1. Вектор-функции двух переменных

Пусть V — евклидово линейное пространство и $G \subseteq \mathbb{R}^2$.

Опр. *Отображение из множества G в V называется векторной функцией (вектор-функцией) двух скалярных аргументов.*

Опр. *Вектор $\overrightarrow{a} \in V$ называется **пределом** векторной функции $\overrightarrow{r}(u, v)$ при $(u, v) \to (u_0, v_0)$, $(u_0, v_0) \in G$, если*

$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} |\overrightarrow{r}(u, v) - \overrightarrow{a}| = 0$$

(или, что то же самое, $\lim\limits_{\substack{u\to u_0 \\ v\to v_0}} |\overrightarrow{r}(u, v) - \overrightarrow{a}| = 0$).

Обозначается этот предел $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \overrightarrow{r}(u, v) = \overrightarrow{a}$ и, как видно, сводится к пределу функции двух скалярных переменных.

Опр. *Векторная функция $\overrightarrow{r}(u, v)$ называется **непрерывной** в $(u_0, v_0) \in G$, если*

$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \overrightarrow{r}(u, v) = \overrightarrow{r}(u_0, v_0).$$

Пускай в V выбран ортонормированный базис $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$. Тогда определены функции $x(u, v) = \overrightarrow{r}(u, v) \cdot \overrightarrow{i}$, $y(u, v) = \overrightarrow{r}(u, v) \cdot \overrightarrow{j}$, $z(u, v) = \overrightarrow{r}(u, v) \cdot \overrightarrow{k}$ из G в $\mathbb{R}$, которые ставят в соответствие вектору $\overrightarrow{r}(u, v)$ при $(u, v) \in G$ одну из его координат:

$$\overrightarrow{r}(u, v) = x(u, v)\overrightarrow{i} + y(u, v)\overrightarrow{j} + z(u, v)\overrightarrow{k}.$$

Эти функции называются **координатами** функции $\overrightarrow{r}$ в данном базисе.

Опр. ***Частной производной*** *векторной функции $\overrightarrow{r}(u, v)$ по переменной u в точке $(u_0, v_0) \in G$ называется производная векторной функции $\overrightarrow{r}(u, v_0)$ одной переменной u, то есть*

$$\lim_{\Delta u\to 0} \frac{\overrightarrow{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \overrightarrow{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}.$$

Обозначается частная производная по u как $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ или $\vec{r}\,'_u$.

По аналогии определяется частная производная $\vec{r}(u,v)$ по переменной v, которая обозначается $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ или $\vec{r}\,'_v$.

Теор 1. *Векторная функция $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\,\vec{i} + y(u,v)\,\vec{j} + z(u,v)\,\vec{k}$ имеет в $(u_0,v_0) \in G$ частные производные тогда и только тогда, когда в (u_0,v_0) существуют частные производные x'_u, y'_u, z'_u и x'_v, y'_v, z'_v. При этом в (u_0,v_0) имеет место*

$$\vec{r}\,'_u = x'_u\,\vec{i} + y'_u\,\vec{j} + z'_u\,\vec{k} \quad \text{\textit{и}} \quad \vec{r}\,'_v = x'_v\,\vec{i} + y'_v\,\vec{j} + z'_v\,\vec{k}.$$

Опр. *Векторная функция называется **дифференцируемой** в точке, если ее координаты дифференцируемы в этой точке.*

Согласно определению для скалярных функций, например, для функции $x(u,v)$ это означает, что ее приращение $\Delta x = x(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v) - x(u_0,v_0)$ представляется в виде $\Delta x = x'_u \Delta u + x'_v \Delta v + o(\rho)$ при $\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2} \to 0$.

Тогда эквивалентно, для самой $\vec{r}$ и ее приращения $\Delta\vec{r}$ это переписывается как $\Delta\vec{r} = \Delta x\,\vec{i} + \Delta y\,\vec{i} + \Delta z\,\vec{i} = (x'_u\,\vec{i} + y'_u\,\vec{j} + z'_u\,\vec{k})\Delta u + (x'_v\,\vec{i} + y'_v\,\vec{j} + z'_v\,\vec{k})\Delta v + o(\rho) = \vec{r}\,'_u \Delta u + \vec{r}\,'_v \Delta v + o(\rho)$ при $\rho \to 0$. То есть, $\vec{r}$ дифференцируема, когда $\Delta\vec{r} = \vec{r}\,'_u \Delta u + \vec{r}\,'_v \Delta v + o(\rho)$. Линейная часть этого выражения называется **дифференциалом** функции $\vec{r}$ и обозначается $d\vec{r} = \vec{r}\,'_u du + \vec{r}\,'_v dv$.

