

# Introduction

Dans ce cours nous traitons des Équations aux Dérivées Partielles (EDP). Nous adaptons le point de vue de l'analyse fonctionnelle, se basant sur la théorie des distributions et les espaces de Sobolev. Nous nous intéressons particulièrement aux équations elliptiques et paraboliques (voir la définition ci-dessous). Nous abordons trois volets: le caractère bien posé des problèmes (existence et unicité de la solution), la résolution numérique et un exemple d'analyse d'EDPs dans une optique pratique (théorie de l'homogénéisation).

Beaucoup d'EDPs proviennent de la modélisation de phénomènes physiques. Par exemple

$$\partial_t u - \Delta u = f$$

est l'équation qui régit l'évolution de la température  $u$  d'un matériau soumis à une source de chaleur  $f$ . Les constantes physique ont été omises pour simplifier les notations; elles ne jouent aucun rôle dans notre analyse. Vous pouvez revenir à votre cours "Physique des Milieux Continus" pour plus de détails sur la dérivation de cette équation.

Une équation aux dérivées partielles est une relation entre une fonction de plusieurs variables  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  et ses dérivées:

$$F(x, u, \partial_{x_{i_1}} u, \dots, \partial_{x_{i_1} x_{i_2}}, \dots, \partial_{x_{i_1} \dots x_{i_m}} u) = 0$$

où  $m$  est le degré de l'équation,  $\Omega$  est un ouvert connexe  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  et les indices  $i_k$  varient entre 1 et  $d$ .

La forme générale d'une équation aux dérivées partielles linéaire, scalaire, d'ordre 2 est

$$\alpha u + c \cdot \nabla u + \operatorname{div}(A \nabla u) = f, \quad (0.1)$$

où  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction recherchée et  $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sont les coefficients de l'équation aux dérivées partielles. Pour classifier l'équation (0.1), on lui associe en tout point  $x \in \Omega$ , l'équation

$$\alpha(x) + c(x) \cdot z + z^T A(x)z = f(x). \quad (0.2)$$

- On dit que le problème est *elliptique* (au point  $x$ ) si l'ensemble des  $z$  solutions de (0.2) est une ellipse (un ellipsoïde si  $d > 2$ ). Un exemple d'une équation elliptique est *l'équation de Poisson*:

$$-\Delta u = f$$

posée sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . On retrouve cette équation en électrostatique, où elle donne le potentiel électrique  $u$  créé par une distribution de charge  $f$ .

- On dit que le problème est *parabolique* (au point  $x$ ) si l'ensemble des  $z$  solutions de (0.2) est une parabole (un paraboloïde si  $d > 2$ ). Un exemple d'une équation parabolique est *l'équation de la chaleur*:

$$\partial_t u - \Delta u = f,$$

posée sur  $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ . On retrouve cette équation thermodynamique, où elle donne l'évolution de la température  $u$  en tout point d'un matériau homogène soumis à une source de chaleur  $f$ .

Un autre exemple d'équation parabolique est l'équation de *Black-Scholes* en finance, qui donne le prix  $P : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  d'une option européenne de payoff  $\Phi$  et de maturité  $T$ . Elle s'écrit:

$$\begin{aligned} \partial_t P + rS\partial_S P + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\partial_{S,S}P - rP &= 0 \\ P(T, S) &= \Phi(S). \end{aligned}$$

La fonction  $P$  dépend du temps  $t$  et de la valeur du sous-jacent  $S$  sur lequel porte l'option. Le taux d'intérêt  $r$  peut dépendre du temps, et la volatilité  $\sigma$  peut dépendre du temps et de la valeur du sous-jacent.

- On dit que le problème est *hyperbolique* (au point  $x$ ) si l'ensemble des  $z$  solutions de (0.2) est une hyperbole (un hyperbololoïde si  $d > 2$ ), ou

si  $A = 0$ . Un exemple d'une équation hyperbolique est *l'équation des ondes*:

$$\partial_{tt}^2 u - \Delta u = f,$$

posée sur  $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ . Cette équation est adaptée à la description de phénomènes vibratoires. En mécanique par exemple, elle régit le déplacement vertical d'une membrane élastique soumise à une force verticale  $f$ .

Dans ce cours, nous nous concentrerons sur les problèmes elliptiques, les problèmes paraboliques se traitent de manière similaire. Les problèmes hyperboliques présentent des caractéristiques différentes et seront traités à d'autres occasions, par exemple dans le cours "Applications de la PMC" avec un point de vue de physicien.

Voici quelques ouvrages sur lesquels je me suis basée dans ce cours. Vous pouvez y revenir si besoin est: [1, 2, 3].



# Chapitre 1

## Espaces de Sobolev

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Espaces <math>H^k(\Omega)</math></b>	<b>9</b>
<b>1.2</b>	<b>Espaces <math>H_0^k(\Omega)</math></b>	<b>12</b>
1.2.1	Définition	12
1.2.2	Notion de trace	16
1.2.3	Espace $H^{-1}(\Omega)$	20
<b>1.3</b>	<b>Inclusions de Sobolev</b>	<b>23</b>
<b>1.4</b>	<b>Convergence faible</b>	<b>25</b>
<b>1.5</b>	<b>Exercices supplémentaires</b>	<b>28</b>

---

Les espaces de Sobolev jouent un rôle central dans la théorie des EDP. Ils apparaissent de façon naturelle comme les plus gros espaces fonctionnels permettant de donner un sens mathématique (faible) à certaines EDPs.

### 1.1 Espaces $H^k(\Omega)$

**Définition 1.1.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et soit  $k$  un entier positif. On note  $H^k(\Omega)$  l'ensemble des fonctions de  $L^2(\Omega)$  dont toutes les dérivées (au sens des distributions) jusqu'à l'ordre  $k$  sont dans  $L^2(\Omega)$ .

$$H^k(\Omega) = \{ f \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq k, \partial^\alpha f \in L^2(\Omega) \}. \quad (1.1)$$

**Remarque 1.2.** Dire qu'une distribution  $T$  est dans  $L^2(\Omega)$  est une abréviation de: il existe  $g \in L^2(\Omega)$  telle que

$$T = T_g.$$

En pratique, pour montrer qu'une distribution  $T$  est dans  $L^2(\Omega)$  il suffit de montrer qu'il existe une constante  $C \geq 0$  telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{L^2}.$$

En effet, en utilisant le théorème de prolongement des formes linéaires continues (rappelé à l'exercice 1.1), on voit que  $T$  peut être prolongé en une forme linéaire  $\tilde{T}$  sur  $L^2(\Omega)$ . Le théorème de Riesz nous donne l'existence de  $g \in L^2(\Omega)$  telle que

$$\forall \varphi \in L^2(\Omega), \quad \langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} g\varphi.$$

Et donc

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T, \varphi \rangle = \langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} g\varphi = \langle T_g, \varphi \rangle.$$

On en déduit que  $T = T_g$ .

**Exercice 1.1** (Prolongement des applications linéaires continues). Soit  $E$  un espace vectoriel,  $X$  un sous-espace vectoriel dense de  $E$  et  $F$  un espace de Banach. Soit  $f : X \rightarrow F$  une application linéaire continue. Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité sur  $E$ , i.e. il existe une unique application linéaire continue  $\tilde{f} : E \rightarrow F$  telle que  $\tilde{f}(x) = f(x)$  pour tout  $x \in X$ .

**Théorème 1.3.**  $H^k(\Omega)$  est un espace vectoriel. Muni du produit scalaire

$$(f, g)_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} \overline{\partial^{\alpha} f(x)} \partial^{\alpha} g(x) dx,$$

$H^k(\Omega)$  est un espace de Hilbert. Sa norme est notée  $\|\cdot\|_{H^k}$ .

*Démonstration.* Il est clair que  $H^k(\Omega)$  est un espace vectoriel et que  $(\cdot, \cdot)_{H^k}$  est un produit scalaire sur  $H^k(\Omega)$ . Il reste à vérifier que  $H^k(\Omega)$  est complet pour la norme  $\|\cdot\|_{H^k}$ . Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy de  $H^k(\Omega)$ . Comme

$$\|f_p - f_q\|_{L^2} \leq \|f_p - f_q\|_{H^k},$$

on voit que  $(f_n)$  est de Cauchy dans  $L^2$ , donc converge dans  $L^2$  vers  $f \in L^2$ . De même pour tout  $|\alpha| \leq k$ ,

$$\|\partial^\alpha f_p - \partial^\alpha f_q\|_{L^2} \leq \|f_p - f_q\|_{H^k}.$$

Donc  $(\partial^\alpha f_n)$  converge dans  $L^2$  vers une fonction  $g_\alpha$ . Par ailleurs, la convergence dans  $L^2$  implique la convergence dans  $\mathcal{D}'$ . Donc

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{dans } \mathcal{D}'$$

et

$$\partial^\alpha f_n \longrightarrow g_\alpha \quad \text{dans } \mathcal{D}'.$$

De la première assertion, on tire

$$\partial^\alpha f_n \longrightarrow \partial^\alpha f \quad \text{dans } \mathcal{D}'.$$

Par unicité de la limite dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , on trouve  $\partial^\alpha f = g_\alpha \in L^2$ . Donc  $f \in H^k$  et comme  $\partial^\alpha f_n \longrightarrow \partial^\alpha f$  dans  $L^2$ , il s'en suit que  $f_n \longrightarrow f$  dans  $H^k$ .  $\square$

La transformation de Fourier permet de définir sur  $\Omega = \mathbb{R}^d$  des espaces de Sobolev  $H^s(\mathbb{R}^d)$  d'exposant  $s$  réel.

**Définition - Théorème 1.4.** Pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , on pose

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \hat{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\}. \quad (1.2)$$

Muni du produit scalaire noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^s}$  défini par

$$\forall (u, v) \in H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d), \quad \langle u, v \rangle_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s \overline{\hat{u}(\xi)} \hat{v}(\xi) d\xi, \quad (1.3)$$

l'espace  $H^s(\mathbb{R}^d)$  est un espace de Hilbert.

*Démonstration.* Il est clair que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^s}$  est un produit scalaire. Pour montrer la complétude, il suffit de remarquer que pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $H^s(\mathbb{R}^d)$ , la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $v_n(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{u}_n(\xi)$  est une suite de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  vérifiant

$$\forall 0 \leq k \leq l, \quad \|u_k - u_l\|_{H^s} = \|v_k - v_l\|_{L^2}.$$

Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $H^s(\mathbb{R}^d)$ , la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $L^2$ ; cette dernière converge donc dans l'espace  $L^2(\mathbb{R}^d)$  vers  $v \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . Posons  $u = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{v}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}} \right)$ . Il est clair que  $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$  et que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $u$  dans  $H^s(\mathbb{R}^d)$ .  $\square$

**Proposition 1.5.** *Pour  $s \in \mathbb{N}$ , les définitions de  $H^s(\mathbb{R}^d)$  données par les définitions 1.1 et 1.4 coïncident et la norme définie sur  $H^s(\mathbb{R}^d)$  par le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^s}$  est équivalente à celle définie par le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^s}$ .*

**Exercice 1.2.** Démontrer la proposition 1.5 pour  $s = 1$ .

**Remarque 1.6.** Il est possible de définir des espaces  $H^s(\Omega)$  pour  $\Omega \neq \mathbb{R}^d$  et  $s \in \mathbb{R}_+$ , sans utiliser la transformation de Fourier.

**Remarque 1.7.** De manière plus générale, on peut définir les espaces de Sobolev

$$W^{q,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq q, \partial^\alpha f \in L^p(\Omega)\}.$$

Pour  $p = 2$ ,  $W^{q,2}(\Omega) = H^q(\Omega)$ . Quand  $p \neq 2$ ,  $W^{q,p}(\Omega)$  est un espace de Banach mais n'a pas la structure d'espace de Hilbert.

## 1.2 Espaces $H_0^k(\Omega)$

### 1.2.1 Définition

**Définition 1.8.** *On note  $H_0^k(\Omega)$  la fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^k(\Omega)$ .*

**Proposition 1.9.** *Si  $\Omega = \mathbb{R}^d$ , alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  est dense dans  $H^k(\mathbb{R}^d)$ .*

**Exercice 1.3** (Preuve de la proposition 1.9).

- Le but de cette question est de montrer que si  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  et  $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$  alors la fonction  $f * g$  définie par

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y)dy$$

est dans  $L^p(\mathbb{R}^d)$  et

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}.$$

- Montrer que  $y \mapsto |f(x - y)| |g(y)|^p$  est une fonction de  $L^1(\mathbb{R}^d)$  pour presque tout  $x$ .
- En utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que

$$|f * g(x)|^p \leq (\|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p})^{p/p'},$$

où  $p'$  est l'indice conjugué de  $p$ .

- Conclure.

