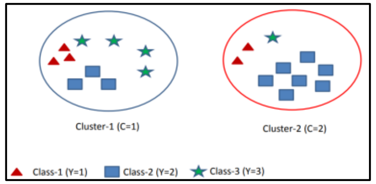
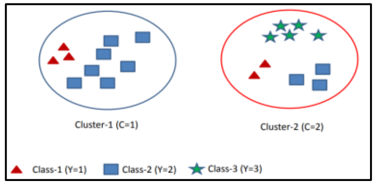
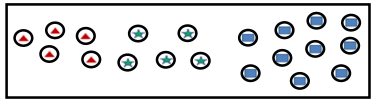
Information mutuelle et causalité

Dans les épisodes précédents…

- Calcul pratique de l'information mutuelle
    - Information mutuelle normalisée
- Quelques utilisations de l'information mutuelle
    - Clustering
    - Sélection de features…







- Information mutuelle à plus de deux variables
    - Information mutuelle conditionnelle : $IM(X;Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|Z) - H(X,Y|Z)$
    - Information mutuelle entre ensembles de variables : $IM(X^n;Y) = \sum_i IM(X_i;Y|X^{i-1})$

Rappel : Information mutuelle conditionnelle

Information mutuelle entre X et Y **connaissant une troisième variable Z** :

$$IM(X;Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|Z) - H(X,Y|Z)$$

$$IM(X;Y|Z) = IM(X\,;(Y,Z)) - IM(X;Z)$$

avec $IM(X\,;\ Y,Z)$ ou $IM(X\,;(Y,Z))$ l'information mutuelle entre X et la **variable jointe** $(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})$.

$IM(X;Y|Z)$ mesure la différence entre l'information partagée par X et la variable jointe (Y,Z) , et l'information partagée par X et Z.

Exemple :

$$IM(Glycémie;Complications|Poids) = IM(Glycémie;(Complications,Poids)) - IM(Glycémie;Poids)$$

Information partagée entre
la nouvelle variable considérée
et la paire $(Complications, Poids)$ déjà obtenue

Redondance de l'information

Information d’interaction

L’IM conditionnelle peut être plus grande ou plus petite que l’IM.

La différence est appelée **information d’interaction** :

$$II(X;Y;Z) = IM(X;Y|Z) - IM(X;Y)$$

Information d’interaction

$$II(X;Y;Z) = IM(X;Y|Z) - IM(X;Y)$$

L’information d’interaction représente l’effet de fixer la variable *Z* sur la corrélation / l’information partagée entre *X* et *Y*.

L’information d’interaction donc peut être positive, négative, ou nulle.

Information d'interaction

$$II(X;Y;Z) = IM(X;Y|Z) - IM(X;Y)$$

- <u>Interaction négative</u> : la 3ème variable inhibe la corrélation entre les deux premières – redondance

C'est le cas notamment des **causes explicatives communes** :

Les nuages causent la pluie et l'obscurité, donc :

$$IM(pluie; obscurité|nuages) < IM(pluie; obscurité)$$

pluie apporte une information redondante par rapport à *nuages* pour expliquer *obscurité*

Information d'interaction

$$II(X;Y;Z) = IM(X;Y|Z) - IM(X;Y)$$

- Interaction négative : la 3ème variable inhibe la corrélation entre les deux premières – redondance

C'est le cas notamment des **causes explicatives communes** :

Les nuages causent la pluie et l'obscurité, donc :

$$IM(pluie; obscurité|nuages) < IM(pluie; obscurité)$$

nuage produit l'information *pluie* et *obscurité*, donc la corrélation entre *pluie* et *obscurité* apporte moins d'information quand on sait s'il y a des nuages

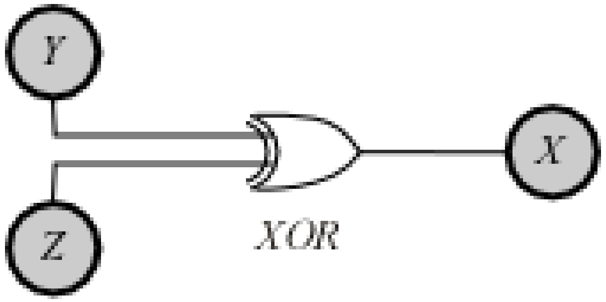
Information d'interaction

$$II(Y;Z;X) = IM(Y;Z|X) - IM(Y;Z)$$

- Interaction positive : la 3ème variable augmente la corrélation entre les deux premières – synergie

C'est le cas notamment des **effets communs** :

Porte XOR :
Y et *Z* sont indépendants, mais *X* est l'effet de *Y* et *Z*. Donc si on mesure *X*, alors connaitre *Z* permet d'en déduire *Y* parfaitement.



Information d’interaction

$$II(X;Y;Z) = IM(X;Y|Z) - IM(X;Y)$$

- Interaction positive : la 3ème variable augmente la corrélation entre les deux premières – synergie

Dans le cas de notre exemple précédent :

$IM(Complications; Glycémie) \approx 0.1280$ et $IM(Complications;\ Glycémie|Poids) \approx 0.3936$

donc :

$II(Complications;\ Glycémie;\ Poids) > 0$

➢ Le poids renforce la corrélation entre la glycémie et le risque de complications.

