1. Вектор-функции скалярного аргумента.

Пусть V — евклидово линейное пространство и $I \subseteq \mathbb{R}$.

Опр. *Отображение из множества I в V называется векторной функцией (вектор-функцией) скалярного аргумента.*

Обозначать векторные функции будем, например, “$\vec{v}$ — функция” или $\vec{v}(t)$. Предполагается, что они определены на некотором данном $I \subseteq \mathbb{R}$.

Опр. *Вектор $\vec{a} \in V$ называется **пределом** векторной функции $\vec{v}(t)$ при $t \to t_0$, $t \in I$, если $\lim\limits_{t \to t_0} |\vec{v}(t) - \vec{a}| = 0$.*

Обозначается этот предел $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{v}(t) = \vec{a}$.

Отметим еще, что $\lim\limits_{t \to t_0} (\vec{v}(t) - \vec{a}) = \vec{0}$ означает то же самое.

След 1. *Если существует предел $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{v}(t)$ и $t_0 \in I$, то он равен $\vec{v}(t_0)$.*

Пусть в V выбран ортонормированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тогда определены такие функции $x(t) = \vec{v}(t) \cdot \vec{i}$, $y(t) = \vec{v}(t) \cdot \vec{j}$, $z(t) = \vec{v}(t) \cdot \vec{k}$ из I в $\mathbb{R}$, которые ставят в соответствие вектору $\vec{v}(t)$ при $t \in I$, одну из его координат:

$$\vec{v}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}.$$

Эти функции называются **координатами** функции $\vec{v}$ в данном базисе.

Теор 1. *Пусть вектор $\vec{a} \in V$ имеет координаты (a_1, a_2, a_3). Тогда $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{v}(t) = \vec{a}$ в том и только том случае $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a_1$, $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = a_2$ и $\lim\limits_{t \to t_0} z(t) = a_3$.*

Док-во. Предположим, что $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{v}(t) = \vec{a}$. Получаем $\lim\limits_{t \to t_0} |\vec{v}(t) - \vec{a}| = \lim\limits_{t \to t_0} \sqrt{(x(t) - a_1)^2 + (y(t) - a_2)^2 + (z(t) - a_3)^2} = 0$. Отсюда $\lim\limits_{t \to t_0} |x(t) - a_1| = 0$, так как $|x(t) - a_1| \leqslant |\vec{v}(t) - \vec{a}|$. Это значит $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$. То же верно для $y(t)$ и $z(t)$.

Пусть теперь $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a_1$, $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = a_2$ и $\lim\limits_{t \to t_0} z(t) = a_3$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое

1. $\delta_1 > 0$, что для любого t с условием $|t - t_0| < \delta_1$ будет $|x(t) - a_1| < \varepsilon/\sqrt{3}$;
2. $\delta_2 > 0$, что для t, $|t - t_0| < \delta_2$: $|y(t) - a_2| < \varepsilon/\sqrt{3}$;
3. $\delta_3 > 0$, что для t, $|t - t_0| < \delta_3$: $|z(t) - a_3| < \varepsilon/\sqrt{3}$.

Выберем минимальное из чисел $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ и назовем его δ. Для любого t при условии $|t - t_0| < \delta$ верно $|\vec{v}(t) - \vec{a}| < \varepsilon$. Это значит $\lim\limits_{t \to t_0} |\vec{v}(t) - \vec{a}| = 0$. □

Теор 2 (Свойства). *Пусть $\vec{v}(t)$ и $\vec{w}(t)$ — векторные функции, а $f(t)$ — числовая функция.*

1. $\lim\limits_{t \to t_0} (\vec{v}(t) + \vec{w}(t)) = \lim\limits_{t \to t_0} \vec{v}(t) + \lim\limits_{t \to t_0} \vec{w}(t)$
2. $\lim\limits_{t \to t_0} (\vec{v}(t) \cdot \vec{w}(t)) = \lim\limits_{t \to t_0} \vec{v}(t) \cdot \lim\limits_{t \to t_0} \vec{w}(t)$
3. $\lim\limits_{t \to t_0} [\vec{v}(t), \vec{w}(t)] = [\lim\limits_{t \to t_0} \vec{v}(t), \lim\limits_{t \to t_0} \vec{w}(t)]$
4. $\lim\limits_{t \to t_0} (f(t)\vec{v}(t)) = \lim\limits_{t \to t_0} f(t) \lim\limits_{t \to t_0} \vec{v}(t)$

Док-во. Положим далее $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{v}(t) = \vec{a}$ и $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{w}(t) = \vec{b}$.

