FACULTY OF ENGINEERING
CHULALONGKORN UNIVERSITY
2110327 ALGORITHM DESIGN
Year II, Second Semester, Midterm Examination, March 8, 2019 13:00-16:00

ชื่อ-นามสกุล.....เลขประจำตัว.....ตอนเรียนที่.....เลขที่ใน CR58.....

<u>หมายเหตุ</u>

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 9 ข้อ ในกระดาษคำถาม 6 หน้า
2. **ไม่อนุญาตให้นำตำราและเอกสารใดๆ เข้าในห้องสอบ**
3. **ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณใดๆ**
4. ห้ามการหยิบยืมสิ่งใดๆ ทั้งสิ้น จากผู้สอบอื่นๆ เว้นแต่เจ้าหน้าที่ควบคุมการสอบจะหยิบยืมให้
5. ห้ามนำส่วนใดส่วนหนึ่งของข้อสอบและสมุดคำตอบออกจากห้องสอบ
6. ผู้เข้าสอบสามารถออกจากห้องสอบได้ หลังจากผ่านการสอบไปแล้ว 45 นาที
7. เมื่อหมดเวลาสอบ ผู้เข้าสอบต้องหยุดการเขียนใดๆ ทั้งสิ้น
8. **นิสิตกระทำผิดเกี่ยวกับการสอบ ตามข้อบังคับจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย มีโทษ คือ พ้นสภาพการเป็นนิสิต หรือ ได้รับ สัญลักษณ์ F ในรายวิชาที่กระทำผิด และอาจพิจารณาให้ถอนรายวิชาอื่นทั้งหมดที่ลงทะเบียนไว้ในภาคการศึกษานี้**

ห้ามนิสิตพกโทรศัพท์และอุปกรณ์สื่อสารไว้กับตัวระหว่างสอบ หากตรวจพบจะถือว่านิสิตกระทำผิดเกี่ยวกับการสอบ อาจต้องพ้นสภาพการเป็นนิสิต หรือ ให้ได้รับ F และอาจพิจารณาให้ถอนรายวิชาอื่นทั้งหมดที่ลงทะเบียนไว้ในภาคการศึกษานี้

*** ร่วมรณรงค์การไม่กระทำผิดและไม่ทุจริตการสอบที่คณะวิศวกรรมศาสตร์ ***

ข้าพเจ้ายอมรับในข้อกำหนดที่กล่าวมานี้ ข้าพเจ้าเป็นผู้ทำข้อสอบนี้ด้วยตนเองโดยมิได้รับการช่วยเหลือหรือให้ความช่วยเหลือ ในการทำข้อสอบนี้

ลงชื่อนิสิต.....

วันที่.....

1. (10 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้สั้น ๆ ไม่ต้องอธิบาย

- $\log 1 + \log 2 + \log 3 + ... + \log (n-1) + \log n$ = $\Theta($ $n \log(n)$ $)$
- $1 + 2 + 3 + ... + n$ = $\Theta($ n^2 $)$
- การเรียงลำดับข้อมูลที่เรียงลำดับอยู่แล้ว n ตัวด้วย selection sort ใช้เวลา = $\Theta($ n^2 $)$
- การเรียงลำดับข้อมูลที่เรียงลำดับอยู่แล้ว n ตัวด้วย insertion sort ใช้เวลา = $\Theta($ n $)$
- การเรียงลำดับข้อมูลที่เรียงลำดับอยู่แล้ว n ตัวด้วย merge sort ใช้เวลา = $\Theta($ $n \log(n)$ $)$
- ให้ $T(n) = T(n-2) + \Theta(n)$, $T(0) = \Theta(1)$ จะได้ว่า $T(n)$ = $\Theta($ n^2 $)$
- ให้ $T(n) = 3T(n-1) + \Theta(1)$, $T(0) = \Theta(1)$ จะได้ว่า $T(n)$ = $\Theta($ 3^n $)$
- ให้ $T(n) = 3T(n/3) + \Theta(1)$, $T(0) = \Theta(1)$ จะได้ว่า $T(n)$ = $\Theta($ n $)$
- การหา median of medians of fives ของข้อมูล n ตัว ด้วยวิธีที่เรียนมา ใช้เวลา = $\Theta($ - $)$
- การหา longest common subsequence ของสตริงที่ยาว n สองตัวในกรณีแย่สุด ด้วยวิธี dynamic programming ที่เรียนมา ใช้เวลา = $\Theta($ n^2 $)$