- Soit  $\chi_n$  une approximation de l'identité et  $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ . Montrer que

$$\chi_n * g \rightarrow g \quad \text{dans } L^p(\mathbb{R}^d).$$

- Montrer que  $\chi_n * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

- Soit  $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  telle que  $\xi(x) = 1$  sur  $B(0, 1)$ ,  $\xi(x) = 0$  sur  $\mathbb{R}^d \setminus B(0, 2)$  et soit

$$\xi_n(x) = \xi(x/n)$$

pour  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que pour tout  $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\xi_n g \rightarrow g \quad \text{dans } L^p(\mathbb{R}^d).$$

- Soit  $g \in H^k(\mathbb{R}^d)$  et soit  $g_n(x) = \xi_n(\chi_n * g)$ . Montrer que  $g_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  et que

$$g_n \rightarrow g \quad \text{dans } H^k(\mathbb{R}^d).$$

**Remarque 1.10.** Remarquer que si  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{D}(\Omega)$  n'est pas dense dans  $H^k(\Omega)$ . Considérons par exemple le cas où  $\Omega = ]0, 1[$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(]0, 1[)$ . On a

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad \varphi(x) = \int_0^x \varphi'(t) dt.$$

Donc

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad |\varphi(x)| \leq \int_0^x |\varphi'(t)| dt \leq \left( \int_0^x |\varphi'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^x 1^2 dt \right)^{1/2} \leq \|\varphi'\|_{L^2}.$$

Il en résulte que

$$\|\varphi\|_{L^2} = \left( \int_0^1 |\varphi(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \|\varphi'\|_{L^2}.$$

On a donc finalement

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, 1[), \quad \|\varphi\|_{L^2} \leq \|\varphi'\|_{L^2}.$$

Si  $\mathcal{D}(]0, 1[)$  était dense dans  $H^1(]0, 1[)$ , cette inégalité resterait vraie pour tout  $\varphi \in H^1(]0, 1[)$ . Or en prenant par exemple  $\varphi \equiv 1$  sur  $]0, 1[$ , on voit que cette inégalité est violée.

**Remarque 1.11.** En vertu de la proposition ci-dessus,  $H_0^k(\mathbb{R}^d) = H^k(\mathbb{R}^d)$ , mais  $H_0^k(\Omega)$  n'est qu'un sous-espace vectoriel de  $H^k(\Omega)$  si  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  avec  $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ .

**Proposition 1.12.** *L'espace  $H_0^k(\Omega)$  est un espace vectoriel. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{H^k}$ .*

*Démonstration.* Il est clair que  $H_0^k(\Omega)$  est un espace vectoriel (c'est la fermeture d'un espace vectoriel pour une certaine norme). Le produit scalaire de  $H^k(\Omega)$  restreint à  $H_0^k(\Omega)$  définit évidemment un produit scalaire sur  $H_0^k(\Omega)$ . Comme  $H_0^k(\Omega)$  est fermé dans un espace complet, il est complet.  $\square$

Énonçons maintenant un résultat important d'analyse fonctionnelle.

**Théorème 1.13.** (Inégalité de Poincaré). Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ . Il existe une constante  $C_\Omega$  telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \|u\|_{L^2} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Dans le langage de l'analyse fonctionnelle, on dit que la norme  $L^2$  d'une fonction de  $H_0^1(\Omega)$  ( $\Omega$  borné) est *contrôlée* par la norme  $L^2$  de son gradient.

*Preuve du théorème 1.13.* L'ouvert  $\Omega$  étant borné, on peut trouver  $L > 0$  tel que  $\Omega \subset [-L, L]^d$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  et  $\psi$  le prolongement de  $\varphi$  par 0 à tout  $\mathbb{R}^d$ . Il est clair que  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  et que

$$\forall x \in [-L, L]^d, \quad \psi(x) = \int_{-L}^{x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_d) dt.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} |\psi(x)|^2 &= \left( \int_{-L}^{x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_d) dt \right)^2 \\ &\leq \left( \int_{-L}^{x_1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_d) \right|^2 dt \right) \left( \int_{-L}^{x_1} 1^2 dt \right) \\ &\leq 2L \int_{-L}^L \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_d) \right|^2 dt. \end{aligned}$$

En intégrant l'inégalité obtenue sur  $[-L, L]^d$ , on obtient

$$\int_{[-L, L]^d} |\psi|^2 \leq 4L^2 \int_{[-L, L]^d} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right|^2 \leq 4L^2 \int_{[-L, L]^d} |\nabla \psi|^2$$

Comme  $\text{Supp}(\psi) = \text{Supp}(\varphi) \subset \Omega$ ,  $\text{Supp}(\nabla \psi) = \text{Supp}(\nabla \varphi) \subset \Omega$ , et comme  $\varphi = \psi$  et  $\nabla \varphi = \nabla \psi$  sur  $\Omega$ , il en résulte que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \|\varphi\|_{L^2} \leq 2L \|\nabla \varphi\|_{L^2}. \quad (1.4)$$

Il est clair par ailleurs que les applications

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \|u\|_{L^2} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} H^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \|\nabla u\|_{L^2} \end{array}$$

sont continues. Comme  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $H_0^1(\Omega)$  pour la norme  $H^1$ , il en résulte que l'inégalité (1.4) reste valable pour tous les éléments de  $H_0^1(\Omega)$ .  $\square$

**Proposition 1.14.** L'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall u, v \in H_0^1, \quad \langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

est un produit scalaire sur  $H_0^1(\Omega)$ . La norme induite par ce produit scalaire est équivalente à la norme induite par le produit scalaire de  $H^1(\Omega)$ .

**Exercice 1.4.** Démontrer la proposition 1.14.

**Remarque 1.15.** De manière plus générale, on peut définir les espaces  $W_0^{q,p}(\Omega)$  qui sont les fermetures de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans les espaces  $W^{q,p}(\Omega)$ .

### 1.2.2 Notion de trace

Nous évoquons dans cette section la définition de  $H_0^1(\Omega)$  via la notion de trace : on dit parfois que  $H_0^1(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $H^1$  "nulles au bord". Ceci appelle quelques commentaires. Introduisons pour commencer la notion de trace. Pour une fonction  $u \in C^0(\overline{\Omega})$ , la trace de  $u$  sur  $\partial\Omega$  est définie par

$$\begin{aligned} \gamma(u) : \partial\Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto u(x). \end{aligned}$$

En d'autres termes,  $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$ . Notons que l'application trace

$$\begin{aligned} \gamma : C^0(\overline{\Omega}) &\longrightarrow C^0(\partial\Omega) \\ u &\mapsto \gamma(u) \end{aligned}$$

est linéaire et continue. La question qui se pose maintenant est la suivante : peut-on étendre la notion de trace à des fonctions moins régulières ? Voici quelques éléments de réponse :

1. On ne peut pas définir la trace d'une fonction de  $L^2(\Omega)$ .

Considérons en effet, à titre d'exemple, la fonction  $u : x \mapsto \sin(1/x)$  sur  $\Omega = ]0, 1[$ . L'ensemble  $\partial\Omega$  est alors composé des deux points 0 et 1. La fonction  $u$  est continue en 1 et on peut donc définir sa trace en 1 (c'est le réel  $\sin(1)$ ) ; en revanche, l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $u$  en 0 est l'intervalle  $[-1, 1]$  ; il n'y a donc pas de façon naturelle de définir la trace de  $u$  (la valeur de  $u$ ) en 0 ;

2. En dimension 1, nous verrons à la section 1.3 qu'une fonction qui est dans  $H^1([a, b])$  a un représentant dans  $C^0([a, b])$ <sup>1</sup>. On peut donc définir la trace en  $a$  et en  $b$  d'une fonction de  $H^1([a, b])$ ;
3. En dimension  $\geq 2$ , une fonction qui est dans  $H^1(\Omega)$  n'a pas nécessairement de représentant continu. On peut cependant définir la trace sur  $\partial\Omega$  d'une fonction de  $H^1(\Omega)$ . Plus précisément, nous avons le théorème suivant.

**Théorème 1.16.** Si  $\Omega$  est un ouvert régulier borné, alors il existe une application linéaire, continue et surjective

$$\begin{aligned}\gamma : H^1(\Omega) &\longrightarrow H^{1/2}(\partial\Omega) \\ u &\mapsto \gamma(u)\end{aligned}$$

vérifiant  $\forall u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ ,  $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$ .

### Remarque 1.17.

1. Nous n'avons pas défini les espaces de Sobolev fractionnaires pour des ouverts quelconques. Notons ici que  $H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ .
2. Nous utilisons ici la notion vague de “ouvert régulier” pour désigner un ouvert dont la frontière est lipschitzienne. La plupart des domaines classiques - en particulier les polygones en dimension 2 et presque tous les polyèdres en dimension 3 - sont réguliers. Des exemples de domaines non réguliers sont ceux dont la frontière présente des points de rebroussement, ou une fissure rentrant dans le domaine.

On a la caractérisation suivante.

**Proposition 1.18.** *Si  $\Omega$  est un ouvert borné régulier, alors*

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \gamma(u) = 0\}. \quad (1.5)$$

---

<sup>1</sup>Souvenons nous que les éléments de  $H^1([a, b])$  sont des classes d'équivalence de fonctions, qui sont égales presque partout.

*Démonstration.* Nous ne montrons que

$$H_0^1(\Omega) \subset \{u \in H^1(\Omega), \gamma(u) = 0\}.$$

La réciproque est technique. Elle se montre par troncature et régularisation. On a

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset \{u \in H^1(\Omega), \gamma(u) = 0\}.$$

Il s'en suit que

$$H_0^1(\Omega) \subset \overline{\{u \in H^1(\Omega), \gamma(u) = 0\}}.$$

Or  $\{u \in H^1(\Omega), \gamma(u) = 0\} = \gamma^{-1}(\{0\})$  et  $\gamma$  est une application continue. Donc  $\{u \in H^1(\Omega), \gamma(u) = 0\}$  est un fermé et

$$\overline{\{u \in H^1(\Omega), \gamma(u) = 0\}} = \{u \in H^1(\Omega), \gamma(u) = 0\}.$$

D'où le résultat.  $\square$

**Remarque 1.19.** De manière similaire, nous pouvons caractériser

$$H_0^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega), \gamma(u) = 0, \gamma(\nabla u \cdot n) = 0\}, \quad (1.6)$$

où  $n(x)$  est la normale à  $\Omega$  sortante au point  $x$ .

**Exercice 1.5.** En utilisant les caractérisations (1.5) et (1.6), donner un exemple d'une fonction de  $H_0^1([-1, 1]) \cap H^2([-1, 1])$ , mais qui n'est pas dans  $H_0^2([-1, 1])$ .

Grâce à la notion de trace, on peut donner un sens à la *formule de Green* pour les fonctions  $H^1$ .

**Théorème 1.20** (Formule de Green). Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier. Si  $u$  et  $v$  sont des fonctions de  $H^1(\Omega)$ , elles vérifient

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x) dx, \quad (1.7)$$

où  $n = (n_i)_{1 \leq i \leq d}$  est la normale unité extérieure à  $\partial\Omega$ .

**Exercice 1.6.** Soit  $u \in H^1(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $C \geq 0$  telle que

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|u'\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}.$$

**Indication:** utiliser la densité de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  dans  $H^1(\mathbb{R})$ .

**Exercice 1.7.** (Inégalité de Hardy sur  $]0, 1[$ ). Soit  $\Omega = ]0, 1[$  et  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Montrer que la fonction  $\frac{u(x)}{x}$  est dans  $L^2(\Omega)$  et que

$$\left\| \frac{u(x)}{x} \right\|_{L^2} \leq c \|u'\|_{L^2}$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $u$ . **Indication:** utiliser le fait que  $u(x) = \int_0^x u'(t)dt$ .