1. Это значит $\lim\limits_{t \to t_0} |\vec{v}(t) - \vec{a}| = \lim\limits_{t \to t_0} |\vec{w}(t) - \vec{b}| = 0$. Учитывая $|\vec{v}(t) - \vec{a} + \vec{w}(t) - \vec{b}| \leqslant |\vec{v}(t) - \vec{a}| + |\vec{w}(t) - \vec{b}|$, получаем $\lim\limits_{t \to t_0} |\vec{v}(t) - \vec{a} + \vec{w}(t) - \vec{b}| = 0$, что означает $\lim\limits_{t \to t_0} (\vec{v}(t) + \vec{w}(t)) = \vec{a} + \vec{b}$.

2. Обозначим функции $\vec{\alpha}(t) = \vec{v}(t) - \vec{a}$ и $\vec{\beta}(t) = \vec{w}(t) - \vec{b}$, для которых справедливо $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{\alpha}(t) = \lim\limits_{t \to t_0} \vec{\beta}(t) = \vec{0}$. Тогда $|\vec{v}(t)\vec{w}(t) - \vec{a}\,\vec{b}| = |(\vec{\alpha}(t) + \vec{a})(\vec{\beta}(t) + \vec{b}) - \vec{a}\,\vec{b}| = |\vec{\alpha}(t)\vec{\beta}(t) + \vec{\alpha}(t)\,\vec{b} + \vec{a}\,\vec{\beta}(t)| \leqslant |\vec{\alpha}(t)\vec{\beta}(t)| + |\vec{\alpha}(t)\,\vec{b}| + |\vec{a}\,\vec{\beta}(t)| \leqslant |\vec{\alpha}(t)||\vec{\beta}(t)| + |\vec{\alpha}(t)||\vec{b}| + |\vec{a}||\vec{\beta}(t)|$ (, где последнее из $|\vec{x}\,\vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}||\cos(\vec{x}, \vec{y})| \leqslant |\vec{x}||\vec{y}|$). Из этого $\lim\limits_{t \to t_0} |\vec{v}(t)\vec{w}(t) - \vec{a}\,\vec{b}| = 0$, и $\lim\limits_{t \to t_0} (\vec{v}(t) \cdot \vec{w}(t)) = \lim\limits_{t \to t_0} (\vec{a} \cdot \vec{b})$.

3. Почти дословно повторяем предыдущее с учетом свойств векторного произведения.

4. ...и тут тоже. □

Опр. *Векторная функция $\vec{v}(t)$ называется* ***непрерывной*** *при $t = t_0$, если*

$$\lim_{t\to t_0} \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0).$$

Функция $\vec{v}$ называется непрерывной на I, если она непрерывна при любом $t \in I$.

Теор 3. *Векторная функция $\vec{v}(t)$ непрерывна в $t_0 \in I$ тогда и только тогда, когда в t_0 непрерывны ее координаты.*

Док-во. Вектор $\vec{v}(t_0)$ имеет координаты $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$. Но по Теореме 1 получаем, что $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x(t_0)$, $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = y(t_0)$, $\lim\limits_{t\to t_0} z(t) = z(t_0)$. Что и требуется. $\square$

Опр. *Векторная функция $\vec{v}$ называется* ***дифференцируемой*** *в t_0, если существует предел*

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{v}(t_0 + \Delta t) - \vec{v}(t_0)}{\Delta t}.$$

Этот предел называется **производной** $\vec{v}$ в t_0 и обозначается $\dfrac{d\vec{v}}{dt}(t_0)$, $\vec{v}\,'(t_0)$ или $\dot{\vec{v}}(t_0)$. Функция $\vec{v}$ называется дифференцируемой на I, если она дифференцируема в любой $t \in I$.

Если существует производная $\vec{v}\,'(t)$, то приращение $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$ представляется в виде $\Delta\vec{v} = \vec{v}\,'(t)\Delta t + \vec{\varepsilon}(\Delta t)\Delta t$, где $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{\varepsilon}(\Delta t) = \vec{0}$: имеем $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} - \vec{v}\,'(t) = \vec{0}$, возьмем $\vec{\varepsilon}(\Delta t) = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} - \vec{v}\,'(t)$. Функция $\vec{v}\,'(t)\Delta t$ называется дифференциалом и обозначается $d\vec{v}$. Поэтому, если принять $dt = \Delta t$, обозначение $\frac{d\vec{v}}{dt}$ обретает смысл.