2. (10 คะแนน) จงวิเคราะห์ว่าอัลกอริทึมข้างล่างนี้ใช้เวลา**เป็น Θ อะไรของตัวแปร n** (ให้การดำเนินการพื้นฐานเช่น * / + – และอื่น ๆ ใช้เวลา $\Theta(1)$ และการหาร / เป็นการหารแบบปัดเศษทิ้ง) **แสดงวิธีทำด้วยในช่องทางขวา**

`EE(A[1..n][1..n], B[1..n][1..n]) {`
`  C = new array[1..n][1..n]`
`  for (i=0; i<n; i++) {`
`  for (j=0; j<n; j++) {`
`  C[i][j] = 0`
`  for (k=0; k<n; k++)`
`  C[i][j] += A[i][k]*B[k][j]`
`  }`
`  }`
`  return C`
`}`
	$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} 1 = \Theta(n^3)$

`RR( n ) {`
`  if (n==2) return 2*n`
`  for (k=0; k<n; k++)`
`  for (i=0; i<k; i++)`
`  s += 2*k - i*i + 4`
`  for (k=0; k<4; k++)`
`  s += RR(n/2)`
`  return s`
`}`
	$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) \sim \Theta(n^2)$
	By Master Theorem : $c = \log_2 4 = 2$
	$\therefore T(n) = \Theta(n^2 \log n)$

`MM( d[1..n], t[1..n] ) {`
`  i = 1; j = n; k = 1`
`  m = n/2`
`  while (i<=m and j<=n) {`
`  if (d[i] < d[j]) t[k++] = d[i++]`
`  else t[k++] = d[j++]`
`  }`
`  while (i<=m) t[k++] = d[i++]`
`  while (j<=n) t[k++] = d[j++]`
`  for (k = 1; k < n; k++) d[k] = t[k]`
`}`
	$\Theta(n)$

`SS( d[1..n] ) { # ทุกช่องใน d เก็บจำนวนเต็มบวก`
`  SS( d, n, new array_of_zeros[n] )`
`}`
`SS( d[1..n], m, A[1..n] ) {`
`  if (m < 1) return 1`
`  if (m < 4) return d[m]`
`  if (A[m] > 0) return A[m]`
`  x1 = d[m]*SS(d, m-1, A)`
`  x2 = d[m-1]*SS(d, m-2, A)`
`  x3 = d[m-2]*SS(d, m-3, A)`
`  A[m] = x1 + x2 + x3`
`  return A[m]`
`}`
	$\Theta(n)$

`SO(d[1..n]) {`
`  for (k = 0; k < n; k++)`
`  insertion_sort( d )`
`}`
	$\Theta(n^2)$

3. (10 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้ในช่องว่างที่กำหนดให้ ไม่ต้องแสดงวิธีทำ

- $7^{47} \bmod 11$ มีค่าเท่ากับ .....
- median-of-medians of 5 ของ [1,3,29,4,5], [14,11,19,18,21], [32,12,25,7,24], [13,17,2,15,20], [21,29,26,8,9] คือ .....
- การ merge ข้อมูล [1, 3, 8, 9] กับ [2, 4, 6, 7] จะเกิดการเปรียบเทียบข้อมูลจาก 2 อาเรย์นี้ ..... ครั้ง
- ให้ X = "ABCABC", ค่าของ Y ที่ทำให้การหา longest common subsequence ของ X กับ Y แบบ top-down (ไม่มี memoization) ทำงานได้เร็วสุด ๆ คือ .....
- ให้ v = [15, 20, 20, 24, 40] และ w = [5, 4, 2, 4, 8] แทนมูลค่าและน้ำหนักของของ 5 ชิ้น และให้มีถุงที่รับน้ำหนักไม่เกิน 10 ต้องเลือกชิ้นไหน เท่าไร แบบ fractional จึงได้มูลค่ารวมสูงสุด .....
- ให้ v = [15, 20, 20, 24, 40] และ w = [5, 4, 2, 4, 8] แทนมูลค่าและน้ำหนักของของ 5 ชิ้น และให้มีถุงที่รับน้ำหนักไม่เกิน 10 ต้องเลือกชิ้นไหน แบบ 0/1 จึงได้มูลค่ารวมสูงสุด .....
- ให้ A = [(0,3), (5,8), (2,4), (4,5), (5,7), (7,9), (3,6)] แทนรายการของเวลาเริ่มและเวลาสิ้นสุดของกิจกรรมต่าง ๆ เราต้องเลือกกิจกรรมใดบ้าง (ที่ไม่ซ้อนเหลื่อมกัน) จึงได้จำนวนกิจกรรมมากสุด .....
- ให้ F = [('a',1), ('b',2), ('c',4), ('d',8), ('e',16), ('f',32), ('g',64)] แทนรายการของตัวอักษรและความถี่ของข้อมูลชุดหนึ่ง ถ้าเราเข้ารหัสตัวอักษรชุดนี้ด้วยรหัสแบบ Huffman จะใช้ข้อมูลจำนวน ..... บิตในการแทนข้อมูลชุดนี้ทั้งหมด
- มีข้อมูลอยู่ 1,000 ตัวที่เรียงลำดับจากมากมาน้อยแล้ว (ซ้ายไปขวา) ในอาเรย์หนึ่ง การค้นข้อมูลในอาเรย์นี้ด้วย binary search จะพิจารณาข้อมูลในอาเรย์ไม่เกิน ..... ตัว
- ให้ A_1, A_2, A_3 และ A_4 คือเมทริกซ์ขนาด 5×100, 100×2, 2×100 และ 100×5 ตามลำดับ ถ้าต้องการหาผลคูณของ $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ ควรจัดลำดับการคูณอย่างไรจึงจะหาผลคูณได้เร็วสุด ... . (ตอบโดยใส่วงเล็บเพื่อกำหนดลำดับการคูณ)

