1. МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Операции над матрицами

Определение: Таблица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется **матрицей** размера m×n. В этой матрице m строк, n столбцов. Элементы матрицы a_{ij} $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ – действительные числа.

Матрицу обозначают $A = (a_{ij})_{m,n}$.

Матрица вида $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ называется **нулевой**.

Определение: Две матрицы одинакового размера называются **одноименными**.

Определение: Две матрицы **равны**, если они одноименные и их соответствующие элементы совпадают.

Определение: **Суммой** одноименных матриц A и B называется матрица A+B, одноименная с матрицами A и B, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых матриц. Соответствующая операция называется **сложением**.

Если $A = (a_{ij})_{m,n}$ и $B = (b_{ij})_{m,n}$, то C = A+B тогда и только тогда, когда $C = (c_{ij})_{m,n}$ и $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех i, j $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$.

Определение: Матрица B, одноименная с матрицей A, называется **противоположной** к матрице A, если A+B = 0, т.е. B = –A.

Если $A = (a_{ij})_{m,n}$, то $B = (-a_{ij})_{m,n}$.

Определение: Матрица A^T называется **транспонированной** к матрице A, если она получается из матрицы A заменой строк на столбцы и наоборот.

Если $A = (a_{ij})_{m,n}$, то $A^T = (a_{ji})_{n,m}$.

Примеры:

$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ одноименные матрицы.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} -2+3 & 0-4 \\ 1-2 & -1+3 \\ 5+0 & -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Свойства сложения:

Для любых матриц A, B, C, A′, B′

1) Если A = A′ и B = B′, то A+B = A′+B′
2) A+B = B+A (коммутативность)
3) A+(B+C) = (A+B)+C (ассоциативность)
4) 0+A = A
5) –(A+B) = –A+(–B)
6) $(A+B)^T = A^T + B^T$

Определение: Произведением числа λ на матрицу A называется матрица λA, одноименная с матрицей A, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число λ. Соответствующая операция называется **умножением матрицы на число**.

Если $A = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$, то $\lambda A = \left(\lambda a_{ij}\right)_{m,n}$.

Свойства умножения матрицы на число:

Для любых матриц A, B, A′ и действительных чисел λ, μ

1) Если A = A′ и λ = λ′, то λA = λA′
2) (λμ)A = λ(μA)
3) (λ+μ)A = λA+μA
4) λ(A+B) = λA+λB
5) 1·A = A
6) $(\lambda A)^T = \lambda \cdot A^T$
7) λ·(–A) = (–λ)·A = –(λA)

Определение: Матрица A называется **согласованной** с матрицей B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B (число элементов в строке матрицы A равно числу элементов в столбце матрицы B).

Если $A = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$, то $B = \left(b_{ij}\right)_{n,k}$.

Определение: Произведением согласованных матриц A и B называется матрица A·B, удовлетворяющая условиям: если $A = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$ и $B = \left(b_{ij}\right)_{n,k}$, то

$C = A \cdot B$ тогда и только тогда, когда $C = (c_{ij})_{m,k}$ и $c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} \cdot b_{tj}$ для всех i, j ($1 \le i \le m$, $1 \le j \le k$).

Соответствующая операция называется **умножением** матриц.

Примеры:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$ согласованные матрицы.

Матрица $C = A \cdot B$ имеет размер 3×2.

$c_{11} = -2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 4 = 3,$

$c_{12} = -2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-3) - 1 \cdot (-5) = 2,$

$c_{21} = 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 9,$

$c_{22} = 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) - 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-5) = -6,$

$c_{31} = -1 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 4 = 31,$

$c_{32} = -1 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-3) + 5 \cdot (-5) = -26.$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 9 & -6 \\ 31 & -26 \end{pmatrix}$$

Свойства умножения:

Для любых матриц A, B, C, A′, B′

1) Если A = A′ и B = B′, то A·B = A′·B′

2) A·(B·C) = (A·B)·C (ассоциативность)

3) (A+B)·C = A·C+B·C; C·(A+B) = C·A+C·B (дистрибутивность умножения относительно сложения)

4) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Замечание: В общем случае умножение матриц не коммутативно, т.е. существуют матрицы A и B, для которых $A \cdot B \ne B \cdot A$.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Определение: Две матрицы А и В называются **перестановочными**, если А·В = В·А.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = B \cdot A$$

1.2. Квадратные матрицы

Определение: Матрица называется **квадратной**, если число строк равно числу столбцов.

Для квадратной матрицы вводят понятия главной и побочной диагоналей. **Главная диагональ** матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{n,n}$ содержит элементы a_{ii} (т.е. элементы, у которых номер строки совпадает с номером столбца). **Побочная диагональ** матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{n,n}$ содержит элементы a_{ij}, для которых i+j = n.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Главная диагональ

Побочная диагональ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Определение: Квадратная матрица называется **треугольной**, если все элементы, лежащие под (над) главной диагональю, равны нулю.

Определение: Квадратная матрица называется **диагональной**, если все элементы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю.

Определение: Диагональная матрица называется **скалярной**, если все элементы, лежащие на главной диагонали, равны между собой.

Примеры:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ – треугольная матрица.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ – диагональная матрица.

$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ – скалярная матрица.

Определение: Скалярная матрица E, на главной диагонали которой стоят единицы, называется **единичной**.

Свойство: Для любой квадратной матрицы A выполняется A·E = E·A = E.

Определение: Матрица A^{-1} называется **обратной** к квадратной матрице A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

1.3. Определитель квадратной матрицы

Определение: Каждой квадратной матрице A поставим в соответствие число, обозначаемое $\Delta = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, которое называется **определителем** матрицы A и вычисляется по правилам:

1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) -$

$-(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32})$

3) Определитель n-го порядка квадратной матрицы A размера n×n представляет собой сумму всех членов определителя. Член определителя – это произведение элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца со знаком "+", если число инверсных пар четно, и со знаком "–", если число инверсных пар нечетно. Элементы a_{ij} и a_{kp} образуют

инверсную пару, если один из них расположен правее и выше (или левее и ниже) другого (это верно, если $i < k$ и $j > p$, либо $i > k$ и $j < p$).

Примеры:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = 1 \cdot 3 - (-1) \cdot (-2) = 5$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $\det B = (1 \cdot 4 \cdot 5 + (-3) \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot (-2)) -$

$-(2 \cdot 4 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) \cdot 5 + 1 \cdot 0 \cdot (-2)) = (20+0+4) - (24+15+0) = -15$

3) Для вычисления определителя матрицы n-го порядка нужно найти n! (n-факториал) членов определителя. Позже рассмотрим более удобные способы вычисления определителей большого порядка с применением свойств определителей.

В данном примере научимся находить количество инверсных пар и определять знак члена определителя. Рассмотрим произведение элементов матрицы C, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца $a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{34} \cdot a_{41}$. Перечислим инверсные пары: $a_{13} \cdot a_{22}$; $a_{13} \cdot a_{41}$; $a_{22} \cdot a_{41}$; $a_{34} \cdot a_{41}$. Всего четыре инверсные пары (четное число), поэтому указанное произведение в определитель входит со знаком "+".

Свойства определителя:

1) При транспонировании матрицы определитель не меняется.

2) При перестановке двух строк (столбцов) матрицы определитель меняет знак.

3) Определитель матрицы, у которой две строки (столбца) равны (пропорциональны), равен нулю.

4) Если в матрице все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю, ее определитель равен нулю.

5) Если каждый элемент некоторой строки (столбца) умножить на число λ, то определитель умножится на λ (общий множитель строки или столбца можно вынести за знак определителя).

6) Если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на число λ, то определитель не изменится (это линейное преобразование определителя).

7) Если все элементы матрицы, стоящие над (под) главной диагональю, равны нулю (матрица треугольная), ее определитель равен произведению элементов главной диагонали.