Теор 4. *Векторная функция $\vec{v}(t)$ дифференцируема в $t_0 \in I$ тогда и только тогда, когда в t_0 дифференцируемы ее координаты. При этом в t_0 имеет место*

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Док-во. Можно записать

$$\frac{\vec{v}(t_0 + \Delta t) - \vec{v}(t_0)}{\Delta t} = \\ = \frac{x(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}\vec{i} + \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t}\vec{j} + \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t}\vec{k}.$$

По Теореме 1 предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t_0+\Delta t)-\vec{v}(t_0)}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}$ существует тогда и только тогда, когда существуют $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$. □

Теор 5 (Свойства). *Пусть $\vec{v}(t)$ и $\vec{w}(t)$ — векторные функции, а $f(t)$ — числовая функция, все дифференцируемы в I.*

1. $(\vec{v}+\vec{w})'=\vec{v}'+\vec{w}'$
2. $(\vec{v}\cdot\vec{w})'=\vec{v}'\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}'$
3. $[\vec{v},\vec{w}]'=[\vec{v}',\vec{w}]+[\vec{v},\vec{w}']$
4. $(f\vec{v})'=f'\vec{v}+f\vec{v}'$

Док-во. 1. По Теореме 2.

2. Введем обозначения $\Delta\vec{v}=\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)$ и $\Delta\vec{w}=\vec{w}(t+\Delta t)-\vec{w}(t)$. Запишем, используя свойства пределов, $(\vec{v}\vec{w})'=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)\vec{w}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)\vec{w}(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{(\vec{v}(t)+\Delta\vec{v})(\vec{w}(t)+\Delta\vec{w})-\vec{v}(t)\vec{w}(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t)\Delta\vec{w}+\vec{w}(t)\Delta\vec{v}+\Delta\vec{v}\Delta\vec{w}}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t)\Delta\vec{w}}{\Delta t}+\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{w}(t)\Delta\vec{v}}{\Delta t}+\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}\Delta\vec{w}}{\Delta t}=\vec{v}\vec{w}'+\vec{v}'\vec{w}+\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\Delta\vec{w}=\vec{v}\vec{w}'+\vec{v}'\vec{w}$. Здесь $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\Delta\vec{w}=0$, так как $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta\vec{w}=\vec{0}$. Теперь можно просмотреть это в обратном направлении.

3. и **4**. аналогично. □

Лем 1. *Если дифференцируемая в некоторой точке векторная функция $\vec{v}$ удовлетворяет $|\vec{v}(t)|=1$ для всех $t\in I$, то в этой точке ее производная $\frac{d\vec{v}}{dt}$ ортогональна ее значению $\vec{v}(t)$.*

Док-во. Из условия $|\vec{v}(t)|=1$ следует $\vec{v}(t)\vec{v}(t)=1$. Дифференцируя, $2\vec{v}(t_0)\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}(t_0)=0$, и $\vec{v}(t_0)\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}(t_0)=0$. □

Если производная векторной функции $\vec{v}(t)$ также является дифференцируемой функцией, то ее производная называется второй (второго порядка) производной функции $\vec{v}(t)$ и обозначается $\dfrac{d^2\vec{v}}{dt^2}(t_0)$, $\vec{v}''(t_0)$ или $\ddot{\vec{v}}(t_0)$. По аналогии вводятся производные высших порядков $\dfrac{d^k\vec{v}}{dt^k}(t_0)$, $\vec{v}^{(k)}(t_0)$.

Дифференцируемая n раз функция $\vec{v}(t)$ представляется

$$\vec{v}(t_0+\Delta t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\vec{v}^{(k)}(t_0)}{k!}\Delta t^k+\vec{o}(\Delta t^n),\quad \text{при } \Delta t\to 0.$$

Здесь $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\vec{o}(\Delta t) = \varepsilon(\Delta t)\Delta t$ для некоторой функции $\varepsilon(\Delta t)$ с условием $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\varepsilon(\Delta t) = \vec{0}$. Эта формула аналогична формуле Тейлора числовой функции и получается разложением по формуле Тейлора координат функции $\vec{v}$.

2. Параметризованные кривые.

Пусть теперь E_3 — евклидово аффинное пространство над линейным пространством V и в нем задана декартова система координат $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$.

Если дана какая-то векторная функция $\vec{r}(t)$, то ей можно сопоставить множество точек, каждая из которых получается откладыванием вектора $\vec{r}(t)$ для $t \in I$ от O.

Дадим более общее определение непрерывного отображения для произвольных метрических пространств.

Опр. *Отображение $f : X \to Y$ будем называть* ***непрерывным*** *в точке $x \in X$, если для любой окрестности V точки $f(x)$ существует такая окрестность U точки x, что $f(U) \subseteq V$.*

Опр. *Биективное взаимно непрерывное отображение называется* ***гомеоморфизмом****.*

Опр. *Фигура называется* ***элементарной кривой****, если она гомеоморфна некоторому числовому промежутку (замкнутому, открытому или полуоткрытому интервалу).*

Прим 1. *Прямая, луч, отрезок — элементарные кривые. Окружность не является элементарной.*

Таким образом, для каждой элементарной кривой γ гомеоморфизм задает непрерывную векторную функцию $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, определенную на промежутке I.

