

FACULTY OF ENGINEERING
CHULALONGKORN UNIVERSITY
2110327 Algorithm Design

YEAR III, First Semester, Final-term Examination, November 28, 2016, Time 8:30 – 11:30

ชื่อ-นามสกุล _____ เลขประจำตัว _____ CR58 _____

หมายเหตุ

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 10 ข้อในกระดาษคำถามคำตอบ รวม จำนวน 7 หน้า คะแนนเต็ม 90 คะแนน
2. ไม่อนุญาตให้นำตำราและเครื่องคำนวณต่างๆ ใดๆ เข้าห้องสอบ
3. ควรเขียนตอบด้วยลายมือที่อ่านง่ายและชัดเจน
4. ห้ามการหยิบยื่นสิ่งใดๆ ทั้งสิ้น จากผู้สอบอื่นๆ เว้นแต่ผู้คุมสอบจะหยิบยื่นให้
5. ห้ามนำส่วนใดส่วนหนึ่งของข้อสอบออกจากห้องสอบ ข้อสอบเป็นทรัพย์สินของราชการซึ่งผู้ลักพาอาจมีโทษทางคดีอาญา
6. ผู้เข้าสอบสามารถออกจากห้องสอบได้ หลังจากผ่านการสอบไปแล้ว 45 นาที
7. เมื่อหมดเวลาสอบ ผู้เข้าสอบต้องหยุดการเขียนใดๆ ทั้งสิ้น
8. นิสิตกระทำผิดเกี่ยวกับการสอบ ตามข้อบังคับจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย มีโทษ คือ ได้รับ สัญลักษณ์ F ในรายวิชาที่ทุจริต และพักการศึกษาอย่างน้อย 1 ภาคการศึกษา

ห้ามนิสิตพกโทรศัพท์หรืออุปกรณ์สื่อสารไว้กับตัวระหว่างสอบ หากตรวจพบจะถือว่านิสิตกระทำผิดเกี่ยวกับการสอบ ให้ได้รับ F และอาจจะพิจารณาสั่งพักการศึกษา **

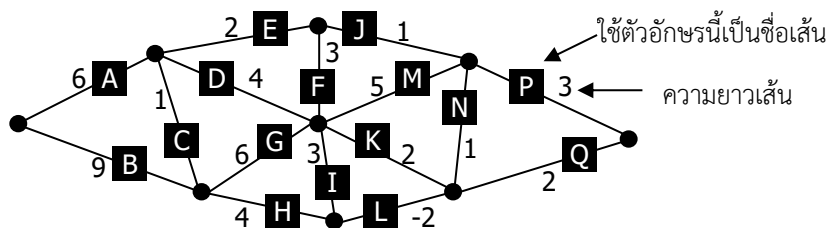
ข้าพเจ้ายอมรับในข้อกำหนดที่กล่าวมานี้ ข้าพเจ้าเป็นผู้ทำข้อสอบนี้ด้วยตนเองโดยมิได้รับการช่วยเหลือ หรือให้ความช่วยเหลือในการทำข้อสอบนี้

ลงชื่อนิสิต

วันที่.....

1. (20 คะแนน) จงระบุว่า ข้อย่อต่อไปนี้ข้อใดถูก ข้อใดผิด (ไม่ต้องอธิบายที่มาของคำตอบ เขียนตอบแค่ถูกหรือผิด)
ข้อใดที่เป็นคำถามเกี่ยวกับกราฟ ให้ v คือจำนวนปม และ e คือจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟ
 - 1) ถ้าการหา shortest path จากปม s ไปยังปม t ในกราฟ G ใช้เวลา $\Theta(f(v,e))$ แสดงว่า เราต้องใช้เวลา $\Omega(v f(v, e))$ เพื่อหา shortest path จาก s ไปยังทุก ๆ ปมในกราฟ G
 - 2) การทำ depth first search ในกราฟ G ที่แทนด้วย adjacency matrix จะใช้เวลาแค่ $O(v)$
 - 3) เราหา strongly connected components ต่าง ๆ ใน directed graph G ในเวลาแค่ $O(v + e)$
 - 4) เราทดสอบว่า directed graph G เป็น directed acyclic graph หรือไม่ ได้ในเวลาแค่ $O(v + e)$
 - 5) เราหา shortest path จากปม s ไปยัง t ในกราฟ G ที่เส้นเชื่อมทุกเส้นยาวเท่ากันหมดได้ในเวลาแค่ $O(v + e)$
 - 6) เราหา minimum spanning tree ในกราฟ G ที่เส้นเชื่อมทุกเส้นยาวเท่ากันหมดได้ในเวลาแค่ $O(v + e)$
 - 7) การใช้ Dijkstra's algorithm เพื่อหา shortest path ในกราฟ G กราฟหนึ่งที่มีความยาวเส้นเชื่อมบางเส้นเป็นลบ ก็อาจได้คำตอบที่ถูกต้องก็ได้
 - 8) ให้ W คือ adjacency matrix ของกราฟ G และให้ $D=(W)^v$ จะได้ว่า $D[a][b]$ คือระยะทางของ shortest path จากปม a ไป b
 - 9) ถ้าเขียนอัลกอริทึมของ Floyd-Warshall แบบตรงไปตรงมา จะใช้เวลาทำงานเป็น $\Theta(v^4)$
 - 10) ให้ k คือความยาวของเส้นเชื่อมที่สั้นสุดในกราฟ G ถ้าเราลบความยาวของเส้นเชื่อมทุกเส้นลง k จะไม่ทำให้ shortest path ระหว่างปมต่าง ๆ ใน G เปลี่ยนแปลง

