

---

# ANALISI II

---

RAVI SRINIVASAN

A.A. 2019-20

*Basati sulle lezioni del prof. Roberto Lucchetti e  
sul testo “Bramanti Pagani Salsa – Analisi II”*

*Università Politecnico di Milano*

A.A. 2019-2020

# Sommario

1. Funzioni a più variabili.....	1
1.1. Grafici e curve di livello .....	1
1.2. Le proprietà topologiche.....	2
1.3. I limiti delle funzioni a più variabili .....	4
1.3.1. Funzioni continue .....	4
1.3.2. Calcolo dei limiti .....	5
1.4. Derivabilità e differenziabilità .....	9
1.4.1. Le derivate parziali e derivabilità.....	9
1.4.2. Piano tangente e differenziabilità.....	11
1.4.3. Derivate direzionali .....	17
1.5. Derivate di ordine superiore .....	19
1.5.1. Matrice Hessiana e formula di Taylor .....	21
1.6. Ottimizzazione: estremi liberi .....	23
1.6.1. Condizioni necessarie di primo ordine .....	25
1.6.2. Forme quadratiche .....	26
1.6.3. Caratterizzazione dei punti critici .....	28
1.7. Ottimizzazione: estremi vincolati.....	30
1.7.1. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange.....	30
1.7.2. Metodo delle restrizioni .....	32
2. Equazioni differenziali .....	34
2.1. Equazioni del primo ordine.....	35
2.1.1. Condizioni di esistenza e unicità.....	36
2.1.2. Equazioni a variabili separabili .....	38
2.1.3. Equazioni lineari del primo ordine .....	41
2.1.4. Equazioni di Bernoulli.....	45
2.1.5. Prolungabilità delle soluzioni di un problema di Cauchy .....	46
2.2. Equazioni lineari del secondo ordine.....	46

## Sommario

2.2.1.	Equazioni lineari di secondo ordine .....	47
2.2.2.	La struttura dell'integrale generale .....	47
2.2.3.	Equazioni a coefficienti costanti .....	49
2.2.4.	Equazioni di Eulero .....	56
2.3.	Sistemi differenziali lineari .....	58
2.3.1.	Equazioni di ordine $n$ .....	59
2.3.2.	Sistemi lineari omogenei .....	60
2.3.3.	Sistemi omogenei a coefficienti costanti .....	61
2.3.4.	Sistemi non omogenei .....	63
3.	Funzioni vettoriali .....	65
3.1.	Archi di curva continui .....	65
3.1.1.	Derivata e integrale di una funzione vettoriale .....	66
3.1.2.	Archi di curva regolari .....	67
3.1.3.	Curve piane, grafico di funzioni .....	67
3.1.4.	Lunghezza di un arco di curva .....	68
4.	Calcolo integrale in più variabili .....	70
4.1.	Integrali doppi .....	70
4.1.1.	Calcolo su domini rettangolari .....	71
4.1.2.	Domini non rettangolari .....	73
4.1.3.	Calcolo su domini non rettangolari .....	75
4.1.4.	Cambio di variabili .....	77
4.2.	Integrali tripli .....	79
4.2.1.	Integrazione per fili .....	80
4.2.2.	Integrazione per strati .....	81
4.2.3.	Cambio di variabili .....	81
5.	Campi vettoriali .....	84
5.1.	Gradiente, rotore e divergenza .....	85
5.1.1.	L'operatore rotore .....	85
5.1.2.	L'operatore divergenza .....	85
5.1.3.	Identità differenziali .....	86
5.2.	Lavoro di un campo vettoriale .....	86

## Sommario

5.2.1. Campi conservativi e potenziali .....	87
5.3. Insiemi semplicemente connessi.....	89
6. Serie di potenze e di Fourier.....	91
6.1. Ripasso delle serie matematiche .....	91
6.1.1. Serie a termini non negativi.....	92
6.1.2. Serie a termini a segno variabile .....	92
6.2. Serie di funzioni .....	93
6.3. Serie di potenze .....	94
6.3.1. Proprietà delle serie di potenze.....	96
6.3.2. Serie di Taylor e serie di potenze .....	97
6.4. Serie di Fourier .....	98
6.4.1. Polinomi e serie trigonometriche .....	99
6.4.2. Convergenza delle serie trigonometriche .....	99
6.4.3. Coefficienti della serie di Fourier.....	100
6.4.4. Convergenza in media quadratica .....	102
6.4.5. Convergenza della serie di Fourier .....	102

# 1. Funzioni a più variabili

Una **funzione a più variabili** è una funzione del tipo:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Ossia una funzione che associa un valore  $f(x_1, \dots, x_n)$  a  $n$  variabili. In queste funzioni come in quelle a una variabile, le variabili possono essere soggette a vincoli.

## Esempio 1.1.

Se ad esempio consideriamo la funzione:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{xy}$$

Essa sarà definita per:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &\leq 0 \rightarrow x^2 + y^2 \leq 1 \\ xy &\neq 0 \end{aligned}$$

Rappresentando il **dominio** nel grafico, otterremo un insieme di punti in un cerchio unitario, con l'esclusione delle rette:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

## 1.1. Grafici e curve di livello

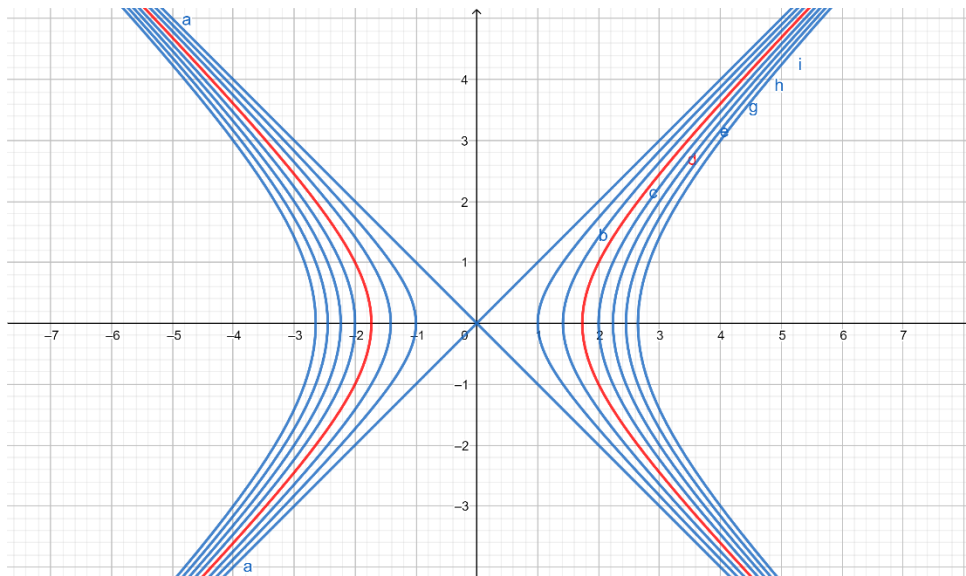
---

Ricordiamo che il grafico di una funzione reale di variabili reali  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è l'insieme dei punti dello spazio  $\mathbb{R}^n$  di coordinate  $(X, f(X))$ .

Noi lavoreremo spesso con funzioni  $z = f(x, y)$  a due variabili. Essendo però difficile rappresentare spazi tridimensionali su un foglio, spesso, si ricorre alle curve di livello. Un grafico a curve di livello è un disegno nel piano sul quale si tracciano le curve in cui  $f(x, y)$  assume valore costante  $k$ . Ad esempio, presa la funzione:

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

E fissiamo i valori della funzione a  $f(x, y) = 1, 2, 3, \dots$  otterremo il seguente grafico:



La curva evidenziata in rosso rappresenta l'insieme di punti di  $A$  in cui la funzione assume valore:

$$f(x, y) = 3$$

L'interpretazione geometria di tale rappresentazione per  $f(x, y) = k$  è l'intersezione tra il piano  $z = k$  e la funzione. Questo tipo di rappresentazione viene usato ad esempio nelle carte topografiche dove  $k$  può rappresentare l'altezza di un determinato punto dal livello del mare.

## 1.2. Le proprietà topologiche

Possiamo quindi studiare **topologicamente** (da topos, luogo) gli insiemi di punti dove una funzione è definita.

Nell'insieme  $\mathbb{R}$ , si chiama intorno  $U$  di raggio  $r$  di un punto  $x_0$  un insieme di punti che soddisfano la seguente proprietà:

$$U = \{x: d(x, x_0) < r \text{ con } r > 0\}$$

In generale, quindi in  $\mathbb{R}^n$ , si parla di **palla**, in inglese **ball**. Iniziamo definendo la distanza euclidea di due punti in  $\mathbb{R}^n$ :

$$d(X, X_0) = \sqrt{(x_1 - x_{0_1})^2 + \dots + (x_n - x_{0_n})^2}$$

**Definizione 1.1.** Si definisce **palla**  $(B(X_0, r))$  di un punto  $X_0$  un insieme di punti che soddisfano la seguente proprietà:

$$B = \{X: d(X, X_0) < r \text{ con } r > 0\}$$

Considerando un generico insieme di punti  $A$ , possiamo quindi dire che un punto  $X_0$  è:

- **Interno ad  $A$**  se esiste un  $r$  per cui  $B(X_0, r) \subseteq A$
- **Esterno ad  $A$**  se è interno al complementare di  $A$
- **Di frontiera** se non è né interno né esterno ad  $A$

Per fare un paragone con  $\mathbb{R}$ , se consideriamo i seguenti insiemi:

$$A = [0, 1]$$

$$B = (0, 1)$$

Per entrambi vale che i punti:

$$0 < x_0 < 1 \text{ sono } \textbf{punti interni}$$

$$x_0 < 0 \text{ e } x_0 > 1 \text{ sono } \textbf{punti esterni}$$

$$x_0 = 0, 1 \text{ sono } \textbf{punti di frontiera}$$

Diciamo inoltre che un insieme è:

- **Aperto** se tutti i suoi punti sono **interni** (se non contiene punti di frontiera)
- **Chiuso** se il suo complementare è aperto (contiene tutti i punti di frontiera)

A partire da questi insiemi, se ne possono costruire altri aperti o chiusi:

<b>Teorema 1.1</b>	<i>L'unione di una famiglia qualsiasi (anche infinita) di insiemi aperti e l'intersezione di un numero finito di insiemi aperti sono insiemi aperti.</i>
<b>Teorema 1.2</b>	<i>L'unione di una famiglia qualsiasi (anche infinita) di insiemi chiusi e l'intersezione di un numero finito di insiemi chiusi sono insiemi chiusi.</i>

Esistono inoltre insiemi che non appartengono a queste due categorie e sono detti **insiemi né aperti né chiusi**. Diciamo inoltre che lo **spazio**  $\mathbb{R}^n$  e l'**insieme vuoto** sono gli unici insiemi sia aperti sia chiusi.

Sia  $E$  un generico sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ , chiamiamo:

- **interno** di  $E$ , indicato con  $E^0$ , l'insieme dei punti interni di  $E$
- **frontiera** o **bordo** di  $E$ , indicato con  $\delta E$ , l'insieme dei punti frontiera di  $E$
- **chiusura** di  $E$ , indicata con  $\bar{E}$ , l'insieme  $E \cup \delta E$  (si noti che  $\delta E \cup E^0 = \bar{E}$ )

In particolare, vale sempre che:

$$E^0 \subseteq E \subseteq \bar{E}$$

Diciamo che un insieme è:

- **Limitato** se esiste una palla di raggio finito che contiene tutto l'insieme

- **Illimitato** se non è limitato

Nel piano si parla di insiemi concavi e convessi. In generale diciamo che un insieme  $E$  è **connesso** (per archi) se, per ogni coppia di punti  $x, y \in E$ , esiste un arco di curva continuo contenuto in  $E$ , che abbia per estremi  $x$  e  $y$ .

Notiamo che sulla retta, un insieme convesso è un intervallo (in  $\mathbb{R}$  un insieme connesso è anche convesso e viceversa). Per quanto riguarda i domini di funzioni a più variabili, possiamo quindi dire che un connesso è “l'equivalente” di un intervallo per le funzioni a una variabile.

## 1.3. I limiti delle funzioni a più variabili

---

Come per le funzioni a una variabile, studiamo per le funzioni a più variabili il concetto di **limite**.

Consideriamo una funzione  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definita almeno in una palla di  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  (escluso al più  $X_0$  stesso) e sia  $L \in \mathbb{R}$ . Si dice che:

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L$$

Se per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$ , tale che se  $X \in B(X_0, \delta)$  allora  $|f(X) - L| < \varepsilon$ . Inoltre diciamo che:

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = +\infty \text{ (o } -\infty)$$

Se per ogni  $k > 0$ , esiste  $\delta > 0$ , tale che se  $X \in B(X_0, \delta)$  allora  $f(X) > k$  (o  $f(X) < -k$ ).

Notiamo come dal punto di vista formale, la definizione di limite di una funzione a  $n$  variabili è simile a quella di una funzione a una variabile. In particolare, molte proprietà riguardanti i limiti di funzioni a una variabile valgono in generale per  $n$  – *variabili*:

- Il teorema dell'unicità del limite
- I teoremi sul limite della somma, del prodotto per una costante, del quoziente di due funzioni
- Il teorema del confronto

### 1.3.1. Funzioni continue

La definizione di **funzione continua**, in un punto e in un insieme di punti, è analoga a quella delle funzioni a una variabile: diciamo che  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in  $X_0$  se:



$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = f(X)$$

Come conseguenza dei teoremi sui limiti, sono validi per le funzioni a più variabili le seguenti proprietà e teoremi:

- I teoremi sulla continuità della somma, del prodotto, del quoziente e della composizione di due funzioni continue
- Il teorema della permanenza del segno
- Il teorema di Weierstrass, analogo al caso di funzioni a una variabile

Valgono inoltre, i seguenti due teoremi:

**Teorema 1.3** *(degli zeri)* Sia  $E$  un insieme connesso di  $\mathbb{R}^n$  e  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  sia continua. Se  $X$  e  $Y$  sono due punti di  $E$  tali che  $f(X) > 0$  e  $f(Y) < 0$ , allora esiste un terzo punto  $Z \in E$  in cui  $f$  si annulla. In particolare, lungo ogni arco di curva continua (contenuto in  $E$ ) che congiunge  $X$  e  $Y$ , c'è almeno un punto in cui  $f$  si annulla.

**Teorema 1.4** *(dei valori intermedi)* Sia  $E$  un insieme connesso di  $\mathbb{R}^n$  e  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  sia continua. Se  $X$  e  $Y$  sono due punti di  $E$  e  $k \in \mathbb{R}$  un valore tale che  $f(X) < k < f(Y)$ , allora esiste un terzo punto  $Z \in E$  tale che  $f(Z) = k$ . In particolare, lungo ogni arco di curva continua (contenuto in  $E$ ) che congiunge  $X$  e  $Y$ , c'è almeno un punto in cui  $f$  assume valore  $k$ .

### 1.3.2. Calcolo dei limiti

Vediamo ora, tramite esempi, alcuni procedimenti fondamentali per l'analisi e il calcolo delle forme di indeterminazione nel calcolo dei limiti di funzioni a più variabili.

#### *Restrizione di una funzione a una curva*

Consideriamo una funzione  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a  $n$  variabili e una funzione  $r: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . A questo punto consideriamo la funzione composta:

$$\begin{aligned} g: I \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ g(t) &= f(r(t)) \end{aligned}$$

Questa funzione viene detta **restrizione di  $f$  alla curva  $r$**  ed è una funzione reale di variabile reale. Studiando questa funzione, stiamo studiando il comportamento della funzione  $f$ , muovendoci però sulla curva  $r$ . In questo modo, invece di far variare  $X$  in  $n$  dimensioni, ci limitiamo ai punti di  $\mathbb{R}^n$  che stanno sulla curva  $r(t)$ . Notiamo inoltre che se  $r$  è continua e  $f$  è continua, lo sarà anche  $g$  (composizione di funzioni continue).

In particolare, studiando quindi il limite della funzione su varie curve, risulta facile stabilire la non-esistenza del limite di una funzione. Infatti, trovando due curve lungo le quali la funzione tende a due limiti diversi in un punto  $X_0$ , concludiamo che la funzione non ammette limite per quel punto (vale analogamente se lungo una curva il limite non esiste). Vediamo un esempio:

**Esempio 1.2.**

Consideriamo il limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Iniziamo ponendoci su una generica retta  $y = mx$ :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{m}{(1+m^2)}$$

Studiamo ora questo limite per valori diversi di  $m$ . Per  $m = 1$ , il limite diventa:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{(1+1^2)} = \frac{1}{2}$$

Invece, per  $m = 0$ , il limite diventa:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{0}{(1+0^2)} = 0$$

Possiamo quindi concludere che la funzione non ammette limite in  $X_0 = (0,0)$

**Esempio 1.3.**

Consideriamo ora il limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$$

Procediamo come nell'ESEMPIO 1.2:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} = 0$$

Notiamo infatti il limite tende a 0 a prescindere dal valore di  $m$  (il denominatore ha grado minore del numeratore). Tuttavia, ponendoci sulla curva  $y = x^2$  il limite diventa:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$$

Possiamo quindi concludere che il limite non esiste.

*Dimostrazione dell'esistenza del limite in coordinate cartesiane*

Nel caso in cui, provando a calcolare il limite lungo varie curve si ottiene lo stesso risultato, sarà comunque necessario dimostrare l'esistenza del limite. Per fare ciò si usa direttamente la definizione di limite.

Se infatti otteniamo che:

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L$$

Per dimostrare l'esistenza del limite, sarà necessario dimostrare che:

$$\lim_{X \rightarrow X_0} |f(X) - L| = 0$$

Vediamo un esempio:

**Esempio 1.4.**

Consideriamo il seguente limite, il quale ci risulta essere uguale 0 lungo alcune curve su cui l'abbiamo studiato:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} = 0$$

Per dimostrare che il limite è effettivamente 0 calcoliamo il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} - 0 \right|$$

Per calcolare questo limite possiamo maggiorare il valore assoluto con una funzione che sappiamo tendere a 0. Notiamo che:

$$\begin{aligned} x^2 + y^4 &\geq x^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \left| \frac{x^2}{x^2 + y^4} \right| &\leq 1 \end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere che:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} \right| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$$

Dal teorema del confronto concludiamo che il limite della funzione è effettivamente 0.

*Calcolo del limite in coordinate polari*

Nel caso bidimensionali (funzioni  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ) è possibile ricorrere all'uso delle **coordinate polari**. Considerato un punto qualsiasi del dominio  $X_0 = (x_0, y_0)$ , possiamo riscriverlo in coordinate polari come:

$$X_0 = (\rho, \theta)$$

Dove  $\rho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  è la distanza del punto dall'origine degli assi, e  $\theta$  è l'angolo compreso tra l'asse delle ascisse e la congiungente del punto con l'origine. Per passare dalle coordinate polari a quelle cartesiane è sufficiente scrivere:

$$x_0 = \rho \cos \theta$$

$$y_0 = \rho \sin \theta$$

Con l'uso delle coordinate polari si riesce spesso a studiare il comportamento della funzione in relazione alla distanza tra  $(x, y)$  e  $(0, 0)$ . Se il valore del limite risulta dipendere dall'angolo  $\theta$ , possiamo concludere che il limite non esiste. Vediamo qualche esempio:

### Esempio 1.5.

Consideriamo il limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^2 + y^2}$$

Affermiamo che questo limite vale 0. Per dimostrarlo riscriviamo la funzione in coordinate polari:

$$\frac{2x^2y}{x^2 + y^2} = \frac{2\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2} = 2\rho \cos^2 \theta \sin \theta$$

Ricordando che le funzioni  $\sin$  e  $\cos$  sono limitate tra  $\pm 1$  possiamo scrivere:

$$|2\rho \cos^2 \theta \sin \theta| \leq 2\rho$$

Ora applichiamo semplicemente la definizione di limite avvicinandoci all'origine (quindi per  $\rho \rightarrow 0$ ):

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} |2\rho \cos^2 \theta \sin \theta| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} |2\rho| = 0$$

Abbiamo quindi dimostrato che il limite vale effettivamente 0

### Esempio 1.6.

Riprendiamo l'ESEMPIO 1.2:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Se passiamo in coordinate a polari otteniamo:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \cos \theta \sin \theta$$

In questo caso il valore del limite cambia a seconda dell'angolo  $\theta$ . Possiamo quindi concludere che in  $X_0 = (0, 0)$  la funzione non ammette limite.

## 1.4. Derivabilità e differenziabilità

Ci interessa ora studiare il concetto di derivata di una funzione  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . In particolare, ci soffermeremo sul caso bidimensionale. Infatti, con  $n = 2$ , riusciamo già a notare le differenze rispetto al caso di funzioni a una variabile. Ricordando che la derivata di una funzione a una variabile indica l'incremento di una funzione rapportato all'incremento della variabile, ci rendiamo conto che non è possibile applicare la classica definizione di derivata. Se il punto  $(x_0, y_0)$  è quello di cui vogliamo studiare la derivata, cosa intendiamo con "incrementare" la coppia di variabili  $(x, y)$ ?

### 1.4.1. Le derivate parziali e derivabilità

Per risolvere il problema appena citato, si usa incrementare una variabile alla volta, tenendo costante l'altra. Per studiare quindi la derivata in  $(x_0, y_0)$ , decidiamo quindi di fissare una delle due variabili, ad esempio  $y = y_0$ , e calcolare la derivata incrementando l'altra:

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Per poi fissare  $x = x_0$  e studiare il comportamento incrementando  $y$ :

$$\frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Queste vengono dette rispettivamente **derivata parziale di  $f$  rispetto a  $x$**  e **derivata parziale di  $f$  rispetto a  $y$** . Possono essere indicate con diversi simboli:

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0), \quad \delta_x f(x_0, y_0), \quad D_x f(x_0, y_0), \quad D_1 f(x_0, y_0), \quad f_x(x_0, y_0)$$

e

$$\frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0), \quad \delta_y f(x_0, y_0), \quad D_y f(x_0, y_0), \quad D_2 f(x_0, y_0), \quad f_y(x_0, y_0)$$

Chiamiamo **gradiente** ( $\nabla$ ) il vettore che ha per componenti le derivate parziali di  $f$  in  $(x_0, y_0)$ :

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$

Il gradiente viene indicato con:

$$\nabla f(x_0, y_0), \quad Df(x_0, y_0), \quad \text{grad} f(x_0, y_0)$$

Vediamo qualche esempio di calcolo delle derivate parziali:

**Esempio 1.7.**

Consideriamo la funzione in  $X_0 = (1,2)$ :

$$f(x,y) = xy$$

Calcoliamo le derivate parziali per un punto generico  $X = (x,y)$ . Per calcolare ad esempio la derivata parziale rispetto a  $x$ , trattiamo  $y$  come una costante (il ragionamento è analogo per la derivata parziale rispetto a  $y$ ):

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x,y) = y$$

$$\frac{\delta f}{\delta y}(x,y) = x$$

Sostituendo  $x_0$  e  $y_0$  troviamo quindi:

$$f_x(1,2) = 2$$

$$f_y(1,2) = 1$$

**Esempio 1.8.**

Consideriamo ora la funzione in  $X_0 = (0,0)$ :

$$f(x,y) = y\sqrt{x}$$

Proviamo ora a calcolare la derivata parziale rispetto a  $x$ :

$$f_x(x,y) = \frac{y}{2\sqrt{x}}$$

Se sostituiamo  $x_0$  e  $y_0$  otteniamo:

$$f_x(0,0) = \frac{0}{2\sqrt{0}} = \frac{0}{0}$$

che non ha senso matematico. In questo caso, quindi, conviene utilizzare la definizione di derivata parziale:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0,0)}{h} = \frac{0 \cdot \sqrt{h}}{h} = 0$$

La derivata parziale rispetto a  $x$  quindi esiste e tende a 0.

Si ragiona allo stesso modo nel caso di  $n$  variabili. Per calcolare le  $n$  derivate parziali in  $X_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  procediamo in questo modo:

$$\frac{\delta f}{\delta x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + h, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{h}$$

E' importante osservare che, nel calcolo di una derivata di una funzione in un punto  $X_0$ , **è necessario che anche il punto incrementato appartenga al dominio di  $f$** . Ciò è certamente vero nel caso in cui il dominio sia un insieme aperto. Da ora in poi, quando scriviamo  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , intendiamo  $A$  come insieme aperto.

Introduciamo ora il concetto di **funzione derivabile** in un punto.

**Definizione 1.2.** Una funzione  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **derivabile** in un punto del suo dominio se in quel punto esistono tutte le sue derivate parziali. In caso positivo, chiamiamo **gradiente della funzione** in quel punto il vettore:

$$\nabla f(X_0) = \left( \frac{\delta f}{\delta x_1}(X_0), \dots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(X_0) \right)$$

A differenza del caso delle funzioni a una variabile, la derivabilità non implica la continuità. Se ad esempio consideriamo la funzione definita a tratti:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } xy = 0 \\ 1 & \text{se } xy \neq 0 \end{cases}$$

Notiamo che è derivabile in  $(0,0)$ :

$$f_y(0,0) = f_x(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{se } xy = 0 \\ 0 & \text{se } xy \neq 0 \end{cases}$$

Tuttavia, la funzione non è continua.

