Волгоградский государственный педагогический университет

Кафедра алгебры, геометрии и информатики

Избранные задачи аффинной и евклидовой геометрии

Методическая разработка
в помощь студентам стационара и ОЗО

Составила доцент Бузулина Т.И.

Волгоград
2009

Содержание

Введение

Методическая разработка предназначена для самостоятельной работы студентов дневного и заочного отделений математических факультетов. Полагаю, что она окажется полезной и преподавателям, ведущим практические занятия по геометрии.

Изучающим элементы линейной алгебры и основы многомерной аффинной и евклидовой геометрии очень важно научиться решать задачи, сначала наиболее простые, которые имеют алгоритмический характер, а затем более сложные. Там, где это возможно, подчеркивается аналогия между решением задачи в трехмерном случае и в многомерном. Разработка содержит решения 18 избранных задач, некоторые из которых решены двумя способами.

Мы рекомендуем студентам воспользоваться литературой, указанной в списке. Обращаем внимание на книги и задачники [2], [3], [12]. В них, кроме указаний, можно найти и готовые решения некоторых задач. Очень богатый набор задач есть в книгах [9] и [13].

Необходимые теоретические сведения можно почерпнуть в книгах [1], [4], [7], [10], [8] и др.

Список литературы

[1] *Атанасян Л.С., Базылев В.Т.* Геометрия. Ч.1. М: Просвещение, 1986.

[2] *Атанасян Л.С., Атанасян В.А. и др.* Сборник задач по геометрии. Ч.1. М: Просвещение, 1973.

[3] *Аргунов Б.И. и др.* Задачник-практикум по геометрии. Ч.3. М: Просвещение, 1979.

[4] *Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П.* Геометрия. Ч.1. М: Просвещение, 1974.

[5] *Базылев В.Т. и др.* Сборник задач по геометрии. М: Просвещение, 1980.

[6] *Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. М: Наука, 1970.

[7] *Вернер А.Л., Кантор Б.Е., Франгулов С.А.* Геометрия ч.1, ч.2. СПб: Специальная литература, 1997.

[8] *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. М: Наука, 1971.

[9] *Икрамов Х.Д.* Задачник по линейной алгебре. М: Наука, 1975.

[10] *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Ч.2. Линейная алгебра. М: ФИЗМАТЛИТ, 2000.

[11] *Моденов П.С., Пархоменко А.С.* Сборник задач по аналитической геометрии. М: Наука, 1976.

[12] *Парнасский И.В., Парнасская О.Е.* Многомерные пространства. Квадратичные формы и квадрики. М: Просвещение, 1978.

[13] *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. М: Наука, 1974.

[14] *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М: Наука, 1966.

1 Параметрические и общие уравнения плоскостей

Как правило, в задачах плоскости задаются уравнениями, параметрическими или общими.

Для успешного решения многих задач прежде всего необходимо научиться определять размерность данной плоскости, находить некоторый базис направляющего подпространства плоскости и некоторую точку, принадлежащую плоскости.

Рассмотрим наиболее простой вариант задачи:

Задача 1a. Плоскость α задана параметрическим уравнением, т.е. уравнением вида:

$$\alpha: \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & = & x_1^0 & + & u_{11}t_1 & + & u_{21}t_2 & + & \ldots & + & u_{k1}t_k \\ x_2 & = & x_2^0 & + & u_{12}t_1 & + & u_{22}t_2 & + & \ldots & + & u_{k2}t_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ x_n & = & x_n^0 & + & u_{1n}t_1 & + & u_{2n}t_2 & + & \ldots & + & u_{kn}t_k. \end{array} \right. \tag{1}$$

Определить размерность плоскости, некоторый базис направляющего подпространства плоскости и некоторую точку, принадлежащую плоскости.

Решение. Точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — точка плоскости α. Система векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$, где

$$\begin{array}{ccc} \vec{u}_1 & = & (u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1n}) \\ \vec{u}_2 & = & (u_{21}, u_{22}, \ldots, u_{2n}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \vec{u}_k & = & (u_{k1}, u_{k2}, \ldots, u_{kn}) \end{array}$$

— некоторый базис направляющего подпространства V_α плоскости α. Тогда размерность плоскости $\dim \alpha = k$ — число параметров уравнения (1). Например:

$$\alpha: \left\{ \begin{array}{ccrcrcrcr} x_1 & = & -1 & + & t_1 & + & 2t_2 & + & t_3 \\ x_2 & = & 2 & - & t_1 & + & t_2 & & \\ x_3 & = & -3 & + & t_1 & + & t_2 & - & t_3 \\ x_4 & = & 1 & - & 3t_1 & - & t_2 & & \\ x_5 & = & -5 & + & 2t_1 & + & t_2 & + & t_3 \end{array} \right. \tag{2}$$

Размерность плоскости α, заданной уравнением (2), равна числу параметров, то есть в данном случае размерность равна трем. (Обычно пишут: $\dim \alpha = 3$). Точка $M_0(-1, 2, -3, 1, -5) \in \alpha$. Векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$

$$\begin{array}{ccc} \vec{u}_1 & = & (1, -1,\ 1, -3, 2) \\ \vec{u}_2 & = & (2,\ \ 1,\ 1, -1, 1) \\ \vec{u}_3 & = & (1,\ \ 0, -1,\ 0, 1) \end{array}$$

являются базисом направляющего пространства V_α.

Задача 1b. Плоскость α задана общим уравнением, т.е. системой m линейно независимых уравнений с n переменными.

$$\alpha: \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{3}$$

Определить размерность плоскости, некоторый базис направляющего подпространства плоскости и некоторую точку, принадлежащую плоскости.

Решение. Тогда $\dim \alpha = n - m$. Координаты точки M_0 находятся как частное решение системы (3), а базис направляющего подпространства плоскости — как фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений, которую получают из системы (3) обнулением столбца свободных членов уравнения.

Например, в A^5 плоскость α задана уравнением:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & + & 2x_5 & = & 9 \\ x_1 & - & 7x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & -2 \end{array} \right. \tag{4}$$

Решение. Для поиска точки составляем расширенную матрицу системы и приводим ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 3 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 5 & 2 & 9 \\ 1 & -7 & 3 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 3 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -7 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 0 & -1 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 3 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -7 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 14 & -7 & 7 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 3 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -7 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Обозначим матрицу системы A. Поскольку $\operatorname{rang} A = 3$, то $\dim\alpha = 5 - 3 = 2$. (заметим, что размерность $\dim\alpha$ равна числу свободных переменных системы). Найдем частное решение системы, для этого двум переменным присвоим конкретные значения, а остальные переменные найдем из системы. Пусть $x_4 = x_5 = 1$, тогда $x_3 = 1$. Из второй строки найдем $x_2 = 1$, а из первой — $x_1 = 1$. Таким образом $M_0(1,1,1,1,1) \in \alpha$.