Уравнение $\vec{r} = \vec{r}(t)$ или $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ называются **параметрическими уравнениями** кривой γ.

Опр. *Фигура называется* ***кривой****, если ее можно покрыть конечным или счетным числом элементарных кривых.*

Опр. *Кривая называется* ***простой****, если любая ее точка имеет окрестность, в которой эта кривая является элементарной кривой (точка является простой).*

Опр. *Элементарная кривая* $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I$*, называется* ***гладкой кривой класса*** C^k*, если*

1. *ее координаты (а значит и* $\vec{r}(t)$*) имеют непрерывные производные до порядка* k *включительно и*

2. $(x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0, 0, 0)$ *при любом* $t \in I$ *(нет особых точек).*

Опр. *Простая кривая называется* ***гладкой кривой класса*** C^k*, если у каждой ее точки существует окрестность, в которой эта кривая является гладкой элементарной кривой класса* C^k*.*

Пусть дана элементарная кривая γ, заданная параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ на промежутке I.

Опр. *Всякий гомеоморфизм* $\tau = h(t)$*, отображающий промежуток* I *на некоторый промежуток* I'*, называется преобразованием (заменой) параметра кривой* γ*.*

Отображение h^{-1} будет гомеоморфизмом I' на I, при котором $t = h^{-1}(\tau)$. Следовательно, формулы $x = x(h^{-1}(\tau)), y = y(h^{-1}(\tau)), z = z(h^{-1}(\tau))$ задают гомеоморфизм I' на γ.

Опр. *Всякий гомеоморфизм* $\tau = h(t)$*, отображающий промежуток* I *на некоторый промежуток* I'*, называется преобразованием параметра гладкой кривой класса* C^k γ*, если* $h(t)$ *имеет на* I *непрерывные производные до порядка* k *включительно и* $h'(t) \neq 0$ *для всех* $t \in I$*.*

3. Касательная к гладкой кривой. Длина дуги.

Пусть гладкая кривая γ задана векторной функцией $\overrightarrow{r}(t)$ на промежутке I.

Для произвольной пары точек кривой $M_0 = O + \overrightarrow{r}(t_0)$ и $M = O + \overrightarrow{r}(t_0 + \Delta t)$, где $\Delta t \neq 0$, прямая M_0M называется секущей и имеет направляющий вектор $\Delta\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t_0 + \Delta t) - \overrightarrow{r}(t_0)$. Вектор $\frac{\Delta\overrightarrow{r}}{\Delta t}$ также будет направляющим для M_0M.

Так как рассматривается гладкая кривая, то в любой ее точке, а значит и в t_0, существует предел $\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{r}}{\Delta t} \neq \overrightarrow{0}$. Чем ближе Δt к 0, тем "ближе" секущая M_0M к прямой, проходящей через M_0 параллельной вектору $\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$, которую называют предельным положением секущей.

Опр. *Прямую, проходящую через M_0 параллельно $\overrightarrow{r}'(t_0)$ называют* ***касательной*** *к гладкой кривой γ в точке M_0.*

Отметим: касательная не зависит от параметризации, так как если заменить параметр $\tau = h(t)$, то $\frac{d\overrightarrow{r}}{d\tau} = \frac{d\overrightarrow{r}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}$, а значит векторы $\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$ и $\frac{d\overrightarrow{r}}{d\tau}$ коллинеарны.

Единичный вектор касательной к кривой в некоторой точке обозначается $\overrightarrow{\tau}$, то есть $\overrightarrow{\tau} = \frac{\overrightarrow{r}'(t_0)}{|\overrightarrow{r}'(t_0)|}$.

Теор 6. *Прямая, проходящая через точку $\overrightarrow{r}(t_0)$ гладкой кривой $\overrightarrow{r}(t)$, является касательной тогда и только тогда, когда расстояние от произвольной точки $\overrightarrow{r}(t_0 + \Delta t)$ кривой до этой прямой есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δt при $\Delta t \to 0$.*

Док-во. Так как кривая дифференцируема, то $\overrightarrow{r}(t_0 + \Delta t) - \overrightarrow{r}(t) = \Delta\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}'(t_0)\Delta t + \overrightarrow{o}(\Delta t)$, при $\Delta t \to 0$. Для произвольной прямой $\overrightarrow{r}(t_0) + \overrightarrow{a}$, проходящей через точку $\overrightarrow{r}(t_0)$ параллельно единичному вектору $\overrightarrow{a}$, расстояние от точки кривой $\overrightarrow{r}(t_0 + \Delta t)$ до этой прямой равно $|[\Delta\overrightarrow{r}, \overrightarrow{a}]| = |[\overrightarrow{r}'(t_0)\Delta t + \overrightarrow{o}(\Delta t), \overrightarrow{a}]| = |\Delta t[\overrightarrow{r}'(t_0), \overrightarrow{a}] + [\overrightarrow{o}(\Delta t), \overrightarrow{a}]|$. Условие выполняется в том и только том случае, когда $\Delta t[\overrightarrow{r}'(t_0), \overrightarrow{a}] = 0$, а это влечет коллинеарность $\overrightarrow{r}'(t_0)$ и $\overrightarrow{a}$. □