Примеры:

1) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Умножим первую строку на (-1) и прибавим ко второй строке (результат запишем во вторую строку): $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Переставим вторую и третью строки (знак определителя поменяется): $\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Умножим третью строку на (-1) и прибавим к четвертой строке: $\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

По свойству 7 определителей $\Delta = -1$.

2) $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 10 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & -4 & -20 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = -44$$

Комментарии:

Сложили первую и вторую строки.

Умножили первую строку на 3 и прибавили к четвертой строке.

Переставили вторую и третью строки (знак определителя изменился).

Умножили вторую строку на (-4) и прибавили к третьей строке.

Умножили вторую строку на (-7) и прибавили к четвертой строке.

Умножили третью строку на (-1) и прибавили к четвертой строке.

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

Определение: Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n–1)-го порядка, полученный из данного вычеркиванием той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij} (т.е. i-й строки и j-го столбца).

Определение: Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется минор этого элемента, взятый со знаком "+", если сумма номеров строки и столбца этого элемента четная, и со знаком "–", если сумма нечетная. Итак, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Пример: Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & -5 \\ 6 & -4 & 7 \end{vmatrix}$. Найдем минор и алгебраическое дополнение элемента a_{23}.

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 8.$$

Дополнительные свойства определителя:

8) Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя, кроме одного, равны нулю, то определитель равен произведению этого отличного от нуля элемента на его алгебраическое дополнение.

9) **Разложение определителя по элементам строки (столбца):** Всякий определитель равен сумме произведений элементов произвольной строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Примеры:

1) Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$. Поскольку все элементы третьей строки определителя, кроме a_{32}, равны нулю, то $\Delta = 7 \cdot A_{32} = 7 \cdot (-1)^{3+2} \cdot M_{23} = 7 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-13) = 91.$

2) Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 4 \\ 10 & -3 & 1 \end{vmatrix}$. Разложим определитель, например, по элементам первой строки.

$$\Delta = (-1) \cdot A_{11} + 3 \cdot A_{12} + (-5) \cdot A_{13} =$$

$$=(-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 4\\ -3 & 1\end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ 10 & 1\end{vmatrix}+(-5)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & -2\\ 10 & -3\end{vmatrix}=$$
$$=(-1)\cdot 10-3\cdot(-38)-5\cdot 14=34.$$

Теорема (о произведении определителей): Если A и B – квадратные матрицы n-го порядка, то det(A·B) = det(A)·det(B).

Теорема (признак обратимости квадратной матрицы): Квадратная матрица A n-го порядка обратима (имеет обратную матрицу A^{-1}) тогда и только тогда, когда det(A) ≠ 0, причем $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$.

Примеры:

1) Найдем матрицу, обратную к матрице $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Найдем определитель матрицы:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ -1 & 7\end{vmatrix}=19.$$

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3,\ A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=5,$$
$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=4,\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=7,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1,$$
$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-7,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2,\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3.$$

Запишем обратную матрицу: $A^{-1}=\frac{1}{19}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4 & -7\\ -3 & 7 & 2\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

2) Найдем решение матричного уравнения $X\cdot A=B$, где $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7 & 4 & 0\\ -7 & 0 & 9\\ -4 & -1 & 4\end{pmatrix}$.

Поскольку $X \cdot A = B$, то $(X \cdot A) \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$, т.е. $X = B \cdot A^{-1}$. В предыдущем примере найдена матрица $A^{-1} = \frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ -3 & 7 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Отсюда

$$X = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 9 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ -3 & 7 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} -19 & 0 & 57 \\ 38 & -19 & 76 \\ 19 & -19 & 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.4. Ранг матрицы

Определение: Определитель, стоящий на пересечении k строк и k столбцов данной матрицы, называется **определителем k-го порядка матрицы**.

Пример: Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Например, $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ – определитель второго порядка матрицы А.

Определение: Рангом матрицы называется наибольший из порядков определителей матрицы, отличных от нуля. Ранг нулевой матрицы по определению равен нулю.

Обозначим r(A) – ранг матрицы А.

Пример: Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$. Очевидно, что все определители второго порядка равны нулю (у них строки пропорциональны). Есть определители первого порядка (это сами элементы матрицы), отличные от нуля, следовательно, ранг матрицы А равен 1.

Свойства ранга матрицы:

1) Ранг матрицы размера $m \times n$ не превосходит min(m,n) (минимума из m и n).

2) Если к матрице добавить нулевую строку (столбец), то ранг матрицы не изменится.

3) Если матрица А является частью матрицы В, то $r(A) \le r(B)$.

4) Следующие элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга:

- транспонирование;
- транспозиция (перестановка) двух строк (столбцов);
- умножение элементов некоторой строки (столбца) на ненулевое число;
- прибавление к элементам некоторой строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на число λ.

5) Если в матрице каждая строка и каждый столбец содержат не более чем по одному ненулевому элементу, то ранг матрицы равен количеству этих ненулевых элементов. Заметим, что каждую матрицу можно привести к такому виду.

6) Ранг матрицы, приведенной к ступенчатому виду, равен числу ненулевых строк.

Матрица имеет **ступенчатый вид (по строкам)**, если:

- все ненулевые располагаются над всеми нулевыми строками;
- ведущий элемент (первый ненулевой элемент строки при отсчёте слева направо) каждой ненулевой строки располагается строго правее ведущего элемента в строке, расположенной выше данной.

Заметим, что каждую матрицу можно привести к ступенчатому виду.

Примеры:

1) В матрице $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ каждая строка и каждый столбец содержат не более чем по одному ненулевому элементу, следовательно, ранг матрицы равен количеству этих ненулевых элементов, т.е. r(A) = 3.

2) Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Приведем матрицу А к ступенчатому виду. Для этого: умножим первую строку на (–1) и прибавим ко второй строке; умножим первую строку на (–2) и прибавим к третьей строке; первую строку сложим с четвертой строкой. В результате получим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -5 & -9 \\ 0 & -5 & 4 & 10 \end{pmatrix}$, эквивалентную матрице А. Теперь вторую строку умножим на 7, третью – на 2 и сложим (результат запишем в третью строку). Аналогично вторую строку умножим на 5, четвертую – на (–2) и сложим. В результате получим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -25 \\ 0 & 0 & -3 & -25 \end{pmatrix}$. Очевидно, что четвертая строка может быть обнулена с помощью третьей. Итак, ступенчатый вид

матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Очевидно, что число ненулевых строк равно 3, т.е. r(A) = 3.

1.5. Системы линейных уравнений

Определение: Уравнение вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ называется **линейным уравнением**. Здесь $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ – данные действительные числа, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – **переменные** (**неизвестные**). $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – **коэффициенты** уравнения, b – **свободный член**.

Определение: Конечное число линейных уравнений образуют **систему линейных уравнений**:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij}, b_i $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ – действительные числа.

a_{ij} – **коэффициент** i-го уравнения при j-м неизвестном.

b_i – **свободный член** i-го уравнения.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – **неизвестные** системы.

Определение: Коэффициенты при неизвестных системы линейных уравнений составляют прямоугольную таблицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

A – **матрица системы линейных уравнений** размера m×n.

$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ – i-я строка матрицы.

$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ – j-й столбец матрицы.

Определение: Из матрицы A системы линейных уравнений можно получить **расширенную матрицу** B системы добавлением к матрице A столбца свободных членов: $B = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$.

Определение: Если каждое из уравнений системы обращается в тождество (верное числовое равенство) после замены неизвестных x_i $(1 \le i \le n)$ действительными числами p_i, то упорядоченный набор $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ называется **решением системы** линейных уравнений. Говорят, что набор $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ удовлетворяет всем уравнениям системы.

Пример:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8 \end{cases}$$ – система линейных уравнений.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$ – матрица системы линейных уравнений.