Теперь найдем фундаментальную систему решений однородной системы

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & 7x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 0, \end{array}\right. \tag{5}$$

Аналогично предыдущему приведем матрицу системы к ступенчатому виду. Рассмотрим ступенчатую матрицу

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Для нахождения первого базисного вектора выберем x_4 и x_5 свободными переменными ($x_4 = 1$ и $x_5 = 0$), а для нахождения второго базисного вектора положим $x_4 = 0$ и $x_5 = 1$ и найдем остальные переменные:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\vec{p}_1$	$-\frac{7}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1	0
$\vec{p}_2$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1

Теперь в качестве базисных векторов можно взять
$\vec{u}_1 = 6\vec{p}_1 = (-14, 1, 3, 6, 0)$ и $\vec{u}_2 = 2\vec{p}_2 = (-2, -1, -1, 0, 2)$.

При решении задач часто требуется умение переходить от одного вида уравнения к другому.

Задача 2a. Перейти от общего уравнения к параметрическому.

Решение. Для такого перехода достаточно, как в задаче 1b, определить размерность, некоторую точку и базис направляющего подпространства плоскости α, а затем записать ее параметрическое уравнение.

Например, если плоскость α задана общим уравнением (4), то параметрическое уравнение плоскости α с имеет вид:

$$\left\{\begin{array}{rclcrcr} x_1 & = & 1 & - & 14t_1 & - & 2t_2 \\ x_2 & = & 1 & + & t_1 & - & t_2 \\ x_3 & = & 1 & + & 3t_1 & - & t_2 \\ x_4 & = & 1 & + & 6t_1 & & \\ x_5 & = & 1 & & & + & 2t_2 \end{array}\right.$$

Задача 2b. Перейти от параметрического уравнения к общему.

Решение. Эта задача нередко вызывает затруднение. Рассмотрим, например, уравнение (2) плоскости α из задачи 1a. Так как размерность α равна 3, то ее общее уравнение в A^5 представляет собой систему двух линейно независимых уравнений.

Изложим два способа решения этой задачи.

Способ 1. Выделим какие-либо три строки параметрического уравнения (число выбираемых строк должно быть равно числу параметров) и выразим в полученной системе трех уравнений параметры t_1, t_2, t_3 через остальные переменные.

Скажем несколько иначе: решим систему трех выделенных уравнений относительно параметров t_1, t_2, t_3, считая их неизвестными, а переменные $x_1, \ldots, x_5$ — известными.

Затем подставим выражения этих параметров в остальные две строки уравнений (2) вместо t_1, t_2, t_3. Итак, дана система:

$$\begin{cases} x_1 = -1 + t_1 + 2t_2 + t_3 \\ x_2 = 2 - t_1 + t_2 \\ x_3 = -3 + t_1 + t_2 - t_3 \\ x_4 = 1 - 3t_1 - t_2 \\ x_5 = -5 + 2t_1 + t_2 + t_3 \end{cases}$$

Выберем первые три строки системы. Сложим два первых уравнения, получим $x_1 + x_2 = 1 + 3t_2 + t_3$, а сложив второе и третье, получим $x_2 + x_3 = -1 + 2t_2 - t_3$.

Из двух полученных уравнений уже легко найти t_2:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5t_2 \tag{6}$$

Чтобы избежать дробных коэффициентов, умножим вторую строку на 5, получим

$$5x_2 = 10 - 5t_1 + 5t_2 \quad \rightarrow \quad 5t_1 = 10 - 5x_2 + 5t_2 \quad \rightarrow \quad 5t_1 = 10 - 5x_2 + x_1 + 2x_2 + x_3$$

После приведения подобных членов получим

$$5t_1 = 10 + x_1 - 3x_2 + x_3 \tag{7}$$

Аналогично из третьей строки получаем

$$5t_3 = -15 - 5x_3 + 5t_1 + 5t_2 \quad \rightarrow \quad 5t_3 = -15 - 5x_3 + 10 + x_1 - 3x_2 + x_3 + x_1 + 2x_2 + x_3$$

откуда следует

$$5t_3 = -5 + 2x_1 - x_2 - 3x_3 \tag{8}$$

Подставим равенства (6), (7), (8) в четвертую и пятую строки, предварительно умножив эти строки на 5. Получим:

$$5x_4 = 5 - 15t_1 - 5t_2 = 5 - 30 - 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 - x_1 - 2x_2 - x_3$$

$$5x_5 = -25 + 10t_1 + 5t_2 + 5t_3 = -25 + 20 + 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 + 2x_1 - x_2 - 3x_3$$

После преобразований получим

$$5x_4 = -4x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 25 \tag{9}$$

$$x_5 = x_1 - x_2 - 2. \tag{10}$$

Запишем два последних уравнения в систему и получим ответ:

$$\begin{cases} -4x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 25 \\ x_1 - x_2 - x_5 = 2 \end{cases} \tag{11}$$

— общее уравнение плоскости α.

Способ 2. Выпишем матрицу, составленную из коэффициентов при параметрах (координаты базисных векторов), транспонируем ее и приведем к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Запишем другое параметрическое уравнение плоскости α.

$$\begin{cases} x_1 = -1 + t_1 \\ x_2 = 2 - t_2 \\ x_3 = -3 - t_1 + 2t_2 + 5t_3 \\ x_4 = 1 - 3t_2 - 4t_3 \\ x_5 = -5 + t_1 + t_2 \end{cases}$$

Из первой строки: $t_1 = x_1 + 1$. Из второй строки: $t_2 = 2 - x_2$. Умножим третью строку на 4, а четвертую на 5 и сложим, избавившись тем самым от t_3, получим:

$$4x_3 + 5x_4 = -7 - 4t_1 - 7t_2 = -7 - 4x_1 - 4 - 14 + 7x_2$$

следовательно

$$-4x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 25$$

Подставим значение параметров в пятую строку

$$x_5 = -5 + x_1 + 1 + 2 - x_2 \to x_1 - x_2 - x_5 = 2$$

Таким образом

$$\alpha : \begin{cases} -4x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 25 \\ x_1 - x_2 - x_5 = 2 \end{cases}$$

Замечание 1. Решая задачу двумя способами мы получим общее уравнение плоскости α одного и того же вида, что необязательно, и α может быть задана системой, эквивалентной полученной системе.