## 1.4.2. Piano tangente e differenziabilità

Il calcolo della derivata per una funzione a una variabile corrisponde essenzialmente a definire la retta tangente al suo grafico, per una funzione a due variabili si tratta invece di definire il **piano tangente**.

Se sezioniamo una generica funzione a due variabili  $z = f(x, y)$  con il piano  $y = y_0$  otteniamo una curva definita da  $z = f(x, y_0)$ . La retta  $r_1$  tangente a tale curva in  $x_0$  sarà sul piano che stiamo cercando. Ragioniamo in modo analogo sezionando il grafico col piano  $x = x_0$  e troviamo una retta  $r_2$  tangente alla curva  $z = f(x_0, y)$  in  $y_0$ . Le due rette si intersecano nel punto  $(x_0, y_0)$  e, poiché due rette incidenti individuano nello spazio uno e un solo piano, questo è il piano tangente che stiamo cercando.

L'equazione di  $r_1$  sarà definita dal sistema:

$$r_1: \begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

Analogamente, la retta  $r_2$  sarà definita da:

$$r_2: \begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases}$$

Si tratta ora di trovare il piano che contiene le due rette, ossia:

$$\alpha: z = f(x_0, y_0) + \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Possiamo quindi dire che questo piano è tangente alla funzione nel punto considerato?

### Esempio 1.9.

Consideriamo la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e studiamola nel punto  $(0, 0)$ :

$$f(0, 0) = 0$$

Sugli assi coordinati la funzione è nulla, da cui deduciamo che:

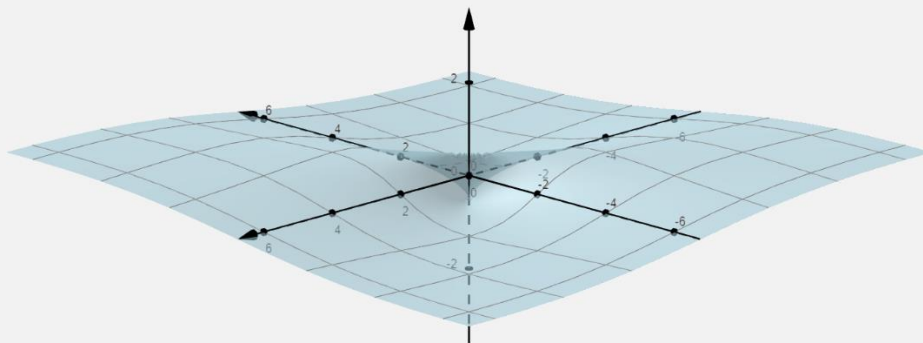
$$f_x(0, 0) = 0$$

$$f_y(0, 0) = 0$$

Scriviamo quindi l'equazione del piano che abbiamo scritto precedentemente:

$$z = 0$$

Se guardiamo il grafico della funzione:



Notiamo che il piano  $z = 0$  non è tangente alla funzione in  $(0, 0)$ : la funzione non è nemmeno continua in quel punto.



Perché il piano trovato sia effettivamente tangente alla funzione nel punto, occorre infatti che esso sia tangente a tutte le curve che si ottengono mediante l'intersezione tra la funzione e un qualsiasi piano verticale passante per il punto. Per questo motivo, **l'ipotesi di derivabilità non è sufficiente** per garantire l'esistenza del piano tangente, come si può vedere nell'ESEMPIO 1.9.

### *Il caso bidimensionale*

Mentre per le funzioni a una variabile, la derivabilità implica l'esistenza della retta tangente, non possiamo dire altrettanto per le funzioni in più variabili. Possiamo tuttavia notare che la proprietà fondamentale della retta tangente nel caso unidimensionale è espressa da:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h) \text{ per } h \rightarrow 0$$

o

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = 0$$

L'incremento della funzione è uguale all'incremento calcolato lungo la retta tangente a meno di un errore infinitesimo di ordine superiore all'incremento  $h$  l'incremento della variabile indipendente.

Il concetto analogo è quello di **differenziabilità in più variabili**: l'incremento di  $f$  è uguale all'incremento calcolato lungo il piano tangente a meno di un errore infinitesimo di ordine superiore all'incremento  $(h, k)$  delle variabili indipendenti:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \text{ per } (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

o

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Dove  $h = (x - x_0)$  e  $k = (y - y_0)$ . Nella prima forma, il primo membro rappresenta l'incremento della funzione; i primi due addendi del secondo membro rappresentano l'incremento totale calcolato lungo il piano tangente mentre l'ultimo addendo rappresenta l'errore infinitesimo commesso nell'approssimazione.

Se questa condizione è verificata, diremo che la funzione è **differenziabile in  $(x_0, y_0)$** . Il piano tangente è quindi il piano che abbiamo trovato precedentemente se e solo se la funzione è differenziabile in quel punto, altrimenti non esiste.

### *Il caso n-dimensionale*

Possiamo quindi generalizzare la definizione di differenziabilità:

**Definizione 1.3.** Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto e sia  $X_0 \in A$ . Si dice che  $f$  è differenziabile in  $X_0$  se e solo se esiste un vettore  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  tale che:

$$f(X_0 + \mathbf{h}) - f(X_0) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|) \text{ per } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$$

Possiamo quindi affermare che, se  $f$  è differenziabile in  $X_0$ , vale che:

1.  $f$  è continua in  $X_0$
2.  $f$  è derivabile in  $X_0$ , e in particolare:

$$\mathbf{a} = \nabla f(X_0)$$

Notiamo che queste due condizioni sono entrambe condizioni necessarie ma non sufficienti perché la funzione sia differenziabile.

**Definizione 1.4.** Se  $f$  è differenziabile in  $X_0$ , si dice **differenziale di  $f$  calcolato in  $X_0$**  la funzione lineare  $df(X_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definita da:

$$df(X_0): \mathbf{h} \rightarrow \nabla f(X_0) \cdot \mathbf{h}$$

Nel caso bidimensionale, il numero  $\nabla f(X_0) \cdot \mathbf{h}$  rappresenta l'incremento della funzione calcolato lungo il piano tangente al grafico di  $f$  in  $X_0$ . Questo tipo di approssimazione prende il nome di **linearizzazione di  $f$** . Se con un abuso di linguaggio scriviamo  $df(X_0) = df(X_0)(\mathbf{h})$ , e consideriamo  $\Delta f(X_0) = f(X_0 + \mathbf{h}) - f(X_0)$ , possiamo scrivere:

$$\Delta f(X_0) = df(X_0) + o(|\mathbf{h}|)$$

Come abbiamo visto, può risultare difficile verificare direttamente la differenziabilità di una funzione, esiste però un criterio indicato nel seguente teorema:

**Teorema 1.5** (**condizione sufficiente di differenziabilità**) Siano  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $X_0 \in A$  con  $A$  aperto. Supponiamo che le derivate parziali della funzione esistano in un intorno di  $X_0$  e siano continue. Allora  $f$  è differenziabile in  $X_0$ . In particolare, se  $f \in C^1(A)$ , allora  $f$  è differenziabile in tutto  $A$ .

Con la scrittura  $f \in C^1(A)$ , si intende che  $f$  è una funzione di **classe  $C^1(A)$** , ossia che le derivate parziali di  $f$  esistono e sono continue in tutto  $A$ .

Vediamo ora alcune esempi, da cui noteremo che  $f$  derivabile non implica che  $f \in C^1(A)$ :

**Esempio 1.10.**

Consideriamo la funzione:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

La funzione è definita in tutto  $\mathbb{R}^2$ . Calcoliamo le derivate parziali:

$$f_x(x, y) = 2x$$

$$f_y(x, y) = 2y$$

Le derivate esistono e sono continue in tutto  $\mathbb{R}^2$ . Possiamo quindi concludere che la funzione è differenziabile in tutto il suo dominio.

### Esempio 1.11.

Consideriamo la funzione:

$$f(x, y) \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se calcoliamo le derivate parziali fuori dall'origine otteniamo:

$$f_x(x, y) = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Per  $(x, y) \neq (0, 0)$  le derivate parziali esistono e sono continue, quindi per il [TEOREMA 1.5](#) possiamo concludere che  $f$  è differenziabile in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Vediamo ora cosa succede nell'origine. Innanzitutto, notiamo che sugli assi coordinati vale che:

$$f(x, y) = 0$$

Poiché  $f(0, 0) = 0$ , la funzione non incrementa lungo gli assi coordinati, da cui concludiamo che:

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$$

Applichiamo ora la definizione di differenziabilità:

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{h^2 k}{h^2 + k^2} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Passiamo in coordinate cartesiane:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2}}{\sqrt{\rho^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \cos^2 \theta \sin \theta$$

Poiché il limite dipende dall'angolo  $\theta$ , possiamo concludere che la funzione non è differenziabile in  $(0, 0)$

### Esempio 1.12.

Al variare di  $\alpha$ , consideriamo la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} |x|^\alpha \ln \left( 1 + \frac{x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se  $\alpha \geq 0$ , il dominio della funzione è  $\mathbb{R}^2$ . Se invece  $\alpha < 0$ , il dominio della funzione è  $\mathbb{R}^2$  privato delle semirette  $\{x = 0, y < 0\}$  e  $\{x = 0, y > 0\}$ . Notiamo inoltre che:

$$\frac{|x|}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{1}{2}$$

Il che significa che  $\ln \left( 1 + \frac{x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$  è limitato e, pertanto, che  $f$  è continua in  $(0, 0)$  se e solo se  $\alpha \geq 0$ . Ricordiamo che perché una funzione sia differenziabile, essa deve essere continua, quindi  $\alpha$  deve essere maggiore o uguale a 0.

Notiamo che lungo  $x = 0$ , la funzione ha valore  $f(0, y) = 0$ , quindi  $f_y(0, 0) = 0$ . Inoltre:

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^\alpha \ln \left( 1 + \frac{x}{2|x|} \right)}{x}$$

Questo limite esiste solo per  $x > 1$ . In questo caso,  $f$  è differenziabile se e solo se:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|x|^\alpha \ln \left( 1 + \frac{x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Poiché abbiamo detto che il logaritmo nel numeratore è limitato, ciò equivale a scrivere:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|x|^\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Che è vero se e solo se  $\alpha > 1$ . Questa è quindi la condizione di differenziabilità.

### Esempio 1.13.

Consideriamo la funzione:

$$f(x, y) = xy^{\frac{1}{3}}$$

La funzione è definita e continua in tutto  $\mathbb{R}^2$ . Calcoliamo quindi le derivate parziali:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= y^{\frac{1}{3}} \quad \text{definita e continua in tutto } \mathbb{R}^2 \\ f_y(x, y) &= \frac{x}{3y^{\frac{2}{3}}} \quad \text{purchè } y \neq 0 \end{aligned}$$

Studiamo quindi  $f_y(x_0, 0)$ . Iniziamo dal caso in cui  $x_0 \neq 0$ :

$$f_y(x_0, 0) = \frac{\delta}{\delta y} \left( x_0 y^{\frac{1}{3}} \right) = x_0 \frac{\delta}{\delta y} \left( y^{\frac{1}{3}} \right) = x_0 \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}$$

Notiamo che la derivata diverge per  $y \rightarrow 0$ . Studiamo ora  $f_y(0,0)$ . Notiamo che sulla retta  $y = 0$  la funzione  $f(0, y) = 0$ . Inoltre, poiché  $f(0,0) = 0$ , possiamo affermare che:

$$f_y(0,0) = 0$$

Quindi possiamo dire che:

- Nell'aperto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \neq 0\}$  vale che  $f \in C^1(A)$ , quindi per il teorema precedente la funzione è differenziabile in  $A$
- Nei punti  $(x_0, 0)$  con  $x_0 \neq 0$  la funzione non è derivabile ( $f_y$  non esiste), quindi sicuramente la funzione non è differenziabile

Resta da studiare la differenziabilità in  $X_0 = (0,0)$ . Il punto non appartiene a un aperto in cui le derivate parziali sono continue, quindi il TEOREMA 1.5 non è applicabile.

Usiamo quindi la definizione di differenziabilità:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk^{\frac{1}{3}} - 0}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

In coordinate polari:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^{\frac{4}{3}} \cos \theta \sin \theta}{\rho} = 0$$

La funzione quindi è differenziabile nell'origine, nonostante il TEOREMA 1.5 non sia applicabile.

### 1.4.3. Derivate direzionali

Data una funzione  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , la derivata parziale  $\frac{\delta}{\delta x_i} f(X)$  misura la velocità di crescita della funzione lungo l'asse  $x_i$ . Consideriamo ora però una qualsiasi retta passante da un punto  $X_0$  con direzione  $\hat{v}$  (versore). L'equazione parametrica della retta sarà:

$$X(t) = X_0 + t\hat{v}$$

Con  $t$  reale. Spostandoci su questa retta dal punto  $X_0$  (in cui  $t = 0$ ) otterremo un incremento:

$$f(X_0 + t\hat{v}) - f(X_0)$$

Possiamo ora rapportare l'incremento della funzione a all'incremento lungo la retta:

**Definizione 1.5.** Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A$  aperto,  $X_0 \in A$  e  $\hat{v}$  un versore. Chiamiamo **derivata direzionale di  $f$  rispetto al versore  $\hat{v}$  nel punto  $X_0$**  il limite:

$$D_v f(X_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + t\hat{v}) - f(X_0)}{t}$$

se esiste finito.

Si nota che le derivate parziali sono particolari derivate direzionali, calcolate sui versori canonici  $e_i$ :

$$D_{e_i} f(X_0) = \frac{\delta f}{\delta x_i}(X_0)$$

Nel caso bidimensionale  $\mathbb{R}^2$ , il versore  $\hat{v}$  ha forma:

$$\hat{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$$

La derivata direzionale diventa quindi:

$$D_v f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Ponendo  $g(t) = f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta)$ :

$$D_v f(x_0, y_0) = g'(0)$$

In questo caso si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x} f(x_0, y_0) &= D_i f(x_0, y_0) \\ \frac{\delta}{\delta y} f(x_0, y_0) &= D_j f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Vediamo un esempio:

**Esempio 1.14.**

Consideriamo la funzione:

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$$

E calcoliamo  $D_v f(0,0)$  con  $\hat{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ :

$$\begin{aligned} g(t) &= \sqrt[3]{(t \cos \theta)^2 (t \sin \theta)} = t(\cos \theta)^{\frac{2}{3}}(\sin \theta)^{\frac{1}{3}} \\ g'(t) &= (\cos \theta)^{\frac{2}{3}}(\sin \theta)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Quindi:

$$D_v f(0,0) = g'(0) = (\cos \theta)^{\frac{2}{3}}(\sin \theta)^{\frac{1}{3}}$$

Le derivate direzionali esistono tutte ( $g'(0)$  esiste finito per ogni  $\theta$ ). Tuttavia, la funzione non è differenziabile in  $(0,0)$ .

Questo esempio mostra che l'esistenza di tutte le derivate direzionali in un punto non è sufficiente per garantire la differenziabilità nel punto. E' di particolare importanza il seguente teorema:

**Teorema 1.6** *(formula del gradiente)* Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto,  $f$  differenziabile in  $X_0 \in A$ . Allora per ogni versore  $\hat{v}$  esiste la derivata direzionale  $D_v f(X_0)$  e vale l'identità:

$$D_v f(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot \hat{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta f}{\delta x_i}(X_0) v_i$$

Possiamo quindi dire che nel caso di differenziabilità, *tutte le derivate direzionali risultano combinazione lineare delle derivate parziali*. Nel caso in cui  $n = 2$  vale che:

$$D_v f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \hat{v} = \frac{\delta}{\delta x} f(x_0, y_0) \cos \theta + \frac{\delta}{\delta y} f(x_0, y_0) \sin \theta$$

Con  $\hat{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ . Notiamo che se la formula non vale, allora siamo certi che la **funzione non è differenziabile**. Tuttavia, la validità della formula non è sufficiente a garantire la differenziabilità della funzione.

**Corollario 1.6** *(direzione di massima e minima crescita)* Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto,  $f$  differenziabile in  $A$ . Allora il vettore  $\nabla f(X_0)$  indica la direzione e il verso di massimo accrescimento di  $f$ , ossia la direzione corrispondente alla massima derivata direzionale;  $-\nabla f(X_0)$  indica la direzione corrispondente alla minima derivata direzionale (che in generale è negativa). Infine, nella direzione ortogonale al gradiente le derivate direzionali sono nulle.

Possiamo quindi riepilogare dicendo che:

$$f \in C^1(A) \Rightarrow f \text{ differenziabile in } A \Rightarrow \begin{cases} f \text{ continua e derivabile in } A \\ f \text{ ha le derivate direzionali} \\ \text{vale la form. del gradiente} \end{cases}$$

$f$  continua, derivabile, dotata di tutte le derivate direzionali  $\nRightarrow$  differenziabile  
 $f$  derivabile, dotata di tutte le derivate direzionali  $\nRightarrow$  continua

## 1.5. Derivate di ordine superiore

Consideriamo una funzione a due variabile  $f(x, y)$  che possiede per esempio la derivata parziale  $f_x$  in un aperto  $A$ . Possiamo chiederci se  $f_x$  sia a sua volta derivabile nei punti di  $A$ . In caso positivo, calcoliamo le derivate parziali di  $f_x$  che verranno indicate coi simboli:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = \frac{\delta}{\delta x} \left( \frac{\delta f}{\delta x} \right), \quad \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = \frac{\delta}{\delta y} \left( \frac{\delta f}{\delta x} \right)$$

Analogamente per  $f_y$ :

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = \frac{\delta}{\delta y} \left( \frac{\delta f}{\delta y} \right), \quad \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \frac{\delta}{\delta x} \left( \frac{\delta f}{\delta y} \right)$$

Queste quattro funzioni vengono chiamate **derivate parziali seconde di  $f$** . Vengono anche indicate coi simboli:

$$f_{xy}, \quad D_{xy}^2 f, \quad \delta_{xy}^2 f, \quad D_{12}^2, \quad f_{xx}, \quad \dots$$

In generale, per una funzione a  $n$  variabili, considerata la una derivata parziale  $f_{x_i}$  esistente in tutto  $A$ , possiamo chiederci se essa sia a sua volta derivabile rispetto a una verta variabile  $x_j$ . In caso positivo si indicherà tale funzione con:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_i} = \frac{\delta}{\delta x_j} \left( \frac{\delta f}{\delta x_i} \right)$$

Vediamo un esempio:

### Esempio 1.15.

Consideriamo la funzione:

$$f(x, y) = x^2 \cos(xy)$$

La funzione è continua e derivabile in tutto  $\mathbb{R}^2$ , calcoliamone le derivate parziali:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy) \\ f_y(x, y) &= -x^3 \sin(xy) \end{aligned}$$

Le derivate parziali sono a loro volta continue e derivabili in tutto  $\mathbb{R}^2$ , calcoliamo quindi le derivate parziali seconde:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= \frac{\delta}{\delta x} (f_x(x, y)) = 2 \cos(xy) - 4xy \sin(xy) - x^2 y^2 \cos(xy) \\ f_{yy}(x, y) &= \frac{\delta}{\delta y} (f_y(x, y)) = -x^4 \cos(xy) \\ f_{xy}(x, y) &= \frac{\delta}{\delta y} (f_x(x, y)) = -3x^2 \sin(xy) - x^3 y \cos(xy) \end{aligned}$$



$$f_{yx} = \frac{\delta}{\delta x} (f_y(x, y)) = -3x^2 \text{sen}(xy) - x^3 y \cos(xy)$$

Si nota immediatamente che le derivate parziali seconde  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  (dette **derivate miste**) sono uguali, nonostante la funzione non abbia nessuna proprietà simmetrica. Questo fatto ha validità generale:

**Teorema 1.7 (teorema di Schwarz)** Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto. Supponiamo che (per certi indici  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) le derivate seconde miste  $f_{x_i x_j}$  e  $f_{x_j x_i}$  esistano in un intorno di un punto  $x_0$ , allora esse coincidono in  $x_0$ . In particolare, se esistono e sono continue in  $A$ , allora coincidono in tutto  $A$ .

Una funzione che ha tutte le derivate parziali seconde continue in un aperto  $A$  viene detta funzione di classe  $C^2(A)$ . In questo caso, la funzione sarà differenziabile in  $A$  (infatti se  $f \in C^2(A)$  allora  $f \in C^1(A)$ ), e lo saranno anche le sue derivate parziali. Inoltre, tutte le derivate seconde miste coincidono.

Il teorema di Schwarz si generalizza per derivate di ordine  $k$ . Se per esempio si considera una funzione a tre variabili  $f(x, y, z)$  di classe  $C^4(A)$ , si può affermare che:

$$\frac{\delta^4 f}{\delta^2 x \delta z \delta y} = \frac{\delta^4 f}{\delta x \delta y \delta z \delta x}$$

### 1.5.1. Matrice Hessiana e formula di Taylor

Come si era visto per le funzioni a una variabile, una formula molto utile del calcolo differenziale delle funzioni a una variabile è la **formula di Taylor**. In questo paragrafo estenderemo questa formula alle funzioni a  $n$  variabili. Nel [PARAGRAFO 1.4.2](#) abbiamo definito il differenziale di una funzione. Diamo ora la definizione di differenziale secondo:

**Definizione 1.6.** Sia  $f \in C^2(A)$  e  $X_0 \in A$ , si dice **differenziale secondo di  $f$  in  $X_0$**  la funzione:

$$d^2 f(X_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$d^2 f(X_0): \mathbf{h} \rightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(X_0) h_i h_j$$

Analogamente a quello che si fa per il differenziale primo, con un abuso di scrittura si indica  $d^2 f(X_0)(\mathbf{h}) = d^2 f(X_0)$  e si scrive:

$$d^2 f(X_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(X_0) h_i h_j$$

I coefficienti  $\frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(X_0)$  possono essere ordinati in una matrice di dimensioni  $n \times n$  detta **matrice Hessiana di  $f$  in  $X_0$** :

$$H_f(X_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(X_0) & \cdots & f_{x_1 x_n}(X_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(X_0) & \cdots & f_{x_n x_n}(X_0) \end{pmatrix}$$

Quindi possiamo scrivere che:

$$d^2 f(X_0) = H_f(X_0) \cdot \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}$$

Per le funzioni a due variabili:

$$H_f(X_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(X_0) & f_{xy}(X_0) \\ f_{yx}(X_0) & f_{yy}(X_0) \end{pmatrix}$$

E il differenziale secondo di  $f$  in  $(x_0, y_0)$  assume la forma:

$$d^2 f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2$$

Per il teorema di Schwarz, se  $f \in C^2(A)$  la matrice Hessiana è simmetrica in ogni punto di  $A$ . Se una funzione è di classe  $C^1$ , abbiamo detto che la differenziabilità permette di approssimarne localmente il comportamento con quello del suo piano tangente. Abbiamo detto che una funzione differenziabile può essere scritta come:

$$f(X_0) = df(X_0) + o(|\mathbf{h}|)$$

Se la funzione è di classe  $C^2$ , è possibile approssimarla localmente con maggior precisione:

**Teorema 1.8**      **(formula di Taylor con resto secondo Peano)** Sia  $f \in C^2(A)$ . Per ogni  $X_0 \in A$  vale:

$$f(X_0 + \mathbf{h}) = f(X_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\delta f}{\delta x_i}(X_0) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(X_0) h_i h_j + o(|\mathbf{h}|^2)$$

per  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$

Notiamo che questa formula è analoga a:

$$f(X_0 + \mathbf{h}) = f(X_0) + df(X_0) + \frac{1}{2} d^2 f(X_0) + o(|\mathbf{h}|^2)$$

$$f(X_0 + \mathbf{h}) = f(X_0) + \nabla f(X_0) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} H_f(X_0) \cdot \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|^2)$$

Il simbolo  $o(|\mathbf{h}|^2)$  indica una quantità tale che:

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{o(|\mathbf{h}|^2)}{|\mathbf{h}|^2} = 0$$

(stando attenti al fatto che il limite è inteso in  $\mathbb{R}^n$ ). Vediamo un esempio di sviluppo di alcune funzioni al secondo ordine:

### Esempio 1.16.

Consideriamo la funzione:

$$f(x, y) = e^{xy}$$

Notiamo che  $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . Sviluppiamola al secondo ordine in  $(0,0)$  con Taylor con il resto secondo Peano:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 1 \\ f_x(x, y) &= ye^{xy} \rightarrow f_x(0,0) = 0 \\ f_y(x, y) &= xe^{xy} \rightarrow f_y(0,0) = 0 \end{aligned}$$

Calcoliamo ora le derivate seconde ricordando che  $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ :

$$\begin{aligned} f_{xx} &= y^2 e^{xy} \rightarrow f_{xx}(0,0) = 0 \\ f_{yy} &= x^2 e^{xy} \rightarrow f_{yy}(0,0) = 0 \\ f_{xy} &= e^{xy} + xye^{xy} \rightarrow f_{xy}(0,0) = 1 \end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere:

$$e^{xy} = 1 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(0 + 0 + 2xy) + o(x^2 + y^2) = 1 + xy + o(x^2 + y^2)$$

Per risolvere l'esercizio si può procedere anche in un altro modo: sostituendo  $t = xy$  possiamo sviluppare  $e^t$  al secondo ordine trattandola come funzione a una variabile:

$$\begin{aligned} e^t &\simeq 1 + t + \frac{t^2}{2} \\ e^{xy} &\simeq 1 + xy + \frac{(xy)^2}{2} \end{aligned}$$

Notiamo che  $(xy)^2$  è un termine di quarto grado, quindi  $(xy)^2 = o(x^2 + y^2)$ , da cui:

$$e^{xy} = 1 + xy + o(x^2 + y^2)$$

## 1.6. Ottimizzazione: estremi liberi

Quando si parla di ottimizzazione di una funzione ci si riferisce a una serie di problemi matematici che trattano la minimizzazione o massimizzazione di una quantità. Nei modelli più semplici l'obiettivo è costituito da una funzione reale a  $n$  variabili reali:

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

La presenza di due o più variabili rende questo tipo di problemi molto più complessi rispetto al caso unidimensionale. Conviene distinguere due tipi di problemi di ottimizzazione:

- Ricerca di **estremi liberi**, ossia estremi assunti in **punti interni** al dominio  $A$  della funzione. Nel caso di domini aperti, gli estremi della funzione saranno sempre estremi liberi
- Ricerca di **estremi vincolati**, ossia estremi assunti su un **sottinsieme non aperto** di  $A$  o sulla **frontiera** di  $A$

Vediamo ora alcune definizioni fondamentali:

**Definizione 1.7.** Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $X_0 \in A$ . Diciamo che  $X_0$  è un **punto di massimo** (resp. **minimo**) **assoluto** per  $f$  in  $A$  e che  $f(X_0)$  è il **massimo** (resp. **minimo**) **assoluto o globale** di  $f$  in  $A$  se:

$$\forall X \in A, f(X_0) \geq f(X) \quad (\text{resp. } f(X_0) \leq f(X))$$

e

**Definizione 1.8.** Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $X_0 \in A$ . Diciamo che  $X_0$  è un **punto di massimo** (resp. **minimo**) **locale** per  $f$  e che  $f(X_0)$  è il **massimo** (resp. **minimo**) **locale o relativo** di  $f$  se esiste un  $r \in \mathbb{R}^+$  tale che:

$$\forall X \in B(X_0, r), f(X_0) \geq f(X) \quad (\text{resp. } f(X_0) \leq f(X))$$

Se nella 1.8 e 1.9 valgono le disuguaglianze strette ( $<$  o  $>$ ), si dice che gli estremi sono *forti*, altrimenti vengono detti *deboli*.