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 8 \end{array}\right)$$ – расширенная матрица системы.

Например, упорядоченный набор (1; 0;–3) – решение системы линейных уравнений. Действительно, после подстановки этого набора вместо неизвестных в каждое уравнение системы получим верные числовые равенства: $1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) = -5$, $2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-3) = 5$, $-1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot (-3) = 8$.

Вопрос: как найти решение системы линейных уравнений?

Определение: Система линейных уравнений, не имеющая ни одного решения, называется **несовместной**.

Определение: Система линейных уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**.

Определение: Система линейных уравнений, имеющая единственное решение, называется **совместной определенной**.

Определение: Система линейных уравнений, имеющая больше одного решения, называется **совместной неопределенной**.

Определение: Две системы линейных уравнений называются **эквивалентными (равносильными)**, если они обе либо несовместны, либо совместны и имеют одни и те же решения.

Элементарные преобразования системы линейных уравнений:

Элементарное преобразование I типа: Если в системе поменять местами два уравнения, а остальные оставить на месте.

Элементарное преобразование II типа: Если i-е уравнение системы заменить на уравнение, полученное прибавлением к i-му уравнению j-го уравнения, умноженного на действительное число λ.

Теорема: Две системы линейных уравнений эквивалентны, если одна получена из другой путем применения конечной последовательности элементарных преобразований.

1.6. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений

Метод Гаусса решения системы линейных уравнений состоит в том, что любую систему с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду, а затем найти решение (если оно есть).

Рассмотрим применение метода Гаусса на **примере**:

1) Найдем решения системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8. \end{cases}$

Второе уравнение системы заменим на уравнение, полученное прибавлением к нему первого уравнения, умноженного на (–2). Третье уравнение системы заменим на уравнение, полученное прибавлением к нему первого уравнения. Получим систему, эквивалентную исходной системе: $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 3x_2 - 5x_3 = 15, \\ x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$ Поменяем местами второе и третье уравнения: $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_2 - 5x_3 = 15. \end{cases}$ Третье уравнение системы заменим на уравнение, полученное прибавлением к нему второго уравнения, умноженного на (–3): $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ x_2 - x_3 = 3, \\ -2x_3 = 6. \end{cases}$ Очевидно, что из последнего уравнения можно найти $x_3 = -3$. Подставим найденное значение во второе уравнение, получим $x_2 - (-3) = 3$, откуда $x_2 = 0$. Подставим найденные значения в первое уравнение, получим $x_1 - 0 + 2 \cdot (-3) = -5$, откуда $x_1 = 1$. Итак, упорядоченный набор (1; 0;–3) – решение данной системы линейных уравнений.

2) Найдем решения системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + \quad 2x_3 = -1. \end{cases}$

Второе уравнение системы заменим на уравнение, полученное прибавлением к нему первого уравнения, умноженного на (–2). Третье уравнение системы заменим на уравнение, полученное прибавлением к нему первого уравнения, умноженного на (–1). Получим систему, эквивалентную исходной системе: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ \quad x_2 + x_3 = -1, \\ \quad x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$ Третье уравнение системы заменим на уравнение, полученное прибавлением к нему второго уравнения, умноженного на (–1): $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ \quad x_2 + x_3 = -1, \\ \qquad 0 = -2. \end{cases}$ Очевидно, что вместо третьего уравнения получилось неверное числовое равенство, следовательно, исходная система линейных уравнений не имеет решений, т.е. несовместна.

3) Найдем решения системы линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$

Поменяем местами первое и третье уравнения: $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 6. \end{cases}$ Второе уравнение системы заменим на уравнение, полученное прибавлением к нему первого уравнения, умноженного на 2. Третье уравнение системы заменим на уравнение, полученное прибавлением к нему первого уравнения, умноженного на 3. Получим систему, эквивалентную исходной системе: $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ \quad x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 10, \\ \quad 4x_2 + 9x_3 + 8x_4 - 7x_5 = 9. \end{cases}$ Третье уравнение системы заменим на уравнение, полученное прибавлением к нему второго уравнения, умноженного на (–4): $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ \quad x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 10, \\ \quad -3x_3 - 8x_4 - 11x_5 = -31. \end{cases}$ Очевидно, что однозначно нельзя найти значений неизвестных. Но из последнего уравнения можно, например, выразить x_3 через x_4 и x_5: $x_3 = -\frac{8}{3}x_4 - \frac{11}{3}x_5 + \frac{31}{3}$. Подставим выражение во второе уравнение, и найдем $x_2 = -3 \cdot \left(-\frac{8}{3}x_4 - \frac{11}{3}x_5 + \frac{31}{3}\right) - 4x_4 - x_5 + 10 = 4x_4 + 10x_5 - 21$. Подставим найденные выражения в первое уравнение, получим

$$x_1 = 2\cdot(4x_4 + 10x_5 - 21) + 2\cdot\left(-\frac{8}{3}x_4 - \frac{11}{3}x_5 + \frac{31}{3}\right) + x_4 - x_5 - 1 =$$

$= \frac{11}{3}x_4 + \frac{35}{3}x_5 - \frac{67}{3}$. Итак, $x_1 = \frac{11}{3}x_4 + \frac{35}{3}x_5 - \frac{67}{3}$, $x_2 = 4x_4 + 10x_5 - 21$, $x_3 = -\frac{8}{3}x_4 - \frac{11}{3}x_5 + \frac{31}{3}$, т.е. упорядоченный набор $\left(\frac{11}{3}x_4 + \frac{35}{3}x_5 - \frac{67}{3}; 4x_4 + 10x_5 - 21; -\frac{8}{3}x_4 - \frac{11}{3}x_5 + \frac{31}{3}; x_4; x_5\right)$ – общее решение данной системы линейных уравнений. Здесь переменные x_1, x_2, x_3 выражены через x_4 и x_5. Переменные x_4 и x_5 называют свободными переменными, x_1, x_2, x_3 – главными (связанными).

Если вместо свободных переменных x_4 и x_5 подставить некоторые фиксированные действительные числа, получим **частное решение** системы линейных уравнений.

Пусть, например, $x_4 = 3$, $x_5 = 0$, тогда $x_1 = \frac{11}{3}\cdot 3 + \frac{35}{3}\cdot 0 - \frac{67}{3} = -\frac{34}{3}$, $x_2 = 4\cdot 3 + 10\cdot 0 - 21 = -9$, $x_3 = -\frac{8}{3}\cdot 3 - \frac{11}{3}\cdot 0 + \frac{31}{3} = \frac{7}{3}$. Тогда упорядоченный набор $\left(-\frac{34}{3}; -9; \frac{7}{3}; 3; 0\right)$ – частное решение данной системы линейных уравнений.

Пусть, например, $x_4 = 0$, $x_5 = 2$, тогда $x_1 = \frac{11}{3}\cdot 0 + \frac{35}{3}\cdot 2 - \frac{67}{3} = 1$, $x_2 = 4\cdot 0 + 10\cdot 2 - 21 = -1$, $x_3 = -\frac{8}{3}\cdot 0 - \frac{11}{3}\cdot 2 + \frac{31}{3} = 3$. Тогда упорядоченный набор $(1; -1; 3; 0; 2)$ – еще одно частное решение системы линейных уравнений.

Определение: Общее решение системы линейных уравнений – это решение системы, в котором все **главные** (**связанные**) переменные заменяются их выражениями через **свободные** переменные.

Определение: Если вместо свободных переменных подставить некоторые фиксированные действительные числа, получим **частное решение** системы линейных уравнений. Заметим, что частных решений бесконечно много.