➢ Pour un poids donné / fixé, la corrélation entre glycémie et complications est plus forte.

Information d’interaction

$$II(X;Y;Z) = IM(X;Y|Z) - IM(X;Y)$$

L’information d’interaction permet donc d’examiner une possible relation de **causalité** entre les trois variables / processus

- Interaction négative : causes explicatives communes
- Interaction positive : effets communs
- Interaction nulle : pas de causalité

Information d’interaction

Exemple d’application :

Etude de la corrélation entre le type morphologique des galaxies et leur environnement à diverses échelles :

$$II(Morphologie;\ Environnement_{\text{échelle}1};\ Environnement_{\text{échelle}2})$$

À voir en TD et TP

Information d'interaction

On peut montrer que :

$$\begin{aligned}
II(X;Y;Z) &= IM(X;Y|Z) - IM(X;Y) \\
&= IM(X;Z|Y) - IM(X;Z) \quad = II(X;Z;Y) \\
&= IM(Y;Z|X) - IM(Y;Z) \quad = II(Y;Z;X)
\end{aligned}$$

Information d’interaction

En effet :

$$II(X;Y;Z) = IM(X;Y|Z) - IM(X;Y)$$

$$II(X;Y;Z) = H(X|Z) + H(Y|Z) - H(X,Y|Z) - H(X) - H(Y) + H(X,Y)$$

$$H(A|B) = H(A,B) - H(B)$$

Information d'interaction

En effet :

$$II(X;Y;Z) = IM(X;Y|Z) - IM(X;Y)$$

$$II(X;Y;Z) = H(X|Z) + H(Y|Z) - H(X,Y|Z) - H(X) - H(Y) + H(X,Y)$$

$$II(X;Y;Z) = H(X,Z) - H(Z) + H(Y,Z) - H(Z) - H(X,Y,Z) + H(Z) - H(X) - H(Y) + H(X,Y)$$

Information d'interaction

En effet :

$$II(X;Y;Z) = IM(X;Y|Z) - IM(X;Y)$$

$$II(X;Y;Z) = H(X|Z) + H(Y|Z) - H(X,Y|Z) - H(X) - H(Y) + H(X,Y)$$

$$II(X;Y;Z) = H(X,Z) - H(Z) + H(Y,Z) - H(Z) - H(X,Y,Z) + H(Z) - H(X) - H(Y) + H(X,Y)$$

$$II(X;Y;Z) = -[H(X) + H(Y) + H(Z)] + H(X,Y) + H(Y,Z) + H(X,Z) - H(X,Y,Z)$$

Formule entièrement symétrique, donc : $II(X;Y;Z) = II(X;Z;Y) = II(Y;Z;X)$

Information d’interaction

$$II(X;Y;Z) = -[H(X) + H(Y) + H(Z)] + H(X,Y) + H(Y,Z) + H(X,Z) - H(X,Y,Z)$$

Généralisation à plus de 3 variables :

Soit V un set de *n* variables $\mathrm{V} = (X_1, \dots, X_n)$:

$$II(V) = \sum_{U \subseteq V} (-1)^{|U|} H(U)$$

Information d'interaction

$$II(X;Y;Z) = -[H(X) + H(Y) + H(Z)] + H(X,Y) + H(Y,Z) + H(X,Z) - H(X,Y,Z)$$

<u>Généralisation à plus de 3 variables :</u>

Soit V un set de *n* variables $\mathrm{V} = (X_1, \dots, X_n)$:

$$II(V) = \sum_{U \subseteq V} (-1)^{|U|} H(U)$$

Interprétation : quantité d'information partagée par toutes les variables *ensemble*, en tenant compte de toutes les combinaisons possibles / sous-ensembles de variables.

Information mutuelle multivariée

Autre mesure d'information partagée entre plus de deux variables : **l'information mutuelle multivariée**

$$IMM(X;Y;Z) = IM(X;Y) - IM(X;Y|Z)$$

Grandes similitudes avec l'information d'interaction $II(X;Y;Z) = IM(X;Y|Z) - IM(X;Y)$

Information mutuelle multivariée

Autre mesure d'information partagée entre plus de deux variables : **l'information mutuelle multivariée**

$$IMM(X;Y;Z) = IM(X;Y) - IM(X;Y|Z)$$

Grandes similitudes avec l'information d'interaction $II(X;Y;Z) = IM(X;Y|Z) - IM(X;Y)$

Peut aussi être vue comme :

$$IMM(X;Y;Z) = IM(X;Y) - IM(X;Y|Z) = IM(X;Y) + IM(X;Z) - IM(X\,;(Y,Z))$$

Information que *Y* et *Z* peuvent nous donner sur *X* séparément

Information que *Y* et *Z* peuvent nous donner sur *X* conjointement

Information mutuelle multivariée

$$IMM(X;Y;Z) = IM(X;Y) - IM(X;Y|Z)$$

- Information positive : **redondance**

C’est le cas notamment des **causes explicatives communes** :

Les nuages causent la pluie et l’obscurité, donc :

$$IM(pluie; obscurité|nuages) < IM(pluie; obscurité)$$

La corrélation entre *pluie* et *obscurité* est en grande partie expliquée par *nuages*, ce qui réduit leur quantité d’information partagée