Serve ora capire se, data una funzione  $f$  e  $A \subseteq \text{Dom}(f)$ , questi punti esistono in  $A$ , sono unici e come possiamo trovarli e caratterizzarli:

1. **ESISTENZA:** non si può sempre garantire l'esistenza di massimo e/o minimi (globali e/o locali) di una funzione. In molti casi, il **teorema di Weierstrass** si rivela molto utile: se  $A$  è chiuso e limitato ed  $f$  è continua in  $A$ , allora  $f$  possiede sia massimo sia minimo in  $A$
2. **UNICITA':** se una funzione ha minimo globale  $m = f(X_0)$ , dalla definizione è chiaro che  $m$  è unico. Tuttavia, ciò non è per forza valido per  $X_0$  (ad esempio nel caso unidimensionale  $f(x) = \sin(x)$  avrà minimo globale  $m = -1$ , ma esistono infiniti punti in cui la funzione assume quel valore). Per dimostrare l'unicità di

un punto di minimo o di massimo si ricorre spesso al calcolo approssimato con metodi numerici. A volte, è invece possibile stabilire l'unicità di questi punti (funzioni strettamente concave o convesse)

3. **RICERCA E CARATTERIZZAZIONE DEI PUNTI DI ESTREMI:** come nel caso a una variabile, si ricorre spesso a condizioni necessarie e sufficienti per la ricerca e per la caratterizzazione dei punti di estremo di una funzione.

Nel caso degli **estremi liberi** si ricorre principalmente al calcolo differenziale trattato nei paragrafi precedenti. Tramite questi concetti è ad esempio possibile estendere alcuni concetti, quale i punti stazionari, alle funzioni a più variabili.

Nel caso degli **estremi vincolati** si usa invece l'uso del calcolo differenziale a valori vettoriali (ad esempio il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*).

Iniziamo dal caso degli estremi liberi:

### 1.6.1. Condizioni necessarie di primo ordine

Iniziamo dalla ricerca dei punti di estremo per una funzione a più variabili. Come per il caso unidimensionale, individuiamo una condizione necessaria che caratterizza i punti di estremo:

**Teorema 1.9**      *(di Fermat) Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A$  aperto e  $X_0 \in A$  un punti di massimo o minimo locale per  $f$ . Se  $f$  è derivabile in  $X_0$  allora:*

$$\nabla f(X_0) = 0$$

I punti di una funzione  $f$  in cui il gradiente si annulla vengono detti **punti critici** (o **stazionari**) di  $f$ . Il teorema di Fermat afferma quindi che tutti i punti critici di una funzione, ossia i punti  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , sono soluzioni del sistema di  $n$  equazioni in  $n$  incognite:

$$\begin{cases} f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Un punti soluzione di questo sistema non è per forza un punto di estremo. Una volta trovati i punti critici, bisogna quindi studiarne la natura. Un punto stazionario che non è né un punti di minimo né un punti di massimo viene detto **punto di sella** o **di colle**. In un punto di sella può essere ad esemepio un punto di minimo lungo una direzione e di massimo lungo un'altra. Vi possono essere inoltre punti in cui la funzione non è derivabile in un punto di estremo. Ad esempio la funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ha come grafico ([FIGURA B](#)) un cono rovesciato con vertice nell'origine (minimo globale), dove però la funzione non è derivabile. Questi punti vanno studiati a parte.

Nella maggior parte dei casi, tuttavia, lo studio diretto è sufficiente a trovare i punti di estremo di una funzione. Vediamo ora come caratterizzare questi punti:

## 1.6.2. Forme quadratiche

Un modo per determinare la natura di un punto critico è quello di usare la formula di Taylor per analizzare il segno dell'incremento della funzione. Se infatti il segno di  $\Delta f(X_0) = f(X_0 + \mathbf{h}) - f(X_0)$  è costante (positivo o negativo) per ogni  $|\mathbf{h}|$  abbastanza piccolo possiamo dedurre che  $X_0$  è un punto di minimo o massimo relativo. Se invece, al variare di  $\mathbf{h}$  il segno di  $\Delta f(X_0)$  cambia, siamo in presenza di un punto di sella.

Consideriamo il caso unidimensionale: sia  $f$  derivabile due volte in  $x_0$  e sia  $f'(x_0) = 0$ . Sviluppiamo con Taylor al secondo ordine ottenendo:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + o(h^2) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Notiamo che se  $f''(x_0) > 0$  o  $< 0$ , si avrà rispettivamente  $\Delta f(x_0) > 0$  o  $< 0$  per  $h \rightarrow 0$ . Possiamo quindi concludere che in  $x_0$  la funzione ha rispettivamente un punto di minimo o di massimo.

Nel caso multidimensionale, sia  $f \in C^2(A)$ ,  $X_0 \in A$  e  $\nabla f(X_0) = 0$ . Ragioniamo come nel caso a una variabile:

$$\Delta f(X_0) = f(X_0 + \mathbf{h}) - f(X_0) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(X_0) h_i h_j + o(|\mathbf{h}|^2) \quad \text{per } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$$

Notiamo che il segno del differenziale secondo  $d^2 f(X_0)$  della funzione determina il segno dell'incremento  $\Delta f(X_0)$ . Il polinomio di secondo grado nelle componenti di  $\mathbf{h}$  è detto *forma quadratica* ed è definito in questo modo:

$$q(\mathbf{h}) = q(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j$$

dove  $a_{ij}$  sono numeri reali, detti coefficienti della f.q.. Se tutti gli  $a_j$  sono nulli si parla di forma quadratica nulla.

Per quello che interessa a noi, si può sempre supporre che  $a_{ij} = a_{ji}$  (se così non fosse potremmo sostituire  $a_{ij} = a_{ji} = (a_{ij} + a_{ji})/2$ ). Ogni forma quadratica risulta associata a una matrice simmetrica  $\mathbf{M} = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2,\dots,n}$ . Nel caso di differenziale secondo di una

funzione  $f$  in un punto  $X_0$ , la matrice  $\mathbf{M}$  coincide con la matrice hessiana di  $f$  in  $X_0$ . Le forme quadratiche vengono spesso indicate come prodotto scalare:

$$q(\mathbf{h}) = \langle \mathbf{M}\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle$$

oppure matriciale:

$$q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \mathbf{M} \mathbf{h}$$

**Definizione 1.9.** Una forma quadratica  $q(\mathbf{h}), \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  (o la matrice simmetrica corrispondente) si dice:

- 1) **Definita positiva (negativa)** se, per ogni  $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ ,  $q(\mathbf{h}) > 0$  ( $< 0$ )
- 2) **Semidefinita positiva (negativa)** se, per ogni  $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ ,  $q(\mathbf{h}) \geq 0$  ( $\leq 0$ ) ed esiste  $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$  tale che  $q(\mathbf{h}) = 0$
- 3) **Indefinita** se esistono  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$  tale che  $q(\mathbf{h}_1) > 0$  e  $q(\mathbf{h}_2) < 0$

Se consideriamo una forma quadratica in due variabili definita in questo modo:

$$q(h_1, h_2) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 \quad (1)$$

Esiste un teorema che ci aiuta a studiare il segno della forma quadratica:

**Teorema 1.10** Sia  $a \neq 0$ , la forma quadratica (1) è:

- 1) **Definita positiva (negativa)** se e solo se  $\det \mathbf{M} = 0$  e  $a > 0$  ( $< 0$ )
- 2) **Indefinita** se e solo se  $\det \mathbf{M} < 0$
- 3) **Semidefinita positiva (negativa)** se e solo se  $\det \mathbf{M} = 0$  e  $a > 0$  ( $a < 0$ )

Se  $a = 0$  e  $c \neq 0$  basta sostituire  $a$  con  $c$  nella 1) e nella 3).

In generale, per funzioni forme quadratiche in  $n$  dimensioni si studiano le **sottomatrici principali di nordo-ovest**  $\mathbf{M}_k$ .

**Teorema 1.11** Sia  $q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \mathbf{M} \mathbf{h}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ . Allora  $q$  è:

- 1) **definita positiva** se e solo se  $\det \mathbf{M}_k > 0$  per ogni  $k = 1, 2, \dots, n$
- 2) **definita negativa** se e solo se  $(-1)^k \det \mathbf{M}_k > 0$  per ogni  $k = 1, 2, \dots, n$

Un altro strumento molto utile nello studio del segno di una forma quadratica sono gli **autovalori**. Poiché lavoriamo con matrici simmetriche sappiamo che tutti gli autovalori sono reali e possiedono autovettori reali. Esiste un teorema che dice:

**Teorema 1.12** Sia  $q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \mathbf{M} \mathbf{h}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ . Allora  $q$  è:

- 1) **Definita positiva (negativa)** se e solo se tutti gli autovalori di  $\mathbf{M}$  sono positivi (negativi)
- 2) **Semidefinita positiva (negativa)** se e solo se tutti gli autovalori di  $\mathbf{M}$  sono  $\geq 0$  ( $\leq 0$ ) e almeno uno di essi è nullo

3) **Indefinita** se esiste almeno un autovalore positivo e uno negativo

Possiamo ora vedere come questi concetti ci aiutano nel studiare la natura dei punti critici di una funzione.

### 1.6.3. Caratterizzazione dei punti critici

Abbiamo quindi visto alcuni modi di determinare il segno di una forma quadratica, in che modo ciò ci può aiutare nella caratterizzazione dei punti critici di una funzione? Per ricavare informazioni su un punto stazionario (ossia un  $X_0$  nel quale  $\nabla f(X_0) = 0$ ), occorre studiare la forma quadratica. Ricordando che nel caso di differenziale secondo di una funzione  $f$  in un punto  $X_0$ , la matrice  $\mathbf{M}$  coincide con la matrice hessiana  $H_f(X_0)$  di  $f$  in  $X_0$ , possiamo scrivere:

$$q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \mathbf{H}_f(X_0) \mathbf{h} = \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(X_0) h_i h_j$$

Il segno della forma quadratica ci indica la natura del punto secondo questo teorema:

**Teorema 1.13** Sia  $f \in C^2(A)$  e  $X_0 \in A$  un punto critico per  $f$ . Se la forma quadratica  $q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \mathbf{H}_f(X_0) \mathbf{h}$  è:

- 1) **Definita positiva (negativa)**, allora  $X_0$  è un punto di **minimo (massimo) locale forte**
- 2) **Indefinita**, allora  $X_0$  è un punto di **sella**

Nel caso bidimensionale, siano  $f \in C^2(A)$ ,  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0) \in A$  un punto critico per  $f$  e

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

la matrice hessiana di  $f$  in  $(x_0, y_0)$ , allora:

- 1) Se  $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$  e
  - a.  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$  allora  $(x_0, y_0)$  è un **punto di minimo relativo**
  - b.  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$  allora  $(x_0, y_0)$  è un **punto di massimo relativo**
 (si noti che in questo caso  $f_{xx}(x_0, y_0)$  e  $f_{yy}(x_0, y_0)$  hanno lo stesso segno)

2) Se  $\det(H_f(x_0, y_0)) < 0$  allora  $(x_0, y_0)$  è un **punto di sella**

3) Se  $\det(H_f(x_0, y_0)) = 0$  occorre un'analisi ulteriore

Vediamo qualche esempio:



**Esempio 1.17.**

Consideriamo la funzione:

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2 - x^3y$$

La funzione è di classe  $C^2(\mathbb{R}^2)$ . I punti critici della funzione sono  $(0,0)$ ,  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  e  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ . La matrice hessiana di  $f$  è:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6 - 6xy & -3x^2 \\ -3x^2 & 2 \end{pmatrix}$$

In  $(0,0)$  abbiamo  $\det(H_f(0,0)) > 0$  e  $f_{xx}(0,0) > 0$ . Possiamo quindi dire che  $(0,0)$  è un punto di minimo locale (non è di minimo globale perché ad esempio  $f(x, 1) \rightarrow -\infty$  per  $x \rightarrow \infty$ ).

In  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  abbiamo  $\det(H_f(0,0)) < 0$ . Pertanto,  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  è un punto di sella. Stessa cosa vale per  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

**Esempio 1.18.**

Consideriamo la funzione:

$$f(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$$

La funzione è di classe  $C^2(\mathbb{R}^2)$  e si trova che il punto critico è  $(0,0)$ . Costruiamo la matrice hessiana:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12(x^2 - y^2) & -24xy \\ -24xy & 12(y^2 - x^2) \end{pmatrix}$$

In  $(0,0)$  si ha  $\det H_f(0,0) = 0$ , occorre quindi studiare ulteriormente il comportamento della funzione in un intorno di  $(0,0)$  per poterne determinare la natura. Iniziamo restringendo la funzione su  $y = 0$ :

$$f(x, 0) = x^4$$

La curva ha un minimo in  $(0,0)$ . Il risultato è analogo restringendo la funzione su  $x = 0$ . Se invece restringiamo la funzione sulla retta  $y = x$  otteniamo:

$$f(y, y) = -4y^4$$

che presenta un massimo in  $(0,0)$ . Possiamo quindi concludere che  $(0,0)$  è un punto di sella per  $f$ .

**Esempio 1.19.**

Consideriamo la funzione:

$$f(x, y) = 2x^2 - 3xy^2 + y^4$$

La funzione è di classe  $C^2(\mathbb{R}^2)$ . Il punto  $(0,0)$  è l'unico punto critico della funzione, costruiamo quindi la matrice hessiana per studiare la natura di questo punto:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & -6y \\ -6y & -6x + 12y^2 \end{pmatrix}$$

In  $(0,0)$  la matrice ha determinante nullo, occorre quindi studiare il comportamento della funzione in un intorno di  $(0,0)$ . Per fare ciò possiamo studiare:

$$\text{sign}(f(x, y) - f(0,0)) = \text{sign}(2x^2 - 3xy^2 + y^4)$$

Notiamo che:

$$2x^2 - 3xy^2 + y^4 = x(2x - y^2) - y^2(2x - y^2) = (x - y^2)(2x - y^2)$$

Quindi bisogna studiare:

$$(x - y^2)(2x - y^2) > 0$$

Sviluppando i calcoli si nota che il segno non è costante in ogni intorno di  $(0,0)$ , pertanto è un punto di sella.

## 1.7. Ottimizzazione: estremi vincolati

In molti casi, le variabili indipendenti sono soggette a vincoli di vario tipo. Vediamo ora alcuni metodi per trovare e caratterizzare punti di estremo in questi casi:

### 1.7.1. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Se il vincolo è rappresentato da una curva regolare assegnata in qualsiasi formula (parametrica, cartesiana o implicita), sarà possibile utilizzare un metodo noto come **metodo dei moltiplicatori di Lagrange**.

Iniziamo cercando una condizione necessaria di primo ordine affinché un punto  $(x^*, y^*)$  sia un estremo. La condizione è, come per gli estremi liberi, espressa dal teorema di Fermat, che indica che in punto di estremo il gradiente deve annullarsi. Infatti il teorema di Fermat afferma che in un punto critico tutte le derivate devono annullarsi: sia  $(x^*, y^*)$  un punto critico per  $f$  e sia  $g(x, y) = b$  un vincolo regolare per le variabili indipendenti, lungo che direzione mi muovo in un intorno infinitesimale di  $(x^*, y^*)$ ? La risposta è lungo il versore  $\hat{v}$  tangente a  $g$  in  $(x^*, y^*)$ . Per questo motivo, ci interessa che la derivata direzionale di  $f$  nella direzione  $\hat{v}$  dovrà annullarsi, ossia:

$$D_v f(x^*, y^*) = 0$$

Per la formula del gradiente possiamo scrivere che:

$$\nabla f(x^*, y^*) \cdot \hat{\nu} = 0$$

Che geometricamente indica la perpendicolarità tra il vettore gradiente e il versore  $\hat{\nu}$ . Formalizziamo enunciando il teorema:

**Teorema 1.14** (***moltiplicatori di Lagrange***) Siano  $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$  e  $(x^*, y^*)$  un punto di estremo vincolato per  $f$  sotto il vincolo:

$$g(x, y) = b$$

Se  $(x^*, y^*)$  è regolare per il vincolo, ossia  $\nabla g(x^*, y^*) \neq (0, 0)$ , allora esiste  $\lambda^* \in \mathbb{R}$  (detto ***moltiplicatore di Lagrange***) tale che:

$$\nabla f(x^*, y^*) = \lambda^* \nabla g(x^*, y^*)$$

Se quindi il punto  $(x^*, y^*)$  soddisfa le ipotesi del teorema, allora la derivata di  $f$  lungo la tangente al vincolo si deve annullare e in tal caso diremo che  $(x^*, y^*)$  è un **punto critico vincolato**. Facciamo un'osservazione: introducendo la funzione  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, \lambda)$ , detta **Lagrangiana**, definita da:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - b]$$

Il teorema afferma che se  $(x^*, y^*)$  è un estremo vincolato, allora esiste  $\lambda^*$  tale che  $(x^*, y^*, \lambda^*)$  sia un punto critico libero di  $\mathcal{L}$ . Infatti, i punti critici di  $\mathcal{L}$  sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = f_x - \lambda g_x = 0 \\ \mathcal{L}_y = f_y - \lambda g_y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = b - g = 0 \end{cases}$$

Notiamo infatti che le prime due equazioni del sistema equivalgono all'equazione  $\nabla f(x^*, y^*) = \lambda^* \nabla g(x^*, y^*)$  mentre la terza esprime la condizione del vincolo.

Detto ciò, introduciamo quindi il metodo da seguire, noto appunto come metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

- 1) Si isolano gli eventuali punti non regolari dell'insieme  $g(x, y) = b$ , che vanno esaminati a parte
- 2) Si cercano i punti critici liberi della Lagrangiana e cioè le soluzioni del sistema scritto sopra
- 3) Si determina la natura dei punti critici. Si utilizza spesso il teorema di Weierstrass, come si vede nel seguente esempio.

### Esempio 1.20.

Proviamo a determinare gli estremi della funzione  $f(x, y) = xy$ , soggetti al vincolo:

$$g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$$

Le funzioni  $f$  e  $g$  sono di classe  $C^2(\mathbb{R}^2)$  e non vi sono punti singolari in  $g(x, y) = 0$ . La Lagrangiana è:

$$f(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 - xy + y^2 - 1)$$

I punti critici della Lagrangiana sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y - \lambda(2x - y) = 0 \\ x - \lambda(-y + 2y) = 0 \\ -(x^2 - xy + y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Ossia:

$$(1, 1, 1), \quad (-1, -1, 1), \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1, -1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-1, 1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

I quattro punti critici vincolati sono quindi  $p_0 = (1, 1)$ ,  $p_1 = (-1, -1)$ ,  $p_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1)$ ,  $p_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1)$ .

Ora, essendo  $E_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$  un insieme chiuso e limitato, il teorema di Weierstrass ci garantisce l'esistenza di un punto di massimo e un punto di minimo. Sostituendo otteniamo che:

$$\begin{aligned} f(p_0) &= f(p_1) = 1 \\ f(p_2) &= f(p_3) = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Da cui ricaviamo che  $p_0$  e  $p_1$  sono punti di massimo globale per  $E_0$  e  $p_2$  e  $p_3$  sono punti di minimo globale per  $E_0$ .

Osserviamo che nei punti critici vincolati valendo l'equazione:

$$\nabla f(x^*, y^*) = \lambda^* \nabla g(x^*, y^*)$$

e in cui  $\lambda^* \neq 0$ , i due gradienti risultano essere paralleli. Poiché  $g(x, y) = b$  può essere interpretata come una curva di livello, in ogni punto essa sarà perpendicolare al suo gradiente. Questo significa che disegnando le curve di livello della funzione ai livelli dei punti critici, essi risulteranno essere tangenti al vincolo.

Se invece  $\lambda^* = 0$ , allora  $\nabla f(x^*, y^*) = 0$ . In questo caso quindi, il punto  $(x^*, y^*)$  risulta essere un punto critico per  $f$ .

## 1.7.2. Metodo delle restrizioni

E' inoltre possibile procedere in un altro modo. Consideriamo una curva piana regolare  $r: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  e sia  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$ . Se vogliamo trovare un punto  $(x^*, y^*)$  di estremo

vincolato alla curva  $r$  consideriamo sempre il vettore  $\hat{v}$  tangente alla curva nel punto, e scriviamo:

$$D_v f(r(t)) = 0 \quad \text{con } t \in I$$

Poiché la curva  $r$  è regolare, sappiamo che la sua derivata  $r'(t)$  sarà tangente alla stessa, quindi la condizione sopra scritta equivale a:

$$\nabla f(r(t)) \cdot r'(t) = 0 \quad \text{con } t \in I$$

Trovate le soluzioni di questa equazione, avremo quindi trovato i punti critici sul vincolo  $r$ . Il significato geometrico di questa formula è che in un punto critico,  $\nabla f(r(t)) \perp r'(t)$ , ossia che il vettore tangente alla curva è perpendicolare al gradiente di  $f$  (e pertanto tangente alla curva di livello di  $f$ ). Per comprendere meglio, consideriamo il seguente esempio:

### Esempio 1.21.

Proviamo a determinare gli estremi della funzione  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$ , soggetti al vincolo:

$$y = x^2$$

Scriviamo quindi:

$$f(x, x^2) = x^4 - x^2$$

Si tratta ora di trovare i punti critici di trattando questa come una funzione a una variabile. Calcoliamo la derivata prima e cerchiam dove si annulla:

$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ora calcoliamo la derivata seconda per caratterizzare i punti:

$$f''(x) = 12x^2 - 2$$

Da cui troviamo che  $x_1$  è un punto di massimo relativo ( $f''(x_0) < 0$ ) e che  $x_{2,3}$  sono punti di minimo relativo ( $f(x_{2,3}) > 0$ ). Notiamo inoltre che poiché per  $x \rightarrow \pm\infty$   $f(x) \rightarrow \infty$   $x_1$  è un punto di massimo relativo, mentre  $x_{2,3}$  sono minimi assoluti.

## 2. Equazioni differenziali

Si dice **equazione differenziale di ordine  $n$**  un'equazione del tipo:

$$f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

con  $n \geq 1$ . In questo tipo di equazioni  $y(t)$  viene detta **funzione incognita**. L'ordine dell'equazione è l'ordine massimo di derivazione che compare nell'equazione. Si dirà **soluzione** (o **curva**) **integrale** dell'equazione nell'intervallo  $I \subset \mathbb{R}$ , una funzione  $\varphi(t)$ , definita almeno in  $I$  e a valori reali, per cui risulti:

$$(t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0 \quad \forall t \in I$$

Infine, chiameremo **integrale generale** dell'equazione una formula che rappresenti la famiglia di tutte le soluzioni dell'equazione, eventualmente al variare di uno o più parametri in essa contenuti.

### Esempio 2.1.

Un modello classico di applicazione delle equazioni differenziali è il **modello di Malthus per la dinamica delle popolazioni**: consideriamo una popolazione i cui unici fattori di evoluzione sono fertilità e mortalità.

