1 Аффинное пространство

1.1 Аффинное преобразование

Лем 1. *Однородная часть аффинного преобразования является невырожденным линейным оператором.*

Док-во. Пусть φ — однородная часть афф. преобразования f. Для произвольных $\vec{u}$, $\vec{v}$ из равенства $\varphi(\vec{u}) = \varphi(\vec{v})$ следует $f(M+\vec{u}) = f(M)+\varphi(\vec{u}) = f(M)+\varphi(\vec{v}) = f(M+\vec{v})$ для любой точки M. Но f — биекция, значит $M+\vec{u} = M+\vec{v}$ по определению афф. пространства. Отсюда $\vec{u} = \vec{v}$, то есть φ — инъективен. □

След 1. *Однородная часть аффинного преобразования является биективным линейным оператором.*

Док-во. Если пространство конечномерно, то невырожденный оператор всегда сюръективен. Действительно, если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ — базис линейного пространства V, то $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2), \dots, \varphi(\vec{e}_n)$ — базис образа этого оператора: из $\alpha_1\varphi(\vec{e}_1) + \alpha_2\varphi(\vec{e}_2) + \ldots + \alpha_n\varphi(\vec{e}_n) = \vec{0}$ следует $\varphi(\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n) = \varphi(\vec{0})$, по инъективности $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = \vec{0}$, поэтому $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. То есть образ оператора совпадает со всем пространством.

Но покажем явно, без учета невырожденности. Для любого $\vec{u}$ возьмем точку M и обозначим $M + \vec{u} = N$. Для точек M и N существуют прообразы M' и N' при f. Тогда $N' = M' + \overrightarrow{M'N'}$, а значит $N = f(N') = f(M') + \varphi(\overrightarrow{M'N'}) = M + \varphi(\overrightarrow{M'N'})$. По определению, $\varphi(\overrightarrow{M'N'}) = \vec{u}$, то есть для $\vec{u}$ нашелся прообраз. □

Заметим, что для всякого вектора $\overrightarrow{MN}$, так как $M+\overrightarrow{MN} = N$, и $f(M)+\varphi(\overrightarrow{MN}) = f(N)$, получается $\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$.

Теор 1. *Для любых двух точек O и O' и для любого невырожденного линейного оператора φ существует единственное аффинное преобразование f, такое, что $f(O) = O'$ и φ — его однородная часть.*

Док-во. Зададим отображение f для любой точки X через $f(X) = O' + \varphi(\overrightarrow{OX})$.

Обозначим $M + \vec{m} = N$, тогда $f(M + \vec{m}) = O' + \varphi(\overrightarrow{ON}) = O' + \varphi(\overrightarrow{OM} + \vec{m}) = O' + \varphi(\overrightarrow{OM}) + \varphi(\vec{m}) = f(M) + \vec{m}$, то есть отображение f — аффинное.

Выполнено $f(O) = O' + \varphi(\overrightarrow{OO}) = O' + \vec{0} = O'$.

Инъективность f: из $f(X) = f(Y)$ следует $O' + \varphi(\overrightarrow{OX}) = O' + \varphi(\overrightarrow{OY})$, значит $\varphi(\overrightarrow{OX}) = \varphi(\overrightarrow{OY})$, и $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OY}$ по Лем. 1, то есть $X = Y$.

Сюръективность f: для произвольной точки X имеем $f(O + \varphi^{-1}(\overrightarrow{O'X})) = f(O) + \varphi(\varphi^{-1}(\overrightarrow{O'X})) = O' + \overrightarrow{O'X} = X$.

Если существует афф. отображение g с теми же условиями, то для любой точки X получается $g(X) = g(O + \overrightarrow{OX}) = g(O) + \varphi(\overrightarrow{OX}) = O' + \varphi(\overrightarrow{OX}) = f(X)$. □

Опр. *Пусть A, B и C — точки аффинного пространства над полем P, $A \neq B$ и $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$ для $\lambda \in P$. Тогда λ называется простым отношением трех точек A, B и C, и обозначается (AB, C).*

Теор 2 (Свойства)**.**

1. *При аффинном преобразовании сохраняется простое отношение трех точек*

2. *Для всякого аффинного преобразования существует обратное*

3. *При аффинном преобразовании образом k-мерной плоскости является k-мерная плоскость*

4. *При аффинном преобразовании сохраняется взаимное расположение плоскостей (совпадение, включение, пересечение, параллельность, скрещивание)*

Док-во. 1. Из $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$ следует $\varphi(\overrightarrow{AC}) = \varphi(\lambda\overrightarrow{CB}) = \lambda\varphi(\overrightarrow{CB})$, а значит $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda\overrightarrow{f(C)f(B)}$.