2. Параметризованные поверхности.

Далее рассматривается евклидово аффинное пространство E_3 над линейным пространством V и в нем задана декартова система координат $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$.

Опр. *Фигура называется **элементарной поверхностью**, если она гомеоморфна одному из следующих подпространств в $\mathbb{R}^2$:*

1. $\mathbb{R}^2$
2. $\mathbb{R}^2_+ = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u, v \geqslant 0\}$
3. $G = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1\}$

Опр. *Фигура называется **поверхностью**, если ее можно покрыть конечным или счетным множеством элементарных поверхностей.*

Прим 1. *Плоскость, квадрат, круг — элементарные поверхности. Сфера не является элементарной.*

Таким образом, для каждой элементарной поверхности γ гомеоморфизм задает непрерывную векторную функцию $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, определенную на множестве G.

Уравнение $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ или $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$ называются **параметрическими уравнениями** поверхности γ.

Опр. *Поверхность называется **простой**, если любая ее точка имеет окрестность, в которой эта поверхность является элементарной поверхностью (точка является простой).*

Опр. *Элементарная поверхность $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in G$, называется **гладкой поверхностью класса** C^k, если*

1. *ее координаты имеют непрерывные частные производные до порядка k включительно (что влечет их дифференцируемость) и*
2. $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} = 2$ *при любом* $(u,v) \in G$.

Опр. *Простая поверхность называется **гладкой поверхностью класса** C^k, если у каждой ее точки существует окрестность, в которой эта поверхность является гладкой элементарной поверхностью класса C^k.*

Пусть дана элементарная поверхность γ, заданная параметрическими уравнениями $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$ на G.

Опр. *Всякий гомеоморфизм $(\alpha, \beta) = h(u,v)$, отображающий G на G', называется преобразованием (заменой) параметра поверхности γ.*

Гомеоморфизм h задает непрерывные на G функции $\alpha = \alpha(u,v)$ и $\beta = \beta(u,v)$. Отображение h^{-1} будет гомеоморфизмом G' на G, который задает непрерывные на G' функции $u = u(\alpha, \beta)$ и $v = v(\alpha, \beta)$. При этом $(u, v) = (u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta))$. Формулы $x = x(u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta))$, $y = y(u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta))$, $z = z(u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta))$ задают гомеоморфизм G' на γ.

Опр. *Всякий гомеоморфизм $(\alpha, \beta) = h(u, v)$, отображающий G на G', называется преобразованием параметра гладкой поверхности γ класса C^k, если $h(u, v)$ имеет на G непрерывные производные до порядка k включительно и $\begin{vmatrix} \alpha'_u & \alpha'_v \\ \beta'_u & \beta'_v \end{vmatrix} \neq 0$ для всех $(u, v) \in G$.*

3. Касательная плоскость и нормаль

Пусть поверхность γ задана параметрически $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ на G.

Допустим, что задана пара функций $u = u(t), v = v(t)$ на некотором промежутке $I \subseteq \mathbb{R}$, таких, что отображение $t \mapsto (u(t), v(t))$ переводит I в G и является взаимно непрерывным и инъективным. В этом случае функция $\vec{r}(u(t), v(t))$ является векторной функцией одного скалярного аргумента, определенной на промежутке I, и задает некоторую элементарную кривую. Эта кривая лежит на поверхности γ.

В свою очередь всякая кривая на поверхности γ, заданная на некотором промежутке I, определяет взаимно непрерывные функции $u = u(t), v = v(t)$ так, что $t \mapsto \vec{r}(u(t), v(t))$ отображает I в γ и является гомеоморфизмом I на кривую.

Для гладкой класса C^k поверхности γ функции $u = u(t), v = v(t)$, имеющие в I непрерывные производные до порядка k включительно и $\left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right) \neq (0,0)$, определяют лежащую на γ кривую класса C^k.