Indicheremo con  $N(t)$  il numero di individui al tempo  $t$ , con  $\lambda$  (rispettivamente con  $\mu$ ) il numero di nuovi nati (rispettivamente dei morti) per individuo nell'unità di tempo. In un intervallo di tempo  $h$ , quindi, il numero di nuovi nati e di morti sarà rispettivamente  $\lambda h N(t)$  e  $\mu h N(t)$ . Nell'intervallo  $h$ , quindi, la variazione del numero di individui in rapporto all'intervallo di tempo  $h$  sarà data dalla formula:

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = (\lambda - \mu)N(t)$$

Assumendo che la formula si valida per ogni  $h$ , la variazione per  $h \rightarrow 0$  sarà (ammesso che  $N(t)$  sia derivabile):

$$N'(t) = (\lambda - \mu)N(t)$$

Nel modello di Malthus,  $\varepsilon = (\lambda - \mu)$  viene detto *potenziale biologico*. Vedremo che quest'equazione ha infinite soluzioni nella forma:

$$N(t) = ce^{\varepsilon t}$$

Dove  $c$  è una qualsiasi costante reale. Se si conosce il numero di individui presenti in un dato istante, per esempio  $N(0) = N_0$ , potremo selezionare l'unica soluzione che soddisfa questa condizione:

$$N(t) = N_0 e^{\varepsilon t}$$

Ciò ci permetterà di sapere in ogni istante  $t \in \mathbb{R}$  il numero di individui presenti nella popolazione, la quale si estinguerà per  $t \rightarrow \infty$  se  $\varepsilon < 0$ , mentre crescerà all'infinito nel caso in cui  $\varepsilon > 0$ .

Vediamo ora i tipo di equazioni differenziali:

## 2.1. Equazioni del primo ordine

Consideriamo ora equazioni del tipo:

$$f(t, y, y') = 0$$

Ad esempio, la ricerca delle primitive di una funzione  $f$  continua su  $I$  equivale a risolvere l'equazione:

$$y'(t) = f(t)$$

Che ha infinite soluzioni del tipo:

$$y(t) = \int f(t) dt + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Questa famiglia di soluzioni prende il nome di *integrale generale* dell'equazione. Se aggiungiamo una condizione supplementare:

$$y(t_0) = y_0$$

possiamo selezionare una *soluzione particolare*. Il problema rappresentato dal sistema:

$$\begin{cases} f(t, y, y') = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Prende il nome di **problema di Cauchy**. Quando l'equazione si presenta nella forma:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

si dice che è in **forma normale**. Per equazioni di questo tipo, esistono ipotesi che permettono di assicurare l'esistenza di un'unica soluzione, almeno localmente, cioè per valori di  $t$  in un intorno del punto  $t_0$  in cui è assegnata la condizione iniziale. Si noti che le soluzioni espresse dall'integrale generale possono essere definite su insiemi più

complicati di un intervallo. Tuttavia, quando si parla di problema di Cauchy, si intende sempre che:

- 1) La soluzione è definita su un intervallo  $I$  che contiene il punto  $t_0$  in cui è assegnata la condizione iniziale
- 2) È derivabile in tutto  $I$  e soddisfa l'equazione in tutto  $I$

### 2.1.1. Condizioni di esistenza e unicità

Abbiamo precedentemente menzionato delle ipotesi sotto le quali è possibile determinare l'esistenza e unicità della soluzione. Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

dove  $f$  è una funzione di due variabili che soddisfa opportune proprietà. Risolvere il problema significa trovare un intorno  $U$  di  $t_0$  e una funzione  $y \in C^1(I)$  tale che:

$$t_0 \in U, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in U$$

Il problema è quindi stabilire se l'intervallo  $I$  esiste e se in tale intervallo la soluzione esiste (e magari è unica). Introduciamo quindi due teoremi:

**Teorema 2.1**     *(di Peano) Sia  $f(t, y)$  una funzione a due variabili. Se esiste un aperto  $\Omega \ni (t_0, y_0)$  tale che  $f \in C^0(\Omega)$  allora il problema di Cauchy ammette soluzione.*

Se quindi la funzione  $f(t, y)$  è continua e derivabile in un aperto contenente  $(t_0, y_0)$ , allora il problema di Cauchy ammette sicuramente soluzione, che però potrebbe non essere unica. Aumentando le ipotesi:

**Teorema 2.2**     *(di Cauchy- Lipschitz) Sia  $f(t, y)$  una funzione a due variabili. Se esiste un aperto  $\Omega \ni (t_0, y_0)$  tale che  $f, f_y \in C^0(\Omega)$  allora esiste un'unica soluzione del problema di Cauchy.*

Il teorema può inoltre essere esteso per equazioni con  $f_y$  non continuo ma limitata in  $\Omega$ . In altre parole, se la derivata rispetto a  $y$  non è continua ma è limitata nell'aperto  $\Omega$ , si ha comunque esistenza ed unicità (per esempio  $f(t, y) = |y|$ ).

Una conseguenza immediata del teorema di Cauchy è che le soluzioni di un'equazione  $y' = f(t, y)$  che ha esistenza e unicità in un intervallo  $I$  non possono intersecarsi in  $I$ . Se due soluzioni di tale problema esistono in  $I$ , allora  $y_1 \equiv y_2$  su tutto  $I$ .

Ciò risulta particolarmente utile in alcune dimostrazioni, ad esempio che la funzione esponenziale è sempre positiva. Si prenda l'equazione:



$$y' = y$$

Che ha integrale generale:

$$y(t) = ce^t$$

Osserviamo che  $y(t) = 0$  è soluzione per il problema, e che la funzione  $f(t, y) = y$  e  $f_y(t, y) = 1$  sono di classe  $C^0(\mathbb{R}^2)$ . Per il teorema di Cauchy in tutto  $\mathbb{R}$  nessuna soluzione dell'equazione  $y(t) = ce^t$  potrà intersecare  $y(t) = 0$ . Se quindi consideriamo la funzione esponenziale:

$$y(t) = e^t$$

Che assume valore positivo in  $t = 0$ , poiché continua, non avrà mai valore negativo. Se così fosse, per il teorema degli zeri essa dovrebbe intersecare  $y(t) = 0$ .

Osserviamo che trovare la soluzione di un problema di Cauchy con soluzione unica equivale a risolvere l'equazione integrale:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

E' facile verificare che le soluzioni di questa equazione sono tutte e sole le soluzioni del problema a essa associato. Chiamiamo questa funzione:

$$T(y(t)) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

Ricorsivamente, è possibile dimostrare che quest'equazione ammette un'unica soluzione. Proviamo ora a riscrivere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = 2ty \\ y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow T(y(t)) = 1 + 2 \int_0^t \tau y(\tau) d\tau$$

Scegliamo una funzione "a caso"  $y^0$  (è possibile dimostrare che la scelta di  $y^0$  non influisce sul risultato). Solitamente si considera  $y^0(t) = y_0$  e scriviamo in modo ricorsivo:

$$\begin{aligned} y^0(t) &= 1 \\ y^1(t) &= T(y^0(t)) \\ y^2(t) &= T(y^1(t)) \\ &\vdots \\ y^n(t) &= T(y^{n-1}(t)) \end{aligned}$$

Ricaviamo che:

$$y^1(t) = 1 + t^2, \quad y^2(t) = 1 + t^2 + \frac{t^4}{4}, \quad y^n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^{2k}}{k!}$$

Riconosciamo che il polinomio  $y^n$  è il polinomio di Taylor di grado  $2n$  della funzione  $e^{t^2}$ . Per  $n \rightarrow \infty$  abbiamo quindi che  $y^n(t) \rightarrow e^{t^2}$ , che è la soluzione del problema di Cauchy.

## 2.1.2. Equazioni a variabili separabili

Chiamiamo equazioni a variabili separabili equazioni del tipo:

$$y' = a(t)b(y) \quad (1)$$

con  $a$  continua in  $I \subset \mathbb{R}$  e  $b$  continua in  $J \subset \mathbb{R}$ .

Osserviamo che se esiste un  $\bar{y} \in \mathbb{R}$  tale che  $b(\bar{y}) = 0$  allora  $y(t) = \bar{y}$  è una soluzione costante dell'equazione (1). Infatti, in tal caso,  $a(t)b(\bar{y}) = 0$  e  $y' = D(\bar{y}) = 0$  (derivata di una funzione costante è nulla). Invece, nel caso in cui  $b(y) \neq 0$  possiamo scrivere:

$$\frac{y'}{b(y)} = a(t)$$

Quindi possiamo trovare un'ipotetica soluzione  $y(t)$  scrivendo:

$$\frac{y'(t)}{b(y(t))} = a(t)$$

E' sufficiente quindi integrare a destra e a sinistra ottenendo:

$$\int \frac{y'(t)}{b(y(t))} dt = \int a(t) dt + c$$

Possiamo procedere con un cambio di variabile  $y = y(t)$ ,  $dy = y'(t)dt$ , da cui:

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(t) dt + c$$

Con  $c$  costante arbitraria. In generale, se  $A(t)$  e  $B(y)$  sono primitive di rispettivamente  $a(t)$  e  $\frac{1}{b(y)}$  possiamo scrivere:

$$B(y) = A(t) + c$$

Inoltre, se è possibile ricavare  $y$  dall'ultima equazione (ossia se  $B(y)$  è invertibile), si ottiene:

$$y = B^{-1}(A(t) + c)$$

Ossia un'espressione del tipo:

$$y = F(t, c)$$

In cui  $c$  è una costante arbitraria che può essere di qualsiasi forma (anche non additiva). Per le equazioni a variabili separabili vale il seguente risultato di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy:

**Teorema 2.3** *(problema di Cauchy per un'equazione a variabili separabili)*  
Si consideri un problema di Cauchy del tipo:

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)b(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Possiamo dire che:

- Se  $a$  è una funzione continua in un intorno  $I$  di  $t_0$  e  $b$  è una funzione continua in un intorno  $J$  di  $y_0$ , allora il problema di Cauchy ammette soluzione
- Se inoltre  $b \in C^1(J)$ , o più in generale  $b$  è una funzione continua (eventualmente non derivabile ma con rapporto incrementale limitato in  $J$ ), allora tale soluzione è unica

Vediamo qualche esempio:

### Esempio 2.2.

Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Abbiamo  $a(t) = 1$ ,  $b(y) = \frac{1}{y}$ . L'equazione si risolve scrivendo:

$$\begin{aligned} y'y &= 1 \\ \int \frac{dy}{dt} y &= \int 1 \\ \int y dy &= \int dt \\ \frac{y^2}{2} &= t + c \end{aligned}$$

Da cui ricaviamo:

$$y = \pm \sqrt{2(t + c)}$$

Notiamo però che  $y(0) = 2$  ci dice che dobbiamo considerare solo  $y \in [0, +\infty)$ , per cui:

$$y = \sqrt{2(t + c)}$$

Imponendo la condizione otteniamo:

$$2 = \sqrt{2(0+c)}$$

$$c = 2$$

Da cui la soluzione:

$$y = \sqrt{2(t+2)}$$

Definita nell'intervallo  $t \geq -2$ . In questo intervallo abbiamo che:

-  $a(t) = 1$  è continua nell'intervallo  $t \in [0, +\infty)$

-  $b(y) = \frac{1}{y}$  è continua nell'intervallo  $y \in (0, +\infty)$

In questo aperto, quindi, il problema di Cauchy ha una e una sola soluzione, che è quella trovata precedentemente. Se invece consideriamo il punto  $t_0 = -2$ , dove  $y(t_0) = 0$ , la funzione  $f(y, t)$  non è continua, pertanto dobbiamo verificare cosa succede. Se sostituiamo nel sistema otteniamo:

$$\begin{cases} yy' = 1 \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

Sostituendo la seconda nella prima si ottiene  $0 = 1$ . Concludiamo che per  $t_0 = -2$  non vi è soluzione.

### Esempio 2.3.

Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2t\sqrt{1-y^2} \\ y(\sqrt{\pi}) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Abbiamo che  $a(t) = 2t$  e  $b(y) = \sqrt{1-y^2}$ . Poiché vale che:

$$b = (1) = b(-1) = 0$$

Le rette  $y = \pm 1$  sono soluzioni dell'equazione. Per cercare le altre procediamo in questo modo:

$$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 2t$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int 2t dt$$

$$\arcsin(y) = t^2 + c$$

La funzione  $\arcsin(y)$  è definita nell'intervallo  $-1 \leq y \leq 1$ , nel quale possiamo scrivere:

$$y = \sin(t^2 + c)$$

Per  $-\frac{\pi}{2} \leq t^2 + c \leq \frac{\pi}{2}$ . Possiamo quindi imporre la condizione ottenendo:

$$\begin{aligned}\sin(\pi^2 + c) &= \frac{1}{2} \\ \pi^2 + c &= \frac{\pi}{6} + k\pi\end{aligned}$$

Poiché  $-\frac{\pi}{2} \leq \pi^2 + c \leq \frac{\pi}{2}$  abbiamo che:

$$\begin{aligned}c &= -\frac{5\pi}{6} \\ y &= \sin\left(t^2 - \frac{5\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

Con  $-\frac{\pi}{2} \leq t^2 - \frac{5\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$ , ossia  $\frac{\pi}{3} \leq t^2 \leq \frac{4}{3}\pi$ , quindi:

$$\sqrt{\frac{\pi}{3}} \leq t \leq \sqrt{\frac{4}{3}\pi} \quad \text{oppure} \quad -\sqrt{\frac{4}{3}\pi} \leq t \leq -\sqrt{\frac{\pi}{3}}$$

Poiché la soluzione del problema di Cauchy deve essere definita in un intervallo che contiene il punto  $t_0 = \sqrt{\pi}$ . In definitiva la soluzione è:

$$y = \sin\left(t^2 - \frac{5\pi}{6}\right) \quad \text{per} \quad \sqrt{\frac{\pi}{3}} \leq t \leq \sqrt{\frac{4}{3}\pi}$$

### *Equazioni differenziali autonome*

Chiamiamo **equazioni differenziali autonome** le equazioni differenziali a variabili separabili che non dipendono esplicitamente da  $t$ :

$$y' = b(y)$$

Notiamo che:

- Se  $b(y) = 0$  l'equazione ammette solo soluzioni costanti. Nel caso di problema di Cauchy con condizione:

$$y(t_0) = y_0$$

Esso avrà un'unica soluzione  $y = y_0$

- Se  $b(y) \neq 0$  la tratto come una normale equazione differenziabile a variabili separabili

### **2.1.3. Equazioni lineari del primo ordine**

Chiamiamo **equazioni lineari del primo ordine** le equazioni differenziali del primo ordine che si possono scrivere nella forma:

$$a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t)$$

Se il coefficiente  $a_1(t)$  non si annulla, dividendo per  $a_1(t)$  si ottiene la **forma normale**:

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

Supporremo  $a$  e  $f$  continue sull'intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Se  $f = 0$  si dice che l'equazione è **omogenea**:

$$z'(t) + a(t)z(t) = 0$$

Nell'altro caso si dirà che l'equazione è **completa**. Introduciamo e dimostriamo un teorema fondamentale per risolvere le equazioni lineari di qualsiasi ordine:

**Teorema 2.4**     *(principio di sovrapposizione) L'integrale completo dell'equazione completa si ottiene aggiungendo all'integrale generale dell'omogenea una soluzione della completa*

### Dimostrazione 1.1

La dimostrazione di questo teorema è immediata: consideriamo un'equazione lineare generica  $L(y) = f$  che abbia una soluzione particolare:

$$\bar{y}: L(\bar{y}) = f$$

E una soluzione  $\tilde{y}$  che soddisfi l'equazione omogenea  $L(y) = 0$ :

$$\tilde{y}: L(\tilde{y}) = 0$$

Per la linearità possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} L(y) &= L(y) + 0 = f \\ \Rightarrow L(\bar{y}) + L(\tilde{y}) &= L(\bar{y} + \tilde{y}) = f \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che la somma di una soluzione particolare e di una soluzione dell'omogenea è soluzione dell'equazione. Se ora consideriamo una qualsiasi soluzione dell'equazione:

$$w: L(w) = f$$

Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} L(w - \bar{y}) &= L(w) - L(\bar{y}) = f - f = 0 \\ \Rightarrow L(w) &= L(\bar{y}) + 0 = L(\bar{y}) + L(\tilde{y}) \end{aligned}$$

### Derivata di un prodotto

Il metodo più semplice per risolvere questo tipo di equazioni è usando la derivata del prodotto. Sia  $A(t) = \int a(t)dt$  una qualunque primitiva di  $a(t)$ . Se moltiplichiamo i membri dell'equazione differenziale per  $e^{A(t)}$  otteniamo:

$$e^{A(t)}y'(t) + e^{A(t)}a(t)y(t) = e^{A(t)}f(t)$$

Riconosciamo che il primo membro dell'equazione è la derivata di un prodotto, scriviamo:

$$\frac{d}{dt}(e^{A(t)}y(t)) = e^{A(t)}f(t)$$

Integrando entrambi i membri dell'equazione otteniamo:

$$e^{A(t)}y(t) = \int e^{A(t)}f(t)dt + c$$

Da cui l'integrale generale:

$$y(t) = e^{-A(t)} \left[ c + \int e^{A(t)}f(t)dt \right]$$

Se si vogliono trovare le soluzioni delle equazioni lineari di ordine più alto, è necessario seguire il seguente metodo:

### *Soluzioni dell'equazione lineare omogenea*

Vediamo ora come trovare le soluzioni di un'equazione lineare omogenea:

$$z'(t) + a(t)z(t) = 0$$

Sia  $A(t)$  una primitiva di  $a(t)$  (ossia  $A'(t) = a(t)$ ). Moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione per  $e^{A(t)}$  ottenendo:

$$z'(t)e^{A(t)} + a(t)z(t)e^{A(t)} = 0$$

Notiamo che:

$$\begin{aligned} z'(t)e^{A(t)} + a(t)z(t)e^{A(t)} &= [z(t)e^{A(t)}]' \\ \Rightarrow [z(t)e^{A(t)}]' &= 0 \end{aligned}$$

Integrando a destra e sinistra si ottiene:

$$z(t)e^{A(t)} = c$$

Da cui, essendo  $A(t) = \int a(t)dt$ :

$$z(t) = ce^{-\int a(t)dt}$$

Questa scrittura (del tipo  $z = cz_0$ ) ci dice che lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea di primo grado è di dimensione 1. Vedremo più avanti che per le equazioni lineari del secondo ordine lo spazio delle soluzioni dell'omogenea ha dimensione 2.

*Soluzioni particolare dell'equazione lineare omogenea*

A volte è immediato arrivare alla soluzione dell'equazione particolare, negli altri casi si può seguire il seguente metodo, detto **metodo di variazione delle costanti**. La soluzione particolare viene cercata nella forma:

$$\bar{y}(t) = c(t)e^{-A(t)} \quad (1)$$

Con  $a(t)$  continua  $A'(t) = a(t)$ . Notiamo che  $c(t)$  non è più costante e va cercata in modo che  $\bar{y}(t)$  sia soluzione dell'equazione. Sostituendo questa soluzione nell'equazione si ottiene:

$$e^{-A(t)}(c'(t) - c(t)a(t)) + a(t)c(t)e^{-A(t)} = f(t)$$

Da cui:

$$e^{-A(t)}c'(t) = f(t)$$

$$c'(t) = f(t)e^{A(t)}$$

$$c(t) = \int f(t)e^{A(t)} dt$$

Quindi, sostituendo nella (1) e sommando la soluzione dell'equazione omogenea (**principio di sovrapposizione**) otteniamo:

$$\bar{y}(t) = e^{-A(t)} \left[ c + \int f(t)e^{A(t)} dt \right]$$

Notiamo che abbiamo ottenuto la stessa soluzione che abbiamo trovato tramite derivata del prodotto.

*Soluzione del problema di Cauchy*

La costante  $c$  viene determinata dalla condizione iniziale:

$$y(t_0) = y_0$$

Se scegliamo  $A(t)$  tale che  $A(t_0) = 0$  (ossia  $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds$ ) la soluzione del problema di Cauchy sarà:

$$y(t) = y_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t f(s)e^{A(s)} ds$$

**Teorema 2.5** *(problema di Cauchy per un'equazione lineare di primo ordine)* Siano  $a, f$  continue in un intervallo  $I \ni t_0$ . Allora per ogni  $y_0 \in \mathbb{R}$  il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Ha una e una sola soluzione  $y \in C^1(I)$ .



**Esempio 2.4.**

Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \frac{2y}{t} = \frac{1}{t^2} \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

Abbiamo quindi  $a(t) = \frac{2}{t}$  e  $f(t) = \frac{1}{t^2}$ . Notiamo che  $a(t)$  e  $f(t)$  sono continue negli intervalli:

$$t \in (-\infty, 0)$$

$$t \in (0, \infty)$$

Poiché la condizione di Cauchy è data in  $t_0 = -1$ , la soluzione dell'equazione esiste ed è unica nell'intervallo  $t \in (-\infty, 0)$  e viene trovata in questo modo:

$$y(t) = y_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t f(s) e^{A(s)} ds$$

Dove:

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

$$A(t) = \int_{-1}^t \frac{2ds}{s} = [2 \ln|s|]_{-1}^t = 2 \ln(-t)$$

Quindi:

$$y(t) = 2e^{-2 \ln(-t)} + e^{-2 \ln(-t)} \int_{-1}^t \frac{e^{2 \ln(-s)}}{s^2} ds = \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^2} [-t]_{-1}^t$$

Da cui la soluzione del problema:

$$y = \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^2}(t+1) \quad \text{per } t < 0$$

### 2.1.4. Equazioni di Bernoulli

Si chiamano **equazioni di Bernoulli** le equazioni differenziali di primo ordine di forma:

$$y' = P(t)y + Q(t)y^\alpha$$

Con  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0, 1$ . Supponiamo  $P, Q$  continue in un intervallo  $I \in \mathbb{R}$ :

- Se  $\alpha > 0$ ,  $y = 0$  è una soluzione dell'equazione
- Se  $y \neq 0$ , dividendo per  $y^\alpha$  otteniamo:

$$y^{-\alpha}y' = P(t)y^{1-\alpha} + Q(t)$$

Ponendo  $z = y^{1-\alpha}$  si ha:

$$z' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y'$$

E perciò  $z$  è soluzione dell'equazione lineare

$$z' = (1 - \alpha)P(t)z + (1 - \alpha)Q(t)$$

Possiamo quindi trovare  $z$ :

$$z = ce^{-A(t)} + (1 - \alpha)e^{-A(t)} \int Q(t)e^{A(t)} dt$$

Dove  $A(t) = (\alpha - 1) \int P(t)dt$ . Troviamo quindi che:

$$y(t) = z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Nel caso in cui  $1 - \alpha$  è un intero pari o un razionale con numeratore pari, è soluzione anche:

$$y(t) = -z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

## 2.1.5. Prolungabilità delle soluzioni di un problema di Cauchy

Esiste un modo di avere un'informazione aggiuntiva per determinare esistenza e unicità globale di una soluzione di un problema di Cauchy:

**Teorema 2.6**      **(di esistenza e unicità globale)** Siano  $f$  e  $f_y$  di classe  $C^0(\bar{S})$ , essendo  $\bar{S} = [a, b] \times \mathbb{R}$ . Inoltre, esistano due interi positivi  $h, k$  indipendenti da  $a, b$  per cui risulti:

$$|f(t, y)| \leq h + k|y| \quad \text{per ogni } (t, y) \in \bar{S}$$

Allora ogni soluzione dell'equazione è definita su tutto  $[a, b]$

Si noti che queste sono condizioni sufficienti ma non necessarie per l'esistenza e l'unicità per l'esistenza globale della soluzione del problema di Cauchy.