2. Пусть f — преобразование с однородной частью φ. Так как отображение f биективное, то существует обратное отображение f^{-1}. Оператор φ тоже биективный (След. 1). Обратное отображение φ^{-1} является линейным оператором. Покажем, что f^{-1} является аффинным отображением. Возьмем любую точку M и вектор $\overrightarrow{m}$. Из того, что $f(f^{-1}(M) + \varphi^{-1}(\overrightarrow{m})) = f(f^{-1}(M)) + \varphi(\varphi^{-1}(\overrightarrow{m})) = M + \overrightarrow{m}$, получается $f^{-1}(M + \overrightarrow{m}) = f^{-1}(M) + \varphi^{-1}(\overrightarrow{m})$.

3. Образом k-мерной плоскости $M + V^k$ очевидно будет $f(M) + \varphi(V^k)$. Нужно показать, что $\dim\varphi(V^k) = k$. Проверим, что если $\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_k$ — базис V^k, то $\varphi(\overrightarrow{e}_1), \dots, \varphi(\overrightarrow{e}_k)$ будет базисом $\varphi(V^k)$. Из $\alpha_1\varphi(\overrightarrow{e}_1) + \dots + \alpha_n\varphi(\overrightarrow{e}_k) = \overrightarrow{0}$ следует $\varphi(\alpha_1\overrightarrow{e}_1 + \dots + \alpha_n\overrightarrow{e}_k) = \overrightarrow{0} = \varphi(\overrightarrow{0})$, но φ невырожден и $\operatorname{Ker}\varphi = \{\overrightarrow{0}\}$, поэтому $\alpha_1\overrightarrow{e}_1 + \dots + \alpha_n\overrightarrow{e}_k = \overrightarrow{0}$, и $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Также нетрудно видеть, $\varphi(\overrightarrow{e}_1), \dots, \varphi(\overrightarrow{e}_k)$ порождает $\varphi(V^k)$.

4. Пусть даны плоскости $\alpha = A + V_\alpha$ и $\beta = B + V_\beta$. Если α содержится в β, то образ $f(\alpha)$ при преобразовании f очевидно будет содержаться в $f(\beta)$.

Если $\alpha \cap \beta$ — k-мерная плоскость, то $f(\alpha \cap \beta)$ тоже k-мерная плоскость, как показано выше. Но, так как f инъективно, $f(\alpha) \cap f(\beta) = f(\alpha \cap \beta)$.

Если α параллельна β, то $V_\alpha \subseteq V_\beta$. Но $f(\alpha) = f(A) + \varphi(V_\alpha)$ и $f(\beta) = f(A) + \varphi(V_\beta)$, причем $\varphi(V_\alpha) \subseteq \varphi(V_\beta)$. То есть $f(\alpha)$ параллельна $f(\beta)$.

Если α и β скрещиваются, то $\alpha \cap \beta = \varnothing$ и $V_\alpha \cap V_\beta = \{\overrightarrow{0}\}$. Как и выше нетрудно установить $f(\alpha) \cap f(\beta) = \varnothing$ и $\varphi(V_\alpha) \cap \varphi(V_\beta) = \{\overrightarrow{0}\}$. □

Теор 3 (Формулы аффинного преобразования). *Пусть $\mathscr{R}(O,\sigma)$ — аффинная система координат и f — аффинное преобразование. Тогда, если $O' = f(O)$, $M' = f(M)$, C — матрица однородной части преобразования f и $O'(a_1,\dots,a_n)_{\mathscr{R}}$, $M(x_1,\dots,x_n)_{\mathscr{R}}$, $M'(x'_1,\dots,x'_n)_{\mathscr{R}}$, то верны формулы*

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Док-во. Можно записать $M' = O' + \overrightarrow{O'M'} = O' + \varphi(\overrightarrow{OM})$, а $\varphi(\overrightarrow{OM})$ вычисляется с помощью матрицы оператора. Разложим $\overrightarrow{OM}$ по базису σ: $\overrightarrow{OM} = x_1\overrightarrow{e}_1 + \dots + x_n\overrightarrow{e}_n$. Тогда $\varphi(\overrightarrow{OM}) = x_1\varphi(\overrightarrow{e}_1) + \dots + x_n\varphi(\overrightarrow{e}_n) = (x_1c_{11} + \dots + x_nc_{1n})\overrightarrow{e}_1 + \dots + (x_1c_{n1} + \dots + x_nc_{nn})\overrightarrow{e}_1$. □