Опр. *Пусть кривая γ задана векторной функцией $\vec{r}(t)$ на $[a,b]$. Точная верхняя грань (если она существует) множества длин ломаных $\sum\limits_{i=1}^{n} |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|$ по всевозможным разбиениям $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ отрезка $[a,b]$ называется **длиной** кривой γ.*

Лем 2. *Если векторная функция $\vec{r}(t)$ непрерывна и дифференцируема на $[a,b]$, то существует такое $\xi \in (a,b)$, что $|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leqslant |\vec{r}\,'(\xi)|(b-a)$.*

Док-во. Если $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, то тривиально. Поэтому пусть $\vec{r}(a) \neq \vec{r}(b)$.

Возьмем $\vec{e} = \frac{\vec{r}(b)-\vec{r}(a)}{|\vec{r}(b)-\vec{r}(a)|}$. Тогда интересующая нас длина $|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| = (\vec{r}(b)-\vec{r}(a))\vec{e} = \vec{r}(b)\vec{e} - \vec{r}(a)\vec{e}$ есть разность значений числовой функции $f(t) = \vec{r}(t)\vec{e}$. Эта функция непрерывна и дифференцируема (Теорема 2 и 5). По теореме о конечных приращениях Лагранжа существует $\xi \in (a,b)$, что $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$. Применим Теорему 5, $f(b)-f(a) = (\vec{r}\,'(\xi)\vec{e})(b-a)$. Получаем $|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| = |f(b) - f(a)| = |(\vec{r}\,'(\xi)\vec{e})(b-a)| \leqslant |\vec{r}\,'(\xi)||(b-a)|$

□

Теор 7. *Если кривая, заданная векторной функцией $\vec{r}(t)$ на $[a,b]$ непрерывно дифференцируема, то она спрямляема.*

Док-во. Так как $\vec{r}\,'(t)$ непрерывна, то $|\vec{r}\,'(t)|$ также непрерывна и по теореме Вейерштрасса принимает на $[a,b]$ наибольшее значение. Обозначим его $m = \max|\vec{r}\,'(t)|$. Произвольно возьмем разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ интервала $[a,b]$. Получаем $|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| = |\vec{r}(t_n) - \vec{r}(t_{n-1}) + \vec{r}(t_{n-1}) - \vec{r}(t_{n-2}) + \ldots + \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0))| \leqslant |\vec{r}(t_n) - \vec{r}(t_{n-1})| + |\vec{r}(t_{n-1}) - \vec{r}(t_{n-2})| + \ldots + |\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0))| \leqslant |\vec{r}\,'(\xi_n)|(t_n - t_{n-1}) + |\vec{r}\,'(\xi_{n-1})|(t_{n-1} - t_{n-2}) + \ldots + |\vec{r}\,'(\xi_1)|(t_1 - t_0)$ для некоторых $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ в силу Леммы 2. Это число есть длина ломаной и не превышает $m(b-a)$.

Граница верна для любого разбиения, а значит длины ломанных ограничены. □

Лем 3. *Пусть кривая задана векторной функцией $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ на $[a,b]$, спрямляема и ее длина равна S. Тогда для любой $c \in [a,b]$ длина S_1 кривой $\vec{r}(t)$, $t \in [a,c]$ и длина S_2 кривой $\vec{r}(t)$, $t \in [c,b]$ таковы, что $S_1 + S_2 = S$.*

Док-во. Длина p_1 любой ломанной с концами $\vec{r}(a)$, $\vec{r}(c)$ и длина p_2 любой ломанной с концами $\vec{r}(c)$, $\vec{r}(b)$ удовлетворяют $p_1 + p_2 \leqslant S$, а значит $S_1 + S_2 \leqslant S$.

С другой стороны длина любой ломаной с концами $\vec{r}(a)$, $\vec{r}(b)$ не превышает $S_1 + S_2$: если эта ломаная включает точку $\vec{r}(c)$, то она является объединением двух ломаных, а если не включает, то можно разбить одно из ее звеньев на два так, что они будут содержать $\vec{r}(c)$, длина ломаной в результате только увеличится и будет удовлетворять неравенству. □

Теор 8. *Если кривая, заданная векторной функцией $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ на $[a, b]$ непрерывно дифференцируема, то длина дуги $s(t)$ с началом a и концом t является непрерывно дифференцируемой функцией параметра t и*

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Док-во. Обозначим $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ и $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$. По показанному в Теореме 7 имеем $|\Delta r| \leqslant |\Delta s| \leqslant |\vec{r}'(\xi)||\Delta t|$, где $|\vec{r}'(\xi)|$ — наибольшее значение, которое достигает $|\vec{r}'(t)|$ на интервале между t и $t + \Delta t$. Поделив на $|\Delta t| \neq 0$, получим $\left|\frac{\Delta r}{\Delta t}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| \leqslant |\vec{r}'(\xi)|$.