## 2.2. Equazioni lineari del secondo ordine

Occupiamoci ora di equazioni differenziali di ordine superiore al secondo. Innanzitutto, per comprendere a meglio i concetti, richiamiamo alcuni concetti di algebra lineare:

- Sia  $I$  un intervallo e consideriamo l'insieme di  $F_I$  di tutte le funzioni definite in  $I$  a valori reali. Prese due funzioni di  $F_I$ :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Possiamo quindi dire che  $F_I$  è uno spazio vettoriale

- Diciamo che una funzione è  $C^n(I)$  se tutte le sue derivate da 0 a  $n$ -esima (considerando  $f^0 = f$ ) sono continue in  $I$ . Per linearità dell'operatore derivata se  $f_1, f_2 \in C^1(I)$  allora:

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in C^1(I)$$

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)' = \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2'$$

Ricorsivamente si possono dimostrare queste proprietà per  $C^n(I)$ . Possiamo inoltre scrivere che:

$$C(I) \supset C^1(I) \supset C^2(I) \supset \dots \supset C^n(I) \supset \dots$$

## 2.2.1. Equazioni lineari di secondo ordine

Un'equazione lineare del secondo ordine è un'equazione del tipo:

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$$

Dove i coefficienti  $a_i$  e  $g(t)$  sono definiti e continui in un certo intervallo  $I$ . Se:

- $g(t)$  è identicamente nulla si parla di **equazione omogenea**, altrimenti di **equazione completa**.
- i coefficienti  $a_i$  sono costanti, si parla di **equazione lineare a coefficienti costanti**, in caso contrario di **equazione lineare a coefficienti variabili**
- il coefficiente  $a_2(t) \equiv 1$  l'equazione si dirà in **forma normale**

Diciamo che l'equazione è lineare perché indicando con  $Ly(t)$  il primo membro dell'equazione notiamo che l'operatore:

$$L: C^2(I) \mapsto C^0(I)$$

$$L: y \mapsto Ly$$

Risulta un operatore lineare tra questi spazi di funzione. Infatti, abbiamo che se  $y \in C^2(I)$  allora  $Ly \in C^0(I)$ : inoltre se  $y_1, y_2 \in C^2(I)$  e  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  si ha:

$$L(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 Ly_1 + \lambda_2 Ly_2$$

## 2.2.2. La struttura dell'integrale generale

Abbiamo quindi detto che un'equazione lineare del secondo ordine si può scrivere nella forma:

$$Ly = f$$

Dove  $L: C^2(I) \rightarrow C^0(I)$  è un operatore lineare. Diciamo che  $Ly = 0$  è l'**equazione omogenea** associata all'**equazione completa**  $Ly = f$ . La linearità di  $L$  permette di determinare la struttura dell'integrale generale:

**Teorema 2.7** *L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea  $Ly = 0$  in un intervallo  $I$  è uno spazio vettoriale (sottospazio di  $C^2(I)$ )*

Inoltre, è di fondamentale importanza il teorema seguente:

**Teorema 2.8** *Lo spazio vettoriale delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine ha dimensione 2*

In modo più esplicito:

- Data un'equazione lineare omogenea del secondo ordine essa avrà sempre due soluzioni  $z_1$  e  $z_2$  linearmente indipendenti ( $z_1/z_2$  non è costante in  $I$ )
- Ogni altra soluzione dell'omogenea è combinazione lineare di  $z_1$  e  $z_2$ . L'integrale generale dell'equazione lineare omogenea sarà quindi dato da:

$$c_1 z_1 + c_2 z_2$$

Con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Nonostante sia spesso facile stabilire l'indipendenza lineare delle due soluzioni, esiste un modo formale di stabilirlo:

**Teorema 2.9** *(determinante Wronskiano e indipendenza) Siano  $z_1, z_2$  due funzioni di  $C^2(I)$ , soluzioni dell'equazione lineare omogenea vista precedentemente nell'intervallo  $I$ . Allora esse sono linearmente indipendenti in  $C^2(I)$  se e solo se la seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{bmatrix}$$

*Detta **matrice Wronskiana** ha determinante diverso da zero per ogni  $t \in I$ . Inoltre, affinché questo accada è sufficiente che il determinante sia diverso da zero in un punto  $t_0 \in I$*

Il secondo punto del teorema ci dice in sostanza che il determinante del Wronskiano è o nullo in tutti i punti di  $I$ , o diverso da zero in ogni punto di  $I$ .

Determinate quindi due soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea associata, e una soluzione particolare della completa, per il **teorema di sovrapposizione** possiamo scrivere l'integrale generale di un'equazione lineare del secondo ordine:

$$y(t) = \bar{y}(t) + c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$$

con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

### 2.2.3. Equazioni a coefficienti costanti

Vediamo come risolvere questo tipo di equazioni:

#### *Equazioni omogenee*

Consideriamo un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti del secondo ordine:

$$z''(t) + az'(t) + bz(t) = 0$$

E cerchiamo soluzioni di tipo esponenziale  $z(t) = e^{\lambda t}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Sostituendo nell'equazione otteniamo:

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

Perché  $e^{\lambda t}$  sia soluzione dell'equazione deve valere che:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Chiamiamo quest'equazione **equazione caratteristica** dell'equazione differenziale. Dobbiamo ora distinguere tre casi secondo il valore del determinante:

1. Se  $\Delta > 0$  l'equazione caratteristica ha due radici reali distinte  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Le soluzioni dell'equazione differenziale saranno  $z_1(t) = e^{\lambda_1 t}$  e  $z_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ . L'integrale generale avrà quindi la forma:

$$z(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

2. Se  $\Delta < 0$  l'equazione caratteristica ha due radici complesse coniugate  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  e  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ). Le soluzioni dell'omogenea saranno:

$$z_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$$

$$z_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t)$$

Poiché è desiderabile che le soluzioni siano reali, ed essendo che ogni combinazione lineare di  $z_1$  e  $z_2$  è soluzione dell'equazione, possiamo scegliere le soluzioni:

$$\frac{1}{2}(z_1 + z_2) = e^{\alpha t} \cos \beta t$$

$$\frac{1}{2i}(z_1 - z_2) = e^{\alpha t} \sin \beta t$$

Da cui ricaviamo l'integrale generale:

$$z(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

Con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Oppure:

$$z(t) = e^{\alpha t} A \cos(\beta t + \varphi)$$

Con  $A, \varphi \in \mathbb{R}$ .

3. Se  $\Delta = 0$ , l'equazione caratteristica ha una radice reale (doppia)  $\lambda = -a/2$ . Quindi abbiamo che  $z_1(t) = e^{\lambda t}$ . Per trovare l'altra usiamo il metodo di variazione delle costanti cercando la soluzione nella forma  $z(t) = e^{\lambda_{1,2}t}c(t)$ :

$$z'(t) = e^{\lambda t}(\lambda c(t) + c'(t))$$

$$z''(t) = e^{\lambda t}(\lambda^2 c(t) + 2\lambda c'(t) + c''(t))$$

Sostituendo nell'equazione omogenea abbiamo:

$$e^{\lambda t}[(\lambda^2 + a\lambda + b)c(t) + (2\lambda + a)c'(t) + c''(t)] = 0$$

Si ottiene che  $c''(t) = 0$  (gli altri due addendi all'interno della quadra sono nulli).

Quindi  $c(t) = c_2 t + c_1$ . L'integrale generale avrà quindi la forma:

$$z(t) = e^{-\frac{a}{2}t}(c_1 + c_2 t)$$

E' possibile verificare l'indipendenza lineare delle soluzioni tramite l'utilizzo del Wronskiano. Riassumendo abbiamo quindi che l'integrale generale dell'omogenea di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti è:

$$\begin{array}{ll} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{se } \Delta > 0 \\ e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) & \text{se } \Delta < 0 \\ e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t) & \text{se } \Delta = 0 \end{array}$$

Vediamo ora un esempio:

### Esempio 2.5.

Consideriamo il problema di Cauchy seguente:

$$\begin{cases} z'' + 2z' + 3z = 0 \\ z(0) = 1 \\ z'(0) = 2 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica è la seguente:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

Che ha  $\Delta = -8 < 0$ . Le soluzioni sono:

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2}$$

Da cui ricaviamo  $\alpha = -1$  e  $\beta = \sqrt{2}$ . Possiamo quindi scrivere l'integrale generale:

$$z(t) = e^{-t}(c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t))$$

Dalle condizioni ricaviamo che:

$$z(0) = 1 \rightarrow c_1 = 1$$

$$z'(t) = \sqrt{2}e^{-t}(-\sin(\sqrt{2}t) + c_2 \cos(\sqrt{2}t)) - e^{-t}(\cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t))$$

$$z'(0) = 2 \rightarrow -1 + \sqrt{2}c_2 = 2$$

Quindi:

$$c_1 = 1 \quad c_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi:

$$z(t) = e^{-t} \left( \cos(\sqrt{2}t) + \frac{3}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) \right)$$

### Equazioni non omogenee

Determinate quindi le soluzioni delle omogenee, studiamo ora le equazioni lineare ordinarie del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$$

Con  $a, b \in \mathbb{R}$ . La funzione  $f(t)$  viene detta **forzante**. In alcuni casi particolari possiamo usare il *metodo di somiglianza*, che semplifica notevolmente i calcoli. Negli altri, useremo il metodo di variazione delle costanti. Partiamo dal primo menzionato:

#### Metodo di somiglianza

Quando  $f(t)$  ha un aspetto particolarmente semplice, esistono dei metodi semplici per la ricerca della soluzione:

- Se  $f(t)$  è un polinomio di grado  $r$  ( $f(t) = p_r(t)$ ) cercheremo delle soluzioni polinomiali di questa forma:

$$\begin{aligned} y(t) &= q_r(t) & \text{se } a \neq 0 \text{ e } b \neq 0 \\ y(t) &= tq_r(t) & \text{se } a \neq 0 \text{ e } b = 0 \\ y(t) &= t^2q_r(t) & \text{se } a = 0 \text{ e } b = 0 \end{aligned}$$

Dove  $q_r(t)$  è un generico polinomio di grado  $r$  di cui dobbiamo determinare i coefficienti. Ciò viene fatto sostituendo una delle tre soluzioni scritte sopra (a seconda del caso) nell'equazione. Vedremo poi un esempio.

- Se  $f(t)$  ha forma esponenziale ( $f(t) = Ae^{\lambda t}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ) cercheremo delle soluzioni esponenziali. Bisogna quindi trovare una  $\gamma(t)$  che soddisfi quest'equazione:
  - o Se  $\lambda$  non è soluzione della caratteristica, avremo che  $\gamma(t) = 1$ , quindi:
 
$$y(t) = Ae^{\lambda t}$$
  - o Se  $\lambda$  è soluzione singola della caratteristica, avremo che  $\gamma(t) = t$ , quindi:
 
$$y(t) = Ate^{\lambda t}$$
  - o Se  $\lambda$  è soluzione doppia caratteristica, avremo che  $\gamma(t) = t^2$ , quindi:
 
$$y(t) = At^2e^{\lambda t}$$

Per determinare  $A$  è sufficiente sostituire nell'equazione. Vedremo poi un esempio.

- Se  $f(t)$  è una funzione del tipo  $f(t) = e^{(\alpha + \beta i)t}$  o  $f(t) = e^{\alpha t}(A \cos \beta t + B \sin \beta t)$  con  $A, B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , dovremo cercare una soluzione del tipo:

- Se  $\lambda = \alpha \pm \beta i$  non sono soluzioni della caratteristica

$$y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

- Se  $\lambda = \alpha \pm \beta i$  sono soluzioni della caratteristica

$$y(t) = te^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

Per determinare  $c_1, c_2$  è sufficiente sostituire nell'equazione.

Altri casi in cui si possono usare questi metodo riguardano combinazioni lineari (o eventualmente polinomi per esponenziali reali o complessi) dei tipo di restringente visti sopra. In caso contrario è necessario utilizzare il metodo di variazione delle costanti. Vediamo ora caso per caso alcuni esempi:

### Esempio 2.6.

Consideriamo l'equazione:

$$y'' + 2y' + 3y = 2e^{3t}$$

Risolviamo prima di tutto l'omogenea:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2}$$

$$\bar{y}(t) = e^{-t}(c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t))$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare. Notiamo che  $\lambda_{1,2} \neq 3$ , quindi la nostra soluzione sarà del tipo:

$$\tilde{y}(t) = Ae^{3t}$$

Sostituendo abbiamo:

$$Ae^{3x}(9 + 2 \cdot 3 + 3) = 18Ae^{3t} = 2e^{3t}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{9}$$

Da cui l'integrale generale:

$$y(t) = e^{-t}(c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t)) + \frac{1}{9}e^{3t}$$

### Esempio 2.7.

Consideriamo l'equazione:

$$y'' + 2y' + 3y = 2e^{-3t}$$

Risolviamo prima di tutto l'omogenea:

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_1 = -3$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\bar{y}(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^t$$



Notiamo che poiché l'esponente di  $f(t)$  è soluzione singola della caratteristica, cercheremo una soluzione particolare del tipo:

$$\tilde{y}(t) = Ate^{-3t}$$

Sostituendo otteniamo:

$$\begin{aligned} -4Ae^{-3t} &= 2e^{-3t} \\ \Rightarrow A &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

L'integrale generale è quindi:

$$y(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^t - \frac{t}{2}e^{-3t}$$

### Esempio 2.8.

Consideriamo l'equazione:

$$y'' + 2y' + y = 2e^t \cos 3t$$

Iniziamo a risolvere l'omogenea:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\lambda + 1 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= -1 \\ \bar{y}(t) &= e^{-t}(c_1 + c_2t) \end{aligned}$$

Prima di trovare una soluzione particolare, notiamo che  $f(t)$  è della forma:

$$e^{\alpha t}(A \cos \beta t + B \sin \beta t)$$

Con  $A = 2$ ,  $B = 0$ ,  $\alpha = 1$  e  $\beta = 3$ . Notiamo che  $\lambda = 1 \pm 3i$  non sono soluzioni della caratteristica e quindi cercheremo una soluzione del tipo:

$$\tilde{y}(t) = e^t(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \tilde{y}'(t) &= e^t(3c_2 \cos 3t - 3c_1 \sin 3t) + e^t(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t) \\ \tilde{y}''(t) &= -2e^t(c_1(3 \sin 3t + 4 \cos 3t) + c_2(4 \sin 3t - 3 \cos 3t)) \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione otteniamo:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{10}{169} \\ c_2 &= \frac{24}{169} \end{aligned}$$

Da cui possiamo successivamente scrivere l'integrale generale.

### Esempio 2.9.

Risolviamo l'equazione:

$$y'' + 3y = t + 2 \cos t$$

Risolviamo prima l'omogenea:

$$\lambda^2 + 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$$

$$\bar{y}(t) = c_1 \cos \sqrt{3}t + c_2 \sin \sqrt{3}t$$

La restrigente è somma di un polinomio e una funzione trigonometrica. Per linearità possiamo trattare quest'equazione come due equazioni distinte. Iniziando dalla prima abbiamo:

$$y'' + 3y = t$$

Cerchiamo una soluzione di tipo  $\tilde{y}_1(t) = at + b$ . Sostituendo otteniamo:

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = 0$$

$$\tilde{y}_1 = \frac{t}{3}$$

La seconda è del tipo:

$$y'' + 3y = 2 \cos t$$

Che ha come soluzione:

$$\tilde{y}_2(t) = \cos t$$

Dunque, la soluzione particolare dell'equazione di partenza non è altro che la somma delle due soluzioni particolari trovate:

$$\tilde{y} = \frac{t}{3} + \cos t$$

### *Metodo di variazione delle costanti*

Vediamo ora un metodo con validità generale che consente di determinare una soluzione particolare dell'equazione completa che ha validità generale indipendente dalla forma della restrigente  $f(t)$ . Questo metodo è valido **se si conoscono già due soluzioni indipendenti dell'omogenea**. Questo metodo è di particolare utilità quando non vi sono metodi generali per determinare due soluzioni indipendenti dell'omogenea.

Siano  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  due soluzioni indipendenti dell'omogenea associata. Cerchiamo quindi una soluzione del tipo:

$$\bar{y}(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$$

Si noti che  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  sono note, mentre  $c_1(t)$  e  $c_2(t)$  vanno cercate in modo che  $\bar{y}(t)$  soddisfi l'equazione:

$$y'' + ay' + by = f(t) \text{ in } I$$

Poiché le incognite sono due, dovremo cercare una seconda condizione. Iniziamo risolvendo l'equazione:

$$\bar{y}' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2'$$

Scegliamo di imporre:

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

Da cui:

$$\bar{y}'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2''$$

Sostituendo le due equazioni trovate in quella iniziale otteniamo:

$$\begin{aligned} (c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2'') + a(c_1 y_1' + c_2 y_2') + b(c_1 y_1 + c_2 y_2) &= f \\ \Rightarrow c_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + c_2(y_2'' + ay_2' + by_2) + (c_1' y_1' + c_2' y_2') &= f \end{aligned}$$

Poiché  $y_1$  e  $y_2$  sono soluzione dell'omogenea, quest'equazione si riduce a:

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = f$$

Otteniamo quindi un sistema lineare di due equazioni nelle incognite  $c_1'$  e  $c_2'$ :

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f \end{cases}$$

Notiamo che la matrice dei coefficienti è la matrice Wronskiana delle soluzioni  $y_1$  e  $y_2$ .

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Poiché per ipotesi queste sono soluzioni linearmente indipendenti, per il [TEOREMA 2.9](#) il determinante di questa matrice è diverso da 0 per ogni  $t \in I$ . Ciò vuol dire che il sistema può essere risolto scrivendo:

$$c_1' = \frac{-y_2 f}{y_2' y_1 - y_2 y_1'} \quad c_2' = \frac{y_1 f}{y_2' y_1 - y_2 y_1'}$$

Notiamo che i denominatori sono non nulli (determinante del Wronskiano) e che  $f$  è continua e  $y_1$  e  $y_2$  derivabili con continuità. E' quindi possibile trovare  $c_1(t)$  e  $c_2(t)$  particolari ottenendo quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea. Sostituendo invece le primitive generiche di  $c_1'$  e  $c_2'$  otteniamo l'integrale generale della completa:

$$y(t) = \bar{y}(t) + k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$$

**Esempio 2.10.**

Proviamo a scrivere l'integrale generale di:

$$y'' + \omega^2 y = f(t)$$

Qualunque sia  $f(t)$ . Procediamo come abbiamo appena visto. Troviamo due soluzioni dell'omogenea:

$$\begin{aligned} y'' + \omega^2 y &= 0 \\ y'' &= -\omega^2 y \end{aligned}$$

Notiamo che le soluzioni sono:

$$y_1(t) = \cos \omega t \quad y_2(t) = \sin \omega t$$

Ora scriviamo il sistema:

$$\begin{cases} c_1' \cos \omega t + c_2' \sin \omega t = 0 \\ -c_1' \omega \sin \omega t + c_2' \omega \cos \omega t = f(t) \end{cases}$$

Ottenendo quindi:

$$\begin{cases} c_1' = -\frac{f(t) \sin \omega t}{\omega \cos^2 \omega t + \omega \sin^2 \omega t} \\ c_2' = \frac{f(t) \cos \omega t}{\omega \cos^2 \omega t + \omega \sin^2 \omega t} \\ c_1' = -\frac{1}{\omega} f(t) \sin \omega t \\ c_2' = \frac{1}{\omega} f(t) \cos \omega t \end{cases}$$

Troviamo ora  $c_1$  e  $c_2$ :

$$c_1 = k_1 + \int -\frac{1}{\omega} f(t) \sin \omega t \quad c_2 = k_2 + \int \frac{1}{\omega} f(t) \cos \omega t$$

Possiamo quindi trovare l'integrale generale dell'omogenea e poi quello della completa:

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= \cos \omega t \int -\frac{1}{\omega} f(t) \sin \omega t + \sin \omega t \int \frac{1}{\omega} f(t) \cos \omega t \\ y(t) &= \bar{y}(t) + k_1 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t \end{aligned}$$

## 2.2.4. Equazioni di Eulero

Un'equazione di Eulero è un'equazione differenziale che nella sua forma generale viene scritta come:

$$t^2 y'' + aty' + by = f(t)$$

Dove  $a, b \in \mathbb{R}$ . Notiamo la presenza di coefficienti  $t^k$  davanti alla derivata  $k$ -esima di  $y$ . Notiamo inoltre che non possiamo scrivere l'equazione in forma normale se  $t = 0$ . Restringiamo quindi il calcolo all'intervallo  $t \in (0, \infty)$  o  $t \in (-\infty, 0)$ . Per risolvere l'equazione completa si può usare il metodo di variazioni delle costanti. Iniziamo a risolvere l'omogenea. Scriviamola in forma normale:

$$y'' + \frac{a}{t}y' + \frac{b}{t^2}y = 0$$

Cerchiamo una soluzione del tipo:

$$y(t) = t^m$$

Per cui:

$$\begin{aligned} y'(t) &= mt^{m-1} \\ y''(t) &= m(m-1)t^{m-2} \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione otteniamo:

$$\begin{aligned} m(m-1)t^{m-2} + am \frac{t^{m-1}}{t} + b \frac{t^m}{t^2} &= 0 \\ m(m-1)t^{m-2} + amt^{m-2} + bt^{m-2} &= 0 \\ t^{m-2}(m(m-1) + am + b) &= 0 \end{aligned}$$

Possiamo quindi trovare  $m$  semplicemente scrivendo:

$$m(m-1) + am + b = 0$$

Una volta trovate due soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea possiamo procedere con il metodo di variazione delle costanti per trovare le soluzioni della completa. In generale, se l'equazione scritta sopra ha:

- Due soluzioni distinte  $m_1 \neq m_2$  reali allora:

$$\bar{y}(t) = c_1 t^{m_1} + c_2 t^{m_2}$$

- Due soluzioni reali coincidenti  $m_1 = m_2$  allora:

$$\bar{y}(t) = c_1 t^{m_1} \ln(t) + c_2 t^{m_2}$$

- Due soluzioni immaginarie coniugate  $m_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ :

$$\bar{y}(t) = t^\alpha (c_1 \cos(\beta \ln t) + c_2 \sin(\beta \ln t))$$

Questo tipo di procedimento si estende per equazioni di Eulero di qualsiasi ordine, nella forma:

$$\sum_{i=0}^n a_i t^i y^{(i)} = f(t)$$

Con  $a \in \mathbb{R}$ . Vediamo un esempio:

**Esempio 2.11.**

Consideriamo l'equazione di Eulero:

$$t^2 y'' - 4ty' + 6y = 0$$

Cerchiamo una soluzione del tipo:

$$y(t) = t^m$$

Quindi:

$$y'(t) = \alpha t^{m-1}$$

$$y''(t) = m(m-1)t^{m-2}$$

Sostituendo (considerando  $t \neq 0$ ):

$$m(m-1)t^{m-2} - 4m \frac{t^{m-1}}{t} + 6 \frac{t^m}{t^2} = 0$$

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

$$m_1 = 3$$

$$m_2 = 2$$

Quindi l'integrale generale dell'omogenea è:

$$\bar{y}(t) = c_1 t^3 + c_2 t^2$$

## 2.3. Sistemi differenziali lineari

Siano  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$  una matrice  $n \times n$  e  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t)$  un vettore di  $\mathbb{R}^n$ , dipendenti con continuità da  $t \in I \supseteq \mathbb{R}$ , con  $I$  intervallo. Consideriamo il sistema:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$$

Chiamiamo ciò **sistema differenziale lineare**. L'incognita è il vettore  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$ . Possiamo anche scrivere:

$$y'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)y_j + b_i(t) \quad i = (1, \dots, n)$$

Nel caso di  $n = 1$  il sistema si riconduce a un'equazione del tipo:

$$y' = a(t)y + b(t)$$

Nel caso di  $n = 2$  il sistema è del tipo:

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + b_1(t) \\ y'_2 = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + b_2(t) \end{cases}$$

### 2.3.1. Equazioni di ordine $n$

Le equazioni lineari di ordine qualunque posso essere scritte come sistema differenziale lineare. Consideriamo una generica equazione differenziale di ordine  $n$  scritta in forma normale come:

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \cdots + f(t)$$

Possiamo riscriverla come:

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)y^{(k)} + f(t)$$

Ponendo quindi  $y_i = y^{(i-1)}$  per  $i = 1, 2, \dots, n$ :

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix}$$

Ciò implica:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_n' = a_0(t)y_1 + \cdots + a_{n-1}(t)y_n + f(t) \end{cases}$$

Possiamo quindi riscrivere questo sistema in forma matriciale:

$$\mathbf{A}_{n \times n}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \cdots & \cdots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_n(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Da cui il sistema:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$$

Il vantaggio sta nell'aver trasformato un'equazione differenziale di ordine  $n$  in  $n$  equazioni differenziali di primo ordine, spesso più facili da risolvere.