Теор 4 (Основная теорема аффинной геометрии). *Биективное отображение f аффинного пространства на себя является аффинным преобразованием тогда и только тогда, когда*

1. *для любых точек A, B и C принадлежащих одной прямой, точки $f(A)$, $f(B)$ и $f(C)$ принадлежат одной прямой*

2. *f сохраняет простое отношение трех точек.*

Док-во. По Теор. 2 (Свойства) получаем необходимость условий.

Покажем достаточность. Зададим φ по правилу $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ для любой пары точек A и B, и покажем, что это линейный оператор для f.

Для произвольных $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ можно выбрать $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{v} = BC$. Тогда $\varphi(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \varphi(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{f(A)f(C)} = \overrightarrow{f(A)f(B)} + \overrightarrow{f(B)f(C)} = \varphi(\overrightarrow{u}) + \varphi(\overrightarrow{v})$.

Возьмем произвольно $\overrightarrow{u}$ и элемент поля λ. Если $\lambda = 0$, то сразу $\varphi(\lambda\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} = \lambda\varphi(\overrightarrow{u})$, поэтому рассмотрим $\lambda \neq 0$. Зафиксируем некоторую точку A и обозначим $A + \overrightarrow{u} = C$ и $C + \lambda\overrightarrow{u} = B$. Заметим, что простое отношение $(AB, C) = \lambda^{-1}$ так как $\overrightarrow{AC} = \lambda^{-1}\overrightarrow{CB}$.

Точки A, B и C принадлежат одной прямой, а значит $f(A)$, $f(B)$ и $f(C)$ также принадлежат одной прямой по условию. По условию, простое отношение $(f(A)f(B), f(C)) = \lambda^{-1}$, то есть $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda^{-1}\overrightarrow{f(C)f(B)}$. Получаем $\varphi(\lambda\overrightarrow{u}) = \varphi(\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{f(C)f(B)} = \lambda\overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda\varphi(\overrightarrow{AC}) = \lambda\varphi(\overrightarrow{u})$.

Показано, что φ — линейный оператор. Проверим, что φ невырожденный оператор, а именно $\operatorname{Ker}\varphi = \{\overrightarrow{0}\}$. Пусть $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0}$ для некоторых A и B. По определению φ пишем $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{0}$, что означает $f(A) = f(B)$. Но f — биекция, $A = B$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.

Так как невырожденный оператор в данном случае биективен (см. Док-во След. 1), то осталось проверить, что $f(M + \overrightarrow{m}) = f(M) + \varphi(\overrightarrow{m})$ для любой точки M

и любого $\overrightarrow{m}$. Обозначив $M+\overrightarrow{m} = N$, видим $f(M+\overrightarrow{m}) = f(N) = f(M)+\overrightarrow{f(M)f(N)} = f(M) + \varphi(\overrightarrow{MN}) = f(M) + \varphi(\overrightarrow{m})$. □

1.2 Группа аффинных преобразований и ее подгруппы

Теор 5. *Множество GA всех аффинных преобразований данного аффинного пространства $\mathscr{A}$ образует группу относительно операции композиции отображений.*

Док-во. Пусть f и g — аффинные преобразования с однородными частями φ и ψ. Проверим замкнутость. Тогда $f\circ g(M+\overrightarrow{m}) = f(g(M+\overrightarrow{m})) = f(g(M)+\psi(\overrightarrow{m})) = f(g(M)) + \varphi(\psi(\overrightarrow{m})) = f \circ g(M) + \varphi \circ \psi(\overrightarrow{m})$. Композиция двух (невырожденных) линейных операторов есть (невырожденный) линейный оператор, поэтому $f \circ g$ — аффинное преобразование с однородной частью $\varphi \circ \psi$.

Композиция отображений ассоциативна. Существование единицы очевидно (тождественное преобразование), существование обратного показано в Теор. 2 (Свойства). □

Теор 6. *Множество T всех сдвигов аффинного пространства является подгруппой в группе аффинных преобразований.*

След 2. *Группа сдвигов T изоморфна аддитивной группе $(V, +)$ векторного пространства V.*

Теор 7. *Множество всех гомотетий с фиксированным центром O является подгруппой группы аффинных преобразований.*

Опр. *Аффинное преобразование называется центроаффинным с центром в точке O, если при этом преобразовании точка O отображается на себя.*

Прим 1. Гомотетия.