Замечание 2. Второй способ наиболее приемлем, если требуется найти общее уравнение гиперплоскости, заданной параметрическими уравнениями.

Задача 3. Гиперплоскость задана параметрическим уравнением. Найдите ее общее уравнение.

Пусть гиперплоскость задана параметрическим уравнением:

$$\begin{cases} x_1 = -1 + t_1 - 3t_2 + t_3 + 2t_4 \\ x_2 = 1 - 3t_1 + 13t_2 - t_3 - 4t_4 \\ x_3 = 3 + 7t_1 - 26t_2 + 5t_3 + 11t_4 \\ x_4 = -1 + 2t_1 - 7t_2 + 4t_3 + 3t_4 \\ x_5 = -2 - t_1 + 8t_2 + 5t_3 \end{cases} \tag{12}$$

Решение. Составим матрицу из координат базисных векторов направляющего пространства этой гиперплоскости, транспонируем ее и приведем к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & -1 \\ -3 & 13 & -26 & -7 & 8 \\ 1 & -1 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & 11 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & -10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Запишем другое параметрическое уравнение этой плоскости.

$$\begin{cases} x_1 = -1 + t_1 \\ x_2 = 1 - 3t_1 - t_2 \\ x_3 = 3 + 7t_1 + t_2 + t_3 \\ x_4 = -1 + 2t_1 - t_2 + 3t_3 + 2t_4 \\ x_5 = -2 - t_1 - 3t_2 + 4t_3 + 3t_4 \end{cases} \tag{13}$$

Будем избавляться от параметров, "шагая" по ступеням полученного уравнения снизу вверх. Для этого найдем $-3x_4 + 2x_5 = -1 - 8t_1 - 3t_2 - t_3$. Прибавим к полученной строке 3-ю строку, получим $x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 2 - t_1 - 2t_2$. Умножим вторую строку на -2 и прибавим к полученной: $-2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 5t_1$.

Умножим первую строку на -5 и сложим с последним из полученных уравнений:

$$-5x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 5$$

— искомое общее уравнение гиперплоскости.

Ответ: $-5x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 5$

2 Взаимное расположение двух плоскостей

Взаимное расположение двух плоскостей в A^n зависит от того, каково пересечение направляющих подпространств этих плоскостей (т.е. есть ли у плоскостей общие ненулевые направляющие векторы) и от того, каково пересечение этих плоскостей как множеств точек (т.е. есть ли у плоскостей общие точки). Всего различают восемь случаев взаимного расположения.

Ознакомтесь с таблицей и научитесь ею пользоваться. В 4 столбцах таблицы указаны случаи пересечения направляющих подпространств $\dim V_\alpha \cap V_\beta$, в двух строках случаи пересечения плоскостей как множеств. В первой $\alpha \cap \beta = \emptyset$, т.е. плоскости не имеют общих точек. Во второй $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, т.е. общие точки есть.

Пусть $\dim V_\alpha = k, \quad \dim V_\beta = m$ и $k \geq m$, $W = V_\alpha \cap V_\beta$.

	$\dim W = 0$	$\dim W = l,\ l < k$	$\dim W = k, k < m$	$\dim W = k,\ \ k = m$
$\alpha \cap \beta = \emptyset$	скрещиваются	частично параллельны	плоскость α параллельна плоскости β	$\alpha \parallel \beta$
$\alpha \cap \beta \neq \emptyset$	пересекаются в точке	пересекаются по плоскости размерности l	плоскость α содержится в плоскости β	$\alpha = \beta$

Задача 4а. Плоскости α и β заданы параметрическими уравнениями. Выяснить их взаимное расположение.

$$\alpha : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 15 & - & 2u_1 & + & 5u_2 \\ x_2 & = & -17 & & & + & 3u_2 \\ x_3 & = & -1 & - & 3u_1 & & \\ x_4 & = & -2 & - & 3u_1 & + & 3u_2 \\ x_5 & = & 21 & - & u_1 & - & 2u_2 \end{array} \right. \qquad \beta : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 17 & - & 3v_1 & - & 10v_2 \\ x_2 & = & -13 & - & 3v_1 & - & 4v_2 \\ x_3 & = & & & 3v_1 & - & v_2 \\ x_4 & = & 3 & & & - & 5v_2 \\ x_5 & = & 20 & + & 3v_1 & + & 3v_2 \end{array} \right. \tag{14}$$

Решение. Решение задачи разобьем на несколько шагов.

1 шаг. Из уравнений (14) легко определяем размерности плоскостей: $\dim \alpha = 2$, $\dim \beta = 2$, а также $M(15, -17, -1, -2, 21) \in \alpha$ и $N(17, -13, 0, 3, 20) \in \beta$. Также легко определить базисы направляющих подпространств V_α и V_β плоскостей α и β:

$$V_\alpha : \vec{u}_1 = (-2, 0, -3, -3, -1), \quad \vec{u}_2 = (5, 3, 0, 3, -2).$$

$$V_\beta : \vec{v}_1 = (-3, -3, 3, 0, 3), \quad \vec{v}_2 = (-10, -4, -1, -5, 3).$$

2 шаг. Запишем матрицу A, строки которой являются координатами базисных векторов подпространств V_α и V_β.

Затем припишем к ней последней строкой координаты вектора $\overrightarrow{MN}(2, 4, 1, 5, -1)$ (Этот вектор называют "вектором - мостом").

$$A = \left(\begin{array}{rrrrr} -2 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 5 & 3 & 0 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & 3 & 0 & 3 \\ -10 & -4 & -1 & -5 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 1 & 5 & -1 \end{array} \right) \tag{15}$$

Будем находить ранг матрицы A и одновременно обнулять приписанную строку. Для этого, к ней прибавляют любую из строк матрицы A, умноженную на любое число. Последнюю же строку нельзя прибавлять к строкам матрицы A.

$$\left(\begin{array}{rrrrr} -2 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 5 & 3 & 0 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & 3 & 0 & 3 \\ -10 & -4 & -1 & -5 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 1 & 5 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 5 & 3 & 0 & 3 & -2 \\ -10 & -4 & -1 & -5 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 1 & 5 & -1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 8 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Следовательно $\operatorname{rang} A = 4$ и приписанная строка обнулилась.
3 шаг. Так как $\operatorname{rang} A = \dim(V_\alpha + V_\beta) = 4$ и $\dim(V_\alpha \cap V_\beta) = \dim V_\alpha + \dim V_\beta - \dim(V_\alpha + V_\beta)$, то $\dim(V_\alpha \cap V_\beta) = 2 + 2 - 4 = 0$. Два двумерных подпространства пересекаются по нульмерному.

