelo alla fune.



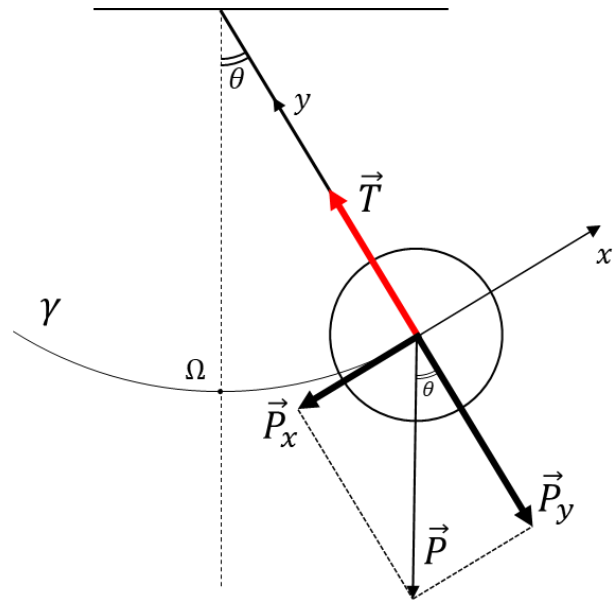
Essendo la fune ideale, il corpo sarà vincolato sulla traiettoria circolare  $\gamma$ . Per tanto risulta comodo ragionare in termini di **ascissa curvilinee**.

Per prima cosa scomponiamo il moto lungo gli assi del sistema di riferimento e scriviamo le equazioni delle forze:

$$\begin{aligned} x: & -P_x = ma_t \\ y: & T - P_y = ma_c \end{aligned}$$

Scriviamo esplicitamente:

$$\begin{aligned} x: & -mg\sin\theta = ma_t \\ y: & T - mg\cos\theta = ma_c \end{aligned}$$



Poiché lavoriamo in ascissa curvilinea possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} s(t) &= \theta(t) \cdot L \\ a_t &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(\theta \cdot L) = L \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned}$$

Lavorando su  $x$  quindi sostituiamo e otteniamo la legge oraria:

$$\begin{aligned} mL \frac{d^2\theta}{dt^2} + mg\sin\theta &= 0 \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta &= 0 \end{aligned}$$

### **Approssimazione a moto armonico**

Se lavoriamo con angoli piccoli (solitamente  $\theta < 8^\circ$ ), possiamo approssimare il seno:

$$\sin\theta \sim \theta$$

Con quest'approssimazione l'errore che otteniamo è intorno ai  $10^{-2} \text{ rad}$ . Sostituendo nella formula trovata prima otteniamo quindi che:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

Notiamo quindi che la formula ottenuta è nella forma dell'equazione del moto armonico. Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega(t) = -\theta_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha(t) = -\theta_0\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Con

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Sapendo che  $s(t) = \theta(t) \cdot L$  otteniamo che:

$$s(t) = \overbrace{\theta_0 L}^A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\frac{d\theta}{dt} L = v(t) = -\theta_0 L \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} L = a_t(t) = -\theta_0 L \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

### ***La tensione e l'accelerazione***

Abbiamo quindi visto cosa succede per l'accelerazione tangenziale. Consideriamo l'equazione su  $y$  per vedere il comportamento dell'accelerazione centripeta:

$$T - mg\cos\theta = m \frac{v^2}{L}$$

$$T = m \frac{[-\theta_0 L \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)]^2}{L} + mg\cos\theta$$

Se osserviamo cosa succede all'accelerazione quando:

- passa in un **punto di inversione**, ossia quando  $v = 0$ , otteniamo che:

$$T_{min} = mg \underbrace{\cos(\theta_{max})}_{\substack{\text{valore} \\ \text{minimo}}}$$

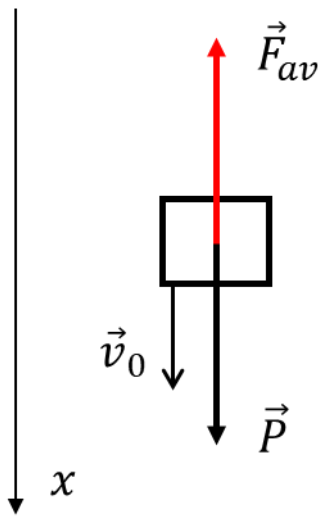
$$a_{t_{max}} = -mg \underbrace{\sin(\theta_{max})}_{\substack{\text{valore} \\ \text{massimo}}}$$

- passa per  $\Omega$ , ossia quando  $\theta = 0$ , sappiamo che:

$$a_t = -\frac{g}{L} \theta = 0$$

$$T_{max} = mg \underbrace{\cos\theta}_{\substack{=1 \\ \text{max}}} + \frac{\overbrace{v(t)^2}^{max}}{L}$$

### 2.3.6. L'attrito viscoso



Oltre alle due forme di attrito viste in precedenza, esiste un'altra forma di attrito chiamata **attrito viscoso**. Quando un corpo si muove all'interno di un fluido (liquido o gas) è soggetto ad una forza di attrito dovuta all'interazione del corpo con le molecole del fluido:

$$\vec{F}_{av} = -b\vec{v}$$

La costante  $b$  dipende dalla forma del corpo e dalla natura del fluido in cui il corpo si muove. L'unità di misura è:

$$[b] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{N}{\frac{m}{s}} = kg \frac{m}{s^2} \frac{s}{m} = \frac{kg}{s}$$

Scriviamo quindi l'equazione delle forze secondo il secondo principio della dinamica:

$$\begin{aligned} mg - F_{av} &= ma \\ mg - bv &= m \frac{dv}{dt} \\ \frac{dv}{dt} &= g - \frac{b}{m}v \end{aligned}$$

Chiamiamo il termine  $\frac{m}{b}$  è detto **costante di tempo** e viene spesso indicato con la lettera  $\tau$ . L'unità di misura è appunto:

$$[\tau] = \frac{kg}{\frac{kg}{s}} = s$$

Esplicitiamo quindi l'equazione che abbiamo scritto (considerando  $t_0 = 0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= g - \frac{v}{\tau} \\ dv &= \left(g - \frac{v}{\tau}\right) dt \\ \frac{dv}{g - \frac{v}{\tau}} &= dt \\ \left[ \frac{\ln\left(g - \frac{v}{\tau}\right)}{-\frac{1}{\tau}} \right]_{v_0}^v &= t \\ -\tau \left[ \ln\left(g - \frac{v}{\tau}\right) - \ln\left(g - \frac{v_0}{\tau}\right) \right] &= t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln \left[ \frac{g - \frac{v}{\tau}}{g - \frac{v_0}{\tau}} \right] &= -\frac{t}{\tau} \\ e^{\ln \left[ \frac{g - \frac{v}{\tau}}{g - \frac{v_0}{\tau}} \right]} &= e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \frac{g - \frac{v}{\tau}}{g - \frac{v_0}{\tau}} &= e^{-\frac{t}{\tau}} \\ g - \frac{v}{\tau} &= \left(g - \frac{v_0}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

Da cui otteniamo la **velocità in funzione del tempo**:

$$v(t) = g\tau - \tau \left( g - \frac{v_0}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

### ***Grafico della velocità***

A tempo  $t_0 = 0$ , abbiamo che:

$$v(t = 0) = g\tau - \tau \left( g - \frac{v_0}{\tau} \right) e^0 = g\tau - g\tau + \frac{\tau}{\tau} v_0 = v_0$$

Facendo invece tendere il tempo  $t \rightarrow \infty$  otteniamo:

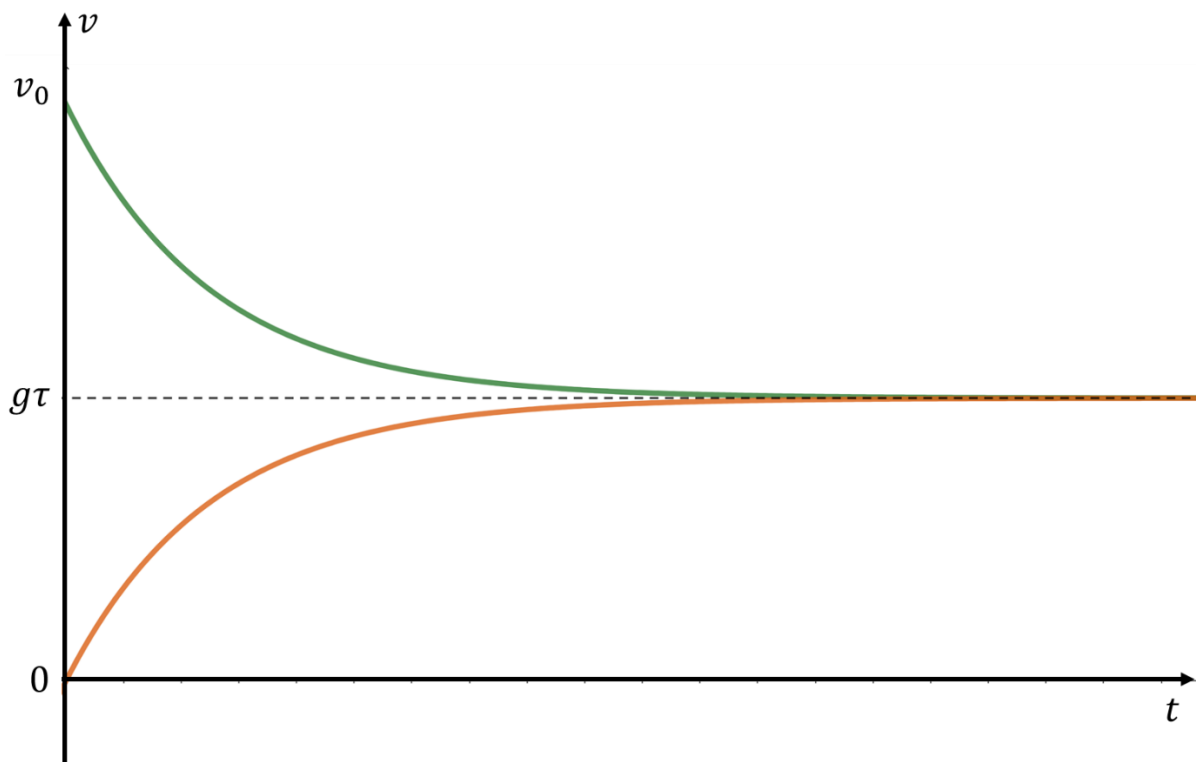
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ g\tau - \tau \left( g - \frac{v_0}{\tau} \right) \underbrace{e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\rightarrow 0} \right] = g\tau = g \frac{m}{b}$$

Se il corpo inizia da fermo (quindi  $v_0 = 0$ ), la forza di attrito viscoso è nulla per  $t = 0$  e aumenta con l'aumentare della velocità.

Se quindi:

- $v_0 > g\tau$  con l'aumentare del tempo il corpo rallenta fino a  $v = g\tau$
- $v_0 < g\tau$  con l'aumentare del tempo il corpo accelera fino a  $v = g\tau$

Riportando queste informazioni su un grafico velocità-tempo otteniamo una curva di questo tipo:



## Velocità limite

Se imponiamo il m.r.u. sul corpo otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}P - F_{av} &= 0 \\mg - bv_{lim} &= 0 \\v_{lim} &= g \frac{m}{b}\end{aligned}$$

che è il valore di  $v$  per  $t \rightarrow \infty$ . Concludiamo quindi che dopo un certo intervallo di tempo possiamo approssimare il moto del corpo a un moto rettilineo uniforme. Empiristicamente si osserva che:

- per  $t = 3\tau$  la variazione di velocità  $\Delta v \sim 5\%$
- per  $t = 5\tau$  la variazione di velocità  $\Delta v \sim 0\%$ . Dopo  $5\tau$  possiamo quindi approssimare il moto a un moto rettilineo uniforme

## La legge oraria

Vediamo ora la legge oraria del moto di un corpo soggetto ad attrito viscoso. Per semplificare i calcoli consideriamo  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$  e  $v_0 = 0$ . Utilizziamo l'operatore integrale per ricavare la legge oraria dalla velocità:

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t g\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) dt = g\tau t - \int_0^t g\tau e^{-\frac{t}{\tau}} dt = g\tau t + g\tau^2 \left[e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^t$$

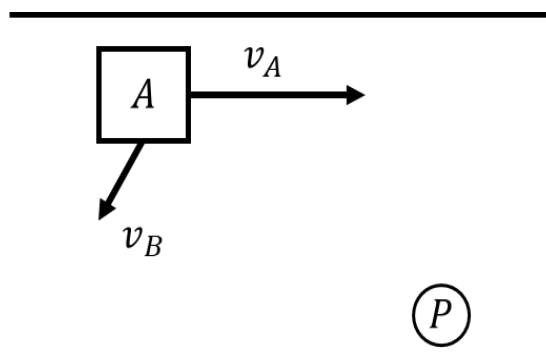
La **legge oraria** è quindi:

$$x(t) = g\tau t + g\tau^2(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1)$$

## 2.4. Moti relativi

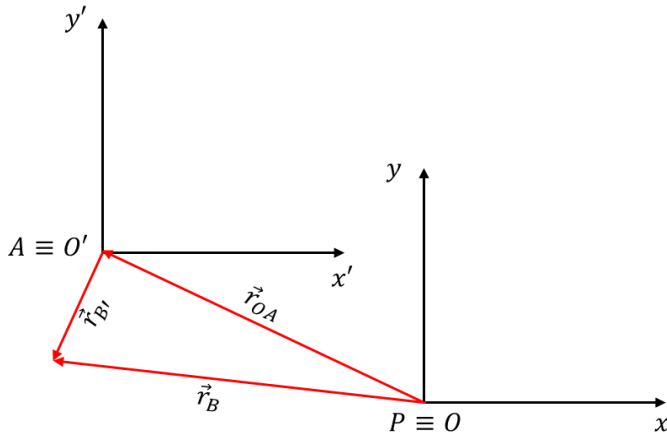
Per ora abbiamo sempre scelto il sistema di riferimento da utilizzare in modo da semplificare il più possibile lo studio del moto del corpo.

Ora immaginiamo invece di avere una macchina  $A$  che viaggia a velocità  $v_A$ . Il conducente della macchina lancia un oggetto  $B$  a velocità  $v_B$ . Il conducente della macchina osserva  $B$  allontanarsi dalla macchina a velocità  $v_B$  nella direzione in cui lo ha lanciato. Immaginiamo ora di osservare la scena dagli occhi di un passante  $P$  fermo sul marciapiede: cosa vediamo?



### 2.4.1. Sistemi che si muovono a velocità costante

Per studiare il moto di  $B$  agli occhi di  $P$ , disegniamo due sistemi di riferimenti: un sistema di riferimento **solidale a  $P$**  con origine  $O \equiv P$  e assi  $x$  e  $y$ ; un sistema di riferimento **solidale a  $A$**  con origine  $O' \equiv A$  e assi  $x'$  e  $y'$ .



Fissati i due sistemi di riferimenti, indichiamo con:

- $\vec{r}_B$  il vettore che indica la posizione di  $B$  rispetto a  $xOy$
- $\vec{r}_{OA}$  il vettore che indica la posizione di  $O'$  rispetto a  $xOy$
- $\vec{r}_{B'}$  il vettore che indica la posizione di  $B$  rispetto a  $x'O'y'$

A questo punto possiamo scrivere:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_{B'} + \vec{r}_{OA}$$

Da cui ricaviamo l'espressione della **velocità di  $B$  rispetto a  $P$**  derivando a destra e a sinistra:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_{B'}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{OA}}{dt}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B'} + \vec{v}_{OA}$$

Dove:

- $\vec{v}_B$  indica la velocità di  $B$  rispetto a  $P$
- $\vec{v}_{B'}$  indica la velocità di  $B$  rispetto a  $A$
- $\vec{v}_{OA}$  indica la velocità di  $O' \equiv A$  rispetto a  $P$

#### Generalizzazione

Possiamo quindi generalizzare le formule scritte sopra. Per ora considereremo sistemi di riferimento che si muovono a velocità costante (più avanti vedremo anche sistemi che accelerano). Otteniamo quindi la **legge oraria**:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{r}_{OO'}(t)$$

Con:

$$\vec{r} = r_x \hat{u}_x + r_y \hat{u}_y + r_z \hat{u}_z$$

$$\vec{r}' = r'_{x'} \hat{u}_{x'} + r'_{y'} \hat{u}_{y'} + r'_{z'} \hat{u}_{z'}$$



$$\vec{r}_{OO'} = r_{OO'_x} \hat{u}_x + r_{OO'_y} \hat{u}_y + r_{OO'_z} \hat{u}_z$$

Da cui ricaviamo la **velocità relativa in funzione del tempo** derivando:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}_{OO'}(t)}{dt}$$

Contando che la derivata di un versore statico ( $\hat{u}_x$ ,  $\hat{u}_y$  e  $\hat{u}_z$ ) o di un versore che trasla ( $\hat{u}_{x'}$ ,  $\hat{u}_{y'}$  e  $\hat{u}_{z'}$ ) è zero, otteniamo che:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dr_x}{dt} \hat{u}_x + \frac{dr_y}{dt} \hat{u}_y + \frac{dr_z}{dt} \hat{u}_z = \vec{v} \\ \frac{d\vec{r}'}{dt} &= \frac{dr'_{x'}}{dt} \hat{u}_{x'} + \frac{dr'_{y'}}{dt} \hat{u}_{y'} + \frac{dr'_{z'}}{dt} \hat{u}_{z'} = \vec{v}' \\ \frac{d\vec{r}_{OO'}}{dt} &= \frac{dr_{OO'_x}}{dt} \hat{u}_x + \frac{dr_{OO'_y}}{dt} \hat{u}_y + \frac{dr_{OO'_z}}{dt} \hat{u}_z = \vec{v}_{OO'} \end{aligned}$$

Da cui:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{OO'}$$

Derivando ulteriormente otteniamo **l'accelerazione relativa in funzione del tempo**:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{v}_{OO'}}{dt} \\ \underbrace{\frac{d}{dt}}_{\vec{a}} &= \underbrace{\frac{d}{dt}}_{\vec{a}'} + \underbrace{\frac{d}{dt}}_{\substack{=0 \\ \text{per Hp}}} \\ \vec{a} &= \vec{a}' \end{aligned}$$

## 2.4.2. Moto relativo generale

Se invece uno dei due sistemi si muove e/o ruota (la rotazione avviene a velocità costante), la **legge oraria** di un punto materiale rispetto a un osservatore esterno rimane la stessa descritta sopra:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{r}_{OO'}(t)$$

Con:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r_x \hat{u}_x + r_y \hat{u}_y + r_z \hat{u}_z \\ \vec{r}' &= r'_{x'} \hat{u}_{x'} + r'_{y'} \hat{u}_{y'} + r'_{z'} \hat{u}_{z'} \\ \vec{r}_{OO'} &= r_{OO'_x} \hat{u}_x + r_{OO'_y} \hat{u}_y + r_{OO'_z} \hat{u}_z \end{aligned}$$

Se calcoliamo la velocità in funzione del tempo derivando la legge oraria rispetto al tempo otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dr_x}{dt}\hat{u}_x + \frac{dr_y}{dt}\hat{u}_y + \frac{dr_z}{dt}\hat{u}_z = \vec{v} \\ \frac{d\vec{r}_{oo'}}{dt} &= \frac{dr_{oo'x}}{dt}\hat{u}_x + \frac{dr_{oo'y}}{dt}\hat{u}_y + \frac{dr_{oo'z}}{dt}\hat{u}_z = \vec{v}_{oo'} \\ \frac{d\vec{r}'}{dt} &= \left[ \frac{dr'_{x'}}{dt}\hat{u}_{x'} + \frac{dr'_{y'}}{dt}\hat{u}_{y'} + \frac{dr'_{z'}}{dt}\hat{u}_{z'} \right] + \underbrace{\left[ r'_{x'} \frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + r'_{y'} \frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + r'_{z'} \frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} \right]}_{\neq 0 \text{ perchè i versori ruotano}}\end{aligned}$$

Poiché il sistema di riferimento ruota, le derivate dei versori non sono nulle.

Per il calcolo della derivata di versori che ruotano ci si affida alla **formula di Poisson**:

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\perp = \omega\hat{u}_\perp$$

Ricordando che il vettore  $\vec{\omega}$  è un vettore perpendicolare al piano di rotazione possiamo scrivere:

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{u}$$

Inoltre, considerando che i versori  $\hat{u}_{x'}$ ,  $\hat{u}_{y'}$  e  $\hat{u}_{z'}$  sono rigidamente legati l'uno all'altro, la rotazione di uno corrisponde alla rotazione degli altri due con la medesima velocità angolare

Otteniamo quindi che:

$$\begin{aligned}r'_{x'} \frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + r'_{y'} \frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + r'_{z'} \frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} &= r'_{x'}(\vec{\omega} \times \hat{u}_{x'}) + r'_{y'}(\vec{\omega} \times \hat{u}_{y'}) + r'_{z'}(\vec{\omega} \times \hat{u}_{z'}) = \\ \omega \times (r'_{x'}\hat{u}_{x'} + r'_{y'}\hat{u}_{y'} + r'_{z'}\hat{u}_{z'}) &= \vec{\omega} \times \vec{r}'\end{aligned}$$

Da cui:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' + (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Quindi otteniamo la **velocità in funzione del tempo**:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}' + (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{v}'_{oo} \\ \vec{v} - \vec{v}' &= \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{v}'_{oo}}_{\text{velocità di trascinamento}}\end{aligned}$$

## Accelerazione relativa

Procediamo col calcolo dell'accelerazione derivando la velocità:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}') + \frac{d\vec{v}'_{oo}}{dt}$$

(1)      (2)                      (3)                      (4)

Analizziamo un termine dell'equazione alla volta:

1. Poiché i versori traslano senza ruotare e cambiare modulo otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d}{dt}(v_x\hat{u}_x + v_y\hat{u}_y + v_z\hat{u}_z) = \frac{d}{dt}v_x\hat{u}_x + \frac{d}{dt}v_y\hat{u}_y + \frac{d}{dt}v_z\hat{u}_z = \\ &= \frac{dv_x}{dt}\hat{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\hat{u}_y + \frac{dv_z}{dt}\hat{u}_z + \underbrace{\left(\frac{d\hat{u}_x}{dt}v_x + \frac{d\hat{u}_y}{dt}v_y + \frac{d\hat{u}_z}{dt}v_z\right)}_{=0} = \vec{a}\end{aligned}$$

2. In questo termine ricompaiono i versori che ruotano:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}'}{dt} &= \frac{d}{dt}(v'_{x'}\hat{u}_{x'} + v'_{y'}\hat{u}_{y'} + v'_{z'}\hat{u}_{z'}) = \\ &\left[\frac{dv'_{x'}}{dt}\hat{u}_{x'} + \frac{dv'_{y'}}{dt}\hat{u}_{y'} + \frac{dv'_{z'}}{dt}\hat{u}_{z'}\right] + \left[v'_{x'}\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + v'_{y'}\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + v'_{z'}\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}\right] \\ &\quad (a) \qquad \qquad \qquad (b)\end{aligned}$$

- a. Questo termine rappresenta l'accelerazione del punto rispetto al sistema in movimento:

$$\frac{dv'_{x'}}{dt}\hat{u}_{x'} + \frac{dv'_{y'}}{dt}\hat{u}_{y'} + \frac{dv'_{z'}}{dt}\hat{u}_{z'} = \vec{a}'$$

- b. Utilizziamo la formula di Poisson:

$$\begin{aligned}v'_{x'}\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + v'_{y'}\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + v'_{z'}\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} &= v'_{x'}(\vec{\omega} \times \hat{u}_{x'}) + v'_{y'}(\vec{\omega} \times \hat{u}_{y'}) + v'_{z'}(\vec{\omega} \times \hat{u}_{z'}) = \\ &= \vec{\omega} \times (v'_{x'}\hat{u}_{x'} + v'_{y'}\hat{u}_{y'} + v'_{z'}\hat{u}_{z'}) = \vec{\omega} \times \vec{v}'\end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che:

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + (\vec{\omega} \times \vec{v}')$$

3. Calcoliamo la derivata del prodotto:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}') &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} = \\ &= \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'\right) + \vec{\omega} \times [\vec{v}' + (\vec{\omega} \times \vec{r}')] \end{aligned}$$

4. Come il punto 1. calcoliamo:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}_{oo'}}{dt} &= \frac{d}{dt}(v_{oo'x}\hat{u}_x + v_{oo'y}\hat{u}_y + v_{oo'z}\hat{u}_z) = \frac{d}{dt}v_{oo'x}\hat{u}_x + \frac{d}{dt}v_{oo'y}\hat{u}_y + \frac{d}{dt}v_{oo'z}\hat{u}_z = \\ &= \frac{dv_{oo'x}}{dt}\hat{u}_x + \frac{dv_{oo'y}}{dt}\hat{u}_y + \frac{dv_{oo'z}}{dt}\hat{u}_z + \underbrace{\left(\frac{d\hat{u}_x}{dt}v_{oo'x} + \frac{d\hat{u}_y}{dt}v_{oo'y} + \frac{d\hat{u}_z}{dt}v_{oo'z}\right)}_{=0} = \vec{a}_{oo'}\end{aligned}$$

Unendo otteniamo la formula dell'**accelerazione relativa**:

$$\vec{a} = \vec{a}' + (\vec{\omega} \times \vec{v}') + \underbrace{\left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' \right)}_{=0} + \vec{\omega} \times [\vec{v}' + (\vec{\omega} \times \vec{r}')] + \vec{a}_{oo'}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{oo'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}')$$

Alcuni commenti:

- Il termine  $2(\vec{\omega} \times \vec{v}')$  è detto **accelerazione di Coriolis**
- Il termine  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$  è detto **accelerazione centrifuga**
- Il termine  $\vec{a}_{oo'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$  è detta **accelerazione di trascinamento**

## 2.5. Sistemi di riferimento inerziali

Se nel capitoletto precedente abbiamo studiato la cinematica nei sistemi di riferimento in movimento, ora ci concentriamo sulla dinamica.

Le formule che abbiamo visto che se un corpo si muove in un sistema che si muove di m.r.u., allora un osservatore esterno osserva che:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{oo'}$$

Questa formula è detta **trasformazione galileiana** e vale per i sistemi in m.r.u. che si muovono a velocità molto inferiori della luce (si basano infatti sul fatto che il tempo sia assoluto in ogni sistema). In questi sistemi inoltre valgono le **leggi della dinamica**. Quindi vale che:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

In particolare, vale il **principio di inerzia** (un corpo sottoposto a forza totale nulla mantiene il suo stato di quiete o si muove di m.r.u.). Da qui deriva la definizione di sistema di riferimento inerziale:

**Definizione 2.6.** *Un **sistema di riferimento inerziale** nella dinamica newtoniana è un sistema di riferimento in cui sia valida la prima legge della dinamica.*

Considerando l'accelerazione in un sistema che ruota e che si muove abbiamo:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \underbrace{\vec{a}_{oo'} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{accelerazione di trasferimento}} - \underbrace{2(\vec{\omega} \times \vec{v}')}_{\text{accelerazione di Coriolis}}$$

Calcolando le forze otteniamo quindi che:

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m[\vec{a}_{oo'} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')] - m[2(\vec{\omega} \times \vec{v}')] ]$$

$$\vec{F} - \vec{F}_{Tr} - \vec{F}_{Co} = m\vec{a}'$$

Le due forze  $\vec{F}_{Tr}$  e  $\vec{F}_{Co}$  sono dette **forze correttive** o **apparenti** in quanto non giustificabili da nessuna vera interazione del corpo. Se nel sistema inerziale vale che  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ , nel sistema non inerziale sicuramente non vale  $F = m \cdot \vec{a}'$  poiché  $\vec{a} \neq \vec{a}'$ . Perciò, in un sistema le *forze vere* che agiscono su un corpo non sono proporzionali all'accelerazione del corpo in quel sistema.

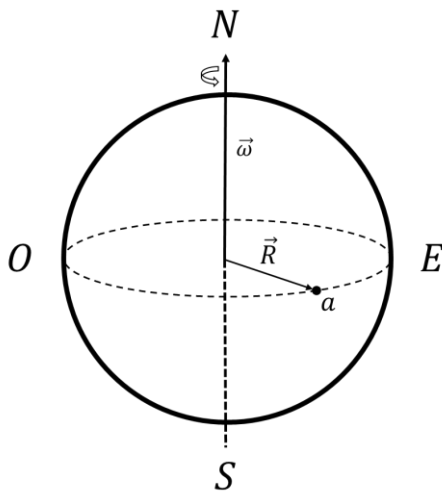
È facile vedere come le forze apparenti non dipendano da alcuna interazione del corpo col sistema. Consideriamo un corpo a cui non vengono applicate forze in un sistema in moto accelerato (che per semplicità non ruota). Abbiamo che:

$$\vec{F}_{Tr} = -m \cdot \vec{a}'$$

La forza di trascinamento ha verso contrario rispetto all'accelerazione.

### 2.5.1. Il sistema terra

Nella maggior parte dei casi consideriamo un sistema solidale a una persona sulla terra come sistema inerziale. In verità, poiché la terra ruota il sistema “persona” **non è inerziale** (il moto ellittico della terra nello spazio è trascurabile viste le dimensioni dell'orbita).



Iniziamo a considerare i dati noti. La terra (raggio di 6371 km) ruota attorno al suo asse verso Est con un periodo:

$$T = 24 \text{ h} = 3600 \cdot 24 \text{ s}$$

Da cui ricaviamo che:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

L'oggetto *a* sull'equatore avrà quindi velocità tangenziale pari a:

$$v_a = \omega R \cong 1670 \text{ km/h}$$

Per comodità definiamo  $\hat{u}_n$ ,  $\hat{u}_t$  e  $\hat{u}_r$  in questo modo:

- $\hat{u}_n$  sarà un versore tangente ai meridiani (archi che congiungono il Polo Nord al Polo Sud) nel punto scelto
- $\hat{u}_t$  sarà un versore tangente ai paralleli (circonferenze perpendicolari all'asse terrestre) nel punto scelto
- $\hat{u}_r$  sarà un versore parallelo al raggio che congiunge il centro della terra e il punto scelto

Riprendendo i concetti dei paragrafi precedenti abbiamo che in un sistema inerziale:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Se invece consideriamo un sistema solidale ad  $a$  (che abbiamo detto non essere inerziale) avremo che:

$$\vec{F} + \vec{F}_{Coriolis} + \vec{F}_{Trascinamento} = m\vec{a}'$$

Con

- $\vec{F}_{Coriolis} = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}')$
- $\vec{F}_{Trascinamento} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + m\vec{a}_{OO'} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'\right)$
- $\vec{F}$  sono le forze reali applicate all'oggetto  $a$

Iniziamo ad analizzarle riscrivendo esplicitamente l'equazione delle forze:

$$\vec{F} - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}') - m \left[ \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + m\vec{a}_{OO'} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'\right) \right] = m\vec{a}'$$

Notiamo subito che:

- $m\vec{a}_{OO'} = 0$  perché abbiamo detto che possiamo trascurare l'accelerazione del moto di rivoluzione terrestre
- $\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' = 0$  perché la terra ruota attorno all'asse con velocità costante

Riscriviamo quindi l'equazione:

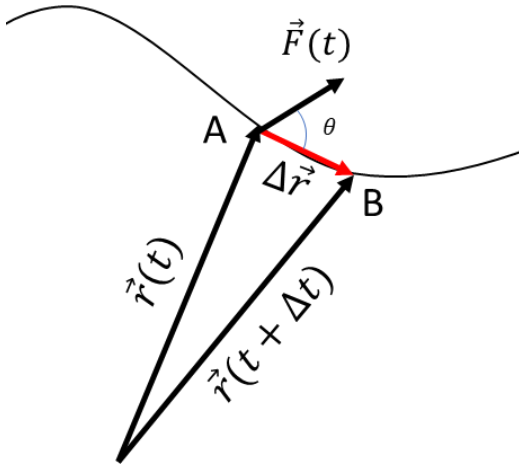
$$\vec{F} - \underbrace{2m(\vec{\omega} \times \vec{v}')}_{Coriolis} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{Centrifuga} = m\vec{a}'$$

Facciamo alcune considerazioni:

- La **forza di Coriolis** si applica solo a corpi che si muovono con moto non parallelo all'asse di rotazione.
- La **forza di trascinamento**, che nel caso della terra si riduce a **forza centrifuga**, si applica a prescindere dal moto del corpo e dipende dalla distanza di esso dal centro della terra. Notiamo inoltre che per angoli longitudinali diversi da 0, l'accelerazione centrifuga tende ad “attirare” il corpo verso l'equatore.

## 2.6. Lavoro ed energia

### 2.6.1. Il lavoro



Consideriamo un punto materiale che si muove su una traiettoria  $\gamma$  a cui viene applicata una forza  $\vec{F}(t)$ . Considerando un intervallo di  $\Delta t \rightarrow 0$  abbiamo detto che il vettore spostamento sarà:

$$d\vec{r} = ds\hat{u}_t = d\vec{r}_x + d\vec{r}_y + d\vec{r}_z$$

Iniziamo quindi a dare la definizione di **lavoro istantaneo  $\delta L$** :

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Come prima cosa notiamo che si tratta di un prodotto scalare:

$$\delta L = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \alpha$$

Con  $\theta$  angolo compreso tra i due vettori. Ciò significa che il lavoro istantaneo è uguale al prodotto tra lo spostamento infinitesimo e la proiezione della forza sul vettore spostamento. Se quindi sommiamo i lavori istantanei tra i punti A e B integrando otteniamo:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B \underbrace{F \cos \alpha}_{F_t} dr$$

Il simbolo  $\gamma$  sta a indicare che stiamo calcolando un **integrale di linea** lungo il percorso  $\gamma$ , ossia un integrale che dipende dalla traiettoria percorsa (alcuni libri scrivono  $ds$  al posto di  $dr$ . Notare che le due scritture sono equivalenti perché  $\Delta r \rightarrow ds$  per  $\Delta t \rightarrow 0$ ). Otteniamo quindi la **definizione di lavoro tra due punti A e B**:

$$L_{AB} = \int_A^B F_t dr$$

Compiendo l'analisi dimensionale otteniamo l'unità di misura del lavoro:

$$[L] = [F] \cdot [d\vec{r}] = N m = J \quad (\text{Joule})$$

$F_t$  è quindi la componente di  $\vec{F}$  tangente alla traiettoria. Scrivendo la seconda legge della dinamica otteniamo che:

$$F_t = ma_t$$

La forza  $F_t$  è quindi la forza che fa variare il modulo della velocità  $|v|$ . Possiamo inoltre notare che:

- Se  $\theta < \frac{\pi}{2}$  allora  $F_t$  (e quindi  $a_t$ ) è **parallela a  $d\vec{r}$**  (e quindi a  $\vec{v}$ ). Abbiamo quindi che  $|v|$  aumenta e che  $\delta L$  è positivo (**lavoro motore**).
- Se  $\theta > \frac{\pi}{2}$  allora  $F_t$  (e quindi  $a_t$ ) è **antiparallela a  $d\vec{r}$**  (e quindi a  $\vec{v}$ ). Abbiamo quindi che  $|v|$  diminuisce e che  $\delta L$  è negativo (**lavoro resistivo o resistente**).
- Se  $\theta = \frac{\pi}{2}$  allora  $F_t$  (e quindi  $a_t$ ) è **perpendicolare a  $d\vec{r}$**  (e quindi a  $\vec{v}$ ). Abbiamo quindi che  $|v|$  non cambia e che  $\delta L$  è nullo.

### ***La sovrapposizione degli effetti***

Se al punto materiale sono applicate più forze, è possibile trovare il lavoro totale compiuto sul corpo in questo modo:

$$\vec{R} = \sum_{i=0}^n \vec{F}_i$$

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{R} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \left( \sum_{i=0}^n \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{r} = \sum_{i=0}^n \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}$$

Diciamo quindi che per il **principio di sovrapposizione degli effetti** il lavoro totale compiuto su un corpo è uguale alla somma dei lavori compiuti dalle singole forze.

Notiamo quindi che se il lavoro totale su un corpo è 0 le cause potrebbero essere diverse:

$$L = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_i = 0 \\ \sum L_{Motori} + \sum L_{Resistivi} = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \text{ (ad esempio } F_{Centripeta}) \\ d\vec{r} = 0 \text{ (ad esempio } F_{Att. Statico}) \end{cases}$$

Notiamo quindi che se lo spostamento è nulla allora il lavoro è nullo. Ciò però non implica che se il lavoro è nullo allora lo spostamento sia nullo.