С ростом t значение $s(t)$ возрастает, поэтому $\Delta s \geqslant 0$, если $\Delta t \geqslant 0$ и наоборот. Следовательно, $\frac{\Delta s}{\Delta t} \geqslant 0$ и можно переписать последнее: $\left|\frac{\Delta r}{\Delta t}\right| \leqslant \frac{\Delta s}{\Delta t} \leqslant |\vec{r}'(\xi)|$. Переходя к пределам при $\Delta t \to 0$ получаем, что существует предел $s'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ и он равен $|\vec{r}'(t)|$. □

Показанная Теорема позволяет для гладкой кривой γ класса C^k, заданной векторной функцией $\vec{r}(t)$ на I, определить замену параметра, при которой каждая точка кривой γ будет соответствовать длине дуги между этой точкой и некоторой заранее фиксированной точкой на γ.

Возьмем $t_0 \in I$. Тогда для любого $t \in I$, $t \geqslant t_0$ функция $s = s(t)$ является строго возрастающей функцией и имеет непрерывные производные до порядка k включительно. Так как $s(t)$ строго монотонна, то существует обратная функция $t = t(s)$ для которой верно $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}}$, а значит $t'(t) \neq 0$.

Описаная параметризация называется **естественной параметризацией** гладкой кривой γ.

Теор 9. *Если кривая γ задана в естественной параметризации $\vec{r}(s)$ на $[0, S]$, то* $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$.

Это значит, что для гладкой кривой с естественной параметризацией единичным вектором касательной будет как раз $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$.

4. Кривизна и кручение гладкой кривой.

Пусть гладкая кривая γ класса C^2 задана $\vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ в естественной параметризации.

Возьмем точку $M = \vec{r}(s_0)$ на γ.

Опр. *Вектор $\vec{N} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}$ в s_0 называется* ***вектором кривизны*** *кривой γ в точке M, а его длина $k = |\vec{N}|$ —* ***кривизной*** *кривой γ в точке M.*

Учитывая параметризацию (Теорема 9), вектор кривизны есть $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$.

Опр. *Если кривизна k в точке M не равна нулю, то $\frac{1}{k}$ называется* ***радиусом кривизны*** *в точке M.*

Теор 10. *Непрерывная кривая содержится в прямой тогда и только тогда, когда в каждой ее точке кривизна равна нулю.*

Прим 2. *Радиус кривизны окружности равен ее радиусу.*

Док-во. Например, поместим центр окружности радиуса R в начало координат и зададим ее $\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$ на полуинтервале $[0, 2\pi)$.

По Теореме 8 длина части кривой $\vec{r}(t)$ при $t \in [0, \alpha]$ будет равна $s(\alpha) = \int\limits_0^\alpha \sqrt{(-R\sin\alpha)^2 + (R\cos\alpha)^2}\,dt = \int\limits_0^\alpha R\,dt = R\alpha$. Равенство $s(t) = Rt$ задает преобразование параметра при переходе к естественной параметризации. Тогда $t = \frac{s}{R}$ и после подстановки $\vec{r}(s) = (R\cos\frac{s}{R}, R\sin\frac{s}{R}, 0)$. Теперь вычисляем кривизну $k = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = \frac{1}{R}$ и радиус кривизны $\frac{1}{k} = R$. □

Опр. *Всякая прямая, проходящая через точку кривой и перпендикулярная касательной к кривой в данной точке, называется* ***нормалью*** *к кривой в точке.*

Следуя Лемме 1 вектор главной нормали $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ и единичный вектор касательной $\vec{\tau}$ ортогональны, то есть главная нормаль перпендикулярна касательной в данной точке.

Опр. *Если кривизна в точке M не равна нулю, то прямая, проходящая через M параллельно $\vec{N} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}$, называется* ***главной нормалью*** *кривой в точке M.*

Единичный вектор главной нормали к кривой в некоторой точке обозначается $\overrightarrow{\nu}$, то есть $\overrightarrow{\nu} = \frac{\overrightarrow{N}}{|\overrightarrow{N}|} = \frac{\overrightarrow{N}}{k}$.