4. (6 คะแนน) จากตารางค่าของคำตอบของปัญหาที่ใช้กำหนดการพลวัตต่อไปนี้ จงสร้างตารางของการตัดสินใจที่ถูกต้อง

- Longest Common Subsequence (เติม ↑ หรือ ← หรือ ↖)

		A	A	B	C	A	C	A
	0	0	0	0	0	0	0	0
A	0	1	1	1	1	1	1	1
B	0	1	1	2	2	2	2	2
C	0	1	1	2	3	3	3	3
A	0	1	2	2	3	4	4	4
C	0	1	2	2	3	4	5	5
C	0	1	2	2	3	4	5	5
A	0	1	2	2	3	4	5	6

		A	A	B	C	A	C	A
A		↖	←↖	←	←	←	←	←
B		↑	←↑	↖	←	←	←	←
C		↑	←↑	↑	↖	←	←↖	←
A		↑	↖	←↑	↑	↖	←	←↖
C		↑	↑	←↑	↖↑	↑	↖	←
C		↑	↑	↑	↖↑	↑	↖↑	←↑
A		↑	↖↑	←↑	↑	↖↑	↑	↖

- 0/1 Knapsack (เติม ✓ หรือ ✘ แทนการเลือกไม่เลือก)

	capacity								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
empty	0	0	0	0	0	0	0	0	0
value=12 weight=4	0	0	0	0	12	12	12	12	12
value=10 weight=6	0	0	0	0	12	12	12	12	12
value=8 weight=5	0	0	0	0	12	12	12	12	12
value=14 weight=3	0	0	0	14	14	14	14	26	26
value=7 weight=1	0	7	7	14	21	21	21	26	33
value=9 weight=6	0	7	7	14	21	21	21	26	33
value=9 weight=2	0	7	9	16	21	23	30	30	33

	capacity								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
empty									
value=12 weight=4									
value=10 weight=6									
value=8 weight=5									
value=14 weight=3									
value=7 weight=1									
value=9 weight=6									
value=9 weight=2									

5. (10 คะแนน) ให้ D เป็นอาเรย์ขนาด n ช่อง ภายในเก็บจำนวนเต็ม 0 ถึง n แต่มีค่าหนึ่งหายไป (ที่ไม่ใช่ n) ข้อมูลใน D เรียงจากน้อยไปมากแล้ว เช่น D = [0,1,2,4,5,6,7] มี 3 หายไป, D = [1,2,3,4,5,6] มี 0 หายไป โดยไม่มีกรณีไม่มีตัวหาย เช่น D = [0,1,2,3,4,5]) จงเขียนรหัสเทียมของอัลกอริทึมที่ใช้เวลา $O(\sqrt{n})$ เพื่อหาข้อมูลที่หายไปในอาเรย์ D

```
missing( D[0..n-1] ) {



}
```

ยกตัวอย่างประกอบ

6. (10 คะแนน) ให้ D คืออาเรย์ขนาด n ช่องที่เก็บจำนวนเต็ม จงเขียนรหัสเทียมของอัลกอริทึมที่ใช้เวลา $O(\log n)$ เพื่อหาค่า "peak" (ขอค่า peak สักหนึ่งค่า) ใน D โดย peak คือค่าในอาเรย์ที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ ค่าของตัวก่อนหน้าทางซ้ายหนึ่งตัวและตัวถัดไปทางขวาหนึ่งตัว (ถ้าไม่มีตัวก่อนหน้าหรือตัวถัดไป ก็พิจารณาอีกข้างหนึ่งที่มีก็พอ) เช่น D = [9, 7, 7, 99, 4, 5, 6, 6, 5, 8] มี 9, 99, 6 และ 8 เป็น peak

```
peak( D[0..n-1] ) {



}
```