Un vettore  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$  è soluzione dell'equazione in  $I$  sopra scritta se la soddisfa per ogni  $t \in I$ . L'insieme delle soluzioni dell'equazione viene chiamato **integrale generale**. Anche per questo tipo di equazioni vale il **principio di sovrapposizione**:

**Teorema 2.10** *L'integrale generale di un sistema del tipo:*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$$

*Si ottiene sommando all'integrale generale del sistema omogeneo associato un integrale particolare della completa*

### 2.3.2. Sistemi lineari omogenei

Dato un sistema lineare differenziale:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$$

Chiamiamo **sistema omogeneo associato** il sistema:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$$

Se consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad (1)$$

Con  $t_0 \in I$  e  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ , vale il seguente teorema:

**Teorema 2.11** *Sia  $\mathbf{A} \in C^0(I)$  e sia  $t_0 \in I$ . Per ogni  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ , il problema (1) ammette un'unica soluzione che è prolungabile in tutto l'intervallo  $I$ .*

Questo teorema ha conseguenze importanti: notiamo innanzitutto che se le condizioni del teorema sono verificate e se  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$ , allora l'unica soluzione del problema è  $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$ . Inoltre, notiamo che se  $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$  e  $\boldsymbol{\varphi}_2(t)$  risolvono il sistema, allora  $\boldsymbol{\varphi}(t) = \alpha\boldsymbol{\varphi}_1(t) + \beta\boldsymbol{\varphi}_2(t)$  è soluzione per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Ne deduciamo quindi che:

**Teorema 2.12** *L'integrale generale di un sistema lineare omogeneo:*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$$

*È uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ .*

Trovare  $n$  soluzioni linearmente indipendenti non è facile, vedremo nel successivo paragrafo come fare. Ora ci concentriamo sul capire se, fissate  $n$  soluzioni  $\boldsymbol{\varphi}_1(t), \dots, \boldsymbol{\varphi}_n(t)$ , esse sono o meno linearmente indipendenti. Intanto, per definizione diciamo che esse sono linearmente indipendenti se e solo se l'equazione:

$$c_1\boldsymbol{\varphi}_1(t) + \dots + c_n\boldsymbol{\varphi}_n(t) = \mathbf{0} \quad t \in I \quad c_i \in \mathbb{R}$$

È soddisfatta solo per  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ . Dal [TEOREMA 2.11](#) notiamo però che la combinazione lineare si annulla per un certo  $t_0 \in I$  se e solo se si annulla in tutto  $I$ . Quindi per verificare l'indipendenza lineare delle funzioni  $\boldsymbol{\varphi}_k(t)$  è sufficiente fissare un punto  $t_0 \in I$  e verificare che i vettori  $\boldsymbol{\varphi}_k(t_0)$  siano linearmente indipendenti. Per



formalizzare questo concetto introduciamo il **Wronskiano** associato alle funzioni  $\varphi_k(t)$  la matrice:

$$W(t) = (\varphi_1(t) | \varphi_2(t) | \cdots | \varphi_n(t)) \quad t \in I$$

Il teorema seguente ci fornisce la condizione necessaria e sufficiente per l'indipendenza lineare delle soluzioni:

**Teorema 2.13** Le  $n$  soluzioni  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$  sono linearmente indipendenti se e solo se il loro Wronskiano ha determinante non nullo in un punto  $t_0 \in I$ :

$$\exists t_0 \in I, \quad \det W(t_0) \neq 0$$

Nel caso in cui le  $n$  soluzioni sono linearmente indipendenti, diremo che la famiglia di soluzioni  $\{\varphi_k(t)\}$  è un **sistema fondamentale di soluzioni**, e che la corrispondente matrice Wronskiana è una **matrice fondamentale**. Notiamo che il vettore  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$  è soluzione dell'equazione se e solo se esiste  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^n$  tale che:

$$\mathbf{y} = W(t)\mathbf{C}$$

### 2.3.3. Sistemi omogenei a coefficienti costanti

Studiamo ora il sistema omogeneo nel caso in cui la matrice  $A$  sia costante:

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

Consideriamo ad esempio un sistema omogeneo a coefficienti costanti di 2 equazioni:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$$

Notiamo che con delle semplici sostituzioni è possibile riscriverlo come equazione differenziale di secondo ordine:

$$\begin{aligned} y'' &= a_{11}y_1' + a_{12}y_2' = a_{11}y_1' + a_{12}(a_{21}y_1 + a_{22}y_2) = \\ &= a_{11}y_1' + a_{12}a_{21}y_1 + a_{22}a_{12}y_2 \end{aligned}$$

Dalla prima equazione del sistema si ricava  $a_{12}y_2 = y_1' - a_{11}y_1$ , da cui:

$$y'' = a_{11}y_1' + a_{12}a_{21}y_1 + a_{22}(y_1' - a_{11}y_1)$$

Concludiamo:

$$\begin{aligned} y'' &= y_1'(a_{11} + a_{22}) + y_1(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) \\ y'' &= y_1' \operatorname{tr} A + y_1 \det A \end{aligned}$$

La stessa equazione è soddisfatta da  $y_2$ . Riconducendoci a un caso semplice, se  $n = 1$  allora possiamo dire che:

$$\begin{aligned} A &= a \\ y' &= ay \end{aligned}$$

Notiamo che in questo caso l'integrale generale è dato da  $y(t) = Ce^{At}$ . E' possibile generalizzare questo concetto per qualsiasi dimensione  $n$ ? Iniziamo a definire la matrice esponenziale  $e^M$ . Il modo migliore è prendere spunto dalla definizione di  $e$  e scrivere:

$$e^M = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( I_n + \frac{M}{k} \right)^k, \quad e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

Con  $I_n$  matrice identica  $n \times n$ . Si dimostra che le due definizioni coincidono e convergono. Non è comunque facile calcolare  $e^M$ , se non in due casi particolari:

- Se la matrice  $M$  è diagonale si ottiene:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^M = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

- Se  $M$  è diagonalizzabile, ossia se esiste una matrice non singolare  $S$  tale che la matrice  $\Lambda = S^{-1}MS$  è singolare, allora:

$$M = S\Lambda S^{-1} \Rightarrow M^k = S\Lambda^k S^{-1} \Rightarrow e^M = Se^{\Lambda}S^{-1}$$

Usiamo il me punto prima per calcolare  $e^{\Lambda}$ .

Ricordiamo che una matrice quadrata è diagonalizzabile se e solo se tutti i suoi autovalori sono reali e regolari. Precisiamo che vengono considerati anche gli autovalori complessi che però possono esserci se e solo se c'è anche il loro coniugato. In tal caso si interpretano con la formula di Eulero.

Notiamo infine, che se  $A$  è diagonalizzabile, allora anche  $At$  lo è ( $\forall t \in \mathbb{R}$ ) e si può usare la stessa matrice di passaggio  $S$  per diagonalizzarla. Inoltre, gli autovalori di  $At$  sono uguali agli autovalori di  $A$  moltiplicati per  $t$ . Da queste osservazioni si conclude che:

$$e^A = Se^{\Lambda}S^{-1} \Rightarrow e^{At} = Se^{At}S^{-1}$$

### Esempio 2.12.

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_2 \\ y_2' = 2y_2 \\ y_3' = y_2 + y_3 \end{cases}$$

Abbiamo che:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono  $\lambda_{1,2} = 1$  e  $\lambda_3 = 2$ , tutti regolari. La matrice di transizione è quindi:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Possiamo quindi scrivere il Wronskiano dell'equazione:

$$W(t) = e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1} = \begin{pmatrix} e^t & 3(te^2 - e^t) & 0 \\ 0 & te^2 & 0 \\ 0 & te^2 - e^t & e^t \end{pmatrix}$$

Da cui l'integrale generale:

$$y(t) = W(t)C \quad C \in \mathbb{R}^3$$

### 2.3.4. Sistemi non omogenei

Vediamo ora come risolvere un problema di Cauchy del tipo:

$$\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2)$$

Dove  $t_0 \in I$  e  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ . Allora vale che:

**Teorema 2.14** *Siano  $A, b \in C^0(I)$  e sia  $t_0 \in I$ . Per ogni  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ , il problema (2) ammette un'unica soluzione che è prolungabile in tutto l'intervallo  $I$ .*

Supponiamo di aver già trovato l'integrale generale del sistema omogeneo associato. Vogliamo ora cercare un integrale particolare per poter poi applicare il principio di sovrapposizione. Torna utile il **metodo delle variazioni delle costanti**.

Sia dunque  $\{\varphi_k\}_{k=1,\dots,n}$  un sistema fondamentale di soluzioni e sia  $W(t)$  la matrice Wronskiana fondamentale corrispondente. L'integrale generale si scrive nella forma:

$$\tilde{y} = W(t)C(t) \quad t \in I$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene:

$$W'(t)C(t) + W(t)C'(t) = A(t)W(t)C(t) + b(t) \quad t \in I$$

Si può dimostrare che  $\mathbf{W}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{W}(t)$ , da cui:

$$\mathbf{W}(t)\mathbf{C}'(t) = \mathbf{b}(t) \Rightarrow \mathbf{C}'(t) = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{b}(t)$$

Quindi, scegliendo una soluzione particolare otteniamo:

$$\mathbf{C}(t) = \int \mathbf{W}^{-1}(\tau)\mathbf{b}(\tau)d\tau$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{W}(t) \int \mathbf{W}^{-1}(\tau)\mathbf{b}(\tau)d\tau$$

Con  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^n$ . Precisiamo che  $\mathbf{W}^{-1}$  è ben definita per il [TEOREMA 2.13](#). Possiamo ora scrivere l'integrale generale della completa:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}(t) \left( \mathbf{C} + \int \mathbf{W}^{-1}(\tau)\mathbf{b}(\tau)d\tau \right)$$

Con  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^n$ .

## 3. Funzioni vettoriali

Ci siamo per ora concentrati su funzioni di una o più variabili definite in questo modo:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Tuttavia, ci sono situazioni in cui a un ingresso è associata una coppia (più in generale  $n$ -upla) di numeri reali. La funzione avrà dunque **valori vettoriali**. Ad esempio, la posizione di una particella in movimento è definita in ogni istante  $t$ , tale posizione può essere descritta da una funzione che a ogni istante associa delle coordinate:

$$f: t \rightarrow (x, y, z)$$

Si dice **funzione a valori reali** o **funzione a valori vettoriali** (o più semplicemente **funzione reale** o **funzione vettoriale**) una funzione che ha codominio  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{R}^m$  (con  $m > 1$ ) rispettivamente.

### 3.1. Archi di curva continui

---

Diamo ora una definizione generale di curva:

**Definizione 3.1.** *Sia  $I$  un intervallo in  $\mathbb{R}$ . Si dice **arco di curva continuo**, o **cammino**, in  $\mathbb{R}^m$  una funzione  $r: I \rightarrow \mathbb{R}^m$  continua (ovvero tale che le sue componenti sono funzioni continue)*

Per semplicità, chiameremo gli archi di curva semplicemente curve. Ad esempio, una curva  $r: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  può essere:

$$r(t) = (x_0 + at, y_0 + \beta t, z_0 + \gamma t)$$

Definita su  $\mathbb{R}$ . Più in generale, una curva  $r: I \rightarrow \mathbb{R}^m$  sarà del tipo:

$$r(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_m(t))$$

Vediamo alcune definizioni fondamentali. Consideriamo una curva generica  $r$ :

- Chiamiamo **sostegno della curva** l'immagine della funzione, ossia l'insieme di punti di  $\mathbb{R}^m$  percorsi dal punto mobile (a prescindere dalla legge con cui la curva è percorsa).
- Diciamo che la curva è **chiusa** se  $r(a) = r(b)$ , con  $I = [a, b]$

- Diciamo che la curva è **semplice** se non ripassa mai dallo stesso punto, cioè se  $t_1 \neq t_0 \Rightarrow r(t_1) \neq r(t_0)$ , con l'unica eccezione  $(t_1, t_2) = (a, b)$  nel caso di curve chiuse.
- Una curva si dice **piana** se esiste un piano che contiene il suo sostegno.

Per essere precisi, bisognerebbe definire la generica curva continua  $\gamma$  come la coppia costituita dal sostegno della curva e la **parametrizzazione** della curva (la funzione che descrive il sostegno). In questo modo possiamo usare la dizione *due parametrizzazioni diverse della stessa curva* per intendere due diverse funzioni che individuano lo stesso sostegno.

**Definizione 3.2.** Siano  $\gamma_1, \gamma_2$  due curve continue in  $\mathbb{R}^m$  definite dalle due equazioni  $r_1 = r_1(t)$  per  $t \in [a, b]$  e  $r_2 = r_2(t)$  per  $t \in [b, c]$ , che soddisfino la condizione  $r_1(b) = r_2(b)$ . Allora si definisce unione  $\gamma_1 \cup \gamma_2$  la curva  $r: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^m$  definita da:

$$r(t) = f(x) = \begin{cases} r_1 = r_1(t), & \text{per } t \in [a, b] \\ r_2 = r_2(t), & \text{per } t \in [b, c] \end{cases}$$

### 3.1.1. Derivata e integrale di una funzione vettoriale

Per generalizzare il concetto di deriva a una funzione  $r: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ , si utilizza la definizione usuale:

**Definizione 3.3.** Sia  $r: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $t_0 \in I$ , si dice che  $r$  è **derivabile** se esiste finito:

$$r'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t_0 + h) - r(t_0)}{h}$$

Se  $r$  è derivabile in tutto  $I$  e  $r'$  è continua in  $I$ , diciamo che  $r \in C^1(I)$ . Analogamente si definiscono le derivate di ordini successivi. Il limite viene calcolato componente per componente:

$$r(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t_0 + h) - r(t_0)}{h} = \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_1(t_0 + h) - r_1(t_0)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_2(t_0 + h) - r_2(t_0)}{h}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_n(t_0 + h) - r_n(t_0)}{h} \right)$$

Quindi il vettore derivata è il vettore delle derivate delle componenti. Date due curve  $u, v: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}^m$  derivabili, si può dimostrare che

- $(\alpha u + \beta v)' = \alpha u' + \beta v'$
- Se  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione derivabile,  $(fu)' = f'u + fu'$
- Se  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione derivabile,  $[u(\varphi(t))]' = \varphi'(t)u'(\varphi(t))$  purché  $Im\varphi \subseteq I$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$  dove  $\cdot$  indica il prodotto scalare tra le funzioni vettoriali

- nel caso in cui  $m = 3$ , allora  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$ , dove  $\times$  indica il prodotto vettoriale

Si può definire in maniera naturale anche l'integrale definito di una funzione a valori vettoriali:

**Definizione 3.4.** Se  $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ , allora:

$$\int_a^b r(t) dt = \left( \int_a^b r_1(t) dt, \int_a^b r_2(t) dt, \dots, \int_a^b r_m(t) dt \right)$$

Più in generale, diciamo che una curva  $\mathbf{r}$  è integrabile in  $[a, b]$  se lo è ogni sua componente  $r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Ricaviamo quindi che se una curva è continua, allora è integrabile. Inoltre, vale il seguente teorema:

**Teorema 2.15** *(teorema fondamentale del calcolo integrale per funzioni a valori vettoriali)* Se  $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  è di classe  $C^1([a, b])$ , allora:

$$\int_a^b r'(t) dt = r(b) - r(a)$$

In particolare, se  $r$  è regolare e chiusa in,  $\int_a^b r'(t) dt = 0$

### 3.1.2. Archi di curva regolari

Data la definizione di derivata di una curva, possiamo dare una definizione fondamentale:

**Definizione 3.5.** Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo. Si dice **arco di curva regolare** un arco di curva  $r: I \rightarrow \mathbb{R}^m$  tale che  $r \in C^1(I)$  e  $r'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in I$

Per le curve regolari è quindi ben definito il **versore tangente**:

$$\mathbf{T} = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

Che dipende con continuità da  $t$ .

**Definizione 3.6.** Si dice **arco di curva regolare a tratti** un arco di curva definita da  $r: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}^m$  tale che  $r$  è continua e l'intervallo  $I$  può essere suddiviso in un numero finito di sotto intervalli, su ciascuno dei quali  $r$  è un arco di curva regolare

### 3.1.3. Curve piane, grafico di funzioni

Una classe particolare di curve piane è quella delle curve che si ottengono come grafici di una funzione variabile, ossia:

$$y = f(x) \text{ per } x \in [a, b]$$

Che, scritta in forma parametrica, diventa:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \text{ per } t \in [a, b]$$

Notiamo che questo tipo di curva ha le seguenti proprietà:

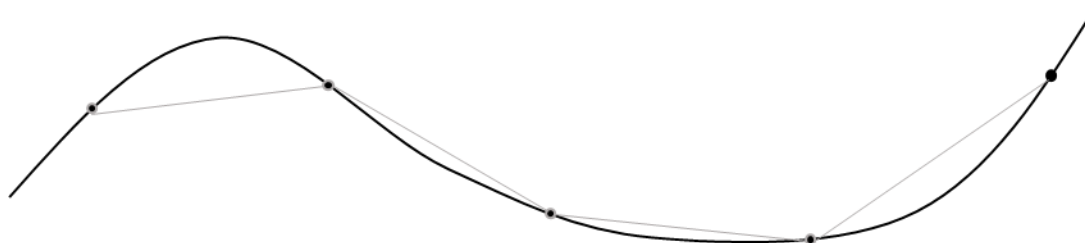
- È continua se e solo se  $f$  è continua in  $[a, b]$
- E' regolare se e solo se  $f$  è derivabile con continuità in  $[a, b]$
- E' regolare a tratti se e solo se  $f$  è continua in  $[a, b]$  e a tratti derivabile con continuità in  $[a, b]$
- Non è mai chiusa
- E' sempre semplice

### 3.1.4. Lunghezza di un arco di curva

Un problema molto importante è quello di definire che cosa si intende per lunghezza di un arco di curva e come calcolarla. Sia  $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  la parametrizzazione di un arco di curva  $\gamma$  continuo. Dividiamo ora l'intervallo in  $n$  sottointervalli. Questa divisione viene chiamata **partizione** dell'intervallo  $[a, b]$  viene scritta in questo modo:

$$P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$$

Ciò significa che  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ . In questo modo abbiamo ottenuto una **poligonale** costituita da  $n$  segmenti di estremi  $r(t_{j-1}), r(t_j), j = 1, \dots, n$ . Indichiamo con  $l(P)$  la lunghezza della poligonale.



Per calcolarla semplicemente sommiamo le lunghezze dei vari segmenti:

$$l(P) = \sum_{j=1}^n |r(t_j) - r(t_{j-1})|$$

Notiamo che  $l(P)$  approssima per difetto la lunghezza della curva, infatti la lunghezza dei segmenti è la lunghezza della linea più breve che unisce i due estremi. Considerando



la poligonale, possiamo accettare che per qualche  $\tau_j \in (t_{j-1}, t_j)$  vale la seguente versione del Teorema di Lagrange:

$$|r(t_j) - r(t_{j-1})| \approx |r'(\tau_j)(t_j - t_{j-1})|$$

Poiché  $t_j > t_{j-1}$ , vale che  $(t_j - t_{j-1}) > 0$ , da cui:

$$|r(t_j) - r(t_{j-1})| \approx |r'(\tau_j)|(t_j - t_{j-1})$$

Assumendo che i segmenti  $(t_{j-1}, t_j)$  abbiano la stessa lunghezza, vale che:

$$|t_j - t_{j-1}| = \frac{b-a}{n}$$

Da cui, raccogliendo, ricaviamo che:

$$l(P) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n |r'(\tau_j)|$$

Facendo tendere a infinito la cardinalità della partizione ( $n \rightarrow \infty$ ), la sommatoria approssimerà in modo sempre più preciso la lunghezza del sostegno:

$$l(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |r(t_j) - r(t_{j-1})| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \left( \frac{b-a}{n} |r'(\tau_j)| \right)$$

Poiché questa è una forma integrale, ricaviamo il seguente teorema:

**Teorema 2.16** *Sia  $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  una curva regolare a tratti. La sua lunghezza è:*

$$l(r) = \int_a^b |r'(t)| dt$$

Si noti che i passaggi elencati sopra non costituiscono una dimostrazione formale. La vera dimostrazione, che non affronteremo, utilizza il teorema di Cantor-Heine. Riprenderemo questi concetti nel capitolo sui campi vettoriali.

## 4. Calcolo integrale in più variabili

Vediamo ora gli integrali di funzioni reali di più variabili, generalizzando il concetto di integrale. Innanzitutto, ricordiamo che se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, l'integrale:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Può essere visto come limite di somme di Cauchy:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_j^*)$$

Dove abbiamo supposto di dividere  $[a, b]$  in  $n$  intervalli di lunghezza  $(b-a)/n$  e dove  $x_j^*$  è un punto nell'intervallo  $(x_{j-1}, x_j)$ . Più in generale, per ogni funzione  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata è possibile definire le somme di Cauchy-Riemann. La funzione si dice integrabile se il limite per  $n \rightarrow \infty$  esiste finito e non dipende dalla scelta di  $x_j^*$ . Si dimostra inoltre che le funzioni continue in un intervallo sono integrabili in quell'intervallo.

### 4.1. Integrali doppi

---

Gli integrali doppi sono un'estensione del concetto di integrale per funzioni di una variabile, almeno nei casi più semplici. Consideriamo una funzione limitata:

$$f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

Consideriamo una partizione di  $[a, b]$  in  $n$  intervalli di ampiezza  $(b-a)/n$ , del tipo:

$$[x_{i-1}, x_i] \text{ per } i = 1, 2, \dots, n$$

e analogamente una partizione di  $[c, d]$  in  $n$  intervalli di ampiezza  $(d-c)/n$ , del tipo:

$$[y_{j-1}, y_j] \text{ per } j = 1, 2, \dots, n$$

Abbiamo quindi partizionato il rettangolo  $[a, b] \times [c, d]$  in  $n^2$  rettangoli di:

$$I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \text{ per } i, j = 1, 2, \dots, n$$

Ogni rettangolo ha area:

$$|I_{ij}| = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2}$$

Consideriamo un punto  $p_{ij}^*$  all'interno del rettangolo  $I_{ij}$ . Consideriamo la somma di Cauchy-Riemann:

$$s_n = \sum_{i,j=1}^n |I_{ij}| f(p_{ij}^*)$$

Geometricamente, stiamo considerando il volume del parallelepipedo di area  $|I_{ij}|$  e di altezza  $f(p_{ij}^*)$ . Aumentando il numero di rettangolo (che diventeranno più piccoli), il parallelepipedo approssimerà sempre più accuratamente l'area tridimensionale sopra (o sotto) il rettangolo:

**Definizione 4.1.** Una funzione  $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *integrabile nel rettangolo*  $R = [a, b] \times [c, d]$  se esiste finito il limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  ed esso non dipende dalla scelta di  $p_{ij}^*$ . In questo caso, il limite si dice *integrale doppio sul rettangolo*  $R$  e viene indicato col simbolo:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} |I_{ij}| f(p_{ij}^*)$$

Come nel caso dell'integrale su una variabile, le variabili di integrazione si dicono **mute**, ossia:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R f(u, v) du dv$$

Vale inoltre il seguente teorema:

**Teorema 4.1** Se  $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in  $[a, b] \times [c, d]$ , allora ivi è integrabile

L'integrale doppio ha quindi il significato geometrico del volume con segno compreso tra il piano  $xy$  e il grafico della funzione.

Per quanto riguarda il calcolo degli integrali doppi, si ricorre spesso alla *riduzione degli integrali doppi a integrali iterati*, ossia al calcolo di successivi integrali in una variabile.

### 4.1.1. Calcolo su domini rettangolari

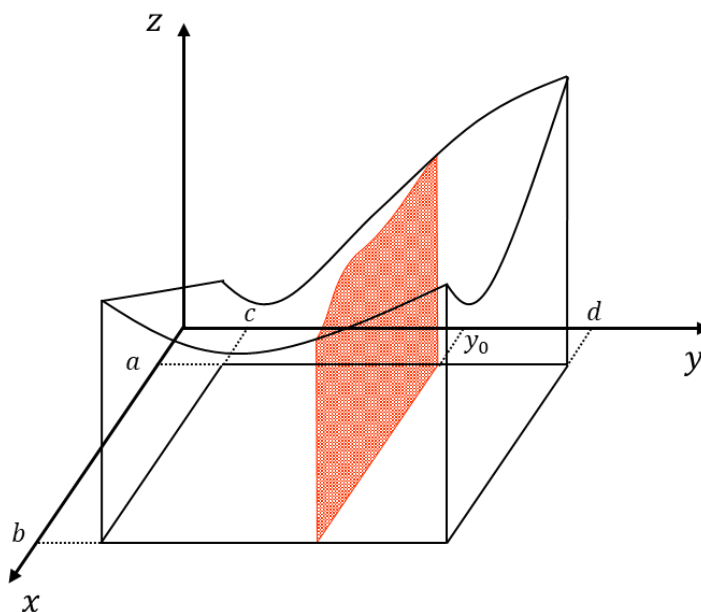
Consideriamo una funzione  $f$  definita e continua nel rettangolo  $[a, b] \times [c, d]$ . Prendiamo, ad esempio, tagliamo il volume che vogliamo calcolare con un piano parallelo a  $x$  che interseca l'asse  $y$  in un punto  $y_0$ .

Lo spessore di questa “fetta” sarà un infinitesimo  $dy$ . Il volume della fetta verrà quindi calcolato come l'area moltiplicata per lo spessore:

$$V_f = A(y_0)dy$$

Facendo variare  $y_0$  tra  $c$  e  $d$  e sommando i volumi delle “fette” otterremo quindi il volume totale. Otteniamo quindi che il volume totale sarà:

$$V = \int_c^d A(y)dy$$



A questo punto dobbiamo trovare un modo di calcolare  $A(y)$ . Possiamo calcolarla semplicemente con un integrale in una dimensione. Infatti, fissato  $y_0$  abbiamo che l'area è data da:

$$A(y_0) = \int_a^b f(x, y_0)dx$$

Per un  $y$  generico diventa quindi:

$$A(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

Ne segue quindi che:

$$V = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

Si noti che nel calcolo del primo integrale, la variabile  $y$  viene considerata come costante numerica. Vale quindi il seguente teorema:

**Teorema 4.2** Se  $f: [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è continua, allora il suo integrale doppio può essere calcolato come integrale iterato, e vale che:

$$V = \iint_R f(x, y)dxdy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y)dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)dy \right) dx$$

Intuitivamente, vale che le seguenti due funzioni sono continue:

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad \varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

Infine, notiamo che nel caso in cui le funzioni siano a variabili separabili, ossia del tipo:

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

E' possibile scrivere:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d g(x)h(y) dy \right) dx = \int_a^b g(x) \left( \int_c^d h(y) dy \right) dx$$

Possiamo raccogliere  $g(x)$  perché la variabile di integrazione è  $y$ . Concludiamo che:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \left( \int_a^b g(x) dx \right) \left( \int_c^d h(y) dy \right)$$

### Esempio 4.1.

Calcoliamo l'integrale:

$$\iint_{[0,1] \times [0,2]} x e^{xy} dx dy$$

Notiamo che è più semplice iniziare a calcolare l'integrale in  $dy$ , infatti:

$$\frac{d}{dy}(e^{xy}) = x e^{xy}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \int_0^2 x e^{xy} dy \right) dx &= \int_0^1 [e^{xy}]_0^2 dx = \int_0^1 [e^{2x} - e^{0x}] dx = \\ \int_0^1 (e^{2x} - 1) dx &= \left[ \frac{1}{2} e^{2x} - x \right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - 1 \end{aligned}$$

## 4.1.2. Domini non rettangolari

Se la funzione non è definita su un rettangolo ma su un insieme  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , limitato, quello che possiamo fare è considerare il rettangolo  $R = [a, b] \times [c, d]$  che contiene  $\Omega$  e definire una nuova funzione  $\tilde{f}$  fatta in questo modo:

$$\begin{aligned} \tilde{f}: R &\rightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{f}(x, y) &= \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ 0, & (x, y) \in R \setminus \Omega \end{cases} \end{aligned}$$

Se questa nuova funzione risulta integrabile in  $R$  allora vale che:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_R \tilde{f}(x, y) dx dy$$

Si noti che la continuità di  $f$  non implica la continuità di  $\tilde{f}$ . Ad esmpio:

**Esempio 4.2.**

Si consideri l'integrale doppio:

$$\iint_{\Omega} dx dy$$

$$\Omega = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x \in Q\}$$

Notiamo che ponendo

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega \\ 0, & (x, y) \in R \setminus \Omega \end{cases}$$

Otteniamo una funzione non integrabile (la somma di Cauchy-Riemann) dipende dalla scelta di  $p_{ij}^*$

Cerchiamo quindi di individuare delle condizioni sul dominio  $\Omega$  che permettano di garantire l'integrabilità di una funzione continua e limitata in  $\Omega$ . Restringiamo il discorso a particolari tipi di insiemi:

**Definizione 4.2.** Un insieme  $E \subset \mathbb{R}^2$  si dice **y-semplce** se è del tipo:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [c, d], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

Per  $g_1, g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni continue

Analogamente

**Definizione 4.3.** Un insieme  $E \subset \mathbb{R}^2$  si dice **x-semplce** se è del tipo:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

Per  $h_1, h_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni continue

Infine:

**Definizione 4.4.** Si dice che un insieme  $E \subset \mathbb{R}^2$  è **semplce** se è *x-semplce* o *y-semplce*. Si dice che un insieme è **regolare** se è unione di un numero finito di insiemi semplici.