Обнуление последней строки говорит о том, что вектор-мост $\overrightarrow{MN} \in V_\alpha + V_\beta$. Согласно признаку наличия общих точек двух плоскостей, в этом случае общие точки есть. Смотрим в таблицу. Плоскости α и β имеют общие точки, но направляющее подпространство пересечения нульмерно.

Ответ: Плоскости α и β пересекаются в единственной точке.

Задача 4b. Плоскости α и β заданы параметрическими уравнениями. Выяснить их взаимное расположение.

$$\alpha \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 3 & - & 2u_1 & - & 12u_2 \\ x_2 & = & -2 & - & 5u_1 & + & 3u_2 \\ x_3 & = & -3 & - & u_1 & - & 13u_2 \\ x_4 & = & -1 & + & 4u_1 & + & 10u_2 \\ x_5 & = & -1 & - & u_1 & - & u_2 \end{array} \right. \qquad \beta \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & -11 & + & 13v_1 & - & v_2 \\ x_2 & = & -3 & - & v_1 & + & v_2 \\ x_3 & = & -16 & + & 13v_1 & - & 2v_2 \\ x_4 & = & 7 & - & 9v_1 & + & 4v_2 \\ x_5 & = & -6 & + & 3v_1 & + & 2v_2 \end{array} \right. \tag{16}$$

Решение. Решение задачи разобьем на несколько шагов.
1 шаг. Запишем матрицу A, строками которой являются координаты базисных векторов направляющих пространств плоскостей α и β.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 & 4 & -1 \\ -12 & 3 & -13 & 10 & -1 \\ 13 & -1 & 13 & -9 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Приведем матрицу A к ступенчатому виду и найдем ее ранг:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 & 4 & -1 \\ -12 & 3 & -13 & 10 & -1 \\ 13 & -1 & 13 & -9 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 12 & -13 & 43 & 29 \\ 0 & -7 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & -9 & 11 & -38 & -25 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 31 & -144 & -81 \\ 0 & -2 & -7 & 35 & 19 \\ 0 & -9 & 11 & -38 & -25 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 31 & -144 & -81 \\ 0 & 0 & 5 & -23 & -13 \\ 0 & 0 & 55 & -253 & -143 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 31 & -144 & -81 \\ 0 & 0 & 5 & -23 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем, что $\operatorname{rang} A = 3$. Это говорит о том, что размерность суммы $V_\alpha + V_\beta$ направляющих подпространств V_α и V_β равна 3. Поскольку $\dim V_\alpha = 2$ и $\dim V_\beta = 2$, размерность пересечения направляющих подпространств равна 1. Эти данные позволяют найти нужный столбец в таблице. В данном случае — это третий столбец.
2 шаг. Найдем координаты вектора-моста. Так как точка $M(3, -2, -3, -1, -1) \in \alpha$, а точка $N(-11, -3, -16, 7, -6) \in \beta$, то вектор-мост $\overrightarrow{MN}(-14, -1, -13, 8, -5)$.

Припишем пятой строкой к полученной ступенчатой матрице координаты вектора-моста. Обозначим вновь полученную матрицу через B.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 31 & -144 & -81 \\ 0 & 0 & 5 & -23 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -14 & -1 & -13 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

Приведем матрицу B к ступенчатому виду и найдем ее ранг:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 31 & -144 & -81 \\ 0 & 0 & 5 & -23 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -14 & -1 & -13 & 8 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 31 & -144 & -81 \\ 0 & 0 & 5 & -23 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -16 & -11 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 31 & -144 & -81 \\ 0 & 0 & 5 & -23 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 160 & -736 & -416 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 31 & -144 & -81 \\ 0 & 0 & 5 & -23 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем, что $\operatorname{rang} B = 3$. Следовательно, вектор-мост принадлежит сумме направляющих подпространств плоскостей. По признаку наличия общих точек в этом случае общие точки есть. Это дает последнюю строчку таблицы.

3 шаг. По таблице определяем вид взаимного расположения плоскостей α и β.

Ответ: Плоскости α и β пересекаются по прямой.

Задача 4с. Плоскости α и β заданы своими общими уравнениями в A^5. Выяснить их взаимное расположение.

$$\alpha : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_5 & = & -4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 & = & -7 \end{cases} \qquad \beta : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & -2 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 2 \end{cases} \tag{17}$$

Решение. Решение задачи разобьем на несколько шагов.

1 шаг. Определим размерности плоскостей: $\dim \alpha = 5 - 2 = 3$, $\dim \beta = 5 - 2 = 3$. (Смотри задачу 1б).

2 шаг. Запишем общую систему, объединив системы (17)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_5 = -4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 = -7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \tag{18}$$

и исследуем ее на разрешимость. Обозначим через r ранг матрицы системы, а через R — ранг расширенной матрицы.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 4 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Следовательно $r = 3$, $R = 4$: $r \neq R$ значит система не имеет решений, т.е. плоскости α и β не имеют общих точек. Следователно смотрим в таблицу на первую строку.

3 шаг. Так как $r = 3$, следовательно $\dim(V_\alpha \cap V_\beta) = n - r = 5 - 3 = 2$, а значит два трехмерных векторных пространства пересекаются по двумерному, следовательно смотрим в таблице во второй столбец.

Ответ: Плоскости α и β частично параллельны.

Замечание Если плоскость α задана параметрическим уравнением, а β — общим уравнением, то задачу можно свети к задаче 4а или 4б, получив для одной из плоскостей уравнение другого вида. (смотри задачи 1а, 1б, 2а, 2в).

3 Аффинная оболочка двух плоскостей

Аффинная оболочка двух плоскостей α и β — это плоскость наименьшей размерности, содержащая и α и β. Направляющее подпространство аффинной оболочки "натянуто"на направляющие подпространства плоскостей α и β и вектор-мост.

Задача 5а. Пусть плоскости α и β заданы своими параметрическими уравнениями в A^5 и требуется найти общее уравнение их аффинной оболочки.

$$\alpha: \begin{cases} x_1 = 1 + 5u_1 + 4u_2 \\ x_2 = -2 + 3u_1 - 2u_2 \\ x_3 = 1 - 3u_2 \\ x_4 = 3 + 2u_1 - 3u_2 \\ x_5 = u_1 + 2u_2 \end{cases} \qquad \beta: \begin{cases} x_1 = -1 + 6v_1 - 13v_2 \\ x_2 = -2 - v_1 - 8v_2 \\ x_3 = 1 + 3v_2 \\ x_4 = 5 - 3v_1 - 6v_2 \\ x_5 = 2 - 5v_2 \end{cases} \tag{19}$$

Решение. **1 шаг.** Найдем базисы направляющих подпространств V_α и V_β и вектор-мост.