ยกตัวอย่างประกอบ

7. (10 คะแนน) จากความสัมพันธ์เวียนบังเกิดข้างล่างนี้ จงเขียนรหัสเทียมเพื่อแก้ปัญหานี้ด้วย bottom up dynamic programming

$$F(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i == 0 \text{ or } j == n \\ \max(F(i-1,j), F(i, j+p[i]) + q[i]) & \text{if } j + p[i] \le n \\ F(i-1,j) & \text{otherwise} \end{cases}$$

1. (10 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้สั้น ๆ ไม่ต้องอธิบาย

- $\log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots + \log(n-1) + \log n$ = $\Theta($ $n \log n$ $)$ หรือ $\Theta(n!)$
- $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ = $\Theta($ n^2 $)$
- การเรียงลำดับข้อมูลที่เรียงลำดับอยู่แล้ว n ตัวด้วย selection sort ใช้เวลา = $\Theta($ n^2 $)$
- การเรียงลำดับข้อมูลที่เรียงลำดับอยู่แล้ว n ตัวด้วย insertion sort ใช้เวลา = $\Theta($ n $)$
- การเรียงลำดับข้อมูลที่เรียงลำดับอยู่แล้ว n ตัวด้วย merge sort ใช้เวลา = $\Theta($ $n \log n$ $)$
- ให้ $T(n) = T(n-2) + \Theta(n)$, $T(0) = \Theta(1)$ จะได้ว่า $T(n)$ = $\Theta($ n^2 $)$
- ให้ $T(n) = 3T(n-1) + \Theta(1)$, $T(0) = \Theta(1)$ จะได้ว่า $T(n)$ = $\Theta($ 3^n $)$
- ให้ $T(n) = 3T(n/3) + \Theta(1)$, $T(0) = \Theta(1)$ จะได้ว่า $T(n)$ = $\Theta($ n $)$
- การหา median of medians of fives ของข้อมูล n ตัว ด้วยวิธีที่เรียนมา ใช้เวลา = $\Theta($ n $)$
- การหา longest common subsequence ของสตริงที่ยาว n สองตัวในกรณีแย่สุดด้วยวิธี dynamic programming ที่เรียนมา ใช้เวลา = $\Theta($ n^2 $)$

2. (10 คะแนน) จงวิเคราะห์ว่าอัลกอริทึมข้างล่างนี้ใช้เวลา**เป็น Θ อะไรของตัวแปร `n`** (ให้การดำเนินการพื้นฐานเช่น `* / + -` และอื่น ๆ ใช้เวลา $\Theta(1)$ และการหาร `/` เป็นการหารแบบปัดเศษทิ้ง) **แสดงวิธีทำด้วยในช่องทางขวา**

`EE(A[1..n][1..n], B[1..n][1..n]) {`
`  C = new array[1..n][1..n]`
`  for (i=0; i<n; i++) {`
`  for (j=0; j<n; j++) {`
`  C[i][j] = 0`
`  for (k=0; k<n; k++)`
`  C[i][j] += A[i][k]*B[k][j]`
`  }`
`  }`
`  return C`
`}`
	$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\Theta(1) = \Theta(n^3)$

`RR( n ) {`
`  if (n==2) return 2*n`
`  for (k=0; k<n; k++)`
`  for (i=0; i<k; i++)`
`  s += 2*k - i*i + 4`
`  for (k=0; k<4; k++)`
`  s += RR(n/2)`
`  return s`
`}`
	$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$
	ใช้ master method: $n^{log_2 4} = n^2$
	$\therefore T(n) = \Theta(n^2 \log n)$

`MM( d[1..n], t[1..n] ) {`
`  i = 1; j = n; k = 1`
`  m = n/2`
`  while (i<=m and j<=n) {`
`  if (d[i] < d[j]) t[k++] = d[i++]`
`  else t[k++] = d[j++]`
`  }`
`  while (i<=m) t[k++] = d[i++]`
`  while (j<=n) t[k++] = d[j++]`
`  for (k = 1; k < n; k++) d[k] = t[k]`
`}`
	ข้อนี้โจทย์ผิด ไปเขียน `j = n` ตอนเริ่มต้น
	(ควรเขียน `j = m+1`) แต่ไม่เป็นไร ยึดตามที่เขียนผิด จะได้ว่า
	while แรก เข้าวงวน 1 รอบ ใช้เวลา $\Theta(1)$
	while ที่สอง i = 1, 2, ... n/2 ใช้เวลา $\Theta(n)$
	while ที่สาม เข้าวงวน 0 หรือ 1 รอบ ใช้เวลา $\Theta(1)$
	for ล่างสุด $\Theta(n)$ รวมทั้งหมดเป็น $\Theta(n)$