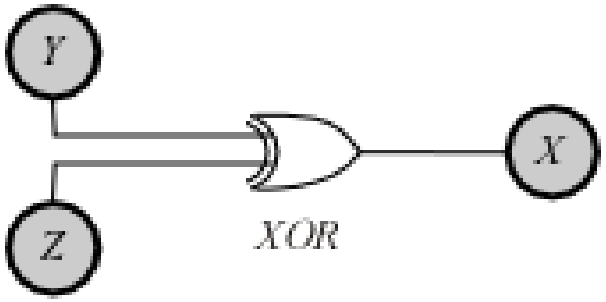
Information mutuelle multivariée

$$IMM(X;Y;Z) = IM(Y;Z) - IM(Y;Z|X)$$

- Information négative : **synergie**

C'est le cas notamment des **effets communs** :

Porte XOR :
Y et *Z* sont indépendants, mais *X* est l'effet de *Y* et *Z*. Donc si on mesure *X*, alors connaitre *Z* permet d'en déduire *Y* parfaitement.



Information mutuelle multivariée

$$IMM(X;Y;Z) = IM(X;Y) - IM(X;Y|Z)$$
$$IMM(X;Y;Z) = H(X) + H(Y) + H(Z) - [H(X,Y) + H(Y,Z) + H(X,Z)] + H(X,Y,Z)$$

(même démo que pour $II(X;Y;Z)$).

Donc $IMM(X;Y;Z) = IMM(Y;Z;X) = IMM(Z;X;Y)$…

Information mutuelle multivariée

$$IMM(X;Y;Z) = IM(X;Y) - IM(X;Y|Z)$$
$$IMM(X;Y;Z) = H(X) + H(Y) + H(Z) - [H(X,Y) + H(Y,Z) + H(X,Z)] + H(X,Y,Z)$$

(même démo que pour $II(X;Y;Z)$).

Donc $IMM(X;Y;Z) = IMM(Y;Z;X) = IMM(Z;X;Y)$…

et même généralisation à plus de trois variables (avec différence de signe) :

$$IMM(V) = \sum_{U \subseteq V} (-1)^{|U|+1} H(U)$$

avec V un set de *n* variables $\mathrm{V} = (X_1, \dots, X_n)$.

Causalité entre des séries temporelles

Considérons : X et Y

deux variables temporelles qui génèrent des séries de valeur

$x^{(n)} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ et $\mathrm{y}^{(n)} = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$

Si on connait les valeurs de Y passées et présente : $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$

la valeur présente x_n de X permet elle de prévoir y_{n+1}, la prochaine valeur de Y ?

Causalité entre des séries temporelles

Considérons : X et Y

deux variables temporelles qui génèrent des séries de valeur

$x^{(n)} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ et $\mathrm{y}^{(n)} = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$

Si on connait les valeurs de Y passées et présente : $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$

la valeur présente x_n de X permet elle de prévoir y_{n+1}, la prochaine valeur de Y ?

<u>Notations</u> :

- Variable X au temps i : X_i
- Série des variables Y aux temps de 0 à n : $Y^{(n)}$

Entropie de transfert

$$T_{X \to Y} = IM\left(Y_{n+1}; X_n \,|Y^{(n)}\right)$$

$IM(X;Y|Z) = IM(X\,;(Y,Z)) - IM(X;Z)$

Entropie de transfert

$$T_{X\to Y} = IM\left(Y_{n+1}; X_n\,|Y^{(n)}\right)$$

$$T_{X\to Y} = IM\left(Y_{n+1}\,;(X_n,Y^{(n)})\right) - IM\left(Y_{n+1}; Y^{(n)}\right)$$

Information partagée entre :
les valeurs passées de Y + la valeur courante de X
et la prochaine valeur de Y

Information partagée entre les valeurs passées de Y
et la prochaine : évolution naturelle du signal

Quelle information X_n apporte t'elle à notre connaissance de la manière dont le signal Y va évoluer ?

Entropie de transfert

$$T_{X \to Y} = IM\left(Y_{n+1}; X_n \mid Y^{(n)}\right)$$

- Si $T_{X \to Y} = 0$:

Connaître x_n n'aide en rien à prévoir y_{n+1} lorsqu'on connait les $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$.

X n'influence pas la prochaine valeur de Y.

Il n'y a pas de flux d'information de X à Y.

- Si $T_{X \to Y} > 0$:

Connaître x_n aide à prévoir y_{n+1} lorsqu'on connait les $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$.

La prochaine valeur de Y dépend aussi de la valeur actuelle de X.

Il y a un flux d'information de X à Y.

Entropie de transfert

$$T_{X \to Y} = IM\left(Y_{n+1}; X_n \; | Y^{(n)}\right)$$

Mais :

$$T_{X \to Y} \neq T_{Y \to X}$$

- Mesure asymétrique

L’information est transmise dans un sens donné, pas dans l’autre.

La cause et l’effet sont clairement identifiés.

Entropie de transfert

$$T_{X\to Y} = IM\left(Y_{n+1}; X_n \,|Y^{(n)}\right)$$

Pourquoi appeler ça une *entropie* ?