Теор 8. *Пусть O – фиксированная точка аффинного пространства. Тогда любое аффинное преобразование f единственным образом представляется в виде композиции некоторого сдвига и некоторого центроаффинного преобразования с центром O.*

Док-во. Обозначим через φ однородную часть f и $O' = f(O)$. По Теор. 1 существует единственное аффинное преобразование g, переводящее O в O и с однородной частью φ. Преобразование g центроаффинное.

Покажем, что $t_{\overrightarrow{OO'}} \circ g = f$. Для любой точки X получаем $t_{\overrightarrow{OO'}} \circ g(X) = t_{\overrightarrow{v}} \circ g(O+\overrightarrow{OX}) = t_{\overrightarrow{v}}(O+\varphi(\overrightarrow{OX})) = (O+\varphi(\overrightarrow{OX}))+\overrightarrow{OO'} = O'+\varphi(\overrightarrow{OX}) = f(O)+\varphi(\overrightarrow{OX}) = f(X)$.

Если $t_{\overrightarrow{v}} \circ h = f$ для некоторого $h \in GA$, $h(O) = O$, то $t_{\overrightarrow{v}} \circ h(O) = t_{\overrightarrow{v}}(O) = f(O) = O'$. Поэтому $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OO'}$, то есть $t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{OO'}}$. Умножим $t_{\overrightarrow{v}} \circ h = t_{\overrightarrow{OO'}} \circ g$ слева на $t_{-\overrightarrow{OO'}}$ и получим $h = g$. Единственность доказана. □

2 Евклидово пространство

2.1 Евклидово линейное пространство

Опр. *Линейное пространство V над полем $\mathbb{R}$ называется евклидовым, если на нем определено отображение $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ (называется скалярным произведением), удовлетворяющее свойствам:*

1. $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$
2. $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\,\vec{b})$
3. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\,\vec{b} + \vec{a}\,\vec{c}$
4. *если* $\vec{a} \neq \vec{0}$, *то* $\vec{a}\,\vec{a} > 0$

для любых $\vec{a}, \vec{b} \in V$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Опр. *Длиной вектора $\vec{a}$ евклидового линейного пространства называется число $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\,\vec{a}}$.*

Опр. *Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ евклидового линейного пространства называется любое число φ такое, что $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.*

Такое число существует, то есть определение корректно, так как $-1 \leqslant \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \leqslant 1$. В самом деле, $0 \leqslant \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \pm \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)^2 \leqslant \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)^2 \pm 2\frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} + \left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)^2 = 2 \pm 2\frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ и поэтому $-1 \leqslant \pm\frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

2.2 Евклидово пространство

Опр. *Аффинное пространство $\mathscr{A}$ над полем $\mathbb{R}$ называется евклидовым, если евклидовым является линейное пространство, над которым рассматривается $\mathscr{A}$.*

Опр. *Расстоянием между точками A и B екевлидового пространства называется длина вектора $\overrightarrow{AB}$.*

Опр. *Аффинная система координат $\mathscr{R}(O, \delta)$ называется ортонормированной, если базис δ является ортонормированным.*

Легко проверить, что скалярное произведение векторов равно сумме произведений их соответствующих координат в некотором ортонормированном базисе.

Теор 9. *Коэффициенты в общем уравнении k-мерной плоскости в ортонормированной системе координат являются координатами векторов, ортогональных данной плоскости.*

Док-во. Любой вектор направляющего пространства плоскости является решением однородной системы, соответствующей системе линейных уравнений, которая задает плоскость: если вектор $\overrightarrow{v}$ принадлежит направляющему пространству, то в плоскости найдутся такие точки $A(a_1, \dots, a_n)$ и $B(b_1, \dots, b_n)$, что $\overrightarrow{v}$ будет иметь координаты $(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$. Отсюда скалярное произведение любого направляющего вектора плоскости и вектора, чьи координаты являются коэффициентами одного из уравнений системы, есть ноль. □

Опр. *Ортогональной проекцией точки M на плоскость $\pi = M_0 + V^k$ называется такая точка $P \in \pi$, что $\overrightarrow{MP}$ перпендикулярен любому вектору из V^k.*