Теор 2. *Пусть M_0 — точка гладкой поверхности γ класса C^k, заданной векторной функцией $\vec{r}(u,v)$. Тогда существует такая плоскость, что для любой гладкой кривой на поверхности γ касательная к кривой в точке M_0 лежит в этой плоскости. Всякая прямая, проходящая через M_0 и лежащая в этой плоскости, является касательной к некоторой гладкой кривой на поверхности γ.*

Док-во. Так как поверхность гладкая, то векторы $\vec{r}\,'_u$ и $\vec{r}\,'_v$ не коллинеарны. Покажем, что плоскость π, проходящая через M_0 параллельно $\vec{r}\,'_u$ и $\vec{r}\,'_v$ удовлетворяет условию.

Кривая на поверхности задается уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$ на I для соответствующих функций $u(t), v(t)$. Вектор касательной к кривой в точке M_0 равен $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'_u \frac{du}{dt} + \vec{r}\,'_v \frac{dv}{dt}$ и компланарен векторам $\vec{r}\,'_u$ и $\vec{r}\,'_v$. Поэтому касательная лежит в плоскости π.

Если l — произвольная прямая плоскости π, проходящая через M_0, то ее направляющий вектор можно представить $\alpha \vec{r}\,'_u + \beta \vec{r}\,'_v$. Пусть $M_0 = O + \vec{r}(u_0, v_0)$. Кривая на поверхности, определяемая функциями $u = u_0 + \alpha t$ и $v = v_0 + \beta t$ так, чтобы $(u(t), v(t)) \in G$, задается уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u_0 +$

$\alpha t, v_0+\beta t)$. Касательная к этой кривой в точке M_0 будет параллельна вектору $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'_u \frac{du}{dt} + \vec{r}'_v \frac{dv}{dt} = \vec{r}'_u \alpha + \vec{r}'_v \beta$. То есть касательная совпадает с l. □

Плоскость, удовлетворяющую условию Теоремы, называют **касательной плоскостью** к поверхности γ в точке M_0. Касательная плоскость задается $M + \alpha\vec{r}'_u + \beta\vec{r}'_v$ и не зависит от параметризации.

Теор 3. *Расстояние от произвольной точки гладкой поверхности $\vec{r}(u,v)$ до касательной плоскости есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}$ при $\rho \to 0$.*

Док-во. Раскладываем координаты по формуле Тейлора: $x(u_0+\Delta u, v_0 + \Delta v) = x(u_0,v_0) + \frac{dx}{du}\Delta u + \frac{dx}{dv}\Delta v + o(\rho)$ при $\rho \to 0$ и аналогично для y, z. Получается разложение векторной функции $\vec{r}(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v) = \vec{r}(u_0,v_0) + \frac{d\vec{r}}{du}\Delta u + \frac{d\vec{r}}{dv}\Delta v + o(\rho)$, $\rho \to 0$.

Пусть плоскость π проходит через M_0 параллельно единичным неколлинеарным напрявляющим векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$. Вектор $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$ будет единичным нормальным вектором π. Тогда расстояние от точки M на поверхности до плоскости π равно $\frac{|\vec{n}\cdot\Delta\vec{r}|}{|\vec{n}|} = |\vec{n}\cdot\Delta\vec{r}| = |\vec{n}\frac{d\vec{r}}{du}\Delta u + \vec{n}\frac{d\vec{r}}{dv}\Delta v + o(\rho)| \leqslant |\vec{n}\frac{d\vec{r}}{du}\rho| + |\vec{n}\frac{d\vec{r}}{dv}\rho| + o(\rho)$ будет $o(\rho)$ только в случае $\vec{n}\frac{d\vec{r}}{du} = 0$ и $\vec{n}\frac{d\vec{r}}{dv} = 0$, то есть когда π и касательная плоскость совпадают. □

Опр. ***Нормалью*** *к гладкой поверхности γ в точке $M_0 \in \gamma$ называется прямая, проходящая через M_0 перпендикулярно касательной плоскости к γ в этой точке.*

Нормаль задается $M_0 + \alpha\vec{N}$ для $\vec{N} = [\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]$.