Il concetto di lavoro inoltre **vale nei sistemi non inerziali** a patto che si consideri la forza totale (incluendo le forze apparenti):

$$\underbrace{\vec{F} + \vec{F}_{Tr} + \vec{F}_{Co}}_{\vec{F}_{tot}} = m\vec{a}'$$

## **2.6.2. La potenza**



Il concetto di **potenza** è direttamente collegato al concetto di lavoro. Definiamo la **potenza istantanea** è definita come:

$$P_{ist} = \frac{dL}{dt}$$

$$[P] = \frac{[L]}{[T]} = \frac{J}{s} = W \quad (\text{Watt})$$

Se sostituiamo quindi otteniamo:

$$P_{ist} = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \frac{F \cos \theta ds}{dt}$$

Da cui otteniamo un modo alternativo per calcolare la potenza:

$$P_{ist} = \frac{dL}{dt} = F_t \cdot \frac{ds}{dt} = F_t \cdot v_{ist}$$

### ***Kilowatt ora e cavalli vapore***

Spesso in dispositivi elettrici sono indicate misure espresse in **kilowatt ora** (kWh). Quest'unità di misura è un modo alternativo di esprimere il **lavoro**. Viene spesso usata perché consente di esprimere valori grandi. Ad esempio:

$$1 kWh = 1000W \cdot 3600s = 3,6 \cdot 10^6 J$$

Con **cavalli vapore** si intende invece la **potenza** necessaria a sollevare una massa di  $m = 75kg$  a  $v = 1 m/s$  (ossia applicando al corpo una forza  $F = mg$ ). Quindi la potenza equivalente a un cavallo vapore è:

$$1 CV = gm v = 735 W$$

## **2.6.3. Teorema dell'energia cinetica**

Riprendendo la formula dell'energia cinetica, se esplicitiamo l'integrale otteniamo:

$$L_{AB} = \int_A^B F_t ds = \int_A^B m a_t ds = \int_A^B m \frac{dv}{dt} ds$$

Procedendo con un cambio variabile otteniamo:

$$L_{AB} = \int_{v_A}^{v_B} m \frac{ds}{dt} dv = \int_{v_A}^{v_B} m v dv = \left[ \frac{1}{2} m v^2 \right]_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

Il termine  $\frac{1}{2} m v^2$  è detto **energia cinetica** e viene indicato in questo modo:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

L'energia cinetica è misurata in **Joule**. Possiamo quindi concludere con l'enunciato del **teorema dell'energia cinetica**:

**Teorema 2.1** *Il lavoro totale compiuto su un corpo in un percorso  $\gamma$  tra due punti  $A$  e  $B$  è uguale alla differenza delle energie cinetiche nei due punti:*

$$L_{AB} = E_{K_B} - E_{K_A}$$

Notiamo quindi che se:

- $L > 0 \Leftrightarrow \Delta E_K > 0$  quindi  $E_{K_B} > E_{K_A}$
- $L < 0 \Leftrightarrow \Delta E_K < 0$  quindi  $E_{K_B} < E_{K_A}$
- $L = 0 \Leftrightarrow \Delta E_K = 0$  quindi  $E_{K_B} = E_{K_A}$

Se inoltre il punto materiale considerato parte da fermo ( $v_A = 0$ ), allora possiamo dire che:

$$E_{K_A} = \frac{1}{2}m \cdot 0 = 0$$

$$L_{AB} = E_{K_B} - 0 = E_{K_B} = \frac{1}{2}mv_B^2$$

## 2.6.4. Lavoro nei sistemi inerziali

Consideriamo un sistema non inerziale centrato in  $O'$  che si muove con velocità di  $\vec{v}_{OO'}$ , costante. Scriviamo le energia cinetica del corpo rispetto al sistema  $O$  e rispetto al sistema  $O'$ :

$$O: E_K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$O': E'_k = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}m(|\vec{v} - \vec{v}_{OO'}|^2) = \frac{1}{2}m|v|^2 + \frac{1}{2}m|v_{OO'}|^2 - m(\underbrace{v \cdot v_{OO'}}_{\text{prodotto scalare}})$$

Notiamo che se  $|v \cdot v_{OO'}| = 0$  allora possiamo scrivere che:

$$O': E'_k = \frac{1}{2}m|v|^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m|v_{OO'}|^2}_k = E_K + k$$

Notiamo che la applicando il teorema dell'energia cinetica nel sistema  $O'$ :

$$L'_{AB} = E'_{K_A} - E'_{K_B} = (E_{K_A} + k) - (E_{K_B} + k) = L_{AB}$$

Notiamo quindi che, nonostante l'energia cinetica nei due sistemi di riferimento sia diversa, il lavoro compiuto sul corpo è lo stesso. Se però il punto o il sistema si muovesse

con velocità tale che  $|mv_{00'}| \neq 0$ , la sua energia cinetica non può essere scritta a meno di una costante additiva, e per tanto il lavoro compiuto sul corpo varierebbe.

### 2.6.5. Il lavoro compiuto dalla forza peso

Se consideriamo un corpo sottoposto a forza peso, possiamo chiederci quanto vale il lavoro compiuto da  $\vec{P}$ . Possiamo scrivere che:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= m\vec{g} \\ d\vec{r} &= d\vec{r}_x + d\vec{r}_y\end{aligned}$$

Notiamo che  $\vec{g}$  è diretta solo su  $y$ , pertanto procedendo coi calcoli otteniamo:

$$\begin{aligned}L_{AB} &= \int_A^B \delta L = \int_A^B \vec{P} d\vec{r} = \int_A^B \vec{P} (d\vec{r}_x + d\vec{r}_y) = \underbrace{\int_{x_A}^{x_B} \vec{P} d\vec{r}_x}_{=0} + \int_{y_A}^{y_B} \vec{P} d\vec{r}_y \\ &= \int_{y_A}^{y_B} \vec{P} d\vec{r}_y = \int_{y_A}^{y_B} m\vec{g} d\vec{r}_y = \int_{y_A}^{y_B} mg \cos \pi dr_y = \int_{y_A}^{y_B} -mg dr_y = -mg \int_{y_A}^{y_B} dr_y\end{aligned}$$

Da cui ricaviamo che il **lavoro compiuto dalla forza peso** è:

$$L_{AB} = -mg(y_B - y_A)$$

La forza peso compie un lavoro che non dipende dalla traiettoria ma dipende soltanto dalla differenza di altezza. In particolare, se:

- $y_B > y_A \Rightarrow L < 0$  quindi il lavoro è **resistivo**
- $y_B < y_A \Rightarrow L > 0$  quindi il lavoro è **motore**
- $y_B = y_A \Rightarrow L = 0$  quindi il lavoro è **nullo**

### 2.6.6. Il lavoro compiuto dalla forza elastica

Se consideriamo un corpo appoggiato su un piano attaccato a una molla, possiamo chiederci quant'è il lavoro compiuto dal corpo da  $\vec{F}_{el}$ . Per farlo iniziamo considerando  $l_0 = 0$ :

$$\vec{F}_{el} = -kx\hat{u}_x$$

Come prima cosa notiamo che:

- $x > 0 \Rightarrow \vec{F}_e < 0$
- $x < 0 \Rightarrow \vec{F}_e > 0$
- $x = 0 \Rightarrow \vec{F}_e = 0$

Calcoliamo quindi il lavoro:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{el} d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}_{el} (d\vec{r}_x + \underbrace{d\vec{r}_y}_{=0}) = \int_{x_A}^{x_B} F_{el} \cos \pi dr_x = \int_{x_A}^{x_B} -kx dr_x$$

Da cui ricaviamo che:

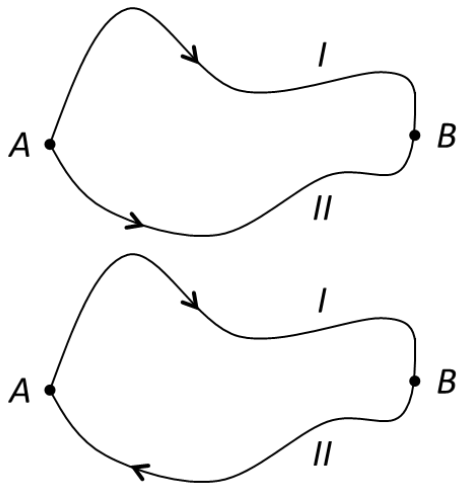
$$L_{AB} = -k \int_{x_A}^{x_B} x dr_y = -k \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_{x_A}^{x_B} = -\frac{1}{2} k (x_B^2 - x_A^2)$$

Anche in questo caso la posizione dipende solamente dalla posizione iniziale e da quella finale.

## 2.6.7. Forze conservative

Parliamo ora di **forze conservative**:

**Definizione 2.7.** Si dice che una **forza è conservativa** se il lavoro che compie non dipende dal tipo di traiettoria



Consideriamo due traiettorie I e II sottoposte a una forza  $\vec{F}$ . Se vale che:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_{II}^B \vec{F} d\vec{r}$$

Allora la forza è conservativa. Consideriamo ora la stessa traiettoria, ma in questo caso il punto si muoverà da A a B lungo I per poi tornare da B ad A lungo II. Avremo quindi che:

$$L_{ABA} = L_{AB} + L_{BA}$$

Sviluppando i calcoli applicando le proprietà degli integrali otteniamo:

$$L_{ABA} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} + \int_B^A \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} - \int_A^B \vec{F} d\vec{r}$$

Se la forza è conservativa vale che:

$$\int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} \Rightarrow L_{ABA} = 0$$

$L_{ABA}$  è detta **circuitazione**: la circuitazione è il lavoro compiuto da una forza lungo un percorso chiuso. Per indicare la circuitazione scriviamo:

$$\oint \vec{F} d\vec{r}$$

Se quindi la forza è conservativa vale che:

$$\oint \vec{F}_{Cons} d\vec{r} = 0$$

Riprendendo quindi il teorema dell'energia cinetica vale che:

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \Delta E_K \\ L_{ABA} &= 0 = \Delta E_K \rightarrow \text{forza conservativa} \end{aligned}$$

Da cui ricaviamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_A'^2 &= 0 \\ \frac{1}{2}mv_A^2 &= \frac{1}{2}mv_A'^2 \\ v_A &= v_A' \end{aligned}$$

Se quindi un corpo si muove lungo un percorso chiuso ed è sottoposta a una forza conservativa, esso ritornerà alla posizione iniziale con la stessa velocità di partenza.

### **Energia potenziale**

Quando si parla di forze conservative risulta utile il concetto di **energia potenziale**. L'energia potenziale è una forma di energia funzionale (viene espressa in funzione di una posizione rispetto a una posizione iniziale). L'energia potenziale è definita in questo modo (vale solo per forze conservative):

$$\Delta E_P = E_{P_B} - E_{P_A} = -L_{AB}$$

La formula varia a seconda della forza conservativa che si sta considerando:

- **Forza peso:** abbiamo precedentemente dimostrato che:

$$L_{AB} = -mg(y_B - y_A)$$

Da cui:

$$E_{P_g} = mgh$$

- **Forza elastica:** abbiamo precedentemente dimostrato che:

$$L_{AB} = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$$

Da cui:

$$E_{P_{el}} = \frac{1}{2}kx^2$$

Possiamo quindi dire che l'energia potenziale è un'energia che viene immagazzinata sulla base della posizione e si può trasformare in energia cinetica.

Notiamo infatti che se:

- $\Delta E_P > 0 \Leftrightarrow \Delta L < 0$  quindi l'energia cinetica diminuisce
- $\Delta E_P < 0 \Leftrightarrow \Delta L > 0$  quindi l'energia cinetica aumenta

Possiamo anche definirla come il lavoro necessario per portare un punto materiale soggetto a una forza conservativa in una certa posizione mantenendo l'energia cinetica costante.

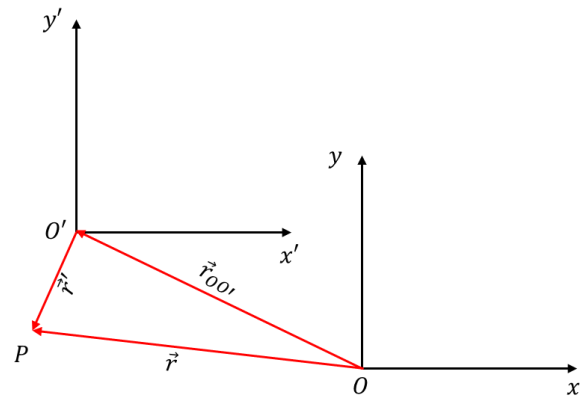
### ***Energia potenziale nei sistemi di riferimento***

Consideriamo quindi due sistemi in moto fermi l'uno rispetto all'altro. Scriviamo l'energia potenziale gravitazionale di  $P$  rispetto a  $O$ :

$$O: E_P = mgy_P$$

Possiamo inoltre scrivere:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}' + \vec{r}_{OO'} \\ y &= y' + y_{OO'} \\ y' &= y - y_{OO'}\end{aligned}$$



Scriviamo ora l'energia potenziale di  $P$  rispetto al sistema di riferimento centrato in  $O'$ :

$$E_P = mgy'_P = mg(y - y_{OO'}) = E_P + k$$

Se calcoliamo il lavoro rispetto ai due sistemi di riferimento otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}L &= -\Delta E_P = -(E_{P_B} - E_{P_A}) \\ L' &= -\Delta E'_P = -(E_{P_B} + k - E_{P_A} - k) = -(E_{P_B} - E_{P_A}) = L\end{aligned}$$

Concludiamo quindi che il lavoro dalla forza peso è lo stesso indipendentemente dal sistema di riferimento. Si può arrivare alla stessa conclusione per le altre forze conservative. Arriviamo quindi a dire che una forza è conservativa se il suo lavoro può essere espresso come variazione della sua energia potenziale.

## **2.6.8. Energia meccanica**

Se su un corpo agiscono solo forze conservative valgono le due scritture:

$$\begin{aligned}L_{AB} &= E_{K_B} - E_{K_A} \\ L_{AB} &= -(E_{P_B} - E_{P_A})\end{aligned}$$

Se quindi le eguagliamo otteniamo:

$$E_{K_B} - E_{K_A} = E_{P_A} - E_{P_B}$$

$$E_{K_B} + E_{P_B} = E_{P_A} + E_{K_A}$$

La somma dell'energia cinetica e dell'energia di un punto materiale che si muove sotto l'azione di forze conservative resta costante durante il moto, ossia si conserva. Tale somma si chiama energia meccanica e vale pertanto, in presenza di forze conservative, il **principio di conservazione dell'energia meccanica**:

$$E_m = E_K + E_P = \text{costante}$$

Se quindi durante il moto uno dei due termini diminuisce l'altro aumenta in accordo con la formula appena scritta. Vediamo un esempio di applicazione del principio di conservazione dell'energia meccanica:

### Esempio 2.10.

Consideriamo una molla con coefficiente elastica  $k$ . Avremo che:

$$E_P = \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2$$

Scriviamo quindi le equazioni di spazio e velocità (consideriamo  $\varphi = 0$ ):

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

$$v(t) = -A \omega \sin(\omega t)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Per principio di conservazione dell'energia meccanica scriviamo:

$$E_m = E_k(t) + E_p(t) = \frac{1}{2} m v(t)^2 + \frac{1}{2} m x(t)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m (-A \omega \sin(\omega t))^2 + \frac{1}{2} m (A \cos(\omega t))^2 =$$

$$\frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2} m A^2 \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \underbrace{[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)]}_{=1} = \frac{1}{2} m A^2 \frac{k}{m}$$

Concludiamo che:

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2$$

## 2.6.9. Forze non conservative

Avendo visto le forze conservative, introduciamo ora le **forze non conservative**. Se consideriamo ad esempio il lavoro compiuto dalla forza di attrito dinamico (l'attrito statico non compie lavoro in quanto lo spostamento è nullo) lungo un percorso  $AB$  otteniamo:

$$\vec{F}_{ad} = -\mu_d N \hat{u}_v$$

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{ad} d\vec{r} = \int_A^B (-\mu_d N \hat{u}_v) d\vec{r} = -\mu_d N \int_A^B \hat{u}_v d\vec{r}$$

Quindi:

$$L_{AB} = -\mu_d N \int_A^B ds$$

Da questa formula notiamo due cose:

- Il lavoro compiuto dalla forza di attrito dinamico si oppone allo spostamento e quindi è un **lavoro resistivo**
- Il lavoro compiuto dalla forza di attrito dinamico dipende dal percorso seguito tra i punti  $A$  e  $B$  (un percorso più lungo corrisponde a un lavoro compiuto maggiore)

### ***Forze non conservative ed energia meccanica***

Il teorema dell'energia cinetica vale anche per le forze non conservative, otteniamo quindi:

$$L_{Tot} = \Delta E_K$$

$$L_{Tot} = L_{Cons} + L_{Non Cons} = \Delta E_K$$

$$-\Delta E_P + L_{Non Cons} = \Delta E_K$$

$$L_{Non Cons} = \Delta E_K + \Delta E_P = E_{K_B} - E_{K_A} + E_{P_B} - E_{P_A} = (E_{K_B} + E_{P_B}) - (E_{K_A} + E_{P_A})$$

Ricordando che  $E_m = E_K + E_P$  otteniamo:

$$L_{Non Cons} = \Delta E_m$$

Vediamo un esempio di applicazione di questa formula:

#### **Esempio 2.11.**

Consideriamo una pistola a molla con costante  $k = 5 \cdot 10^5 \text{ N/m}$  che lancia un proiettile di massa  $m = 20 \text{ g}$  contro un bersaglio a distanza  $d = 15 \text{ m}$ . La molla viene caricata comprimendo la molla di  $|x| = 4 \text{ cm}$  (rispetto a  $l_0 = 0$ ) e penetra nel bersaglio di  $p = 3 \text{ cm}$ . Il problema chiede:

- A che velocità viaggia il proiettile quando arriva al bersaglio? (trascuriamo la forza peso)



- Calcolare la forza  $\vec{F}_{Ber}$  che si oppone alla penetrazione del proiettile.

Per risolvere il problema affidiamoci al calcolo delle energie:

$$E_m = E_p + E_K$$

Poiché il proiettile è fermo quando abbiamo caricato (momento A) la pistola vale che:

$$E_{K_A} = 0$$

$$E_{m_A} = E_{p_A} + 0 = \frac{1}{2} k x_A^2$$

Nel momento in cui il proiettile lascia la molla (momento B), l'energia potenziale del proiettile sarà:

$$E_p = 0$$

$$E_{m_B} = 0 + E_{K_B} = \frac{1}{2} m v_B^2$$

Poiché la forza applicata al proiettile (forza elastica) è conservativa, vale il principio di conservazione dell'energia meccanica, da cui:

$$E_{m_A} = E_{m_B}$$

$$\frac{1}{2} k x_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$v_B = \sqrt{\frac{k x_A^2}{m}} = 200 \text{ m/s}$$

Il proiettile arriva quindi al bersaglio con velocità  $v_B$  (momento B) e si impianta fermandosi (momento C, in cui  $E_{m_C} = E_{K_C} = 0$ ) essendo  $\vec{F}_{Ber}$  una forza non conservativa possiamo dire:

$$L_{\vec{F}_{Ber}} = \Delta E_m$$

$$L_{\vec{F}_{Ber}} = E_{m_C} - E_{m_B}$$

$$L_{\vec{F}_{Ber}} = 0 - E_{m_B} = -E_{K_B} = -\frac{1}{2} m v_B^2$$

Supponendo che il bersaglio applichi una forza costante al proiettile possiamo scrivere:

$$L_{\vec{F}_{Ber}} = \int_B^C \vec{F}_{Ber} d\vec{r} = \int_B^C F_{Ber} \cos \pi ds = -F_{Ber} \int_B^C ds$$

$$-F_{Ber} p = -\frac{1}{2} m v_B^2$$

$$F_{Ber} = \frac{\frac{1}{2} m v_B^2}{p} = 13,3 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Possiamo studiare il problema anche dal momento A ( $E_{m_A} = 1/2 kx^2$ ) al momento C:

$$\begin{aligned} L_{\vec{F}_{Ber}} &= \Delta E_m = E_{m_C} - E_{m_A} = 0 - \frac{1}{2} kx^2 \\ -\vec{F}_{Ber} p &= -\frac{1}{2} kx^2 \\ \vec{F}_{Ber} &= \frac{\frac{1}{2} kx^2}{p} = 13,3 \cdot 10^3 N \end{aligned}$$

## 2.6.10. La quantità di moto e l'impulso

Riprendendo la definizione che avevamo dato nel [PARAGRAFO 2.3.1](#) abbiamo:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= m\vec{v} \\ \vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} \end{aligned}$$

In fisica un **impulso** è una grandezza che viene definita nel caso di forze agenti per intervallo di tempo molto minori rispetto al tempo di osservazione del fenomeno (ad esempio una racchetta che colpisce una pallina da tennis genera un impulso). Queste forze sono dette *forze impulsive*. L'impulso viene calcolato come prodotto tra la forza e il tempo in cui viene esercitata:

$$\begin{aligned} \vec{F} dt &= d\vec{p} \\ \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt &= \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} \end{aligned}$$

Da cui il **teorema dell'impulso**:

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{J}$$

Il termine  $\vec{J}$  è appunto detto impulso. Dall'analisi dimensionale ricaviamo l'unità di misura:

$$[J] = [F][T] = Ns$$

Osserviamo che il vettore  $\vec{J}$  ha la stessa direzione e verso di  $\vec{F}$ . Notiamo inoltre che per intervalli di tempo molto piccoli, la forza  $\vec{F}$  produce una differenza di quantità di moto significativa solo se il modulo  $|\vec{F}|$  è molto grande. Vediamo un esempio di applicazione di questo teorema:

**Esempio 2.12.**

Consideriamo un corpo che si muove su un piano orizzontale scabro con coefficiente di attrito dinamico  $\mu_d$  a velocità  $v_i$ . Ci chiediamo che distanza  $\Delta s$  percorre prima di fermarsi. Ci sono due modi di affrontare il problema:

**Metodo 1.** Teorema dell'energia cinetica/conservazione energia meccanica

Poiché la forza di attrito è una forza non conservativa possiamo affidarci al teorema dell'energia dinamica (o al principio di conservazione dell'energia meccanica che è più generale). Abbiamo quindi che:

$$L_{\vec{F}_{ad}} = \Delta E_m$$

Abbiamo che:

$$E_{k_i} = \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$E_{k_f} = 0$$

Consideriamo l'energia potenziale gravitazionale come costante poiché l'altezza del corpo non cambia e otteniamo:

$$E_{m_i} = E_{k_i} + cost$$

$$E_{m_f} = 0 + cost$$

Da cui:

$$L_{\vec{F}_{ad}} = -E_{k_i}$$

$$\int_i^f \vec{F}_{ad} d\vec{r} = -\frac{1}{2}mv_i^2$$

$$-mg\mu_d \int_i^f d\vec{r} = -\frac{1}{2}mv_i^2$$

$$mg\mu_d \Delta s = \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$\Delta s = \frac{v_i^2}{2g\mu_d}$$

**Metodo 2.** Teorema dell'impulso

Abbiamo detto che per il teorema dell'impulso vale:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{ad} dt$$

Abbiamo che  $\vec{p}_i = m\vec{v}_i$  e  $\vec{p}_f = m\vec{v}_f = 0$ , da cui:

$$-m\vec{v}_i = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{ad} dt$$

$$-mv_i \hat{u}_x = \int_{t_1}^{t_2} -mg\mu_d \hat{u}_x dt = -mg\mu_d \hat{u}_x \int_{t_1}^{t_2} dt = -mg\mu_d \Delta t \hat{u}_x$$

Da cui:

$\Delta t = v_i/g\mu_d$  sostituendo questo tempo all'interno della legge oraria otteniamo il medesimo risultato ottenuto con il primo metodo.

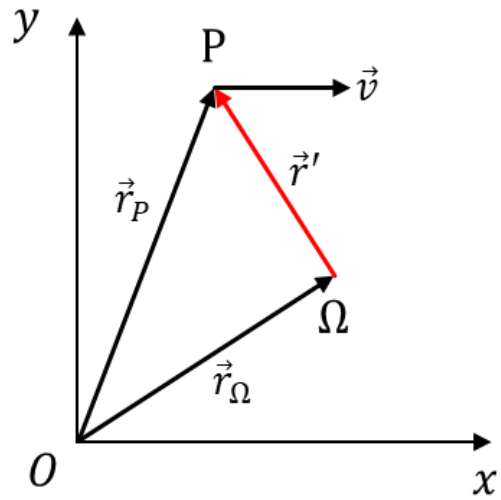
## 2.7. Il momento angolare

In meccanica newtoniana definiamo il **momento angolare**  $\vec{L}$  rispetto a un **polo**  $\Omega$  di un punto materiale come il prodotto vettoriale tra la distanza  $\vec{r}$  (tra il punto e il polo) e la quantità di moto del punto materiale  $\vec{p}$ :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Se quindi consideriamo un polo  $\Omega$  nel piano e un punto materiale con quantità di moto  $\vec{p}$  otteniamo:

$$\vec{L} = \vec{r}' \times \vec{p} = (\vec{r}_P - \vec{r}_\Omega) \times m\vec{v}$$



Se consideriamo quindi un moto circolare, notiamo che l'angolo tra il vettore  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  è  $\frac{\pi}{2}$ , perciò il momento angolare in un moto circolare diventa:

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = rmv \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = rmv$$

Il vettore  $\vec{L}$  sarà diretto come  $\vec{\omega}$ .

### 2.7.1. Il teorema del momento angolare

Abbiamo quindi detto che  $\vec{L}_\Omega = (\vec{r}_P - \vec{r}_\Omega) \times \vec{p}$ . Se deriviamo il momento angolare rispetto al tempo otteniamo:

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \frac{d}{dt} [(\vec{r}_P - \vec{r}_\Omega) \times \vec{p}] = \frac{d}{dt} (\vec{r}_P - \vec{r}_\Omega) \times \vec{p} + (\vec{r}_P - \vec{r}_\Omega) \times \frac{d\vec{p}}{dt} =$$

$$\left[ \frac{d\vec{r}_P}{dt} \times \vec{p} - \frac{d\vec{r}_\Omega}{dt} \times \vec{p} \right] + (\vec{r}_P - \vec{r}_\Omega) \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \times \vec{p} - \vec{v}_\Omega \times \vec{p}}_{\substack{=0 \\ \text{sono } \parallel}} + (\vec{r}_P - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}$$

Se per ipotesi il polo  $\Omega$  è fermo (ossia  $\vec{v}_\Omega = 0$ ), otteniamo che:

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = (\vec{r}_P - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F} = \vec{M}_\Omega$$

Il vettore  $\vec{M}_\Omega$  è detto **momento torcente** di  $P$  rispetto a  $\Omega$ . Notiamo che se  $(\vec{r}_P - \vec{r}_\Omega) \parallel \vec{F}$  (ossia se la forza applicata a  $P$  è parallela al braccio di rotazione, allora  $\vec{M}_\Omega = 0$ ).

Se invece abbiamo il  $\vec{M}_\Omega$  possiamo trovare  $\vec{L}_\Omega$  per integrazione:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} &= \vec{M}_\Omega \\ d\vec{L}_\Omega &= \vec{M}_\Omega dt \\ \int_{L_i}^{L_F} d\vec{L}_\Omega &= \int_{t_i}^{t_F} \vec{M}_\Omega dt\end{aligned}$$

Da cui otteniamo:

$$\vec{L}_{\Omega F} - \vec{L}_{\Omega i} = \Delta\vec{L}_\Omega = \int_{t_i}^{t_F} \vec{M}_\Omega dt$$

Vediamo un esempio di applicazione del teorema:

### Esempio 2.13.

Consideriamo un punto materiale che si muove su una traiettoria circolare di raggio  $R$  con  $v_i = 0$ . Al corpo viene applicata una forza tangente alla traiettoria  $\vec{F} = F\hat{u}_t$  per un tempo  $\Delta t = 5$  s. Quanto vale  $v_f$ ?

#### Metodo 1. Teorema dell'impulso

Ricordando il teorema dell'impulso otteniamo:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{p} &= \int_{t_i}^{t_f} F\hat{u}_t dt \\ m\vec{v}_f - \underbrace{m\vec{v}_i}_{=0} &= F\hat{u}_t \int_{t_i}^{t_f} dt \\ m\vec{v}_f &= F\hat{u}_t \Delta t \\ \vec{v}_f &= \frac{F\Delta t}{m} \hat{u}_t\end{aligned}$$

#### Metodo 2. Teorema del momento angolare

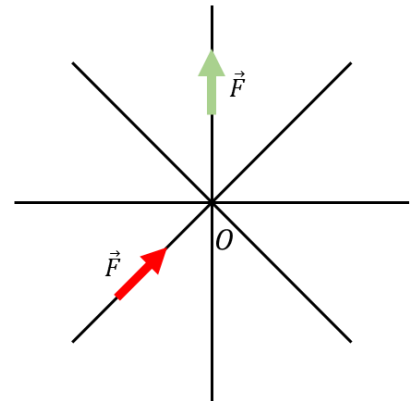
$$\begin{aligned}\Delta\vec{L} &= \int_{t_i}^{t_f} M\hat{u}_y dt \\ (\vec{R} \times \vec{p}_f) - \underbrace{(\vec{R} \times \vec{p}_i)}_{=0} &= \int_{t_i}^{t_f} (\vec{R} \times \vec{F}) dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R p_f \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \hat{u}_y &= \int_{t_i}^{t_f} R F \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \hat{u}_y dt \\
 R p_f \hat{u}_y &= R F \Delta t \hat{u}_y \\
 R m v_f &= R F \Delta t \\
 \vec{v}_F &= \frac{F \Delta t}{m} \hat{u}_t
 \end{aligned}$$

## 2.8. Forze centrali a simmetria sferica

Si dicono **forze centrali** quelle forze che sono tutte dirette verso uno stesso punto detto **centro**. Diciamo inoltre che:

- Se  $\vec{F} = F \hat{u}_r$  (ossia se la forza è diretta verso l'esterno), allora è detta **forza repulsiva**
- Se  $\vec{F} = -F \hat{u}_r$  (ossia se la forza è diretta verso il centro), allora è detta **forza attrattiva**



Diciamo inoltre che una forza è a **simmetria sferica** se il modulo della forza dipende dalla distanza dal centro:

$$|\vec{F}| = F(d)$$

Notiamo subito che le forze centrali a simmetria sferica sono conservative. Abbiamo infatti che:

$$\begin{aligned}
 F &= F(r) \hat{u}_r \\
 L &= \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int F(r) \hat{u}_r \cdot d\vec{r} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d}{dt}(r \hat{u}_r) = \frac{dr}{dt} \hat{u}_r + r \frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\perp \\
 d\vec{r} &= dr \hat{u}_r + r d\theta \hat{u}_\perp
 \end{aligned}$$

Sostituendo in (1):

$$\begin{aligned}
 L &= \int F(r) \hat{u}_r \cdot d\vec{r} = \int F(r) \hat{u}_r \cdot [dr \hat{u}_r + r d\theta \hat{u}_\perp] = \\
 &= \int F(r) \hat{u}_r \cdot dr \hat{u}_r + \underbrace{\int F(r) \hat{u}_r \cdot r(t) d\theta \hat{u}_\perp}_{=0 \text{ sono } \perp} = \\
 &= \int F(r) \cdot dr
 \end{aligned}$$

Da cui otteniamo:

$$L_{AB} = f(r_b) - f(b_a)$$

Dove  $f' = F$ . Notiamo quindi che il lavoro tra  $A$  e  $B$  non dipende dalla traiettoria. Possiamo scrivere quindi che:

$$\begin{aligned} L_c &= -\Delta E_p \\ E_p &= f(\vec{r}) \end{aligned}$$

### ***La forza gravitazionale***

La forza di attrazione gravitazionale è la prima forma di forza centrale a simmetria sferica che vediamo. Essa è una forza attrattiva che si genera tra due masse  $m_1$  e  $m_2$ . Possiamo aggiungere che  $m_1$  sarà soggetta a una forza attrattiva verso il centro di  $m_2$  e viceversa. La forza tra due masse è:

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r$$

Dove  $G$  è detta costante di gravitazione universale e vale:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

Notiamo inoltre che a priori non c'è alcuna ragione per le quali queste due masse debbano essere uguali alle masse inerziali che compaiono nel secondo principio di Newton ( $F = ma$ ). Le masse  $m_1$  e  $m_2$  sono dette **masse gravitazionali**.

### ***La forza elettrostatica***

L'altra forza centrale a simmetria sferica che vediamo è la **forza elettrostatica** o **forza di Coulomb**. Essa si manifesta tra due *cariche elettriche* ferme (positive o negative). La forza elettrostatica tra due cariche è data dalla seguente formula:

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}_r$$

Dove  $\epsilon_0$  è detta **costante dielettrica nel vuoto** o **permettività elettrica** e vale:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

Notiamo che se:

- $q_1 \cdot q_2 > 0$  allora la forza è **repulsiva**
- $q_1 \cdot q_2 < 0$  allora la forza è **attrattiva**

### 2.8.1. Il momento torcente delle forze centrali a simmetria sferica

Se consideriamo quindi un punto materiale  $P$  sottoposto a una forza centrale a simmetria sferica  $\vec{F}_c$  e proviamo a calcolare il momento torcente otteniamo:

$$\vec{M}_c = \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\text{sono } \parallel} = 0$$

Da cui:

$$\frac{d\vec{L}_c}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_c \text{ costante}$$

Abbiamo quindi che  $\vec{L}_c = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$  dovrà essere costante in direzione e verso (oltre al modulo). Per la regola della mano destra,  $\vec{L}_c$  è perpendicolare a  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$ . Poiché  $\vec{L}_c$  è costante in direzione, il piano definito da  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  risulterà essere fisso. La traiettoria del punto giacerà su quel piano e il verso di  $\vec{L}_c$  definisce il verso di percorrenza della traiettoria.

Poiché anche il modulo di  $\vec{L}_c$  è costante possiamo scrivere:

$$|\vec{L}_c| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = \text{costante}$$

#### Esempio 2.14.

Notiamo che se ad esempio un corpo sottoposto a una forza centrale a simmetria sferica si muove con moto circolare abbiamo:

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{cost}$$

Con  $\vec{r}$  raggio della circonferenza. Poiché  $\vec{r} \times m\vec{v}$  è costante, se  $\vec{r}$  varia  $\vec{v}$  varia di conseguenza e viceversa.

### 2.8.2. La velocità areale

Per identificare il significato fisico di ciò che abbiamo scritto introduciamo la **velocità areale** o **areolare**. Definiamo la velocità areale come l'**area spazzata da  $\vec{r}$  nell'unità di tempo**.



Consideriamo la posizione di un punto nello spazio rispetto a un polo  $\Omega$  in funzione del tempo. Il vettore  $\vec{r}$  spazzerà in un tempo  $\Delta t$  un'area  $A$  (quella colorata in figura). Possiamo quindi scrivere:

$$|\vec{\sigma}| = \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

Il vettore  $\vec{\sigma}$  è un vettore perpendicolare al piano di moto con verso determinato dalla regola della mano destra. Facendo tendere  $\Delta t \rightarrow 0$  notiamo che la forma descritta dai vettori  $\vec{r}(t)$ ,  $\vec{r}(t + dt)$  e  $d\vec{r}$  è approssimabile a un rettangolo. Possiamo quindi calcolare il modulo **della velocità areale istantanea**:

$$|\vec{\sigma}_{ist}| = \frac{dA}{dt}$$

sfruttando la geometria dei vettori:

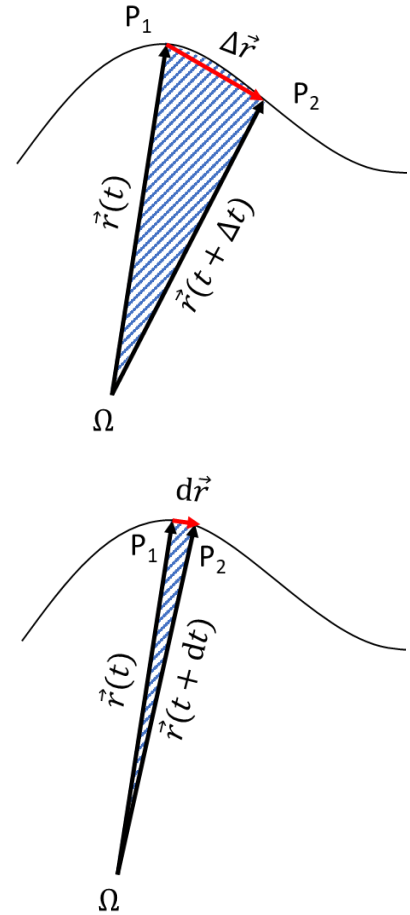
$$dA = \frac{1}{2} A_{par}$$

dove  $A_{par}$  è l'area del parallelogramma di lati  $\vec{r}$  e  $d\vec{r}$ . Da cui:

$$\begin{aligned} A_{par} &= |\vec{r} \times d\vec{r}| \\ |\vec{\sigma}_{ist}| &= \frac{1}{2} \frac{|\vec{r} \times d\vec{r}|}{dt} = \frac{1}{2} \left[ \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \\ &= \frac{1}{2} [\vec{r} \times \vec{v}] = \frac{1}{2} \frac{[\vec{r} \times m\vec{v}]}{m} \end{aligned}$$

Ricordando che  $\vec{L}_\Omega = \vec{r} \times m\vec{v}$  otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} |\vec{\sigma}_{ist}| &= \frac{L_\Omega}{2m} \\ \vec{\sigma}_{ist} &= \frac{\vec{L}_\Omega}{2m} = cost \end{aligned}$$



## 2.9. Le leggi di Keplero

Le **leggi di Keplero** sono tre leggi concernenti il movimento dei pianeti. Sono il principale contributo di Johannes von Kepler all'astronomia e alla meccanica.

L'astronomo tedesco le derivò studiando le osservazioni di Tycho Brahe. Isaac Newton, successivamente, dedusse dalle leggi di Keplero la spiegazione dinamica dei moti planetari introducendo, quale causa del moto, una forza, detta forza di gravitazione universale. Newton dimostrò anche il teorema inverso, ossia che dalla sua legge generale del moto e dalla forza di gravità si ottengono, in maniera equivalente, le leggi di Keplero.

### ***Prima legge (legge delle orbite ellittiche)***

La prima legge afferma che:

*L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.*

Con questa legge, Keplero propose un modello eliocentrico in cui le orbite non sono circolari ma ellittiche, e in questo modo fu il primo a rinunciare alla forma perfetta; egli fu supportato, nel farlo, dai dati osservativi ottenuti da Tycho Brahe. Questa legge è molto importante perché essa separa definitivamente la teoria eliocentrica di Nicolò Copernico dalla teoria geocentrica di Tolomeo.

### ***Seconda legge (legge delle aree)***

La seconda legge afferma che:

*Il segmento (raggio vettore) che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.*

Questa legge ha delle conseguenze importanti:

- La velocità areolare è costante.
- La velocità orbitale non è costante, ma varia lungo l'orbita. In prossimità del **perielio**, dove il raggio vettore è più corto che nell'**afelio**, l'arco di ellisse è corrispondentemente più lungo. Ne segue quindi che la velocità orbitale è massima al perielio e minima all'afelio.
- Il momento angolare orbitale del pianeta si conserva.
- Sul pianeta viene esercitata una forza centrale, cioè diretta secondo la congiungente tra il pianeta e il Sole.

La seconda legge di Keplero non è altro che la **conservazione del Momento angolare** (la costanza del momento angolare, deriva, a sua volta, dal fatto che la forza è centrale).