- 11) ให้เส้นเชื่อมของกราฟ G มี capacity เท่ากับ 1 เท่ากันหมดทุกเส้น หลังจากเราใช้ Ford-Fulkerson เพื่อหา max flow ใน G จะได้ว่า max flow ของ G มีค่าเท่ากับจำนวนเส้นเชื่อมที่พุ่งออกจากปม source ของ G
 - 12) ให้เส้นเชื่อมของกราฟ G มี capacity เท่ากับ 1 เท่ากันหมดทุกเส้น หลังจากเราใช้ Ford-Fulkerson เพื่อหา max flow ใน G จะได้ว่า min cut ของ G มีค่าเท่ากับจำนวนเส้นเชื่อมที่พุ่งเข้าหาจากปม sink ของ G
 - 13) การค้นคำตอบใน state space แบบ depth-first search, breadth-first search และ least-cost search อาศัยโครงสร้างข้อมูลแบบ stack, queue, และ priority queue ตามลำดับ ในการเก็บ states ต่าง ๆ ระหว่างการค้น
 - 14) ถ้าให้ cost สุ่มๆ กับ state ต่าง ๆ ระหว่างการทำ least-cost search เราอาจไม่พบคำตอบก็ได้ (ถึงแม้ว่าจะมี answer state อยู่ก็ตาม)
 - 15) เราต้องมี function ในการหา lower bound ของ cost ประจำ state ระหว่างการค้นคำตอบด้วยวิธี branch and bound เพื่อแก้ปัญหาประเภท minimization problem
 - 16) หากเรามี lower bound function อยู่หลายฟังก์ชันที่สามารถใช้ระหว่างการทำ least-cost search ได้ เราควรเลือก lower bound function ตัวที่ให้ค่าน้อยสุดๆ ยิ่งน้อยยิ่งดี
 - 17) ปัญหา graph isomorphism เป็นหนึ่งในปัญหา NP และยังไม่มีการหา polynomial-time algorithm เพื่อหาคำตอบให้กับปัญหานี้ได้ นี่แสดงว่า ปัญหานี้เป็นปัญหาในกลุ่ม NP-Complete
 - 18) การจะพิสูจน์ว่า $P = NP$ ก็เพียงแค่หา polynomial-time algorithm ให้กับเพียงหนึ่งปัญหาในกลุ่ม NP-Complete ก็พิสูจน์ได้แล้ว
 - 19) ปัญหา 1SAT, 2SAT, 3SAT เป็นปัญหาในกลุ่ม NP ที่มีความยากง่ายเท่ากันหมด
 - 20) สมชายเสนออัลกอริทึมแบบ brute force เพื่อหา Longest common subsequence ของ X และ Y ด้วยการแจกแจงทุก subsequences ของ X และ Y เพื่อหาว่าคู่ใดเหมือนกันและยาวสุด ซึ่งใช้เวลา $O(2^n 2^m)$ โดยที่ X และ Y มีความยาว n และ m ตามลำดับ นั่นย่อมแสดงว่า อัลกอริทึมที่สมชายเสนอมายจัดอยู่ในกลุ่ม NP-complete
2. (3 คะแนน) จงเขียนลำดับของชื่อเส้นเชื่อมที่ถูกเลือกให้เป็นส่วนหนึ่งของ minimum spanning tree ด้วยการใช้ Prim's algorithm กับกราฟข้างล่างนี้ โดยเริ่มที่ปมซ้ายสุดในรูป หาก ณ ขณะใดระหว่างการหา สามารถเลือกได้หลายเส้นที่ให้ผลเหมือนกัน ก็ให้เลือกเส้นที่มีชื่อตัวอักษร "ตัวน้อยกว่า" (ไม่ต้องแสดงวิธีทำ)