Il significato geometrico della semplicità rispetto a  $y$ , è tagliando l'insieme con una retta parallela all'asse  $y$  si ottiene sempre un segmento e che questo segmento varia con continuità al variare della retta (analogamente per  $x$ ). Si noti inoltre che un insieme semplce è necessariamente **chiuso** e **limitato**, come si evince dalle definizioni.

Vale quindi il seguente teorema:

**Teorema 4.3** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un insieme regolare e  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , allora  $f$  è integrabile in  $\Omega$

Diamo un'ultima definizione:

**Definizione 4.5.** Si dice che un insieme limitato  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  è **misurabile** se la funzione costante 1 è integrabile in  $\Omega$ . In tal caso chiamiamo misura dell'insieme  $\Omega$  il numero:

$$|\Omega| = \iint_{\Omega} dx dy$$

### 4.1.3. Calcolo su domini non rettangolari

Come prima cosa, possiamo affermare che tutte le classiche proprietà degli integrali sono valide anche per gli integrali doppi:

- Linearità dell'integrale
- Positività e monotonia dell'integrale rispetto all'integranda
- Monotonia dell'integrale rispetto al dominio di integrazione
- Additività dell'integrale rispetto al dominio di integrazione
- Proprietà di annullamento (se il dominio di integrazione ha misura nulla allora l'integrale su quel dominio è nullo)

Vediamo ora come calcolare gli integrali in domini semplici. Il calcolo è simile a quello di domini rettangolari, si fa per riduzione:

**Teorema 4.4** Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua e sia  $\Omega$  un dominio  $x$ -semplice, ossia:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

Con  $h_1, h_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, allora:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Analogamente:

**Teorema 4.5** Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua e sia  $\Omega$  un dominio  $y$ -semplice, ossia:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

Con  $g_1, g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, allora:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Nel caso in cui  $\Omega$  sia semplice rispetto a tutte e due le variabili allora entrambe le formule sono valide. Vediamo qualche esempio:

**Esempio 4.3.**

Consideriamo l'integrale:

$$\iint_T xy dx dy$$

Dove  $T$  è il triangolo di vertici  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ . La funzione è continua, inoltre l'insieme è semplice sia rispetto a  $x$  che rispetto a  $y$ , quindi  $f$  è integrabile in  $T$ . Scegliamo di scriverlo in questo modo:

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

Abbiamo scritto l'insieme come insieme  $y$ -semplice. L'integrale viene risolto quindi in questo modo:

$$\begin{aligned} \iint_T xy dx dy &= \int_0^1 \left( \int_0^x xy dy \right) dx = \int_0^1 \left[ \frac{xy^2}{2} \right]_0^x dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Osserviamo che se il dominio di integrazione è un dominio regolare, allora possiamo sfruttare l'additività dell'integrale rispetto al dominio di integrazione. In altre parole, se il dominio di integrazione  $\Omega$  è unione di  $n$  insiemi semplici  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  vale che:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_i} f(x, y) dx dy$$

**Esempio 4.4.**

Consideriamo l'integrale:

$$\iint_{\Omega} \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$$

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$$

Notiamo innanzitutto che  $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ , che rappresenta la semisfera:

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Inoltre, il volume viene calcolato sulla sezione della sfera, possiamo quindi ricavare il valore dell'integrale semplicemente tramite la conoscenza della formula del volume della sfera:

$$\begin{aligned} V_S &= \frac{4}{3} \pi r^3 \\ r^2 &= 4 \end{aligned}$$



$$\iint_{\Omega} \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi 2^3 = \frac{16}{3} \pi$$

**Esempio 4.5.**

Consideriamo l'integrale:

$$\iint_{[-1,1] \times [-1,1]} (x + \sin y) dx dy$$

Notiamo che  $x$  e  $\sin y$  sono dispari rispetto alla propria variabile, e che  $[-1,1]$  è simmetrico rispetto all'asse  $y$ , mentre  $[-1,1]$  è dispari rispetto all'asse  $x$ . Se quindi scriviamo:

$$\int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 x dx \right) dy + \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 \sin y dy \right) dx$$

E' immediato verificare che questo integrale è nullo.

### 4.1.4. Cambio di variabili

Abbiamo visto che nel caso di integrali su una variabile, il cambio di variabili risulta spesso utile. Vale che:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f'(\phi(t)) \phi'(t) dt$$

Dove  $x = \phi(t)$  è una funzione derivabile e monotona in  $[\phi^{-1}(a), \phi^{-1}(b)]$ . Per quanto riguarda l'integrazione in due variabili il metodo è analogo, e consiste nel trasformare le coordinate del piano. Se dobbiamo calcolare:

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

Si opera una trasformazione  $T: D' \rightarrow D, (x, y) = T(u, v)$  con

$$\begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases}$$

L'integranda diventa quindi  $f(g(u, v), h(u, v))$ . Ora ci si chiede, qual è l'analogo di:

$$dx = \phi'(t) dt$$

Ragioniamo geometricamente: il rettangolo compreso tra  $u, u + du$  e  $v, v + dv$  viene trasformato in un parallelogramma di vertici:

$$\begin{array}{cc} (g(u, v + dv), h(u, v + dv)) & (g(u + du, v + dv), h(u + du, v + dv)) \\ (g(u, v), h(u, v)) & (g(u + du, v), h(u + du, v)) \end{array}$$

I vettori che individuano i lati adiacenti del parallelogramma sono quindi:

$$\begin{array}{l} (g(u + du, v), h(u + du, v)) - (g(u, v), h(u, v)) \\ (g(u, v + dv), h(u, v + dv)) - (g(u, v), h(u, v)) \end{array}$$

In approssimazione questi due vettori equivalgono a:

$$\begin{array}{l} (g_u du, h_u du) \\ (g_v dv, h_v dv) \end{array}$$

L'area del parallelogramma è (in approssimazione) uguale al modulo del determinante della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} g_u du & h_u du \\ g_v dv & h_v dv \end{pmatrix}$$

Da cui la formula di trasformazione dell'elemento infinitesimo d'area:

$$dxdy = \left| \det \begin{pmatrix} g_u & h_u \\ g_v & h_v \end{pmatrix} \right| dudv$$

La matrice di cui viene calcolato il determinante, trasposta, è detta **matrice Jacobiana della trasformazione** (si noti che la trasposizione non influenza il determinante). Formalizzando il ragionamento:

**Teorema 4.6** (*Formula di cambiamento di variabili*) Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  un dominio regolare,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e  $T: D' \rightarrow D$ ,  $(x, y) = T(u, v)$ , con

$$\begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases}$$

Una trasformazione invertibile e derivabile con continuità in  $D'$ , allora

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_{D'} f(g(u, v), h(u, v)) |\det \mathbf{DT}(u, v)| dudv$$

Dove

$$\mathbf{DT}(u, v) = \begin{pmatrix} g_u & h_u \\ g_v & h_v \end{pmatrix}$$

Indica la matrice Jacobiana della trasformazione.

Questo teorema si rivela particolarmente utile nel caso di trasformazioni in coordinate polari. Spesso infatti conviene porre la seguente trasformazione:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

Dove  $\rho \in \mathbb{R}^+$  rappresenta la distanza del punto dall'origine e  $\theta \in [0, 2\pi)$  rappresenta l'angolo che individua il vettore con l'asse  $x$ . Nel caso di questa trasformazione il determinante jacobiano vale:

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho$$

Vediamo un esemepio:

#### Esempio 4.6.

Proviamo a calcolare il volume dell'ellissoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Consideriamo la metà superiore dell'ellisside.

$$z = c \sqrt{1 - \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)} \quad \text{per } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

Poiché l'ellissoide è simmetrico rispetto al piano  $xy$ , il volume è il doppio dell'integrale di questa funzione sul dominio  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ :

$$V = 2 \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1} c \sqrt{1 - \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)} dx dy$$

Con un cambio di variabili questo integrale risulta molto facile da calcolare:

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \theta \\ y = b\rho \sin \theta \end{cases}$$

Che ha determinate Jacobiano:

$$\begin{vmatrix} a \cos \theta & b \sin \theta \\ -a\rho \sin \theta & b\rho \cos \theta \end{vmatrix} = ab\rho$$

Ricaviamo quindi che  $dx dy = ab\rho d\rho d\theta$ , da cui:

$$V = 2 \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 c \sqrt{1 - \rho^2} ab\rho \right) d\theta = \frac{4}{3} \pi abc$$

## 4.2. Integrali tripli

Tutto ciò che si è detto sugli integrali doppi si generalizza agli integrali di dimensioni superiori. Nel caso di integrali in 3 dimensioni, al posto dei rettangoli  $[a, b] \times [c, d]$

consideriamo i parallelepipedi  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ . Per il resto i ragionamenti rimangono inalterati e si arriva a definire l'integrale di una funzione continua definita su un parallelepipedo.

Nel caso di domini più generali, se il dominio ha una rappresentazione analitica semplice si dimostra che gli integrali tripli possono essere risolti mediante opportuni integrali iterati. Le situazioni tipiche sono:

### 4.2.1. Integrazione per fili

Sia  $\Omega$  un dominio di  $\mathbb{R}^3$  che si può rappresentare analiticamente in questo modo:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y), (x, y) \in D\}$$

Dove  $D$  è un dominio regolare del piano e  $g_1, g_2: D \rightarrow \mathbb{R}$  sono continue. Se  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua,  $f$  è integrabile in  $\Omega$  e l'integrale si può calcolare “**per fili**”, ossia nel seguente modo:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left( \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

Geometricamente, ciò vuol dire integrare la funzione in  $dz$  sul filo  $z \in (g_1(x, y), g_2(x, y))$ , e poi far variare  $(x, y)$  nel dominio  $D$ . Vediamo un esempio:

#### Esempio 4.7.

Consideriamo l'integrale:

$$\iiint_{\Omega} x^2 z dx dy dz$$

Sulla semisfera positiva di raggio  $R$ . Analiticamente la semisfera può essere scritta come:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Integriamo per fili ottenendo:

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \left( \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} x^2 z dz \right) dx dy &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} x^2 \left( \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z dz \right) dx dy = \\ \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} x^2 \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dx dy &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{x^2}{2} (R^2 - x^2 - y^2) dx dy \end{aligned}$$

Ora diventa un integrale doppio, usiamo le coordinate polari e ottenimo:

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^{R^2} \frac{1}{2} \rho^2 \cos^2 \theta (R^2 - \rho^2) \rho d\rho \right) d\theta$$

Notiamo che  $f(\rho, \theta)$  è del tipo  $g(\rho)h(\theta)$ , quindi scriviamo:

$$\left( \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right) \left( \int_0^{R^2} \frac{1}{2} \rho^2 (R^2 - \rho^2) \rho d\rho \right) = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\rho^4}{4} R^2 - \frac{\rho^6}{6} \right]_0^R = \frac{\pi}{24} R^6$$

### 4.2.2. Integrazione per strati

Supponiamo che  $\Omega$  sia un dominio di  $\mathbb{R}^3$  rappresentabile nella forma:

$$\Omega = \{(x, y, z): h_1 \leq z \leq h_2, (x, y) \in \Omega(z)\}$$

Dove, a sua volta, per ogni  $z \in [h_1, h_2]$ ,  $\Omega(z)$  è un dominio regolare. Allora se  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, è integrabile in  $\Omega$  e l'integrale si può scrivere mediante “**integrazione per strati**”:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{h_1}^{h_2} \left( \iint_{\Omega(z)} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

In questo caso si integra sullo strato  $\Omega(z)$  facendo poi variare  $z$ . Vediamo un esempio:

#### Esempio 4.8.

Proviamo a calcolare:

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$$

$$\Omega = \left\{ (x, y, z): x^2 + y^2 \leq \left( \frac{R}{h} z \right)^2, 0 \leq z \leq h \right\}$$

$\Omega$  rappresenta il cono circolare di altezza  $h$  e raggio  $R$ , vertice nell'origine e asse lungo  $z$ . Possiamo integrare per strati:

$$\int_0^h \left( \iint_{x^2+y^2 \leq \left(\frac{R}{h}z\right)^2} (x^2 + y^2) dx dy \right) dz$$

Calcoliamo l'integrale interno in coordinate polari:

$$= \int_0^h \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\frac{R}{h}z} \rho^3 d\rho \right) d\theta \right) dz = 2\pi \int_0^h \frac{R^4}{4h^4} z^4 dz = 2\pi \frac{R^4}{4h^4} \frac{h^5}{5} = \frac{\pi}{10} R^4 h$$

### 4.2.3. Cambio di variabili

Come per gli integrali doppi, dato un integrale triplo vale il seguente teorema:

**Teorema 4.7** (*Formula di cambiamento di variabili*) Sia  $D \subset \mathbb{R}^3$  un dominio regolare,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e sia  $T: D' \rightarrow D$  del tipo  $(x, y, z) = T(u, v, w)$ , con

$$\begin{cases} x = g(u, v, w) \\ y = h(u, v, w) \\ z = j(u, v, w) \end{cases}$$

Una trasformazione invertibile e derivabile con continuità in  $D'$ , allora

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D'} f(g(u, v, w), h(u, v, w), j(u, v, w)) |\det \mathbf{DT}(u, v, w)| du dv dw$$

Dove

$$\mathbf{DT}(u, v, w) = \begin{pmatrix} g_u & h_u & j_u \\ g_v & h_v & j_v \\ g_w & h_w & j_w \end{pmatrix}$$

Indica la matrice Jacobiana della trasformazione

Alcune trasformazioni di coordinate in tre dimensioni sono:

- **Coordinate sferiche**, definite dal seguente sistema:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad \text{con } \rho > 0, \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi)$$

$$dx dy dz = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

- **Coordinate cilindriche**, definite dal seguente sistema:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = t \end{cases} \quad \text{con } \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi), t \in \mathbb{R}$$

$$dx dy dz = \rho d\rho d\theta dt$$

### Esempio 4.9.

Consideriamo ad esempio un integrale su una semisfera:

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz$$

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

Passando in coordinate cilindriche otteniamo:

$$\Omega = \{(\rho, \theta, t) : \rho \geq 0, \rho^2 \leq R^2 - t^2, t \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, t \leq R\}$$

Da cui:

$$\int_0^R \left( \left( \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2-t^2}} \rho d\rho \right) d\theta \right) dt = \frac{2}{3} \pi R^3$$

## 5. Campi vettoriali

Un campo vettoriale è una funzione del tipo:

$$F: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Dove  $I \subseteq \mathbb{R}$  è un intervallo di tempo e  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  è un insieme di punti nello spazio. Si noti che  $\Omega$  è pensato come un insieme di punti nello spazio, mentre  $\mathbb{R}^m$  come insieme di vettori. Se il campo non varia nel tempo si parla di **campo stazionario**. Ci occuperemo principalmente di campi stazionari in tre dimensioni:

$$F: \mathbb{R}^3 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

$$F(x, y, z) = F_1(x, y, z)i + F_2(x, y, z)j + F_3(x, y, z)k$$

**Definizione 5.1.** *Dato un campo vettoriale  $F: \mathbb{R}^3 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $F \in C^1(\Omega)$ , chiamiamo **linea di campo** di  $F$  una qualsiasi curva regolare tangente in ogni punto a  $F$*

Con  $F \in C^1(\Omega)$  intendiamo che le due componenti  $F_1$  e  $F_2$  sono continue e derivabili con continuità in  $\Omega$ . Data quindi la linea di campo  $r = r(t) = (x(t), y(t), z(t))$  di  $F$ . Il fatto che nel punto  $r(t)$  il campo  $F$  sia tangente alla linea significa che il vettore  $F(r(t))$  è parallelo al vettore  $r'(t)$ . Esiste dunque una funzione scalare  $\lambda(t)$  tale che:

$$r'(t) = \lambda(t)F(r(t))$$

Per determinare le linee di campo è quindi necessario risolvere il seguente sistema differenziale:

$$\begin{cases} x' = \lambda F_1(x, y, z) \\ y' = \lambda F_2(x, y, z) \\ z' = \lambda F_3(x, y, z) \end{cases}$$

Equivalente a:

$$\frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)}$$

Se il campo è ben definito, regolare e non nullo il sistema avrà una sola soluzione. Si ottiene quindi che per ogni punto dello spazio passa una e una sola linea di campo. Le linee di campo costituiscono dunque una famiglia di linee, a due a due prive di



intersezioni. Le linee di campo hanno significato in  $\mathbb{R}^n$  con  $n \geq 2$  e si ottengono in modi analoghi.

## 5.1. Gradiente, rotore e divergenza

Abbiamo visto le definizioni di gradiente e Laplaciano di funzioni reali:

$$\text{grad} = \nabla = i \frac{\delta}{\delta x} + j \frac{\delta}{\delta y} + k \frac{\delta}{\delta z}$$

$$\Delta = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}$$

Esistono altri due operatori di fondamentale importanza per quanto riguarda i campi vettoriali:

### 5.1.1. L'operatore rotore

L'operatore rotore agisce sui campi vettoriali tridimensionali:

**Definizione 5.2.** Sia  $F: \mathbb{R}^3 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vettoriale di classe  $C^1(\Omega)$ . Si definisce rotore di  $F$  il campo:

$$\text{rot} F = \nabla \times F = \left( \frac{\delta F_3}{\delta y} - \frac{\delta F_2}{\delta z} \right) i + \left( \frac{\delta F_1}{\delta z} - \frac{\delta F_3}{\delta x} \right) j + \left( \frac{\delta F_2}{\delta x} - \frac{\delta F_1}{\delta y} \right) k$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Il simbolo  $\nabla \times F$  rappresenta il prodotto vettoriale tra l'operatore gradiente e il campo vettoriale  $F$ . Nel caso in cui  $\nabla \times F = 0$ , il campo  $F$  si dice **irrotazionale**.

Nel caso di campo piano, ossia campo nella forma  $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), 0)$ , si ottiene:

$$\nabla \times F = \left( \frac{\delta F_2}{\delta x} - \frac{\delta F_1}{\delta y} \right) k$$

Possiamo dire che il vettore  $\nabla \times F$ , calcolato in un punto  $P$ , fornisce una misura di quanto il campo  $F$  “ruoti” attorno al punto  $P$ .

### 5.1.2. L'operatore divergenza

L'operatore **divergenza** agisce su campi  $n$  dimensionali:

**Definizione 5.3.** Sia  $F: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vettoriale  $F \in C^1(\Omega)$ ,  $F = (F_1, \dots, F_n)$ . Si definisce **divergenza di  $F$**  il campo scalare:

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \sum_{i=1}^n \frac{\delta F_i}{\delta x_i}$$

Ad esempio, considerato un campo  $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$  vale che:

$$\nabla \cdot F = \frac{\delta F_1}{\delta x} + \frac{\delta F_2}{\delta y} + \frac{\delta F_3}{\delta z}$$

$\operatorname{div} F$  risulta quindi una funzione reale di tre variabili. Il simbolo  $\nabla \cdot F$  denota il prodotto scalare formale dell'operatore  $\nabla$  e il campo  $F$ . Un campo a divergenza nulla in  $\Omega$  si dice **solenoidale** in  $\Omega$ .

### 5.1.3. Identità differenziali

Vediamo alcune relazioni tra gli operatori dei campi vettoriali. Innanzitutto, bisogna tenere conto che:

- Il gradiente trasforma una funzione reale in un campo vettoriale
- L'operatore rotore trasforma un campo vettoriale tridimensionale in un altro campo vettoriale tridimensionale
- L'operatore divergenza trasforma un campo vettoriale in una funzione reale

Consideriamo quindi un campo vettoriale  $F$  e una funzione reale  $u$ . Vale che:

1.  $\nabla \times (\nabla u) = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$
2.  $\nabla \cdot (\nabla \times F) = \operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$
3.  $\nabla \cdot (\nabla u) = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u$

La 3. Vale per  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $n$  qualunque.

## 5.2. Lavoro di un campo vettoriale

Un concetto fondamentale legato ai campi vettoriali, soprattutto in fisica, è il **lavoro**. Il lavoro compiuto da una forza  $F$  dovuto a uno spostamento  $dr = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$  è per definizione:

$$dL = F \cdot dr = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

Ciò è formalizzato dal seguente teorema:

**Definizione 5.4.** (*lavoro compiuto da un campo vettoriale*) Sia  $\gamma$  un arco di curva regolare a tratti, parametrizzata da  $r(t) = ix(t) + jy(t) + kz(t)$  con  $t \in [a, b]$ . Definiamo **integrale di linea** (o **lavoro**) di  $F$  lungo  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} F \cdot dr &= \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt \\ &= \int_a^b [F_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + F_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt\end{aligned}$$

Notiamo che la quantità  $F \cdot dr$  può essere riscritta come  $F \cdot T dt$  dove  $T$  è il versore tangente alla curva. Se inoltre la curva è semplice e chiusa, si usa il simbolo  $\oint_{\gamma} F \cdot dr$  e si chiama circuitazione del campo  $F$ .

**Esempio 5.1.**

Si consideri la curva  $r(t) = (\cos t, \sin t)$  con  $t \in [0, \pi]$  e il campo  $F(x, y) = (x^2, y^2)$ . Il lavoro di  $F$  lungo  $r$  è:

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = \int_0^{\pi} (-\sin t \cos^2 t + \cos t \sin^2 t) dt = -\frac{2}{3}$$

Avevamo precedentemente trovato come si calcola la lunghezza di una curva. Confrontiamo quel calcolo con il calcolo del lavoro:

- Calcolo lunghezza di una curva:

$$\int_a^b f(r(t)) |r'(t)| dt$$

- Calcolo del lavoro:

$$\int_a^b F(r(t)) r'(t) dt$$

Notiamo, come avevamo già appuntato, che nel primo caso un cambio di parametrizzazione non cambia il valore dell'integrale. Vale anche per il calcolo del lavoro, ma a patto che non cambi il verso di percorrenza della curva. Nel calcolo del lavoro possiamo quindi parlare di curve orientate.