`SS( d[1..n] ) { # ทุกช่องใน d เก็บจำนวนเต็มบวก`
`  SS( d, n, new array_of_zeros[n] )`
`}`
`SS( d[1..n], m, A[1..n] ) {`
`  if (m < 1) return 1`
`  if (m < 4) return d[m]`
`  if (A[m] > 0) return A[m]`
`  x1 = d[m]*SS(d, m-1, A)`
`  x2 = d[m-1]*SS(d, m-2, A)`
`  x3 = d[m-2]*SS(d, m-3, A)`
`  A[m] = x1 + x2 + x3`
`  return A[m]`
`}`
	เนื่องจากใช้ memoization จะเสมือนการเติมค่าในอาเรย์ A ขนาด n ช่อง จากช่องซ้าย ๆ ก่อน แล้วก็เติมช่องทางขวา ไปเรื่อย ๆ จนได้ A[n] ตามที่ต้องการ ใช้เวลาทั้งสิ้น $\Theta(n)$

`SO(d[1..n]) {`
`  for (k = 0; k < n; k++)`
`  insertion_sort( d )`
`}`
	while รอบแรก insertion_sort ใช้เวลา $O(n^2)$ รอบต่อ ๆ มา ใช้ $\Theta(n)$
	เพราะข้อมูลเรียงแล้ว รวมเป็น $O(n^2) + \sum_{k=1}^{n}\Theta(n) = \Theta(n^2)$

3. (10 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้ในช่องว่างที่กำหนดให้ ไม่ต้องแสดงวิธีทำ

- $7^{47} \bmod 11$ มีค่าเท่ากับ ..... 6 ..... $= (7^{23} \bmod 11 \cdot 7^{23} \bmod 11) \bmod 11 \cdot 7 \bmod 11$
- median-of-medians of 5 ของ [1,3,29,4,5], [14,11,19,18,21], [32,12,25,7,24], [13,17,2,15,20], [21,29,26,8,9] คือ ..... 18 .....
- การ merge ข้อมูล [1, 3, 8, 9] กับ [2, 4, 6, 7] จะเกิดการเปรียบเทียบข้อมูลจาก 2 อาเรย์นี้ ..... 6 ..... ครั้ง
- ให้ X = "ABCABC", ค่าของ Y ที่ทำให้การหา longest common subsequence ของ X กับ Y แบบ top-down (ไม่มี memoization) ทำงานได้เร็วสุด ๆ คือ ..... Y = "" สตริงว่าง .....
- ให้ v = [15, 20, 20, 24, 40] และ w = [5, 4, 2, 4, 8] แทนมูลค่าและน้ำหนักของของ 5 ชิ้น และให้มีถุงที่รับน้ำหนักไม่เกิน 10 ต้องเลือกชิ้นไหน เท่าไร แบบ fractional จึงได้มูลค่ารวมสูงสุด ..... ชิ้น 3 และชิ้น 4 ทั้งชิ้น ชิ้น 5 ครึ่งชิ้น (ชิ้นซ้ายสุดคือชิ้น 1)
- ให้ v = [15, 20, 20, 24, 40] และ w = [5, 4, 2, 4, 8] แทนมูลค่าและน้ำหนักของของ 5 ชิ้น และให้มีถุงที่รับน้ำหนักไม่เกิน 10 ต้องเลือกชิ้นไหน แบบ 0/1 จึงได้มูลค่ารวมสูงสุด ..... ชิ้น 2, 3 และ 4 ทั้งชิ้น (ชิ้นซ้ายสุดคือชิ้น 1) .....
- ให้ A = [(0,3), (5,8), (2,4), (4,5), (5,7), (7,9), (3,6)] แทนรายการของเวลาเริ่มและเวลาสิ้นสุดของกิจกรรมต่าง ๆ เราต้องเลือกกิจกรรมใดบ้าง (ที่ไม่ซ้อนเหลื่อมกัน) จึงได้จำนวนกิจกรรมมากสุด ..... กิจกรรมที่ 1, 4, 5 และ 6 (กิจกรรมซ้ายสุดคือกิจกรรมที่ 1) .....
- ให้ F = [('a',1), ('b',2), ('c',4), ('d',8), ('e',16), ('f',32), ('g',64)] แทนรายการของตัวอักษรและความถี่ของข้อมูลชุดหนึ่ง ถ้าเราเข้ารหัสตัวอักษรชุดนี้ด้วยรหัสแบบ Huffman จะใช้ข้อมูลจำนวน ..... 246 ..... บิตในการแทนข้อมูลชุดนี้ทั้งหมด
- มีข้อมูลอยู่ 1,000 ตัวที่เรียงลำดับจากมากมาน้อยแล้ว (ซ้ายไปขวา) ในอาเรย์หนึ่ง การค้นข้อมูลในอาเรย์นี้ด้วย binary search จะพิจารณาข้อมูลในอาเรย์ไม่เกิน ..... 9 ..... ตัว
- ให้ A_1, A_2, A_3 และ A_4 คือเมทริกซ์ขนาด 5×100, 100×2, 2×100 และ 100×5 ตามลำดับ ถ้าต้องการหาผลคูณของ $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ ควรจัดลำดับการคูณอย่างไรจึงจะหาผลคูณได้เร็วสุด ..... ((A_1 A_2) (A_3 A_4)) ..... (ตอบโดยใส่วงเล็บเพื่อกำหนดลำดับการคูณ)