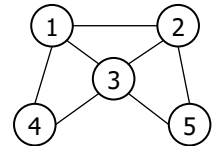


3. (3 คะแนน) หลังจากที่เราใช้อัลกอริทึมของ Floyd Warshall เพื่อหาความยาวของ shortest paths ในกราฟ G แล้ว จงบรรยายวิธีที่เร็วที่สุด ๆ เพื่อหาว่า "มี negative-weight cycle ใน G หรือไม่?"

4. (4 คะแนน) ปัญหา graph coloring ถามว่า ถ้าเรามีสี k สี เราจะให้สีกับปมต่าง ๆ ในกราฟ G ได้หรือไม่ โดยที่ปมปลายของเส้นเชื่อมเดียวกันต้องมีสีต่างกัน ปัญหานี้แก้ได้ด้วยอัลกอริทึมข้างล่างนี้

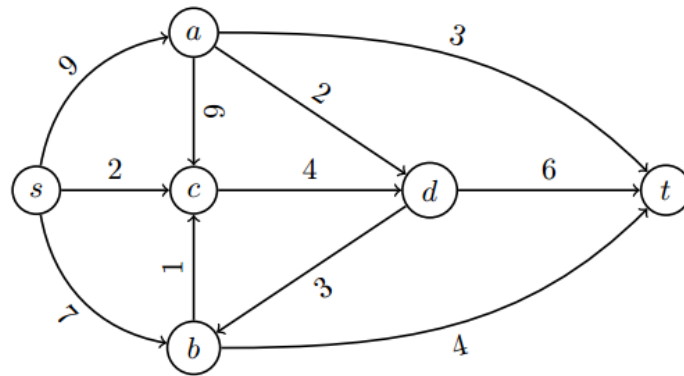
```
boolean is_k_colorable(G, k) {
    n = number_of_vertices(G)
    return is_k_colorable(G, k, new int[n], 0)
}
boolean is_k_colorable(G, k, c[1..n], m) {
    if (n == m) {
        return true
    } else {
        for (color = 1 to k) {
            c[m+1] = color           // ลองให้สีปมที่ m+1 ด้วยสี color
            if valid_coloring(G, c, m+1) // ตรวจสอบว่าการให้สีปมใน c จาก c[1] ถึง c[m+1] ถูกตามกฎหรือไม่
                if is_k_colorable(G, k, c, m+1) return true
        }
    }
    return false
}
```

หากใช้อัลกอริทึมข้างบนนี้ทำงานกับกราฟทางขวานี้ โดยที่ $k = 3$

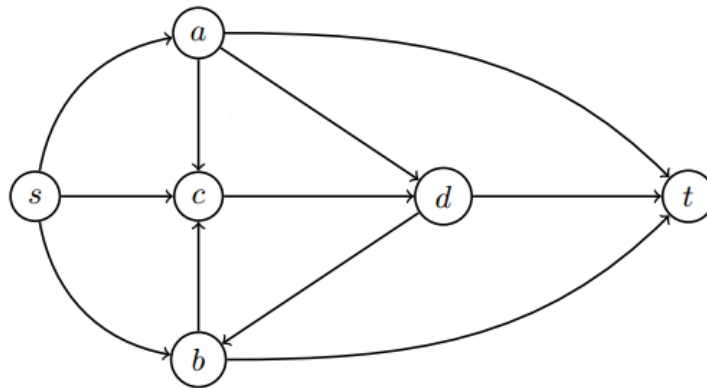


- จงวาด state ที่เกิดขึ้นระหว่างการค้นคำตอบ และเขียนเส้นแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง state เหล่านี้ด้วยว่า state ใดเกิดมาจาก state ใดบ้างจนพบคำตอบ
- และ อยากทราบว่า อัลกอริทึมข้างบนนี้ใช้กลวิธีการค้นคำตอบที่เรียกว่าอะไร