Пример: Иногда удобнее находить решение системы линейных уравнений, не приводя ее к ступенчатому виду. Найдем решение системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ x_3 + x_4 = 1, \\ x_5 = 2, \\ x_4 = 3. \end{cases}$$

Очевидно, что можно подставить значение $x_4 = 3$ во второе уравнение и найти $x_3 = -2$. Из первого уравнения выразим, например, переменную x_1 через x_2, т.е. $x_1 = x_2 + 3$. Получим общее решение данной системы линейных уравнений $(x_2 + 3; x_2; -2; 3; 2)$. Здесь x_2 – свободная переменная, x_1, x_3, x_4, x_5 – связанные переменные.

1.7. Применение теоремы Кронекера-Капелли для исследования системы линейных уравнений

Теорема Кронекера-Капелли (необходимое и достаточное условие совместности системы линейных уравнений):

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица системы, $B = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ – расширенная матрица системы.

Система линейных уравнений (1) разрешима (совместна) тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы системы. Если система совместна, то она имеет единственное решение, если ранги матриц A и B равны числу неизвестных системы, и совместная система имеет бесконечно много решений, если ранги матриц A и B меньше числа неизвестных системы.

В соответствии с теоремой запишем **алгоритм исследования системы линейных уравнений**:

Пусть n – число неизвестных системы, r(A), r(B) – соответственно ранги матрицы и расширенной матрицы системы.

1) Если r(A) < r(B), то система несовместна.

2) Если r(A) = r(B) = n, то система совместна и имеет единственное решение.

3) Если r(A) = r(B) < n, то система совместна и имеет бесконечно много решений.

Примеры:

Применим алгоритм для исследования ранее решенных систем.

1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8. \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ – матрица системы линейных уравнений.

$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 8 \end{array}\right)$ – расширенная матрица системы.

Найдем ранги матриц A и B приведением к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -5 & 15 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

Очевидно, что r(A) = r(B) = 3, число неизвестных также равно 3, т.е. система совместна и имеет единственное решение.

2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + \quad 2x_3 = -1. \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица системы линейных уравнений.

$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$ – расширенная матрица системы.

Найдем ранги матриц A и B приведением к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Очевидно, что r(A) = 2, r(B) = 3, т.е. r(A) < r(B), следовательно, система несовместна.

3) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ – матрица системы линейных уравнений.

$$B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 3 & 5 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$ – расширенная матрица системы.

Найдем ранги матриц A и B приведением к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 3 & 5 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 10 \\ 0 & 4 & 9 & 8 & -7 & 9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & -8 & -11 & -31 \end{array}\right) \sim$$

Очевидно, что r(A) = r(B) = 3, но число неизвестных равно 4, т.е. система совместна и имеет бесконечно много решений.

1.8. Метод Крамера решения системы линейных уравнений

Метод Крамера применяется для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными, т.е. если матрица системы квадратная.

Теорема Крамера: Рассмотрим систему линейных уравнений

$$(2) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ – определитель системы (2).

Обозначим Δ_k – k-й дополнительный определитель, полученный заменой k-го столбца определителя Δ элементами $b_1,\ldots,b_n$.

Если определитель Δ системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то имеет единственное решение $\left(\dfrac{\Delta_1}{\Delta};\dfrac{\Delta_2}{\Delta};\ldots;\dfrac{\Delta_n}{\Delta}\right)$.

Примеры:

$$1) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8. \end{cases}$$

Найдем определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

Определитель $\Delta \neq 0$, следовательно, система линейных уравнений имеет единственное решение $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}; \frac{\Delta_2}{\Delta}; \ldots; \frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$.

Найдем дополнительные определители системы:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & 8 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 15 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & -5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 15 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6.$$

Найдем решение системы линейных уравнений: $\left(\frac{2}{2}; \frac{0}{2}; \ldots; \frac{-6}{2}\right)$.

(1; 0; –3) – единственное решение системы.

2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + \quad 2x_3 = -1. \end{cases}$

Найдем определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель $\Delta = 0$, следовательно, система линейных уравнений либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.

1.9. Системы однородных линейных уравнений

Определение: Линейное уравнение называется **однородным**, если свободный коэффициент этого уравнения равен 0.

Система однородных линейных уравнений имеет вид:

(3) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$

Система однородных линейных уравнений всегда разрешима (совместна), так как, например, (0; 0; ...; 0) – решение системы (проверьте подстановкой в уравнения системы).

Определение: Решение системы линейных уравнений называется **ненулевым**, если хотя бы один из элементов решения отличен от нуля.

Теорема (признаки существования ненулевых решений система однородных линейных уравнений):

1) Система однородных линейных уравнений имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы меньше числа неизвестных. (Следствие теоремы Кронекера-Капелли.)

2) Система n однородных линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю. (Следствие теоремы Крамера.)

Примеры:

1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

Найдем определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

Определитель $\Delta \neq 0$, следовательно, система линейных однородных уравнений имеет единственное нулевое решение (0; 0; 0). Ненулевых решений система не имеет.

2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + \quad 2x_3 = 0. \end{cases}$

Найдем ранг матрицы системы.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что $r(A) = 2$ и ранг матрицы системы меньше числа неизвестных, следовательно, система линейных однородных уравнений имеет ненулевые решения (бесконечно много).

Найдем общее решение системы.

Исходная система эквивалентна системе $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \qquad x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ Отсюда $x_2 = -x_3$, $x_1 = x_2 - x_3 = = -2x_3$, т.е. $(-2x_3; -x_3; x_3)$ – общее решение системы.

Заметим, что при $x_3 = 0$ получим частное нулевое решение (0; 0; 0).

Найдем какое-нибудь частное ненулевое решение системы. Например, при $x_3 = 1$ получим решение (–2; –1; 1).

2. ОСНОВНЫЕ АЛГЕБРЫ. ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ.

2.1. Группы, кольца, поля

Определение: Пусть G – непустое множество. Если каждой упорядоченной паре (a, b) элементов из множества G однозначно ставится в соответствие некоторый элемент $c\in G$, то говорят, что на множестве G **задана бинарная операция *** ("операция * выполнима на G"; "множество G замкнуто относительно операции *") и записывают $\langle G, *\rangle$.

Для элементов a, b, c пишут a*b = c.

Итак, на множестве G задана бинарная операция *, если для любых элементов a, b множества G выполняется $a*b\in G$, т.е. $\forall a,b\in G\ \ a*b\in G$.

Определение: Бинарная операция *, заданная на множестве G, называется **ассоциативной**, если $\forall a,b,c\in G\ \ a*(b*c)=(a*b)*c$.

Определение: Бинарная операция *, заданная на множестве G, называется **коммутативной**, если $\forall a,b\in G\ \ a*b=b*a$.

Определение: Если существует элемент $e\in G$, такой, что для любого элемента $a\in G$ выполняется $a*e = e*a = a$, то элемент e называется **нейтральным элементом** относительно операции *. Итак, для нейтрального элемента выполняется условие: $\exists e\in G\ \ \forall a\in G\ \ a*e=e*a=a$.

Определение: Если $a*a'=a'*a=e$, то элемент $a'\in G$ называется **нейтрализатором** элемента $a\in G$ относительно операции *.

Определение: Если $\forall a\in G\ \ \exists a'\in G\ \ a*a'=a'*a=e$, то говорят, что во множестве G каждый элемент имеет нейтрализатор.

Определение: Пусть на множестве G заданы две бинарные операции * и •. Говорят, что операция • дистрибутивна относительно операции *, если $\forall a,b,c\in G\quad a\bullet(b*c)=(a\bullet b)*(a\bullet c)$ и $(b*c)\bullet a=(b\bullet a)*(c\bullet a)$.

Примеры:

1) Рассмотрим вычитание на множестве натуральных чисел N.

Не для всех натуральных чисел результат сложения является натуральным числом. Например, $2\in N$, $5\in N$, но $2-5\notin N$. Следовательно, вычитание не является бинарной операцией на N.