Entropie de transfert

$$T_{X\to Y} = IM\left(Y_{n+1}; X_n \,|Y^{(n)}\right)$$

Pourquoi appeler ça une *entropie* ?

$$T_{X\to Y} = IM\left(Y_{n+1}\,; (X_n, Y^{(n)})\right) - IM\left(Y_{n+1}; Y^{(n)}\right)$$

et

$$IM(C,T) = H(C) + H(T) - H(C,T) = H(T) - H(T|C)$$

En bon physicien, l’auteur a considéré que des sommes et des différences d’entropies donnent…

une entropie !

$$IM(X;Y\mid Z)=\sum_{z}p_z\sum_{x,y}p_{x,y|z}\log_2\frac{p_{x,y|z}}{p_{x|z}p_{y|z}}$$

Entropie de transfert

$$T_{X\to Y}=IM\left(Y_{n+1};X_n\;|Y^{(n)}\right)$$

$$T_{X\to Y}=\sum_{y^{(n)}}p_{y^{(n)}}\sum_{x_n,y_{n+1}}p_{x_n,y_{n+1}|y^{(n)}}\log_2\frac{p_{x_n,y_{n+1}|y^{(n)}}}{p_{x_n|y^{(n)}}p_{y_{n+1}|y^{(n)}}}$$

Entropie de transfert

$$T_{X\to Y} = IM\left(Y_{n+1}; X_n \,|Y^{(n)}\right)$$

$$T_{X\to Y} = \sum_{y^{(n)}} p_{y^{(n)}} \sum_{x_n,y_{n+1}} p_{x_n,y_{n+1}|y^{(n)}} \log_2 \frac{p_{x_n,y_{n+1}|y^{(n)}}}{p_{x_n|y^{(n)}} p_{y_{n+1}|y^{(n)}}}$$

$$T_{X\to Y} = \sum_{x_n,y_{n+1},y^{(n)}} p_{x_n,y_{n+1},y^{(n)}} \log_2 \frac{p_{y^{(n)}} p_{x_n,y_{n+1},y^{(n)}}}{p_{x_n,y^{(n)}} p_{y_{n+1}|y^{(n)}} p_{y^{(n)}}}$$

Entropie de transfert

$$T_{X\to Y} = IM\left(Y_{n+1}; X_n \,|Y^{(n)}\right)$$

$$T_{X\to Y} = \sum_{y^{(n)}} p_{y^{(n)}} \sum_{x_n, y_{n+1}} p_{x_n, y_{n+1}|y^{(n)}} \log_2 \frac{p_{x_n, y_{n+1}|y^{(n)}}}{p_{x_n|y^{(n)}} p_{y_{n+1}|y^{(n)}}}$$

$$T_{X\to Y} = \sum_{x_n, y_{n+1}, y^{(n)}} p_{x_n, y_{n+1}, y^{(n)}} \log_2 \frac{p_{y^{(n)}} p_{x_n, y_{n+1}, y^{(n)}}}{p_{x_n, y^{(n)}} p_{y_{n+1}|y^{(n)}} p_{y^{(n)}}}$$

$$T_{X\to Y} = \sum_{x_n, y_{n+1}, y^{(n)}} p_{x_n, y_{n+1}, y^{(n)}} \log_2 \frac{p_{y_{n+1}|x_n, y^{(n)}}}{p_{y_{n+1}|y^{(n)}}}$$

Entropie de transfert

$$T_{X\to Y} = IM\left(Y_{n+1}; X_n \,|Y^{(n)}\right)$$

$$T_{X\to Y} = \sum_{y^{(n)}} p_{y^{(n)}} \sum_{x_n, y_{n+1}} p_{x_n, y_{n+1}|y^{(n)}} \log_2 \frac{p_{x_n, y_{n+1}|y^{(n)}}}{p_{x_n|y^{(n)}} p_{y_{n+1}|y^{(n)}}}$$

$$T_{X\to Y} = \sum_{x_n, y_{n+1}, y^{(n)}} p_{x_n, y_{n+1}, y^{(n)}} \log_2 \frac{p_{y^{(n)}} p_{x_n, y_{n+1}, y^{(n)}}}{p_{x_n, y^{(n)}} p_{y_{n+1}|y^{(n)}} p_{y^{(n)}}}$$

$$T_{X\to Y} = \sum_{x_n, y_{n+1}, y^{(n)}} p_{x_n, y_{n+1}, y^{(n)}} \log_2 \frac{p_{y_{n+1}|x_n, y^{(n)}}}{p_{y_{n+1}|y^{(n)}}}$$

Version originale dans: *T. Schreiber: Measuring Information Transfer. Phys. Rev. Lett. 85, 461, 2000*
(https://arxiv.org/pdf/nlin/0001042.pdf)

Entropie de transfert

$$T_{X\to Y} = IM\left(Y_{n+1}; X_n \,|Y^{(n)}\right)$$

$$T_{X\to Y} = \sum_{x_n, y_{n+1}, y^{(n)}} p_{x_n, y_{n+1}, y^{(n)}} \log_2 \frac{p_{y_{n+1}|x_n, y^{(n)}}}{p_{y_{n+1}|y^{(n)}}}$$