4. (6 คะแนน) จากตารางค่าของคำตอบของปัญหาที่ใช้กำหนดการพลวัตต่อไปนี้ จงสร้างตารางของการตัดสินใจที่ถูกต้อง

- Longest Common Subsequence (เติม ↑ หรือ ← หรือ ↖)

		A	A	B	C	A	C	A
	0	0	0	0	0	0	0	0
A	0	1	1	1	1	1	1	1
B	0	1	1	2	2	2	2	2
C	0	1	1	2	3	3	3	3
A	0	1	2	2	3	4	4	4
C	0	1	2	2	3	4	5	5
C	0	1	2	2	3	4	5	5
A	0	1	2	2	3	4	5	6

		A	A	B	C	A	C	A
A		↖	←↖	←	←	←	←	←
B		↑	←↑	↖	←	←	←	←
C		↑	←↑	↑	↖	←	←↖	←
A		↑	↖	←↑	↑	↖	←	←↖
C		↑	↑	←↑	↖↑	↑	↖	←
C		↑	↑	↑	↖↑	↑	↖↑	←↑
A		↑	↖↑	←↑	↑	↖↑	↑	↖

- 0/1 Knapsack (เติม ✓ หรือ ✘ แทนการเลือกไม่เลือก)

	capacity								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
empty	0	0	0	0	0	0	0	0	0
value=12 weight=4	0	0	0	0	12	12	12	12	12
value=10 weight=6	0	0	0	0	12	12	12	12	12
value=8 weight=5	0	0	0	0	12	12	12	12	12
value=14 weight=3	0	0	0	14	14	14	14	26	26
value=7 weight=1	0	7	7	14	21	21	21	26	33
value=9 weight=6	0	7	7	14	21	21	21	26	33
value=9 weight=2	0	7	9	16	21	23	30	30	33

	capacity								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
empty									
value=12 weight=4									
value=10 weight=6									
value=8 weight=5									
value=14 weight=3									
value=7 weight=1									
value=9 weight=6									
value=9 weight=2									

5. (10 คะแนน) ให้ D เป็นอาเรย์ขนาด n ช่อง ภายในเก็บจำนวนเต็ม 0 ถึง n แต่มีค่าหนึ่งหายไป (ที่ไม่ใช่ n) ข้อมูลใน D เรียงจากน้อยไปมากแล้ว เช่น D = [0,1,2,4,5,6,7] มี 3 หายไป, D = [1,2,3,4,5,6] มี 0 หายไป โดยไม่มีกรณีไม่มีตัวหาย เช่น D = [0,1,2,3,4,5]) จงเขียนรหัสเทียมของอัลกอริทึมที่ใช้เวลา $O(\sqrt{n})$ เพื่อหาข้อมูลที่หายไปในอาเรย์ D

```
missing( D[0..n-1] ) {




    b = 0
    e = n - 1
    while b < e:
       m = (b+e)//2
       # assert D[m] >= m
       if  D[m] == m:
           b = m + 1
       else:
           e = m

    return b


}
```