### ***Terza legge (legge dei periodi)***

La terza legge afferma che:

*I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo delle loro distanze medie dal Sole.*

Il rapporto tra il quadrato del periodo di rivoluzione e il cubo del semiasse maggiore dell'orbita è lo stesso per tutti i pianeti. Questa legge può essere espressa in forma matematica nel modo seguente:

$$T^2 = ka^3$$

Dove  $a$  è il semiasse maggiore dell'orbita ellittica e  $k$  è una costante che dipende dal pianeta attorno a cui si sta ruotando. Se approssimiamo l'orbita di un pianeta a un cerchio, risulta facile dimostrare questa formula. Per la seconda legge di Keplero sappiamo che:

$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{L}}{2m} = \text{cost} \Rightarrow |\vec{L}| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = \text{cost}$$

Poiché la traiettoria che consideriamo è circolare  $\vec{r}$  è costante, il che significa che anche  $\vec{v}$  lo è (la massa dei pianeti non varia). Per la seconda legge di Newton sappiamo che:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{a}_c \\ F &= ma_c = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R = m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 R\end{aligned}$$

Considerando un pianeta  $P$  di massa  $m_P$ , dalla terza legge di Keplero otteniamo:

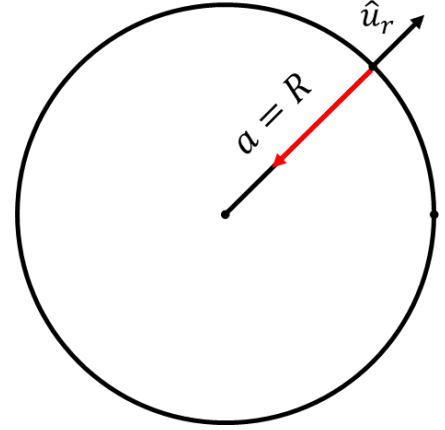
$$\begin{aligned}T^2 &= k_P R^3 \\ \Rightarrow F &= m_P \frac{(2\pi)^2}{k_{P,C} R^3} R = \frac{4\pi^2 m_P}{k_{P,C} R^2}\end{aligned}$$

Con  $k_{P,C}$  intendiamo la costante che fa valere la legge di Keplero per un pianeta (o oggetto)  $P$  che ruota attorno a un pianeta  $C$ . La terza legge di Newton ci dice che se un corpo  $A$  applica una forza su un corpo  $B$ , allora il corpo  $B$  applica una forza uguale e opposta su  $A$ . Considerando ad esempio la terra e il sole (rispettivamente di masse  $m_T$  e  $m_S$ ) otteniamo:

$$\begin{aligned}|\vec{F}_{ST}| &= |\vec{F}_{TS}| \\ \frac{4\pi^2 m_T}{k_{T,S} R^2} &= \frac{4\pi^2 m_S}{k_{S,T} R^2} \\ \frac{m_T}{k_{T,S}} &= \frac{m_S}{k_{S,T}}\end{aligned}$$

Otteniamo quindi che  $m_T k_{S,T} = m_S k_{T,S}$ . Possiamo quindi definire una costante:

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{k_{T,S} m_S} = \frac{4\pi^2}{k_{S,T} m_T}$$



Da cui ricaviamo che:

$$F_{ST} = \frac{4\pi^2}{k_{T,S}m_S} \frac{m_T m_S}{R^2} = \gamma \frac{m_T m_S}{R^2}$$

Newton estese questa forza ipotizzando che tra due corpi agisca una forza attrattiva lungo la retta congiungente tale che sia direttamente proporzionale alle masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Evidenze sperimentali dimostrano la correttezza della formula.

### ***L'accelerazione gravitazionale***

La costante di accelerazione gravitazionale  $\vec{g}$  viene ricavata sperimentalmente. Possiamo quindi scrivere:

$$\vec{F} = m_i \vec{g}$$

Ricordando che  $m_i$  indica la massa inerziale dell'oggetto. Sulla superficie terrestre vale quindi l'equazione:

$$m_i \vec{g} = G \frac{m_{G,T} m_G}{R^2}$$

Dove  $m_G$  è la massa gravitazionale dell'oggetto e  $m_{G,T}$  è la massa gravitazionale della terra (costante). Possiamo quindi scrivere:

$$\vec{g} = G \frac{m_{G,T} m_G}{R^2} \frac{1}{m_i}$$

Poiché  $|\vec{g}|$  è sperimentalmente costante, possiamo concludere che  $m_G/m_i$  sia una costante, l'ipotesi più semplice è supporre che il rapporto sia uguale a uno, ossia che  $m_G = m_i$ . Il fatto che la massa gravitazionale di un oggetto sia uguale alla massa inerziale non ha tutt'ora spiegazione teorica.

### ***Il lavoro della forza gravitazionale***

Se proviamo a calcolare il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale otteniamo:

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r \cdot d\vec{s} = -G m_1 m_2 \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = \\ &= -G m_1 m_2 \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = - \left[ -G \frac{m_1 m_2}{r_B} + G \frac{m_1 m_2}{r_A} \right] \end{aligned}$$

Da cui ricaviamo:

$$L_{AB} = - \left[ \left( -G \frac{m_1 m_2}{r_B} \right) - \left( -G \frac{m_1 m_2}{r_A} \right) \right]$$

Da questa formula ricaviamo che:

$$E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

Il segno negativo davanti all'energia potenziale indica che si tratta di una forza attrattiva. Se quindi:

- Un corpo si avvicina al centro della forza gravitazionale dalla posizione  $B$  alla posizione  $A$  (con  $r_A < r_B$ ) otteniamo:

$$\frac{1}{r_A} > \frac{1}{r_B}$$

$$E_{pA} < E_{pB}$$

$$L_{BA} = -\Delta E_p > 0$$

Quindi il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale è positivo. Pertanto, l'energia cinetica aumenta.

- Un corpo si allontana dal centro della forza gravitazionale dalla posizione  $A$  alla posizione  $B$  (con  $r_A < r_B$ ) otteniamo:

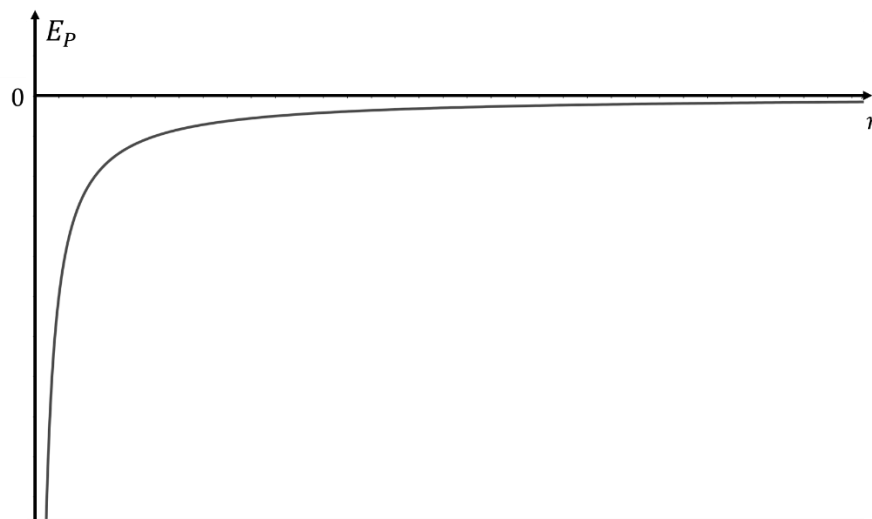
$$\frac{1}{r_A} > \frac{1}{r_B}$$

$$E_{pA} < E_{pB}$$

$$L_{AB} = -\Delta E_p < 0$$

Quindi il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale è quindi negativo. L'energia cinetica quindi diminuisce.

Notiamo che per  $r \rightarrow 0, E_p \rightarrow -\infty$  mentre per  $r \rightarrow \infty, E_p \rightarrow 0$ . Il grafico dell'energia potenziale rispetto alla distanza è:



Potremmo quindi applicare al corpo sottoposto a forza gravitazionale una forza non conservativa per allontanarlo da una posizione  $A$  all'infinito:

$$L_G + L_{Non\ Cons} = \Delta E_k$$

Imponiamo  $\Delta E_k = cost$  e otteniamo:

$$L_{Non\ Cons} = -L_G = \Delta E_P$$

A distanza  $r_B$  che tende a infinito, il corpo avrà energia potenziale nulla. Otteniamo quindi:

$$L_{Non\ Cons} = -E_{PA} = -\left(-G \frac{m_1 m_2}{r_A}\right)$$

$$L_{Non\ Cons} = G \frac{m_1 m_2}{r_A}$$

### 2.9.1. Orbite attorno ai pianeti

Abbiamo precedentemente detto che i pianeti del sistema solare orbitano attorno al Sole seguendo una traiettoria ellittica. Tuttavia, non tutti i corpi nello spazio seguono traiettorie ellittiche.

Ricordando che l'energia meccanica di un corpo sottoposta a una forza centrale è costante:

$$E_m = E_k + E_p = \text{cost.}$$

vediamo ora i tipi di orbita che un corpo nello spazio può avere:

#### ***L'orbita iperbolica***

Se l'energia meccanica di un corpo rispetto a un pianeta è maggiore di zero il corpo percorrerà una **traiettoria iperbolica** (non lo dimostriamo). Matematicamente:

$$E_m > 0$$

$$E_k + E_p > 0$$

$$E_k > -E_p$$

$$E_k > G \frac{m_1 m_2}{r}$$

In questo caso quindi il corpo passerà vicino al pianeta deviando la sua traiettoria per poi “fuggire” dall'attrazione gravitazionale.

#### ***L'orbita parabolica***

Se l'energia meccanica è invece esattamente uguale a zero, il corpo percorrerà una **traiettoria parabolica**. Possiamo vedere questo caso come caso limite:

$$E_m = 0$$

$$E_k + E_p = 0$$

$$E_k = -E_p$$

$$E_k = G \frac{m_1 m_2}{r}$$

Una minima deviazione di velocità cambierebbe quindi il tipo di orbita del pianeta. Le orbite iperboliche e paraboliche sono dette **orbite aperte**.

### ***L'orbita chiusa***

Se l'energia meccanica del corpo è negativa, il corpo resta “intrappolato” nell'attrazione gravitazionale. Matematicamente:

$$\begin{aligned} E_m &< 0 \\ E_k + E_p &< 0 \\ E_k &< -E_p \\ E_k &< G \frac{m_1 m_2}{r} \end{aligned}$$

Ricordando che  $E_k = E_m - E_p$  e che  $E_k \geq 0$ , vale necessariamente che  $E_p \leq E_m$ . Da ciò ricaviamo che:

$$\begin{aligned} -G \frac{m_1 m_2}{r} &\leq E_m \\ r_{Max} &\leq G \frac{m_1 m_2}{E_m} \end{aligned}$$

Otteniamo quindi che il corpo avrà una distanza massima dal pianeta pari a  $r$ . Questo è il caso generale, in generale l'energia cinetica può non essere nulla.

### ***L'orbita ellittica***

Conoscendo la distanza massima e minima del corpo possiamo ricavare la velocità massima e minima del corpo e viceversa.

Il corpo raggiungerà un'energia cinetica massima nel punto dell'orbita più vicino al pianeta attorno al quale si orbita, quindi:

$$\begin{aligned} E_k &< E_{kMax} \\ E_{kMax} &= E_{pMin} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{Max}^2 &= G \frac{m_1 m_2}{r_{Min}} \end{aligned}$$

$r_{Min} = 2G \frac{m_2}{v_{Max}^2} \quad o \quad v_{Max}^2 = 2G \frac{m_2}{r_{Min}}$
---

Dove  $m_2$  è la massa del pianeta attorno al quale si sta ruotando. Allo stesso modo possiamo ricavare distanza massima o velocità minima. Conoscendo la velocità in un punto qualsiasi dell'orbita è inoltre possibile ricavare la velocità massima e minima tenendo conto che la velocità areale è costante.

### ***L'orbita circolare***

Se  $E_k$  risulta essere costante, considerando che  $E_m = E_p + E_k = cost$ , otteniamo che:

$$E_p = E_m - E_k = \text{cost}$$

$$-G \frac{m_1 m_2}{r} = \text{cost}$$

La distanza dal pianeta risulterà quindi essere costante. Il moto del corpo quindi sarà un **moto circolare uniforme**.

## 2.9.2. Il campo gravitazionale

Abbiamo visto che tra due masse vi è una forza attrattiva:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r = \left( -G \frac{m_1}{r^2} \hat{u}_r \right) m_2$$

Se quindi consideriamo la forza che il corpo 1 applica su 2, notiamo che essa può essere espressa come un valore per la massa di 2. Quello che succede è che il corpo 1 crea una perturbazione dello spazio attorno ad esso. Se un corpo (nel nostro caso 2) si troverà in quello spazio, esso subirà una forza che dipende appunto dalla perturbazione dello spazio. Chiamiamo questa perturbazione **campo gravitazionale**.

Il campo gravitazionale (indicato con  $\vec{G}$ ) generato da una massa  $m$  è:

$$\vec{G} = -G \frac{m}{r^2} \hat{u}_r$$

Notiamo che la perturbazione dello spazio non è uniforme, ma è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal corpo che lo genera. Ponendo quindi un corpo di massa  $m_p$  nello spazio esso sarà sottoposto a una forza:

$$\vec{F} = \vec{G}m$$

Diretta verso il corpo che genera il campo. Dall'analisi dimensionale ricaviamo:

$$[\vec{G}] = \frac{[\vec{F}]}{[M]} = \frac{N}{kg} = m/s^2$$

Per quanto questo campo “si manifesti” quando poniamo una massa nello spazio, esso è sempre presente. Dalla formula dell'energia potenziale gravitazionale:

$$E_p = -G \frac{m_G m_p}{r}$$

Notiamo che possiamo scrivere:

$$E_p = - \underbrace{\frac{G m_G}{r}}_V m_p$$



La quantità  $V$  è detta **potenziale gravitazionale** e può essere calcolato in questo modo:

$$V = \frac{E_P}{m_P}$$

Dove  $m_P$  è una massa di prova posta nel campo gravitazionale. Da questa formula ricaviamo:

$$\begin{aligned} E_P &= m_P V \\ L_{AB} &= -\Delta E_P = -(m_P V_B - m_P V_A) \\ L_{AB} &= -\Delta V m_P \end{aligned}$$

## 2.10. La forza elettrostatica

Abbiamo precedentemente detto che la forza tra due cariche elettriche è data dalla formula:

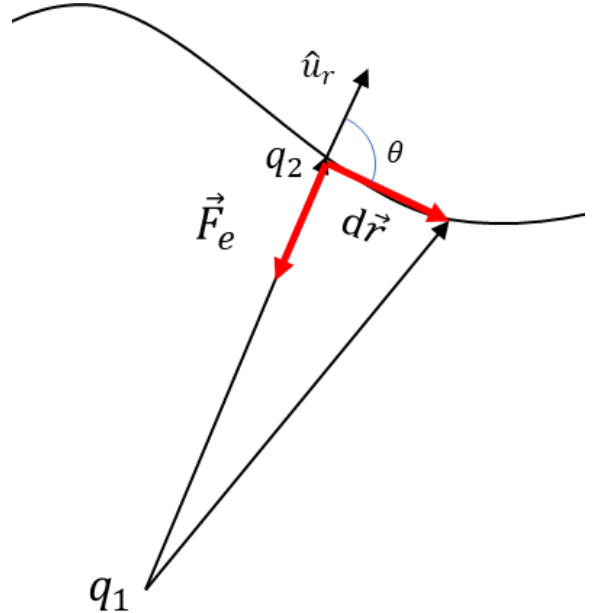
$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}_r$$

Abbiamo già precedentemente dimostrato che le forze centrali a simmetria sferica sono conservative. È possibile anche dimostrarlo in questo modo. Consideriamo una carica che si muove su una traiettoria sottoposta a una forza elettrostatica verso la carica  $q_1$ . Se calcoliamo il lavoro della forza otteniamo:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = \int_A^B F_e d\cos\theta$$

Notiamo che  $d\cos\theta$  non è altro che la proiezione di  $d\vec{r}$  su  $\hat{u}_r$ . Possiamo quindi scrivere

$$d\cos\theta = dr$$



Dove con  $dr$  indichiamo la variazione della distanza di  $q_2$  rispetto a  $q_1$ . Se proseguiamo coi calcoli otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_A^B F_e dr = \int_A^B \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} dr = \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_A^B = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right) \end{aligned}$$

Otteniamo quindi:

$$L_{AB} = - \left( + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A} \right)$$

Il lavoro non dipende dalla traiettoria percorsa, da cui:

$$E_P = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Notiamo che il segno dipende dal segno delle cariche. Se:

- $q_1 q_2 < 0$  l'energia potenziale risulta essere:

$$E_P = - \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon_0 r}$$

La forza è quindi **attrattiva**, infatti con l'aumentare della distanza di  $q_2$  da  $q_1$  l'energia potenziale aumenta e la forza compie un lavoro negativo (vedere [PAGINA 70](#))

- $q_1 q_2 > 0$  l'energia potenziale risulta essere:

$$E_P = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon_0 r}$$

La forza è quindi **repulsiva**. Se la distanza aumenta da  $A$  a  $B$  otteniamo:

$$\begin{aligned} r_B &> r_A \\ \frac{1}{r_B} &< \frac{1}{r_A} \\ \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon_0 r_B} &< \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon_0 r_A} \end{aligned}$$

Quindi  $\Delta E_P < 0$ , ossia  $L_{AB} > 0$ . Allo stesso possiamo studiare il caso in cui  $q_2$  si avvicina a  $q_1$ .

## 2.10.1. Il campo elettrostatico

Il discorso sul **campo elettrostatico** è analogo a quello del campo gravitazionale. Dalla forza elettrostatica:

$$\vec{F}_e = \frac{q_C q_P}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r = \left( \frac{q_C}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r \right) q_P$$

Otteniamo che la carica  $q_C$  crea una perturbazione dello spazio, detta campo elettrostatico:

$$\vec{E} = \frac{q_C}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r$$

Ponendo una carica  $q_P$  all'interno dello spazio essa sarà sottoposta a una forza:

$$\vec{F}_e = \vec{E}q_P$$

Notiamo che la forza è diretta verso la carica  $q_C$ . Il verso dipende dai segni delle due cariche. Dall'analisi dimensionale otteniamo;

$$[\vec{E}] = \frac{[\vec{F}]}{[q]} = \frac{N}{C}$$

Abbiamo inoltre detto che l'energia potenziale di una carica sottoposta a forza elettrostatica è:

$$E_P = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r}\right) q_2$$

Da cui il **potenziale elettrico**:

$$\begin{aligned} V &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \\ E_P &= Vq_2 \\ [V] &= \frac{[E]}{[q]} = \frac{J}{C} = V \end{aligned}$$

L'unità di misura del potenziale elettrico è il **volt (V)**. Ricaviamo quindi che:

$$\begin{aligned} L_{AB} &= -\Delta E_P = -(V_B q - V_A q) \\ L_{AB} &= -\Delta V q \end{aligned}$$

Spesso per indicare l'energia potenziale di una carica elettrica è usato l'**elettronvolt**, definito in questo modo:

$$1eV = e^- \cdot 1V = 1,6 \cdot 10^{-19}$$

## 2.10.2. Il moto di una carica in un campo elettrico

La forza elettrica è molto utilizzata in apparecchi elettronici. La possibilità di creare differenze di potenziale permette infatti di controllare il moto di una carica (funzionamento delle televisioni a tubo catodico). Poiché la forza elettrica è conservativa otteniamo infatti:

$$\begin{aligned} E_m &= E_k + E_P \\ \Delta E_m &= 0 \\ \Delta E_k + \Delta E_P &= 0 \\ \Delta E_k &= -\Delta E_P = -\Delta V q \end{aligned}$$

Da cui:

$$\Delta E_k = -\Delta V q$$

Otteniamo quindi:

$$\Delta E_k = -q(V_B - V_A)$$

Se quindi:

- $\Delta V \cdot q > 0$  allora la carica verrà **decelerata** ( $\Delta E_k < 0$ )
- $\Delta V \cdot q < 0$  allora la carica verrà **accelerata** ( $\Delta E_k > 0$ )

### 2.10.3. Il modello di Bohr

Secondo il modello **atomico di Bohr**, proposto da Niels Bohr nel 1913, l'atomo è formato da un nucleo attorno al quale si muovono di moto circolare uniforme gli elettroni. È pertanto possibile associare a questi elettroni un momento angolare  $L_0$ . Si dimostra che:

$$|\vec{L}_0| = n \frac{h}{2\pi} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

Dove  $h$  è la **costante di Plank** ( $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ ). Poiché il momento angolare dell'elettrone dipende dallo scalare  $n$ , diciamo che l'**energia è quantizzata**. Ricordando che:

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times m_e \vec{v}$$

Essendo un moto circolare, vale che  $\vec{r} \perp \vec{v}$ . Possiamo quindi scrivere:

$$|\vec{L}_0| = r m_e v \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = r m_e v$$

Dove  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$ . Eguagliando i due momenti angolari otteniamo:

$$rmv = n \frac{h}{2\pi}$$

$$v = n \frac{h}{2\pi mr}$$

Consideriamo ora l'atomo di idrogeno (1 protone e 1 elettrone). Possiamo quindi ricavare  $v$  conoscendo la forza elettrostatica tra il nucleo e l'elettrone (sappiamo che  $|e^-| = |p^+| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ):

$$\vec{F}_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{u}_r = -\frac{|e^-|}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{u}_r$$

Con  $\epsilon = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$ . Poiché il moto è circolare uniforme possiamo scrivere:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$-\frac{|e^-|}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r = -m_e \frac{v^2}{r} \hat{u}_r$$

$$\frac{|e^-|}{4\pi\epsilon_0 r} = m_e \left( \frac{h}{2\pi m r} \right)^2$$

Da cui:

$$r = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e |e^-|^2} = \frac{(6,62 \cdot 10^{-34})^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{\pi \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot (1,67 \cdot 10^{-19})^2} \left[ \frac{(J \cdot s)^2 \cdot \frac{C^2}{N \cdot m^2}}{kg \cdot C^2} \right]$$

Ricaviamo quindi il raggio del nucleo di idrogeno:

$$r = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

### ***L'energia di legame***

Possiamo quindi trovare il lavoro minimo necessario a portare l'elettrone a distanza infinita. Ponendo la velocità finale nulla e il raggio finale infinito, procediamo coi calcoli:

$$L_{Fe} + L_{Est} = \Delta E_k$$

Poiché la forza elettrostatica è conservativa vale che  $L_{Fe} = -\Delta E_p$ , da cui:

$$L_{Est} = \Delta E_k \pm \Delta E_p$$

$$L_{Est} = (E_{p_f} + E_{k_f}) - (E_{p_i} + E_{k_i})$$

Ricordando che  $v_f = 0$  e  $r_f = \infty$  scriviamo che:

$$E_{k_f} = \frac{1}{2} m v_f^2 = 0$$

$$E_p = \frac{|e^-|}{4\pi\epsilon_0 r_f^2} = 0$$

Sappiamo che  $m v^2 = \frac{|e^-|^2}{4\pi\epsilon_0 r}$  Possiamo quindi scrivere:

$$E_{k_i} = \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} \frac{|e^-|^2}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

$$E_{p_i} = -\frac{|e^-|}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}$$

$$L_{Est} = -(E_{p_i} + E_{k_i}) = -\left( \frac{1}{2} \frac{|e^-|^2}{4\pi\epsilon_0 r_i} - \frac{|e^-|}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \right)$$

Da cui:

$$L_{Est} = \frac{1}{2} \frac{|e^-|^2}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}$$

Sostituendo i numeri otteniamo  $L_{Est} = 13.6 \text{ eV} = 13.6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ . Questo valore è detto **costante di Rydberg**.

## 2.11. Il centro di massa

Fino ad ora abbiamo considerato gli oggetti in moto come punti materiali. Nella realtà però i corpi sono formati da moltissimo punti materiali. È necessario quindi riscrivere le leggi della dinamica per i sistemi di punti. Per fare ciò si considera una “media pesata” delle masse dei punti che ci fornisce il **centro di massa** del sistema di punti, ossia un punto materiale nel quale si “concentra la massa del sistema”. Possiamo trovare la posizione del centro di massa in questo modo:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Possiamo anche scomporre lungo gli assi ottenendo:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{CM_x} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{x}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \\ \vec{r}_{CM_y} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{y}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}\end{aligned}$$

La posizione del centro di massa può essere descritta a meno di una costante se considerata rispetto a sistemi di riferimento diversi, infatti vale che:

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &= \vec{r}'_i + \vec{r}_{OO'} \\ \vec{r}'_i &= \vec{r}_i - \vec{r}_{OO'}\end{aligned}$$

Sostituendo otteniamo:

$$\vec{r}'_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{OO'})}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} - \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{OO'}}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} - \vec{r}_{OO'} \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}}_{=1}$$

Quindi:

$$\vec{r}'_{CM} = \vec{r}_{CM} - \vec{r}_{OO'}$$

Il centro di massa viene descritto in modo diverso ma **le relazioni tra i punti non cambiano**.

### 2.11.1. Il moto del centro di massa

Per trovare la velocità del centro di massa utilizziamo l'operatore derivata:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{CM} &= \frac{d}{dt} \vec{r}_{CM} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \right) = \frac{1}{m_{TOT}} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \\ &= \frac{1}{m_{TOT}} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} m_i \vec{r}_i = \frac{1}{m_{TOT}} \cdot \sum_{i=1}^n \underbrace{m_i}_{=\vec{p}_i} \vec{v}_i = \frac{1}{m_{TOT}} \cdot \sum_{i=1}^n \vec{p}_i\end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{p}_{TOT}}{m_{TOT}}$$

Il centro di massa può essere pertanto considerato un punto particolare in cui si concentra tutta la massa. La quantità di moto di tutto il sistema è descritta dalla quantità di moto del centro di massa.

Per trovare l'accelerazione deriviamo la velocità ottenendo:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{m_{TOT}} \right) = \frac{1}{m_{TOT}} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{m_{TOT}} \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i$$

Riassumendo possiamo scrivere:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r}_{CM} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \\ \vec{v}_{CM} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{m_{TOT}} \\ \vec{a}_{CM} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i}{m_{TOT}}\end{aligned}}$$

### 2.11.2. Il teorema del centro di massa

Vediamo ora come scrivere le leggi di newton di un sistema di punti. Se consideriamo un sistema di punti, chiamiamo **forze interne** le forze di interazione tra i punti del sistema. Queste forze si presentano a coppie per il terzo principio della dinamica (sono di solito forze come tensione, forze elastica, forza elettrostatica, ecc.). Se quindi consideriamo un sistema di  $n$  punti vale il secondo principio di Newton:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{TOT} &= m_{TOT} \vec{a}_{CM} \\ m_{TOT} \vec{a}_{CM} &= m_{TOT} \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i}{m_{TOT}} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i\end{aligned}$$

Poiché abbiamo detto che possiamo distinguere le forze interne e esterne a un sistema, scriviamo:

$$= \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(E)} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(I)}$$

Per il terzo principio di Newton vale che  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(I)} = 0$ . Ricaviamo quindi il **teorema del centro di massa**:

$$m_{TOT} \vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(E)}$$

Quando si deve quindi studiare l'accelerazione di un sistema di punti si scrive la seconda legge di Newton tenendo conto soltanto delle forze esterne al sistema.

### 2.11.3. La quantità di moto di un sistema di punti

Chiamiamo  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(E)} = \vec{R}^{(E)}$ . Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned} \vec{R}^{(E)} &= m_{TOT} \vec{a}_{CM} = m_{TOT} \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = m_{TOT} \frac{d}{dt} \left( \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \right) = \\ &= \frac{m_{TOT}}{m_{TOT}} \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \right) = \frac{d \sum_{i=1}^n \vec{p}_i}{dt} \end{aligned}$$

Chiamiamo  $\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$ , ossia la quantità di moto totale del sistema. Possiamo pertanto scrivere la **prima equazione cardinale** (o **prima equazione della dinamica dei punti**):

$$\vec{R}^{(E)} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Questa formula ci dice che la risultante delle forze esterne è uguale alla derivata della quantità di moto totale del sistema. Da ciò ricaviamo che:

$$se \vec{R}^{(E)} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

Ossia che **se la risultante delle forze esterne è nulla, allora  $\vec{P}$  è costante**, ossia **la quantità di moto totale si conserva**. Se la quantità di moto del sistema si conserva, (ossia se  $\Delta \vec{P} = 0$ ), allora possiamo scrivere:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = m_{TOT} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{m_{TOT}} = \underbrace{m_{TOT}}_{cost} \vec{v}_{CM} \Rightarrow \vec{v}_{CM} \text{ è costante}$$



Il fatto che la quantità di moto del sistema, quindi la sua velocità, sia costante non implica che le velocità dei singoli punti siano costanti. Se ad esempio consideriamo un sistema di due punti sottoposto a una forza esterna totale nulla possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\vec{R}^{(E)} &= \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \\ \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) &= \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = 0 \\ m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= 0 \\ m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} &= -m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt}\end{aligned}$$

Notiamo che perché l'equazione sia verificata non è necessario che  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  siano costanti.

### 2.11.4. Il momento angolare di un sistema di punti

Ricordando la formula del momento angolare di un punto rispetto a un polo  $\Omega$ :

$$\vec{L}_\Omega = (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times m\vec{v} = (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{p}$$

Se consideriamo quindi un sistema di  $n$  punti, possiamo scrivere il **momento angolare totale come somma dei singoli momenti angolari**:

$$\vec{L}_{\Omega TOT} = \sum_{i=1}^n [(\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{p}_i]$$

Vediamo ora quali sono le proprietà del momento angolare totale dei sistemi di punti. Derivando il momento angolare totale otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_{\Omega TOT}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n [(\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{p}_i] = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} [(\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{p}_i] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{d}{dt} (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times m_i \vec{v}_i \right] + \sum_{i=1}^n \left[ (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i \right] - \sum_{i=1}^n \left[ \frac{d\vec{r}_\Omega}{dt} \times m_i \vec{v}_i \right] + \sum_{i=1}^n [(\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_i] = \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\left[ \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i \right]}_{=0} - \sum_{i=1}^n [\vec{v}_\Omega \times m_i \vec{v}_i] + \sum_{i=1}^n [(\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times (\vec{F}_i^{(I)} + \vec{F}_i^{(E)})]\end{aligned}$$

*perchè  $\vec{v}_i \parallel \vec{v}_i$*

Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_{\Omega TOT}}{dt} &= -\vec{v}_{\Omega} \times \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^n [(\vec{r}_i - \vec{r}_{\Omega}) \times \vec{F}_i^{(I)}] + \sum_{i=1}^n [(\vec{r}_i - \vec{r}_{\Omega}) \times \vec{F}_i^{(E)}] = \\ &= -\vec{v}_{\Omega} \times m_{TOT} \vec{v}_{CM} + \sum_{i=1}^n \vec{M}_{\Omega_i}^{(I)} + \sum_{i=1}^n \vec{M}_{\Omega_i}^{(E)}\end{aligned}$$

Possiamo dire che  $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i^{(I)} = 0$ . Infatti, se prendiamo ad esempio un sistema di due punti  $A$  e  $B$ , chiamiamo  $\vec{F}_{AB}$  e  $\vec{F}_{BA}$  le forze di interazione tra i due punti. Queste due forze sono dirette lungo la retta che collega i due punti (1). Vale inoltre che:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned}\vec{M}_{\Omega TOT} &= \vec{M}_{\Omega_A} + \vec{M}_{\Omega_B} = (\vec{r}_A - \vec{r}_{\Omega}) \times \vec{F}_{AB} - (\vec{r}_B - \vec{r}_{\Omega}) \times \vec{F}_{AB} = \\ &= [(\vec{r}_A - \vec{r}_{\Omega}) - (\vec{r}_B - \vec{r}_{\Omega})] \times \vec{F}_{AB} = [(\vec{r}_A - \vec{r}_{\Omega}) - (\vec{r}_B - \vec{r}_{\Omega})] \times \vec{F}_{AB} = \\ &= (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}_{AB}\end{aligned}$$

Notiamo che per (1) vale che  $(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \parallel \vec{F}_{AB}$ . Pertanto:

$$\vec{M}_{\Omega TOT} = 0$$

Arriviamo quindi a scrivere:

$$\frac{d\vec{L}_{\Omega TOT}}{dt} = -\vec{v}_{\Omega} \times m_{TOT} \vec{v}_{CM} + \vec{M}_{\Omega TOT}^{(E)}$$

Se:

- $\vec{v}_{\Omega} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{\Omega} \times m_{TOT} \vec{v}_{CM} = 0$
- $\vec{v}_{\Omega} \parallel \vec{v}_{CM} \Rightarrow \vec{v}_{\Omega} \times m_{TOT} \vec{v}_{CM} = 0$

Se uno dei due casi è verificato, otteniamo la **seconda equazione cardinale** (o **seconda equazione della dinamica dei punti**):

$$\frac{d\vec{L}_{\Omega TOT}}{dt} = \vec{M}_{\Omega TOT}^{(E)}$$

Se:

- $\vec{P} = 0$  e  $\vec{L}_{\Omega TOT} = 0$  si dice che **il sistema è in equilibrio**
- $\vec{P} = cost$  e  $\vec{L}_{\Omega TOT} = cost$  si dice che **il sistema è isolato**

## 2.11.5. I teoremi di König

Consideriamo un sistema di riferimento inerziale  $O$  e un sistema di punti con centro di massa  $CM$ . Scriviamo le coordinate di  $CM$  rispetto a  $O$ :

$$\vec{r}_{CM} = \vec{r}_{OO'} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Se consideriamo un punto del sistema di punti possiamo scrivere:

$$\vec{r} = \vec{r}_{OO'} + \vec{r}' = \vec{r}_{CM} + \vec{r}'$$

Possiamo a questo punto scrivere velocità di  $P$ :

$$\begin{aligned}\vec{v}_{OO'} &= \vec{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \\ \vec{v} &= \vec{v}' + \vec{v}_{CM} = \vec{v}' + \vec{v}_{CM}\end{aligned}$$

E accelerazione:

$$\begin{aligned}\vec{a}_{OO'} &= \vec{a}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \\ \vec{a} &= \vec{a}' + \vec{a}_{CM} = \vec{a}' + \vec{a}_{CM}\end{aligned}$$

Se scriviamo le coordinate del centro di massa rispetto al sistema di riferimento centrato in  $O'$  e con gli assi invarianti rispetto al sistema  $O$  (poiché  $O'$  è solidale con  $CM$ ) otteniamo:

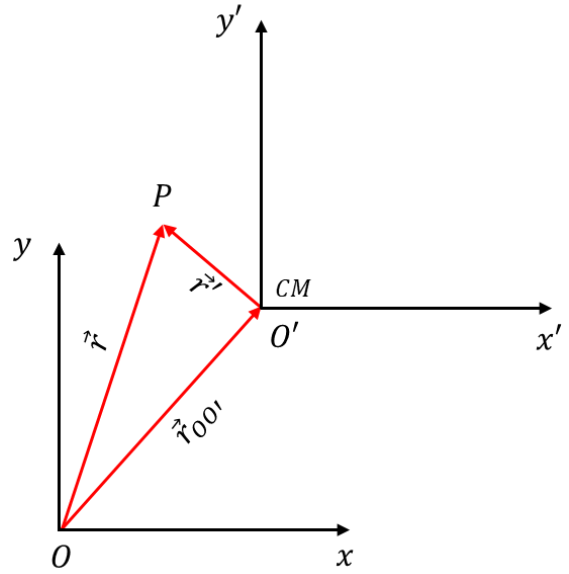
$$\begin{aligned}\vec{r}'_{CM} &= 0 \\ \vec{r}'_{CM} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \\ \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i &= 0 \quad (1)\end{aligned}$$

Stessa cosa per la velocità:

$$\begin{aligned}\vec{v}'_{CM} &= 0 \\ \vec{v}'_{CM} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \\ \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i &= 0 \quad (2)\end{aligned}$$

### ***Il primo teorema di König***

Scriviamo ora il momento angolare totale del sistema di punti rispetto al sistema  $O$ :



$$\begin{aligned}
\vec{L}_{TOT} &= \sum_{i=1}^n \vec{L}_{O_i} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n [(\vec{r}_{CM} + \vec{r}'_i) \times m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM})] = \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^n (\vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i)}_{\substack{\text{momento angolare} \\ \text{misurato rispetto} \\ \text{al sistema } O'}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n (\vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_{CM})}_{=0 \text{ per (1)}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n (\vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}'_i)}_{=0 \text{ per (2)}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n (\vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM})}_{\vec{r}_{CM} \times (\sum m_i) \vec{v}_{CM}}
\end{aligned}$$

Da cui ricaviamo il **primo teorema di König**:

$$\vec{L}_{TOT} = \vec{L}'_{TOT} + \vec{r}_{CM} \times m_{TOT} \vec{v}_{CM}$$

### ***Il secondo teorema di König***

Se calcoliamo l'energia cinetica totale del sistema otteniamo:

$$\begin{aligned}
E_{K_{TOT}} &= \sum_{i=1}^n E_{K_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i |\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}|^2 = \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i |\vec{v}'_i|^2}_{\substack{\text{energia cinetica} \\ \text{misurata} \\ \text{rispetto a } O'}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_{CM}|^2}_{\frac{1}{2} m_{TOT} v_{CM}^2} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i |2 \vec{v}'_i \vec{v}_{CM}|}_{=0 \text{ per (2)}}
\end{aligned}$$

Da cui ricaviamo il **secondo teorema di König**:

$$E_{K_{TOT}} = E'_{K_{TOT}} + \frac{1}{2} m_{TOT} v_{CM}^2$$

## **2.11.6. Il teorema dell'energia cinetica**

Possiamo scrivere il lavoro totale applicato sul sistema come:

$$L_{TOT} = \sum_{i=1}^n L_i$$

Poiché vale che  $L = \Delta E_k$  (teorema delle forze vive):

$$\sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n \Delta E_{K_i}$$

Da cui:

$$L_{TOT} = \Delta E_{K_{TOT}}$$

Ricordando la definizione di lavoro  $L = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , procediamo coi calcoli (chiamiamo  $\vec{R}$  la risultante delle forze applicate al sistema):

$$L_{TOT} = \int \vec{R} \cdot d\vec{r} = \int \vec{R}^{(E)} \cdot d\vec{r} + \int \vec{R}^{(I)} \cdot d\vec{r}$$

In questo caso, la componente  $\int \vec{R}^{(I)} \cdot d\vec{r}$  non è per forza nulla. Infatti, se prendiamo ad esempio un sistema di due punti  $A$  e  $B$ , chiamiamo  $\vec{F}_{AB}$  e  $\vec{F}_{BA}$  le forze di interazione tra i due punti. Queste due forze sono dirette lungo la retta che collega i due punti. Vale inoltre che:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Scriviamo quindi:

$$\begin{aligned} L^{(I)} &= \int \vec{F}_{AB} \cdot d\vec{r}_A + \int \vec{F}_{BA} \cdot d\vec{r}_B = \int \vec{F}_{AB} \cdot d\vec{r}_A - \int \vec{F}_{AB} \cdot d\vec{r}_B = \\ &= \int \vec{F}_{AB} \cdot d(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \end{aligned}$$

$d(\vec{r}_A - \vec{r}_B)$  è la variazione infinitesima della distanza tra i due punti. Se quindi un punto si muove rispetto all'altro vale che:

$$d(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \neq 0$$

Concludiamo che:

$$\int \vec{R}^{(E)} \cdot d\vec{r} + \int \vec{R}^{(I)} \cdot d\vec{r} = L^{(E)} + L^{(I)}$$

Dal teorema delle forze vive otteniamo il **teorema dell'energia cinetica per i sistemi di punti**:

$$\Delta E_{kTOT} = L^{(E)} + L^{(I)}$$

## 2.12. Gli urti

Definiamo gli urti come interazioni tra due o più punti materiali che avvengono in un tempo “piccolo” rispetto al tempo di osservazione. Consideriamo ad esempio due palle da biliardo che viaggiano a l'una contro l'altra. Come si comportano nel tempo?