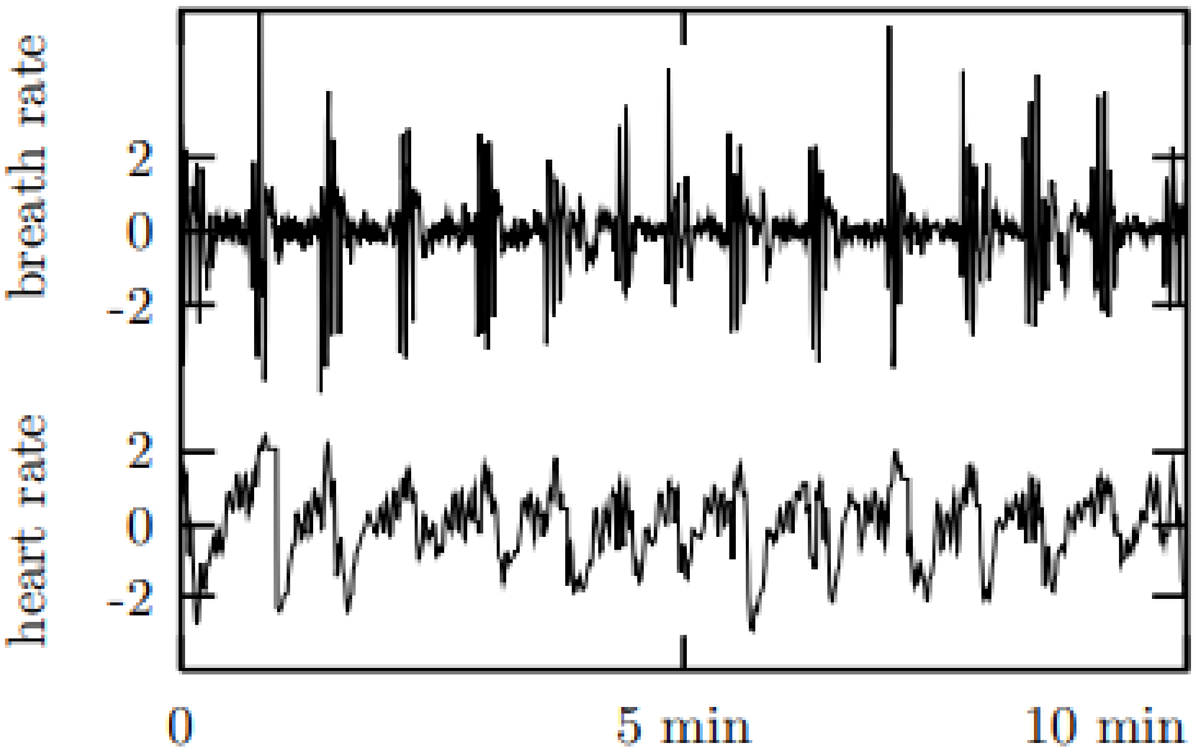
En pratique, on considère la série $\{y_{n-k}, y_{n-k+1}, \dots, y_n\}$ plutôt que $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$

et on somme sur toutes les réalisations de $\left\{x_n, y_{n+1}, y^{(n)}\right\}$ de la série temporelle :

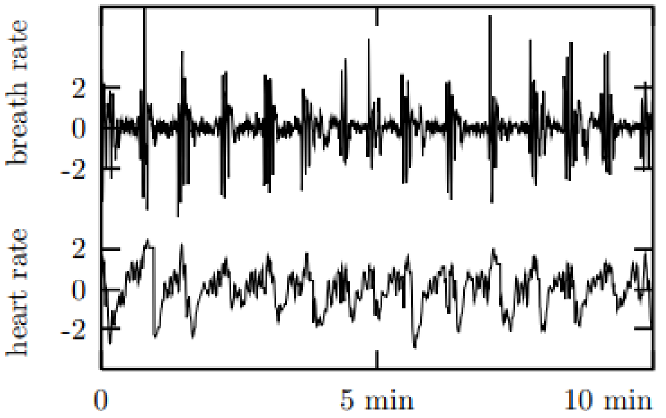
$$T_{X\to Y} = \sum_n IM\left(Y_n; X_{n-1} \,|Y^{(n-1)}\right) = \sum_n IM\left(Y_n; X_{n-1} \,|Y^{n-k:n-1}\right)$$

Entropie de transfert

Exemple d'application : étude de l'apnée du sommeil



T. Schreiber: Measuring Information Transfer. Phys. Rev. Lett. 85, 461, 2000



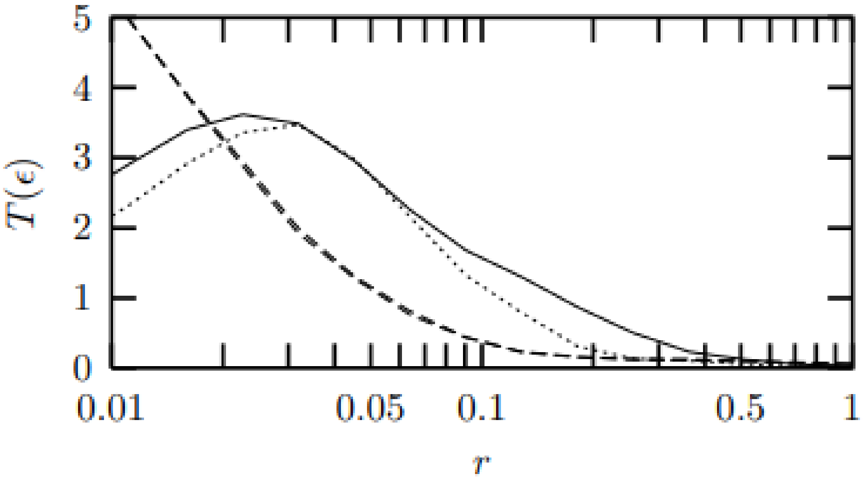
Entropie de transfert

Exemple d'application : étude de l'apnée du sommeil

Comparaison entre :