Иначе можно записать

$$\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = k\overrightarrow{\nu}. \tag{1}$$

Опр. *Если кривизна в точке M не равна нулю, то прямая, проходящая через M параллельно $\overrightarrow{\beta} = [\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{\nu}]$, называется **бинормалью** к кривой в точке M.*

Вектор $\overrightarrow{\beta} = [\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{\nu}]$ называется **единичным вектором бинормали**.

Опр. *Плоскость называется*

1. ***соприкасающейся плоскостью**;*
2. ***нормальной плоскостью**.*
3. ***спрямляющей плоскостью**.*

в этой точке, если она содержит

1. *касательную и главную нормаль*
2. *главную нормаль и бинормаль*
3. *касательную и бинормаль*

к кривой в данной точке соответственно.

? Соприкасающаяся плоскость к кривой в данной точке занимает предельное положение плоскости, проходящей через три неограниченно сближающиеся точки этой кривой, неограниченно приближающиеся к данной точке.
Кривая в окрестности данной точки лежит “почти” в соприкасающейся плоскости.

Теор 11. *Расстояние от произвольной точки $\overrightarrow{r}(s_0 + \Delta s)$ гладкой кривой $\overrightarrow{r}(s)$ класса C^2 до соприкасающейся плоскости есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δs^2 при $\Delta s \to 0$.*

Док-во. По формуле Тейлора $\overrightarrow{r}(s_0+\Delta s) = \overrightarrow{r}(s_0)+\frac{d\overrightarrow{r}}{ds}(s_0)\Delta s+\frac{1}{2}\frac{d^2\overrightarrow{r}}{ds^2}(s_0)\Delta s^2+\overrightarrow{o}(\Delta s^2)$ при $\Delta s \to 0$. Но $\frac{d\overrightarrow{r}}{ds} = \overrightarrow{\tau}$ и $\frac{d^2\overrightarrow{r}}{ds^2} = k\overrightarrow{\nu}$, то есть $\overrightarrow{r}(s_0 + \Delta s) - (\overrightarrow{r}(s_0) + \Delta s\overrightarrow{\tau}(s_0)+\frac{1}{2}k\Delta s^2\overrightarrow{\nu}(s_0)) = \overrightarrow{o}(\Delta s^2)$. Так как точка $\overrightarrow{r}(s_0)+\Delta s\overrightarrow{\tau}(s_0)+\frac{1}{2}k\Delta s^2\overrightarrow{\nu}(s_0)$ лежит в соприкасающейся плоскости, то расстояние от точки $\overrightarrow{r}(s_0 + \Delta s)$ до самой плоскости не больше этой разности. □

Касательная, главная нормаль и бинормаль в каждой точке гладкой кривой образуют **сопровождающий трехгранник** кривой.

Тройка попарно взаимно перпендикулярных векторов $\overrightarrow{\tau}$, $\overrightarrow{\nu}$, $\overrightarrow{\beta}$ в каждой точке M кривой образуют ортонормированный базис V. Таким образом, M и $(\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{\nu}, \overrightarrow{\beta})$ задают декартову систему координат.

Найдем в базисе $\overrightarrow{\tau}$, $\overrightarrow{\nu}$, $\overrightarrow{\beta}$ производные каждого из векторов.

Вектор $\frac{d\overrightarrow{\nu}}{ds}$ ортогонален $\overrightarrow{\nu}$ по Лемме 1, а значит $\frac{d\overrightarrow{\nu}}{ds} = \alpha\overrightarrow{\tau} + \varkappa\overrightarrow{\beta}$. Дифференцируя $\overrightarrow{\tau}\overrightarrow{\nu} = 0$ и учитывая (1), получаем $0 = \frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}\overrightarrow{\nu} + \overrightarrow{\tau}\frac{d\overrightarrow{\nu}}{ds} = k\overrightarrow{\nu}\overrightarrow{\nu} + \overrightarrow{\tau}\left(\alpha\overrightarrow{\tau} + \varkappa\overrightarrow{\beta}\right) = k + \alpha$ и $\alpha = -k$:

$$\frac{d\overrightarrow{\nu}}{ds} = -k\overrightarrow{\tau} + \varkappa\overrightarrow{\beta} \tag{2}$$

Дифференцируя $\overrightarrow{\beta} = [\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{\nu}]$, получаем $\frac{d\overrightarrow{\beta}}{ds} = [\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}, \overrightarrow{\nu}] + [\overrightarrow{\tau}, \frac{d\overrightarrow{\nu}}{ds}] = -\varkappa\overrightarrow{\nu}$:

$$\frac{d\overrightarrow{\beta}}{ds} = -\varkappa\overrightarrow{\nu} \tag{3}$$

Формулы (1), (2) и (3) называются **формулами Френе**:

$$\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = k\overrightarrow{\nu}, \qquad \frac{d\overrightarrow{\nu}}{ds} = -k\overrightarrow{\tau} + \varkappa\overrightarrow{\beta}, \qquad \frac{d\overrightarrow{\beta}}{ds} = -\varkappa\overrightarrow{\nu}. \tag{4}$$