### 1.2.3 Espace $H^{-1}(\Omega)$

**Définition 1.21.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . On note  $H^{-1}(\Omega)$  l'espace vectoriel des distributions  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  telles qu'il existe une constante  $C$  pour laquelle

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{H^1}. \quad (1.8)$$

**Remarque 1.22.** Il est clair que  $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ . En effet, si  $f \in L^2(\Omega)$ , on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad |\langle f, \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} f \varphi \right| \leq \|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{H^1}.$$

**Théorème 1.23.** On peut identifier  $H^{-1}(\Omega)$  au dual topologique de  $H_0^1(\Omega)$ .

*Démonstration.* Soit  $T \in H^{-1}(\Omega)$ . L'application linéaire

$$\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$$

est continue sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  muni de la norme  $H^1$ . Par conséquent, cette application se prolonge en une unique forme linéaire continue sur  $H_0^1(\Omega)$  (cf. exercice 1.1) notée

$$\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

Elle vérifie en particulier

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \langle T, \varphi \rangle.$$

On peut donc associer à tout  $T \in H^{-1}(\Omega)$  un élément du dual topologique de  $H_0^1(\Omega)$ . On définit ainsi

$$\begin{aligned} \alpha : H^{-1}(\Omega) &\longrightarrow (H_0^1(\Omega))' \\ T &\mapsto \langle T, \cdot \rangle_{H^{-1}, H_0^1}. \end{aligned}$$

Réciproquement, soit  $L \in (H_0^1(\Omega))'$ . Il existe une constante  $C$  telle que

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad |L(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{H^1}.$$

En notant  $L|_{\mathcal{D}(\Omega)}$  la restriction de  $L$  à  $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ , on définit une forme linéaire sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  qui vérifie

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad |L|_{\mathcal{D}(\Omega)}(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{H^1}.$$

Il reste à vérifier que  $L|_{\mathcal{D}(\Omega)}$  est une distribution (c'est-à-dire qu'elle est continue sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  pour la topologie de  $\mathcal{D}(\Omega)$ ). Soit donc  $K$  un compact inclus dans  $\Omega$  et  $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ . Il vient

$$|L|_{\mathcal{D}(\Omega)}(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{H^1} \leq C (\|\varphi\|_{L^2}^2 + \|\nabla \varphi\|_{L^2}^2)^{1/2}.$$

Or  $\|\varphi\|_{L^2} \leq \sqrt{|K|} \|\varphi\|_{L^\infty}$  et  $\|\nabla \varphi\|_{L^2} \leq \sqrt{|K|} \|\nabla \varphi\|_{L^\infty}$ . Donc

$$|L|_{\mathcal{D}(\Omega)}(\varphi)| \leq C' \sup_{|\alpha| \leq 1} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty.$$

Donc  $L|_{\mathcal{D}(\Omega)}$  définit une distribution (d'ordre  $\leq 1$ ). On définit ainsi

$$\begin{aligned} \beta : (H_0^1(\Omega))' &\longrightarrow H^{-1}(\Omega) \\ L &\mapsto L|_{\mathcal{D}(\Omega)}. \end{aligned}$$

On vérifie sans difficulté que  $\alpha \circ \beta = I_{(H_0^1(\Omega))'}$  et que  $\beta \circ \alpha = I_{H^{-1}(\Omega)}$ .  $\square$

**Remarque 1.24.** Noter que quand  $\Omega = \mathbb{R}^d$  les définitions 1.4 et 1.21 de  $H^{-1}(\mathbb{R}^d)$  coïncident. En effet, il est facile de voir que si  $f$  est une distribution tempérée telle que  $\widehat{f} \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$  et

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\widehat{f}(\xi)|^2}{1 + |\xi|^2} < \infty,$$

alors pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ , on a

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi \rangle| &= \left| \langle \widehat{f}, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\widehat{f}(\xi)}{(1 + |\xi|^2)^{1/2}} (1 + |\xi|^2)^{1/2} \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(\xi) \right| \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\widehat{f}(\xi)|^2}{1 + |\xi|^2} \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2) |\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(\xi)|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Or

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d} \mathcal{F}(\varphi)(-\xi).$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2) |\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(\xi)|^2 = C \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2) |\mathcal{F}(\varphi)(\xi)|^2 = C \|\varphi\|_{H^1}.$$

D'où

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{H^1}.$$

Réiproquement, soit  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  satisfaisant (1.8). On peut facilement montrer (voir cours d'analyse) que pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ , on a

$$\|\varphi\|_{H^1} \leq C \mathcal{N}_{d+2}(\varphi).$$

Il s'en suit que pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \mathcal{N}_{d+2}(\varphi).$$

$f$  peut alors être identifiée à un élément de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  et  $\widehat{f}$  a un bien un sens en tant que distribution. La fonction  $g : \xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{-1/2}$  étant  $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $T = g\widehat{f}$  définit une distribution. Montrons que  $T \in L^2(\mathbb{R}^d)$  en utilisant la caractérisation de la remarque 1.2. Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ . On a

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle \widehat{f}, g\varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}(g\varphi) \rangle.$$

D'où

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi \rangle| &\leq C \|\mathcal{F}(g\varphi)\|_{H^1} \\ &\leq C \left( \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2) |g(\xi)\varphi(\xi)|^2 \right)^{1/2} \\ &= C \|\varphi\|_{L^2}, \end{aligned}$$

où l'avant dernière inégalité est obtenue par la proposition 1.5. Ceci conclut la preuve.

Par conséquent, on a les inclusions

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))' \subset H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

et on a par ailleurs pour  $T \in L^2(\Omega)$  et  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \langle T, \varphi \rangle_{(L^2)', L^2} = (T, \varphi)_{L^2} = \int_{\Omega} T \varphi.$$

$L^2$  est “l'espace pivot” de ces dualités.

### 1.3 Inclusions de Sobolev

Les inclusions de Sobolev sont des relations qui relient la régularité d'une fonction (appartenance à un espace  $H^k$ ) à sa décroissance (appartenance à un espace  $L^p$ ) et sa régularité (appartenance à un espace  $C^m$ ). Constatons d'abord que pour  $0 \leq s \leq r$ , on a

$$H^r(\Omega) \subset H^s(\Omega),$$

ceci étant vrai pour  $s, r \in \mathbb{R}_+$  si  $\Omega = \mathbb{R}^d$  et  $s, r \in \mathbb{N}$  sinon.

**Théorème 1.25** (Inclusions de Sobolev). Soit  $\Omega$  un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^d$ . On a les injections continues: pour  $k \geq 1$  un entier, on a

- si  $d > 2k$ , alors  $H^k(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$  avec  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{2} - \frac{k}{d}$ ,
- si  $d = 2k$ , alors  $H^k(\Omega) \subset L^q(\Omega)$  pour tout  $q \in [2, +\infty[$ ,
- si  $d < 2k$ , alors  $H^k(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ .

**Corollaire 1.26.** Pour  $d = 1$  et  $k = 1$ , on a  $2k > 1$ , et donc  $H^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ .

Quand  $\Omega = \mathbb{R}^d$ , la définition des espaces  $H^k$  avec la transformation de Fourier (définition 1.4) permet de montrer facilement le résultat suivant, qui renforce le dernier point du théorème précédent.

**Théorème 1.27.** Soit  $s \in \mathbb{R}$  vérifiant  $2s > d$  et soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $s - d/2 > k$ . Si  $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ , alors  $u$  est de classe  $C^k$  et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $k$  tendent vers zéro à l'infini.

*Démonstration.* Nous montrons ci-dessous que  $u$  est continue et tend vers 0 à l'infini. La preuve pour les autres dérivées est immédiate. On a

$$\widehat{u}(\xi) = ((1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{u}(\xi)) \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}}.$$

Comme  $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ , on a par hypothèse

$$(1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

et d'autre part

$$\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{s/2}} \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

puisque  $s > d/2$ . On a donc  $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , d'où il découle que  $u = \mathcal{F}^{-1}\hat{u}$  est continue et tend vers zéro à l'infini.  $\square$

Comme la régularité d'une fonction est une propriété locale, le théorème précédent s'adapte au cas d'un ouvert quelconque.

**Théorème 1.28.** Soient  $\Omega$  un ouvert régulier et  $s \in \mathbb{N}$  tel que  $2s > d$  et soit  $k \in \mathbb{N}$  tel  $s - k > d/2$ . Alors on a l'inclusion continue suivante

$$H^s(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega}).$$

Quand  $\Omega$  est borné, les inclusions du théorème 1.25 sont non seulement continues mais *compactes* (dont le sens de la définition suivante). Ceci a de très fortes conséquences sur la convergence des suites dans les espaces concernés.

**Définition 1.29.** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $T$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . On dit que  $T$  est compacte si pour tout  $B \subset E$ ,

$$B \text{ borné dans } E \implies T(B) \text{ relativement compact dans } F.$$

**Théorème 1.30** (Inclusions de Sobolev compactes). Soit  $\Omega$  un ouvert régulier borné. On a les injections compactes suivantes

- si  $d > 2k$ , alors  $H^k(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ , pour tout  $q \in [1, p^*[,$  où  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{2} - \frac{k}{d}$ .
- si  $d = 2k$ , alors  $H^k(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ , pour tout  $q \in [1, \infty[$ .
- si  $d < 2k$ , alors  $H^k(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ .

**Proposition 1.31.** Soit  $\Omega$  un ouvert régulier borné de  $\mathbb{R}^d$ . Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite bornée de  $H^1(\Omega)$  alors on peut en extraire une sous-suite qui converge dans  $L^2(\Omega)$ .

*Démonstration.* Si  $\Omega$  est borné, on a  $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  avec injection compacte. En effet, pour  $d \leq 2$ , c'est facile et pour  $d > 2$ , on voit que  $p^* = 2d/(d-2) \geq 2$ . Cela implique que tout borné de  $H^1(\Omega)$  est relativement compact dans  $L^2(\Omega)$ . L'ensemble  $B = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$  étant borné dans  $H^1(\Omega)$ , on peut en extraire une sous-suite qui converge dans  $L^2(\Omega)$ .  $\square$

## 1.4 Convergence faible

**Définition 1.32.** Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert. On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $H$  converge faiblement vers un élément  $u$  de  $H$ , ce qu'on note  $u_n \rightharpoonup u$ , si

$$\forall v \in H, \quad \langle u_n, v \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle.$$

On dit alors que  $u$  est la limite faible de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Il est facile de montrer les éléments suivants (voir le cours d'analyse).

1. La topologie faible est une topologie *séparée*, i.e. si une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite faible, celle-ci est unique.
2. La topologie forte est plus forte que la topologie faible, dans le sens où si une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers  $u$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $u$ .
3. Si  $H$  est de dimension finie, la topologie faible et la topologie usuelle (dite *forte*:  $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ ) sont équivalentes. Ceci est faux en dimension infinie. Par exemple dans  $L^2([0, 1])$ , la suite  $f_n(x) = \sin(2\pi n x)$  converge faiblement vers 0 (le prouver) mais ne converge pas fortement.
4. Nous avons néanmoins la réciproque suivante: si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $u$  et si  $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers  $u$ .
5. On a aussi si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $u$ , alors

$$\|u\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|.$$

En fait, nous avons un résultat plus fort que le dernier point ci-dessous.

**Proposition 1.33.** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'un espace de Hilbert  $H$  qui converge faiblement est bornée.

*Démonstration.* La preuve de cette proposition repose sur le

**Théorème de Banach-Steinhaus:** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach. Soit  $(T_n)_{n \in I}$  une famille (non nécessairement dénombrable) d'applications linéaires et continues de  $E$  dans  $F$ . On suppose que

$$\forall x \in E, \quad \sup_{n \in I} \|T_n(x)\|_F < \infty. \quad (1.9)$$

Alors

$$\sup_{n \in I} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty.$$

Pour prouver la proposition 1.33, on applique le théorème de Banach-Steinhaus avec  $E = H$ ,  $F = \mathbb{R}$  et  $T_n = \langle u_n, \cdot \rangle$ . Comme pour tout  $v \in H$  la suite  $(\langle u_n, v \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$  converge alors elle est bornée, et la suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfait la condition (1.9). Il s'en suit que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\langle u_n, \cdot \rangle\|_{\mathcal{L}(H,\mathbb{R})} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_H < \infty.$$

□

### Exercice 1.8.

1. En utilisant le théorème de Riesz, montrer que pour  $v \in L^2(\Omega)$ , il existe  $w \in H^1(\Omega)$  tel que

$$\forall u \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} vu = \langle w, u \rangle_{H^1}.$$

2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $H^1(\Omega)$  qui converge faiblement dans  $H^1(\Omega)$ . Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement dans  $L^2(\Omega)$ .
3. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $u$  dans  $L^2(\Omega)$ , que dire de la convergence de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  au sens des distributions ?

Le théorème suivant donne le lien entre la convergence faible et la compacité.

**Théorème 1.34.** Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux espaces de Hilbert et  $T : H_1 \rightarrow H_2$  une application linéaire compacte. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite faiblement convergente de  $H_1$  alors  $(T(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite fortement convergente de  $H_2$ .

**Exercice 1.9** (Démonstration du théorème 1.34).

1. Montrer que  $T$  est continue pour la topologie forte.
2. Montrer que  $T$  est continue pour la topologie faible.
3. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite qui converge faiblement dans  $H_1$ . Montrer que  $(T(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers  $T(u)$ . **Indication:** on peut utiliser le résultat suivant: soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans un espace vectoriel normé  $E$  et  $u \in E$ . On suppose que de chaque sous-suite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  on peut extraire une sous-suite qui converge vers  $u$ . Alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $u$ .

L'intérêt de la convergence faible est le théorème suivant.

**Théorème 1.35.** Soit  $H$  un espace de Hilbert. La boule unité fermée de  $H$  est faiblement compacte. Autrement dit, de toute suite bornée dans  $H$ , on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans  $H$ .

**Exercice 1.10** (Preuve du théorème 1.35). On se propose de donner une preuve du théorème 1.35 dans le cas où  $H$  est un espace de Hilbert séparable, i.e. il existe une base hilbertienne  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $H$  (tous les espaces de Hilbert que nous rencontrons sont séparables). On considère  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de  $H$ .

1. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(\langle x_n, e_k \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite bornée de  $\mathbb{R}$ .
2. Justifier alors l'existence de fonctions  $\varphi_k$  strictement croissantes de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telles que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}, e_k \rangle = a_k \in \mathbb{R}$ .
3. On définit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y_n = x_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_n(n)}$ . Vérifier que  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une sous-suite de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et que, de plus,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle y_n, e_k \rangle = a_k$ .
4. Montrer que  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite qui converge faiblement vers une limite que l'on précisera.
5. Conclure.