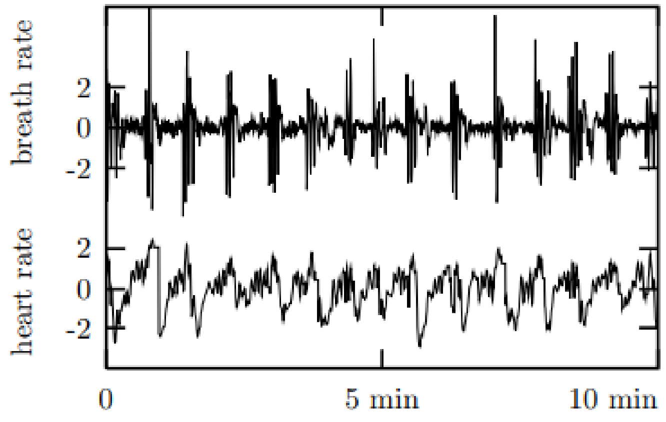
- $IM(Heart, Breath)$ avec un signal décalé/retardé de 0.5 sec. (tirés)
- $T_{Heart \to Breath}$ (ligne pleine)
- $T_{Breath \to Heart}$ (pointillés)

calculées sur diverses durées



T. Schreiber: Measuring Information Transfer. Phys. Rev. Lett. 85, 461, 2000

Entropie de transfert

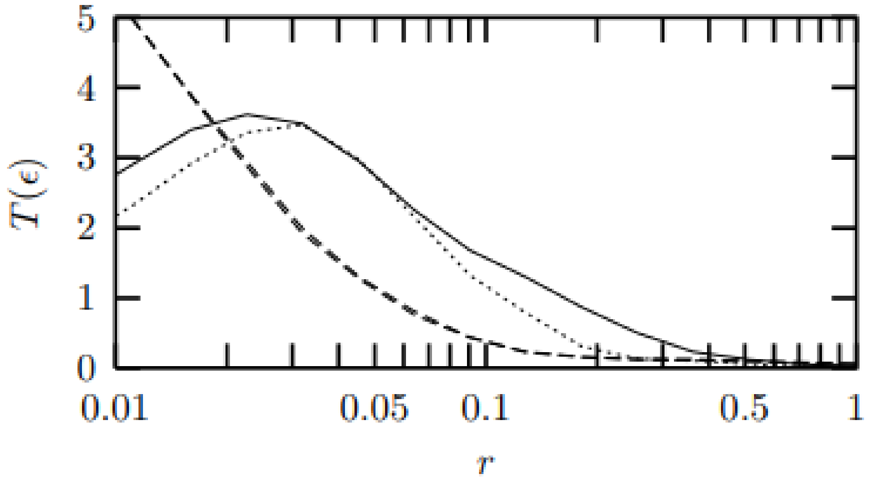


Exemple d'application : étude de l'apnée du sommeil

Comparaison entre :

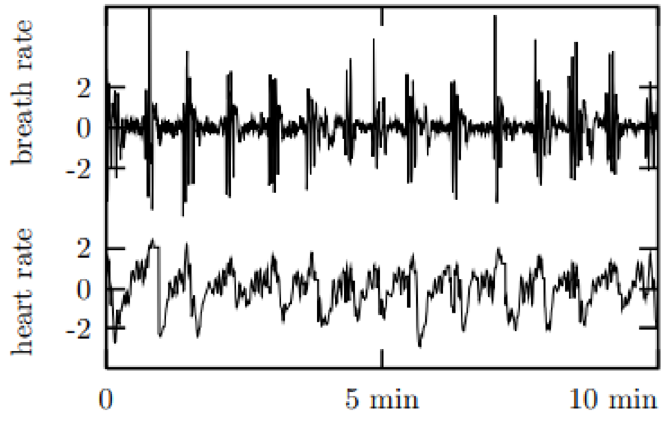
- $IM(Heart, Breath)$ avec un signal décalé/retardé de 0.5 sec. (tirés) → directions indistinguables
- $T_{Heart \to Breath}$ (ligne pleine)
- $T_{Breath \to Heart}$ (pointillés)