Chiamiamo  $\vec{p}_1$  e  $\vec{p}_2$  le quantità di moto delle due palle da biliardo (che considereremo come punti materiali) e scriviamone le equazioni delle forze:

$$\vec{P}_1 + \vec{N}_1 = m\vec{a}_1$$

$$\vec{P}_2 + \vec{N}_2 = m\vec{a}_2$$

Dalla **prima equazione cardinale** ricaviamo che:

- Se si muovono a velocità costante (quindi se  $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = 0$ ), vale che  $\vec{R}^{(E)} = 0$ . Pertanto, la quantità di moto totale si conserva, quindi:

$$\vec{P}_{TOT} = \underbrace{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}_{\text{prima dell'urto}} = \underbrace{\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2}_{\text{dopo l'urto}}$$

- Se invece  $\vec{R}^{(E)} \neq 0$ , applicando il teorema dell'impulso otteniamo (chiamando  $\vec{J}^{(E)}$  l'**impulso delle forze esterne**):

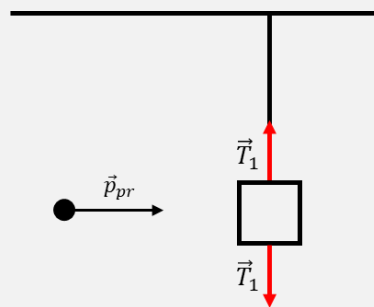
$$\Delta\vec{P}_{TOT} = \int \vec{R}^{(E)} dt = \vec{J}^{(E)}$$

Poiché le forze che agiscono al momento dell'urto sono impulsive (hanno modulo molto grande), se consideriamo il brevissimo intervallo di tempo in cui agiscono, **possiamo trascurare le altre forze non impulsive, interne o esterne.**

Concludiamo che se  $\vec{R}^{(E)}$  non è impulsiva (ad esempio nel caso di forze peso e reazioni vincolari), la **quantità di moto si conserva**.

### Esempio 2.15. Controesempio pendolo/proiettile

Se consideriamo un proiettile che colpisce un pendolo, notiamo che la quantità di moto totale non si conserva.



Infatti, nell'istante iniziale avremo (considerando un proiettile che si muove a velocità molto elevate e il pendolo fermo):

$$\begin{aligned}\vec{p}_{pr} &= m\vec{v}_{pr} \\ \vec{p}_{pe} &= 0\end{aligned}$$

Il modulo della tensione della fune sarà  $T_i = m_{pe}g$ . Appena dopo l'urto, il pendolo comincerà a muoversi spinto dall'urto del proiettile. La tensione nell'istante appena dopo l'urto sarà quindi:

$$T_f = m_{pe}g + m \frac{v_{pe}^2}{L}$$

Consideriamo quindi la tensione come forze impulsiva, visto che passa da zero a modulo significativo in un istante di tempo molto breve. Anche se la quantità di moto non si conserva, ci si può affidare al primo teorema di König.

### 2.12.1. Gli urti e il momento angolare

Tornando all'esempio delle palle da biliardo, notiamo che nel momento dell'urto il centro di massa coincide con la posizione in cui avviene l'urto. Se calcoliamo il momento angolare totale rispetto al centro di massa:

$$\vec{L}'_{TOT} = \vec{r}'_1 \times m\vec{v}'_1 + \vec{r}'_2 \times m\vec{v}'_2$$

Poiché abbiamo detto che nell'urto le due palle da biliardo si trovano nella stessa posizione, che coincide con il centro di massa, notiamo che  $|\vec{r}'_1| = |\vec{r}'_2| = 0$ , perciò:

$$\vec{L}'_{TOT} = 0$$

Appena prima dell'urto avremo quindi che il momento angolare del sistema è:

$$\vec{L}_{TOT_i} = \vec{r}_{CM_i} \times m_{TOT}\vec{v}_{CM_i}$$

Mentre appena dopo:

$$\vec{L}_{TOT_f} = \vec{r}_{CM_f} \times m_{TOT}\vec{v}_{CM_f}$$

In quel brevissimo istante di tempo il centro di massa non si muove, vale che:

$$\vec{r}_{CM_i} = \vec{r}_{CM_f}$$

Poiché stiamo considerando un caso in cui  $\vec{R}^{(E)} = 0$ , sappiamo che la quantità di moto totale si conserva (ossia  $\vec{p}_i = m_{TOT}\vec{v}_{CM_i} = m_{TOT}\vec{v}_{CM_f} = \vec{p}_f$ ). Concludiamo quindi che:

$$\vec{L}_{TOT_i} = \vec{L}_{TOT_f}$$

Nel caso di conservazione della quantità di moto possiamo quindi dire che **si conserva anche il momento angolare**.

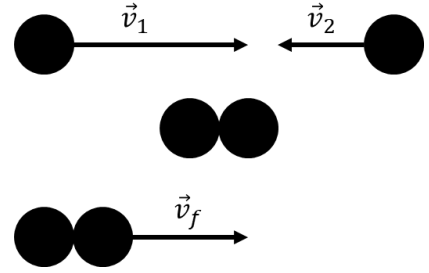
### 2.12.2. Urti totalmente anelastici

Si dice che un urto è completamente anelastico se dopo l'urto le due masse si muovono insieme (possiamo dire che le masse si “fondono”). Se la risultante delle forze esterne è nulla vale che:

$$\vec{P}_{TOT} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{cost.}$$

Dato che le due masse dopo l'urto si muovono insieme, possiamo dire che  $\vec{v}'_1 = \vec{v}'_2 = \vec{v}_f$ , da cui:

$$\begin{aligned} \vec{v}'_1 m_1 + \vec{v}'_2 m_2 &= \vec{v}_1 m_1 + \vec{v}_2 m_2 \\ (m_1 + m_2) \vec{v}_f &= \vec{v}_1 m_1 + \vec{v}_2 m_2 \quad (1) \end{aligned}$$



Sappiamo che la velocità del centro di massa è data da:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{v}_1 m_1 + \vec{v}_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

Per l'equazione (1) possiamo scrivere:

$$\vec{v}_{CM} = \vec{v}_f$$

Per studiare l'energia cinetica del sistema utilizziamo il 2° teorema di König:

$$E_{kTOT} = E'_{kTOT} + \frac{1}{2} m_{TOT} v_{CM}^2$$

Poiché le due masse si muovono con velocità  $\vec{v}_f$  dopo l'urto, e  $\vec{v}_f = \vec{v}_{CM}$ , possiamo dire che  $E'_{kTOT_f}$  è nulla (ricordiamo che  $E'_{kTOT}$  è l'energia cinetica misurata rispetto al sistema solidale al centro di massa). L'equazione diventa quindi:

$$E_{kTOT_f} = \frac{1}{2} m_{TOT} v_{CM_f}^2$$

Poiché abbiamo detto che si conserva la quantità di moto, vale che:

$$\begin{aligned} m_{TOT} v_{CM_i}^2 &= m_{TOT} v_{CM_f}^2 \\ \Delta E_{kTOT} &= E_{kTOT_f} - E_{kTOT_i} = \frac{1}{2} m_{TOT} v_{CM_f}^2 - E'_{kTOT_i} - \frac{1}{2} m_{TOT} v_{CM_i}^2 \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che:

$$\Delta E_k = -E'_{kTOT_i}$$

L'energia cinetica diminuisce ( $\Delta E_k < 0$ ) poiché parte dell'energia del sistema viene utilizzata per “fondere” i due corpi.

### 2.12.3. Urti elastici

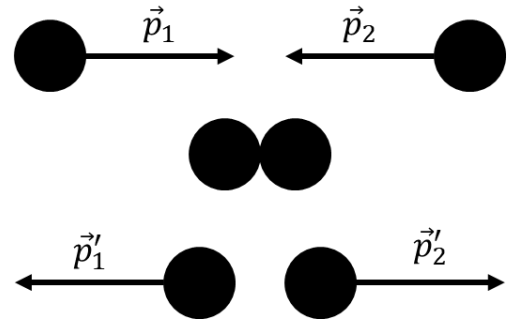
Si dice che un urto è elastico quando dopo l'urto i due corpi si muovono indipendentemente l'uno dall'altro e si deformano elasticamente, tornando alla forma iniziale dopo l'urto (conservazione dell'energia meccanica). Se la risultante delle forze esterne sul sistema è nulla vale che:



$$\vec{P}_{TOT} = cost.$$

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$$

Poiché appena prima e appena dopo l'urto la posizione delle palline rispetto al centro di massa è la stessa, l'energia potenziale (che si calcola esclusivamente rispetto alla posizione) è costante, ossia  $\Delta E_p = 0$ . Poiché:



$$\Delta E_m = \Delta E_k + \Delta E_p = 0$$

Da cui:

$$\Delta E_k = 0$$

Il caso più generale è tridimensionale e abbiamo sei incognite, le componenti della velocità dei due punti dopo l'urto, ma solo quattro equazioni (tre dalla conservazione di  $\vec{P}$  e una dalla conservazione di  $E_k$ ). Anche nel caso di urto nel piano abbiamo quattro incognite e tre equazioni. Quindi per risolvere un problema di urto elastico nel piano o nello spazio oltre a conoscere le velocità prima dell'urto bisogna avere qualche altra informazione sulle velocità dopo l'urto.

Nel caso *unidimensionale* invece abbiamo due equazioni di conservazione e due incognite (le velocità dei punti dopo l'urto). Possiamo pertanto risolvere facilmente.

Notiamo che se  $\Delta \vec{P}_{TOT} = 0$ , possiamo scrivere:

$$\vec{P}_{TOT} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\Delta \vec{P}_{TOT} = \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0$$

$$\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$$

Dal teorema dell'impulso sappiamo che  $\Delta \vec{p} = \vec{J} = \int \vec{F} dt$ . Quindi:

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{J}_1 = -\Delta \vec{p}_2 = -\vec{J}_2$$

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{J}_2$$

Ricaviamo che:

$$\int \vec{F}_1 dt = - \int \vec{F}_2 dt = \int -\vec{F}_2 dt$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Le forze impulsive che i due punti si applicano a vicenda, sono uguali e opposte. Pur non variando la quantità di moto del centro di massa (poiché sono forze interne che si annullano a vicenda), esse variano la quantità di moto dei singoli punti materiali.

## 2.13. Il corpo rigido

---

Chiamiamo **corpo rigido** un sistema di punti materiali nel quale le distanze tra coppie di punti restano invariate. In altre parole, un corpo rigido è un sistema di punti indeformabile. Per studiare il corpo rigido, risulta spesso comodo usare un sistema di riferimento solidale al corpo. Scegliamo ad esempio tre punti  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  del corpo rigido e poniamo:

$$P_1 \equiv O'$$

Spesso se possibile  $O'$  viene fatto coincidere con il centro di massa. Scegliamo ora gli assi in questo modo:

$$\overline{O'P_2} \in \hat{x}'$$

A questo punto scegliamo  $\hat{y}' \perp \hat{x}'$  tale che  $\hat{y}'$  appartiene al piano formato dai tre punti. Con la regola della mano destra, infine, otteniamo  $\hat{z}'$ . Possiamo quindi scrivere la posizione in funzione del tempo che sarà del tipo:

$$O'(x_{O'}(t), y_{O'}(t), z_{O'}(t))$$

Diciamo che la posizione del centro ha **tre gradi di libertà**, in quanto si può muovere lungo le tre dimensioni. Possiamo inoltre descrivere le rotazioni degli assi del sistema  $O'$  in funzione del tempo:

$$\begin{cases} \hat{x}' \rightarrow \theta(t) \\ \hat{y}' \rightarrow \psi(t) \\ \hat{z}' \rightarrow \alpha(t) \end{cases}$$

Diciamo che la rotazione degli assi ha a sua volta **tre gradi di libertà**, in quanto il sistema può ruotare nelle tre dimensioni.

### *Le equazioni del corpo rigido*

Poiché il corpo rigido è un sistema di punti, valgono le formule che avevamo descritto precedentemente per i sistemi di punti:

- Il **teorema del centro di massa**:

$$\vec{R}^{(E)} = m_{TOT} \vec{a}_{CM}$$

- La **prima equazione cardinale**:

$$\vec{R}^{(E)} = \frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt}$$

- La **seconda equazione cardinale**:

$$\vec{M}_O^{(E)} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

- Il **primo teorema di König**:

$$\vec{L}_{TOT} = \vec{L}'_{TOT} + \vec{r}_{CM} \times m_{TOT} \vec{v}_{CM}$$

- Il **secondo teorema di König**:

$$E_{kTOT} = E'_{kTOT} + \frac{1}{2} m_{TOT} v_{CM}^2$$

Consideriamo ora il **teorema dell'energia cinetica**:

$$\Delta E_{kTOT} = L^{(E)} + L^{(I)}$$

Avevamo detto che se i punti non si muovono gli uni rispetto agli altri, la componente  $L^{(I)}$  è nulla ([PAGINA 86](#)). Per il corpo rigido quindi, il teorema dell'energia cinetica diventa:

$$\Delta E_{kTOT} = L^{(E)}$$

## 2.13.1. La densità

### *La densità volumetrica*

Consideriamo un corpo qualsiasi e immaginiamo di dividerlo in infiniti volumi infinitesimi. Chiamiamo  $dv$  questi volumi. Ognuno di essi avrà una massa infinitesima, che chiameremo  $dm$ . Introduciamo quindi il concetto di **densità volumetrica**, ossia la massa infinitesima  $dm$  rapportata al volume infinitesimo  $dv$  nella quale è contenuta:

$$\rho = \frac{dm}{dv}$$

Dall'analisi dimensionale ricaviamo l'unità di misura:

$$[\rho] = \frac{[M]}{[L]^3} = \frac{kg}{m^3}$$

Nel caso di sistemi di punti discreti la massa totale è facile da calcolare:

$$m_{TOT} = \sum_{i=1}^n m_i$$

La densità invece risulta utile nel caso di sistemi di infiniti punti (la realtà è continua, non discreta). Per calcolarne la massa infatti, ricordando che  $dm = \rho dv$  possiamo scrivere la massa come sommatoria infinita di massa infinitesime:

$$m_{TOT} = \int dm = \int_0^{V_{tot}} \rho dv$$

Se il corpo ha densità costante, ossia  $\rho = cost.$ , possiamo raccogliere ottenendo:

$$m_{TOT} = \rho \int_0^{V_{tot}} dv = \rho V$$

### ***La densità superficiale***

A volte una dimensione può essere trascurata (ad esempio nel caso di fogli o dischi). Si parla in questo caso di **densità superficiale**, ossia la massa infinitesima  $dm$  rapportata alla superficie infinitesima  $ds$  nella quale è contenuta:

$$\sigma = \frac{dm}{ds}$$

$$[\sigma] = \frac{[M]}{[L]^2} = \frac{kg}{m^2}$$

La massa totale, in caso di superfici continue, può essere calcolata quindi come:

$$m_{TOT} = \int dm = \int_0^{S_{tot}} \sigma ds$$

### ***La densità lineare***

Quando le dimensioni trascurabili sono due (ad esempio nel caso di funi), si parla di **densità lineare**, ossia della quantità infinitesima di massa  $dm$  rapportata alla lunghezza infinitesima  $dl$  nella quale è contenuta:

$$\lambda = \frac{dm}{dl}$$

$$[\lambda] = \frac{[M]}{[L]} = \frac{kg}{m}$$

Nel caso di lunghezze continue la massa totale sarà:

$$m_{TOT} = \int dm = \int_0^{V_{tot}} \lambda dl$$

### ***Centro di massa di corpi continui***

Per calcolare il centro di massa di corpi continui, il concetto è lo stesso dei corpi discreti. Poiché si sommano infinite componenti infinitesimi, passiamo dalla sommatoria all'integrale, ottenendo:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} \rho dv}{\int \rho dv} = \frac{\int \rho(x, y, z) \vec{r}(x, y, z) d(x, y, z)}{m_{TOT}}$$

Possiamo quindi trovare il centro di massa, che nel caso di corpi rigidi prende il nome di **baricentro**.

### 2.13.2. La statica del corpo rigido

Iniziamo a studiare il comportamento di un corpo rigido che non trasla né ruota. Se il sistema di punti non trasla, per il **teorema del centro di massa** la risultante delle forze esterne è nulla. Inoltre, se il sistema non ruota, i momenti delle forze esterne devono essere nulli. Possiamo scrivere quindi le due condizioni dell'**equilibrio statico del corpo rigido**:

$$\vec{R}^{(E)} = 0$$

$$\vec{M}^{(E)} = 0$$

Vediamo un esempio di studio della statica del corpo rigido. Immaginiamo di avere un corpo. Immaginiamo da avere una scala poggiata su una parete. La massa totale della scala è  $m_{TOT}$ , il coefficiente di attrito statico tra la scala e il terreno è  $\mu_s$  e la lunghezza della scala è  $L$ . Chiamiamo  $\vec{P}$  la forza peso agente sulla scala,  $\vec{N}_P$  la reazione vincolare della parete e  $\vec{N}_T$  la reazione vincolare del terreno. Perché la scala si trovi in equilibrio statico deve valere che:

$$\vec{R}^{(E)} = 0$$

$$\vec{M}^{(E)} = 0$$

Iniziamo dallo studio delle forze. Scriviamo:

$$\vec{N}_P + \vec{N}_T + \vec{P} + \vec{F}_{AS} = 0$$

Scomponendo su  $x$  e  $y$  otteniamo:

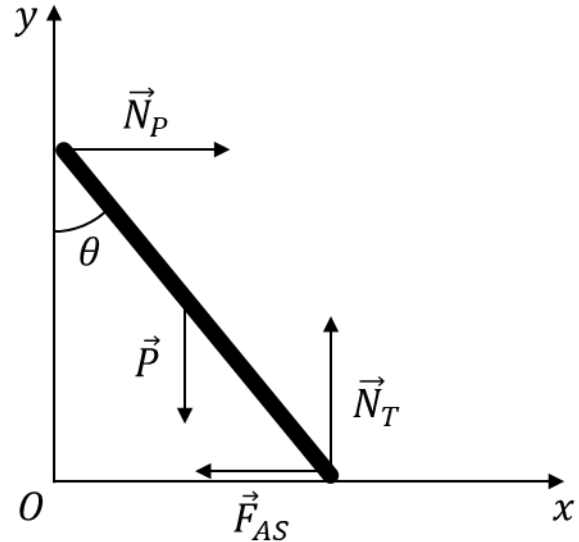
$$\begin{cases} x: N_P - F_{AS} = 0 \\ y: N_T - P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_P = F_{AS} \leq \mu_s N_T \\ N_T = P = m_{TOT}g \end{cases}$$

Otteniamo quindi:

$$\mu_s \geq \frac{N_P}{m_{TOT}g}$$

Studiamo ora i momenti. Possiamo **scegliere arbitrariamente il polo**, scegliamo ad esempio il punto di appoggio della scala sul terreno e chiamiamolo  $\Omega$ :

$$\vec{M}_{\Omega_{TOT}}^{(E)} = \vec{M}_{\Omega_P} + \vec{M}_{\Omega_{F_{AS}}} + \vec{M}_{\Omega_{N_P}} + \vec{M}_{\Omega_{N_T}}$$



Scriviamo i singoli momenti torcenti. Notiamo che le forze applicate in  $\Omega$  hanno momento nullo:

$$\begin{aligned}\vec{M}_{\Omega_{F_{AS}}} &= \underbrace{(\vec{r}_{F_{AS}} - \vec{r}_{\Omega})}_{\vec{r}_{F_{AS}} = \vec{r}_{\Omega}} \times \vec{F}_{AS} = 0 \\ \vec{M}_{\Omega_{N_T}} &= \underbrace{(\vec{r}_{F_{AS}} - \vec{r}_{\Omega})}_{\vec{r}_{F_{AS}} = \vec{r}_{\Omega}} \times \vec{N}_T = 0\end{aligned}$$

Il momento totale diventa quindi:

$$\vec{M}_{\Omega_{TOT}}^{(E)} = \vec{M}_{\Omega_P} + \vec{M}_{\Omega_{N_P}} = (\vec{r}_P - \vec{r}_{\Omega}) \times \vec{P} + (\vec{r}_{N_P} - \vec{r}_{\Omega}) \times \vec{N}_P$$

Poiché il momento delle forze deve essere nullo, scriviamo:

$$(\vec{r}_P - \vec{r}_{\Omega}) \times \vec{P} + (\vec{r}_{N_P} - \vec{r}_{\Omega}) \times \vec{N}_P = 0$$

Calcoliamo ora i momenti:

$$\begin{aligned}(\vec{r}_P - \vec{r}_{\Omega}) \times \vec{P} &= \frac{\vec{L}}{2} \times \vec{P} = m_{TOT} g \frac{L}{2} \sin(\pi - \theta) \hat{u}_z = m_{TOT} g \frac{L}{2} \sin(\theta) \hat{u}_z \\ (\vec{r}_{N_P} - \vec{r}_{\Omega}) \times \vec{N}_P &= \vec{L} \times \vec{N}_P = N_P L \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \hat{u}_z = -N_P L \cos(\theta) \hat{u}_z\end{aligned}$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}m_{TOT} g \frac{L}{2} \sin(\theta) \hat{u}_z &= N_P L \cos(\theta) \hat{u}_z \\ N_P &= \frac{m_{TOT} g}{2} \tan(\theta)\end{aligned}$$

Possiamo quindi risolvere il problema:

$$\mu_s \geq \frac{\frac{m_{TOT} g}{2} \tan(\theta)}{m_{TOT} g} = \frac{\tan(\theta)}{2}$$

### 2.13.3. La cinematica del corpo rigido

Studiamo ora come un corpo rigido può muoversi. Consideriamo un sistema di riferimento centrato in un punto  $O \equiv P$  del corpo rigido (spesso se possibile viene scelto  $P \equiv CM$ ) e solidale al corpo stesso (il nostro sistema ruota se il corpo ruota). Considerato un altro punto del corpo rigido  $A$ ), possiamo scrivere:

$$\vec{r}_A = \vec{r}'_A + \vec{r}_{OO'}, \quad (= \vec{r}'_A + \vec{r}_{CM})$$

Come abbiamo visto precedentemente, il sistema che scegliamo è solidale al corpo rigido, pertanto può anche ruotare. Se quindi scriviamo l'equazione della velocità di  $A$  otteniamo:

$$\vec{v}_A = \vec{v}'_A + \vec{v}_{OO'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_A$$

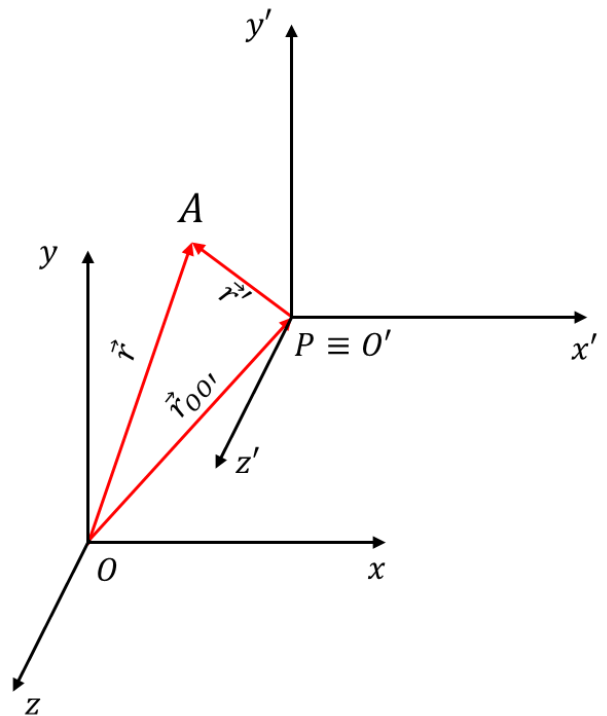
Poiché il corpo rigido è indeformabile (le distanze tra le coppie dei punti non cambiano), possiamo dire che  $\vec{v}'_A = 0$ . Inoltre, abbiamo detto che  $\vec{r}'_A = \vec{r}_A - \vec{r}_{OO'}$ . Otteniamo quindi che:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{OO'} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_{OO'})$$

Nel caso in cui  $O' \equiv CM$  scriviamo:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_{CM})$$

Vediamo i tipi di moti principali del corpo rigido



## 2.13.4. Il moto di traslazione

Se il corpo rigido si muove senza ruotare si parla di **moto di traslazione**. Se il corpo non ruota  $\vec{\omega} = 0$ . Se scriviamo le equazioni della velocità quindi otteniamo:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{OO'}$$

Poiché le distanze tra i punti non variano, qualsiasi punto del corpo si muoverà con la stessa velocità del centro di massa. Se scriviamo la **prima equazione cardinale** otteniamo:

$$\vec{R}^{(E)} = m_{TOT} \vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt}$$

$$\vec{P}_{TOT} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

Poiché tutti i punti si muovono alla stessa velocità ( $\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} \forall i$ ) possiamo raccogliere ottenendo:

$$\vec{P}_{TOT} = \vec{v}_{CM} \sum_{i=1}^n m_i = \vec{v}_{CM} m_{TOT}$$

Possiamo ricavare la **seconda equazione cardinale** sfruttando il primo teorema di König:

$$\begin{aligned}\vec{L}_{TOT} &= \vec{L}'_{TOT} + \vec{r}_{CM} \times m_{TOT} \vec{v}_{CM} \\ \vec{L}'_{TOT} &= \sum_{i=1}^n [\vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i] \quad (\text{con } \vec{v}'_i = 0) \\ \Rightarrow \vec{L}_{TOT} &= \vec{r}_{CM} \times m_{TOT} \vec{v}_{CM}\end{aligned}$$

Da cui ricaviamo:

$$\vec{M}_{TOT}^{(E)} = \frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r}_{CM} \times m_{TOT} \vec{v}_{CM})$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica, ricordando che:

$$E_{kTOT} = \sum_{i=1}^n E_{k_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (\text{con } \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} \quad \forall i)$$

Raccogliendo otteniamo:

$$E_{kTOT} = \frac{1}{2} v_{CM}^2 \sum_{i=1}^n m_i = \frac{1}{2} m_{TOT} v_{CM}^2$$

Si può ricavare l'equazione dell'energia cinetica anche utilizzando il secondo teorema di König (ricordando che il corpo rigido è indeformabile).

### 2.13.5. Il moto di rotazione

Se almeno un punto del corpo rigido resta in quiete rispetto al sistema inerziale, mentre gli altri ruotano, si parla di **moto di rotazione**. Il punto che resta fermo giace quindi sull'asse di rotazione (un vinile che gira su un giradischi è un buon esempio di moto di rotazione). Scegliamo quindi un sistema di riferimento con origine nel punto  $P$  fermo rispetto al sistema inerziale ( $P \equiv O'$ ). Preso un altro punto del corpo rigido  $A$ , troviamo il vettore  $\overrightarrow{O'A} = \vec{r}'_A$ . La posizione di  $A$  sarà quindi  $\vec{r}_A = \vec{r}'_A + \vec{r}_{OO'}$ . La sua velocità sarà:

$$\vec{v}_A = \vec{v}'_A + \vec{v}_{OO'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_A$$

Ricordando che il corpo rigido è indeformabile, possiamo scrivere che  $\vec{v}'_A = 0$ . Inoltre, abbiamo detto che il punto  $P \equiv O'$  è fermo rispetto al sistema di riferimento inerziale, pertanto  $\vec{v}_{OO'} = 0$ . Otteniamo quindi che la velocità di un generico punto  $A$  del corpo rigido in rotazione è:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}'_A$$

Se scriviamo la **prima equazione cardinale** otteniamo:



$$\vec{R}^{(E)} = \frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i') \right)$$

Notiamo che se  $\vec{\omega}$  è costante vuol dire che la risultante delle forze esterne è nulla. Scrivendo la seconda equazione cardinale otteniamo invece che:

$$\vec{M}^{(E)} = \frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt}$$

Il secondo teorema di König ci dice che:

$$\vec{L}_{TOT} = \vec{L}'_{TOT} + \underbrace{\vec{r}_{CM} \times m \vec{v}_{CM}}_{\substack{\vec{v}_{CM}=0 \\ \Rightarrow 0}}$$

Da cui la **seconda equazione cardinale**:

$$\vec{M}^{(E)} = \frac{d\vec{L}'_{TOT}}{dt}$$

### 2.13.6. Rotazione rispetto a un asse fisso

Un altro caso particolare è quello del corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso, ossia  $\vec{\omega}$  ha direzione costante. Supponiamo ad esempio di avere un sistema inerziale:

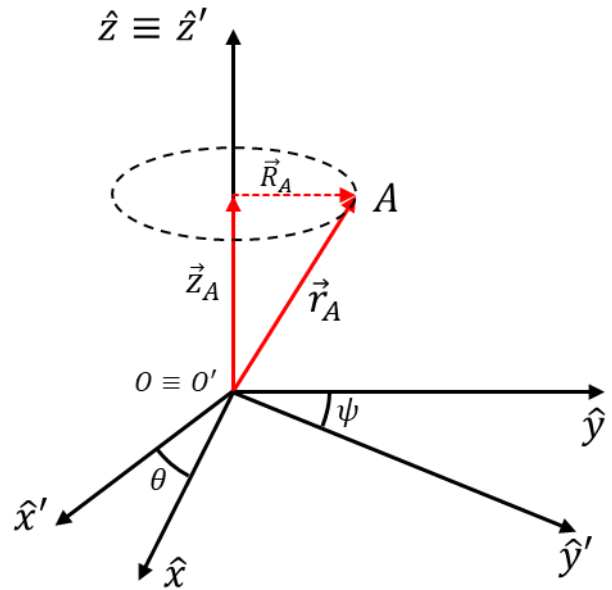
$$O(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$$

E un corpo rigido che ruota attorno all'asse  $\hat{z}$ . Possiamo quindi scrivere un sistema solidale al corpo rigido centrato in un punto del corpo sull'asse di rotazione (quando possibile il baricentro). In questo caso per comodità scegliamo  $O \equiv O'$ :

$$O(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$$

Poiché il corpo ruota attorno all'asse  $\hat{z}$ , possiamo dire che  $\forall t$  vale  $\hat{z} \equiv \hat{z}'$ . Se consideriamo un punto qualsiasi  $A$  del corpo rigido, potremo descriverlo col vettore:

$$\vec{r}_A = \vec{z}_A + \vec{R}_A$$



Dove  $\vec{z}_A$  è la proiezione di  $\vec{r}_A$  su  $\hat{z}$  e  $\vec{R}_A$  è il vettore distanza del punto dall'asse. Tenendo conto che l'asse di rotazione è fisso e che  $O \equiv O'$ , scriviamo il momento angolare totale:

$$\vec{L}_{TOT} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) =$$

Notiamo che:

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= \underbrace{\vec{v}_{OO'}}_{=0} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i \quad \left( \text{con } \vec{r}'_i = \vec{r}_i - \underbrace{\vec{r}_{OO'}}_{=0} = \vec{r}_i \right) \\ \Rightarrow \vec{L}_{TOT} &= \sum_{i=1}^n [(\vec{z}_i + \vec{R}_i) \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] = \sum_{i=1}^n \{(\vec{z}_i + \vec{R}_i) \times m_i [\vec{\omega} \times (\vec{z}_i + \vec{R}_i)]\} \end{aligned}$$

Per maggiore chiarezza, svolgiamo i calcoli nella parentesi quadra:

$$\vec{\omega} \times (\vec{z}_i + \vec{R}_i) = \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{z}_i}_{=0} + \vec{\omega} \times \vec{R}_i = \omega R_i \sin(90^\circ) \hat{u}_t$$

Con  $\hat{u}_t$  tangente alla circonferenza di raggio  $\vec{R}_i$  in  $m_i$  e entrante (prodotto vettoriale). Perciò:

$$\begin{aligned} \vec{L}_{TOT} &= \sum_{i=1}^n [(\vec{z}_i + \vec{R}_i) \times -m_i \omega R_i \hat{u}_t] = \\ &= \sum_{i=1}^n (\vec{R}_i \times -m_i \omega R_i \hat{u}_t) + \sum_{i=1}^n (\vec{z}_i \times -m_i \omega R_i \hat{u}_t) \\ &= \sum_{i=1}^n (R_i m_i \omega R_i \hat{u}_z) - \sum_{i=1}^n (z_i m_i \omega R_i \hat{u}_r) \end{aligned}$$

Scriviamo quindi:

$$\begin{aligned} \vec{L}_{TOT} &= \sum_{i=1}^n (R_i^2 m_i \omega \hat{u}_z) - \sum_{i=1}^n (z_i m_i \omega R_i \hat{u}_r) \\ \vec{L}_{TOT} &= \vec{L}_{\parallel} - \vec{L}_{\perp} \end{aligned}$$

### 2.13.7. Il momento di inerzia

Definiamo una nuova grandezza, chiamata momento di inerzia, una quantità che indica “quanto il corpo si oppone” a modificare la sua velocità angolare:

$$I_Z = \sum_{i=1}^n (R_i^2 m_i)$$

Dall'equazione scritta precedentemente otteniamo:

$$\vec{L}_{\parallel} = \sum_{i=1}^n (R_i^2 m_i \vec{\omega}) = I_z \vec{\omega}$$

Facciamo alcune osservazioni:

- Possiamo dire che il momento d'inerzia è il corrispettivo della massa nella quantità di moto:

$$I_z \vec{\omega} \leftrightarrow m_{TOT} \vec{v}_{CM}$$

Dove però vi è una dipendenza dall'asse di rotazione.