L'idée de preuve utilisée à l'exercice 1.10 est une procédure classique appelée *procédé de diagonalisation*.

**Remarque 1.36.** Dans un espace de Hilbert de dimension infinie, la boule unité de  $H$  n'est jamais compacte pour la topologie forte. On comprend alors l'intérêt de la notion de convergence faible. En EDP, si on arrive à obtenir une borne *a priori* sur une suite de fonctions approchant la solution d'une équation, alors on peut extraire de cette suite une limite possible. Cette limite est alors un candidat naturel pour être une solution de l'équation de départ.

**Proposition 1.37.** Soit  $\Omega$  un ouvert régulier borné. De toute suite bornée dans  $H^1(\Omega)$  on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans  $H^1(\Omega)$  et fortement dans  $L^2(\Omega)$ .

**Exercice 1.11.** Démontrer la proposition 1.37.

## 1.5 Exercices supplémentaires

**Exercice 1.12.** Soit la fonction  $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}_{[0,n]}(x)$ . Vérifier que  $\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ . En déduire que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement dans  $L^2(\mathbb{R})$  et identifier sa limite. La suite converge-t-elle fortement dans  $L^2(\mathbb{R})$ ?

**Exercice 1.13** (Démonstration alternative de l'inégalité de Poincaré). Soit  $\Omega$  un ouvert régulier borné connexe. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de  $H_0^1(\Omega)$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$   $\|u_n\|_{L^2} = 1$  et

$$\|\nabla u_n\|_{L^2} < \frac{1}{n}.$$

1. Montrer qu'on peut extraire de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une sous-suite qui converge faiblement dans  $H^1(\Omega)$  et fortement dans  $L^2(\Omega)$  vers  $u \in H^1(\Omega)$ .
2. Montrer qu'en fait  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge fortement dans  $H^1(\Omega)$  à sous-suite près.
3. En déduire que  $u \in H_0^1(\Omega)$ .
4. Montrer qu'il y a une contradiction.

**Exercice 1.14** (Inégalité de Poincaré Wirtinger). Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe. Montrer qu'il existe une constante  $C \geq 0$  telle que pour tout  $u \in H^1(\Omega)$ , on a

$$\left\| u - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u \right\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}.$$



# Chapitre 2

## Problèmes aux limites elliptiques

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>31</b>
<b>2.2</b>	<b>Théorème de Lax-Milgram</b>	<b>33</b>
<b>2.3</b>	<b>Le Laplacien de Dirichlet</b>	<b>37</b>
2.3.1	Espace fonctionnel	37
2.3.2	Formulation variationnelle	39
2.3.3	Résolution	40
2.3.4	Propriétés qualitatives	41
<b>2.4</b>	<b>Autres modèles</b>	<b>43</b>

---

### 2.1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à l'analyse mathématique des équations elliptiques linéaires posées sur un domaine borné avec des conditions aux bords prescrites. C'est ce qu'on appelle *problèmes aux limites elliptiques*. Ces problèmes sont indépendants du temps et représentent généralement des phénomènes physiques stationnaires. Le problème type auquel nous nous

intéresserons ici est le problème du *Laplacien de Dirichlet*:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La méthode développée ici peut aussi être utilisée pour des problèmes posés sur des domaines non bornés, mais nous ne nous intéressons pas à ceux-ci ici car

- ils ne sont pas d'un grand intérêt pratique,
- pour les problèmes posés sur tout l'espace, nous disposons d'autres méthodes (théoriques et numériques) parfois plus pertinentes.

Noter qu'en dimension  $d = 1$ , les problèmes aux limites sont différents des problèmes de Cauchy: les premiers s'écrivent (pour  $\Omega = [0, 1]$ , par exemple)

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{dans } [0, 1], \\ u(0) = 0 & u(1) = 0, \end{cases}$$

alors que les deuxièmes s'écrivent

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{dans } [0, 1], \\ u(0) = 0 & u'(0) = m. \end{cases}$$

Il n'est pas clair s'il existe des valeurs de  $m$  pour lesquelles les deux problèmes sont équivalents. Pour utiliser les résultats des problèmes de Cauchy pour les problèmes aux limites, on procède par une méthode itérative appelée *la méthode du tir*. Cette méthode est peu efficace et ne se généralise pas aux dimensions supérieures.

La première question qui va nous intéresser dans ce chapitre est de savoir si un problème est *bien posé*, i.e.

1. le problème a une solution,
2. cette solution est unique,
3. la solution dépend de manière continue des données.

Pour ce faire, nous suivrons les deux étapes suivantes.

1. On associera au problème une *formulation variationnelle* qui lui est équivalente de la forme

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V, \quad a(u, v) = b(v), \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $V$  un espace de fonctions,  $a(u, v)$  une forme bilinéaire et  $b(v)$  une forme linéaire.

2. On montrera à l'aide du *théorème de Lax-Milgram* que, sous certaines conditions, le problème variationnel (2.1) admet une solution et une seule.

Un des intérêts majeurs de cette méthode est qu'elle fournit par la même occasion une méthode de simulation numérique.

La deuxième question qui nous intéressera concerne les propriétés qualitatives des solutions. Nous verrons en particulier, que sous condition que les données soient régulières une solution *faible* devient une solution *forte*.

## 2.2 Théorème de Lax-Milgram

**Définition 2.1** (Forme bilinéaire coercive). Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $a$  une forme bilinéaire sur  $H$ . On dit que  $a$  est coercive s'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall u \in H, \quad a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2.$$

**Théorème 2.2** (Théorème de Lax Milgram, version symétrique). Soit  $H$  un espace de Hilbert,  $a$  une forme bilinéaire sur  $H$ , symétrique, continue et coercive et  $b$  une forme linéaire continue sur  $H$ . Alors le problème

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H \text{ tel que} \\ \forall v \in H, \quad a(u, v) = b(v), \end{cases} \quad (2.2)$$

admet une solution et une seule. En outre, l'unique solution  $u$  de (2.2) est également l'unique solution du problème de minimisation

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H \text{ tel que} \\ J(u) = \inf_{v \in H} J(v), \end{cases} \quad (2.3)$$

où la fonctionnelle  $J(v)$  (dite fonctionnelle d'énergie) est définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - b(v).$$

De plus la solution dépend continûment du second membre  $b$ , i.e. il existe une constante  $C \geq 0$  telle que pour tout second membre  $b$ , la solution  $u$  correspondante vérifie

$$\|u\| \leq C \|b\|_{\mathcal{L}(H)}.$$

*Preuve.* Posons

$$(u, v)_a = a(u, v).$$

Il est clair que  $(\cdot, \cdot)_a$  est un produit scalaire sur  $H$ . Par ailleurs, les normes  $\|\cdot\|_H$  et  $\|\cdot\|_a$  sont équivalentes ; en effet, de la coercivité et de la continuité de la forme bilinéaire  $a$ , nous déduisons que

$$\forall v \in H, \quad \alpha \|v\|^2 \leq \|v\|_a^2 = a(v, v) \leq M \|v\|^2.$$

L'espace  $H$ , qui est complet pour la norme  $\|\cdot\|$ , l'est donc aussi pour la norme  $\|\cdot\|_a$ . Donc  $H$  muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_a$  est un espace de Hilbert. La forme linéaire  $b$  est continue pour la norme  $\|\cdot\|$  donc aussi pour la norme  $\|\cdot\|_a$  qui lui est équivalente. D'après le théorème de Riesz (voir cours d'analyse), il existe donc un unique élément  $u \in H$  vérifiant

$$\forall v \in H, \quad a(u, v) = (u, v)_a = b(v).$$

Ceci montre l'existence et l'unicité de la solution de (2.2).

Soit maintenant  $u$  solution de (2.2) et  $v \in H$ . Posons  $h = v - u$ . On a

$$\begin{aligned} J(v) &= J(u + h) \\ &= \frac{1}{2}a(u + h, u + h) - b(u + h) \\ &= J(u) + a(u, h) - b(h) + \frac{1}{2}a(h, h) \\ &= J(u) + \frac{1}{2}a(h, h) \\ &\geq J(u). \end{aligned}$$

Donc  $u$  est solution de (2.3).

Réiproquement, si  $u$  est solution de (2.3), on a alors pour tout  $v \in H$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$J(u) \leq J(u + \lambda v) = J(u) + \lambda(a(u, v) - b(v)) + \frac{1}{2}\lambda^2 a(v, v).$$

Donc pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\lambda(a(u, v) - b(v)) + \frac{1}{2}\lambda^2 a(v, v) \geq 0.$$

Ceci n'est possible que si  $a(u, v) = b(v)$  pour tout  $v \in H$ . Donc  $u$  est solution de (2.2).

Enfin, la continuité par rapport au second membre est obtenue par la coercivité de  $a$ . En effet, pour  $v = u$ , on a

$$\alpha \|u\|^2 \leq \|b\|_{\mathcal{L}(H)} \|u\|.$$

D'où

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|b\|_{\mathcal{L}(H)}.$$

□

L'hypothèse de symétrie de  $a$  est contraignante car de nombreux problèmes aux limites, en particulier ceux dans lesquels figurent des termes d'*advection* sont non symétriques. Heureusement, on peut s'en affranchir.

**Théorème 2.3** (de Lax-Milgram). Soit  $H$  un espace de Hilbert,  $a$  une forme bilinéaire sur  $H$  continue et coercive et  $b$  une forme linéaire continue sur  $H$ . Alors le problème

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H \text{ tel que} \\ \forall v \in H, \quad a(u, v) = b(v), \end{cases} \tag{2.4}$$

admet une solution et une seule. De plus la solution dépend continûment du second membre  $b$ , i.e. il existe une constante  $C \geq 0$  telle que pour tout second membre  $b$ , la solution  $u$  correspondante vérifie

$$\|u\| \leq C \|b\|_{\mathcal{L}(H)}.$$

**Remarque 2.4.** Le théorème de Lax-Milgram “contient” le théorème de Lax-Milgram version symétrique.

*Preuve.* On considère l’application linéaire continue

$$\begin{aligned}\Phi : H &\longrightarrow H' \\ u &\mapsto \Phi(u) = a(u, \cdot).\end{aligned}$$

Il est clair que  $u$  est solution de (2.4) si et seulement si  $\Phi(u) = b$ . Montrer l’existence et l’unicité de la solution de (2.4) équivaut donc à montrer que  $\Phi$  est bijective.

1. Injectivité (unicité de la solution de (2.4)).

Soit  $u \in H$  tel que  $\Phi(u) = 0$ . On a pour tout  $v \in H$ ,  $a(u, v) = 0$ , donc en particulier  $a(u, u) = 0$ . Or en utilisant la coercivité,

$$0 = a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2.$$

Donc  $u = 0$ .

2. Surjectivité (existence de la solution de (2.4)).

Soit  $V = \text{Im}(\Phi) \subset H'$ . On va montrer que  $V$  est à la fois dense et fermé (ce qui implique  $V = H'$ ).

(a) Montrons que  $V = \text{Im}(\Phi)$  est fermé. Soit  $w \neq 0$ . On a

$$\|\Phi(w)\|_{H'} = \sup_{v \in H, v \neq 0} \frac{|a(w, v)|}{\|v\|} \geq \frac{a(w, w)}{\|w\|} \geq \alpha \|w\|.$$

Donc

$$\|\Phi(w)\|_{H'} \geq \alpha \|w\|$$

et cette inégalité reste vraie pour  $w = 0$ . Soit maintenant  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d’éléments de  $V$  qui converge dans  $H'$  vers  $b \in H'$ . Il faut montrer que  $b \in V$ . Soit  $w_n$  tel que  $\Phi(w_n) = b_n$ . Comme  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy,  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l’est aussi. En effet,

$$\|b_p - b_q\|_{H'} = \|\Phi(w_p) - \Phi(w_q)\|_{H'} = \|\Phi(w_p - w_q)\|_{H'} \geq \alpha \|w_p - w_q\|.$$

Donc  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $H$  vers un certain  $w \in H$ . Comme en outre  $\Phi$  est continue,

$$b_n = \Phi(w_n) \longrightarrow \Phi(w) \quad \text{dans } H'.$$

Donc  $b = \Phi(w) \in V$  (unicité de la limite).

(b) Montrons que  $V = \text{Im}(\Phi)$  est dense dans  $H'$ . Notons

$$V^\perp = \{g \in H', \quad \forall f \in V, \quad \langle f, g \rangle_{H'} = 0\}.$$

On rappelle que  $\langle f, g \rangle_{H'}$  est défini par

$$\langle f, g \rangle_{H'} = \langle w_f, w_g \rangle_H,$$

où  $w_\varphi \in H$  est le représentant donné par le théorème de Riesz de la forme linéaire continue  $\varphi$ . Soit  $g \in V^\perp$ . On a alors

$$0 = \langle g, \Phi(w_g) \rangle_{H'} = a(w_g, w_g).$$

Par la coercivité de  $a$ , on a  $w_g = 0$  et donc  $g = 0$ . Il s'en suit que  $V^\perp = \{0\}$ , ce qui implique que  $\overline{V} = (V^\perp)^\perp = H'$ .