Опр. *Кривая называется* ***плоской****, если все ее точки принадлежат некоторой плоскости.*

Теор 12. *Гладкая кривая является плоской тогда и только тогда, когда во всех ее точках кручение равно нулю.*

Док-во. Пусть гладкая кривая задана функцией $\overrightarrow{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ с естественным параметром s в системе координат $O\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{j}\,\overrightarrow{k}$. Выбрав систему координат так, что $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ параллельны плоскости, в которой лежит кривая, получим $\overrightarrow{r}(s) = (x(s), y(s), 0)$. В этом случае векторы $\overrightarrow{\tau} = \frac{d\overrightarrow{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\overrightarrow{i} + \frac{dy}{ds}\overrightarrow{j}$ и

$\vec{\nu} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d^2x}{ds^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\vec{j}$ будут параллельны плоскости кривой (совпадет с соприкасающейся плоскостью). Значит единичный $\vec{\beta}$ перпендикулярен плоскости кривой и поэтому постоянен. По формуле Френе (3) $\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\varkappa\vec{\nu} = \vec{0}$, получаем $\varkappa = 0$.

Пусть кручение $\varkappa$ равно нулю в каждой точке. По формулам Френе (3) $\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \vec{0}$, то есть $\vec{\beta}$ постоянный вектор (b_1, b_2, b_3) во всех точках. Тогда $(\vec{\beta}\cdot\vec{r})' = \frac{d\vec{\beta}}{ds}\vec{r} + \vec{\beta}\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{0}\cdot\vec{r} + \vec{\beta}\cdot\vec{\tau} = 0$, а значит $\vec{\beta}\cdot\vec{r} = c$ также постоянная. Отсюда следует, что для любой точки кривой есть $x(s)b_1 + y(s)b_2 + z(s)b_3 = c$, или что любая точка удовлетворяет уравнению $xb_1 + yb_2 + zb_3 = c$, задающему некоторую плоскость. □

5. Вычисление кривизны и кручения.

Пусть гладкая кривая γ класса C^3 задана параметрически функцией $\vec{v}(t)$ в произвольной параметризации. Кривую γ можно также задать функцией $\vec{r}(s)$ в естественной параметризации (с длиной дуги в качестве параметра), при этом будет существовать соответствующее преобразование параметра $s = s(t)$ гладкой кривой: $\vec{r}(s) = \vec{r}(s(t)) = \vec{v}(t)$.

Найдем производные $\vec{r}(t)$ по параметру t. Применяя правило дифференцирования сложных функций и Теорему 9 имеем

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{\tau}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \tag{5}$$

и еще разок

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} = k\vec{\nu}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2 + \vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2}. \tag{6}$$

Теперь векторно перемножим их

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right] = k\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3 [\vec{\tau}, \vec{\nu}] = k\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3 \vec{\beta}. \tag{7}$$

Отметим здесь, что вектор $\vec{\beta}$ единичный, кривизна $k \geqslant 0$, и запишем формулы для кривизны и векторов $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$.

В следующих формулах для краткости штрихом будем обозначать производную по t. Вычисляя длину в (7) вычислим кривизну:

$$k = \frac{|[\vec{r}', \vec{r}'']|}{|\vec{r}'|^3}$$

Учитывая (5) и (7) находим базис:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}, \quad \vec{\beta} = \frac{[\vec{r}', \vec{r}'']}{|[\vec{r}', \vec{r}'']|}, \quad \vec{\nu} = [\vec{\beta}, \vec{\tau}].$$

Найдем еще одну производную $\vec{r}(t)$ по параметру t. Дифференцируем $\vec{r}''$ из (6):

$$\begin{aligned}
\frac{d^3\vec{r}}{dt^3} &= [\text{...что-то от } \vec{\tau} \text{ и } \vec{\nu} \text{ ...}] + k\frac{d\vec{\nu}}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 = \\
\text{по формуле Френе (2)} \quad &= [\text{...что-то от } \vec{\tau} \text{ и } \vec{\nu} \text{ ...}] + k\varkappa\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3\vec{\beta} = \\
\text{по (7)} \quad &= [\text{...что-то от } \vec{\tau} \text{ и } \vec{\nu} \text{ ...}] + \varkappa[\vec{r}', \vec{r}''].
\end{aligned}$$

Домножим на вектор $[\vec{r}', \vec{r}'']$, который ортогонален $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}$ по (7), и получим возможность вычислить кручение:

$$\varkappa = \frac{\vec{r}'\vec{r}''\vec{r}'''}{[\vec{r}', \vec{r}'']^2}.$$