Базис $V_\alpha:$ $\vec{u}_1(5,3,0,2,1)$, $\vec{u}_2(4,-2,-3,-3,2)$.

Базис $V_\beta:$ $\vec{v}_1(6,-1,0,-3,0)$, $\vec{v}_2(-13,-8,3,-6,-5)$.

Точка $M(1,-2,1,3,0) \in \alpha$, точка $N(-1,-2,1,5,2) \in \beta$, вектор $\overrightarrow{MN}(-2,0,0,2,2)$ — вектор-мост. (Смотри задачу 1а).

2 шаг. Найдем базис линейной оболочки, натянутой на систему векторов:

$$\left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{MN}\right\}$$

Он и будет являться базисом направляющего подпространства искомой аффинной оболочки.

Для этого составим матрицу из координат этих векторов и приведем ее к ступенчатому виду.

$$A: \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -3 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ -13 & -8 & 3 & -6 & -5 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -8 & 3 & -19 & -18 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 24 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -43 & -66 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -48 & -72 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Получили, что $\operatorname{rang} A = 4$ и таким образом размерность аффинной оболочки равна 4, т.е. аффинная оболочка - гиперплоскость.

3 шаг. Запишем параметрическое уравнение аффинной оболочки, взяв в качестве базиса направляющего подпространства векторы

$$\vec{a}_1 = (-1,0,0,1,1) \quad \vec{a}_3 = (0,0,-3,-5,-6)$$

$$\vec{a}_2 = (0,-1,0,3,6) \quad \vec{a}_4 = (0,0,0,2,3),$$

а в качестве точки, через которую проходит аффинная оболочка, например, точку M.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - t_1 \\ x_2 = -2 - t_2 \\ x_3 = 1 - 3t_3 \\ x_4 = 3 + t_1 + 3t_2 - 5t_3 + 2t_4 \\ x_5 = t_1 + 6t_2 - 6t_3 + 3t_4 \end{cases} \tag{20}$$

Для получения общего уравнения аффинной оболочки избавимся от параметров, как в задаче 2в.

$$
\begin{array}{lccc}
 & -3x_4 + x_5 & = & -9 - t_1 + 3t_2 + 3t_3 \\
+ & & & \\
 & +x_3 & = & 1 - 3t_3 \\
\hline
 & x_3 - 3x_4 + 2x_5 & = & -8 - t_1 + 3t_2 \\
+ & & & \\
 & 3x_2 & = & -6 - 3t_2 \\
\hline
 & 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 & = & -14 - t_1 \\
+ & & & \\
 & -x_1 & = & -1 + t_1 \\
\hline
 & -x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 & = & -15
\end{array}
$$

В итоге получили, что

$$x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 15$$

— искомое уравнение аффинной оболочки.

Задача 5b. Найти общее уравнение аффинной оболочки плоскости α и прямой β.

$$
\alpha \left\{ \begin{array}{lcr}
x_1 & = & -3 - 2u_1 - 7u_2 \\
x_2 & = & 2 - 2u_1 + 2u_2 \\
x_3 & = & -3 - 3u_1 + 3u_2 \\
x_4 & = & 3u_1 + 2u_2 \\
x_5 & = & -3u_1 + u_2
\end{array} \right.
\qquad
\beta \left\{ \begin{array}{lcrcr}
x_1 & = & 8 & + & 17v_1 \\
x_2 & = & 4 & + & 2v_1 \\
x_3 & = & -2 & + & v_1 \\
x_4 & = & -3 & - & 2v_1 \\
x_5 & = & & - & 3v_1
\end{array} \right.
$$

Ответ: $x_1 - x_2 + 3x_4 + 3x_5 + 5 = 0.$

Если плоскости α и β заданы не параметрическими, а общими уравнениями, то нужно предварительно перейти от общих уравнений к параметрическим.

4 Смешанные задачи

Задача 6. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(3, 3, -3, -3, -1)$ и пересекающей плоскости α и β, если

$$
\alpha : \left\{ \begin{array}{l}
x_1 = -3 - 2u_1 \\
x_2 = 9 - 3u_1 - u_2 \\
x_3 = -1 + 2u_1 - 3u_2 \\
x_4 = -1 + 2u_1 + 2u_2 \\
x_5 = -1 + 2u_2
\end{array} \right.
\quad
\beta : \left\{ \begin{array}{l}
x_1 = 10 - v_1 - v_2 \\
x_2 = - v_1 + 2v_2 \\
x_3 = -2 + 3v_1 \\
x_4 = -9 - 3v_2 \\
x_5 = -7 + 2v_1
\end{array} \right.
\tag{21}
$$

Очевидно, что плоскости α и β скрещиваются, в противном случае задача имеет бесконечное множество решений.

Для двух скрещивающихся прямых α и β в трехмерном пространстве, когда дана точка A, искомая прямая AB, проходящая через точку A и пересекающая α и β, находится по следующей схеме:

1. Находится уравнение плоскости π, являющейся аффинной оболочкой плоскости α и точки A.
2. Находится точка $B = \pi \cap \beta$.
3. Составляется каноническое уравнение прямой AB.

Решение. Аналогично поступим и при решении задачи 6.
1 шаг. Запишем параметрическое уравнение плоскости π, содержащей плоскость α и точку $A \notin \alpha$.

Для этого к уравнению α из (21) добавим столбец с параметром u_3, коэффициенты при котором являются координатами вектора $\overrightarrow{MA}$, где $M(-3,9,-1,-1,-1) \in \alpha$. (Размерность плоскости π на единицу больше размерности плоскости α, т.е. $\dim \pi = 2+1 = 3$).

$$\pi : \begin{cases} x_1 = -3 - 2u_1 + 6u_3, \\ x_2 = 9 - 3u_1 - u_2 - 6u_3, \\ x_3 = -1 + 2u_1 - 3u_2 - 2u_3, \\ x_4 = -1 + 2u_1 + 2u_2 - 2u_3, \\ x_5 = -1 + 2u_2 \end{cases} \qquad (22)$$

2 шаг. Найдем точку пересечения плоскостей π и β.