La preuve de la continuité par rapport au second membre est exactement la même que dans le cas symétrique.  $\square$

## 2.3 Le Laplacien de Dirichlet

Nous étudions dans cette section le problème du laplacien de Dirichlet donné par

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.5)$$

où  $\Omega$  est un ouvert régulier borné de  $\mathbb{R}^d$ .

### 2.3.1 Espace fonctionnel

Bien souvent, la physique fournit des modèles sans les espaces fonctionnels qui vont avec! C'est au mathématicien de trouver les bons espaces, c'est-à-dire ceux pour lesquels on saura dire des choses sur les solutions du problème

(existence, unicité, régularité, ...), pour des données  $f$  aussi générales que possible.

La formulation dite *classique* de (2.5), qui pourrait paraître “naturelle” à première vue est de supposer que la solution  $u$  est suffisamment régulière afin que les équations de (2.5) aient un sens en tout point de  $\Omega$  et de  $\partial\Omega$ . Une *solution classique* (également appelée *solution forte*) de (2.5) est une solution  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , ce qui implique que le second membre  $f$  doit appartenir à  $C(\Omega)$ . Cette formulation classique pose malheureusement un certain nombre de problèmes. Sans rentrer les détails, notons que sous la seule hypothèse  $f$  est continue, il n'existe en général pas de solution de classe  $C^2$  pour (2.5) si  $d \geq 2$ . La principale raison étant un manque de complétude (voir remarque 2.7). Dans la suite, nous chercherons des solutions moins régulières, dites *faibles*.

Pour trouver un cadre fonctionnel plus adéquat, commençons par un raisonnement formel. Multiplions les deux membres de l'équation  $-\Delta u = f$  par  $u$  (sans se préoccuper pour l'instant de la rigueur mathématique) et intégrons sur  $\Omega$ , ce qui donne

$$\int_{\Omega} (-\Delta u) u = \int_{\Omega} fu. \quad (2.6)$$

En utilisant la formule de Green (1.7) et en tenant compte de la nullité de  $u$  sur le bord  $\partial\Omega$ , on obtient

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega} fu.$$

Pour une donnée  $f$  très régulière, par exemple  $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ , les deux termes de l'égalité ont un sens si  $u \in H^1(\Omega)$ . Comme en outre  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ , un bon choix consiste à chercher la solution dans  $H_0^1(\Omega)$ . On voit alors qu'on peut donner un sens au membre de droite de l'équation ci-dessus dès que  $f$  est dans le dual de  $H_0^1(\Omega)$ , c'est-à-dire dans  $H^{-1}(\Omega)$ . On prendra alors  $f$  dans  $H^{-1}(\Omega)$ . On aboutit donc à la formulation mathématique suivante du problème (2.5)

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H_0^1(\Omega) \text{ vérifiant} \\ -\Delta u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $f$  est donnée dans  $H^{-1}(\Omega)$ .

### 2.3.2 Formulation variationnelle

Nous allons maintenant chercher une formulation équivalente à (2.7) sous la forme (2.1). Pour cela multiplions les deux membres de l'équation  $-\Delta u = f$  par  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$  et intégrons sur  $\Omega$ , ce qui donne

$$\int_{\Omega} (-\Delta u) v = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}. \quad (2.8)$$

En utilisant la formule de Green (1.7) et en tenant compte de la nullité de  $v$  sur le bord  $\partial\Omega$ , on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

Posons

1.  $H = H_0^1(\Omega)$
2.  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$
3.  $b(v) = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$

et considérons le problème

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H \text{ tel que} \\ \forall v \in H, \quad a(u, v) = b(v). \end{cases} \quad (2.9)$$

**Proposition 2.5.** *Les problèmes (2.7) et (2.9) sont équivalents.*

*Preuve.* Montrons d'abord que (2.9)  $\Rightarrow$  (2.7). Soit  $u$  solution de (2.9). On a déjà  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Soit maintenant  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . On a  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  et

$$\langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = b(\varphi) = a(u, \varphi) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle = \langle -\Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

Donc  $-\Delta u = f$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Donc  $u$  est solution de (2.7).

Réiproquement, soit  $u$  solution de (2.7). On a d'abord  $u \in H_0^1(\Omega)$ . On a déjà montré dans notre approche formelle que pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on a

$$a(u, \varphi) = b(\varphi).$$

Vérifions maintenant que  $a$  est continue sur  $H \times H$  et que  $b$  est continue sur  $H$  :

$$\forall v \in H = H_0^1(\Omega), \quad |b(v)| = |\langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}| \leq \|f\|_{H^{-1}} \|v\|_{H^1},$$

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in H, \quad |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \right| \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}. \end{aligned}$$

On a  $a(u, \cdot)$  et  $b$  sont égales sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  et  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $H_0^1(\Omega)$ . Il s'en suit que  $a(u, \cdot)$  et  $b$  sont égales sur  $H = H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$ . On a donc

$$\forall v \in H, \quad a(u, v) = b(v).$$

Donc  $u$  est solution de (2.9). □

### 2.3.3 Résolution

On vérifie que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram version symétrique sont bien satisfaites.

- $H = H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert ;
- $b$  est continue sur  $H$  ;
- $a$  est bilinéaire symétrique et continue sur  $H \times H$ ;
- $a$  est en outre coercive sur  $H$ . En effet, en utilisant l'inégalité de Poincaré 1.13, on voit que pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq (1 + C_{\Omega}^2) \|\nabla u\|_{L^2}^2 = (1 + C_{\Omega}^2) a(u, u).$$

Donc

$$a(u, u) \geq \frac{1}{1 + C_{\Omega}^2} \|u\|_{H^1}^2.$$

En conclusion, nous avons démontré le théorème suivant.

**Théorème 2.6.** Le problème (2.9) a une solution et une seule par le théorème de Lax-Milgram version symétrique. Comme les problèmes (2.7) et (2.9) sont équivalents, alors le problème

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H_0^1(\Omega) \text{ vérifiant} \\ -\Delta u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases}$$

a donc une solution et une seule. De plus il existe une constante  $C \geq 0$  telle que pour tout  $f \in H^{-1}$ , la solution  $u$  correspondante satisfait

$$\|u\|_{H^1} \leq C \|f\|_{H^{-1}}. \quad (2.10)$$

La solution ainsi obtenue est appelée *solution faible* de (2.5).

**Remarque 2.7.** On peut chercher une solution forte du problème en utilisant la formulation variationnelle. Dans ce cas, l'espace de fonctions dans lequel on cherchera la solution est  $X = \{u \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ . Les formes  $a$  et  $b$  sont toujours les mêmes, elles sont continues par rapport au produit scalaire de  $X$  et  $a$  est coercive par rapport au produit scalaire de  $X$ . La seule hypothèse manquante est la complétude de  $X$ . En effet, le complété de  $X$  par rapport à son produit scalaire est  $H_0^1$ .

D'autre part, nous allons voir qu'une solution faible devient forte si  $f$  est plus régulière (voir section 2.3.4).

**Remarque 2.8.** L'inégalité (2.10) s'appelle *estimation d'énergie*. Elle garantit que l'énergie de la solution est contrôlée par celle de la donnée.

### 2.3.4 Propriétés qualitatives

Dans cette section, nous étudions les propriétés qualitatives des solutions du Laplacien de Dirichlet. Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $f \in H^{-1}(\Omega)$  et soit  $u$  l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H_0^1(\Omega) \text{ vérifiant} \\ -\Delta u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases}$$

Nous commençons par le principe du maximum.

**Théorème 2.9** (Principe du maximum). Si  $f \geq 0$  (dans le sens  $\langle f, \varphi \rangle \geq 0$  pour tout  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $\varphi \geq 0$  p.p.), alors  $u \geq 0$  presque partout dans  $\Omega$ .

**Remarque 2.10.** Le principe du maximum traduit une propriété naturelle du point de vue de la physique: par exemple dans le contexte de l'équation de la chaleur stationnaire, si on chauffe le matériau ( $f \geq 0$ ), la température intérieure est toujours plus grande que la température aux bords ( $u \geq 0$ ).

Pour démontrer le théorème 2.9, on a besoin du lemme suivant. C'est un lemme technique dont la démonstration est omise dans ce cours.

**Lemme 2.11.** Si  $v \in H_0^1(\Omega)$  alors  $v^+ = \max(v, 0) \in H_0^1(\Omega)$  et

$$\nabla v^+ = \mathbf{1}_{v>0} \nabla v \quad \text{p.p. sur } \Omega.$$

*Démonstration du théorème 2.9.* On utilise la formulation variationnelle (2.9) avec  $v = u^- = \max(-u, 0)$  qui appartient bien à  $H_0^1(\Omega)$  en vertu du lemme 2.11. On obtient

$$\langle f, u^- \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u^- = - \int_{\Omega} \mathbf{1}_{u \leq 0} |\nabla u|^2 = - \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2.$$

Le premier terme est positif par la positivité de  $f$  et de  $u^-$ . Le dernier terme est négatif. Il s'en suit que tous les termes sont nuls. Comme  $u^- \in H_0^1$ , on en déduit que  $u^- = 0$ , c'est à dire  $u \geq 0$  p.p. dans  $\Omega$ .  $\square$

Nous montrons maintenant que la solution de problème du Laplacien de Dirichlet est d'autant plus régulière que la donnée  $f$  l'est.

**Théorème 2.12** (Régularité elliptique). Soit  $m \in \mathbb{N}$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  de classe  $C^{m+2}$ . Soit  $f \in H^m(\Omega)$  alors  $u \in H^{m+2}(\Omega)$ . De plus l'application  $f \mapsto u$  est linéaire continue de  $H^m$  dans  $H^{m+2}$ , i.e. il existe une constante  $C_m$  telle que

$$\|u\|_{H^{m+2}} \leq C_m \|f\|_{H^m}.$$

Ainsi, si  $m > d/2$ , alors  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  et la solution est donc une solution forte.

La démonstration de ce résultat n'est pas évidente. On renvoie par exemple à [2]. Il est important de bien comprendre la portée de ce résultat. En dimension  $d = 1$ , le résultat est trivial car le laplacien coïncide avec la dérivée seconde, et l'équation fournit directement la régularité de cette dérivée. Or, en dimension supérieure, le laplacien n'est la combinaison linéaire que de certaines dérivées secondes. Le résultat de régularité elliptique nous dit qu'il suffit que ces dérivées particulières soient dans un certain espace fonctionnel pour que toutes les autres le soient aussi.

**Remarque 2.13.** L'hypothèse de régularité sur  $\Omega$  est importante. Par exemple, en dimension  $d = 2$ , si  $\Omega$  est polygonal, et contient des coins rentrants, alors  $u$  peut présenter des singularités.

## 2.4 Autres modèles

**Exercice 2.1.** Soit  $\Omega$  un ouvert (non nécessairement borné) de  $\mathbb{R}^d$  et soit  $\lambda > 0$ . Montrer l'existence et l'unicité de la solution de

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H_0^1(\Omega) \text{ vérifiant} \\ -\Delta u + \lambda u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases}$$

où  $f \in H^{-1}(\Omega)$  est une donnée.

**Exercice 2.2.** Soit  $\Omega$  un ouvert régulier borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un champ de vecteurs de classe  $C^1(\overline{\Omega})$  à divergence nulle ( $\operatorname{div} c = 0$  dans  $\Omega$ ) et  $f \in H^{-1}(\Omega)$ .

- Montrer qu'il existe un unique  $u \in H^1(\Omega)$  solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + c \cdot \nabla u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.11)$$

- Montrer que la solution de ce problème vérifie le principe du maximum.

**Exercice 2.3.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $f \in H^{-1}(\Omega)$  et  $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ . Montrer que le problème suivant admet une unique solution

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ -\Delta u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Exercice 2.4.** Soit  $\Omega$  un ouvert régulier borné de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega) = (H^{1/2}(\partial\Omega))'$ . On considère le problème

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H^1(\Omega) \\ -\Delta u + u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \nabla u \cdot n = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.12)$$

Ce type de conditions au bord est appelé *conditions de Neumann*; elles représentent une condition sur l'échange de flux avec l'extérieur. Par la surjectivité de l'opérateur de trace  $\gamma_0$ , on sait qu'il existe un opérateur de relèvement  $R$

$$\begin{aligned} R : H^{1/2}(\partial\Omega) &\rightarrow H^1(\Omega) \\ h &\mapsto R(h), \end{aligned}$$

tel que  $\gamma_0(R(h)) = h$  pour tout  $h \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ . On admettra qu'il existe un tel opérateur qui soit en plus continu. On considère l'application

$$\begin{aligned} \gamma_1 : V = \{u \in H^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\} &\rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega) \\ u &\mapsto \gamma_1(u), \end{aligned}$$

où  $\gamma_1(u)$  est définie par

$$\langle \gamma_1(u), h \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla R(h) + \int_{\Omega} \Delta u R(h).$$

1. Montrer que  $\gamma_1$  est bien définie et est continue sur  $V$  muni de la norme  $\|\cdot\|_V^2 = \|\cdot\|_{H^1}^2 + \|\Delta \cdot\|_{L^2}^2$ .
2. Montrer qu'on peut remplacer  $R(h)$  dans la définition de  $\gamma_1$  par n'importe quelle fonction  $w \in H^1(\Omega)$  telle que  $\gamma_0(w) = h$ .