- Il momento di inerzia non dipende dalla scelta dell'origine ma solo dalla distanza dei punti dall'asse di rotazione (quindi dalla scelta dell'asse di rotazione)
- Dall'analisi dimensionale otteniamo:

$$[I_z] = [L]^2 [M] = kg \, m^2$$

Se il corpo rigido che consideriamo non è discreto ma continuo, possiamo considerarlo come un insieme di infinite masse infinitesime  $dm$ , da cui:

$$\vec{L}_{TOT} = \int R^2 \vec{\omega} dm - \int z \omega \vec{R} dm$$

Da cui (considerando un corpo di densità  $\rho$ ):

$$I_z = \int R^2 dm = \int R^2 \rho dv$$

### ***Asse di simmetria coincidente con l'asse di rotazione***

Se capita che l'asse di rotazione considerato coincide con l'asse di simmetria del corpo, considerato un corpo rigido di due punti  $P_1$  e  $P_2$  simmetrici rispetto all'asse, possiamo dire che:

$$\begin{aligned} \vec{R}_1 &= -\vec{R}_2 \\ \vec{z}_1 &= \vec{z}_2 \end{aligned}$$

Poiché  $m_1 = m_2$  otteniamo che:

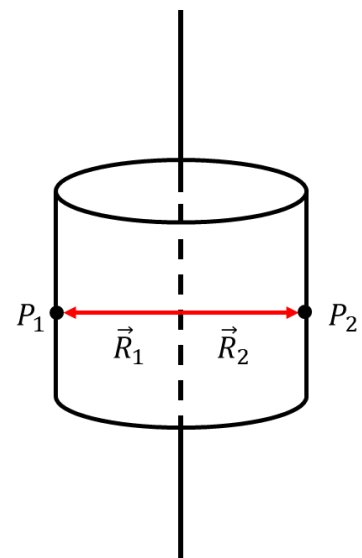
$$\vec{L}_{\perp} = m_1 z_1 \omega \vec{R}_1 + m_2 z_2 \omega \vec{R}_2 = m_1 z_1 \omega \vec{R}_1 - m_1 z_1 \omega \vec{R}_1 = 0$$

Da cui:

$$\vec{L}_{TOT} = \vec{L}_{\parallel} = I_z \vec{\omega}$$

Se inoltre  $CM \in \hat{z}$  possiamo dire che  $\vec{v}_{CM} = 0$ , da cui:

$$\vec{R}^{(E)} = \frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{CM} m_{TOT}) = 0$$



Inoltre, essendo  $I_z$  costante dato che l'asse di rotazione è fisso, possiamo scrivere che:

$$\vec{M}^{(E)} = \frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \vec{\omega}) = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha}$$

### Le equazioni del moto

Possiamo quindi scrivere:

$$\vec{M}^{(E)} = \frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{L}_{\parallel} - \vec{L}_{\perp}) = \frac{d\vec{L}_{\parallel}}{dt} - \frac{d\vec{L}_{\perp}}{dt}$$

$$\vec{M}_z^{(E)} = \frac{d\vec{L}_{\parallel}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \vec{\omega}) = I_z \vec{\alpha}$$

Ricordando le equazioni dei moti circolari:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \\ \vec{\omega} &= \vec{\omega}_0 + \int_{t_0}^t \vec{\alpha} dt \\ \theta &= \theta_0 + \int_{t_0}^t \vec{\omega} dt\end{aligned}$$

Vediamo quindi i casi:

- Vale che se  $\vec{M}^{(E)} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = 0$ . In questo caso si parla quindi di **moto circolare uniforme**. Possiamo quindi scrivere:

$$\theta = \theta_0 + \vec{\omega}(t - t_0)$$

- Se invece  $\vec{M}^{(E)} = cost. \Leftrightarrow \vec{\alpha} = cost.$  Si parla quindi di **moto circolare uniformemente accelerato**:

$$\theta = \theta_0 + \vec{\omega}(t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{\alpha}(t - t_0)^2$$

Possiamo inoltre calcolare l'energia cinetica totale del corpo utilizzando il secondo teorema di König:

$$E_{kTOT} = E_{kCM} + E'_k$$

Nel caso in cui non vi è traslazione, quindi  $\vec{v}_{CM} = 0$ , vale che:

$$\begin{aligned}E_{kTOT} = E'_k &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i |\vec{\omega} \times \vec{r}'|^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i |\vec{\omega} \times (\vec{R}_i + \vec{z}_i)|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left| \vec{\omega} \times \vec{R}_i + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{z}_i}_{=0} \right|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2\end{aligned}$$

Da cui ricaviamo il l'energia cinetica dei corpi rigidi in rotazione attorno all'asse di simmetria:

$$E_{k_{TOT}} = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

### ***Il teorema dell'energia cinetica***

Possiamo ora ricavare il teorema dell'energia cinetica di un corpo rigido che ruota attorno all'asse di simmetria:

$$L^{(E)} = \Delta E_{k_{TOT}}$$

$$E_{k_{TOT}} = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Se deriviamo  $E_{k_{TOT}}$  rispetto a  $\omega$  otteniamo:

$$\frac{dE_{k_{TOT}}}{d\omega} = \frac{1}{2} I_z 2\omega = I_z \omega$$

Sviluppando i calcoli:

$$dE_{k_{TOT}} = I_z \omega d\omega$$

$$\int_{E_{k_i}}^{E_{k_f}} dE_{k_{TOT}} = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I_z \omega d\omega \quad \left( \text{con } \omega = \frac{d\theta}{dt} \right)$$

$$\Delta E_{k_{TOT}} = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I_z \frac{d\theta}{dt} d\omega \quad \left( \text{con } \alpha = \frac{d\omega}{dt} \right)$$

$$\Delta E_{k_{TOT}} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \underbrace{I_z \alpha}_{=M_z^{(E)}} d\theta$$

Concludiamo quindi che:

$$L^{(E)} = \Delta E_{k_{TOT}} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M_z^{(E)} d\theta$$

### ***Il momento angolare***

Abbiamo precedentemente visto che il momento angolare totale è:

$$\vec{L}_{TOT} = \vec{L}_z - \vec{L}_\perp = \sum_{i=1}^n \vec{\omega} m_i R_i^2 - \sum_{i=1}^n z_i m_i \omega \vec{R}_i$$

Poiché  $\vec{M}^{(E)} = \frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt} = \frac{d\vec{L}_\parallel}{dt} - \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \vec{M}_z^{(E)} - \vec{M}_\perp^{(E)}$ , dove:

- $\vec{M}_z^{(E)} = I_z \vec{\alpha}$  è la componente che varia il modulo di  $\vec{\omega}$
- $\vec{M}_\perp^{(E)}$  è la componente che inclina  $\vec{L}_{TOT}$

## **2.13.8. Il teorema di Huygens-Steiner**

Il **teorema di Huygens-Steiner**, o teorema degli assi paralleli, permette di calcolare il momento di inerzia di un solido rispetto ad un asse parallelo a quello passante per il centro di massa evitando in molti casi (dove è presente una struttura simmetrica) il laborioso calcolo diretto. L'enunciato del teorema è il seguente:

**Teorema 2.2** *Il momento d'inerzia rispetto ad un asse  $x$ , parallelo ad un altro  $z$  passante per il centro di massa, si ottiene sommando al momento di inerzia iniziale rispetto a  $z$  il prodotto tra la massa del corpo stesso e il quadrato della distanza tra gli assi  $z$  ed  $x$ :*

$$I_x = I_{CM} + m_{TOT}d^2$$

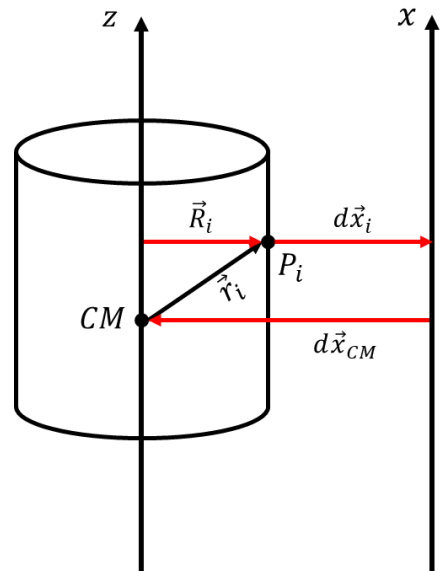
Vediamo come si dimostra il teorema per assi  $z$  coincidenti con l'asse di simmetria. Sappiamo che il momento di inerzia rispetto all'asse  $x$  è dato da:

$$\begin{aligned} I_x &= \sum_{i=1}^n m_i d_{x_i}^2 = \sum_{i=1}^n m_i |d\vec{x}_{CM} - \vec{R}_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n m_i (dx_{CM}^2 + R_i^2 - 2|d\vec{x}_{CM}\vec{R}_i|) = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i dx_{CM}^2 + \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 - \sum_{i=1}^n m_i 2|d\vec{x}_{CM}\vec{R}_i| \\ &= \sum_{i=1}^n m_i dx_{CM}^2 + \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 - 2|d\vec{x}_{CM}| \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i |\vec{R}_i|}_{=0} \end{aligned}$$

Il termine del doppio prodotto è nullo per simmetria.

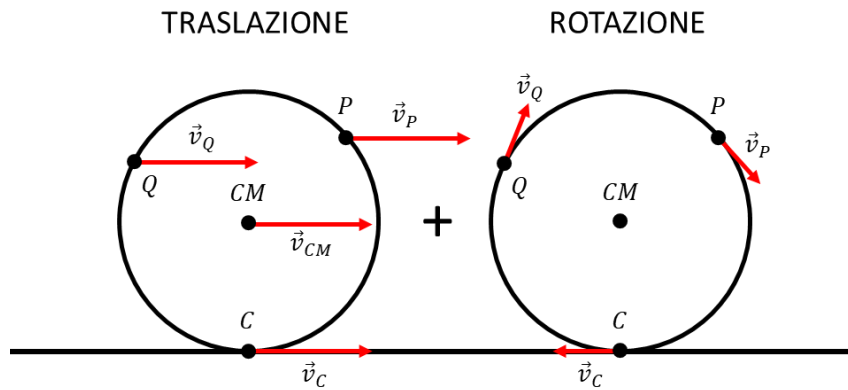
Ricaviamo quindi che:

$$I_x = m_{TOT}d^2 + I_{CM}$$



### 2.13.9. Il moto di roto-traslazione

Quando un corpo trasla e ruota, si parla di **moto di rototraslazione**. Se inoltre il corpo è appoggiato a una superficie, si muove di moto di rototraslazione e la velocità del punto di contatto rispetto alla superficie è nulla ( $\vec{v}_C = 0$ ), si parla di **moto di puro rotolamento**.



Vediamo le condizioni del moto di puro rotolamento per un corpo a sezione circolare:

### Metodo grafico

Possiamo trovare il valore di  $v_{CM}$  in questo modo:

$$\Delta x = \Delta s \rightarrow dx = ds$$

$$dx = d\theta \cdot R$$

Vediamo quindi che:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\theta}{dt} R = \omega R$$

Da cui la condizione del moto di puro rotolamento:

$$v_{CM} = \omega R$$

### Sistema solidale al corpo rigido

Considerando un sistema di riferimento solidale al corpo rigido ( $O' \equiv CM$ ) avevamo visto che:

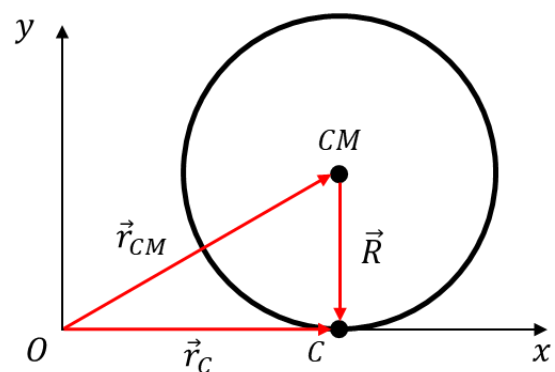
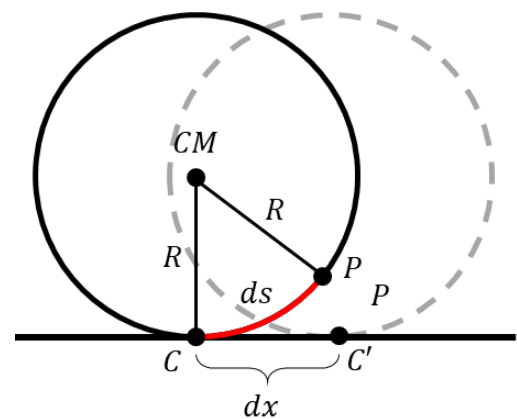
$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} + (\vec{\omega} \times \vec{r}'_P)$$

Sapendo che  $\vec{r}'_P = \vec{r}_P - \vec{r}_{CM}$ , se consideriamo il punto di contatto  $C$ , abbiamo detto che  $v_C = 0$ , da cui:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{CM} + [\vec{\omega} \times (\vec{r}_C - \vec{r}_{CM})] = 0$$

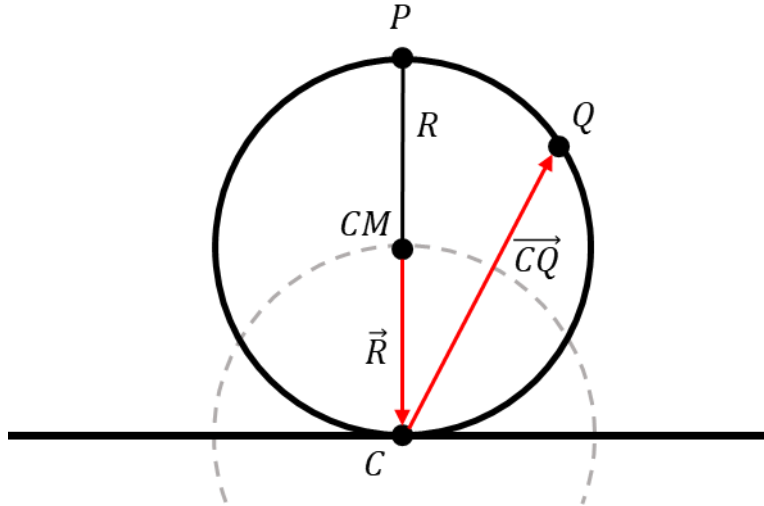
Poiché  $\vec{r}_P - \vec{r}_{CM} = -\vec{R}$ , dove  $\vec{R}$  è il raggio della sezione del corpo rigido, otteniamo che:

$$\vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \times \vec{R}_C$$



### Asse di rotazione istantaneo

Un altro modo per calcolare la velocità del centro di massa di un corpo in puro rotolamento è considerare un asse di rotazione istantaneo appartenente alla superficie e passante per il punto di contatto.



Sapendo che  $\vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \times -\vec{R}_C$ , se centriamo la circonferenza nel punto di contatto  $C$ , considerato un punto  $Q$  generico, osserviamo che la sua velocità è:

$$\vec{v}_Q = \underbrace{\vec{v}_Q + \vec{v}_C}_{=0} + \vec{\omega} \times \vec{CQ} = \vec{\omega} \times \vec{CQ}$$

In particolare, il punto più in alto del corpo rigido avrà velocità:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{CP}$$

Con  $\vec{CP} = -2\vec{R}_C$ , da cui:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times -2\vec{R}_C = 2(-\vec{\omega} \times -\vec{R}_C) = 2\vec{v}_{CM}$$

## 2.13.10. La dinamica del moto di puro rotolamento

Studiamo ora la dinamica del moto appena descritto. Abbiamo precedentemente detto che vale:

- $\vec{R}^{(E)} = \frac{d\vec{p}_{TOT}}{dt} = m_{TOT}\vec{a}_{CM}$  per il moto di traslazione
- $\vec{M}_Z^{(E)} = I_{CM}\vec{\alpha}$  per il moto di rotazione

Combinando queste due equazioni è possibile studiare il moto del corpo. Consideriamo ad esempio un corpo rigido a sezione circolare di raggio  $R$  che si muove su un piano.



Chiamiamo  $\mu_s$  il coefficiente di attrito statico tra la superficie del corpo e il piano. Viene applicata una forza  $\vec{F}$  sul centro di massa del corpo. Poiché il punto di contatto è fermo (moto di puro rotolamento), agisce l'attrito statico. Se scriviamo le equazioni delle forze per il teorema del centro di massa abbiamo:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{AS} = m_{TOT} \vec{a}_{CM}$$

Scomponendo lungo gli assi:

$$x: F - F_{AS} = m_{TOT} a_{CM}$$

$$y: N - P = 0$$

Vediamo cosa succede al momento torcente. Fissando il polo in  $CM$  possiamo dire che  $\vec{F}$  e  $\vec{P}$  non generano momento poiché  $\vec{r}_P = \vec{r}_F = 0$ . Inoltre:

$$\vec{M}_N = \vec{r}_N \times \vec{N} = 0 \quad (\text{perché } \vec{r}_N \parallel \vec{N})$$

Otteniamo che quindi il momento totale delle forze esterne è dato da:

$$\vec{M}^{(E)} = \vec{M}_{F_{AS}} = \vec{r}_{F_{AS}} \times \vec{F}_{AS} = -RF_{AS} \hat{u}_z$$

Avevamo detto che  $\vec{M}^{(E)} = I_z \vec{\alpha}$ , da cui:

$$I_z \vec{\alpha} = -RF_{AS} \hat{u}_z$$

$$\vec{\alpha} = -\frac{RF_{AS}}{I_z} \hat{u}_z$$

Ricordando che  $\vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \times \vec{R}_C$ , possiamo dire che  $\vec{a}_{CM} = -\vec{\alpha} \times \vec{R}$ , otteniamo che:

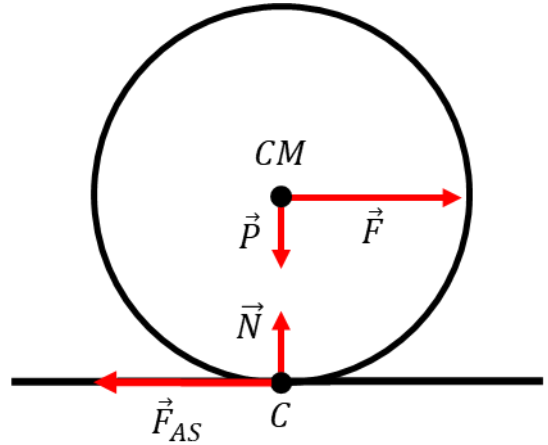
$$\vec{a}_{CM} = \frac{RF_{AS}}{I_z} \hat{u}_z \times \vec{R} = \frac{R^2 F_{AS}}{I_z} \vec{u}_x = \frac{R^2 F_{AS}}{\frac{1}{2} m_{TOT} R^2} \vec{u}_x$$

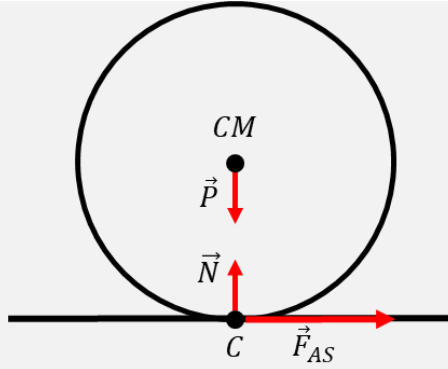
Concludiamo che:

$$\boxed{\vec{a}_{CM} = \frac{2F_{AS}}{m_{TOT}} \vec{u}_x}$$

### Esempio 2.16.

Supponiamo di essere nello stesso caso di prima. Questa volta però applichiamo dall'esterno un momento torcente  $\vec{M}_{CM}^{(E)}$  al cilindro entrante nel piano (questo momento farà ruotare il cilindro in senso orario):





Considerato il punto di contatto  $C$ , esso sarà soggetto a una forza di attrito direzionata come in figura. Se infatti scriviamo l'equazione delle forze lungo  $x$  (le forze lungo  $y$  si annullano), otteniamo:

$$\vec{F}_{AS} = m_{TOT} \vec{a}_{CM}$$

Poiché siamo nelle condizioni di moto di puro rotolamento, sappiamo che l'accelerazione del centro di massa è data da  $\vec{a}_{CM} = -\vec{\alpha} \times \vec{R}$ , da cui la direzione della forza. Possiamo quindi scrivere che:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{TOT}^{(E)} &= \vec{M}_{CM}^{(E)} + \vec{R} \times \vec{F}_{AS} = I_Z \vec{\alpha} \\ -|\vec{M}_{CM}^{(E)}| \hat{u}_z + R F_{AS} \hat{u}_z &= -I_Z \alpha \hat{u}_z \end{aligned}$$

Unendo le due equazioni scriviamo il sistema che ci permette di trovare  $F_{AS}$  e  $a_{CM}$ :

$$\begin{cases} \vec{F}_{AS} = m_{TOT} \vec{a}_{CM} \\ \alpha = \frac{a_{CM}}{R} = \frac{M_{CM}^{(E)} - R F_{AS}}{I_Z} \end{cases}$$

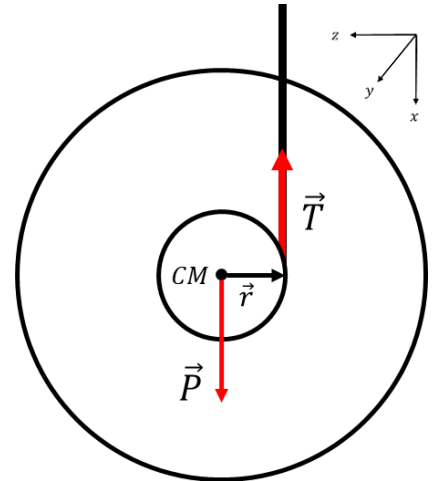
## Lo Yo-Yo

Un altro esempio comune di moto di puro rotolamento è quello di uno Yo-Yo. Considerando la fessura, nella quale risiede la corda, di dimensione trascurabile, possiamo dire che il momento di inerzia dello Yo-Yo è lo stesso di un comune cilindro:

$$I_{CM} = \frac{1}{2} m_{TOT} R^2$$

Dove  $R$  è il raggio dello Yo-Yo. Assumiamo che il cilindro attorno al quale si arrotola la corda abbia raggio  $r = R/4$ , possiamo quindi scrivere equazione delle forze e dei momenti (lungo  $x$  non agiscono forze):

$$\begin{aligned} P - T &= m_{TOT} a_{CM} \\ \vec{M}_{CM}^{(E)} &= \vec{r} \times \vec{T} = \frac{R}{4} T \hat{u}_y = I_{CM} \alpha \hat{u}_y \end{aligned}$$



Poiché il “punto di contatto” dello Yo-Yo è il punto in cui la corda si srotola, possiamo dire che l’accelerazione vale  $\vec{a}_{CM} = -\vec{\alpha} \times \vec{r}$ , da cui possiamo calcolare  $T$  e  $a_{CM}$ :

$$\begin{cases} m_{TOT}g - T = m_{TOT}a_{CM} \\ \frac{R}{4}T = I_{CM} \frac{a_{CM}}{\frac{R}{4}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_{TOT}g - 8m_{TOT}a_{CM} = m_{TOT}a_{CM} \\ T = 8m_{TOT}a_{CM} \end{cases}$$

Da cui otteniamo:

$$\begin{cases} a_{CM} = \frac{g}{9} \\ T = \frac{8}{9}gm_{TOT} \end{cases}$$

Possiamo inoltre fare un’osservazione. Riconsiderando la formula

$$\vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \times \vec{r}$$

Possiamo dire che appena:

- prima della **salita**  $\vec{\omega} = \omega\hat{u}_y$  e  $\vec{a}_{CM} = a_{CM}\hat{u}_x$ , da cui otteniamo che  $\vec{r} = -r\hat{u}_z$
- dopo la **discesa**  $\vec{\omega} = \omega\hat{u}_y$  e  $\vec{a}_{CM} = -a_{CM}\hat{u}_x$ , da cui otteniamo che  $\vec{r} = r\hat{u}_z$

Vedremo infatti nel [PARAGRAFO 2.13.12](#) che il momento angolare, e quindi la velocità angolare, si conserva. Pertanto, la corda cambierà lato nel momento in cui passa da discesa a salita.

## 2.13.11. La conservazione dell’energia meccanica

Vediamo cosa succede all’energia meccanica di un corpo rigido. Consideriamo un carrello formato da due ruote di massa  $m_r$  raggio  $R$  unite da una pedana di massa  $m_p = 4m_r$ . Ricordando che per i corpi rigidi vale che:

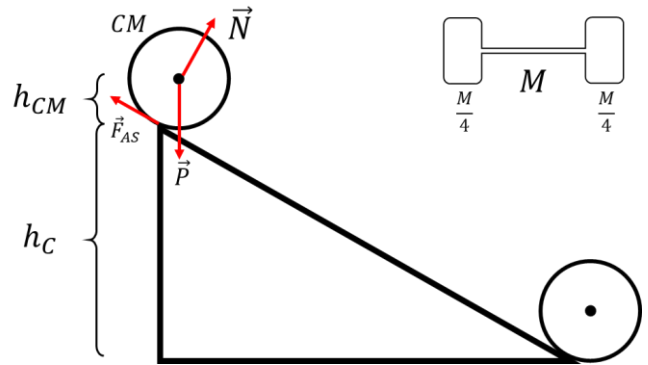
$$L^{(E)} = \Delta E_k$$

Con:

$$L = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Studiamo le forze che agiscono:

$$\vec{F}_{AS} + \vec{P} + \vec{N} = m_{TOT}\vec{a}_{CM}$$



$\vec{F}_{AS}$  agisce sul punto di contatto  $C$  che come abbiamo visto non si sposta, quindi  $L_{F_{AS}} = 0$ .  $\vec{N}$  è perpendicolare al moto quindi  $\vec{L}_P = 0$ . In questo caso quindi l’unica forza che compie lavoro è  $\vec{P}$ , che abbiamo già visto essere una forza conservativa. Poiché l’unico lavoro

compiuto sul corpo è compiuto da una forza conservativa, l'**energia meccanica si conserva**. Scriviamo quindi l'energia meccanica in cima alla rampa:

$$\begin{aligned} E_{m_i} &= \underbrace{E_{k_i}}_{=0} + E_{p_i} = (2m_r g + m_p g) h_{TOT} = \\ &= \left( \frac{m_p}{2} + m_p \right) (h_c + h_{CM}) g \end{aligned}$$

In fondo alla pedana invece avremo che:

$$\begin{aligned} E_{m_i} &= E_{k_i} + E_{p_i} = (2m_r + m_p) g h_{CM} + E_k = \left( \frac{2}{4} m_p + m_p \right) g h_{CM} \\ E_k &= \frac{1}{2} m_p v_{CM}^2 + 2 \left( \frac{1}{2} m_r v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CMr} \omega^2 \right) = \frac{1}{2} m_p v_{CM}^2 + 2 \left( \frac{1}{2} \frac{m_p}{4} v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \frac{v_{CM}^2}{R^2} \right) = \frac{7}{8} m_p v_{CM}^2 \end{aligned}$$

Da cui:

$$E_{m_f} = \frac{3}{2} m_p g h_{CM} + \frac{7}{8} m_p v_{CM}^2$$

## 2.13.12. Conservazione del momento angolare

Supponiamo di avere un corpo rigido che gira con velocità angolare  $\vec{\omega}$  attorno al suo asse di simmetria  $z$ . Supponiamo che il corpo sia sottoposto a forze esterne con risultante nulla  $\vec{R}^{(E)} = 0$  e con momento delle forze esterne nullo  $\vec{M}_z^{(E)} = 0$ . Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned} \vec{R}^{(E)} &= \frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{P}_{TOT} = cost. \\ \vec{M}_z^{(E)} &= \frac{d\vec{L}_z}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L}_z = cost. \end{aligned}$$

Ricordando che  $\vec{L}_z = I_z \vec{\omega}$ , possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{L}_z &= \vec{L}_{z_f} - \vec{L}_{z_i} = I_{z_f} \vec{\omega}_f - I_{z_i} \vec{\omega}_i = 0 \\ \Rightarrow I_{z_f} \vec{\omega}_f &= I_{z_i} \vec{\omega}_i \end{aligned}$$

Notiamo quindi che se cambia il momento di inerzia la velocità angolare del corpo varierà di conseguenza, in particolare:

- Se  $I_{z_f} > I_{z_i}$  allora  $\vec{\omega}_f < \vec{\omega}_i$ . Quindi se il momento d'inerzia aumenta la velocità angolare diminuisce
- Se  $I_{z_f} < I_{z_i}$  allora  $\vec{\omega}_f > \vec{\omega}_i$ . Quindi se il momento d'inerzia diminuisce la velocità angolare aumenta

Questi due casi sono abbastanza comuni nella vita reale. Ad esempio, i tuffatori si distendono prima di toccare l'acqua (aumentando la distanza del peso dal centro di massa) al fine di ridurre la loro velocità angolare. Viceversa, i ballerini si stringono durante una piroetta (avvicinando il peso al centro di massa) riuscendo ad aumentare la velocità angolare.

Se per caso risulta che il momento torcente non è nullo, ossia:

$$\vec{M}^{(E)} = \frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0$$

Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} d\vec{L} &= \vec{M}^{(E)} dt \\ \int d\vec{L} &= \int \vec{M}^{(E)} dt \\ \Delta\vec{L} &= \int (\vec{r} \times \vec{F}^{(E)}) dt \end{aligned}$$

Se la forza esterna viene applicata per un lasso molto breve di tempo, possiamo dire che in quell'intervallo di tempo  $\vec{r}$  è costante, da cui (ricordando il teorema dell'impulso):

$$\Delta\vec{L} = \vec{r} \times \int \vec{F}^{(E)} dt = \vec{r} \times \vec{J}^{(E)}$$

Se quindi una forza impulsiva è applicata dall'esterno possiamo dire che il momento angolare del corpo varierà secondo la formula appena scritta.

Ritornando all'esempio dello Yo-Yo, possiamo dire che nel momento in cui la corda è completamente srotolata (ossia quando lo Yo-Yo cambia direzione), essa esercita una forza impulsiva sullo Yo-Yo. Sappiamo che appena prima di arrivare in fondo esso si muove verso il basso con velocità  $v_i$  mentre appena dopo si muove verso l'alto con velocità  $v_f$ . Per il teorema dell'impulso possiamo scrivere:

$$\Delta\vec{P}_{TOT} = \vec{J}$$

La formula appena spiegata invece ci dice che:

$$\Delta\vec{L} = \vec{r} \times \vec{J}^{(E)}$$

Notiamo però che  $\vec{r} \parallel \vec{J}^{(E)}$ , da cui:

$$\Delta\vec{L} = 0$$

Ricordando che  $\vec{L}_{CM} = I_{CM}\vec{\omega}$  (lo Yo-Yo ruota attorno al suo centro di simmetria), possiamo confermare quanto detto nel [PARAGRAFO 2.13.10](#).

## 2.14. Meccanica dei fluidi

---

Vediamo ora un'altra parte fondamentale della meccanica, ossia lo **studio della materia**. Ricordiamo innanzitutto gli stati fondamentali della materia, dal più “ordinato” al “meno ordinato”:

- Una materia allo **stato solido** ha un volume e una forma propria.
- Una materia allo **stato liquido** ha un volume proprio, ma acquisisce la forma del recipiente che la contiene.
- Una materia allo **stato aeriforme** (o **gassoso**) non ha né volume né forma propria, ma si espande fino a occupare tutto lo spazio disponibile.
- Una materia allo **stato plasmatico** può somigliare a un gas non avendo forma propria e può espandersi come un aeriforme, dal quale si distingue per la sua ionizzazione.

Le sostanze allo stato liquido, gassoso o plasmatico sono dette **fluidi**. Introduciamo quindi uno dei conetti principali dello studio della materia: la **pressione**. La pressione è una **grandezza scalare** definita come il rapporto tra la forza applicata perpendicolarmente su una superficie e l'area della superficie stessa:

$$p = \frac{F_{\perp}}{S}$$

$$[p] = \frac{N}{m^2} = Pa$$

L'unità di misura della pressione è chiamata **Pascal (Pa)**, definita come 1 Newton su un metro quadrato. Esistono altre misure della pressione:

$$1 atm \cong 1.01 \cdot 10^4 Pa$$

$$1 atm = 760 torr$$

$$1 bar = 10^5 Pa$$

Per materie che possono variare di volume (gas e plasma) viene definito inoltre il **coefficiente di comprimibilità B**:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{B} \Delta p$$

In generale i solidi e i liquidi hanno un coefficiente B molto grande (in quanto incompressibili). I gas invece hanno un coefficiente di comprimibilità che tende allo 0.

### 2.14.1. I fluidi e la pressione

Un fluido è caratterizzato a livello molecolare dalla bassa o assente interazione reciproca delle particelle. Nei liquidi infatti le forze di coesione tra le particelle sono molto deboli, mentre nei gas e nel plasma sono praticamente assenti. Ciò permette alle particelle di muoversi nello spazio occupato dal fluido. Se quindi consideriamo le singole particelle, esse urteranno le superfici del contenitore. Immaginiamo di immergere un piano in un fluido. Consideriamo il moto di una generica particella. L'urto tra la particella e il piano avverrà con un angolo  $\alpha$  ed essa imprimerà una forza  $\vec{F}_p$ . Se scomponiamo questa forza parallelamente e perpendicolarmente al piano avremo una componente:

- $\vec{F}_\perp$  perpendicolare al piano
- $\vec{F}_\parallel$  detta forza di taglio

In generale  $\vec{F}_\perp$  è la forza responsabile della pressione. Se consideriamo la superficie infinitesima sulla quale la forza è applicata possiamo scrivere:

$$p = \frac{F_\perp}{ds}$$

La forza  $\vec{F}_\parallel$  in rapporto alla superficie è detta invece **forza di taglio  $T$**  ed è caratteristica dei fluidi in movimento:

$$T = \frac{F_\parallel}{ds}$$

Possiamo dimostrare che la pressione è uguale a prescindere dall'orientazione della superficie. Consideriamo un prisma immerso in un fluido in stato di equilibrio in assenza di gravità (ci concentreremo solo su gli assi  $x$  e  $y$ , in ogni caso considerano anche  $z$  il risultato sarebbe lo stesso). Possiamo quindi scrivere:

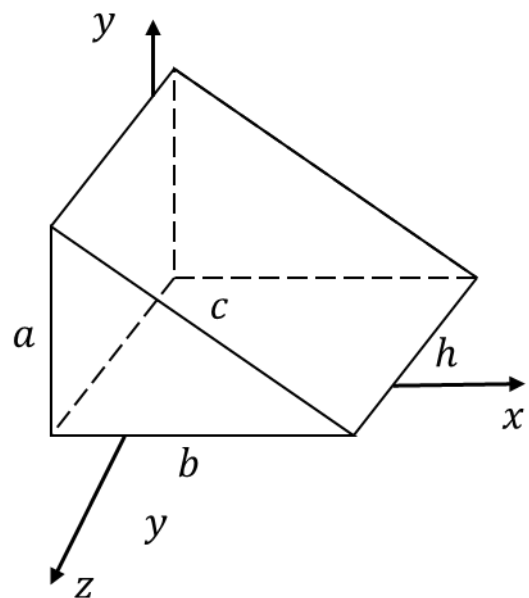
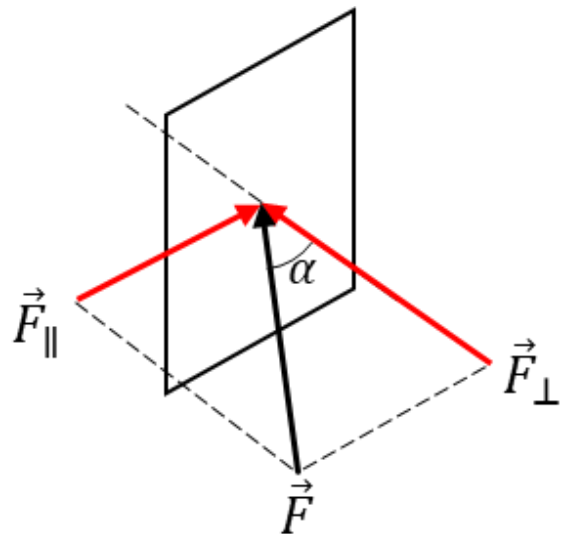
$$\vec{R}^{(E)} = 0$$

Con:

$$\vec{R}^{(E)} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C$$

Sappiamo che:

$$\vec{F}_A = p_A \cdot S_A$$



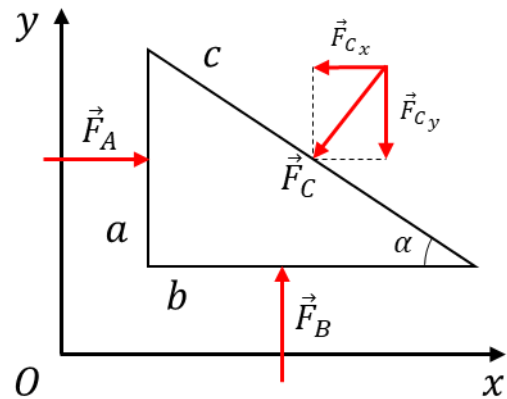
$$\vec{F}_B = p_B \cdot S_B$$

$$\vec{F}_C = p_C \cdot S_C$$

Le forze sono tutte perpendicolari alla superficie su cui agiscono (definizione di pressione). Scomponendo lungo gli assi  $x$  e  $y$  otteniamo:

$$\begin{cases} F_A - F_{Cx} = 0 \\ F_B - F_{Cy} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_A(ah) - p_C(ch)\sin\alpha = 0 \\ p_B(bh) - p_C(ch)\cos\alpha = 0 \end{cases}$$



Notando che  $c \cdot \sin\alpha = a$  e  $c \cdot \cos\alpha = b$  possiamo scrivere:

$$\begin{cases} p_A a - p_C a = 0 \\ p_B b - p_C b = 0 \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} p_A = p_C \\ p_B = p_C \end{cases} \rightarrow p_A = p_B = p_C$$

La pressione applicata su una superficie di un corpo immerso in un fluido in assenza di forze esterne non dipende dall'orientazione della superficie.

## 2.14.2. Forze di superficie e forze di volume

Abbiamo visto cosa succede nel caso in cui su un corpo immerso in un fluido sul quale agisce solo la pressione. Possiamo quindi fare una distinzione tra due tipi di forze:

- Le **forze di superficie** sono forze che dipendono dalla superficie sulla quale vengono applicate e agiscono sulle superfici stesse, ad esempio la pressione:

$$F_p = p \cdot dS$$

- Le **forze di volume** sono forze che dipendono dal volume al quale vengono applicate e agiscono sul volume stesso, ad esempio la forza peso:

$$\vec{P} = \vec{g} \cdot dm = \vec{g} \rho \cdot dV$$

Le forze di volume possono essere anche espresse come:

$$\vec{F}_V = \vec{f} \cdot dm = \vec{f} \rho \cdot dV$$

Dove  $\vec{f}$  è detta **densità di forza per unità di massa** e ha unità di misura:

$$[\vec{f}] = \frac{N}{kg} = \frac{m}{s^2}$$



Vediamo un caso particolare. Consideriamo un blocco di fluido in equilibrio (siamo nel caso di fluidi statici) di un fluido di densità  $\rho$  in un sistema nel quale l'unica forza volumetrica che agisce è la forza peso. Scriviamo le forze che agiscono sul blocco:

$$\vec{F}_{\perp SUP} + \vec{F}_{\perp INF} + \vec{P} = 0$$

È facile dimostrare che la condizione di equilibrio impone che le forze agenti sulle superfici verticali si annullano. Su  $x$  ad esempio avremmo che:

$$\begin{aligned} F_{\perp SX} - F_{\perp DX} &= p dS_{SX} - p dS_{DX} = 0 \\ p dS_{SX} &= p dS_{DX} \end{aligned}$$

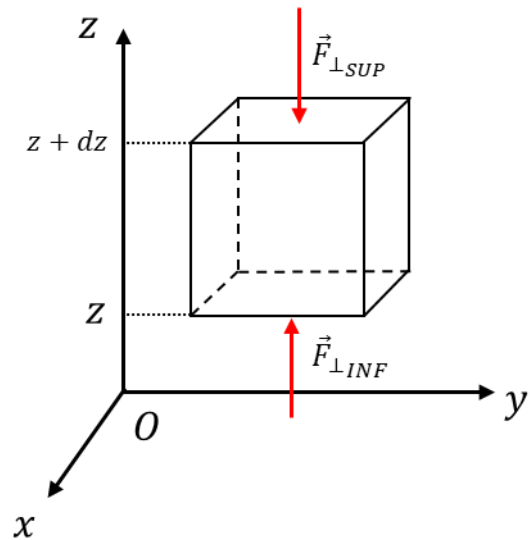
Da cui  $p(x) = \text{cost.}$  Stessa cosa possiamo dire di  $y$ .