Для этого разрешим систему (23) относительно параметров u_1, u_2, u_3, v_1, v_2. Причем достаточно найти, например, параметры v_1 и v_2.

$$\begin{cases} -3 - 2u_1 + 6u_3 = 10 - v_1 - v_2, \\ 9 - 3u_1 - u_2 - 6u_3 = - v_1 + 2v_2, \\ -1 + 2u_1 - 3u_2 - 2u_3 = -2 + 3v_1 , \\ -1 + 2u_1 + 2u_2 - 2u_3 = -9 - 3v_2, \\ -1 + 2u_2 = -7 + 2v_1 \end{cases} \qquad (23)$$

Система (23) — стандартная система пяти уравнений с пятью переменными. Перенесем параметры v_1 и v_2 в левую часть системы, а постоянные — в правую и запишем расширенную матрицу коэффициентов полученной системы.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 0 & 6 & 1 & 1 & 13 \\ -3 & -1 & -6 & 1 & -2 & -9 \\ 2 & -3 & -2 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -4 & -8 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -4 & -8 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & -6 & -18 & -4 & -1 & -28 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -4 & -8 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -18 & -10 & -1 & -46 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 & 11 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -4 & -8 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 34 & 7 \end{array}\right)$$

Очевидно, что $v_1 = 1,\ v_2 = 0$. Подставим значение параметров $v_1 = 1,\ v_2 = 0$ в уравнение плоскости β, получим точку $B(9,-1,1,-9,-5)$.

3 шаг. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}(6,-4,4,-6,-4)$. Составим каноническое уравнение прямой AB, т.е. уравнение вида

$$\frac{x_1 - x_1^0}{p_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{p_2} = \frac{x_3 - x_3^0}{p_3} = \frac{x_4 - x_4^0}{p_4} = \frac{x_5 - x_5^0}{p_5}$$

взяв в качестве $x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0$ координаты точки A, а в качестве вектора $\vec{p}(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5)$ вектор, коллинеарный вектору $\overrightarrow{AB}$, т.е. $\vec{p} = (3,-2,2,-3,-2)$. Получим ответ:

Ответ: $AB : \ \frac{x_1-3}{3} = \frac{x_2-3}{-2} = \frac{x_3+3}{2} = \frac{x_4+3}{-3} = \frac{x_5+1}{-2}$

5 Метрические задачи

Следующие задачи решаются только в евклидовых $n-$мерных пространствах и связаны с понятиями ортогональных плоскостей, общего перпендикуляра двух плоскостей, расстояния от точки до $k-$мерной плоскости, площади треугольника.

Задача 7а. Задача на нахождение проекции точки A на $k-$плоскость.

Если обозначить через $A_0 = \mathrm{pr}_\alpha A$ проекцию точки A на $k-$плоскость α и рассматривать эту задачу в A^3, то для нахождения $\mathrm{pr}_\alpha A$ задачу можно разбить на несколько шагов:
1 шаг. Найти уравнение прямой β, ортогональной плоскости α и проходящей через точку A.
2 шаг. Найти $\alpha \cap \beta = A_0$.

В A^n задача решается аналогично, только $\dim \beta = n - \dim \alpha$.

Пусть в A^5 задана плоскость α и точка A. Найдем проекцию точки $A(7, 0, -7. -2. -8)$ на плоскость α,

$$\alpha = \begin{cases} 4x_1 & & - \ 4x_3 & - \ \ x_4 & - \ 3x_5 & = -2, \\ x_1 & + \ 4x_2 & - \ 2x_3 & - \ 3x_4 & - \ 2x_5 & = \ 1 \end{cases} \tag{24}$$

Решение. **1 шаг.** Так как $\dim \alpha = 5 - 2 = 3$, то размерность плоскости β, ортогонально дополнительной к плоскости α будет равна 2. В качестве базиса направляющего пространства плоскости β можно взять векторы

$$\vec{u}_1(4, 0, -4, -1, -3) \text{ и } \vec{u}_2(1, 4, -2, -2, -5).$$

Заметим, что координаты векторов $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ — коэффициенты при переменных соответственно в первой и второй строках системы (24), задающей плоскость α.

Поскольку плоскость β проходит через точку A, то можно записать ее параметрическое уравнение:

$$\beta : \begin{cases} x_1 = & 7 & +4t_1 & +t_2 \\ x_2 = & & & 4t_2 \\ x_3 = & -7 & -4t_1 & -2t_2 \\ x_4 = & -2 & -t_1 & -3t_2 \\ x_5 = & -8 & -3t_1 & -2t_2 \end{cases} \tag{25}$$

2 шаг. Найдем пересечение α и β, подставив в уравнение плоскости α вместо переменных x_i их выражение через параметры t_1 и t_2. Получим систему из двух уравнений относительно переменных t_1 и t_2 вида:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 & = & b_1 \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 & = & b_2 \end{cases} \tag{26}$$

Можно заметить, что в первой строке (26) при t_1 коэффициент равен скалярному произведению $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1$, при t_2 — $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$, а свободный член уравнения b_1 равен $2 - \vec{u}_1 \cdot \overrightarrow{OA}$, где $\overrightarrow{OA}$ — радиус-вектор точки A.

Во второй строке при t_1 — коэффициент $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$, при t_2 — $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1$ и свободный член равен $1 - \vec{u}_2 \cdot \overrightarrow{OA}$.

Таким образом система будет иметь вид:

$$\begin{cases} \vec{u}_1^2 \cdot t_1 & + \ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \cdot t_2 & = & -2 & - & \vec{u}_1 \cdot \overrightarrow{OA}, \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \cdot t_1 & + \quad \vec{u}_2^2 \cdot t_2 & = & 1 & - & \vec{u}_2 \cdot \overrightarrow{OA} \end{cases} \tag{27}$$

Это значительно убыстряет процесс получения системы (26).

$$\begin{cases} 42t_1 & + & 21t_2 & = & -2 & - & 82, \\ 21t_1 & + & 34t_2 & = & 1 & - & 43 \end{cases} \tag{28}$$

откуда следует

$$\begin{cases} 42t_1 & + & 21t_2 & = & - & 84, \\ 21t_1 & + & 34t_2 & = & - & 42 \end{cases} \tag{29}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 42 & 21 & -84 \\ 21 & 34 & -42 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -47 & 0 \end{array}\right)$$

Следовательно, $t_2 = 0$, $t_1 = -2$. Подставим значение параметров в уравнение плоскости β и получим $A_0(-1, 0, 1, 0, -2)$.

Ответ: $A_0(-1, 0, 1, 0, -2)$

Задача 7b. Пусть в A^5 задана точка $A(7,0,-7.-2.-8)$ и плоскость α:

$$\alpha = \begin{cases} 4x_1 \quad\quad\quad - 4x_3 - \ \ x_4 - 3x_5 = -2, \\ \ x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 2x_5 = \ \ 1 \end{cases}$$

Найдем расстояние от точки A до плоскости α.