calculées sur diverses durées



T. Schreiber: Measuring Information Transfer. Phys. Rev. Lett. 85, 461, 2000

Entropie de transfert



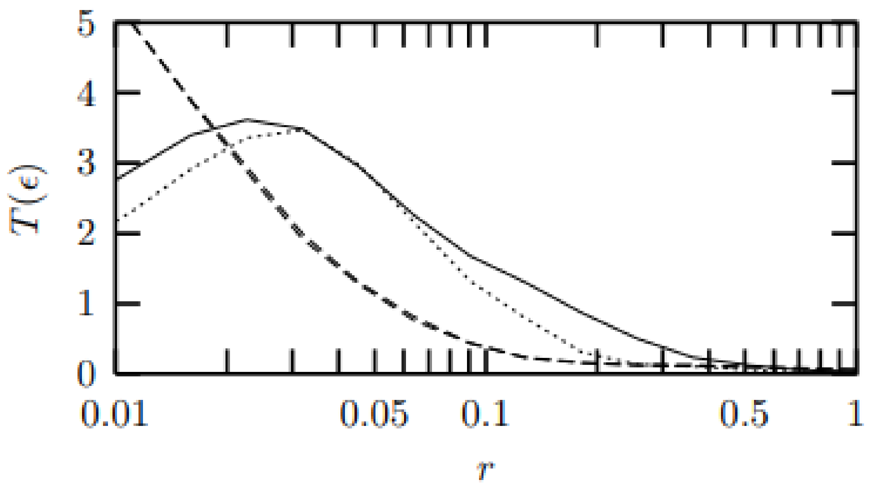
Exemple d'application : étude de l'apnée du sommeil

Comparaison entre :

- $IM(Heart, Breath)$ avec un signal décalé/retardé de 0.5 sec. (tirés) → directions indistinguables
- $T_{Heart \to Breath}$ (ligne pleine)
- $T_{Breath \to Heart}$ (pointillés)

$T_{H \to B} > T_{B \to H}$: Flux d'information plus important du cœur vers la respiration

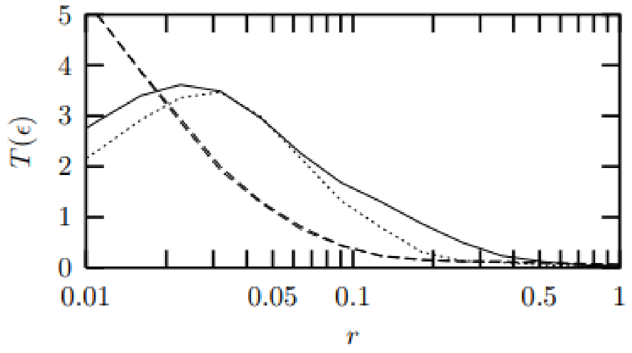
calculées sur diverses durées



T. Schreiber: Measuring Information Transfer. Phys. Rev. Lett. 85, 461, 2000

Entropie de transfert

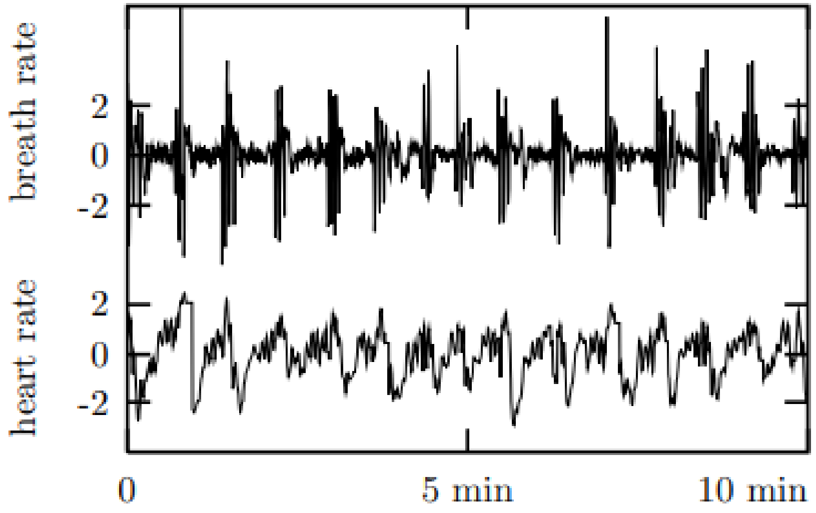
Exemple d'application : étude de l'apnée du sommeil



- $T_{Heart \to Breath}$ (ligne pleine)
- $T_{Breath \to Heart}$ (pointillés)

$T_{H \to B} > T_{B \to H}$: Flux d'information plus important du cœur vers la respiration

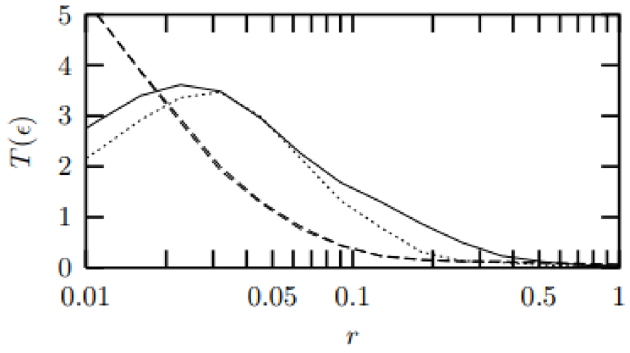
Cohérent avec les observations : le patient inspire brusquement quand le cœur passe un seuil