Scriviamo quindi:

$$z: F_{\perp INF} - F_{\perp SUP} - P = 0$$

Scriviamo quindi la pressione in base alla posizione, ossia  $p(x, y, z)$ . Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned} p(z)dS - p(z+dz)dS - \rho dVg &= 0 \quad (\text{con } dV = dSdz) \\ p(z+dz)dS - p(z)dS + \rho dSdzg &= 0 \\ p(z+dz) - p(z) &= -\rho g dz \\ \frac{p(z+dz) - p(z)}{dz} &= -\rho g \end{aligned}$$



Da cui otteniamo l'**equazione statica dei fluidi sottoposti solo a  $\vec{P}$** :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Abbiamo visto che in generale le forze di volume possono essere scritte come:

$$\begin{aligned} \vec{F}_V &= \vec{f} dm = \vec{f} \rho dV \\ \vec{f} &= f_x \hat{u}_x + f_y \hat{u}_y + f_z \hat{u}_z \end{aligned}$$

Ragionando allo stesso modo, possiamo dire che a ogni forza volumetrica corrisponde una variazione di pressione che dipende dalla variazione della coordinata:

$$\begin{aligned} f_x &\rightarrow \frac{\delta p}{\delta x} \\ f_y &\rightarrow \frac{\delta p}{\delta y} \\ f_z &\rightarrow \frac{\delta p}{\delta z} \end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{cases} \frac{\delta p}{\delta x} = \rho f_x \\ \frac{\delta p}{\delta y} = \rho f_y \\ \frac{\delta p}{\delta z} = \rho f_z \end{cases}$$

Da cui l'**equazione generale della statica dei fluidi**. Chiamando  $\nabla p$  il gradiente della pressione  $p(x, y, z)$ , possiamo scrivere:

$$\nabla p = \rho \vec{f}$$

Con:

$$\nabla p = \frac{\delta p}{\delta x} \hat{u}_x + \frac{\delta p}{\delta y} \hat{u}_y + \frac{\delta p}{\delta z} \hat{u}_z = \rho f_x \hat{u}_x + \rho f_y \hat{u}_y + \rho f_z \hat{u}_z$$

### 2.14.3. La legge di Stevino

Vediamo un caso particolare della situazione statica. Consideriamo un fluido:

1. Sul quale agisce la forza peso, quindi:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

2. Con densità costante  $\rho = \text{cost.}$  Nel caso di liquidi quindi quest'ipotesi è soddisfatta ricordando che il coefficiente di comprimibilità  $B$  tende a infinito.

Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned} dp &= -\rho g dz \\ \int_{p_1}^{p_2} dp &= - \int_{z_1}^{z_2} \rho g dz \\ p_2 - p_1 &= -\rho g (z_2 - z_1) \quad (\text{perchè } g \text{ e } \rho \text{ sono costanti}) \end{aligned}$$

Possiamo quindi fare due osservazioni:

- La differenza di pressione dipende soltanto dalla distanza in  $z$
- Fissata la posizione in  $z$ , muovendosi su  $x$  e  $y$  la pressione non cambia (le **superfici isobariche**, ossia le superfici sulla quale la pressione è costante, sono orizzontali)

Fissando la pressione alla superficie del liquido  $p_0$  (ad esempio nel caso di un bacino d'acqua la pressione atmosferica), scriviamo:

$$p_0 - p_1 = -\rho g (z_0 - z_1)$$

Chiamiamo  $h = z_0 - z_1$  **profondità**, da cui la **legge di Stevino**:

$$p_1 = p_0 + \rho gh$$

## 2.14.4. La pressione nei gas comprimibili

Come abbiamo visto una delle ipotesi della legge di Stevino è che la densità del fluido sia costante, cosa che non succede nel caso di fluidi comprimibili come gas e plasma. Consideriamo sempre il caso nel quale l'unica forza volumetrica che agisce è la forza peso. Abbiamo precedentemente scritto che:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Supponendo che la temperatura sia costante,  $T = \text{cost.}$ , possiamo dire che  $pV = \text{cost.}$ , da cui:

$$\frac{p}{\rho} = \text{cost.}$$

Poiché questo rapporto è costante, possiamo considerare la pressione atmosferica a livello del mare  $p_0$  e la densità  $\rho_0$ , da cui:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} = \text{cost.}$$

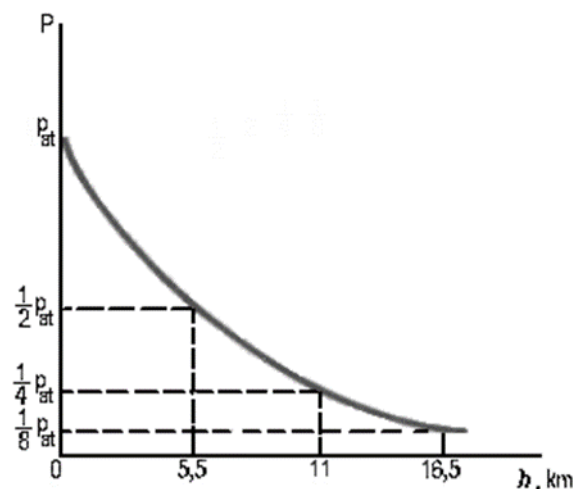
$$\rho = p \frac{\rho_0}{p_0}$$

Sviluppando i calcoli otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= -\frac{\rho_0}{p_0} g dz \\ \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} &= -\int_{z_0=0}^z \frac{\rho_0}{p_0} g dz \\ [\ln p]_{p_0}^p &= \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{\rho_0}{p_0} g(z-0) \\ e^{\ln\left(\frac{p}{p_0}\right)} &= e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g z} \end{aligned}$$

Da cui la pressione del fluido ad altezza  $z$  dal livello del mare:

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g z}{p_0}}$$



## 2.14.5. Il principio di Pascal

Di fondamentale importanza per lo studio della statica dei fluidi è il **principio di Pascal** che stabilisce che se si aumenta la pressione in un punto qualsiasi del fluido, l'incremento si propaga in tutto il fluido.

Ricordando infatti la legge di Stevino che afferma che:

$$p = p_0 + \rho gh$$

Supponendo di aumentare la pressione in superficie otteniamo che:

$$p_s = p_0 + p_x$$

Per la legge di Stevino:

$$p_h = (p_0 + p_x) + \rho gh$$

### *I vasi comunicanti*

Diretta conseguenza della legge di Stevino è il comportamento dei **vasi comunicanti**. Il principio dei vasi comunicanti è il principio fisico secondo il quale un liquido contenuto in due o più contenitori comunicanti tra loro, in presenza di gravità, raggiunge lo stesso livello originando un'unica superficie equipotenziale. Abbiamo infatti detto che in presenza di gravità in condizione di equilibrio due punti alla stessa altezza presentano la stessa pressione. Possiamo quindi scrivere:

$$p_1 = p_2$$

Dalla legge di Stevino:

$$\begin{aligned} p_0 + \rho gh_1 &= p_0 + \rho gh_2 \\ \Rightarrow h_1 &= h_2 \end{aligned}$$

### *Il barometro di Torricelli*

Grazie a questo principio Torricelli riuscì a misurare la pressione atmosferica. Il suo barometro funzionava in questo modo:

Un tubo, lungo circa 1 m, sigillato a un'estremità, viene riempito di mercurio e posto, con l'apertura verso il basso tenuta chiusa in modo che non entri aria, in una bacinella anch'essa piena di mercurio. A questo punto viene aperta l'estremità inferiore e si nota che il tubo non si svuota e che il mercurio scende solo per un certo tratto, fino a fermarsi a 760 mm circa di altezza rispetto alla superficie del mercurio contenuto nella bacinella. Nella parte superiore del tubo si è creato il vuoto.

Consideriamo la superficie del mercurio nella vaschetta come superficie di riferimento. Possiamo quindi scrivere:

$$p_2 = p_0$$

Per il principio dei vasi comunicanti sappiamo che una volta raggiunto l'equilibrio:

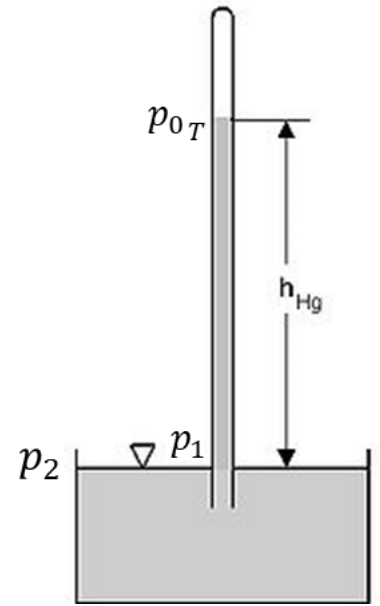
$$p_1 = p_2$$

Sappiamo però per la legge di Stevino che:

$$p_1 = p_{0T} + \rho_M h g$$

Dove  $p_{0T}$  è la pressione sulla superficie del mercurio all'interno del tubo, che essendo in condizioni di vuoto è nulla. Otteniamo quindi che:

$$p_0 = \rho_M h g = 1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$



Autore: Volker Sperlich  
[CC BY-SA 2.0 de ([link alla licenza](#))]

## 2.14.6. Il principio di Archimede

Il **principio di Archimede** afferma che «ogni corpo immerso parzialmente o completamente in un fluido (liquido o gas) riceve una spinta verticale dal basso verso l'alto, uguale per intensità al peso del volume del fluido spostato».

Consideriamo un liquido di densità costante  $\rho_L$  e un volume di liquido  $V_L$ . In condizioni di equilibrio sappiamo che  $\vec{R}^{(E)} = 0$ . Chiamiamo  $\vec{F}_S$  la risultante di tutte le forze superficiali agenti sul volume. Possiamo quindi scrivere:

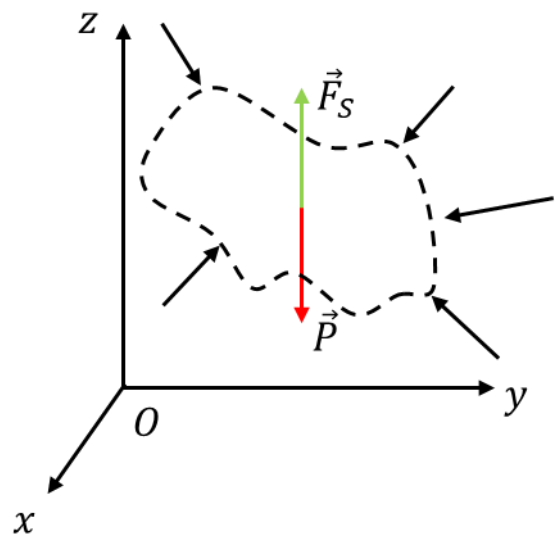
$$\begin{aligned}\vec{P} + \vec{F}_S &= 0 \\ mg\vec{u}_y + F_S\vec{u}_y &= 0\end{aligned}$$

Da cui:

$$\vec{F}_S = -V_L \rho_L g \vec{u}_y$$

Se invece inseriamo nel liquido un corpo di densità  $\rho_C \neq \rho_L$  e di volume  $V_C$ , possiamo dire che:

$$\begin{aligned}\vec{P}_C + \vec{F}_S &\neq 0 \\ \vec{P}_C &= m_C g = V_C \rho_C g\end{aligned}$$



Per il principio di Archimede sappiamo che  $\vec{F}_s = -V_L \rho_L g \hat{u}_y$  dove  $V_L$  è il volume di liquido spostato. Poiché immergiamo il corpo nel liquido sappiamo che  $V_L = V_C$ :

$$\begin{aligned} V_C \rho_C g \vec{u}_y - V_C \rho_L g \hat{u}_y &= m_C \vec{a}_C \\ g V_C (\rho_C - \rho_L) \hat{u}_y &= m_C \vec{a}_C \end{aligned}$$

Da cui otteniamo che se:

- $\rho_C > \rho_L$  allora l'accelerazione del corpo è diretta verso il basso (il corpo affonda)
- $\rho_C < \rho_L$  allora l'accelerazione del corpo è diretta verso l'alto (il corpo galleggia)

## 3. Termodinamica

La **termodinamica** è la branca della chimica e della fisica classica che studia e descrive le trasformazioni termodinamiche indotte dal calore e dal lavoro in un **sistema termodinamico**, in seguito a processi che coinvolgono cambiamenti delle variabili di stato temperatura ed energia.

È utile dare alcune definizioni:

- L'**universo termodinamico** è costituito dall'ambiente e dal sistema termodinamico (l'oggetto di studio).
- L'**ambiente esterno** di un sistema è identificabile con tutti i corpi materiali o con tutte le sorgenti di energia ad immediato contatto con esso con il quale è possibile scambiare energia e materia.
- Un "**sistema termodinamico**" è una qualunque porzione dell'universo a cui ci si sta interessando come oggetto d'indagine (la rimanente parte dell'universo si definisce invece ambiente). Questa porzione di spazio è separata dal resto dell'universo, cioè dall'ambiente esterno, mediante una **superficie di controllo** (superficie reale o immaginaria, rigida o deformabile), ed è sede di trasformazioni interne e scambi di materia o energia con l'ambiente esterno. Questi stessi scambi causano perciò la trasformazione del sistema, poiché esso passa da una condizione di partenza ad una differente. Diciamo che:
  - Un **sistema isolato** è un sistema separato dall'ambiente esterno da **superfici adiabatiche** che non consentono scambi di energia o materia con l'ambiente esterno
  - Un **sistema chiuso** è un sistema in grado di scambiare energia con l'ambiente esterno, ma non in grado di scambiare materia (ad esempio una pentola chiusa).
  - Un **sistema aperto** è un sistema in grado di scambiare con l'ambiente esterno sia energia che materia (ad esempio una pentola aperta).

Lo stato di un sistema macroscopico che si trova in condizione di equilibrio è specificato da grandezze dette **variabili termodinamiche** (o **funzioni di stato**). Le principali notazioni in termodinamica chimica sono state stabilite dalla unione internazionale di chimica pura e applicata. È tipica della termodinamica la distinzione fra variabili intensive ed estensive:

- **estensive**, se dipendono dalle dimensioni del sistema (ad es. **massa**, **volume**, **capacità termica**)
- **intensive**, se non dipendono dalle dimensioni del sistema (ad es. **pressione**, **densità** e **temperatura**)

Infatti, se ad esempio il sistema in esame è costituito dall'acqua in un contenitore tutta alla stessa temperatura, rimuovere acqua varia il volume (estensivo) ma non la temperatura (intensiva).

### 3.1. L'equilibrio in termodinamica

---

In termodinamica distinguiamo tre tipi di equilibri:

- **Equilibrio meccanico**: la risultante delle forze esterne e dei momenti esterni sono entrambi nulli:

$$\begin{cases} \vec{R}^{(E)} = 0 \\ \vec{M}^{(E)} = 0 \end{cases}$$

- **Equilibrio chimico**: non avvengono reazioni chimiche o fenomeni di diffusione, la composizione chimica è costante nel tempo ed è la stessa in ogni punto del sistema
- **Equilibrio termico**: non ci sono flussi di calore, la **temperatura** è costante nel tempo ed è la stessa in ogni punto del sistema

La **temperatura** di un corpo può essere definita come una misura dello stato di agitazione delle entità molecolari delle quali è costituito. In altre parole, la temperatura è una proprietà fisica intensiva, definibile per mezzo di una grandezza fisica scalare (ovvero non dotata di direzione e verso), che indica lo **stato termico di un sistema**.

Introduciamo quindi il “**principio zero della termodinamica**”, ossia che se due sistemi sono in equilibrio termico con un terzo sistema, essi sono in equilibrio termico tra di loro.

In termodinamica e chimica fisica, una **equazione di stato** è una legge costitutiva che descrive lo stato della materia sotto un dato insieme di condizioni fisiche. Fornisce una relazione matematica tra due o più variabili di stato associate alla materia, come temperatura, pressione, volume o energia interna.

La **trasformazione termodinamica** è un processo fisico tramite il quale un sistema termodinamico passa da uno stato di equilibrio termodinamico ad un altro. Una **funzione di stato** è invece una grandezza fisica la cui variazione nel passare da uno



stato ( $i$ ) a uno stato ( $f$ ) dipende solamente dalle condizioni assunte da un sistema all'inizio e alla fine di una trasformazione termodinamica, cioè dallo stato iniziale e finale, e non dal particolare percorso seguito durante la trasformazione.

### 3.1.1. La temperatura

Vediamo ora come dare una definizione funzionale di **temperatura**. Chiamiamo  $X$  caratteristica termometrica di un termometro, ossia una caratteristica del termometro che varia con la temperatura. La temperatura  $T$  sarà una funzione di  $X$  che stabiliremo essere:

$$T = \alpha X$$

Con  $\alpha$  costante. Per convenzione, nella *Conferenza dei Pesi e Misure* nel 1954, si è scelto di fissare a 273.16 K la temperatura del **punto triplo dell'acqua**, ossia quello stato in cui ghiaccio, acqua e vapore saturo sono all'equilibrio. Se mettiamo in contatto termico il termometro con l'acqua al punto triplo  $X_{PT}$  otterremo:

$$T = \alpha X_{PT} = 273.16$$

Poiché  $\alpha$  è costante ed è caratteristico di questo termometro possiamo scrivere:

$$\alpha = \frac{273.16}{X_{PT}} = \frac{T}{X}$$

Da cui otteniamo:

$$\frac{T}{X} = \frac{273.16}{X_{PT}}$$

Da cui la temperatura di un corpo misurata da questo termometro:

$$T = \frac{X}{X_{PT}} 273.16 \text{ K}$$

Osserviamo che questa definizione di temperatura è puramente empirica. Secondo la scala Celsius ( $^{\circ}C$ ) la temperatura dell'acqua al punto triplo è  $0.01^{\circ}C$ , da cui otteniamo che:

$$0^{\circ}C = 273.15 \text{ K}$$

Nei paesi anglosassoni sono usate la scala Rankie ( $^{\circ}R$ ) la scala Fahrenheit ( $^{\circ}F$ ):

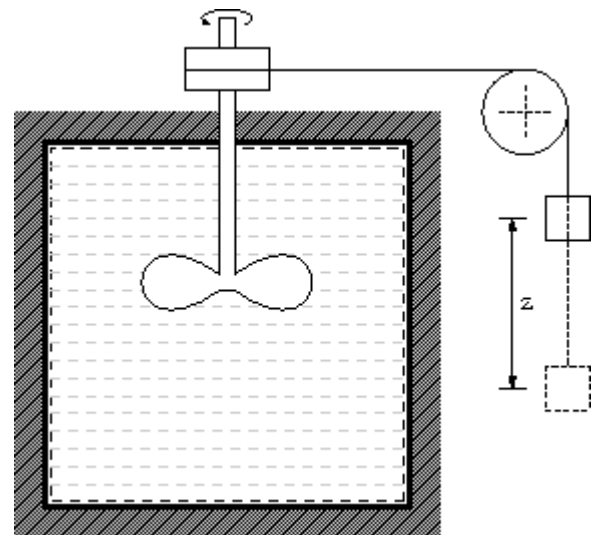
$$t(^{\circ}R) = \frac{9}{5} T(K)$$

$$t(^{\circ}F) = \frac{9}{5} T(K) - 459.67$$

### 3.1.2. L'esperimento di Joule

Il mulinello di Joule è lo strumento con cui il fisico inglese James Prescott Joule, nel 1847, determinò l'**equivalente meccanico del calore**.

Si tratta sostanzialmente di un particolare tipo di calorimetro contenente acqua; le palette sono soggette ad una coppia di forze dovuta alla caduta di due grossi pesi, liberi di muoversi sotto l'effetto dell'accelerazione di gravità, il tutto inserito in un contenitore adiabatico (non vi è scambio di energia con l'esterno). Si instaura così un regime viscoso tra le palette del mulinello e la struttura del mulinello stesso, con conseguente creazione di ingenti forze viscose. Come conseguenza di questo processo, il sistema costituito dai pesi più il mulinello stesso raggiunge rapidamente una velocità di regime, così che si ha un aumento della temperatura dell'acqua e la caduta rallentata dei pesi.



Autore: Hidaspal ([link alla licenza](#))

La forza peso compie quindi un lavoro sul sistema pari a:

$$L = -\Delta E_p$$

Quando i pesi hanno raggiunto il suolo, egli misurò l'innalzamento di temperatura dell'acqua contenuta nel calorimetro, ricavando la variazione di energia interna derivante dall'azione meccanica del mulinello. Egli notò che la temperatura dell'acqua era aumentata senza che fosse somministrato alcun calore dall'esterno (ricordiamo che il sistema era isolato). Ripetendo l'esperimento più volte compiendo lo stesso lavoro sul sistema con metodi diversi, a parità di massa d'acqua, Joule osservò che l'aumento della temperatura era **proporzionale al lavoro compiuto** sul sistema con la stessa costante di proporzionalità. L'indipendenza del tipo del lavoro dal tipo di trasformazione adiabatica che congiunge due stati termodinamici è confermata da altri esperimenti. Possiamo quindi scrivere la seguente relazione

$$L = -\Delta U = U_i - U_f$$

Dove  $U$  è una funzione che dipende solo dallo stato del sistema detta **energia interna di un sistema**. Se possiamo riprodurre lo stesso cambiamento di temperatura della

stessa massa d'acqua fornendo calore all'acqua (ad esempio tramite un fornello), possiamo definire la seguente relazione:

$$Q = \Delta U$$

Da cui otteniamo l'*equivalenza tra calore e lavoro*:

$$\begin{aligned} Q &= -L \\ Q + L &= 0 \end{aligned}$$

Dove  $Q$  rappresenta il calore scambiato senza lavoro in condizioni adiabatiche per raggiungere la stessa temperatura. Il calore, fino ad allora misurato in calorie, può essere quindi espresso in Joule. L'equivalenza è:

$$1 \text{ Cal} = 4186.8 \text{ J}$$

Una “grande caloria” ( $\text{Cal} = 1\text{Kcal}$ ) è l'energia necessaria per alzare la temperatura di  $1\text{Kg}$  di acqua a pressione costante di  $1 \text{ atm}$  e a  $14.5^\circ\text{C}$  di  $1^\circ$  (centigrado o Kelvin).

## 3.2. Il primo principio della termodinamica

Ripetendo gli stessi esperimento in condizioni non isolate, ossia nelle quali è permesso uno scambio di calore con l'ambiente, si osserva sperimentalmente che se il sistema compie una trasformazione dallo stato  $A$  allo stato  $B$ , scambiando calore  $Q$  e lavoro  $L$  col sistema,  **$Q$  e  $L$  dipendono dal tipo della trasformazione**. È invece indipendente dal tipo di trasformazione la differenza  $Q - L$ . Si può pertanto scrivere la relazione che esprime il **primo principio della termodinamica**:

$$\Delta U = Q - L$$

Specifichiamo inoltre che l'energia interna di un sistema dipende soltanto dalle proprietà interne del sistema, ad esempio moto molecolare o forze intermolecolari.

Se un sistema termodinamico esegue una trasformazione che lo riporta allo stato iniziale, chiamata **trasformazione ciclica** o **chiusa**, si ha per definizione:

$$\Delta U = 0 \rightarrow L = Q$$

Ad esempio, se nella trasformazione ciclica il sistema assorbe calore ( $Q > 0$ ), allora fornisce lavoro ( $L > 0$ ).

Per eseguire calcoli specifici è utile considerare trasformazioni termodinamiche nelle quali le variabili cambiano di quantità infinitesime:

$$dU = \delta Q - \delta L$$

Dove  $\delta Q$  e  $\delta L$  dipendono dalla trasformazione. Abbiamo quindi che:

$$\int_{U_i}^{U_f} dU = \int_i^f \delta Q - \int_i^f \delta L$$

L'integrale a sinistra è *esatto*, ossia non dipende dal tipo di trasformazione. I due integrali a destra dipendono invece dal tipo di “percorso seguito” (ossia dal tipo di trasformazione del sistema). Per maggiore chiarezza sui segni di  $L$  e  $Q$  possiamo seguire il seguente schema:

### 3.2.1. Il calore specifico

Consideriamo una pentola contenente una massa  $m$  di acqua a temperatura  $T$ . Se proviamo ad aumentare la temperatura dell'acqua provando con diverse masse e temperature iniziali, osserviamo che sarà necessario fornire una quantità di calore proporzionale a  $m$  e a  $t$ . Possiamo quindi scrivere:

$$\delta Q = cm dT$$

Dove la costante di proporzionalità  $c$  è detta **calore specifico**:

$$c = \frac{\delta Q}{m dT}$$

$$[c] = \frac{J}{Kg \cdot K}$$

Sperimentalmente si osserva che  $c$  dipenda dal tipo di sostanza, dalla temperatura della sostanza e dalla trasformazione a cui va in contro la sostanza. Il **calore specifico** dell'acqua a temperatura di  $T = 14.5^\circ C$  e a pressione costante  $p = 1 atm$  è:

$$c_{H_2O} = 4186.8 \frac{J}{Kg \cdot K} = 1 \frac{kCal}{Kg \cdot K}$$

In generale possiamo quindi trovare la quantità di calore necessaria ad aumentare la temperatura di un corpo di massa  $m$ :

$$\int_i^f \delta Q = \int_{T_i}^{T_f} c(T) m dT$$

Se per caso  $c(T)$  è costante possiamo scrivere:

$$Q_\gamma = cm(T_f - T_i)$$

Chiamiamo **capacità termica** il termine:

$$C(T) = c(T)m$$

$$[C] = \frac{J}{K}$$

Da cui otteniamo:

$$Q_V = \int_{T_i}^{T_f} C dT$$

### 3.2.2. Lo scambio di calore tra corpi

Vediamo cosa succede quando due corpi a temperature diverse. Consideriamo due solidi a temperatura  $T_1$  e  $T_2$  in un sistema isolato a pressione costante  $p$ .

All'inizio i due saranno isolati l'uno rispetto all'altro. Cosa succede quando li mettiamo a contatto? Se non intervengono forze esterne sappiamo che il lavoro compiuto sul sistema adiabatico è  $L_{AD} = 0$ . Sappiamo che in un sistema isolato vale che:

$$\begin{aligned} L_{AD} &= -\Delta U \\ \Rightarrow \Delta U &= 0 \end{aligned}$$

Poiché  $U_{TOT} = U_1 + U_2$ , possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \Delta U &= \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0 \\ \Rightarrow \Delta U_1 &= -\Delta U_2 \end{aligned}$$

Consideriamo ora il sistema del corpo 1 e 2 separatamente. Essendo all'interno del sistema rinchiuso da una parete adiabatica, essi non possono scambiare energia con l'ambiente esterno, ma possono scambiare energia all'interno del sistema. Possiamo quindi scrivere la prima legge della termodinamica per i due corpi:

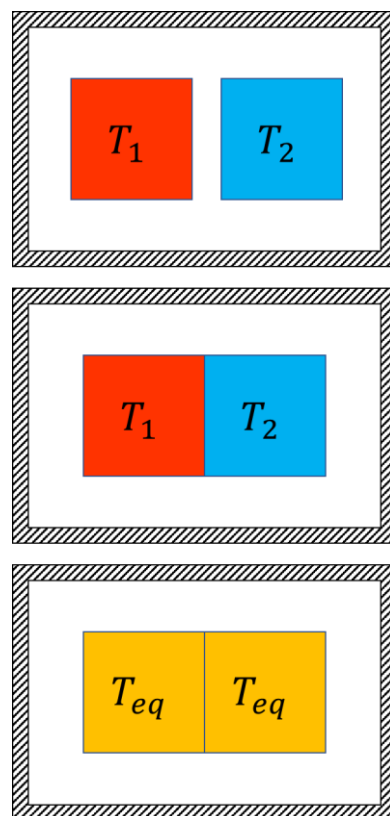
$$\begin{aligned} 1: L_1 &= 0 \rightarrow \Delta U_1 = Q_1 \\ 2: L_2 &= 0 \rightarrow \Delta U_2 = Q_2 \end{aligned}$$

Da cui otteniamo:

$$Q_1 = -Q_2$$

Il che significa che vi è un equo scambio di calore tra i due corpi. Poiché l'energia totale del sistema si conserva, possiamo dire che se  $T_1 > T_2$  allora la temperatura finale del sistema sarà:

$$T_1 > T_f > T_2$$



Infatti, il sistema sarà in equilibrio quando i due corpi non si scambiano più energia, ossia quando sono alla stessa temperatura  $T_f$ . Possiamo quindi scrivere:

$$Q_1 = \int_{T_1}^{T_f} m_1 c_1 dT < 0$$

$$Q_2 = \int_{T_2}^{T_f} m_2 c_2 dT > 0$$

Da cui:

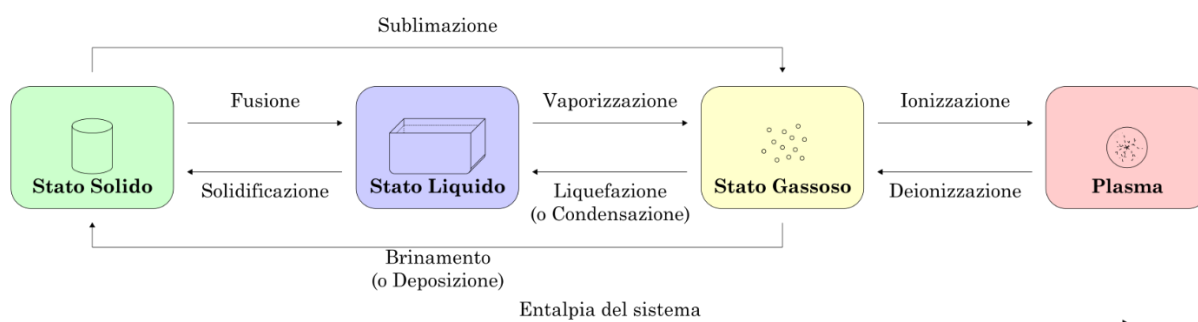
$$Q_1 = \int_{T_1}^{T_f} m_1 c_1 dT = -Q_2 = - \int_{T_2}^{T_f} m_2 c_2 dT$$

Si chiama **sorgente ideale di calore** un sistema fisico capace di mantenere una temperatura fissata qualunque sia la quantità di calore che esso cede o acquista.

### 3.2.3. I passaggi di stato

**Transizione di fase** (o "passaggio di stato" o "cambiamento di stato" o "transizione di stato") è un'espressione che in fisica e in chimica, indica la trasformazione di un sistema termodinamico da uno stato di aggregazione ad un altro. La caratteristica distintiva di una transizione di fase è il brusco cambiamento di una o più proprietà fisiche, in particolare la capacità termica, alla minima variazione di variabili termodinamiche come la temperatura.

Il seguente schema contiene tutti i possibili passaggi di stato della materia:



Autore: ElfQrin ([link alla licenza](#))

Nel caso di liquidi è necessario fare la distinzione tra due fenomeni comuni: l'**evaporazione** e l'**ebollizione**. Un liquido è caratterizzato dalla scarsa interazione tra le sue molecole, il che permette loro di muoversi. Legato al movimento è l'energia cinetica. Quando quest'energia cinetica è sufficiente a far "staccare" la molecola

allontanandola dal liquido si ha a livello macroscopico una transizione di fase. Se questo evento riguarda solo le molecole sulla superficie del liquido si parla di **evaporazione**. L'evaporazione è un evento che riguarda le molecole della superficie del liquido che stocasticamente riescono a lasciare il liquido. Se invece si raggiunge una temperatura critica (la **temperatura di ebollizione**) tutte le molecole del liquido acquisiscono un'energia cinetica sufficiente a consentirne il distacco, permettendo quindi al liquido di cambiare stato.

Sperimentalmente si osserva inoltre che le transizioni di fase avvengono a temperatura costante. Il fatto che nei passaggi di stato la variazione di energia interna avvenga a **temperatura costante**, indica che lo scambio energetico con l'esterno provoca la variazione di una forma di energia del sistema diversa da quella direttamente proporzionale alla sua temperatura. Tale forma è correlata allo stato di aggregazione, cioè alla struttura interna del sistema.

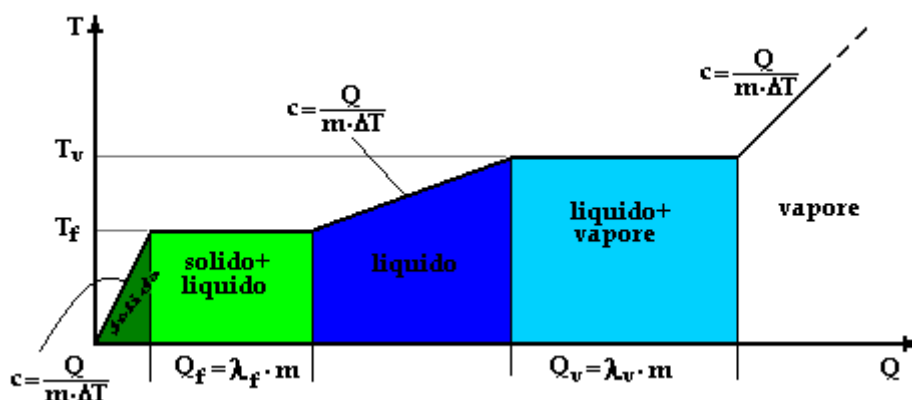
### 3.2.4. Il calore latente

Durante una transizione di fase avviene quindi uno scambio di energia con l'ambiente. Il **calore latente** è la quantità di energia scambiata (sotto forma di calore) durante lo svolgimento di una transizione di fase di una specifica sostanza rapportato alla massa della sostanza. Il calore totale scambiato durante una transizione di fase di una massa  $m$  di una sostanza è:

$$Q = \lambda \cdot m$$

Dove  $\lambda$  è caratteristico della sostanza, della transizione di fase e della pressione a cui avviene. L'unità di misura del calore latente è:

$$[\lambda] = \frac{J}{kg}$$



Autore: Tridim ([link alla licenza](#))

In generale vale che se la sostanza:

- passa da uno stato di ordine a uno stato di disordine (ad esempio l'ebollizione di un liquido), allora:

$$Q = \lambda \cdot m > 0 \rightarrow \lambda > 0$$

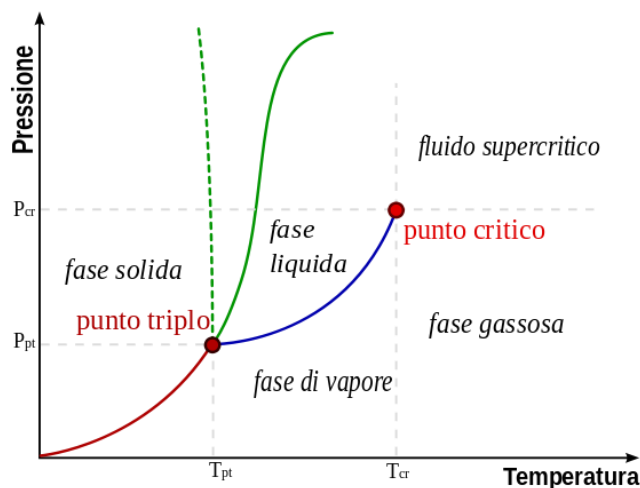
- passa da uno stato di disordine a uno stato di ordine (ad esempio la solidificazione di un liquido), allora:

$$Q = \lambda \cdot m < 0 \rightarrow \lambda < 0$$

### Il punto triplo

Il **punto triplo** è un particolare stato termodinamico determinato dai valori di temperatura e pressione in cui coesistono, in condizioni di equilibrio, tre fasi di aggregazione di una sostanza: nel caso più comune, quelle solida, liquida e aeriforme.

Tuttavia, molte sostanze, tra le quali l'acqua e l'anidride carbonica, hanno più di una fase solida (polimorfi), cosicché i loro diagrammi di fase presentano più punti tripli solido-solido-liquido o solido-solido-solido. I valori di temperatura e pressione che identificano i punti tripli dipendono solamente dalla sostanza in esame e, nel caso dei punti solido-liquido-aeriforme, possono essere determinati con notevole precisione grazie alla grande diversità di comportamento delle tre fasi coinvolte. Il punto triplo di varie sostanze è dunque utile per la taratura di strumenti di misura, utilizzando dispositivi metrologici chiamati "celle a punto triplo" contenenti la sostanza richiesta.



Autore: Chopin271~commons/wiki

Per studiare il passaggio tra uno stato e l'altro si può utilizzare il **diagramma di stato di una sostanza**, avente come ascisse i valori della temperatura e come ordinate i valori della pressione. Così facendo si potranno analizzare tre campi diversi: S dove il corpo è solido, L dove è liquido e A dove è aeriforme. Esistono delle condizioni di equilibrio tra due stati, rappresentati da punti sulla curva, diversa per ogni sostanza. Il punto triplo è l'unico punto in cui è possibile la coesistenza di tutti e tre gli stati.

Al punto triplo dell'acqua è stato assegnato arbitrariamente la temperatura:

$$T = 273.16K$$

Alla pressione di:

$$p = 0,6117 \text{ kPa}$$



### 3.2.5. Le trasformazioni

Abbiamo precedentemente detto che le **trasformazioni termodinamiche** sono processi fisici tramite il quale sistemi termodinamici passano da uno stato di equilibrio termodinamico ad un altro. Possiamo in generale dividere le trasformazioni termodinamiche in due macrocategorie:

- Le trasformazioni termodinamiche sono dette **reversibili** se in una qualsiasi fase della trasformazione è possibile ritornare allo stato di equilibrio iniziale. Possiamo individuare due condizioni necessarie perché una trasformazione possa essere definita reversibile:
  - o **Quasi-staticità**: in ogni istante della trasformazione il sistema deve essere in equilibrio, ossia deve essere possibile definire con precisione le variabili di stato. Realisticamente possiamo dividere il tempo in cui avviene la trasformazione e dividerlo in infiniti istanti di tempo. Se una trasformazione avviene tra gli istanti  $t_A$  e  $t_B$ , possiamo scrivere:
$$t_B = t_A + dt + dt + \dots$$
In ognuno di questi istanti deve essere possibile definire le variabili di stato del sistema. Ad esempio, mentre si gonfia un palloncino, in ogni momento siamo capaci di definire volume, temperatura e pressione.
  - o **Assenza di forze dissipative**: durante la trasformazione non devono intervenire forze dissipative, ossia forze che trasferiscono parte dell'energia all'ambiente modificandolo.
- Quando almeno una delle due condizioni non è soddisfatta si parla di **trasformazioni irreversibili**. In caso di trasformazioni irreversibili non sarà possibile ritornare allo stato di equilibrio iniziale. Lo scoppio di un palloncino ad esempio non soddisfa la condizione di quasi-staticità poiché non è possibile stabilire le variabili di stato durante lo scoppio. Durante la frenata di una macchina invece è resa possibile da forze dissipative (l'attrito tra le pastiglie dei freni e il disco) che disperdono calore nell'ambiente.