Обозначим искомое расстояние $\rho(A,\alpha) = |AA_0|$, где точка $A_0 = \mathrm{pr}_\alpha A$. Как в предыдущей задаче найдем координаты точки A_0, а затем

$$\rho(A,\alpha) = |AA_0| = \sqrt{(7+1)^2 + 0 + (1+7)^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{168}.$$

Ответ получен.

Ответ: $\rho(A,\alpha) = \sqrt{168}$.

Задача 7c. Пусть в A^5 задана точка $A(7,0,-7.-2.-8)$ и плоскость α:

$$\alpha = \begin{cases} 4x_1 \quad\quad\quad - 4x_3 - \ \ x_4 - 3x_5 = -2, \\ \ x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 2x_5 = \ \ 1 \end{cases}$$

Найти координаты точки A', которая симметрична данной точке A относительно данной $k-$плоскости α.

Решение. **1 шаг.** Как в задаче 7a найдем координаты точки $A_0 = \mathrm{pr}_\alpha A$.

Для нахождения точки A', симметричной A относительно α нужно воспользоваться формулами нахождения координат середины отрезка.

2 шаг. Для нахождения координат точки A' удвоим координаты точки A_0 и из полученных координат вычтем соответствующие координаты точки A.

В итоге получим ответ: $A' = (-9,0,9,2,4)$.

Ответ: $A' = (-9,0,9,2,4)$

Задача 8. Найти каноническое уравнение общего перпендикуляра двух плоскостей α и β.

Общим перпендикуляром двух двумерных скрещивающихся плоскостей в A^5 является прямая, перпендикулярная α и β и пересекающая эти плоскости.

Пусть l — общий перпендикуляр плоскостей α и β. Тогда его направляющий вектор $\vec{p}$ ортогонален направляющим подпространствам V_α и V_β. Следовательно скалярное произведение вектора $\vec{p}$ и базисых векторов V_α и V_β равно 0.

Рассмотрим решение аналогичной задачи в A^3. В этом случае плоскости α и β будут прямыми.

Для нахождения канонического уравнения прямой l найдем направляющий вектор $\vec{p}$ и точку, через которую проходит эта прямая по следующему плану:

1 шаг. Найдем вектор $\vec{p}$ из условия его ортогональности векторным подпространствам V_α и V_β;

2 шаг. Составим уравнение плоскости π, которая является аффинной оболочкой прямой l и прямой α. Направляющее подпространство плоскости π натянуто на V_α и вектор $\vec{p}$;

3 шаг. Найдем точку пересечения прямой β и π, $A = \beta \cap \pi$;

4 шаг. Запишем каноническое уравнение прямой $l(A,\vec{p})$.

Пусть

$$\alpha : \begin{cases} x_1 = 26 + 7u_1 - 5u_2, \\ x_2 = \ \ 7 + \ u_1 - 3u_2, \\ x_3 = \ \ 5 + 2u_1 - 2u_2, \\ x_4 = \ \ 6 - \ u_1 - 3u_2, \\ x_5 = -6 \quad\quad\ + 3u_2 \end{cases} \qquad \beta : \begin{cases} x_1 = 17 - 5v_1 + \ 6v_2, \\ x_2 = \ \ 3 + \ v_1 + \ 3v_2, \\ x_3 = -4 - 2v_1 + \ \ v_2, \\ x_4 = 15 + 3v_1 + \ 2v_2, \\ x_5 = -7 + 2v_1 - \ 3v_2 \end{cases} \tag{30}$$

Решение. **1 шаг.** Найдем базисы подпространств V_α и V_β.

$$V_\alpha : \vec{u}_1 = (7,1,2,-1,0), \quad \vec{u}_2 = (-5,-3,-2,-3,3);$$
$$V_\beta : \vec{v}_1 = (-5,1,-2,3,2), \quad \vec{v_2} = (6,3,1,2,-3);$$

Пусть $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5)$, тогда

$$\begin{cases} \vec{p}\cdot\vec{u}_1=0, \\ \vec{p}\cdot\vec{u}_2=0, \\ \vec{p}\cdot\vec{v}_1=0, \\ \vec{p}\cdot\vec{v}_2=0 \end{cases}$$

Переходя к координатам, получим систему:

$$\begin{cases} 7p_1 + p_2 + 2p_3 - p_4 = 0, \\ -5p_1 - 3p_2 - 2p_3 - 3p_4 + 3p_5 = 0, \\ -5p_1 + p_2 - 2p_3 + 3p_4 + 2p_5 = 0, \\ 6p_1 + 3p_2 + p_3 + 2p_4 - 3p_5 = 0 \end{cases} \tag{31}$$

Так как плоскости α и β скрещиваются, то ранг этой однородной системы равен 4.

Следовательно, множество решений однородной системы (31) есть одномерное векторное пространство. Найдем фундаментальную систему решений, т.е. вектор $\vec{p}$.

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & -2 & -3 & 3 \\ -5 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \end{pmatrix}$$

Из последней строчки $p_5=0$. Пусть $p_4=2$, тогда $p_3=-1$, $p_2=-3$, $p_1=1$.

Таким образом $\vec{p}=(1,-3,-1,2,0)$.

2 шаг. Запишем параметрическое уравнение плоскости π — аффинной оболочки α и l. Для этого "припишем"к параметрическому уравнению плоскости α столбец с параметром u_3, коэффициенты которого — координаты вектора $\vec{p}$:

$$\pi:\begin{cases} x_1 = 26 + 7u_1 - 5u_2 + u_3, \\ x_2 = 7 + u_1 - 3u_2 - 3u_3, \\ x_3 = 5 + 2u_1 - 2u_2 - u_3, \\ x_4 = 6 - u_1 - 3u_2 + 2u_3, \\ x_5 = -6 + 3u_2 \end{cases} \tag{32}$$

3 шаг. Найдем точку $A=\pi\cap\beta$, решив систему относительно параметров u_1,u_2,u_3,v_1,v_2. (Как в задаче 6, достаточно найти, например, параметры v_1 и v_2).

$$\begin{array}{l} 26 + 7u_1 - 5u_2 + u_3 = 17 - 5v_1 + 6v_2, \\ 7 + u_1 - 3u_2 - 3u_3 = 3 + v_1 + 3v_2, \\ 5 + 2u_1 - 2u_2 - u_3 = -4 - -2v_1 + v_2, \\ 6 - u_1 - 3u_2 + 2u_3 = 15 + 3v_1 + 3v_2, \\ -6 + 3u_2 = -7 + 2v_1 - 3v_2 \end{array} \tag{33}$$