3. Montrer que si  $u \in V \cap C^1(\overline{\Omega})$ , alors

$$\gamma_1(u) = \nabla u \cdot n.$$

On notera dorénavant  $\gamma_1(u) = \nabla u \cdot n$  pour tout  $u \in V$ .

4. Proposer une formulation variationnelle au problème (2.12).
5. Montrer que la formulation variationnelle est équivalente au problème (2.12).
6. Montrer que le problème (2.12) admet une unique solution.

**Exercice 2.5.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier connexe de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ . On considère le problème

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H^1(\Omega) \\ -\Delta u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \nabla u \cdot n = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.13)$$

1. Dire pourquoi le problème (2.13) ne peut pas avoir de solution unique.
2. Pour lever l'indétermination, on cherche  $u$  dans l'ensemble  $V = \{u \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} u = 0\}$ . Vérifier que  $(V, \|\cdot\|_{H^1})$  est un espace de Hilbert.
3. Montrer que  $\|\nabla \cdot\|_{L^2}$  est une norme sur  $V$  équivalente à  $\|\cdot\|_{H^1}$ .
4. Proposer une formulation variationnelle de (2.13) dans  $V$ .
5. Montrer que la formulation variationnelle ainsi obtenue admet une unique solution  $u$ .
6. Montrer que si (2.13) admet une solution, alors nécessairement

$$\int_{\Omega} f + \int_{\partial\Omega} g = 0.$$

7. Montrer que sous la condition précédente,  $u$  est une solution de (2.13).

**Exercice 2.6.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $f \in H^{-2}(\Omega) = (H_0^2(\Omega))'$ . On considère le problème

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H_0^2(\Omega) \\ \Delta(\Delta u) = f \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (2.14)$$

1. Proposer une formulation variationnelle de (2.14).
2. Montrer que la formulation variationnelle ainsi obtenue est équivalente à (2.14).
3. Montrer que  $\|\Delta \cdot\|_{L^2}$  est une norme sur  $H_0^2(\Omega)$  équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{H^2}$ .
4. Montrer que (2.14) admet une unique solution.

# Chapitre 3

## Méthode des éléments finis

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Méthode de Galerkin</b>	<b>48</b>
3.1.1	Principe	48
3.1.2	Estimation d'erreur	49
<b>3.2</b>	<b>Éléments finis</b>	<b>51</b>
3.2.1	Principe	51
3.2.2	Éléments finis $\mathbb{P}_1$ en dimension $d = 1$	51
3.2.3	Interpolation	53
3.2.4	Application au problème de Dirichlet	54

---

À part des cas particuliers, il est impossible de calculer explicitement des solutions d'EDP. Il est donc nécessaire d'avoir recours à la “résolution numérique”. La méthode que nous étudions ici est la méthode des *éléments finis*. C'est la méthode de référence pour le calcul des solutions de problèmes aux limites elliptiques. Elle se base sur la formulation variationnelle introduite au chapitre 2. Elle fait partie d'une plus grande famille de méthodes appelée *méthode de Galerkin*.

La méthode de Galerkin consiste à remplacer l'espace  $H$  où l'on cherche la solution par  $H_n$  un sous espace de  $H$  de dimension finie  $n$ . On se ramène ainsi à la résolution d'un système linéaire. La question qui se pose est: comment choisir les espaces  $H_n$  pour que 1) la solution ainsi trouvée soit proche de la

solution recherchée 2) la résolution du système linéaire résultant ne soit pas trop coûteuse?

La méthode des éléments finis fournit un “bon” choix des espaces  $H_n$  qui satisfait les conditions ci-dessus, dans le contexte des EDP.

### 3.1 Méthode de Galerkin

#### 3.1.1 Principe

Nous introduisons la méthode de Galerkin dans un contexte abstrait. Étant donné un espace de Hilbert  $H$ , une forme bilinéaire continue coercive  $a$  et une forme linéaire continue  $b$ , on considère le problème

$$\text{chercher } u \in H, \quad a(u, v) = b(v), \quad \forall v \in H. \quad (3.1)$$

On sait que le problème (3.1) admet une unique solution  $u$  par le théorème de Lax-Milgram 2.3. La méthode de Galerkin consiste à remplacer l'espace  $H$  par un sous espace vectoriel  $H_n$  de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , c'est à dire chercher la solution de

$$\text{chercher } u \in H_n, \quad a(u_n, v_n) = b(v_n), \quad \forall v_n \in H_n, \quad (3.2)$$

et de considérer sa solution  $u_n$  comme “approximation” de  $u$ . Pour que cette approche ait un sens, il faut évidemment que cette solution existe, qu'elle soit unique et qu'elle soit facilement calculable par un ordinateur. Ceci est assuré par la proposition suivante.

**Proposition 3.1.** Le problème (3.2) admet une unique solution. Cette solution peut être obtenue par la résolution d'un système linéaire.

*Démonstration.*  $H_n$  est un espace de dimension finie, c'est donc un espace de Hilbert. L'existence et l'unicité de la solution sont alors données par le théorème de Lax-Milgram appliqué à  $H_n$ . Pour mettre le problème sous forme plus simple, on introduit une base  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $H_n$ . On pose

$$u_n = U_1 e_1 + U_2 e_2 + \cdots + U_n e_n,$$

où les  $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont les coordonnées de  $u_n$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Le problème devient

$$\text{chercher } U_1, \dots, U_n \in \mathbb{R}, \quad a\left(\sum_{j=1}^n U_j e_j, e_i\right) = b(e_i), \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Pour  $1 \leq i, j \leq n$ , notons

$$U = (U_1, \dots, U_n)^T, \quad A_{i,j} = a(e_j, e_i), \quad B_i = b(e_i).$$

Le problème peut alors s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$AU = B. \quad (3.3)$$

□

La matrice  $A$  s'appelle la *matrice de rigidité* en référence aux problèmes de mécanique où elle a été introduite pour la première fois. Ses propriétés sont directement héritées de celles de la forme bilinéaire  $a$ . Nous avons le résultat suivant.

**Proposition 3.2** (Propriétés de la matrice de rigidité). Si la forme bilinéaire  $a$  est symétrique, la matrice  $A$  est symétrique. Si la forme bilinéaire  $a$  est coercive, la matrice  $A$  est définie positive.

**Exercice 3.1.** Prouver la proposition 3.2.

**Remarque 3.3.** Insistons sur l'ordre des fonctions dans l'élément de matrice  $A_{i,j} = a(e_j, e_i)$ , qui est important lorsque la forme bilinéaire  $a$  n'est pas symétrique.

### 3.1.2 Estimation d'erreur

Il est important de savoir comment la solution du problème discret  $u_n$  "approche" la solution  $u$ . Nous allons énoncer deux résultats abstraits.

Le premier résultat est que la distance  $\|u - u_n\|$  est majorée par la distance de  $u$  à l'espace  $H_n$ . Moralement, si  $H_n$  est grand, cette distance est petite, et si  $u \in H_n$  (rare, mais possible), alors cette distance est nulle  $u = u_n$ .

**Lemme 3.4** (de Céa). Notons  $M$  la constante de continuité de  $a$  et  $\alpha$  sa constante de coercivité. On a l'estimation suivante:

$$\|u - u_n\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_n \in H_n} \|u - v_n\|. \quad (3.4)$$

*Démonstration.* Puisque  $H_n \subset H$ , on déduit, par soustraction des formulations (3.1) et (3.2), que

$$a(u - u_n, w_n) = 0, \quad \forall w_n \in H_n.$$

Soit  $v_n \in H_n$  et  $w_n = u_n - v_n$ . En utilisant la formule précédente, on obtient  $\alpha \|u - u_n\|^2 \leq a(u - u_n, u - u_n) = a(u - u_n, u - v_n) \leq M \|u - u_n\| \|u - v_n\|$ , d'où

$$\|u - u_n\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_n\|.$$

Ceci étant vrai pour tout  $v_n \in H_n$ , on obtient le résultat voulu.  $\square$

Le deuxième résultat est un résultat de convergence. Il nous dit que si on prend des espaces  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de plus en plus gros (c'est pour ça qu'on a pris la peine de les indexer depuis le début), et vérifiant certaines conditions, alors la suite de solutions approchées  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers la solution  $u$ .

**Théorème 3.5.** Supposons qu'il existe une suite d'opérateurs  $I_n : H \rightarrow H_n$  tels que pour tout  $v \in H$ , on a

$$\|v - I_n(v)\| \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Alors

$$\|u - u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

*Démonstration.* Par le lemme 3.4, on a

$$\|u - u_n\| \leq C \inf_{v_n \in H_n} \|u - v_n\|.$$

Comme  $I_n(u) \in H_n$ , alors

$$\|u - u_n\| \leq C \|u - I_n(u)\|,$$

ce qui conclut la preuve au vu de (3.5).  $\square$

**Exemple 3.6.** Supposons que  $H$  est un espace séparable et soit  $(e_i)_{i \geq 1}$  une base hilbertienne de  $H$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $H_n = \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$ . Alors

$$I_n = P_{H_n} : u \in H \rightarrow \sum_{i=1}^n \langle e_i, u \rangle e_i,$$

satisfait les conditions du théorème 3.5.

## 3.2 Éléments finis

### 3.2.1 Principe

La méthode des éléments finis est un cas particulier de la méthode de Galerkin dans le cas où l'espace  $H$  est un espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$ ,  $H_0^1(\Omega)$ ,  $H^2(\Omega)$ , …, où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ . Elle donne une méthode de construction des espaces approximatifs  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , et de leurs bases correspondantes, qui est un “bon” compromis entre les deux exigences:

1. facilité de la résolution du système linéaire (3.3),
2. convergence de la suite de solutions  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vers la solution  $u$ .

Pour cela, elle se base sur un maillage du domaine  $\Omega$  en parties élémentaires et  $H_n$  est le sous espace engendré par des fonctions *localisées* autour de chaque maille. Ainsi la matrice de rigidité  $A$  sera *creuse*, ce qui limitera le coût de la résolution numérique.

### 3.2.2 Éléments finis $\mathbb{P}_1$ en dimension $d = 1$

Plaçons nous en dimension  $d = 1$ , et considérons pour simplifier  $\Omega = ]0, 1[$ . Nous allons construire des espaces approximant  $H_0^1$ , dans le but de résoudre le problème du Laplacien de Dirichlet. Une construction similaire peut être adaptée à d'autres espaces et d'autres problèmes.

Un *maillage* est une subdivision  $(x_i)_{0 \leq i \leq n+1}$  du domaine  $\Omega$ , i.e.

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1.$$

Un maillage est dit *uniforme* si les points  $x_i$  sont équidistants, i.e.

$$x_i = \frac{i}{n+1}.$$

Pour chaque point  $1 \leq i \leq n$ , on considère la fonction chapeau  $\varphi_i$  définie sur  $\Omega$  qui vaut 1 en  $x_i$ , 0 en  $x_{i-1}$  et  $x_{i+1}$ , qui est affine par morceaux entre  $x_{i-1}$  et  $x_{i+1}$  et qui est nulle ailleurs (voir figure 3.1). Elles sont données par

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

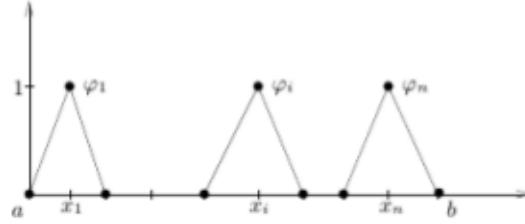


Figure 3.1: Fonctions chapeau

On prend alors comme espace d'approximation  $H_n = \text{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ . On a alors la proposition suivante.

**Proposition 3.7.**

1.  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est une base de  $H_n$ .

2. On a

$$H_n = \{v \in C([0, 1]), v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, \forall 0 \leq i \leq n, v(0) = v(1) = 0\},$$

où  $\mathbb{P}_k$  est l'espace des polynômes de la variable réelle de degré inférieur ou égal à  $k$ .

3.  $H_n \subset H_0^1([0, 1])$ .

**Exercice 3.2** (Démonstration de la proposition 3.7).

1. Montrer que la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est libre.

2. Soit  $v \in \{v \in C([0, 1]), v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, \forall 0 \leq i \leq n, v(0) = v(1) = 0\}$  et soit

$$w = \sum_{i=1}^n v(x_i) \varphi_i.$$

Montrer que  $v = w$ .

3. Montrer que  $\varphi_i \in H_0^1(\Omega)$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

### 3.2.3 Interpolation

Nous allons construire dans cette section *les opérateurs d'interpolation*  $I_n$  qui satisfont les conditions du théorème 3.5.