5. (10 คะแนน) จากกราฟข้างล่างนี้ที่แต่ละเส้นมีความจุระบุอยู่



a) (5 คะแนน) จงหา max flow ของกราฟนี้ โดยให้ระบุปริมาณที่ไหลในแต่ละเส้น กำหนดให้ s คือ source และ t คือ sink



b) (3 คะแนน) จงระบุน้ำหนักของ edge ดังต่อไปนี้ใน residue กราฟตอนที่เป็น max flow

- a. $s \rightarrow a$ _____
- b. $a \rightarrow s$ _____
- c. $c \rightarrow d$ _____
- d. $d \rightarrow c$ _____
- e. $d \rightarrow t$ _____

c) (2 คะแนน) จงระบุ Min-Cut ของกราฟนี้ โดยให้ระบุเซตของเส้นเชื่อมที่เป็น Min-Cut

6. (10 คะแนน) ปัญหา Equal Subset ให้ $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นเซตของเลขจำนวนจริง ในข้อนี้เราอยากหาว่ามี subset A ใดของ X ใหม่ที่ $\sum_{x \in A} x = \sum_{y \in X-A} y$ จงพิสูจน์ว่า Equal Subset อยู่ใน NP-Hard (นิสิตสามารถอ้างอิงถึงปัญหา NP-Complete อื่นๆที่แสดงในท้องได้โดยไม่ต้องพิสูจน์)

ข้อ 7 – 11 เป็นการออกแบบอัลกอริทึม ในทุก ๆ ข้อนี้จะต้องทำดังต่อไปนี้

- 1) บรรยายอัลกอริทึมเป็นคำอธิบาย (ไม่จำเป็นต้องเขียน source code) ซึ่งประกอบด้วยรายละเอียดมากเพียงพอที่จะเขียนโปรแกรมได้ นิสิตจะได้คะแนนตามความถูกต้อง ความชัดเจน และประสิทธิภาพของอัลกอริทึม
 - 2) นิสิตสามารถใช้อัลกอริทึมหรือโครงสร้างข้อมูลที่ได้เคยเรียนมาในการอธิบายอัลกอริทึมได้โดยตรง ไม่จำเป็นต้องเขียน code
 - 3) วิเคราะห์ประสิทธิภาพในการทำงานของอัลกอริทึมที่ออกแบบไว้
7. (10 คะแนน) ปัญหา MAX-3SAT เป็นดังนี้ ข้อมูลนำเข้าคือ Boolean Expression ในรูป conjunctive normal form เช่น

$$(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_1)$$

โดยมีตัวแปร Boolean x_1, \dots, x_n อยู่ n ตัวและมี clause (หนึ่งชุดของวงเล็บ) ที่ \wedge (and) กันอยู่ m พจน์โดยในแต่ละพจน์ประกอบด้วย ตัวแปรในรูป positive หรือ negative form สามตัวที่ \vee (or) กันอยู่ โดยปัญหาในข้อนี้คือหาว่า x_1, \dots, x_n แต่ละตัวจะต้องเป็น false หรือ true ที่จะให้มีจำนวนพจน์มากที่สุดที่ true เท่าที่ทำได้ จงอธิบายวิธีแก้ปัญหานี้ด้วย State-Space Search และ Branch and Bound

8. (10 คะแนน) กำหนดให้ D เป็น adjacency matrix ของกราฟแบบมีทิศทาง G ขนาด n ปม โดยที่ $D[a][b]$ คือน้ำหนักของเส้นเชื่อมจากปม a ไป b เราต้องการทราบค่าระยะทางสั้นสุดจากปม s ไปยังปมใด ๆ ในกราฟ D นี้ โดยที่มีข้อกำหนดเพิ่มเติมคือระยะทางสั้นสุดนั้นจะต้องเกิดจาก path ที่มีเส้นเชื่อมจำนวน K เส้นเชื่อม (ซ้ำกันได้) พอดี ตัวอย่างเช่น path $\langle 1, 3, 1, 3, 5 \rangle$ จะถือว่าเป็น path ที่มี 4 เส้นเชื่อมถึงแม้ว่าจะวิ่งผ่านเส้นเชื่อม $(1,3)$ จำนวน 2 ครั้งก็ตาม จงออกแบบอัลกอริทึมสำหรับการแก้ปัญหานี้ เมื่อกำหนดให้ข้อมูลนำเข้าคือ D, K, s และ n