Перенесем параметры v_1 и v_2 влево, а свободные члены — вправо и запишем расширенную матрицу полученной системы:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrrr|r} 7 & -5 & 1 & 5 & -6 & -9 \\ 1 & -3 & -3 & -1 & -3 & -4 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & -1 & -9 \\ -1 & -3 & 2 & -3 & -2 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3 & -3 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -6 & -1 & -4 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -3 & 18 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -3 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -7 & 0 & 0 & -22 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -3 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 2\,! \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -15 & 0 & 0 & -30 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -3 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -3 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -7 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -3 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11 & 33 \end{array}\right)$$

Из системы получим $v_1 = -1, \;\; v_2 = -3$. Подставим значение параметров $v_1 = -1$, $v_2 = -3$ в уравнение плоскости β и получим координаты точки $A(4, -7, -5, 6, 0)$.
4 шаг. Запишем каноническое уравнение прямой l :

Ответ: $\;\; l: \; \frac{x_1-4}{1} = \frac{x_2+7}{-3} = \frac{x_3+5}{-1} = \frac{x_4-6}{2} = \frac{x_5-0}{0}$.

Задача 9. Вычислить площадь треугольника, заданного координатами своих вершин в некоторой декартовой прямоугольной системе координат.

Решение. **1 способ.** Найти $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр $\triangle ABC$, a, b, c — его стороны.
2 способ. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin A$.

Поскольку $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \dfrac{(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}{|\overrightarrow{AB}|^2 \cdot |\overrightarrow{AC}|^2}}$, то

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$

Например: $A(-2, -3, -3, -1, 2)$, B(-3, -3, 0, -4, 0), C(1, -1, -6, 0, 1).
Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AB}(-1, 0, 3, -3, -2)$, $\;\; \overrightarrow{AC}(3, 2, -3, 1, -1)$, тогда

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}^2 &= (-1)^2 + 0^2 + 3^2 + (-2)^2 = 23 \\ \overrightarrow{AC}^2 &= 9 + 4 + 9 + 1 + 1 = 24 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= -3 + 0 - 9 - 3 + 2 = -13. \end{aligned}$$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{23 \cdot 24 - 169} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{383}$.

Ответ: $\;\; S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{383}$.

Задача 10. Выяснить взаимное расположение гиперсферы и гиперплоскости, заданных уравнениями.

Пусть уравнение гиперсферы:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 6x_4 + 4x_5 - 104 = 0$$

Уравнение гиперплоскости $l: \;\; -2x_1 - x_2 - 5x_4 = 14$.
Решение. **1 шаг.** Найдем центр и радиус гиперсферы. Для этого методом выделения полных квадратов найдем ее каноническое уравнение:

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 + (x_4 - a_4)^2 + (x_5 - a_5)^2 = r^2$$

$$(x_1^2-2x_1+1)-1+(x_2^2+2x_2+1)-1+(x_3^2-2x_3+1)-1+(x_4^2-6x_4+9)-9+(x_5^2+4x_5+4)-4-104=0$$

$$(x_1-1)^2+(x_2+1)^2+(x_3-1)^2+(x_4-3)^2+(x_5+2)^2=120$$

Следовательно $O(1,-1,1,3,-2)$ и $r=\sqrt{120}=2\sqrt{30}$.

2 шаг. Формула нахождения расстояния от $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$, до гиперплоскости α :

$$b_1x_1+b_2x_2+\dots+b_nx_n+C=0$$

имеет вид:

$$\rho(M_0,\alpha)=\frac{|b_1x_1^0+b_2x_2^0+\dots+b_nx_n^0+C|}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2}}$$

Следовательно

$$\rho(O,l)=\frac{|-2\cdot1-1\cdot(-1)+(-5)\cdot3-14|}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-5)^2}}=\frac{30}{\sqrt{30}}=\sqrt{30}$$

3 шаг. Так как $\sqrt{30}<2\sqrt{30}$, т.е. $\rho(O,l)<r$, то гиперсфера и гиперплоскость пересекаются.

Задача 11. Выяснить взаимное расположение двух гиперсфер, заданных уравнениями.

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2-16x_1-26x_2-20x_3+34x_4+6x_5+597=0,$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+4x_1+4x_2-6x_4-4x_5-13=0.$$

Случаи взаимного расположения двух гиперсфер аналогичны случаям взаимного расположения двух окружностей на плоскости. Этих случаев максимум пять. Пусть $r_1<r_2$. Обозначим через $d=|O_1O_2|$ расстояние между центрами окружностей.

1. Если $d>r_1+r_2$, то одна окружность расположена вне другой.
2. Если $d=r_1+r_2$, то одна окружность касается другой внешним образом.
3. Если $r_2-r_1<d<r_1+r_2$ — окружности пересекаются в двух точках.
4. Если $d=r_2-r_1$, то одна окружность касается другой внутренним образом. .
5. Если $d<r_2-r_1$, то одна окружность расположена внутри другой окружности.

Решение задачи разбиваем на ряд шагов.

Решение. **1 шаг.** Методом выделения полных квадратов приведем уравнения гиперсфер к каноническому виду.

1) $(x_1^2-16x_1+64)-64+(x_2^2-26x_2+169)-169+(x_3^2-20x_3+100)-100+$
$+(x_4^2+34x_4+289)-289+(x_5^2+6x_5+9)-9+597=0$

$$(x_1-8)^2+(x_2-13)^2+(x_3-10)^2+(x_4+17)^2+(x_5+3)^2=34 \qquad (34)$$

$$O_1(8,13,10,-17,-3), \quad r_1=\sqrt{34}$$

2) $(x_1^2+4x_1+4)-4+(x_2^2+4x_2+4)-4+x_3^2+(x_4^2-6x_4+9)-9+(x_5^2-4x_5+4)-4-13=0$

$$(x_1+2)^2+(x_2+2)^2+x_3^2+(x_4-3)^2+(x_5-2)^2=34 \qquad (35)$$

$$O_2(-2,-2,0,3,2), \quad r_2=\sqrt{34}$$

2 шаг. Найдем

$$|O_1O_2|=\sqrt{(8+2)^2+(13+2)^2+10^2+(-17-3)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{850}$$

3 шаг. Сравним $|O_1O_2|$ с r_1+r_2, r_2-r_1.

$\sqrt{850}>2\sqrt{34}$, следовательно гиперсферы не пересекаются, причем одна расположена вне другой.