2) Рассмотрим вычитание на множестве целых чисел Z.

а) $\forall a,b\in Z\ \ a-b\in Z$, т.е. вычитание выполнимо на Z (является бинарной операцией на Z).

б) Чтобы проверить ассоциативность вычитания, нужно доказать утверждение $\forall a,b,c\in Z\ \ a-(b-c)=(a-b)-c$. Но, например, $3-(5-4)\neq(3-5)-4$, поэтому вычитание не ассоциативно на Z.

в) Так как, например, $4-6\neq 6-4$, вычитание не коммутативно на Z.

г) Относительно вычитания нельзя найти нейтрального элемента $e\in Z$, для которого должно выполняться условие $a-e=e-a=a$ для **любого** элемента из Z. Но это условие выполняется только, если $e = 0$ и $a = 0$. Итак, в Z не существует нейтрального элемента относительно вычитания.

3) Рассмотрим сложение на множестве целых чисел Z.

а) $\forall a, b \in Z \quad a + b \in Z$, т.е. сложение выполнимо на Z.

б) $\forall a, b, c \in Z \;\; a + (b + c) = (a + b) + c$, т.е. сложение ассоциативно на Z.

в) $\forall a, b \in Z \;\; a + b = b + a$, т.е. сложение коммутативно на Z.

г) $\exists 0 \in Z \;\; \forall a \in Z \;\; a + 0 = 0 + a = a$, т.е. 0 – нейтральный элемент относительно сложения в Z. Нейтральный элемент относительно сложения называют **нулем**.

д) $\forall a \in Z \;\; \exists - a \in G \;\; a + (-a) = -a + a = 0$, т.е. во множестве Z каждый элемент имеет нейтрализатор (**противоположный** элемент).

4) Рассмотрим умножение на множестве рациональных чисел Q.

а) $\forall a, b \in Q \quad a \cdot b \in Q$, т.е. умножение выполнимо на Q.

б) $\forall a, b, c \in Q \;\; a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, т.е. умножение ассоциативно на Q.

в) $\forall a, b \in Q \;\; a \cdot b = b \cdot a$, т.е. умножение коммутативно на Q.

г) $\exists 1 \in Q \;\; \forall a \in Q \;\; a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, т.е. 1 – нейтральный элемент относительно умножения в Q. Нейтральный элемент относительно умножения называют **единицей**.

д) Покажем, что не каждый элемент из Q имеет нейтрализатор относительно умножения. Например, для $a = 0$ не может выполняться условие $a \cdot a' = a' \cdot a = 1$ ни при каком $a' \in Q$. Итак, во множестве Q не каждый элемент имеет нейтрализатор. Заметим, что нейтрализатор к элементу a относительно умножения называется **обратным** и обозначается a^{-1}.

5) Умножение дистрибутивно относительно сложения на числовых множествах. В частности, $\forall a, b, c \in Z \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ и $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$.

Определение: Пусть G – непустое множество. Если на множестве G определена ассоциативная операция *, то G образует **полугруппу** относительно операции *.

Итак, $\langle G, * \rangle$ – **полугруппа**, если:

1) $\forall a,b \in G \quad a*b \in G$

2) $\forall a,b,c \in G \quad a*(b*c) = (a*b)*c$

Определение: $\langle G, * \rangle$ – **группа**, если (далее следуют **аксиомы** группы):

1) $\forall a,b \in G \quad a*b \in G$

2) $\forall a,b,c \in G \quad a*(b*c) = (a*b)*c$

3) $\exists e \in G \;\; \forall a \in G \quad a*e = e*a = a$

4) $\forall a \in G \;\; \exists a' \in G \quad a*a' = a'*a = e$

Определение: Группа $\langle G, * \rangle$ называется **абелевой**, если * – коммутативная операция.

Примеры:

1) $\langle Z, +\rangle$ – абелева группа. Все аксиомы группы и коммутативность сложения проверены выше.

2) $\langle Z, -\rangle$ – не является ни группой, ни полугруппой, так как вычитание не ассоциативно.

3) $\langle Q, \cdot\rangle$ – является полугруппой (умножение ассоциативно), но не является ни группой, так как во множестве Q не каждый элемент имеет обратный (не каждый элемент обратим).

Определение: $\langle K, +, \cdot \rangle$ – **кольцо**, если:

1) $\langle K, + \rangle$ – абелева группа;

2) $\langle K, \cdot \rangle$ – полугруппа;

3) умножение дистрибутивно относительно сложения.

Замечание: Чтобы выяснить, является ли некоторое множество K кольцом относительно сложения и умножения, нужно проверить условия (аксиомы кольца):

1) $\forall a, b \in K \quad a + b \in K$ (выполнимость сложения);

2) $\forall a, b, c \in K \quad a + (b + c) = (a + b) + c$ (ассоциативность сложения);

3) $\exists 0 \in K \;\; \forall a \in K \;\; a + 0 = 0 + a = a$ (существование нуля);

4) $\forall a \in K \;\; \exists -a \in K \;\; a + (-a) = -a + a = 0$ (существование противоположного элемента у каждого элемента множества K);

5) $\forall a, b \in K \;\; a + b = b + a$ (коммутативность сложения);

6) $\forall a, b \in K \quad a \cdot b \in K$ (выполнимость умножения);

7) $\forall a, b, c \in K \;\; a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (ассоциативность умножения);

8) $\forall a, b, c \in K \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ и $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

Упражнение: Проверьте самостоятельно, что $\langle Z, +, \cdot \rangle$, $\langle Q, +, \cdot \rangle$, $\langle R, +, \cdot \rangle$ – кольца.

Пример: Рассмотрим множество $M_2(R)$ всех квадратных матриц размера 2×2 с действительными элементами. На этом множестве зададим операции сложения и умножения, как обычные матричные операции. Проверим все аксиомы кольца.

1) $\forall A, B \in M_2(R) \quad A + B \in M_2(R)$ (матрицы A и B одноименные);

2) $\forall A, B, C \in M_2(R) \quad A + (B + C) = (A + B) + C$;

3) $\exists 0 \in M_2(R) \;\; \forall A \in M_2(R) \quad A + 0 = 0 + A = A$ (0 – нулевая матрица);

4) $\forall A \in M_2(R) \;\; \exists -A \in M_2(R) \quad A + (-A) = -A + A = 0$.

5) $\forall A, B \in M_2(R) \quad A + B = B + A$;

Следовательно, $\langle M_2(R), + \rangle$ – абелева группа.

6) $\forall A, B \in M_2(R) \quad A \cdot B \in M_2(R)$ (матрицы A и B согласованные);

7) $\forall A, B, C \in M_2(R) \quad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;

Следовательно, $\langle M_2(R), \cdot \rangle$ – полугруппа.

8) $\forall A, B, C \in M_2(R)$ $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ и $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$.

Следовательно, $\langle M_2(R), +, \cdot \rangle$ – кольцо.

Определение: a, b – **делители нуля** если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, но $a \cdot b = 0$.

Пример: Покажем, что в кольце $\langle M_2(R), +, \cdot \rangle$ есть делители нуля.

Нулем во множестве $M_2(R)$ является матрица $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Рассмотрим $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Итак, A, B – делители нуля во множестве $M_2(R)$.

Определение: Коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля называется **областью целостности**.

Замечание: $\langle K, +, \cdot \rangle$ – область целостности, если:

1) $\langle K, +, \cdot \rangle$ – кольцо;

2) $\forall a, b \in K$ $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения);

3) $\exists 1 \in K$ $\forall a \in K$ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (существование единицы);

4) $\forall a, b \in K$ $(a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0)$ (нет делителей нуля).

Примеры:

1) Очевидно, что $\langle Z, +, \cdot \rangle$, $\langle Q, +, \cdot \rangle$, $\langle R, +, \cdot \rangle$ – области целостности.