## 3.3. I gas ideali

---

Ricordiamo che un gas è un fluido con le seguenti caratteristiche:

- Non ha né forma né volume proprio
- È facilmente comprimibile (con conseguenti variazioni di volume, densità e pressione)

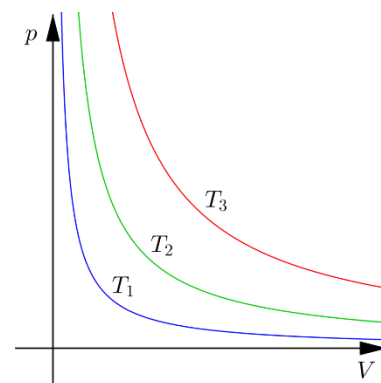
- Considerata una certa quantità di gas, le variabili termodinamiche più appropriate per descriverne lo stato sono *temperatura*, *volume* e *pressione*

Vediamo ora il comportamento dei gas nelle trasformazioni termodinamiche:

- Una **trasformazione isoterma** è una trasformazione che avviene a temperatura  $T$  costante. Sperimentalmente si osserva che i gas ideali durante una trasformazione isoterma rispettano la **legge di Boyle** che lega volume e pressione:

$$pV = \text{cost.}$$

La legge di Boyle può essere rappresentata sul **piano di Clapeyron**, dove l'asse  $x$  rappresenta il volume e l'asse  $y$  la pressione. La curva che si ottiene è un'iperbole equilatera.

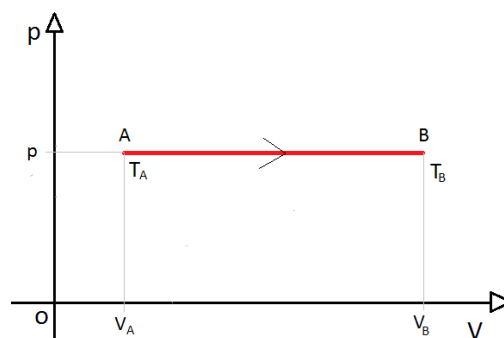


Autore: MorgMat  
[CC BY-SA 4.0 ([link alla licenza](#))]

- Una **trasformazione isobara** è una trasformazione che avviene a pressione  $p$  costante. Sperimentalmente si osserva che i gas ideali durante una trasformazione isoterma rispettano la **legge di Charles** che lega volume e temperatura:

$$V = V_0(1 + \alpha t)$$

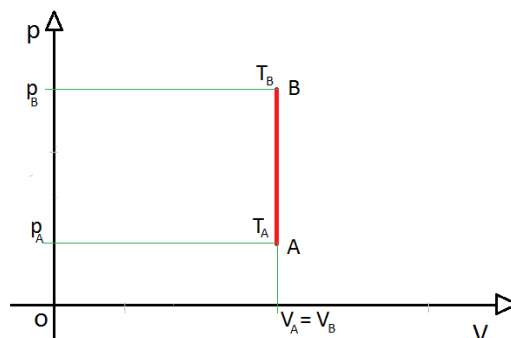
Dove  $V_0$  è il volume del gas a temperatura  $t = 0^\circ\text{C}$  alla data pressione,  $t$  è la temperatura del gas in gradi Celsius e  $\alpha$  è una costante che dipende dal gas e dalla pressione. Rappresentando la relazione sul piano di Clapeyron si ottiene una retta orizzontale.



- Una **trasformazione isocora** è una trasformazione che avviene a volume  $V$  costante. Sperimentalmente si osserva che i gas ideali durante una trasformazione isoterma rispettano la **legge di Volta Gay Lussac** che lega pressione e temperatura:

$$p = p_0(1 + \beta t)$$

Dove  $p_0$  è la pressione del gas a temperatura  $t = 0^\circ\text{C}$  al dato volume,  $t$  è la temperatura del gas in gradi Celsius e  $\beta$  è una costante che dipende dal gas e dal volume. Rappresentando la relazione sul piano di Clapeyron si ottiene una retta verticale.



Vediamo ora le relazioni tra queste variabili, che sono tanto meglio verificate quanto più un gas si avvicina a condizioni di **pressione sufficientemente bassa** e di **temperatura alta** (quella per cui si avrebbe condensazione alla data pressione). Si parla in questo caso di **comportamento ideale**. Nel caso di **gas ideali** si osserva che le costanti:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{273.5}$$

Sostituendo nelle leggi delle trasformazioni otteniamo-:

$$V = V_0(1 + \alpha t) = \alpha V_0 \left( \frac{1}{\alpha} + t \right)$$

$$p = p_0(1 + \beta t) = p_0(1 + \alpha t) = \alpha p_0 \left( \frac{1}{\alpha} + t \right)$$

Ricordando che  $T(K) = 273.15 + t(^{\circ}C)$  possiamo scrivere:

$V = \alpha V_0 T$ $p = \alpha p_0 T$
---------------------------------------

Notiamo inoltre che allo **zero assoluto**, ossia a temperatura  $T = 0K$ , pressione e volume sono nulli. Lo zero assoluto non è infatti raggiungibile. In laboratorio si è riusciti ad arrivare alla temperatura di 500 nano kelvin, Ovvero 500 miliardesimi di grado sopra lo zero assoluto.

### 3.3.1. Il principio di Avogadro

Prima di introdurre il principio di Avogadro introduciamo il concetto di mole. Una **mole** è la quantità di materia costituita da un numero di unità elementari pari al numero di atomi contenuti in 12g di **carbonio-12** (isotopo 12 del carbonio  $^{12}C$ ). Questo valore è detto **numero di Avogadro**:

$$n = 6.022 \cdot 10^{23}$$

Avogadro nel 1811 ipotizzò che:

*Nelle medesime condizioni di temperatura e pressione gas diversi contengono lo stesso numero di molecole.*

Questo principio è noto come **principio di Avogadro**. Egli infatti, dopo aver misurato il volume di gas a diverse temperature e a varie pressioni, è giunto alla definizione del principio di Avogadro e del Numero di Avogadro e alla conclusione che:

*Una mole di gas alla temperatura di  $0^{\circ}C$  e alla pressione di 1 atmosfera occupa sempre 22,4 litri, qualunque sia la natura del gas.*

Possiamo quindi scrivere che il volume di  $n$  moli di gas in queste condizioni è:

$$V_n = n \cdot 22.4\text{l} = n \cdot 0.0224\text{m}^3$$

### 3.3.2. L'equazione di stato dei gas ideali

Vediamo ora l'**equazione di stato** dei gas ideali. Consideriamo un gas e tre stati di equilibrio:

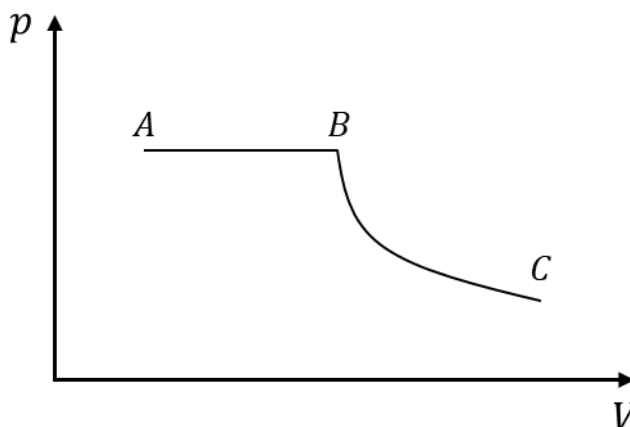
$$A: (p_0 = 1\text{atm}, V_0 = n \cdot V_m, T_0 = 273.15\text{K})$$

$$B: (p_0, V_B, T)$$

$$C: (p, V, T)$$

Tramite una trasformazione isobara possiamo passare da  $A$  a  $B$ . Possiamo dire che il volume del gas in  $B$  è:

$$V_B = \alpha V_0 T$$



Il gas passa poi a  $C$  tramite una trasformazione isoterma:

$$pV = \text{cost.}$$

Poiché  $pV$  è costante tra  $B$  e  $C$  possiamo scrivere:

$$pV = p_0 V_B$$

Possiamo quindi scrivere:

$$pV = p_0 \alpha V_0 T$$

$$pV = p_0 \alpha n V_m T$$

Definiamo la **costante dei gas ideali**:

$$R = \alpha V_m p_0 = 8,314462618 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Ricavando quindi l'**equazione di stato** dei gas perfetti:

$$pV = nRT$$

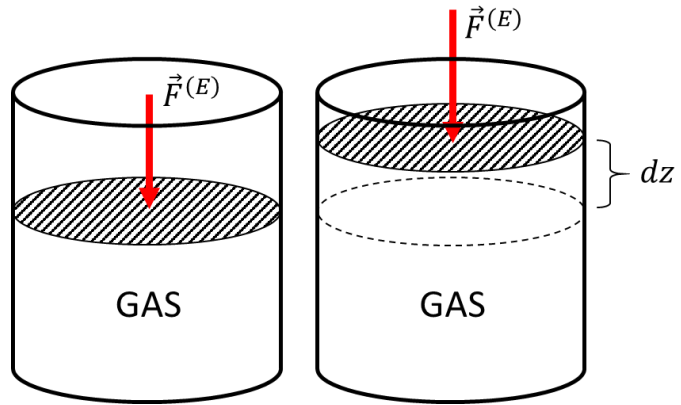
### 3.3.3. Il lavoro di un gas durante una trasformazione

Consideriamo un sistema costituito da un contenitore cilindrico che contiene un volume di gas. Il contenitore è chiuso da un coperchio scorrevole che può muoversi

verticalmente. Se il gas si espande sposta il coperchio sollevandolo. Possiamo trovare il lavoro compiuto dal gas. Il lavoro infinitesimo totale compiuto dal sistema è:

$$\delta L = \delta L_{GAS} + \delta L^{(E)}$$

Le forze esterne che agiscono sono la forza di pressione atmosferica e la forza peso che agisce sul coperchio.



Per comodità consideriamo nulla la massa del coperchio. Quando il gas si troverà in condizioni di equilibrio (ad esempio all'inizio e alla fine dell'espansione) il sistema sarà fermo. Segue che:

$$\delta L = dE_k = 0$$

Essendo il lavoro totale compiuto dal sistema nullo possiamo scrivere:

$$\delta L_{GAS} = -\delta L^{(E)} = -\vec{F}^{(E)} \cdot d\vec{z} =$$

Poiché l'unica forza esterna che agisce è quella della pressione atmosferica,  $F^{(E)} = p^{(E)}S$  diretta verso il basso, otteniamo che:

$$\delta L_{GAS} = p^{(E)}Sdz$$

Notiamo che  $Sdz$  è il volume di espansione del gas, scriviamo quindi:

$$\delta L_{GAS} = p^{(E)}dV$$

Se quindi:

- Il gas si espande allora  $dV > 0 \rightarrow \delta L_{GAS} > 0$
- Il gas si comprime allora  $dV < 0 \rightarrow \delta L_{GAS} < 0$

Possiamo quindi scrivere:

$$L_{GAS} = \int_{V_i}^{V_f} p^{(E)}dV$$

Se la **pressione esterna è costante** quindi la trasformazione è reversibile, poiché in ogni istante siamo in grado di definire lo stato del gas. Raccogliendo otteniamo che:

$$L_{GAS} = p^{(E)}(V_f - V_i)$$

Se non agisce la forza peso, come in questo caso, nel momento in cui viene tolta la pressione esterna il gas subisce una espansione istantanea teoricamente infinita. Ci troviamo quindi di fronte a una trasformazione irreversibile.

Immaginiamo di avere ora un peso appoggiato al coperchio, il sistema si troverà quindi in uno stato di equilibrio. Se immaginiamo di aggiungere pesi infinitesimi in successione, possiamo parlare di una trasformazione quasi-statica. In ogni istante infatti il sistema si troverà in equilibrio. In particolare, avremo che:

$$p_{gas} = p^{(E)}$$

Da cui:

$$L_{GAS} = p_{GAS}(V_f - V_i)$$

Se proviamo quindi rappresentiamo sul piano di Clapeyron una trasformazione (reversibile o irreversibile), notiamo che il lavoro è l'area sottesa dalla curva. Considerando una trasformazione ciclica (dallo stato di equilibrio  $A$  allo stato di equilibrio  $B$  poi di nuovo ad  $A$ ) il lavoro del sistema sarà rappresentato dall'area sottesa della figura formata dalla curva chiusa, in particolare:

- $L > 0$  se il ciclo è orario
- $L < 0$  se il ciclo è antiorario

Considerando le trasformazioni di cui abbiamo parlato prima abbiamo che:

- In una **trasformazione isobara** la pressione è  $p = \text{cost.}$  Quindi raccogliendo otteniamo che il lavoro compiuto dal sistema è:

$$L = \int_{V_i}^{V_f} p dV = p \int_{V_i}^{V_f} dV$$

$$\boxed{L = p(V_f - V_i)}$$

- In una **trasformazione isocora** il volume rimane costante, pertanto:

$$L = \int_{V_i}^{V_f} p dV = \int_{V_i}^{V_f} p_0(1 + \beta t) dV$$

$$\boxed{L = 0}$$

- In una **trasformazione isoterma** invece possiamo calcolare il lavoro compiuto dal sistema ipotizzando la quasi-staticità della trasformazione. In questo caso avremo infatti che in ogni istante della trasformazione varrà l'equazione della statica dei gas ideali:

$$pV = nRT$$

$$p = \frac{nRT}{V}$$

Da cui sostituendo:

$$L = \int_{V_i}^{V_f} p dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV$$

$$L = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

### 3.3.4. Il calore scambiato da un gas durante una trasformazione

Vediamo ora quanto calore viene scambiato durante la trasformazione di un gas ideale. Consideriamo una trasformazione quasi-statica, in cui possiamo definire il calore scambiato in ogni istante. Definendo il **calore specifico molare** (equivalente del calore specifico per le moli) avremo che:

$$\delta Q = n c dT$$

Con:

$$c = \frac{\delta Q}{n dT}$$

$$[c] = \frac{J}{mol \cdot K}$$

Varrà quindi che:

- Durante una **trasformazione isocora** il calore scambiato dal sistema è:

$$\delta Q = n c_V dT$$

$$Q = \int_{T_i}^{T_f} n c_V dT$$

Dove  $c_V$  è il calore specifico relativo al volume a cui avviene la trasformazione. In particolare, vale che:

- Per i **gas monoatomici**  $c_V = \frac{3}{2}R$
  - Per i **gas biatomici**  $c_V = \frac{5}{2}R$
- Durante una **trasformazione isobara** il calore scambiato dal sistema è:

$$\delta Q = n c_p dT$$

$$Q = \int_{T_i}^{T_f} n c_p dT$$

Dove  $c_p$  è il calore specifico relativo alla pressione a cui avviene la trasformazione. In particolare, vale che:

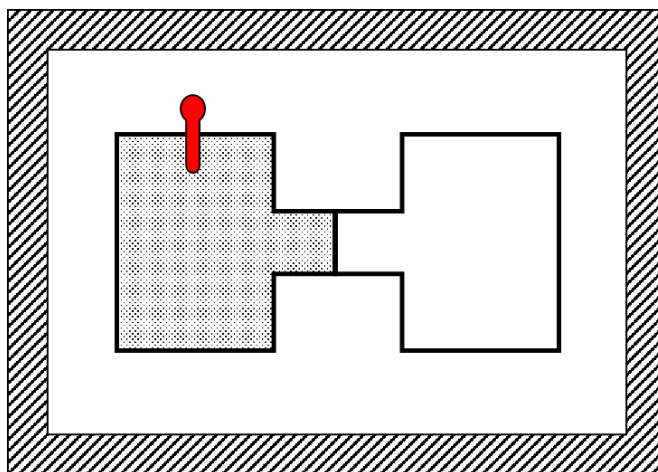
- Per i **gas monoatomici**  $c_p = \frac{5}{2}R$
- Per i **gas biatomici**  $c_p = \frac{7}{2}R$
- Durante una **trasformazione isoterma** ci riferiamo al primo principio della termodinamica ricordando quanto abbiamo scritto sopra relativamente al lavoro:

$$Q = L + \Delta U = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) + \Delta U$$

### 3.3.5. L'energia interna di un gas ideale

Vediamo ora come si calcola l'energia interna di un gas. Ricordiamo innanzitutto che le variabili che descrivono lo stato di un gas sono  $p, V$  e  $T$ . Ci chiediamo quindi in funzione di quali di queste variabili varia l'energia interna di un gas.

Possiamo fare un esperimento considerando un contenitore adiabatico contenente due cilindri collegati da un rubinetto chiuso. Il primo cilindro viene riempito con un gas (non per forza ideale). Con un termometro viene misurata la temperatura  $T_i$  del gas. Viene quindi aperto il rubinetto e una volta raggiunto lo stato di equilibrio si rimisura la temperatura del gas  $T_f$ .



Si nota che avvicinandosi alle condizioni di gas ideale vale la relazione  $T_f = T_i$ . Notiamo che durante la trasformazione non viene compiuto alcun lavoro meccanico (non vi sono movimenti meccanici). Inoltre, il contenitore adiabatico non permette scambi di calore con l'ambiente, quindi:

$$\begin{aligned} L &= 0 \\ Q &= 0 \\ \Rightarrow \Delta U &= Q - L = 0 \end{aligned}$$

Notiamo che durante la trasformazione pressione e volume cambiano, mentre l'energia interna resta costante. Essendo la temperatura l'unica variabile termodinamica costante si deduce che **l'energia interna di un gas dipende esclusivamente dalla temperatura**. Possiamo quindi calcolarla tenendo conto che  $\Delta U$  non dipende dal tipo di trasformazione.



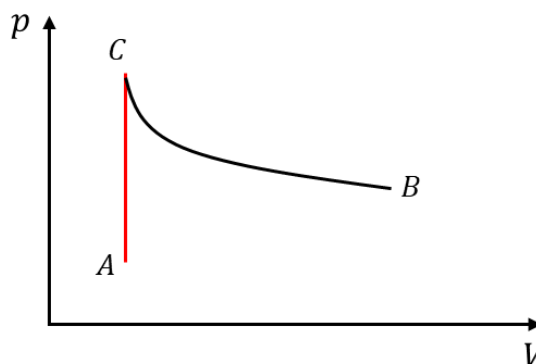
1. Consideriamo una **trasformazione isocora** che porta il gas da uno stato  $A$  a uno stato  $C$ . Sappiamo che il lavoro compiuto dal sistema durante questa trasformazione è nullo:

$$L_{AC} = 0$$

Quindi:

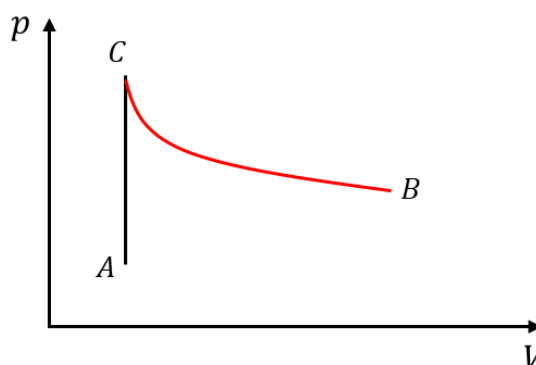
$$Q_{AC} - L_{AC} = \Delta U_{AC}$$

$$\Delta U_{AC} = Q_{AC} = nc_V(T_C - T_A)$$



2. Consideriamo ora una seconda **trasformazione** questa volta **isoterma** che porta il sistema dallo stato  $C$  allo stato  $B$ . Poiché abbiamo detto che l'energia interna dipende esclusivamente dalla temperatura possiamo dire che:

$$\Delta U_{CB} = 0$$



Possiamo quindi dire che:

$$\Delta U_{AB} = \Delta U_{AC} + \Delta U_{CB}$$

Segue:

$$\Delta U_{AB} = 0 + nc_V(T_C - T_A)$$

Poiché la trasformazione da  $C$  a  $B$  è isoterma sappiamo che  $T_C = T_B$ , da cui:

$$\Delta U_{AB} = nc_V(T_B - T_A)$$

Da cui, sapendo che  $\Delta U_{AB} = U_B - U_A$ , possiamo ricavare **l'energia interna di un gas ideale** a temperatura  $T$  (considerando  $U = 0$  a  $T = 0K$ ):

$$U = nc_V T$$

Possiamo quindi riassumere quanto iniziato nel [PARAGRAFO 3.3.4](#) riguardo ai gas perfetti:

- Durante una **trasformazione isobara** abbiamo che:

$$L = p(V_f - V_i)$$

$$Q = nc_P(T_f - T_i)$$

$$\Delta U = nc_V(T_B - T_A)$$

- Durante una **trasformazione isocora** abbiamo che:

$$L = 0$$

$$Q = \Delta U = nc_v(T_f - T_i)$$

- Durante una **trasformazione isoterma** abbiamo che:

$$L = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

$$\Delta U = nc_v(T_f - T_i) = 0$$

$$Q = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

### 3.3.6. La relazione di Meyer

Nel PARAGRAFO 3.3.4 abbiamo visto che:

$$c_v = \frac{3}{2}R$$

$$c_p = \frac{5}{2}R$$

Notiamo quindi che:

$$c_p - c_v = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right)R$$

$c_p - c_v = R$
-----------------

La relazione  $c_p - c_v = R$  è detta **relazione di Meyer**. Vediamo da dove si ricava questa relazione. Per farlo consideriamo una trasformazione isobara quasi-statica. Possiamo quindi individuare in ogni istante la differenza infinitesima di energia interna:

$$\begin{aligned}\delta Q - \delta L &= dU \\ nc_p dT - \delta L &= nc_v dT \quad (1)\end{aligned}$$

Dobbiamo quindi calcolare  $\delta L$ . Ricordando l'equazione della statica dei gas ideali (vale in ogni istante della trasformazione):

$$\begin{aligned}pV &= nRT \\ d(pV) &= d(nRT) \\ Vdp + pdV &= nRdT\end{aligned}$$

Poiché la trasformazione è isobara, sappiamo che  $dp = 0$ , da cui (ricordando che il lavoro infinitesimo è  $\delta L = pdV$ ):

$$\begin{aligned}pdV &= nRdT \\ \Rightarrow \delta L &= nRdT\end{aligned}$$

Ritornando all'equazione (1) otteniamo che:

$$nc_p dT - nRdT = nc_v dT$$

Semplificando otteniamo il principio di Meyer:

$$c_p - c_v = R$$

Considerando l'equazione  $\delta Q - \delta L = dU$ , possiamo affermare che:

Durante una **trasformazione isocora**  $\delta L = 0$ , da cui:

$$\delta Q = dU$$

Poiché in un gas ideale  $dU = nc_v dT$ , possiamo dire che tutto il calore fornito al sistema va ad aumentare la temperatura del gas.

Durante una **trasformazione isobara** invece avremo che:

$$\delta Q = dU + \delta L$$

Possiamo quindi dire che il calore fornito al sistema si converte in parte nell'aumento di energia interna (e quindi di temperatura) del gas e in parte convertito in lavoro del sistema.

Intrinsecamente quindi  $c_p$  risulterà essere maggiore di  $c_v$  poiché occorrerà più calore per aumentare la temperatura durante una trasformazione isobara che durante una trasformazione isocora.

### 3.3.7. Le trasformazioni adiabatiche

Vediamo ora cosa succede nel caso di **trasformazioni adiabatiche** ossia trasformazioni che avvengono senza alcun scambio di energia con l'ambiente. Possiamo quindi riscrivere il primo principio della termodinamica come:

$$L = -\Delta U = -nc_v(T_f - T_i)$$

Consideriamo ora una trasformazione adiabatica (reversibile o irreversibile) quasi-statica. Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned}\delta L &= -dU = -nc_v dT \\ pdV + nc_v dT &= 0\end{aligned}$$

Ricordando l'equazione della statica dei gas perfetti possiamo scrivere:

$$p = \frac{nRT}{V}$$

$$\frac{nRT}{V}dV + nc_VdT = 0$$

$$\frac{R}{Vc_V}dV = -\frac{dT}{T}$$

Utilizzando la relazione di Meyer  $R = c_p - c_V$  scriviamo:

$$\frac{c_p - c_V}{c_V} \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T}$$

Chiamiamo  $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$  e scriviamo:

$$(\gamma - 1) \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T}$$

Questa relazione rappresenta il legame tra le variabili di stato di un gas ideale durante una trasformazione adiabatica. Se  $\gamma$  è costante integrando otteniamo:

$$(\gamma - 1) \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = -\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

$$\ln\left[\left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{(\gamma-1)}\right] = \ln\left[\left(\frac{T_f}{T_i}\right)^{-1}\right]$$

Da cui:

$$V_f^{(\gamma-1)} T_f = V_i^{(\gamma-1)} T_i$$

Trasformando tramite l'equazione di stato possiamo scrivere che durante una trasformazione adiabatica vale che:

$V^{\gamma-1} T = \text{cost.}$ $p V^{\gamma} = \text{cost.}$ $T p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{cost.}$
--

In generale chiamiamo **trasformazione politropica** una trasformazione che soddisfa la condizione:

$$p V^{\gamma} = \text{cost.}$$

In particolare:

- Se  $\gamma = 1$  allora si parla di trasformazione isoterma (legge di Boyle)
- Se  $\gamma > 1$  allora la trasformazione è adiabatica

### 3.3.8. Le macchine termiche

Abbiamo precedentemente visto che in un ciclo di trasformazioni termodinamiche il lavoro compiuto dal sistema è:

- **Positivo** se il ciclo è percorso in senso orario. Si parla in questo caso di **macchine termiche**, ossia dispositivi capaci di compiere lavoro assorbendo calore. Poiché in un ciclo sappiamo che:

$$U_f = U_i \Rightarrow \Delta U = 0$$

$$Q = L$$

Poiché  $L > 0$  allora sappiamo che  $Q > 0$ . Chiamiamo

$$\eta = \frac{Q_{TOT}}{Q_{ASS}} = \frac{Q_{ASS} + Q_{CED}}{Q_{ASS}} = 1 + \frac{Q_{CED}}{Q_{ASS}} = 1 - \left| \frac{Q_{CED}}{Q_{ASS}} \right|$$

**rendimento della macchina termica.** L'efficienza indica quanto del calore assorbito dalla macchina viene effettivamente trasformato in lavoro. L'efficienza massima è quindi  $\eta = 1$ , raggiungibile se la macchina non dissipa calore (in realtà non si può raggiungere  $\eta = 1$  a causa di attriti che dissipano parte del calore).

- **Negativo** se il ciclo è percorso in senso antiorario. Se quindi il ciclo è tale che venga richiesto un lavoro esterno ( $L < 0$ ) per trasferire calore da una sorgente più fredda a una sorgente più calda si parla di **macchina frigorifera**. Chiamiamo **efficienza di una macchina frigorifera** il valore:

$$\varepsilon = \frac{|Q_{ASS}|}{L}$$

Se invece è più di interesse il calore ceduto alla sorgente più calda si parla di **efficienza della pompa di calore**:

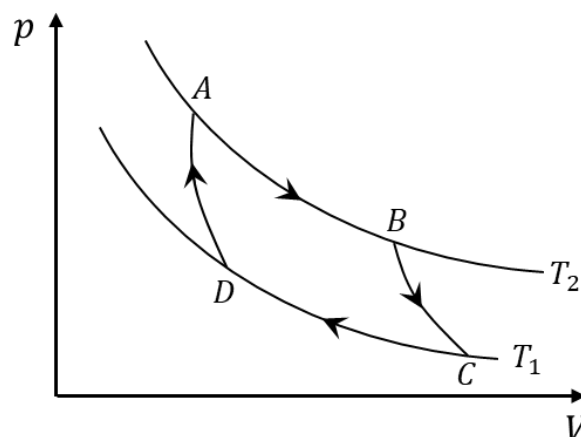
$$\varepsilon = \frac{|Q_{CED}|}{L}$$

Studiamo ora alcuni cicli descritti da gas ideali

### ***Il ciclo di Carnot***

Il ciclo di Carnot è l'unico ciclo reversibile che opera tra due sole sorgenti. È costituito da quattro trasformazioni reversibili:

- 1) Trasformazione  $A B$ , **espansione isoterma reversibile**
- 2) Trasformazione  $B C$ , **espansione adiabatica reversibile**
- 3) Trasformazione  $C D$ , **compressione isoterma reversibile**
- 4) Trasformazione  $D A$ , **compressione adiabatica reversibile**



Vediamo nel dettaglio:

- 1) Nello stato  $A$  il gas è in equilibrio a contatto termico con una sorgente di calore a temperatura  $T_2$ . L'espansione isoterma reversibile  $AB$  può essere considerata come una successione di trasformazioni infinitesime: a seguito di una diminuzione della pressione  $dp$ , il volume aumenta di una quantità  $dV$ , raffreddandosi di una temperatura  $dT$  e assorbendo una quantità di calore  $dQ$ , ritornando quindi all'equilibrio termico. Poiché l'energia interna non cambia possiamo scrivere:

$$L_{AB} = Q_{AB} = nRT_2 \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right)$$

- 2) Durante la trasformazione  $BC$  il gas passa dallo stato  $B(p_B, V_B, T_2)$  allo stato  $C(p_C, V_C, T_1)$ . Essendo una trasformazione adiabatca possiamo scrivere:

$$T_1 V_C^{\gamma-1} = T_2 V_B^{\gamma-1}$$

Il lavoro compiuto dal sistema durante questa trasformazione è, ricordando che  $Q = 0$ :

$$L_{BC} = -\Delta U_{BC} = nc_V(T_2 - T_1)$$

- 3) La trasformazione  $CD$  è analoga alla trasformazione  $AB$ . Questa volta però la pressione aumenta di  $dp$ , il volume diminuisce di  $dV$  e la temperatura aumenta di  $dT$ . Il gas quindi cede una quantità di calore  $dQ$  a  $T_1$  riportandosi all'equilibrio termico con  $T_1$ . Ricordando che  $\Delta U_{CD} = 0$  scriviamo:

$$L_{CD} = Q_{CD} = nRT_1 \ln \left( \frac{V_D}{V_C} \right)$$

Poiché si tratta di una compressione,  $V_D < V_C$ , pertanto  $Q_{CD} < 0$

- 4) Infine, nella trasformazione  $DA$ , la pressione aumenta di un valore  $dp$ , il volume diminuisce di un valore  $dV$  e la temperatura aumenta di  $dT$ . Il gas torna allo stato iniziale  $A$ . Essendo una trasformazione adiabatca possiamo scrivere:

$$T_1 V_D^{\gamma-1} = T_2 V_A^{\gamma-1}$$

Il lavoro subito dal sistema è:

$$L_{DA} = -\Delta U_{DA} = nc_V(T_1 - T_2) = -L_{BC}$$

Poiché è un ciclo, sappiamo che  $\Delta U = 0$ . Possiamo quindi sommare i contributi e scrivere:

$$Q_{TOT} = Q_{AB} + Q_{CD} = L_{TOT} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = L_{AB} + L_{CD}$$

Il rendimento del ciclo è quindi:

$$\eta = 1 + \frac{Q_{CED}}{Q_{ASS}} = 1 + \frac{nRT_1 \ln \left( \frac{V_D}{V_C} \right)}{nRT_2 \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right)} = 1 - \frac{T_1 \ln \left( \frac{V_C}{V_D} \right)}{T_2 \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right)}$$

Dividendo membro a membro i termini delle relazioni:

$$T_1 V_C^{\gamma-1} = T_2 V_B^{\gamma-1} \quad , \quad T_1 V_D^{\gamma-1} = T_2 V_A^{\gamma-1}$$

Si ottiene:

$$\left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\lambda-1} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\lambda-1}$$

$$\Rightarrow \frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A}$$

Concludiamo:

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}}$$

L'efficienza del ciclo di Carnot descritto da un gas ideale con calore specifico costante dipende solo dalle temperature a cui avvengono gli scambi di calore. Inoltre, notiamo che:

$$T_2 > T_1$$

$$\frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A}$$

Possiamo quindi dire che  $Q_{AB} + Q_{CD} > 0$ , infatti:

$$Q_{AB} + Q_{CD} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) - nRT_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) > 0$$

Il gas quindi **assorbe calore e compie un lavoro positivo**.

### 3.4. Il secondo principio della termodinamica

---

Vediamo ora due enunciati (che dimostreremo essere equivalenti) del **secondo principio della termodinamica**:

- Secondo l'**enunciato di Kelvin Planck** il secondo principio della termodinamica afferma che è impossibile realizzare una macchina termica che abbia come unico risultato la trasformazione del calore scambiato con una sorgente uniforme in lavoro (si intende quindi che  $L > 0$ ).

Questo enunciato afferma quindi che se una macchina termica assorbe calore, parte di esso verrà ceduto dalla macchina. Ciò significa che sicuramente:

$$\eta = 1 - \left| \frac{Q_{CED}}{Q_{ASS}} \right| < 1$$

- Secondo l'**enunciato di Clausius** il secondo principio della termodinamica afferma che è impossibile realizzare una macchina termica che abbia come unico risultato il trasferimento di calore da un sorgente più fredda a una più calda senza l'apporto di lavoro esterno.

Notiamo che se una macchina sfrutta:

- Un **ciclo reversibile**, in ogni momento sarà possibile ritornare allo stato di equilibrio iniziale invertendo il ciclo. In questo caso il lavoro totale compiuto dalla macchina sarà nullo.
- Un **ciclo irreversibile** non sarà possibile ritornare allo stato di equilibrio iniziale senza compiere lavoro sul sistema poiché la trasformazione modifica l'ambiente. In caso quindi di presenza di forze dissipative (che dissipano parte del lavoro sotto forma di calore), espansione libera di un gas (come nell'esperimento citato nel [PARAGRAFO 3.3.5](#)) o nel caso di scambio di calore tra due corpi a contatto, il ciclo verrà terminato compiendo lavoro sulla macchina.

Possiamo facilmente dimostrare l'equivalenza dei due enunciati:

### ***Violando l'enunciato di Kelvin Planck si viola l'enunciato di Clausius***

Immaginiamo di costruire una macchina che scambia calore con due sorgenti  $T_2$  e  $T_1$  (con  $T_2 > T_1$ ) formata da due macchine:

- Una macchina termica **1** che viola l'enunciato di Kelvin Planck: la macchina scambierà calore con la sorgente  $T_2$  e compie lavoro  $L_1$   
Possiamo quindi dire che  $Q_A = L_1$  per il primo principio della termodinamica (ricordiamo che in un ciclo  $\Delta U = 0$ )
- Una macchina frigorifera **2** che invece lavora non violando alcun principio e sfruttando il lavoro  $L_1$  per assorbire calore da  $T_1$  e cederlo a  $T_2$ . Avremo quindi:

$$L_2 = -L_1 = Q_{AF} + Q_{CF}$$

$$Q_{CF} = L_2 - Q_{AF} = -L_1 - Q_{AF}$$

Se ora consideriamo le due macchine insieme possiamo dire che il lavoro compiuto dalla macchina 1 + 2 sull'ambiente è:

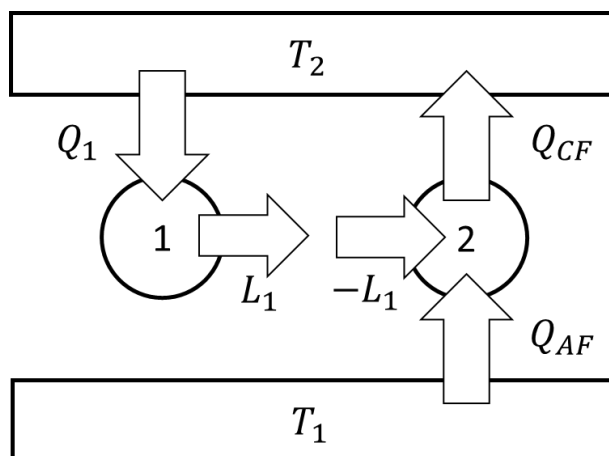
$$L_{TOT} = L_1 + L_2 = L_1 - L_1 = 0$$

Il calore scambiato con la sorgente  $T_2$  è invece:

$$Q_2 = Q_A + Q_{CF} = L_1 - L_1 - Q_{AF}$$

$$\Rightarrow Q_2 = -Q_{AF} < 0$$

La macchina quindi assorbe calore  $Q_{AF}$  da  $T_1$  e cede la stessa quantità alla sorgente  $T_2$ , senza che alcun lavoro sia compiuto su di essa, pertanto viola l'enunciato di Clausius.





### *Violando l'enunciato di Clausius si viola l'enunciato di Kelvin Planck*

Immaginiamo di costruire una macchina che scambia calore con due sorgenti  $T_2$  e  $T_1$  (con  $T_2 > T_1$ ) formata da due macchine:

- Una macchina frigorifera **1** che viola l'enunciato di Clausius assorbendo un calore  $Q_F$  da  $T_1$  e cedendo un calore  $-Q_F$  a  $T_2$  senza compiere lavoro
- Una macchina termica **2** che invece funziona non violando alcun principio e assorbendo un calore  $Q_A$  da  $T_2$ , compiendo un lavoro  $L$  e cedendo a  $T_1$  una quantità di calore  $Q_C = -Q_F$ .

Sappiamo quindi che, poiché  $\Delta U = 0$ :

$$Q_A + Q_C - L = 0$$

$$L = Q_A - Q_F$$

$$Q_A = L + Q_F$$

Se consideriamo le due macchine nel complesso osserviamo che il calore totale scambiato con la sorgente  $T_1$  è:

$$Q_1 = Q_F + Q_C = Q_F - Q_F = 0$$

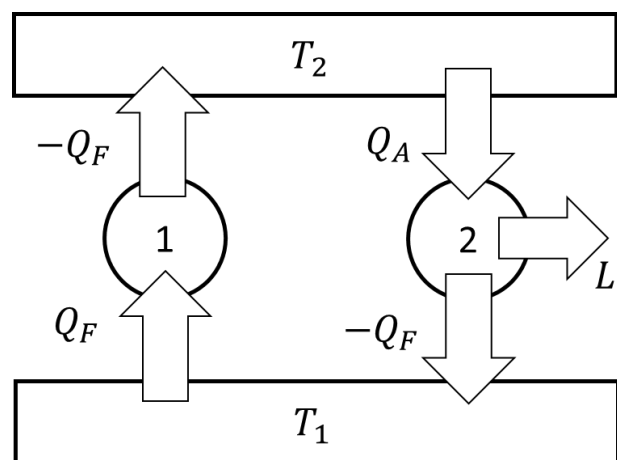
Poiché la macchina compie un ciclo termodinamico possiamo dire che  $\Delta U = 0$ , da cui:

$$L = Q_1 + Q_2 = Q_2$$

Dove:

$$Q_2 = Q_A - Q_F = L + Q_F - Q_F \\ \Rightarrow Q_2 = L$$

La macchina 1 + 2 quindi scambia calore soltanto con  $T_2$  e compie un lavoro pari a  $L$ , violando pertanto l'enunciato di Kelvin Planck.