Теор 4. *Если гладкая поверхность задана уравнением $F(x,y,z) = 0$, то вектор $\vec{N}(F'_x, F'_y, F'_z)$ является вектором, перпендикулярным касательной плоскости к данной поверхности.*

Док-во. Возьмем произвольную гладкую кривую γ, лежащую на поверхности и проходящую через некоторую ее точку M_0. Пусть кривая γ задана векторной функцией $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ при $t \in I$. Тогда $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$ для любого $t \in I$. Дифференцируя это равенство по t, в точке M_0 получаем $F'_x\frac{dx}{dt} + F'_y\frac{dy}{dt} + F'_z\frac{dz}{dt} = 0$ или $\vec{N}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$. □

4. Первая квадратичная форма

Пусть гладкая поверхность γ задана параметрически $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ при $(u, v) \in G$. Дифференциал векторной функции $\vec{r}$ равен $d\vec{r} = \vec{r}'_u du + \vec{r}'_v dv$. Тогда

$$
\begin{aligned}
d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (d\vec{r})^2 = \\
&= (\vec{r}'_u)^2 (du)^2 + \vec{r}'_u \vec{r}'_v du\, dv + \vec{r}'_v \vec{r}'_u dv\, du + (\vec{r}'_v)^2 (dv)^2 = \\
&= \gamma_{11}(du)^2 + \gamma_{12} du\, dv + \gamma_{21} dv\, du + \gamma_{22}(dv)^2 = \\
&= \gamma_{11}(du)^2 + 2\gamma_{12} du\, dv + \gamma_{22}(dv)^2
\end{aligned}
$$

где $\gamma_{11} = (\vec{r}'_u)^2$, $\gamma_{22} = (\vec{r}'_v)^2$ и $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \vec{r}'_u \vec{r}'_v$.

Это выражение задает положительно определенную ($d\vec{r} \cdot d\vec{r} = |d\vec{r}| > 0$, так как $d\vec{r} \neq \vec{0}$) квадратичную форму в базисе $\vec{r}'_u$, $\vec{r}'_v$ направляющего пространства касательной плоскости.

? она вектору $d\vec{r} = \vec{r}'_u du + \vec{r}'_v dv$ с координатами (du, dv) устанавливливает в соответствие значение $d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \gamma_{11}(du)^2 + 2\gamma_{12} du\, dv + \gamma_{22}(dv)^2$.

Квадратичная форма $\gamma_{11}(du)^2 + 2\gamma_{12} du\, dv + \gamma_{22}(dv)^2$ называется **первой квадратичной формой** поверхности γ.

Пусть на поверхности γ лежит гладкая кривая, заданная функциями $u(t), v(t)$ на I, то есть эта кривая определяется векторной функцией $\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$ от $t \in I$. Производная этой векторной функции от t равна $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'_u \frac{du}{dt} + \vec{r}'_v \frac{dv}{dt}$. Поэтому производная длины s дуги этой кривой есть $\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\gamma_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \gamma_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$.

Тогда длина дуги кривой между точками $t = t_1$ и $t = t_2$ вычисляется $s = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\gamma_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \gamma_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt$.

Опр. *Углом между двумя гладкими кривыми на поверхности, проходящими через точку M называется угол между касательными к этим кривым в точке M.*

Угол между двумя кривыми, которые задаются отображениями $u = u(t), v = v(t)$ и $u = \tilde{u}(t), v = \tilde{v}(t)$ на поверхности $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, возможно вычислить через $\cos\varphi = \frac{d\overrightarrow{r}(u,v)\cdot d\overrightarrow{r}(\tilde{u},\tilde{v})}{|d\overrightarrow{r}(u,v)||d\overrightarrow{r}(\tilde{u},\tilde{v})|}$. По формуле $d\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}'_u du + \overrightarrow{r}'_v dv$ для первой кривой и $d\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}'_u d\tilde{u} + \overrightarrow{r}'_v d\tilde{v}$ для второй получается

$$\cos\varphi = \frac{\gamma_{11} du\, d\tilde{u} + \gamma_{12}(du\, d\tilde{v} + dv\, d\tilde{u}) + \gamma_{22} dv\, d\tilde{v}}{\sqrt{\gamma_{11}(du)^2 + 2\gamma_{12} du\, dv + \gamma_{22}(dv)^2}\sqrt{\gamma_{11}(d\tilde{u})^2 + 2\gamma_{12} d\tilde{u}\, d\tilde{v} + \gamma_{22}(d\tilde{v})^2}}.$$