2) Поскольку в кольце $\langle M_2(R), +, \cdot \rangle$ есть делители нуля, то $\langle M_2(R), +, \cdot \rangle$ не является областью целостности.

Определение: Коммутативное кольцо с единицей, в котором каждый ненулевой элемент обратим называется **полем**.

Замечание: $\langle P, +, \cdot \rangle$ – поле, если:

1) $\langle P, +, \cdot \rangle$ – кольцо;

2) $\forall a, b \in K$ $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения);

3) $\exists 1 \in K$ $\forall a \in K$ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (существование единицы);

4) $\forall a \in P$ $\left(a \neq 0 \Rightarrow (\exists a^{-1} \in P)(a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1)\right)$ (каждый ненулевой элемент обратим).

Примеры:

1) Очевидно, что $\langle Q, +, \cdot \rangle$, $\langle R, +, \cdot \rangle$ – поля.

2) $\langle Z, +, \cdot \rangle$ – не является полем, поскольку, например, целое число $2 \neq 0$ не имеет обратного элемента во множестве Z.

Теорема: Любое поле является областью целостности.

Замечание: Не всякая область целостности является полем. Например, $\langle Z, +, \cdot \rangle$ – область целостности, но не поле.

2.2. Построение поля комплексных чисел

Уравнение $x^2+1=0$ не имеет решений в поле действительных чисел **R**. Найдем такое поле, в котором это уравнение имеет решение. Обозначим i – корень уравнения $x^2+1=0$, принадлежащий полю, которое строим. Элемент i называется **мнимой единицей**. Очевидно, что $i^2=-1$.

Рассмотрим множество $C=\{a+bi \mid a,b\in R\}$, элементы которого называются **комплексными числами**, записанными в **алгебраической форме**.

Два комплексных числа $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ **равны** тогда и только тогда, когда $a_1=a_2, b_1=b_2$.

$z=a+bi$ – **алгебраическая форма** комплексного числа, где a – **действительная часть**, bi – **мнимая часть**, b – **коэффициент мнимой части** комплексного числа z.

Введем основные операции **сложения** и **умножения** комплексных чисел:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Теорема: $\langle C, +, \cdot \rangle$ – поле нулевой характеристики, в котором разрешимо уравнение $x^2+1=0$.

Доказательство:

1) Покажем: $\langle C, + \rangle$ – абелева группа.

а) $\forall\, a+bi, c+di\in C$

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i\in C$, т.к. $a+c, b+d\in R$

б) ассоциативность: $\forall\, a+bi, c+di, k+mi\in C$

$$(a+bi)+((c+di)+(k+mi))=(a+bi)+((c+k)+(d+m)i)=$$
$$=(a+(c+k))+(b+(d+m))i=((a+c)+k)+((b+d)+m)i=$$
$$=((a+c)+(b+d)i)+(k+mi)=((a+bi)+(c+di))+(k+mi)$$

в) коммутативность: $\forall\, a+bi, c+di\in C$

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i=(c+a)+(d+b)i=(c+di)+(a+bi)$$

г) $(\exists\, 0=0+0\cdot i\in C)(\forall\, a+bi\in C)$

$$(a+bi)+(0+0i)=(a+0)+(b+0)i=a+bi$$

д) $(\forall\, a+bi\in C)(\exists -a+(-b)\cdot i\in C)$

$$(a+bi)+(-a+(-b)i)=(a-a)+(b-b)i=0$$

Итак, $-a+(-b)\cdot i=-(a+bi)$ – элемент, противоположный к $a+bi$.

2) Покажем: $\langle C, \cdot \rangle$ – полугруппа.

а) $\forall\, a+bi,\, c+di \in C$

$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i \in C$, т.к. $ac-bd, ad+bc \in R$

б) ассоциативность: $\forall\, a+bi,\, c+di,\, k+mi \in C$

$$(a+bi)\cdot((c+di)\cdot(k+mi))=(a+bi)\cdot((ck-dm)+(cm+dk)i)=$$
$$=(a\cdot(ck-dm)-b\cdot(cm+dk))+(a\cdot(cm+dk)+b\cdot(ck-dm))i=$$
$$=(ack-adm-bcm-bdk)+(acm+adk+bck-bdm)i=$$
$$=((ac-bd)\cdot k-(ad+bc)\cdot m)+((ac-bd)\cdot m+(ad+bc)\cdot k)i=$$
$$=((ac-bd)+(ad+bc)i)\cdot(k+mi)=((a+bi)\cdot(c+di))\cdot(k+mi)$$

3) Покажем, что умножение дистрибутивно относительно сложения.
$\forall\, a+bi,\, c+di,\, k+mi \in C$

$$(a+bi)\cdot((c+di)+(k+mi))=(a+bi)\cdot((c+k)+(d+m)i)=$$
$$=(a\cdot(c+k)-b\cdot(d+m))+(a\cdot(d+m)+b\cdot(c+k))i=$$
$$=(ac+ak-bd-bm)+(ad+am+bc+bk)i$$
$$=((ac-bd)+(ak-bm))+((ad+bc)+(am+bk))i=$$
$$=(ac-bd)+(ad+bc)i+(ak-bm)+(am+bk)i=$$
$$=(a+bi)\cdot(c+di)+(a+bi)\cdot(k+mi)$$

Итак, $\langle\, C,+,\cdot\, \rangle$ – кольцо.

4) Покажем, что умножение коммутативно:
$\forall\, a+bi,\, c+di \in C$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i=(ca-db)+(cb+da)i=$$
$$=(c+di)\cdot(a+bi)$$

5) Покажем существование единицы:
$(\exists 1=1+0\cdot i \in C)(\forall\, a+bi \in C)$

$$(a+bi)\cdot(1+0i)=(a\cdot 1-b\cdot 0)+(a\cdot 0+b\cdot 1)i=a+bi$$

6) Покажем, что каждый ненулевой элемент обратим:

Пусть $a+bi \in C, a+bi \neq 0$. Обозначим $c+di$ – элемент, обратный к $a+bi$. Тогда $(a+bi)\cdot(c+di)=1$, т.е. $(ac-bd)+(ad+bc)i=1+0\cdot i$. Отсюда $\begin{cases} ac-bd=1, \\ ad+bc=0. \end{cases}$ Решим эту систему.

Сначала умножим первое уравнение на a, второе – на b и сложим полученные уравнения. Аналогично умножим первое уравнение на (–b), второе – на a и сложим. В результате получим: $\begin{cases} a^2c+b^2c=a, \\ b^2d+a^2d=-b. \end{cases}$

Поскольку $a+bi\neq 0$, то $a^2+b^2\neq 0$, поэтому каждое уравнение системы можем разделить на $a^2+b^2\neq 0$. Отсюда $\begin{cases} c=\dfrac{a}{a^2+b^2}, \\ d=-\dfrac{b}{a^2+b^2}. \end{cases}$

Итак, $\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}\cdot i$ – элемент, обратный к $a+bi\neq 0$.

Доказано, что $\langle C,+,\cdot\rangle$ – поле.

7) Покажем, что C – поле нулевой характеристики.

Очевидно, что не существует натурального числа n, такого, что n·1 = 0.

8) Очевидно, что в поле C разрешимо уравнение $x^2+1=0$, поскольку корень этого уравнения i = 0+1·i принадлежит множеству C. Заметим, что –i – второй корень уравнения $x^2+1=0$.

Теорема доказана.

$\langle C,\ +\rangle$ называется **полем комплексных чисел**.

2.3. Норма и модуль комплексного числа

Поскольку $i^2=-1$, то $i^3=-1\cdot i=-i$, $i^4=-i\cdot i=1$. В общем случае
$$i^n=\begin{cases} i, \text{ если } n=4k+1, k\in Z, \\ -1, \text{ если } n=4k+2, k\in Z, \\ -i, \text{ если } n=4k+3, k\in Z, \\ 1, \text{ если } n=4k, k\in Z. \end{cases}$$

Определение: Комплексное число $\overline{z}=a-bi$ называется **сопряженным** к $z=a+bi$.