**Définition 3.8.** On appelle *opérateur d'interpolation*  $\mathbb{P}_1$  l'application linéaire  $I_n : H_0^1(]0, 1[) \rightarrow H_n$  définie pour tout  $v \in H_0^1(]0, 1[)$  par

$$I_n(v) = \sum_{i=1}^n v(x_i) \varphi_i.$$

Cette définition a bien du sens car, les fonctions de  $H^1(]0, 1[)$  sont continues et leurs valeurs ponctuelles sont donc bien définies. La fonction  $I_n(v)$  est la fonction affine par morceaux prenant la même valeur que la fonction  $v$  en tous les sommets du maillage  $x_i$ .

**Théorème 3.9.** On suppose que le maillage est régulier . Pour tout  $v \in H_0^1(]0, 1[)$ , on a

$$\|I_n(v) - v\|_{H^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

De plus, si  $v \in H^2(]0, 1[)$ , alors il existe une constante  $C \geq 0$  indépendante de  $n$  telle que

$$\|I_n(v) - v\|_{H^1} \leq C \frac{1}{n} \|v''\|_{L^2} \quad \text{et} \quad \|I_n(v) - v\|_{L^2} \leq C \frac{1}{n^2} \|v''\|_{L^2}.$$

**Remarque 3.10.** Le résultat du théorème précédent reste valable si le maillage n'est pas régulier; en remplaçant le facteur  $1/n$  par  $h = \inf \{x_{i+1} - x_i, i \in \{0, \dots, n\}\}$ .

**Exercice 3.3** (Preuve du théorème 3.9). Soit  $v \in H^2(]0, 1[) \cap H_0^1(]0, 1[)$ . Soit  $j \in \{0, \dots, n\}$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in [x_j, x_{j+1}]$ , on a

$$|v(x) - I_n(v)(x)|^2 \leq \frac{1}{n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |w(s)|^2 ds,$$

où  $w(s) = v'(s) - (n+1)(v(x_{j+1}) - v(x_j))$ .

2. Montrer que  $w \in H^1([x_j, x_{j+1}])$  et que  $\int_{x_j}^{x_{j+1}} w(s) ds = 0$ .

3. En déduire qu'il existe  $x^* \in ]x_j, x_{j+1}[$  tel que  $w(x^*) = 0$ .
4. Montrer que  $\forall x \in [x_j, x_{j+1}],$  on a

$$|w(x)| \leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(s)| ds.$$

5. Montrer que

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |w(x)|^2 dx \leq \frac{1}{n^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(s)|^2 ds.$$

6. En déduire que les résultats du théorème 3.9 sont vrais pour  $v \in H^2(]0, 1[) \cap H_0^1(]0, 1[)$ .
7. Montrer que l'opérateur  $I_n$  est continu, i.e. il existe  $C \geq 0$  tel que pour tout  $v \in H_0^1(]0, 1[)$

$$\|I_n(v)\|_{H^1} \leq C \|v\|_{H^1}.$$

8. Montrer que pour tout  $v \in H_0^1(]0, 1[)$ ,

$$\|v - I_n(v)\|_{H^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

### 3.2.4 Application au problème de Dirichlet

Résolvons maintenant le problème du laplacien de Dirichlet avec la méthode des éléments finis. Soit  $f \in L^2(]0, 1[)$ , soit  $u$  la solution de

$$u \in H_0^1(]0, 1[), \quad -\Delta u = f$$

et  $u_n$  la solution de

$$u_n \in H_n, \quad -\Delta u_n = f,$$

où  $H_n$  est l'espace de dimension finie construit à la section précédente avec une subdivision régulière.

En utilisant les théorèmes 3.5 et 3.9, on a le théorème suivant.

**Théorème 3.11.** Il existe  $C \geq 0$  tel que

$$\|u - u_n\|_{H^1} \leq C \frac{1}{n} \|f\|_{L^2}.$$

**Exercice 3.4.** Démontrer le théorème 3.11.

Le théorème 3.11 signifie en particulier que si le pas du maillage est divisé par deux, il en va de même de l'erreur en norme  $H^1$ .

**Exercice 3.5** (Lemme d'Aubin-Nitsche). On introduit le problème auxiliaire

$$\begin{cases} \text{Chercher } w \in H_0^1(]0, 1[), \\ \forall v \in H_0^1(]0, 1[), \quad \int_0^1 w'v' = \int_0^1 (u - u_n)v, \end{cases}$$

où la donnée du problème est l'erreur  $u - u_n$ .

1. Montrer que

$$\|u - u_n\|_{L^2}^2 = \int_0^1 (u - u_n)'(w - I_n(w))'.$$

2. Montrer que  $w'' \in L^2(]0, 1[)$  puis que  $w \in H^2(]0, 1[)$ .

3. En déduire qu'il existe  $C \geq 0$  telle que

$$\|u - u_n\|_{L^2} \leq C \frac{1}{n^2} \|f\|_{L^2}.$$

Examinons maintenant comment on obtient l'approximation  $u_n$  concrètement. Reprenant l'approche abstraite de la section 3.1, on note  $U$  le vecteur des coordonnées de  $u_n$  dans la base des éléments finis  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  de sorte que

$$u_n = \sum_{i=1}^n U_i \varphi_i.$$

Le vecteur  $U$  est obtenu en résolvant le système linéaire

$$AU = B,$$

où  $A$  est la matrice de rigidité et  $B$  est le second membre. Dans le cas particulier du problème du Laplacien de Dirichlet, la forme bilinéaire  $a$  et la forme linéaire  $b$  sont données par

$$a(u, v) = \int_0^1 u'v', \quad b(v) = \int_0^1 fv, \quad \forall u, v \in H_0^1(]0, 1[).$$

Ainsi, les composantes de  $A$  et de  $B$  sont données par

$$A_{i,j} = \int_0^1 \varphi'_i \varphi'_j, \quad B_i = \int_0^1 f \varphi_i, \quad \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

Remarquons que pour deux indices  $1 \leq i, j \leq n$  tels que  $|i - j| > 1$ , les supports des fonctions chapeau  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$  sont disjoints. Il en résulte que

$$A_{i,j} = 0, \quad \text{si } |i - j| > 1,$$

si bien que la matrice  $A$  est tridiagonale:

$$\begin{pmatrix} x & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & x & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & x & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & x \end{pmatrix}$$

(le symbole  $x$  indique un coefficient a priori non nul). Cette propriété remarquable découle simplement du choix qui a été fait pour le support des fonctions de base  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ . On retiendra qu'en choisissant des fonctions de base ayant un “petit” support, on obtient une matrice de rigidité comprenant “beaucoup” d’éléments nuls. On dit que la matrice de rigidité ainsi obtenue est *creuse*.

**Exercice 3.6.** Calculer les coefficients non-nuls de la matrice  $A$ .

Concluons en remarquant que le calcul du second membre  $B$  peut être difficile voir impossible, dépendamment de l’expression de  $f$ . En pratique, on a recours à des *formules de quadrature* (ou formules d’intégration numérique) qui donnent une approximation des intégrales  $B_i = \int_0^1 f \varphi_i$ .

**Exercice 3.7** (Principe du maximum discret). Pour  $V \in \mathbb{R}^N$ , on dit que  $V \geq 0$  si  $V_i \geq 0$  pour tout  $1 \leq i \leq N$ .

1. Soit  $V \in \mathbb{R}^N$  tel que  $AV \geq 0$ . Montrer que  $V \geq 0$ . **Indication:** considérer l’indice  $j$  tel que  $V_j = \inf \{V_i, 1 \leq i \leq N\}$ .
2. En déduire que si  $f \geq 0$  alors  $u_n \geq 0$ .

3. Montrer que  $A$  est inversible. On note  $A^{-1} = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ .

4. Montrer que  $b_{i,j} \geq 0$  pour tout  $1 \leq i, j \leq N$ .

Soit la fonction  $w(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$ .

5. Calculer  $AW$ , où  $W = (w(x_i))_{1 \leq i \leq N}$ .

6. Montrer que pour tout  $1 \leq i \leq N$ , on a  $\sum_{j=1}^N b_{i,j} \leq \frac{N+1}{8}$ .

7. Montrer que  $\|u_n\|_\infty \leq \sup_{1 \leq i \leq N} |U_i|$ .

8. On suppose que  $f \in L^\infty([0, 1])$ . Montrer que  $\|u_n\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|f\|_{L^\infty}$ .



# Chapitre 4

## Introduction à la théorie de l'homogénéisation

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Homogénéisation périodique en dimension <math>d = 1</math></b>	<b>60</b>
<b>4.2</b>	<b>Homogénéisation périodique en dimension <math>d \geq 2</math></b>	<b>63</b>
4.2.1	Résultat général . . . . .	63
4.2.2	Cas où $A^*$ est explicite . . . . .	64
4.2.3	Développement à deux échelles . . . . .	66

---

Ces dernières années ont vu un développement considérable dans l'étude et l'utilisation des matériaux composites, qui sont fabriqués à partir de différents constituants mélangés et fusionnés. On peut par exemple penser à un solide composé de couches successives de deux matériaux aux propriétés différentes (voir figure 4.1). La simulation numérique de tels matériaux pose certaines difficultés à cause de l'hétérogénéité des paramètres physiques (coefficients de conductivité, d'élasticité,...). En effet, une méthode de discréétisation classique (telle que les éléments finis) est très coûteuse car il faut utiliser un pas de discréétisation de l'ordre de la taille de la microstructure. Pour contourner ce problème numérique, on peut chercher à approcher ce solide par un solide aux propriétés équivalentes, en calculant les propriétés effectives dans la limite "taille des microstructures tend vers 0" : c'est la technique de *l'homogénéisation*. Pour pouvoir mener à bien ce passage à la limite, il faut

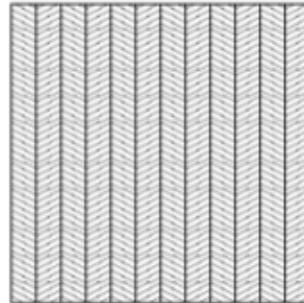


Figure 4.1: Un matériau lamellé.

utiliser une hypothèse sur l'organisation des microstructures : organisation périodique, organisation aléatoire avec de bonnes propriétés d'ergodicité,...

## 4.1 Homogénéisation périodique en dimension $d = 1$

Pour comprendre le type de résultats que l'on peut chercher à démontrer, on propose de considérer le problème modèle suivant en dimension  $d = 1$ :

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( a \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{d}{dx} u^\varepsilon \right) = f, & \text{p.p. sur } ]0, 1[ \\ u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(1) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction périodique de période 1, bornée et isolée de 0, i.e. il existe  $c_1, c_2 > 0$  telles que

$$0 < c_1 \leq a(x) \leq c_2, \quad \forall x \in [0, 1[,$$

$f$  est une fonction de  $L^2(]0, 1[)$  et  $\varepsilon$  est un petit paramètre qui modélise l'échelle d'espace de la microstructure.

**Exercice 4.1.** Montrer que le problème (4.1) admet une unique solution dans  $H_0^1(]0, 1[)$ . On notera cette solution  $u^\varepsilon$  dans la suite.

L'objectif de notre travail est de montrer que la suite des solutions  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge vers une fonction  $u^*$  dont la détermination numérique est beaucoup moins coûteuse.

Commençons par le lemme technique suivant.

**Lemme 4.1.** La fonction  $a(\cdot/\varepsilon)$  converge faiblement (dans  $L^2(]0, 1[)$ ) vers la moyenne de  $a$ :  $\langle a \rangle = \int_0^1 a(x)dx$ , quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Exercice 4.2** (Démonstration du lemme 4.1). On introduit la fonction  $A(x) := \int_0^x (a(y) - \langle a \rangle) dy$ .

1. Montrer que  $A \in L^\infty(\mathbb{R})$  et donner une majoration de sa norme  $L^\infty$ .
2. Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(]0, 1[)$ . Montrer que

$$\int_0^1 \left( a\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) - \langle a \rangle \right) \varphi(y) dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

3. Finir la démonstration du lemme 4.1.

Pour trouver la limite des solutions  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , on serait tenté de passer à la limite “formelle” dans (4.1) et dire que la limite  $u^*$  satisfait l'équation

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( \langle a \rangle \frac{d}{dx} u^* \right) = f, & \text{sur } ]0, 1[ \\ u^*(0) = u^*(1) = 0. \end{cases}$$

Ceci correspondrait à remplacer le matériau hétérogène par un matériau homogène dont les caractéristiques sont les moyennes des caractéristiques du matériau de départ. Cette approche est fausse! Pour voir cela, considérons le problème intermédiaire suivant, où nous avons effacé les opérateurs de dérivation dans (4.1)

$$\begin{cases} -a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u^\varepsilon = f, & \text{sur } ]0, 1[ \\ u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(1) = 0. \end{cases}$$

On a alors  $u^\varepsilon(x) = -\frac{1}{a} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x)$ . En utilisant le lemme 4.1 pour la fonction  $1/a$ , on a alors pour toute fonction  $v \in L^2([0, 1])$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 u^\varepsilon(x)v(x)dx &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{1}{a} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x)v(x)dx \\ &= -\langle 1/a \rangle \int_0^1 f(x)v(x)dx. \end{aligned}$$

On a donc  $u^\varepsilon$  converge faiblement dans  $L^2([0, 1])$  vers  $u^* = -\langle 1/a \rangle f$ . La limite  $u^*$  satisfait l'équation

$$-\frac{1}{\langle 1/a \rangle} u^* = f.$$

Ainsi le coefficient homogénéisé est  $1/\langle 1/a \rangle$  et non pas  $\langle a \rangle$  comme on l'aurait imaginé.