### 3.4.1. Il teorema di Carnot

Abbiamo precedentemente visto il **ciclo di Carnot**. Una macchina che utilizza il ciclo di Carnot su gas ideali è detta **macchina di Carnot** e ha rendimento:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Il **teorema di Carnot** rappresenta una precisazione qualitative dell'enunciato di Kelvin Planck, fissando la massima quantità di calore assorbita che può essere trasformata in calore. Afferma che:

- 1) Tutte le macchine termiche reversibili che lavorano tra due sorgenti a temperatura  $T_1$  e  $T_2$  hanno lo stesso rendimento.
- 2) Nessuna macchina termica (reversibile o irreversibile) che lavora tra due sorgenti avrà rendimento maggiore della macchina di Carnot che lavora sulle medesime sorgenti

Vediamo come dimostrare i due punti del teorema.

Partiamo dal secondo: consideriamo due macchine  $X$  e  $R$  che lavorano utilizzando le stesse sorgenti  $T_1$  e  $T_2$  (con  $T_2 > T_1$ ) dimensionate in modo da produrre lo stesso lavoro  $L$ . Senza fare ipotesi sulla macchina  $X$ , supponiamo che la macchina  $R$  sia reversibile. I rendimenti delle due macchine sono dati da:

$$\eta_X = \frac{W}{Q_2} \quad \eta_R = \frac{W}{Q'_2}$$

Dal primo principio abbiamo che:

$$Q_2 + Q_1 = L = Q'_2 + Q'_1 \quad (1)$$

Supponiamo che  $\eta_X > \eta_R$ . Facciamo ora funzionare la macchina  $R$  come una macchina frigorifera. Poiché  $R$  lavora su un ciclo reversibile possiamo dire che assorbe un lavoro  $-L$ , un calore  $-Q'_1$  da  $T_1$  e cede un calore  $-Q'_2$  da  $T_2$ .

Dall'ipotesi  $\eta_X > \eta_R$  segue:

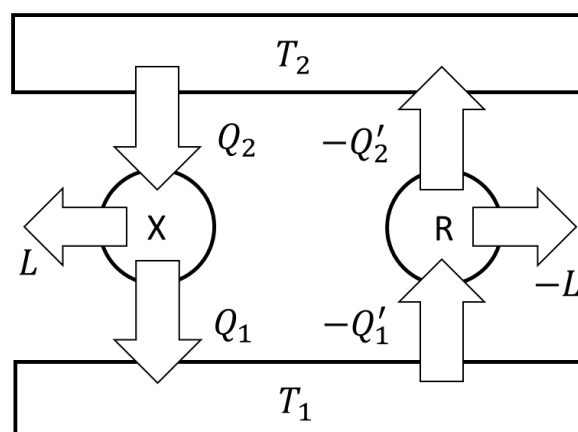
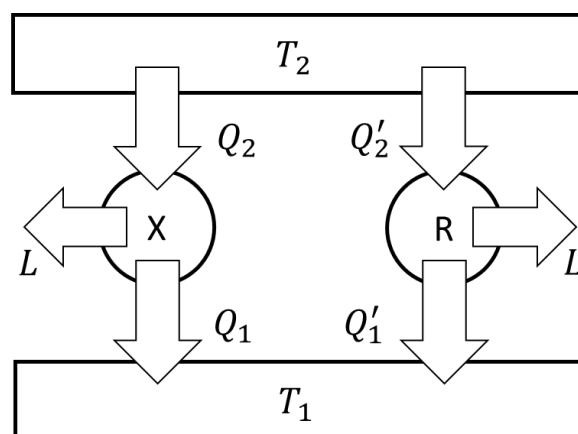
$$\frac{L}{Q_2} > \frac{L}{Q'_2} \rightarrow Q_2 < Q'_2 \rightarrow Q_2 - Q'_2 < 0$$

Dall'equazione (1) otteniamo che:

$$Q'_2 - Q_2 = Q_1 - Q'_1 < 0$$

Abbiamo quindi che:

- La macchina  $R + X$  assorbe un calore pari a  $Q_1 - Q'_1 > 0$  da  $T_1$
- La macchina  $R + X$  cede un calore pari a  $Q'_2 - Q_2 < 0$  da  $T_2$
- Non vi è scambio di lavoro con l'esterno



Se quindi  $\eta_X > \eta_R$  allora viene violato l'enunciato di Clausius poiché avviene uno scambio di calore dalla sorgente “fredda”  $T_1$  alla sorgente “calda”  $T_2$  senza scambio di lavoro con l'esterno. Poiché è sbagliata l'ipotesi iniziale deve valere che:

$$\eta_X \leq \eta_R$$

Se anche  $X$  fosse reversibile (chiamiamola  $R'$ ) e che  $\eta_R > \eta_{R'}$ , e facessimo funzionare  $R'$  come macchina frigorifera otterremo analogamente che  $\eta_{R'} \geq \eta_R$ . Quindi deve valere:

$$\eta_R \geq \eta_{R'} \quad e \quad \eta_{R'} \geq \eta_R$$

Da cui:

$$\eta_{R'} = \eta_R$$

Se quindi due macchine reversibile lavorano sulle stesse due sorgenti, il loro rendimento è lo stesso. Supponendo che una di queste sia una **macchina di Carnot**, essa avrà rendimento:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Da cui il rendimento massimo di una macchina che lavora sulle sorgenti  $T_1$  e  $T_2$ . Notiamo che nella dimostrazione non compaiono proprietà del ciclo, pertanto questo teorema vale indipendentemente dalla macchina.

### ***Definizione della scala Kelvin***

Possiamo quindi dare una definizione formale della scala Kelvin. Una **temperatura assoluta** (o **di Kelvin**) è la temperatura tale per cui il rapporto del calore assorbito da una macchina di Carnot da una sorgente  $T_2$  e il calore ceduto dalla macchina a una sorgente  $T_1$  è uguale al rapporto dei calori scambiati dalla macchina con le due sorgenti:

$$\frac{T_1(K)}{T_2(K)} = \frac{Q_1}{Q_2}$$

### ***L'efficienza massima della macchina di Carnot***

Ricordando che l'efficienza di una macchina di Carnot che opera tra due sorgenti  $T_2$  e  $T_1$  è data da:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Se si vuole costruire una macchina termica con efficienza  $\eta \rightarrow 1$ , vi sono due modi:

- 1) Si può costruire una macchina di Carnot che lavora con una sorgente  $T_1 \ll T_2$ . Più bassa sarà la temperatura di  $T_1$  più l'efficienza sarà alta. Se quindi supponiamo di avere una sorgente  $T_1$  a temperatura molto bassa (anche rispetto all'ambiente),

è necessario “smaltire” il calore fornito dalla macchina. Immaginiamo quindi di collegare una macchina frigorifera che assorbe un calore  $-Q_C$  da  $T_1$  e lo cede all’ambiente. Possiamo scrivere:

$$L_{TOT} = L + L_F$$

Ricordando che  $\Delta U = 0$ , possiamo scrivere:

$$L = Q_A + Q_C$$

$$L_F = -Q_C + Q_{amb}$$

Da cui:

$$L_{TOT} = Q_A + Q_C - Q_C + Q_{amb} = Q_A + Q_{amb}$$

È quindi come avere una macchina di Carnot che lavora tra  $T_2$  e l’ambiente. L’efficienza sarà quindi:

$$\eta = 1 - \frac{T_{amb}}{T_2}$$

La sorgente  $T_1$  può quindi essere a temperatura ambiente.

- 2) Si può quindi fare in modo che  $T_2 \gg T_{amb}$ , ricordando però che sarà necessario alimentare la sorgente  $T_2$  fornendo calore.

### 3.4.2. Il teorema di Clausius

Poiché abbiamo visto che tutte le macchine reversibili che lavorano tra due sorgenti  $T_1$  e  $T_2$  avranno efficienza pari alla macchina di Carnot (teorema di Carnot), possiamo scrivere:

$$\eta_R = \eta_C$$

Dove  $R$  sarà la macchina reversibile e  $C$  la macchina di Carnot. Con:

$$\eta_R = 1 + \frac{Q_1}{Q_2}$$

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Segue che:

$$1 + \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Il **teorema di Clausius** generalizza questo concetto tra macchine che lavorano con  $n$  sorgenti: afferma che se una macchina che lavora fra più sorgenti su un ciclo, detti  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  i calori scambiati con le sorgenti a temperatura  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , allora vale che:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

In particolare:

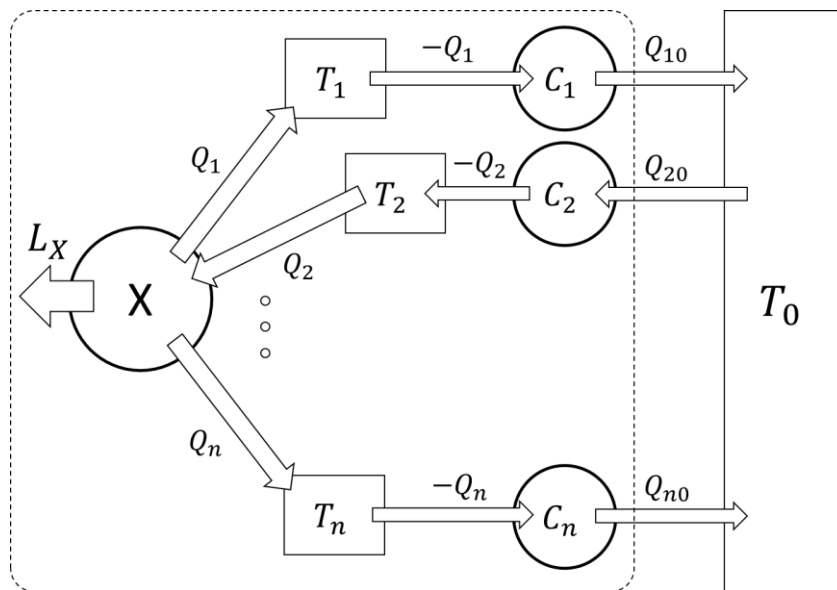
- Se la macchina è reversibile allora:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

- Se la macchina non è reversibile allora:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} < 0$$

Possiamo quindi dimostrare il teorema. Per farlo consideriamo una macchina  $X$  (reversibile o irreversibile) che scambia calori  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  con  $n$  sorgenti a temperatura  $T_1, T_2, \dots, T_n$ .



Consideriamo ora un'ulteriore sorgente a temperatura  $T_0$  e colleghiamo a ognuna delle  $n$  sorgenti una macchina di Carnot che scambia calore con  $T_0$  (come in figura). L' $i$ -esima macchina di Carnot scambierà calore  $Q_{ic} = -Q_i$  con  $T_i$  e calore  $Q_{io}$  con  $T_0$ . Varrà per ogni macchina di Carnot che:

$$\begin{aligned} \frac{Q_{ic}}{T_i} + \frac{Q_{io}}{T_0} &= 0 \\ -\frac{Q_i}{T_i} + \frac{Q_{io}}{T_0} &= 0 \\ \Rightarrow Q_{io} &= \frac{Q_i}{T_i} T_0 \end{aligned}$$

Osservando la macchina dall'esterno, essa può essere considerata come una macchina monoterma (ossia una macchina che scambia calore con una sola sorgente, nel nostro caso  $T_0$ ). Il calore totale scambiato sarà:

$$Q_{TOT} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} T_0 = T_0 \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i}$$

Per il teorema di Kelvin-Planck sappiamo però che una qualsiasi macchina che scambia calore con una sola sorgente non può scambiare lavoro positivo con l'ambiente. Sapendo che  $\Delta U = 0$ , per il primo principio della termodinamica sappiamo che:

$$L_{TOT} = Q_{TOT} = T_0 \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i}$$

Da cui l'enunciato del teorema (sapendo che sicuramente  $T_0 > 0$ ):

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \quad (1)$$

Se la macchina  $X$  è reversibile, invertendo tutti i cicli si avrà che  $\sum(-Q_{i0}) \leq 0$ . Poiché deve valere anche la condizione (1) otteniamo che:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

In generale le macchine lavorano con infinite sorgenti a temperature infinitesimamente diverse (il mondo reale è continuo e non discreto). Con ognuna di esse la macchina scambierà un calore  $\delta Q$ . Possiamo quindi riscrivere il teorema di Clausius come:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

## 3.5. L'entropia

---

Vediamo ora uno dei concetti più importanti della termodinamica, ossia l'**entropia**. Consideriamo due stati termodinamici  $A$  e  $B$  e un ciclo reversibile che li unisce. Per il teorema di Clausius possiamo scrivere:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Separando le due trasformazioni del ciclo possiamo scrivere:

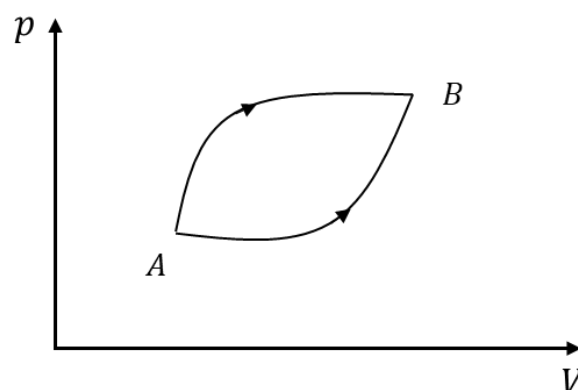
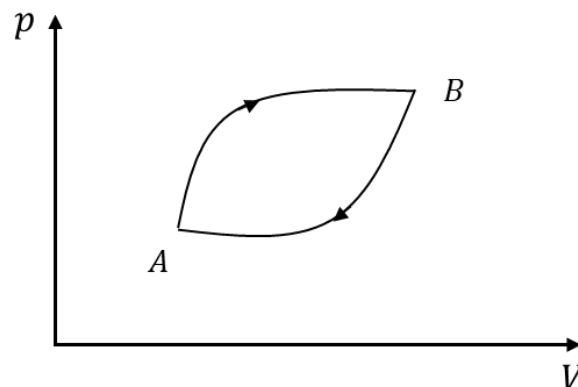
$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T_1} + \int_B^A \frac{\delta Q}{T_2} = 0$$

Poiché il ciclo è reversibile, possiamo invertire la trasformazione 2. Invertire una trasformazione vuol dire quindi invertire i flussi di calore e di lavoro. Otteniamo quindi che:

$$\int_B^A \frac{\delta Q}{T_2} = - \int_A^B \frac{\delta Q}{T_2}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{\delta Q}{T_1} - \int_A^B \frac{\delta Q}{T_2} &= 0 \\ \int_A^B \frac{\delta Q}{T_1} &= \int_A^B \frac{\delta Q}{T_2} \end{aligned}$$



Possiamo quindi dire che l'integrale  $\oint \frac{\delta Q}{T}$  dipende unicamente dagli stati  $A$  e  $B$  e non dalla trasformazione da  $A$  a  $B$ . Possiamo quindi introdurre il concetto di **entropia  $S$** , definita come:

$$\Delta S_{AB} = S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}$$

$$[S] = \frac{J}{K}$$

L'entropia può essere quindi definita come una **funzione di stato** delle coordinate termodinamiche del sistema. Per calcolare la differenza di entropia tra due stati termodinamici sarà necessario utilizzare trasformazioni reversibili tra i due stati. Possiamo dunque scrivere:

$$\delta Q = TdS$$

Da cui il calore scambiato durante una trasformazione reversibile:

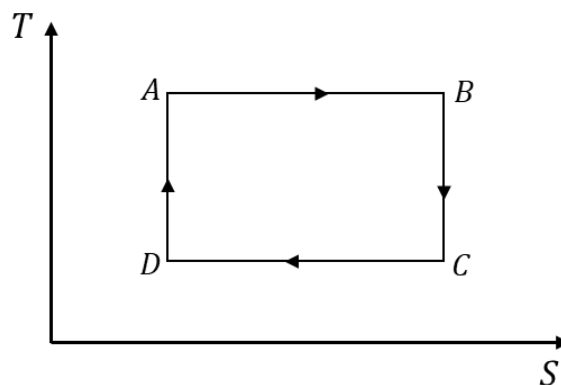
$$Q = \int_{S_A}^{S_B} TdS$$

È possibile quindi rappresentare una trasformazione termodinamica su un grafico entropia-temperatura. Il calore scambiato da una trasformazione è rappresentato nel

grafico come area sottesa dalla curva della trasformazione. Notiamo inoltre che durante un ciclo avremo che:

$$\Delta S_{AA} = S_A - S_A = 0$$

Il calore scambiato sarà quindi rappresentato dall'area racchiusa dalla curva della trasformazione. Il grafico entropia-temperatura può essere ad esempio utile per studiare il ciclo di Carnot (figura affianco).



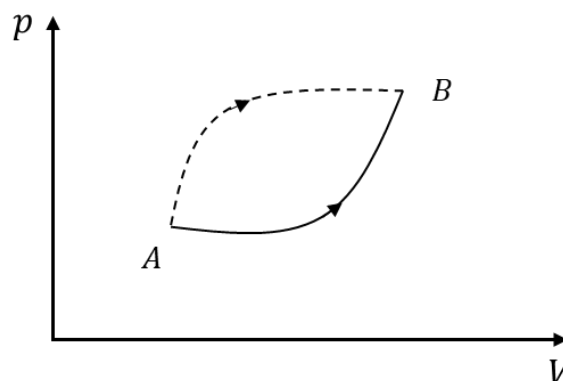
### 3.5.1. L'entropia nei gas ideali

Consideriamo un gas ideale, e due stati di equilibrio A e B uniti da una trasformazione qualsiasi. Calcoliamo la variazione di entropia. Per farlo sarà necessario trovare una trasformazione reversibile che faccia passare il sistema dallo stato A allo stato B. Avremo quindi che:

$$\Delta S_{AB} = S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}_{rev}$$

Per una qualsiasi trasformazione reversibile sappiamo che:

$$\begin{aligned} \delta Q - \delta L &= dU \\ \delta Q &= dU + \delta L \end{aligned}$$



Per i gas ideali sappiamo che vale che:

$$\begin{aligned} dU &= nc_V dT \\ \delta L &= p dV \end{aligned}$$

Da cui  $\delta Q = nc_V dT + p dV$ . Dalla definizione di entropia segue che:

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{nc_V dT}{T} + \frac{p dV}{T}$$

Dall'equazione della statica dei gas  $pV = nRT$  si ottiene che, sostituendo  $p$ :

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{T} &= \frac{nc_V dT}{T} + \frac{nRT dV}{VT} \\ \frac{\delta Q}{T} &= \frac{nc_V dT}{T} + \frac{nR dV}{V} \end{aligned}$$

Integrando entrambi i membri dell'equazione:



$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_A}^{T_B} n c_V \frac{dT}{T} + \int_{V_A}^{V_B} n R \frac{dV}{V}$$

Si conclude che:

$$\Delta S_{AB} = n c_V \ln \left( \frac{T_B}{T_A} \right) + n R \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right)$$

Analogamente è possibile trovare l'entropia in funzione di temperatura e pressione. Infatti:

$$\delta Q = \delta L + dU = p dV + n c_V dT$$

Derivando i membri dell'equazione della statica dei gas otteniamo che:

$$\begin{aligned} d(pV) &= d(nRT) \\ V dp + p dV &= n R dT \end{aligned}$$

Da cui:

$$\delta Q = n R dT - V dp + n c_V dT$$

Dalla relazione di Meyer ( $R = c_P - c_V$ ) segue che:

$$\delta Q = n(c_P - c_V)dT - V dp + n c_V dT$$

Procediamo come prima integrando i due membri:

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \left[ \frac{n(c_P - c_V + c_V)dT}{T} - \frac{V dp}{T} \right] = \int_{T_A}^{T_B} n c_P \frac{dT}{T} - \int_{p_A}^{p_B} \frac{n R T}{p T} dp$$

Si può quindi concludere:

$$\Delta S_{AB} = n c_P \ln \left( \frac{T_B}{T_A} \right) - n R \ln \left( \frac{p_B}{p_A} \right)$$

Le due formule sopra scritte **hanno validità generale** poiché si dimostrano senza fare alcuna ipotesi sulle trasformazioni reversibili utilizzate. Notiamo inoltre che durante una **trasformazione adiabatica reversibile** il calore scambiato con l'ambiente in ogni istante è nullo. Otteniamo quindi che:

$$\Delta S_{ad, rev} = \oint_A^B \frac{0}{T} = 0$$

Nel caso di trasformazione adiabatica non reversibile è invece possibile utilizzare le formule appena scritte.

### 3.5.2. Il significato fisico dell'entropia

Abbiamo definito l'entropia come una **funzione di stato** che dipende esclusivamente dalle coordinate termodinamiche. Per comprenderne il significato fisico consideriamo un ciclo formato da:

- 1) Una **trasformazione irreversibile** dallo stato  $A$  allo stato  $B$
- 2) Una **trasformazione reversibile** dallo stato  $B$  allo stato  $A$

Per il teorema di Clausius possiamo affermare che lungo il ciclo vale che:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0$$

Se quindi separiamo le due trasformazioni otteniamo:

$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T}_{irrev} + \int_B^A \frac{\delta Q}{T}_{rev} < 0$$

Essendo la seconda trasformazione reversibile possiamo scrivere

$$\int_B^A \frac{\delta Q}{T}_{rev} = - \int_A^B \frac{\delta Q}{T}_{rev}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{\delta Q}{T}_{irrev} - \int_A^B \frac{\delta Q}{T}_{rev} &< 0 \\ \int_A^B \frac{\delta Q}{T}_{irrev} &< \int_A^B \frac{\delta Q}{T}_{rev} \end{aligned}$$

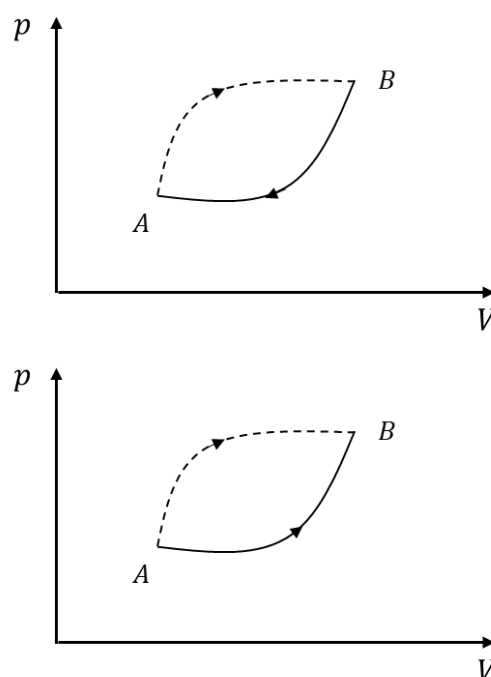
Poiché abbiamo definito la differenza di entropia tra due stati termodinamici come:

$$\Delta S_{AB} = S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}_{rev}$$

Possiamo concludere che:

$$\Delta S_{AB} > \int_A^B \frac{\delta Q}{T}_{irrev}$$

Possiamo generalizzare dicendo che in una qualsiasi trasformazione termodinamica  $x$ , reversibile o irreversibile, vale che:



$$\Delta S_{AB} \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T_x}$$

Dove il  $>$  vale per le trasformazioni irreversibili mentre l'= $=$  per quelle reversibili.

### 3.5.3. Il principio di accrescimento dell'entropia per i sistemi isolati

Se consideriamo un **sistema isolato**, sappiamo che in ogni momento vale che:

$$\delta Q = 0$$

Infatti, essendo isolato il sistema, il sistema non scambia energia con l'ambiente. Se consideriamo quindi una generica trasformazione  $x$  nel sistema isolato dallo stato  $A$  allo stato  $B$  possiamo scrivere:

$$\Delta S_{AB} \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T_x} = \int_A^B \frac{0}{T_x} = 0$$

Da cui:

$$\Delta S_{AB} \geq 0$$

La disequazione appena scritta è la **formulazione matematica del secondo principio della termodinamica**. In particolare, vale che:

- $\Delta S_{AB} > 0$  nelle trasformazioni irreversibili in un sistema isolato
- $\Delta S_{AB} = 0$  nelle trasformazioni reversibili in un sistema isolato

All'inizio della sezione avevamo detto che consideriamo l'**universo termodinamico** come insieme del **sistema** e dell'**ambiente** (ricordando che si considera ambiente tutto ciò che non appartiene al sistema). Il nostro universo, per come lo conosciamo, è un sistema isolato. Possiamo quindi affermare che l'**entropia dell'universo non può diminuire**, ma solo restare costante o aumentare (nella realtà le trasformazioni reversibili non esistono, pertanto l'entropia dell'universo può solo aumentare).

È facile dimostrare che l'entropia di un sistema composto da più parti è uguale alla somma delle entropie delle singole parti. Se quindi consideriamo un sistema all'interno dell'universo e l'ambiente, possiamo scrivere che:

$$\Delta S_{uni} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{amb}$$

Dove  $\Delta S_{uni}$  è l'entropia dell'universo,  $\Delta S_{sist}$  quella del sistema e  $\Delta S_{amb}$  quella dell'ambiente. Poiché abbiamo detto che  $\Delta U_{uni} \geq 0$  concludiamo che:

- Se nell'universo avviene una **trasformazione reversibile**:

$$\Delta S_{uni} = 0$$

$$\Delta S_{sist} = -\Delta S_{amb}$$

Quindi se:

- $\Delta S_{sist} > 0$  allora  $\Delta S_{sist} < 0$
- $\Delta S_{sist} < 0$  allora  $\Delta S_{sist} > 0$

- Se nell'universo avviene una **trasformazione irreversibile**:

$$\Delta S_{uni} > 0$$

$$\Delta S_{sist} > -\Delta S_{amb}$$

- In un **ciclo** invece sappiamo che in vale sempre:

$$\Delta S_{sist} = 0$$

Ricordando che  $\Delta S_{uni} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{amb}$ , se il ciclo è:

- **Reversibile** allora  $\Delta S_{uni} = 0$ , da cui  $\Delta S_{amb} = 0$
- **Irreversibile** allora  $\Delta S_{uni} > 0$ , da cui  $\Delta S_{amb} > 0$

Notiamo che quindi durante un ciclo irreversibile (tutti i cicli reali), l'entropia dell'ambiente aumenta sempre.

### 3.5.4. Esempi di calcolo dell'entropia

Vediamo ora alcuni esempi di calcolo dell'entropia in alcune trasformazioni e cicli termodinamici:

#### ***Scambio di calore tra sorgenti ideali a temperatura $T_2 > T_1$***

Consideriamo un universo termodinamico formato da due sorgenti a temperature  $T_2 > T_1$ . Essendo che le due sorgenti hanno temperatura costante, possiamo dire che vi sarà un costante scambio di calore. Per il principio di Clausius il calore verrà ceduto da  $T_1$  a  $T_2$  (perché avvenga il contrario sarebbe necessario compiere lavoro, possiamo infatti affermare che la **trasformazione è irreversibile**). Per calcolare l'entropia dell'universo termodinamico scriviamo:

$$\Delta U_{uni} = \Delta S_1 + \Delta S_2 > 0$$

Studiamo separatamente le due sorgenti tra due stati  $A$  e  $B$ . La trasformazione è irreversibile, pertanto dovremo trovare una trasformazione reversibile tra gli stati  $A$  e  $B$ . Poiché le due sorgenti restano a temperatura costante possiamo considerare una **trasformazione isoterma**.

Chiamiamo  $Q_1 = Q$  il calore uscente da  $T_2$ , da cui il calore entrante in  $T_1$   $Q_2 = -Q$ . Infatti, essendo l'universo un sistema isolato  $\Delta U = 0$  (non vi è scambio di energia sotto qualsiasi forma con l'esterno), per il primo principio della termodinamica abbiamo che:

$$Q_{TOT} + L_{TOT} = \Delta U_{TOT}$$

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

$$Q_2 = -Q_1 = -Q$$

Possiamo quindi scrivere:

$$\Delta S_1 = \int \frac{\delta Q_1}{T_1}_{rev} = \frac{1}{T_1} \int \delta Q_1 = \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q}{T_1}$$

$$\Delta S_2 = \int \frac{\delta Q_2}{T_2}_{rev} = \frac{1}{T_2} \int \delta Q_2 = \frac{Q_2}{T_2} = -\frac{Q}{T_2}$$

Da cui:

$$\Delta S_{uni} = \frac{Q}{T_1} - \frac{Q}{T_2} = Q \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

Poiché  $Q > 0$  (è un calore assorbito) e  $T_2 > T_1$ , possiamo dire che sicuramente:

$$\left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) > 0$$

$$Q \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) > 0$$

$$\Delta S_{uni} > 0$$

Se provassimo a invertire la trasformazione, ossia provassimo a invertire i flussi di energia, otterremo che  $Q < 0$  (calore uscente). Quindi:

$$Q \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) < 0$$

$$\Delta S_{uni} < 0$$

Il che violerebbe il principio di accrescimento dell'entropia di un sistema isolato. Possiamo quindi affermare che violare il principio di Clausius equivale a violare il principio di accrescimento dell'entropia di un sistema isolato.

### ***Macchine termiche***

Uno scambio di calore tra due sorgenti avviene anche quando tra le due lavora una macchina. Consideriamo una macchina termica che opera tra due sorgenti  $T_2 > T_1$  e chiamiamo  $Q_1$  e  $Q_2$  il calore scambiato dalla macchina con l'ambiente.

Possiamo innanzi tutto dire che la variazione di entropia nella macchina è nulla in un ciclo. Per quanto riguarda l'ambiente (costituito dalle due sorgenti) possiamo scrivere:

$$\Delta S_{uni} = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

Chiamando  $-Q_1$  e  $-Q_2$  i calori scambiati dall'ambiente con la macchina possiamo scrivere:

$$\Delta S_1 = -\frac{Q_1}{T_1}$$

$$\Delta S_2 = -\frac{Q_2}{T_2}$$

Da cui la variazione di entropia nell'ambiente (e quindi nell'universo):

$$\Delta S_{uni} = \Delta S_{amb} = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = -\left(\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}\right)$$

Possiamo aggiungere che per il teorema di Clausius:

- Se la macchina è **reversibile** allora  $\Delta S_{uni} = 0$
- Se la macchina è **irreversibile** allora  $\Delta S_{uni} > 0$

Il ragionamento resta valido se la macchina è frigorifera.

### ***Scambio di calore tra corpi a temperatura $T_2 > T_1$***

Abbiamo precedentemente visto che due corpi a temperatura  $T_2 > T_1$  in un sistema isolato si scambiano calore finché non raggiungono entrambi una temperatura di equilibrio tale che:

$$T_2 > T_{eq} > T_1$$

$$T_{eq} = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

Come prima scriviamo:

$$\Delta S_{uni} = \Delta S_1 + \Delta S_2 > 0$$

Sappiamo infatti che per il principio di Clausius la trasformazione dell'universo (formato dai due corpi) è irreversibile. Come nel caso precedente studiamo separatamente i due corpi. Dovremo trovare una trasformazione reversibile in modo da poter calcolare la differenza tra l'entropia iniziale e quella di equilibrio di ciascuno dei corpi.

Per fare ciò possiamo immaginare di mettere in contatto i corpi con infinite sorgenti di calore tale che:

$$T_{s_1} = T_1 + dt$$

$$T_{s_i} = T_{i-1} + dt$$

$$T_{s_\infty} = T_{eq}$$

Possiamo quindi calcolare le differenze di entropia ricordando che  $\delta Q = mcdT$ :

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_{eq}} \frac{\delta Q_1}{T}_{rev} = \int_{T_1}^{T_{eq}} \frac{mcdT}{T}_{rev} = m_1 c_1 \ln\left(\frac{T_{eq}}{T_1}\right)$$

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_{eq}} \frac{\delta Q_1}{T}_{rev} = \int_{T_2}^{T_{eq}} \frac{mcdT}{T}_{rev} = m_2 c_2 \ln\left(\frac{T_{eq}}{T_2}\right)$$

Da cui, per il principio di aumento dell'entropia in un sistema isolato:

$$\Delta S_{uni} = m_1 c_1 \ln\left(\frac{T_{eq}}{T_1}\right) + m_2 c_2 \ln\left(\frac{T_{eq}}{T_2}\right) > 0$$

### **Scambio di calore tra una sorgente $T_2$ e un corpo $T_1$ con $T_2 > T_1$**

Se invece al posto del corpo 2 si ha una sorgente ideale la temperatura della sorgente  $T_2$  rimane costante. Il sistema raggiunge l'equilibrio quando il corpo 1 raggiunge la temperatura  $T_2$ .

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q_1}{T}_{rev} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mcdT}{T}_{rev} = m_1 c_1 \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Ricordando che il calore ceduto dalla sorgente è esattamente uguale al calore assorbito dal corpo (il sistema è isolato), e che un corpo che aumenta la sua temperatura di  $\Delta T$  assorbe una quantità di calore pari a  $Q = mc\Delta T$  possiamo considerare una trasformazione reversibile isoterma e reversibile e scrivere che:

$$\Delta S_2 = \int_i^{eq} \frac{\delta Q_2}{T_2} = \frac{Q_2}{T_2} = -\frac{Q_1}{T_2} = -\frac{m_1 c_1 (T_2 - T_1)}{T_2}$$

Da cui:

$$\Delta S_{uni} = m_1 c_1 \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{m_1 c_1 (T_2 - T_1)}{T_2} > 0$$

### **Transizione di fase**

Sappiamo che un corpo in transizione di fase resta a temperatura costante  $T_{trn}$  in tutta la durata della transizione. Ci troviamo sempre in una trasformazione irreversibile (scambio di calore tra sorgenti a temperature diverse) quindi:

$$\Delta S_{uni} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{amb} > 0$$

Per calcolare la differenza di entropia per il corpo, possiamo considerare una trasformazione reversibile isoterma a temperatura  $T_{trn}$  e scrivere:

$$\Delta S_{sist} = \int \frac{\delta Q}{T_{trn_{rev}}} = \frac{1}{T_{trn}} \int \delta Q_{rev}$$

Per trovare la quantità di calore scambiata è sufficiente ricordare che il calore totale scambiato durante una transizione di fase è  $Q = \lambda m$ , da cui:

$$\Delta S_{sist} = \frac{\lambda m}{T_{trn}}$$

L'entropia dell'ambiente varierà in accordo al principio di aumento dell'entropia dei sistemi isolati e al tipo di trasformazione irreversibile.

### ***Trasformazioni adiabatiche***

In ogni trasformazione adiabatica vale che in ogni istante il calore scambiato con l'esterno è  $\delta Q = 0$ . Distinguiamo tra trasformazioni reversibili e irreversibili:

- In una **trasformazione adiabatica reversibile** vale che  $\Delta S_{uni} = 0$ , quindi:

$$\Delta S_{uni} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{amb} = 0$$

Poiché non viene scambiato calore tra sistema e ambiente possiamo scrivere:

$$\Delta S_{sist} = \int \frac{\delta Q_{sist}}{T_{sist}} = \int \frac{0}{T_{sist}} = 0$$

$$\Delta S_{amb} = \int \frac{\delta Q_{amb}}{T_{amb}} = \int \frac{0}{T_{amb}} = 0$$

- In caso di **trasformazione adiabatica irreversibile** tra due stati  $A$  e  $B$  sarà invece necessario trovare una trasformazione reversibile tra i due stati. Vediamo ad esempio nel caso di espansione libera del gas (trasformazione di cui abbiamo parlato nel [PARAGRAFO 3.3.5](#)). Avevamo visto che:

$$\Delta S_{gas} = n c_V \ln \left( \frac{T_B}{T_A} \right) + n R \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right)$$

Poiché durante l'espansione libera del gas  $T_A = T_B$  possiamo scrivere:

$$\Delta S_{gas} = n R \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right)$$

Poiché non vi è una variazione di temperatura potremmo collegare i due stati con una trasformazione reversibile isoterma (non adiabatica). In tal caso sappiamo che il lavoro compiuto dal sistema è:

$$L_{rev} = n R T \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right) = T \Delta S_{gas}$$

Avendo precedentemente calcolato che il lavoro compiuto da un gas in espansione libera è nullo, possiamo calcolare la differenza di lavoro che si otterrebbe tra gli stessi stati operando in modo reversibile o irreversibili:

$$\Delta L = L_{rev} - L_{irrev} = T \Delta S_{gas}$$

Possiamo quindi considerare l'entropia come **un indice della quantità di energia non convertibile in lavoro**.

### ***La macchina di Carnot***

Abbiamo detto che l'efficienza di una macchina di Carnot che lavora tra due sorgenti  $T_1$  e  $T_2$ :



$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Consideriamo un'altra macchina irreversibile che assorbe la stessa quantità della macchina di Carnot considerata. Possiamo scrivere:

$$L_{IRR} = Q_{ASS} + Q_{CED}$$

Per il teorema di Carnot sappiamo che:

$$\begin{aligned}\eta_{IRR} &< \eta_C \\ L_{IRR} &< L_C\end{aligned}$$

Vediamo la differenza tra il lavoro compiuto a parità di calore assorbito  $Q_{ASS}$ :

$$\begin{aligned}\frac{L_C}{Q_{ASS}} = \eta_C &\rightarrow L_C = \eta_C Q_{ASS} = Q_{ASS} \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) \\ L_{IRR} &= Q_{ASS} + Q_{CED}\end{aligned}$$

Se quindi calcoliamo la differenza tra i due lavori otteniamo:

$$\begin{aligned}L_C - L_{IRR} &= Q_{ASS} \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) - (Q_{ASS} + Q_{CED}) = Q_{ASS} - Q_{ASS} \frac{T_1}{T_2} - Q_{ASS} + Q_{CED} = \\ T_1 \left[ - \left( \frac{Q_{ASS}}{T_2} + \frac{Q_{CED}}{T_1} \right) \right] &= T_1 \Delta S_{uni}\end{aligned}$$

Come abbiamo visto prima, l'entropia rappresenta un indice della quantità di energia che si può convertire in lavoro.