Определение: **Норма** комплексного числа $z=a+bi$ – это число $N(z)=a^2+b^2$.

Свойства нормы и сопряженных чисел:

1) $N(z)\geq 0$

Доказательство: $a^2+b^2\geq 0$ для всех действительных a и b

2) $N(z)=0\Leftrightarrow z=0$

Доказательство: $a^2+b^2=0\Leftrightarrow a=0 \text{ и } b=0\Leftrightarrow a+bi=0$

3) $N(z_1\cdot z_2)=N(z_1)\cdot N(z_2)$

Доказательство: Пусть $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$.

С одной стороны $N(z_1\cdot z_2)=N((ac-bd)+(ad+bc)i)=$

$=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=a^2c^2-2acbd+b^2d^2+a^2d^2+2adbc+b^2c^2=$

$=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2$

С другой стороны $N(z_1)\cdot N(z_2)=\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(c^2+d^2\right)=$
$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

4) $N(z)=z\cdot\overline{z}$

Доказательство: Пусть $z=a+bi$, тогда $\overline{z}=a-bi$.

$z\cdot\overline{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2$

5) $N(z)=N\left(\overline{z}\right)$

6) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

Доказательство: $\overline{z_1\cdot z_2}=\dfrac{N\left(z_1\cdot z_2\right)}{z_1\cdot z_2}=\dfrac{N\left(z_1\right)\cdot N\left(z_2\right)}{z_1\cdot z_2}=\dfrac{N\left(z_1\right)}{z_1}\cdot\dfrac{N\left(z_2\right)}{z_2}=$
$=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

7) Очевидно, что число $\dfrac{a}{N(z)}-\dfrac{b}{N(z)}\cdot i=\dfrac{a-bi}{N(z)}$ – обратное к комплексному числу $a+bi\neq 0$.

Определение: Модулем $|z|$ комплексного числа z называется арифметическое значение корня квадратного из его нормы, т.е. $|z|=\sqrt{N(z)}=$ $=\sqrt{z\cdot\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$.

Свойства модуля:

1) $|z_1|\cdot|z_2|=|z_1\cdot z_2|$

2) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

3) $|z|=|\overline{z}|$

4) $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

Примеры:

1) $(5+3i)-(4-2i)\cdot(3+i)=(5+3i)-\left((12+2)+(4-6)\cdot i\right)=$
$=(5+3i)-(14-2i)=-9+7i$

2) Чтобы вычислить $\dfrac{2-3i}{4+2i}$, умножим числитель и знаменатель дроби на число $4-2i$, сопряженное к числу, стоящему в знаменателе.

$$\frac{2-3i}{4+2i}=\frac{(2-3i)\cdot(4-2i)}{(4+2i)\cdot(4-2i)}=\frac{(8-6)+(-12-4)\cdot i}{16+4}=\frac{2-16i}{20}=0{,}1-0{,}8\cdot i$$

3) Найдем норму и модуль комплексного числа $z=2-3i$:

$N(z)=2^2+(-3)^2=13$, $|z|=\sqrt{N(z)}=\sqrt{13}$.

4) Очевидно, что $z^{-1} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} \cdot i$ – число, обратное к комплексному числу $z = 2 - 3i$.

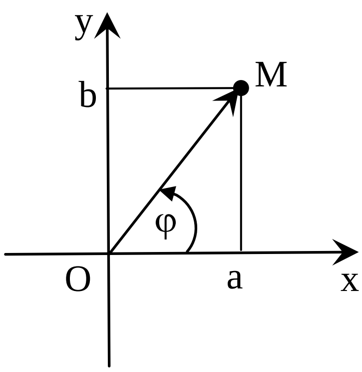
5) Вычислим $\sqrt{-16+30i}$, т.е. найдем комплексные числа вида $a+bi$, где $a, b \in R$, для которых $\sqrt{-16+30i} = a+bi$. Возведем обе части равенства в квадрат: $-16+30i = (a+bi)^2 = \left(a^2 - b^2\right) + 2abi$. Комплексные числа, записанные в алгебраической форме, равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и коэффициенты при мнимых частях. Итак, найдем действительные решения системы уравнений $\begin{cases} a^2 - b^2 = -16, \\ 2ab = 30, \end{cases}$ или системы

$$\begin{cases} a^2 - \dfrac{225}{a^2} = -16, \\ b = \dfrac{15}{a}. \end{cases}$$

Решим первое уравнение $a \neq 0$, $a^4 + 16a^2 - 225 = 0$. Отсюда $a^2 = -25$ или $a^2 = 9$. Поскольку $a \in R$, первое уравнение не имеет решений, следовательно, $a_1 = 3$, $a_2 = -3$. Вернемся к системе уравнений и найдем соответствующие значения $b_1 = 5$, $b_2 = -5$. Итак, комплексные числа $3+5i$ и $-3-5i$ являются корнями второй степени из числа $-16+30i$.

6) Найдем комплексные корни квадратного трехчлена $-5x^2 + 7x - 3$. Решим соответствующее квадратное уравнение $-5x^2 + 7x - 3 = 0$. Найдем дискриминант $D = 7^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-3) = -11$. Поскольку $D < 0$, уравнение не имеет действительных корней, но имеет комплексные корни, которые можно найти по известным со школы формулам $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Заметим, что комплексные числа $i\sqrt{11}$ и $-i\sqrt{11}$ являются корнями второй степени из числа -11. Итак, $x_{1,2} = \frac{-7 \pm i\sqrt{11}}{-10}$, т.е. $x_1 = \frac{7}{10} - \frac{\sqrt{11}}{10} \cdot i$, $x_2 = \frac{7}{10} + \frac{\sqrt{11}}{10} \cdot i$ – комплексные корни квадратного трехчлена $-5x^2 + 7x - 3$.

2.3. Геометрическая интерпретация комплексного числа



Рассмотрим декартову плоскость. Каждому комплексному числу $z = a + bi$ поставим в соответствие точку плоскости M(a,b), а также радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки M. Заметим, что $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{a^2 + b^2} = |a+bi| = |z|$. Введем обозначения: $|z| = r$, φ – угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и положительным направлением оси Ox.

Очевидно $a = r\cdot\cos\varphi$, $b = r\cdot\sin\varphi$, тогда $z = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$.

Итак, $z = |z|\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$ – **тригонометрическая форма** комплексного числа z, где φ = arg z – **аргумент** комплексного числа z.

Заметим, что два комплексных числа, записанных в тригонометрической форме, равны т.т.т., когда равны их модули, а аргументы отличаются на число $2\pi k$, где $k\in Z$.

Примеры: Запишем комплексные числа в тригонометрической форме.

1) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot i$

Найдем модуль числа $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$.

Найдем аргумент φ = arg z числа z по формулам: $a = r\cdot\cos\varphi$, $b = r\cdot\sin\varphi$.

Поскольку $\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\cdot\cos\varphi$, $-\frac{1}{2} = 1\cdot\sin\varphi$, то $\varphi = \arg z = -\frac{\pi}{6}$.

Итак, $z = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ – тригонометрическая форма комплексного числа z.

2) $z = -3i$

Найдем модуль числа $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0+9} = 3$.

Найдем аргумент φ числа z: $0 = 3\cdot\cos\varphi$, $-3 = 3\cdot\sin\varphi$, т.е. $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = -1$, откуда $\varphi = \arg z = -\frac{\pi}{2}$.

Итак, $z = 3\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ – тригонометрическая форма комплексного числа z.

3) $z = 2 - 3i$

Модуль числа $r = |z| = \sqrt{13}$.