T. Schreiber: Measuring Information Transfer. Phys. Rev. Lett. 85, 461, 2000

Entropie de transfert

Exemple d’application : étude de l’apnée du sommeil



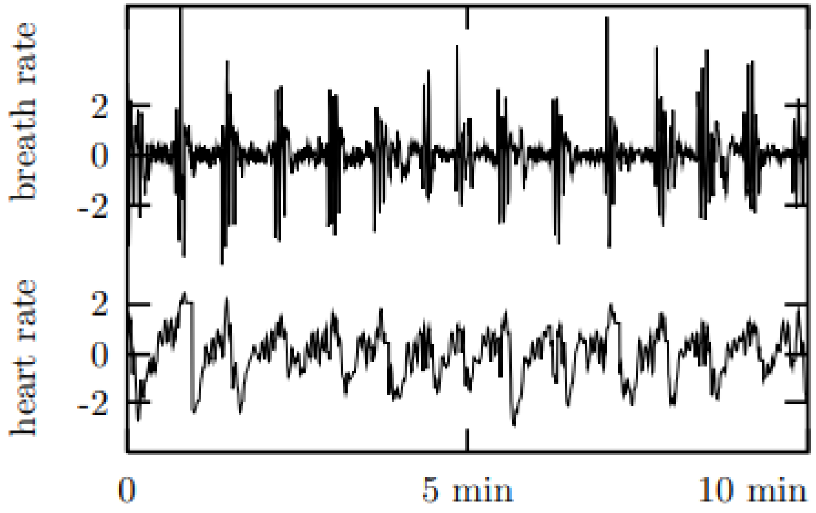
- $T_{Heart \rightarrow Breath}$ (ligne pleine)
- $T_{Breath \rightarrow Heart}$ (pointillés)

$T_{H \rightarrow B} > T_{B \rightarrow H}$: Flux d’information plus important du cœur vers la respiration

Cohérent avec les observations : le patient inspire brusquement quand le cœur passe un seuil

Attention :

Rien ne garantie que les deux signaux ne viennent pas d’une autre cause commune



T. Schreiber: Measuring Information Transfer. Phys. Rev. Lett. 85, 461, 2000

Information mutuelle dirigée

Autre mesure de causalité :

$$IM\left(X^{(n)} \rightarrow Y^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^{n} IM(X^{(i)}; Y_i | Y^{(i-1)})$$

Information mutuelle dirigée

Rappel :

Information mutuelle entre une variable X et un ensembles de variables Y^n :

$$IM\left(X; Y^{(n)}\right) = \sum_i IM(X; Y_i | Y^{(i-1)})$$

$$IM\left(X; Y^{(n)}\right) = \sum_i IM\left(X; Y^{(i)}\right) - IM(X; Y^{(i-1)})$$

Pour chaque variable de l'ensemble Y^n

Information partagée entre X et l'ensemble Y^i

Redondance entre X et les variables précédentes de l'ensemble Y^i

Information mutuelle dirigée

Rappel :

Information mutuelle entre une variable X et un ensembles de variables Y^n :

$$IM\left(X; Y^{(n)}\right) = \sum_{i} IM(X; Y_i | Y^{(i-1)})$$

Ici : information mutuelle entre deux suites de variables

$$IM\left(X^{(n)} \rightarrow Y^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^{n} IM(X^{(i)}; Y_i | Y^{(i-1)})$$

Information mutuelle dirigée

information mutuelle entre deux suites de variables :

$$IM\left(X^{(n)} \rightarrow Y^{(n)}\right) = \sum_i IM(X^{(i)}; Y_i | Y^{(i-1)})$$

$$IM\left(X^{(n)} \rightarrow Y^{(n)}\right) = \sum_i IM\left(X^{(i)}; Y^{(i)}\right) - IM(X^{(i)}; Y^{(i-1)})$$

Pour chaque point de la série Y^n

Information partagée entre les séries X^i et Y^i

Redondance entre X^iet les valeurs précédentes de la série Y^i

Information mutuelle dirigée

$$IM\left(X^{(n)} \to Y^{(n)}\right) = \sum_i IM(X^{(i)}; Y_i | Y^{(i-1)})$$

$$IM\left(X^{(n)} \to Y^{(n)}\right) = \sum_i IM\left(X^{(i)}; Y^{(i)}\right) - IM(X^{(i)}; Y^{(i-1)})$$

- Si $IM\left(X^{(n)} \to Y^{(n)}\right) > 0$:

A chaque temps i, $X^{(i)}$ n’est pas totalement redondant avec $Y^{(i-1)}$ pour deviner Y_i.

y_n ne dépend pas uniquement de $\{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ mais aussi de $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$.

Il y a un flux d’information de X à Y.

Information mutuelle dirigée

$$IM\left(X^{(n)} \to Y^{(n)}\right) = \sum_{i} IM(X^{(i)}; Y_i | Y^{(i-1)})$$

Mais :

$$IM\left(X^{(n)} \to Y^{(n)}\right) \neq IM\left(Y^{(n)} \to X^{(n)}\right)$$

- Mesure asymétrique

L’information est transmise dans un sens donné, pas dans l’autre.

La cause et l’effet sont clairement identifiés.

Information mutuelle dirigée

$$IM(X \to Y) = \sum_n IM(Y_n; X^{(n)} \,|Y^{(n-1)})$$

Rapport avec l'entropie de transfert :

$$T_{X\to Y} = \sum_n IM\left(Y_n; X_{n-1} \,|Y^{(n-1)}\right)$$

ou

$$T_{X\to Y} = \sum_n IM\left(Y_n; X_{n-1} \,|Y^{n-k:n-1}\right)$$

L'entropie de transfert est une version finie de l'information dirigée, de calcul plus pratique.

Discrétisation