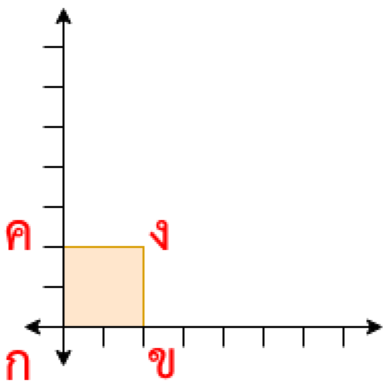
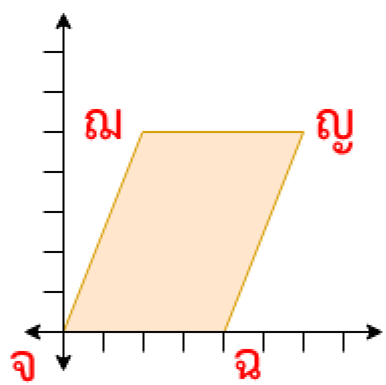
เฉลย



$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$



คำตอบที่ 1

ก $\rightarrow$ จ

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ข $\rightarrow$ ฉ

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ค $\rightarrow$ ฌ

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ง $\rightarrow$ ญ

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$$

คำตอบที่ 2

ก $\rightarrow$ จ

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ข $\rightarrow$ ฌ

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ค $\rightarrow$ ฉ

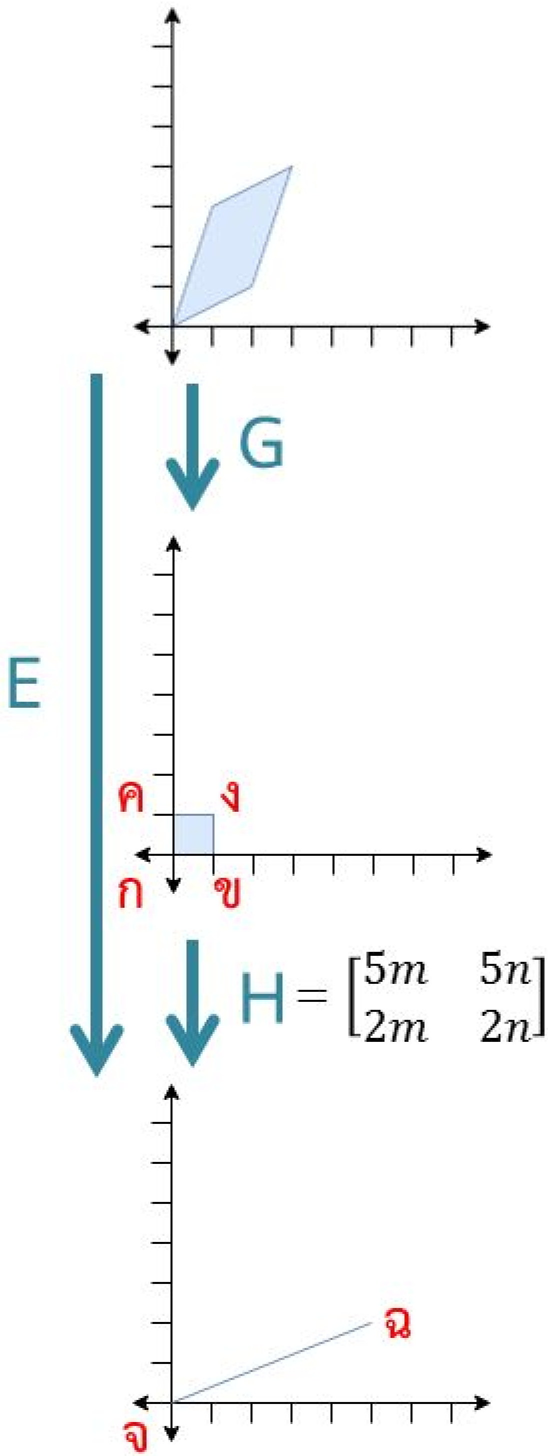
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ง $\rightarrow$ ญ