Аргумент φ числа z: $2 = \sqrt{13}\cdot\cos\varphi$, $-3 = \sqrt{13}\cdot\sin\varphi$, т.е. $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\varphi = -\frac{3}{\sqrt{13}}$. Значение угла φ не является табличным, поэтому найдем сначала $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}} : \frac{-3}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{13}}{-3} = -\frac{2}{3}$. Отсюда $\varphi = \arg z = \mathrm{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Итак, тригонометрическая форма комплексного числа $z = \sqrt{13}\cdot\left(\cos\left(\mathrm{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)\right) + i\cdot\sin\left(\mathrm{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)\right)\right)$.

2.4. Действия над комплексными числами в тригонометрическая форме

Обозначим: $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$,

$z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$.

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Доказательство: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) \cdot r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2) =$
$= r_1 \cdot r_2 \cdot ((\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + (\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2) \cdot i) =$
$= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

2) Аналогично можно показать:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

3) Для любого натурального числа n верна формула Муавра:

$z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$

Доказательство: Применим метод математической индукции.

а) Проверим выполнимость формулы при n = 1.

$z^1 = r^1 \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

б) Пусть формула верна при n = k, т.е. $z^k = r^k \cdot (\cos(k\varphi) + i \cdot \sin(k\varphi))$.

в) Покажем выполнимость формулы при n = k+1.

$z^{k+1} = z^k \cdot z = r^k \cdot r \cdot (\cos(k\varphi + \varphi) + i \cdot \sin(k\varphi + \varphi)) =$
$= r^{k+1} \cdot (\cos((k+1)\varphi) + i \cdot \sin((k+1)\varphi))$

Итак, по методу математической индукции формула верна для всех натуральных n.

4) Запишем формулу для нахождения всех значений корня натуральной степени из комплексного числа.

Пусть $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, n – некоторое натуральное число. Пусть ω – корень n-й степени из числа z, т.е. $\omega^n = z$. Обозначим $\omega = \rho \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$. Тогда $\omega^n = \rho^n \cdot (\cos(n\alpha) + i \cdot \sin(n\alpha)) = z$. Два комплексных числа, записанных в тригонометрической форме, равны т.т.т., когда равны их модули, а аргументы отличаются на число 2πk, где k∈Z. Поэтому $\rho^n = r$ и $n\alpha - \varphi = 2\pi k$, откуда $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\alpha = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$.

Ввиду периодичности функций y = cos x и y = sin x можно показать, что среди указанных аргументов достаточно выбрать значения k = 0,...,n–1, которые дадут различные значения корня n-й степени из z.

Итак, все значения корня n-й степени из комплексного числа z можно найти по формуле: $\omega_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \right)$, $k = 0,\ldots,n-1$.

Примеры:

1) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot i$

Найдем модуль числа $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$.

Найдем аргумент $\varphi = \arg z$ числа z по формулам: $a = r \cdot \cos\varphi$, $b = r \cdot \sin\varphi$.

Поскольку $\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot \cos\varphi$, $-\frac{1}{2} = 1 \cdot \sin\varphi$, то $\varphi = \arg z = -\frac{\pi}{6}$.

Итак, $z = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ – тригонометрическая форма комплексного числа z.

2) $z = -3i$

Найдем модуль числа $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0 + 9} = 3$.

Найдем аргумент φ числа z: $0 = 3 \cdot \cos\varphi$, $-3 = 3 \cdot \sin\varphi$, т.е. $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = -1$, откуда $\varphi = \arg z = -\frac{\pi}{2}$.

Итак, $z = 3 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right)$ – тригонометрическая форма комплексного числа z.

2.5. Корни n-й степени из единицы

Запишем формулу для нахождения всех значений корня натуральной степени из комплексного числа 1.

Очевидно, $1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \cdot \sin 0)$ – тригонометрическая форма числа 1.

Воспользуемся формулой :

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \right), k = 0,\ldots,n-1.$$

Обозначим ε_k – k-е значение корня n-й степени из числа 1, где n – некоторое натуральное число.

Тогда $\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} \cdot \left(\cos\left(\frac{0 + 2\pi k}{n} \right) + i \cdot \sin\left(\frac{0 + 2\pi k}{n} \right) \right)$, $k = 0,\ldots,n-1$, т.е. $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \cdot \sin\frac{2\pi k}{n}$, $k = 0,\ldots,n-1$.

Заметим, что $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$ (эти фиксированные значения корня n-й степени из 1 нам понадобятся в дальнейшем).

Свойства:

1) Для любого $d \in N$ $\left(\varepsilon_1^d = \varepsilon_t\right)$, где d = nq+t, $0 \le t < n$.

Доказательство: $\varepsilon_1^d = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{n}\right)^d = \cos\frac{2\pi d}{n} + i \cdot \sin\frac{2\pi d}{n} =$

$$= \cos\frac{2\pi(nq+t)}{n} + i \cdot \sin\frac{2\pi(nq+t)}{n} = \cos\left(2\pi q + \frac{2\pi t}{n}\right) + i \cdot \sin\left(2\pi q + \frac{2\pi t}{n}\right) =$$

$$= \cos\frac{2\pi t}{n} + i \cdot \sin\frac{2\pi t}{n} = \varepsilon_t$$

2) Произведение корней n-й степени из единицы есть корень n-й степени из единицы.

Доказательство: Пусть α, β – корни n-й степени из единицы, тогда $\alpha^n = 1$ и $\beta^n = 1$. Рассмотрим $(\alpha \cdot \beta)^n = \alpha^n \cdot \beta^n = 1 \cdot 1 = 1$, т.е. $\alpha \cdot \beta$ – корень n-й степени из единицы.

3) Число, обратное корню n-й степени из единицы, есть корень n-й степени из единицы.

Доказательство: Пусть α – корень n-й степени из единицы, тогда $\alpha^n = 1$. Очевидно, что $\alpha \ne 0$, т.е. существует комплексное число α^{-1}, обратное к числу α. Рассмотрим $\left(\alpha^{-1}\right)^n = \left(\alpha^n\right)^{-1} = (1)^{-1} = 1$, т.е. α^{-1} – корень n-й степени из единицы.

4) Частное корней n-й степени из единицы – корень n-й степени из единицы.

Следует из свойств 2 и 3.

5) Любая степень корня n-й степени из единицы – корень n-й степени из единицы.

Следует из свойства 1.

6) Множество всех корней n-й степени из единицы образует группу относительно умножения.

Доказательство: Рассмотрим $G = \left\{\varepsilon_k \mid k = 0,\ldots,n\right\}$ – множество всех корней из единицы.

а) Из свойства 2 следует, что произведение корней n-й степени из единицы есть корень n-й степени из единицы, т.е. произведение двух произвольных элементов множества G принадлежит множеству G.

б) Ассоциативность умножения выполняется для любых комплексных чисел, следовательно, и для элементов множества G.

в) Элемент $\varepsilon_0 = 1$ принадлежит множеству G.

г) Из свойства 5 следует, что любая степень корня n-й степени из единицы – корень n-й степени из единицы, т.е. любой элемент множества G обратим.

Итак, $\langle G, \cdot \rangle$ – группа.

7) Точки, соответствующие корням n-й степени из единицы, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность с центром в начале координат.

Пример: Найдем все корни 6-й степени из единицы по формуле:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \cdot \sin\frac{2\pi k}{n},\ k = 0,\ldots,n-1.$$

$$\varepsilon_0 = 1$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{4\pi}{6} = \cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon_3 = \cos\frac{6\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{6\pi}{6} = \cos\pi + i \cdot \sin\pi = -1$$

$$\varepsilon_4 = \cos\frac{8\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{8\pi}{6} = \cos\frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon_5 = \cos\frac{10\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{10\pi}{6} = \cos\frac{5\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$