### 5.2.1. Campi conservativi e potenziali

Per capire cosa si intende con campo conservativo, vediamo prima il seguente esempio:

**Esempio 5.2.**

Consideriamo il seguente campo piano:

$$V = -yi + xj$$

E calcoliamo l'integrale di linea lungo l'arco di spirale  $\rho = \theta$ , per  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Innanzitutto, parametrizziamo l'arco in questo modo:

$$\begin{aligned} r(\theta) &= (\theta \cos \theta, \theta \sin \theta) \\ r'(\theta) &= (\cos \theta - \theta^2 \sin \theta, \sin \theta + \theta^2 \cos \theta) \end{aligned}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} v \cdot dr &= \int_0^{2\pi} [-\theta \sin \theta (\cos \theta - \theta^2 \sin \theta) + \theta \cos \theta (\sin \theta + \theta^2 \cos \theta)] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta = \frac{8\pi^3}{3} \end{aligned}$$

Notiamo che in questo caso, l'integrale dipende da come è fatta la curva, e non solo dagli estremi. Tuttavia, vi sono campi vettoriali, detti **conservativi**, per cui il valore del lavoro dipende solo dagli estremi su cui è calcolato:

**Definizione 5.5.** *Un campo vettoriale  $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  si dice conservativo in  $\Omega$  se  $F$  è di classe  $C^1(\Omega)$  ed esiste una funzione  $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , detta potenziale di  $F$ , tale che  $U \in C^2(\Omega)$  e  $F = \nabla U$  in  $\Omega$ , cioè*

$$F_1 = \frac{\delta U}{\delta x} \quad F_2 = \frac{\delta U}{\delta y} \quad F_3 = \frac{\delta U}{\delta z}$$

La funzione  $E_{pot} = -U$  rappresenta l'energia potenziale associata al campo. Di fondamentale importanza sono i seguenti lemmi:

**Definizione 5.6.** *Sia  $F = \nabla U$  un campo conservativo in  $\Omega$  e sia  $\gamma$  una curva regolare a tratti, orientata e contenuta in  $\Omega$ , parametrizzata da  $r = r(t)$ , con  $t \in [a, b]$ . Siano  $p = r(a)$  e  $q = r(b)$ . Il lavoro di  $F$  lungo  $\Omega$  è dato da:*

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = U(q) - U(p)$$

Da ciò si ricava anche che **la circuitazione di un campo conservativo è nulla**. Possiamo inoltre dire che le seguenti tre affermazioni sono equivalenti:

1. Per ogni coppia di curve regolari a tratti  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  contenute in  $\Omega$  e aventi stesso punto iniziale e stesso punto finale:

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dr = \int_{\gamma_2} F \cdot dr$$

2. Per ogni curva chiusa  $\gamma$ , semplice regolare a tratti contenuta in  $\Omega$ :

$$\oint_{\gamma} F \cdot dr = 0$$

3.  $F$  è conservativo

## 5.3. Insiemi semplicemente connessi

Abbiamo precedentemente detto che un campo avente rotore nullo in tutto il suo dominio è detto **irrotazionale**. Notiamo subito che se  $F$  è conservativo e  $U$  è il suo potenziale, si ha per definizione  $F = \nabla U$  e allora  $\nabla \times F = 0$ , pertanto:

**Teorema 5.1** *Se  $F$  è un campo conservativo in  $\Omega$ , allora ivi è irrotazionale*

Notiamo che questa è una condizione necessaria, ma non è sufficiente: prendiamo il seguente esempio:

### Esempio 5.3.

Sia  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  e

$$F(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}i + \frac{x}{x^2 + y^2}j$$

Calcoliamo la circuitazione lungo la circonferenza unitaria, centrata nell'origine, di equazioni parametriche  $r(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Si ha:

$$\begin{aligned} r'(t) &= (-\sin t, \cos t) \\ \oint_{\gamma} F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} [-\sin t (-\sin t) + \cos t (\cos t)] dt = 2\pi \end{aligned}$$

Quindi  $F$  non è conservativo in  $\Omega$

Se prendiamo questo campo come campo piano:

$$F(x, y, z) = -\frac{y}{x^2 + y^2}i + \frac{x}{x^2 + y^2}j + 0k$$

Da cui il rotore:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \delta_x & \delta_y & \delta_z \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Il rotore è nullo in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ . Questo esempio mostra che l'irrotazionalità non è sufficiente a garantire che  $F$  sia conservativo. Prima di introdurre una condizione sufficiente, diamo una definizione intuitiva di aperto semplicemente connesso:

**Definizione 5.7.** *L'aperto  $\Omega$  si dice **semplicemente connesso** se è connesso e inoltre soddisfa la seguente condizione: ogni curva semplice, chiusa e interamente contenuta in  $\Omega$ , può essere ridotta mediante una trasformazione continua a un unico punto, senza mai uscire da  $\Omega$*

Riconsideriamo l'aperto  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ . Se prendiamo ad esempio la curva che ha come parametrizzazione:

$$r(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

Notiamo che non possiamo ridurla a un punto senza uscire da  $\Omega$ , pertanto esso non è un insieme semplicemente connesso. In altre parole, se un aperto non presenta né buchi né tagli allora è semplicemente connesso. Vale quindi il seguente teorema:

**Teorema 5.2**      *Sia  $F \in C^1(\Omega)$ , irrotazionale in  $\Omega$ . Se  $\Omega$  è semplicemente connesso, allora  $F$  è conservativo in  $\Omega$ .*

Consideriamo  $\nabla \times F = 0$  in un aperto  $\Omega$ . Ogni punto di  $\Omega$  ha un intorno sferico  $B_R$  contenuto in  $\Omega$ , e  $B_R$  è connesso. Concludiamo che se un campo è irrotazionale in un aperto  $\Omega$ , in ogni intorno di ogni punto di  $\Omega$  il campo è conservativo. Si dice allora che il campo  $F$  è **localmente conservativo** e che quindi esiste un **potenziale locale**.

## 6. Serie di potenze e di Fourier

Consideriamo un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  in cui sono definite le funzioni:

$$f_n I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{per } n = 1, 2, 3 \dots$$

Possiamo quindi, per ogni  $x \in I$ , considerare la successione reale  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ . Da questa successione si ricava quindi la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Per ogni  $x$  fissato la serie potrebbe essere convergente, divergente o irregolare. In particolare, se  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge per ogni  $x \in I^* \subseteq I$ , la serie di funzioni rappresenta una nuova funzione definita nell'intervallo  $I^*$ . In questo caso diremo che la serie di funzioni converge puntualmente in  $I^*$ .

### 6.1. Ripasso delle serie matematiche

---

Proponiamo un breve ripasso delle serie numeriche. Abbiamo già incontrato alcuni esempi di serie di funzioni:

- La **serie geometrica**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{per } -1 < x < 1$$

- La **serie esponenziale**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

E altre serie di Taylor di funzioni derivabili infinite volte, della forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Rivediamo anche alcuni dei criteri fondamentali per lo studio delle serie matematiche:

### 6.1.1. Serie a termini non negativi

Un **serie a termini non negativi** è una serie che può essere scritta come:

$$\sum a_n \text{ con } a_n \geq 0$$

Valgono per questo tipo di serie i seguenti teoremi:

#### *Il criterio del confronto*

**Teorema 6.1** Siano  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  due serie non negative tale che valga definitivamente  $a_n \leq b_n$ . Allora vale che:

Se  $\sum b_n$  converge  $\Rightarrow \sum a_n$  converge

Se  $\sum a_n$  diverge  $\Rightarrow \sum b_n$  diverge

#### *Il criterio del confronto asintotico*

**Teorema 6.2** Se due successioni a termini positivi  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  sono asintotiche:

$$a_n \sim b_n$$

Allora le corrispondenti serie  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  hanno lo stesso carattere.

#### *Il criterio del rapporto*

**Teorema 6.3** Data una serie  $\sum a_n$  a termini non negativi, se esiste  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ , possiamo dire che se:

$l > 1$ , allora la serie diverge

$l < 1$ , allora la serie converge

$l = 1$ , allora non ho informazioni sul carattere della serie

#### *Il criterio della radice*

**Teorema 6.4** Sia  $\sum a_n$  una serie a termini non negativi. Se esiste:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Possiamo dire che se:

$l > 1$ , la serie diverge

$l < 1$ , la serie converge

$l = 1$ , allora non ho informazioni sul carattere della serie

### 6.1.2. Serie a termini a segno variabile

Riprendiamo innanzitutto il concetto di convergenza assoluta:



**Teorema 6.5**     *Se una serie  $\sum a_n$  converge assolutamente (ossia  $\sum |a_n|$  converge), allora  $\sum a_n$  è convergente*

Ricordiamo inoltre che una **serie a termini di segno variabile** è una serie che può essere scritta come:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ con } a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Valgono per questo tipo di serie il **criterio di Leibniz**

**Teorema 6.1**     *Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  una serie a termini a segno alterno. Se  $\{a_n\}$  è decrescente e  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , allora la serie è convergente*

## 6.2. Serie di funzioni

E' importante capire quali sono le proprietà che una somma  $f$  della serie eredita dai termini  $f_n$ . Partiamo da una definizione fondamentale:

**Definizione 6.1.**     *Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo e siano  $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, 3, \dots$ . Diremo che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge totalmente in  $I$  se esiste una successione  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  di numeri reali positivi tale che:*

1.  $|f_n(x)| \leq a_n$  per ogni  $x \in I, n \in \mathbb{N}$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge

Notiamo che la convergenza totale implica la convergenza assoluta della serie, e pertanto la convergenza semplice. Perciò, se una serie di funzioni converge totalmente risulta ben definita la somma della serie:

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Vale quindi i seguenti teoremi:

**Teorema 6.2**     **(continuità della somma)** *Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo, siano continue in  $x_0 \in I$  le funzioni  $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, 3, \dots$  e supponiamo che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converga totalmente in  $I$ . Allora la somma della serie:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

è una funzione continua in  $x_0$ . In particolare, se le  $f_n$  sono continue in  $I$ , anche  $f$  è continua in  $I$

Per quanto riguarda la derivabilità:

**Teorema 6.3** (*derivabilità termine a termine*) Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo, siano  $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabili in  $I$  per  $n = 1, 2, 3, \dots$  e supponiamo che:

- la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converga per ogni  $x \in I$

- la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$  converga totalmente in  $I$

Allora, detta  $f(x)$  la somma della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ , si ha che  $f$  è derivabile in  $I$  e:

$$f'(x) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad \text{per ogni } x \in I$$

Per quanto riguarda l'integrabilità:

**Teorema 6.4** (*integrabilità termine a termine*) Siano  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue per  $n = 1, 2, 3, \dots$  e supponiamo che la serie converga totalmente in  $[a, b]$  a una funzione  $f$  (continua). Allora la serie è integrabile termine a termine:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right)$$

## 6.3. Serie di potenze

Una particolare categoria di serie di funzioni sono le **serie di potenze**:

**Definizione 6.2.** Si dice serie di potenze di centro  $x_0 \in \mathbb{R}$  una serie di funzioni del tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Dove  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  è una successione a valori reali e  $x$  è una variabile reale. Gli  $a_n$  si dicono **coefficienti della serie di potenze**.

Per le serie di potenze, l'insieme di  $x$  in cui si ha convergenza è sempre un intervallo, detto **intervallo di convergenza**; la metà della lunghezza dell'intervallo è detto **raggio di convergenza**:

**Teorema 6.5** Consideriamo la serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

e supponiamo che esista il limite:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{ponendo} \quad R = \begin{cases} \frac{1}{l} & \text{se } l \neq 0, \infty \\ +\infty & \text{se } l = 0 \\ 0 & \text{se } l = \infty \end{cases}$$

Allora:

- se  $|x - x_0| < R$ , la serie converge assolutamente
- se  $|x - x_0| > R$ , la serie non converge

Notiamo che il teorema non specifica cosa succede per  $|x - x_0| = R$ . In tal caso la serie potrebbe convergere, divergere o essere irregolare. Se invece  $|x - x_0| > R$  la serie potrebbe sia divergere che essere irregolare.

### Dimostrazione 6.1

La dimostrazione di questo teorema è immediata: sia  $|x - x_0| < R$  e mostriamo che la serie a termini positivi  $\sum |a_n(x - x_0)^n|$  converge sfruttando il criterio della radice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = |x - x_0| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x - x_0|}{R} < 1$$

Perciò la serie converge assolutamente.

Sia ora  $|x - x_0| > R$ . Ragionando analogamente si ottiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = |x - x_0| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x - x_0|}{R} > 1$$

Perciò la serie non converge assolutamente.

Possiamo quindi riformulare scrivendo:

**Teorema 6.6** *Data una serie di potenze, si dice **raggio di convergenza** un numero  $R \in [0, +\infty)$  con le proprietà espressa dal teorema precedente, ossia tale che, se  $|x - x_0| < R$ , converge e se  $|x - x_0| > R$  diverge.*

Si può inoltre dimostrare che per ogni serie di potenze il limite  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  esiste ed è unico, e che quindi ogni serie di potenze ammette uno e un solo raggio di convergenza. Per il calcolo del raggio di convergenza si usa il seguente teorema:

**Teorema 6.7** *(criterio del rapporto per le serie di potenze) Consideriamo una serie di potenze, e supponiamo che esista finito o infinito il limite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$$

Allora il raggio di convergenza è dato da:

$$R = \frac{1}{l}$$

La dimostrazione è analoga a quella appena mostrata. Per calcolare il raggio di convergenza della serie è quindi possibile scegliere tra il [TEOREMA 6.5](#) e il [TEOREMA 6.7](#).

### Esempio 6.1.

Consideriamo la serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Abbiamo quindi che  $x_0 = 0$  e  $a_n = n!$ . Calcoliamo quindi il raggio di convergenza col criterio del rapporto:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = 1$$

$$R = \frac{1}{1} = 1$$

Abbiamo quindi convergenza assoluta in  $x \in (-1, 1)$ . Vediamo cosa succede agli estremi dell'intervallo:

$$x = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{converge a } e$$

$$x = -1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \quad \text{converge per il criterio di Leibniz}$$

Per tanto la serie converge per  $x \in [-1, 1]$

## 6.3.1. Proprietà delle serie di potenze

Vediamo ora le principali proprietà delle serie di potenze: considerata una serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Con raggio di convergenza  $R$  positivo (finito o infinito), allora:

1. Per ogni numero  $r \in (0, R)$  converge totalmente nell'intervallo  $[x_0 - r, x_0 + r]$

2. La somma della serie è una funzione continua nell'intervallo  $(x_0 - R, x_0 + R)$
3. La somma della serie è una funzione derivabile nell'intervallo  $(x_0 - R, x_0 + R)$  e la serie può essere derivata termine a termine:

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

La serie derivata è anch'essa una serie di potenze di centro  $x_0$  con lo stesso raggio di convergenza  $R$  di quella di partenza

4. La serie derivata è a sua volta derivabile e il processo può essere iterato infinite volte mantenendo le proprietà della serie
5. La somma della serie ammette primitiva nell'intervallo  $(x_0 - R, x_0 + R)$  che può essere calcolata termine a termine:

$$\int \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} + c$$

La serie primitiva è anch'essa una serie di potenze di centro  $x_0$  con lo stesso raggio di convergenza  $R$  di quella di partenza

6. Per ogni intervallo  $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ , la somma della serie è integrabile in  $[a, b]$  e si può integrare termine a termine:

$$\int_a^b \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_a^b a_n (x - x_0)^n dx \right)$$

### 6.3.2. Serie di Taylor e serie di potenze

Confrontiamo ora le serie di potenze con le serie di Taylor: data una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile infinite volte in  $x_0 = 0$ , possiamo scrivere il suo sviluppo di MacLaurin con resto secondo Lagrange:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + E_n(x)$$

Dove, per ogni  $x$  in un intorno  $I$  di 0:

$$E_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Per un opportuno  $c \in (0, x)$  dipendente da  $n$  e da  $x$ . Se si riesce a dimostrare che per ogni  $x \in I$ ,  $E_n(x) \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$  allora  **$f$  si può rappresentare come serie di MacLaurin:**

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad \forall x \in I$$

In tal caso si può quindi vedere come somma di serie di potenze, da cui si deduce che  $I$  sarà del tipo  $(-R, R)$ . Considerando ora una serie di potenze:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \forall x \in (-R, R)$$

Con raggio  $R > 0$ , possiamo ora scriverla come serie di MacLaurin? La risposta è sì, infatti se calcoliamo le derivate nell'origine si ottiene:

$$f^{(k)}(0) = \frac{a_k}{k!}$$

Da cui:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Quindi la classe delle funzioni sviluppabili in serie di MacLaurin coincide con la classe delle serie di potenze di centro nell'origine aventi raggio di convergenza positivo. Un discorso analogo vale per gli sviluppi di Taylor: le funzioni sviluppabili in serie di Taylor di centro  $x_0$  per  $x$  in un intorno di  $x_0$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Sono tutte e sole le serie di potenze centrate in  $x_0$  con raggio  $R > 0$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

**Definizione 6.3.** Una funzione si dice **analitica** in un intervallo  $(a, b)$  se per ogni  $x_0 \in (a, b)$  la funzione è sviluppabile in serie di potenze (ovvero in serie di Taylor) di centro  $x_0$  con raggio di convergenza positivo

Le seguenti funzioni sono analitiche in tutto  $\mathbb{R}$ :

$$e^x \quad \sin x \quad \cos x \quad \operatorname{Sh} x \quad \operatorname{Ch} x$$

Le seguenti sono invece analitiche in  $(-1, +\infty)$ :

$$\log(1+x) \quad (1+x)^\alpha$$

## 6.4. Serie di Fourier

Prima di introdurre le serie di Fourier, vediamo alcuni concetti fondamentali:

### 6.4.1. Polinomi e serie trigonometriche

Le funzioni  $\sin nx$  e  $\cos nx$  sono funzioni periodiche di periodo  $\frac{2\pi}{n}$ . Lo stesso vale per combinazioni lineari di queste due funzioni, ad esempio:

$$\frac{1}{2} \sin nx + 5 \cos nx$$

E' ancora una funzione  $\frac{2\pi}{n}$  periodica. Se prendiamo invece ad esempio una combinazione lineare fatta in questo modo:

$$\frac{1}{2} \sin 5x + 5 \cos 2x$$

Essa sarà (almeno)  $\pi$ , ossia il periodo della funzione  $\cos 2x$ , la funzione con periodo più ampio. Fourier ipotizzò che ogni funzione sia scrivibile come combinazione lineare di funzioni periodiche del tipo:

$$\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx$$

Precisiamo il discorso:

**Definizione 6.4.** Si dice **polinomio trigonometrico** di ordine  $n$  una funzione del tipo:

$$P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

dove  $a_k, b_k$  sono numeri reali o complessi assegnati.

Inoltre:

**Definizione 6.5.** Si dice **serie trigonometrica** di ordine  $n$  una funzione del tipo:

$$P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

dove  $a_k, b_k$  sono numeri reali o complessi assegnati.

Non abbiamo informazioni sulla convergenza e in generale sulle proprietà della serie. Possiamo però affermare che tale funzione è  $2\pi$  periodica.

### 6.4.2. Convergenza delle serie trigonometriche

Consideriamo una serie trigonometrica. Se i coefficienti  $a_k, b_k$  non tendono a 0 allora sicuramente la serie non converge. Nel caso in cui tendano a 0 possiamo scrivere:

$$|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leq |a_k| + |b_k|$$

Se  $a_k$  e  $b_k$  tendono “abbastanza velocemente” a 0, in modo che  $\sum |a_k|, \sum |b_k|$  convergano, allora la serie converge totalmente in  $\mathbb{R}$ . Formalizzando:

**Teorema 6.8** *Data una serie trigonometrica, se le serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

*convergono, allora la serie converge totalmente in  $\mathbb{R}$*

Nel caso in cui non convergano le due serie, dobbiamo studiare ulteriormente il comportamento della serie trovata. Vale il seguente criterio:

**Teorema 6.9** *(criterio di Dirichlet) Sia  $\{a_n\}$  una successione a valori reali positivi che tende monotonamente a 0. Allora le serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

*Convergono per  $x \in (0, 2\pi)$ . Negli estremi  $0, 2\pi$  la serie di coseni può convergere o no, mentre la serie di seni è identicamente nulla.*

### 6.4.3. Coefficienti della serie di Fourier

Ci poniamo ora la seguente domanda: data una funzione  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , sotto quali condizioni può essere scritta come serie trigonometrica? E come si calcolano i coefficienti  $a_n, b_n$ ?

Consideriamo lo spazio vettoriale  $V$  delle funzioni  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabili (quindi limitate), con prodotto scalare:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

E quindi con norma:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Lo spazio  $V$  include quindi le funzioni  $C[0, 2\pi]$ . Valgono le seguenti proprietà:

**Teorema 6.10** *Le funzioni trigonometriche  $\sin kx$ ,  $\cos kx$  soddisfano le seguenti relazioni integrali per ogni  $k, h = 1, 2, 3, \dots$ :*



$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (\sin kx)^2 dx &= \int_0^{2\pi} (\cos kx)^2 dx = \pi \\ \int_0^{2\pi} \sin kx \sin hx dx &= \int_0^{2\pi} \cos kx \cos hx dx = 0 \text{ se } h \neq k \\ \int_0^{2\pi} \sin kx \cos hx dx &= \int_0^{2\pi} \sin kx dx = \int_0^{2\pi} \cos hx dx = 0\end{aligned}$$

Ciò equivale a dire che le funzioni:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \quad \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Costituisce una base ortonormale di  $V$ . Supponiamo quindi di avere una funzione che può essere scritta come:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Possiamo quindi scrivere, per ogni  $m \geq 0$ , per il teorema appena scritto vale che:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x) \sin(mx) dx &= \int_0^{2\pi} \sin(mx) \left( \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \sin(mx) (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) dx = \pi b_m\end{aligned}$$

E analogamente:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx) dx = \pi a_m$$

Inoltre:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(0x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx = 2\pi \frac{a_0}{2} = \pi a_0$$

Da cui si ricava il seguente teorema:

**Teorema 6.11** *Se una funzione  $f$  è  $2\pi$  periodica si può scrivere come serie trigonometrica dove:*

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ a_n &= \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ b_n &= \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx\end{aligned}$$

I coefficienti vengono detti **coefficienti di Fourier** di  $f$  e la serie trigonometrica viene detta **serie di Fourier**. Notiamo che perché questi coefficienti siano calcolabili deve valere che l'integrale:

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| dx$$

**converga**. Non possiamo ancora dire come e se la serie di Fourier associata alla funzione converga a  $f$ .

### 6.4.4. Convergenza in media quadratica

Introduciamo quindi una nuova forma di convergenza: diciamo che la serie **converge in media quadratica a  $f$**  se:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^k (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right|^2 dx = 0$$

Da cui il seguente teorema:

**Teorema 6.12** *Sia  $f$  una funzione  $2\pi$  periodica tale che  $\int_0^{2\pi} f^2$  converga. Allora la sua serie di Fourier converge a  $f$  in media quadratica.*

Ritornando al concetto di spazio vettoriale, la convergenza in media quadratica ci dice che  $f$  è approssimato dalla sua proiezione su sottospazi generati dalla somma parziale delle funzioni  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(nx), \sin(nx) \right\}_{n=1}^k$  e che l'approssimazione cresce al crescere di  $k$ .

Vale quindi una versione infinito-dimensionale del Teorema di Pitagora:

**Teorema 6.13** *(identità di Parseval) Sia  $f \in V$  e sia definita la sua serie di Fourier. Allora:*

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Il termine  $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx$  rappresenta l'ipotenusa al quadrato, mentre la serie a secondo membro rappresenta il quadrato dell'ipotenusa, mentre il secondo membro rappresenta la somma dei quadrati dei cateti.

### 6.4.5. Convergenza della serie di Fourier

Avendo definito un nuovo tipo di convergenza, possiamo dire che:

*convergenza totale  $\Rightarrow$  convergenza in media quadratica  
 $\Rightarrow$  convergenza puntuale su sottosuccessioni **quasi in ogni punto***

Vi sono inoltre teoremi che garantiscono la convergenza puntuale:

**Definizione 6.6.** Diciamo che  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  è **regolare a tratti** se è limitata in  $[0, 2\pi]$  e se l'intervallo  $[0, 2\pi]$  si può scomporre in un numero finito di sottointervalli su ciascuno dei quali  $f$  è continua e derivabile; inoltre devono esistere finiti agli estremi dei sottointervalli i limiti di  $f$  e  $f'$

Quindi una funzione limitata è regolare in un intervallo se continua e se in quell'intervallo non vi sono né asintoti verticali né punti a tangenza verticale. Vale quindi il seguente teorema:

**Teorema 6.14** Sia  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  regolare a tratti. Allora la sua serie di Fourier converge in ogni punto  $x_0 \in [0, 2\pi]$  alla media dei due limiti  $f(x_0^\pm)$ :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

Con la convenzione che  $f(0^\pm) = f(2\pi^\pm)$ . Inoltre, se  $f$  è continua in  $x_0$  allora la serie converge a  $f(x_0)$

Vediamo due esempi che riassumono ciò che è stato detto sulle serie di Fourier:

### Esempio 6.2.

Consideriamo la funzione:

$$\begin{aligned} f: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= x \end{aligned}$$

E vogliamo scrivere la serie di Fourier associata alla funzione. Notiamo innanzitutto che la funzione è continua e non presenta punti a tangenza verticale nell'intervallo  $[0, 2\pi]$ , siamo quindi sicuri che in  $(-\pi, \pi)$  la funzione converga a  $f(x)$ . Calcoliamo i coefficienti di Fourier:

$a_0$ :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$a_n$ :

$$\begin{aligned} \int x \cos(nx) dx &= x \frac{\sin(nx)}{n} - \int \frac{\sin(nx)}{n} = -x \frac{\sin(nx)}{n} - \frac{\cos(nx)}{n^2} \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos(nx) dx = 0 \end{aligned}$$

$b_n$ :

$$\int x \sin(nx) dx = -x \frac{\cos(nx)}{n} + \int \frac{\cos(nx)}{n} = -x \frac{\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(nx) dx = -\frac{2}{n}$$

Otteniamo quindi la serie di Fourier associata alla funzione:

$$f(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{2}{n} \sin(nx) \right)$$

La serie converge a  $f(x)$  in tutti i punti tranne che in  $x_0 = 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . In questi punti la serie converge a:

$$f(2k\pi) = \frac{f(2k\pi^-) - f(2k\pi^+)}{2} = 0$$

### Esempio 6.3.

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = x^7$$

Nel periodo  $(-\pi, \pi)$  estesa con periodicità in tutto  $\mathbb{R}$ . Ci viene chiesto di calcolare il valore della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Potremmo trovare questo valore calcolando i coefficienti di Fourier, ma risulta più facile sfruttare l'identità di Parseval. Calcoliamoci quindi  $a_0$ :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

Ora dall'identità di Parseval si ha che:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Quindi:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^{14} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^{15}}{15} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{15} \pi^{14}$$

Se avessimo provato a calcolare i coefficienti  $a_n, b_n$  avremmo dovuto usare 7 volte l'integrazione per parti per ognuno dei due coefficienti.