ยกตัวอย่างประกอบ

6. (10 คะแนน) ให้ D คืออาเรย์ขนาด n ช่องที่เก็บจำนวนเต็ม จงเขียนรหัสเทียมของอัลกอริทึมที่ใช้เวลา $O(\log n)$ เพื่อหาค่า "peak" (ขอค่า peak สักหนึ่งค่า) ใน D โดย peak คือค่าในอาเรย์ที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ ค่าของตัวก่อนหน้าทางซ้ายหนึ่งตัวและตัวถัดไปทางขวาหนึ่งตัว (ถ้าไม่มีตัวก่อนหน้าหรือตัวถัดไป ก็พิจารณาอีกข้างหนึ่งที่มีก็พอ) เช่น D = [9, 7, 7, 99, 4, 5, 6, 6, 5, 8] มี 9, 99, 6 และ 8 เป็น peak

```
peak( D[0..n-1] ) {

    return peak(D, 0, n-1)
}

peak( D[0..n-1], b, e) {

    if b==e: return D[b]
    if b+1==e: return max(D[b],D[e])
#    if b+2==e and D[b-1]<=D[b]>=D[b+1]: return D[b]
    m = (b+e)//2
    if D[m] <= D[m+1]:
        return peak(D, m, e)
    else:
        return peak(D, b, m)




}
```

ยกตัวอย่างประกอบ

7. (10 คะแนน) จากความสัมพันธ์เวียนบังเกิดข้างล่างนี้ จงเขียนรหัสเทียมเพื่อแก้ปัญหานี้ด้วย bottom up dynamic programming

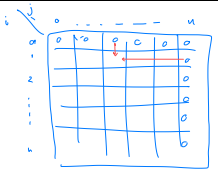
$$F(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i == 0 \text{ or } j == n \\ \max(F(i-1,j), F(i, j+p[i]) + q[i]) & \text{if } j + p[i] \le n \\ F(i-1,j) & \text{otherwise} \end{cases}$$

รับประกันว่า $p[i] > 0$ และ $0 \le i, j \le n$

```
F( p[0..n], q[0..n] ) {
    int table [n+1][n+1] ;  initial with zero

    for(int i=1 ; i<=n ; i++) {
        for (int j= n-1 ; j>=0 ; j--) {
            table[i][j] = table[i-1][j];
            if( j+p[i] <=n )  table[i][j] = max( table[i][j], table[i][j+p[i]] + q[i] ) ;
        }
    }

}
```



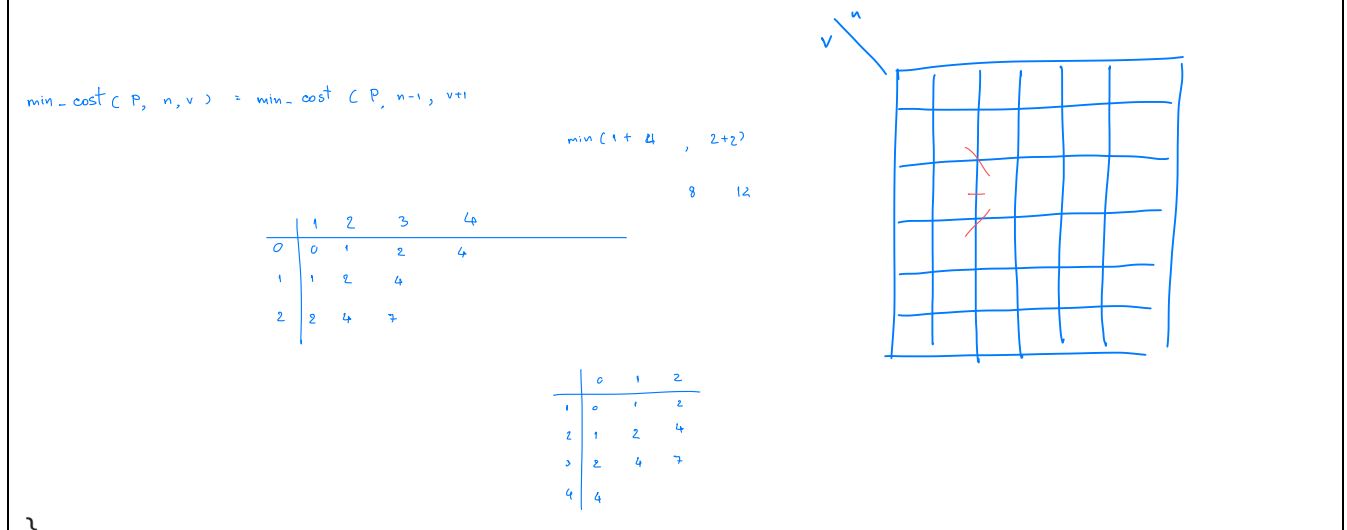
8. (10 คะแนน) นัททีต้องการขับรถจากกิโลเมตรที่ 1 ไปกิโลเมตรที่ n ($n \ge 2$) รถยนต์คันนี้มีถังน้ำมันซึ่งจุได้ v ลิตร ($v \ge 1$) แต่กินน้ำมันมาก คือต้องใช้น้ำมัน 1 ลิตรในการเดินทาง 1 กิโลเมตร ตอนเริ่มเดินทางไม่มีน้ำมันเลย โชคดีที่มีปั๊มน้ำมันทุก ๆ หลักกิโลเมตร โดยปั๊มน้ำมันที่หลักกิโลเมตรที่ k ขายน้ำมันในราคา P_k บาทต่อลิตร คำถามคือ นัททีต้องจ่ายค่าน้ำมันน้อยสุดกี่บาท เพื่อที่จะเดินทางถึงจุดหมายที่กิโลเมตรที่ n ได้ และน้ำมันหมดถังพอดี โดยนัททีสามารถเติมน้ำมันที่หลักกิโลเมตรใดก็ได้