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2.5 & 0 \end{bmatrix}$$

เฉลย



ก $\rightarrow$ จ

$$\begin{bmatrix} 5m & 5n \\ 2m & 2n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ง $\rightarrow$ ฉ

$$\begin{bmatrix} 5m & 5n \\ 2m & 2n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ข กับ ค จะไปอยู่ระหว่าง จ กับ ฉ

ได้คำตอบเป็น $\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 5m & 5 - 5m \\ 2m & 2 - 2m \end{bmatrix}$

เมื่อ m เป็นจำนวนจริงใด ๆ ในช่วง [0, 1]

E = H x G

12. Find the smallest x such that

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ให้คำนวณเซตคำตอบของ x ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ได้เป็น

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1-a \\ 1-b \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathrm{R} \right\}$$

การหา x ตัวที่เล็กที่สุด คือ x ที่ไม่มี component ของ null space มีแต่ component ของ row space อย่างเดียว (ดูรูปต่อไปประกอบ)

คำนวณ row space ได้

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} m \\ n \\ m \\ n \end{pmatrix} \middle| \; m, n \in \mathrm{R} \right\}$$

คำตอบที่เราต้องการก็คือ $S \cap R = \left\{ \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \right\}$

ตัวอย่างการแตก component ใน domain ออกตาม null space กับ row space

สมมติ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ จะได้

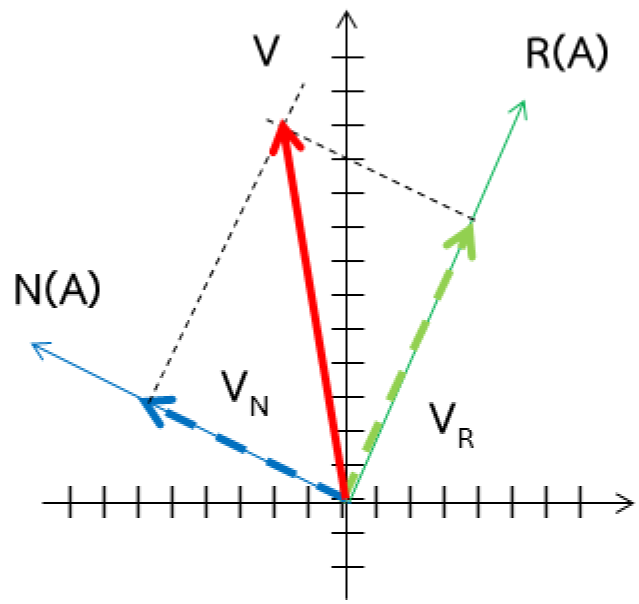
$$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t \;\middle|\; t \in R \right\}$$

$$R(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} s \;\middle|\; s \in R \right\}$$

ตัวอย่างเช่น $V = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$

สามารถแตก component ตาม N(A) และ R(A) ได้เป็น

$V_N = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad V_R = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$



ถ้าลองคิดดู จะได้ว่า $AV = A(V_R+V_N) = AV_R + 0 = AV_R$

นั่นคือ V กับ V_R map ผ่าน A ไปที่จุดเดียวกัน

แต่ V_R จะมีขนาดเล็กกว่า V เพราะไม่มีส่วน V_N มาเพิ่ม

7b. If a matrix has two identical columns, then its null space contains more than just the origin.

จะพิสูจน์ โดยสมมติให้คอลัมน์ที่ซ้ำกันคือคอลัมน์ที่ i และ j

วิธีที่ 1 เนื่องจากคอลัมน์ที่ i และ j ซ้ำกัน
จะได้ว่าเวกเตอร์ (..., 0, 1, 0, ..., 0, -1, 0, ...)
(ไม่เป็น 0 เฉพาะตัวที่ i และ j) อยู่ใน null space ด้วย
ดังนั้น มีเวกเตอร์อื่นใน null space ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ 0

วิธีที่ 2 คิดคล้าย ๆ การหา basis ของ column space
เรารู้อยู่แล้วว่าคอลัมน์ j ต้องไม่เป็น basis (เพราะซ้ำกับ i)
ดังนั้นพอทำ RRE แล้ว คอลัมน์ j จะต้องเป็น free column
เมื่อมี free column ก็แปลว่า
มีเวกเตอร์อื่นใน null space ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ 0