Assume Array ใดๆ จะอยู่ในรูป $A[0 \dots n-1]$ and weight of all path $\in \mathbb{R}^+$

new Arr $[K][n][n]$ แทน shortest (a,b) ใดๆ ที่จำนวน path $k+1$ เส้น

Arr $[0][s][b] = D[s][b]$ for all edge (s,b)

for $(k=1, k < K, k++)$

for $(b = 0, 1, 2, \dots, n-1)$

for $(c = 0, 1, 2, \dots, n-1 \ \&\& \ c \neq b)$

Arr $[k][s][b] = \min (\text{Arr}[k-1][s][c] + D[c][b])$

return Arr $[k-1]$

9. (10 คะแนน) ในจังหวัดที่ห่างไกลจังหวัดหนึ่งมีถนนอยู่ m เส้น ซึ่งเชื่อมตำบล n ตำบลเข้าด้วยกัน ทุกตำบลสามารถเดินทางไปหากันได้โดยใช้ถนนเหล่านี้ ในเวลากลางคืน เราจะต้องเปิดไฟบนถนนเพื่อความปลอดภัย กำหนดให้ $D[a][b]$ คือกำลังไฟฟ้าที่ต้องใช้ในการเปิดไฟบนถนนที่เชื่อมตำบล a กับตำบล b มีหน่วยเป็นวัตต์ อย่างไรก็ตาม การไฟฟ้าของจังหวัดจะต้องเดินสายไฟเพื่อจ่ายไฟให้กับถนน การไฟฟ้าเลือกที่จะใช้สายไฟที่รองรับการจ่ายไฟได้ไม่เกิน K วัตต์ ทำให้ถนนเส้นที่ใช้ไฟมากกว่านั้นไม่มีไฟส่องสว่าง เราจะกำหนดให้ทุก ๆ ตำบลที่สามารถเดินทางไปหากันได้ตอนกลางคืนผ่านถนนที่มีไฟส่องสว่างเปิดอยู่เป็นตำบลในอำเภอเดียวกัน ส่วนตำบลที่เดินทางไปหากันไม่ได้นั้นอยู่คนละอำเภอ จงออกแบบอัลกอริทึมเพื่อหาค่า K ที่น้อยที่สุดที่ทำให้จังหวัดนี้มีจำนวนอำเภอไม่เกิน A อำเภอ เมื่อกำหนดให้ข้อมูลนำเข้าคือ D, A, m และ n

$G=(V,E)$ directed graph $|V|=n$ $|E|=2m$ weight = $D[a][b]$ \mathbb{R}^+ อย่างแน่นอน (watt)
 $A =$ จำนวน SCC ที่ตัด edge (a,b) ที่ weight $> K$

new pq <edge> = all non-zero edge in graph (sort max \rightarrow min)

$K = \text{pq.top}() \text{ tmp} = 1$

while (tmp $\leq A$) $O(2m)$

tmpK = pq.top().w ; pq.pop();

remove every e if e = edge ที่ e.w $>$ tmpK

use Kosaraju's algorithm to find number of SCC \rightarrow tmp $O(|V|+|E|)$

if (tmp $>$ A) return K

K = tmpK

Class edge
 int i
 int j
 double w

อ้าวไปของปุ่น

$n+2m$
 $O(|V|+|E|)$
 $= O(2m(n+2m))$
 $= O(mn+m^2)$

10. (10 คะแนน) บริษัทแห่งหนึ่งมีพนักงาน n คน สำหรับคู่พนักงาน (a,b) ใด ๆ เราทราบว่าพนักงาน a นั้น “นับถือ” พนักงาน b หรือไม่ ให้ $R[a][b]$ มีค่าเป็นจริงก็ต่อเมื่อ พนักงาน a นับถือพนักงาน b ให้สังเกตว่าถ้า a นับถือ b นั้นไม่ได้จำเป็นที่ b จะต้องนับถือ a ด้วย และกำหนดให้ว่า ถ้า a นับถือ b และ b นับถือ c เราจะได้ว่า a นับถือ c โดยอ้อม นอกจากนี้ a จะนับถือโดยอ้อมต่อทุก ๆ คนที่ a นับถือ โดยอ้อมนั้นนับถือ เจ้าของบริษัทต้องการเลือกหัวหน้าพนักงาน โดยมีเงื่อนไขคือหัวหน้าพนักงานนั้นจะต้องได้รับการนับถือไม่ว่าจะทางตรงหรือทางอ้อม จากทุก ๆ คนในบริษัท จงออกแบบอัลกอริทึมสำหรับหาคนที่สามารถทำหน้าที่เป็นหัวหน้าพนักงานได้ เมื่อกำหนดให้ข้อมูลนำเข้าคือ R , และ n