เช่น ถ้า $n = 4$, $v = 2$ และ $P = [1,2,3,4]$ คำตอบคือ 4 เพราะ ค่าน้ำมันน้อยสุดคือ เติมน้ำมัน 2 ลิตรที่ กม. 1 (2 ลิตร×1 บาท/ลิตร = 2 บาท) ขับถึง กม. 2 เหลือ 1 ลิตร เติมอีก 1 ลิตร (1 ลิตร×2 บาท/ลิตร = 2 บาท) ขับถึง กม. 4 ถึงจุดหมายและน้ำมันหมดพอดี

จงเขียนรหัสเทียมของอัลกอริทึมสำหรับแก้ปัญหาข้างบนนี้ด้วยกำหนดการพลวัต (dynamic programming) โดยต้องระบุความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (recurrence), ขนาดของตารางที่ต้องใช้ และคำอธิบายย่อ ๆ

```
min_cost( P[1..n], n, v ) { # P[k] contains oil price at k-th kilometer.

}
```



ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด:

ขนาดของตาราง:

คำอธิบายย่อ ๆ (ยกตัวอย่างประกอบ):

9. ให้ $D = [d_1, d_2, d_3, ..., d_n]$ เป็นรายการที่แต่ละช่องเก็บเลขโดด 0 ถึง 9 เช่น [5,1,8,7,1,1] นิยามให้ $D_{i,j}$ คือจำนวนที่ได้จากการนำเลขโดดใน D มาต่อกันตั้งแต่ตัวที่ i ถึง j เช่น $D_{2,2} = 1$, $D_{2,3} = 18$, $D_{2,4} = 187$ เป็นต้น

- (5 คะแนน) จงเขียนรหัสเทียมของอัลกอริทึม `max_2(D)` ที่ใช้เวลา $O(n)$ เพื่อหา $D_{i,j}$ ที่มีจำนวนหลักมากสุดที่มีค่าที่หารด้วย 2 ลงตัว ถ้าไม่มี ให้คืน 0 (วิเคราะห์ประสิทธิภาพการทำงานเชิงเวลาด้วย) เช่น `max_2( [5,1,8,7,1,1] )` ได้ผลคือ 518

```
max_2( D[1..n] ) {
}
```

วิเคราะห์เวลาการทำงาน:

คำอธิบายหลักการทำงาน (ยกตัวอย่างประกอบ):

- (10 คะแนน) จงเขียนรหัสเทียมของอัลกอริทึม `max_3(D)` ที่ใช้เวลา $O(n)$ เพื่อหา $D_{i,j}$ ที่มีจำนวนหลักมากสุดที่มีค่าที่หารด้วย 3 ลงตัว ถ้าไม่มี ให้คืน 0 (วิเคราะห์ประสิทธิภาพการทำงานเชิงเวลาด้วย) เช่น `max_3( [5,1,8,7,1,1] )` ได้ผลคือ 18711 (ข้อแนะนำ: จำนวนเต็ม N หารด้วย 3 ลงตัว เมื่อผลบวกของเลขโดดทุกตัวใน N หารด้วย 3 ลงตัว เช่น 1+8+7+1+1 = 18 หารด้วย 3 ลงตัว ดังนั้น 18711 หารด้วย 3 ลงตัว)

```
max_3( D[1..n] ) {
}
```

วิเคราะห์เวลาการทำงาน:

คำอธิบายหลักการทำงาน (ยกตัวอย่างประกอบ):