**Exercice 4.3.** Montrer que si  $a : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction bornée et isolée de 0 alors,

$$\langle 1/a(x) \rangle = \frac{1}{\langle a(x) \rangle} \iff a = cte.$$

On va voir que pour le problème initial avec les opérateurs de dérivation, on a le même type de résultats.

**Théorème 4.2.** La suite  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge fortement dans  $L^2([0, 1])$  et faiblement dans  $H_0^1([0, 1])$  vers  $u^*$ , l'unique solution dans  $H_0^1([0, 1])$  du problème homogénéisé

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\langle 1/a \rangle} \frac{d}{dx} u^* \right) = f, & \text{sur } ]0, 1[ \\ u^*(0) = u^*(1) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

**Exercice 4.4** (Démonstration du théorème 4.2).

1. Montrer que la suite  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est bornée dans  $H^1([0, 1])$ .
2. En déduire qu'il existe  $u^* \in H_0^1([0, 1])$  et  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  une sous-suite  $(u^{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge fortement dans  $L^2([0, 1])$  et faiblement dans  $H_0^1([0, 1])$  vers  $u^*$ .

3. Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$  telle que

$$-a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d}{dx}u^\varepsilon(x) = \int_0^x f(t)dt + c_\varepsilon.$$

4. Montrer que la suite  $(c_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est bornée, et déduire qu'on peut en extraire une sous-suite qui converge vers  $c \in \mathbb{R}$ .

5. Montrer que  $-\left(\frac{d}{dx}u^\varepsilon\right)_{\varepsilon>0}$  converge (à sous-suite près) vers  $x \mapsto \langle 1/a \rangle \left(\int_0^x f(t)dt + c\right)$  faiblement dans  $L^2([0, 1])$ .

6. Déduire que  $u^*$  satisfait (4.2).

7. Montrer que toute la suite  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  (non pas juste une sous-suite) converge fortement dans  $L^2([0, 1])$  et faiblement dans  $H_0^1([0, 1])$  vers  $u^*$ .

Remarquer que ce qui est important dans le théorème 4.2, ce n'est pas tant que  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  admet une limite, mais qu'on ait trouvé l'équation vérifiée par cette limite, ce qui nous permettra de la calculer.

**Exercice 4.5.** Quel intérêt numérique peut-on trouver au théorème 4.2?

## 4.2 Homogénéisation périodique en dimension $d \geq 2$

### 4.2.1 Résultat général

En dimension supérieure ou égale à 2, la situation s'avère plus complexe car les questions de géométrie entrent en jeu. Nous commençons par donner un résultat général.

**Théorème 4.3.** Soit  $\Omega = ]0, 1[^d$  et soit  $A$  une matrice périodique, bornée et coercive, i.e. il existe  $c_1, c_2 > 0$  tels que  $c_1 Id \leq A(x) \leq c_2 Id$ , pour tout  $x \in \Omega$ . Alors il existe une matrice  $A^*$  telle que, pour toute fonction  $f \in L^2(\Omega)$ , les solutions  $u^\varepsilon$  de

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u^\varepsilon\right) = f, & \text{p.p. sur } \Omega \\ u^\varepsilon \in H_0^1 \end{cases} \quad (4.3)$$

convergent fortement dans  $L^2(\Omega)$  et faiblement dans  $H^1(\Omega)$  vers  $u^*$ , l'unique solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^*\nabla u^*) = f, & \text{p.p. sur } \Omega \\ u^* \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

L'intérêt pratique du théorème 4.3 est limité puisqu'il ne donne aucune information sur cette matrice  $A^*$ , et donc on n'a pas de moyen de calculer la limite de  $u^\varepsilon$ . En fait, à part quelques cas rares (que nous allons expliciter ci-dessous) il n'existe pas d'expression explicite de la matrice homogénéisée  $A^*$ . En pratique elle est calculée numériquement en résolvant des problèmes aux limites.

### 4.2.2 Cas où $A^*$ est explicite

Le premier cas où on sait déterminer la matrice homogénéisée  $A^*$  explicitement est le cas d'un matériau lamellé en dimension  $d = 2$  (voir figure 4.1). Dans ce cas, la matrice de départ  $A$  ne dépend que d'une seule variable.

**Théorème 4.4.** Supposons que la matrice  $A$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} a(x_1) & 0 \\ 0 & a(x_1) \end{pmatrix},$$

où  $a$  est une fonction 1-périodique, bornée et isolée de 0. Alors la matrice homogénéisée est donnée par

$$A^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\langle 1/a \rangle} & 0 \\ 0 & \langle a \rangle \end{pmatrix}.$$

On peut comprendre le résultat du théorème précédent par le raisonnement intuitif suivant. Dans la direction  $x_1$ , le matériau est rigoureusement identique au matériau monodimensionnel étudié précédemment, et il est donc naturel de voir la quantité  $1/\langle 1/a \rangle$  apparaître comme coefficient homogénéisé. Dans la direction  $x_2$ , le matériau n'a pas d'hétérogénéité à l'échelle  $\varepsilon$ , et il est donc aussi naturel que sa "réponse" dans cette direction soit la moyenne (au sens habituel, soit  $\langle a \rangle$ ) des réponses des matériaux constitutifs.

Abordons maintenant un cas plus difficile, où la matrice  $A$  de départ dépend des deux directions de l'espace. Considérons un matériau sous forme d'échiquier

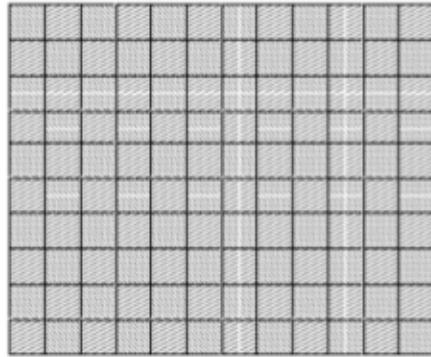


Figure 4.2: Un matériau en échiquier.

en  $d = 2$  (voir figure 4.2). Ainsi, on considère une fonction  $a(x_1, x_2)$  périodique sur le carré  $\Omega$ , et constante par morceaux, avec des valeurs  $\alpha$  et  $\beta$ , toutes deux strictement positives, selon la figure 4.2.

**Théorème 4.5.** Supposons que la matrice  $A$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} a(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & a(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

où  $a$  est comme ci-dessus. Alors la matrice homogénéisée est donnée par

$$A^* = \sqrt{\alpha\beta} Id.$$

**Remarque 4.6.** En dimension 1, seule la proportion des matériaux compte dans la détermination du problème homogénéisé (penser au calcul de  $\langle 1/a \rangle$ ), peu importe la manière dont ils sont répartis. En dimension 2, ce n'est plus le cas: le matériau lamellé et le matériau en échiquier peuvent être composés des mêmes matériaux en mêmes proportions, ils ne conduisent pas à la même matrice homogénéisée et donc pas au même comportement macroscopique. Cela donne naissance à une question intéressante, à laquelle des recherches sont consacrées: étant donnée une proportion de matériaux constitutifs fixée, quelles sont les matrices homogénéisées qu'on peut obtenir, en faisant varier la répartition géométrique de ces matériaux.

### 4.2.3 Développement à deux échelles

Nous allons développer dans cette section une méthode pour déterminer la matrice homogénéisée  $A^*$  numériquement. Pour motiver notre approche, reconsidérons pour un moment le cas  $d = 1$ . On a

$$(u^\varepsilon)'(x) = -\frac{F(x)}{a(x/\varepsilon)},$$

où  $F$  est une primitive de  $f$ . On voit que  $u^\varepsilon$  dépend de  $x$  à travers  $F$  (échelle lente) et à travers  $a$  (échelle rapide). Si on pose

$$b(x, y) = -\frac{F(x)}{a(y)},$$

alors  $(u^\varepsilon)'(x) = b(x, x/\varepsilon)$ . Ce raisonnement nous inspire de *supposer* que  $u^\varepsilon$  est développable en puissance de  $\varepsilon$  suivant les deux échelles  $x$  et  $x/\varepsilon$ . Il s'agit d'écrire  $u^\varepsilon$  sous la forme de *l'ansatz* suivant

$$u^\varepsilon(x) = u_0(x, x/\varepsilon) + \varepsilon u_1(x, x/\varepsilon) + \varepsilon^2 u_2(x, x/\varepsilon) + \dots, \quad (4.4)$$

où chaque fonction  $u_i$  est  $\vec{1}$ -périodique en la deuxième variable.

On rappelle qu'une fonction  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$  est  $k_0$ -périodique si

$$f(x + k_0) = f(x), \quad \text{p.p.}$$

#### Exercice 4.6.

- Question préliminaire:** Soit  $f \in L^2(\Omega)$  telle que  $\int_\Omega f = 0$  et soit  $A$  une matrice qui satisfait les conditions du théorème 4.3. On considère le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{p.p. sur } \Omega = ]0, 1[^d \\ u \in H^1_{\text{loc}}(\Omega) & u \text{ est } \vec{1} \text{-périodique.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Montrer que ce problème admet une solution unique à constante près, et ce en suivant les étapes suivantes:

- Proposer une formulation variationnelle dans un espace où la solution peut être unique.

- Montrer que cette formulation variationnelle admet une unique solution.
  - Montrer que cette solution est aussi solution du problème (4.5).
  - Montrer que si  $u$  et  $v$  sont deux solutions de (4.5), alors  $u-v = cte$ .
2. Soit  $v$  une fonction à deux variables et  $w(x) = v(x, x/\varepsilon)$ . Donner  $\nabla w$  en fonction de  $\nabla_x v$  et  $\nabla_y v$ . Soit  $\vec{v}$  un champ à deux variables et  $\vec{w} = \vec{v}(x, x/\varepsilon)$ . Donner  $\operatorname{div}_y(\vec{w})$  en fonction de  $\operatorname{div}_x \vec{v}$  et  $\operatorname{div}_y \vec{v}$ .
3. En utilisant la formule (4.4), écrire  $-\operatorname{div}(A(x/\varepsilon)\nabla u^\varepsilon(x))$  sous la forme

$$\frac{1}{\varepsilon^2}B(x, x/\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}C(x, x/\varepsilon) + D(x, x/\varepsilon) + O(\varepsilon), \quad (4.6)$$

où  $B(x, y)$ ,  $C(x, y)$  et  $D(x, y)$  sont des fonctions à préciser.

4. Injecter (4.6) dans le problème (4.3) et montrer qu'en remplaçant  $x/\varepsilon$  par  $y$ , l'équation donnée par l'ordre  $O(1/\varepsilon^2)$  est

$$\operatorname{div}_y(A(y)\nabla_y u_0(x, y)) = 0, \quad \forall x \in \Omega, \forall y \in \mathbb{R}^d. \quad (4.7)$$

5. Déduire de (4.7) que  $u_0$  ne dépend pas de la deuxième variable.

6. Montrer que l'équation donnée par l'ordre  $O(1/\varepsilon)$  est

$$\operatorname{div}_y(A(y)(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1)) = 0. \quad (4.8)$$

7. Soit  $(e_1, \dots, e_d)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^d$  et soit les problèmes

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(A(y)(e_i + \nabla_y w_i)) = 0 \\ w_i \text{ est périodique.} \end{cases} \quad (4.9)$$

Montrer que les problèmes (4.9) ont des solutions, uniques à constantes près.

8. Montrer que  $u_1(x, y) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x) w_i(y)$  est solution de (4.8).

9. Montrer que l'équation donnée par l'ordre  $O(1)$  est

$$-\operatorname{div}_x(A(y)(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1)) - \operatorname{div}_y(A(y)(\nabla_y u_1 + \nabla_y u_2)) = f(x). \quad (4.10)$$

10. En intégrant l'équation (4.10) par rapport à  $y$ , montrer que (4.10) peut être réécrite sous la forme

$$-\operatorname{div}_x(A^*\nabla_x u_0) = f, \quad (4.11)$$

où  $A^*$  est la matrice donnée par

$$A_{i,j}^* = \int_{\Omega} (A(y)(e_j + \nabla_y w_j(y))) \cdot e_i dy. \quad (4.12)$$

Ainsi, nous obtenons la stratégie numérique suivante pour résoudre le problème de départ:

1. calcul des *correcteurs*  $(w_i)_{1 \leq i \leq d}$ , solutions des équations (4.9) numériquement
2. assemblage de la matrice  $A^*$ , donnée par la formule (4.12),
3. calcul numérique de  $u_0 \in H_0^1$  solution du problème homogénéisé (4.11).

# Bibliographie

- [1] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation: une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Mathématiques appliquées. École polytechnique, 2005.
- [2] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle: théorie et applications*. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Dunod, 1999.
- [3] C.L. Bris. *Systèmes multi-échelles: Modélisation et simulation*. Mathématiques et Applications. Springer Berlin Heidelberg, 2005.