Теор 10. *Ортогональная проекция любой точки на любую плоскость существует и единственна.*

Док-во. Пусть даны плоскость $\pi = M_0 + V^k$ и точка $M \notin \pi$ в n-мерном евклидовом пространстве. По Теор. 9 и Теор. об общем уравнении существует $n - k$ линейно независимых векторов, перпендикулярных V^k. Обозначим линейное пространство, порожденное этими векторами через W^{n-k}. Тогда $V^k \cap W^{n-k} = \{\overrightarrow{0}\}$: возьмем $\overrightarrow{v} \in V^k \cap W^{n-k}$, запишем его разложение по некоторому ортонормированному базису V^k и базису W^{n-k} следующим образом $\alpha_1 \overrightarrow{e}_1 + \ldots + \alpha_k \overrightarrow{e}_k = \beta_1 \overrightarrow{w}_1 + \ldots + \beta_{n-k} \overrightarrow{w}_{n-k}$, это равенство будем по очереди скалярно умножать на $\overrightarrow{e}_i$, получая в результате равенства $\alpha_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, k$.

Плоскости π и $M + W^{n-k}$ пересекаются в единственной точке P так как $V^k \cap W^{n-k} = \{\overrightarrow{0}\}$ и $\overrightarrow{M_0M} \in V^k + W^{n-k}$. Точка P очевидно является проекцией M на π.

Для любой проекции P' точки M на π вектор $\overrightarrow{MP'}$ ортогонален V^k и поэтому принадлежит W^k. Следовательно, прямая MP' лежит в $M + W^{n-k}$ и имеет только одну точку пересечения с π, которая совпадает с P. □

Опр. *Расстоянием от точки M до k-мерной плоскости $\pi = M_0 + V^k$ в евклидовом пространстве называется расстояние между M и ее ортогональной проекцией на π.*

Теор 11. *Пусть в ортонормированной системе координат R гиперплоскость π задана уравнением $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$. Тогда расстояние от точки $M(y_1, y_2, \dots, y_n)_R$ до π равно $\frac{|a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}}$.*

Док-во. Пусть M — точка, не лежащая на плоскости π, а $M'(y_1', y_2', \dots, y_n')$ — проекция M на π. Вектор $\overrightarrow{n}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ перпендикулярен π и коллинеарен $\overrightarrow{M'M}$.

> Если векторы $\overrightarrow{n}$ и $\overrightarrow{M'M}$ коллинеарны, то $\overrightarrow{M'M} = \lambda\overrightarrow{n}$ и $|\overrightarrow{M'M}| = |\lambda||\overrightarrow{n}|$ для подходящего λ. Тогда $\overrightarrow{n}\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{n}(\lambda\overrightarrow{n}) = \lambda(\overrightarrow{n}\,\overrightarrow{n}) = \lambda|\overrightarrow{n}|^2 = \pm|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{M'M}|$

Отсюда имеем $\overrightarrow{n}\overrightarrow{M'M} = \pm|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{M_0M}| = a_1(y_1 - y_1') + a_2(y_2 - y_2') + \ldots + a_n(y_n - y_n')$. Выражаем $|\overrightarrow{M_0M}| = \pm\frac{a_1(y_1-y_1')+a_2(y_2-y_2')+\ldots+a_n(y_n-y_n')}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}} = \pm\frac{a_1y_1+a_2y_2+\ldots+a_ny_n-b}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}$, отсюда расстояние равно $\frac{|a_1y_1+a_2y_2+\ldots+a_ny_n-b|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}$. □

2.3 Движение евклидова пространства

Опр. *Биекцию евклидова аффинного пространства на себя называют движением, если она сохраняет расстояние между любыми двумя точками.*

Прим 2. Сдвиг.

Док-во. Однородная часть сдвига — тождественный оператор, поэтому $t_{\vec{v}}(Y) = t_{\vec{v}}(X) + \overrightarrow{XY}$ и $|\overrightarrow{XY}| = |\overrightarrow{t_{\vec{v}}(X)t_{\vec{v}}(Y)}|$ для любых точек X, Y. □

Опр. *Линейный оператор φ называется ортогональным, если для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ верно $\vec{x}\,\vec{y} = \varphi(\vec{x})\varphi(\vec{y})$ (сохраняется скалярное произведение).*

Теор 12 (Свойства).

1. *Движение является аффинным преобразованием.*
2. *Множество всех движений образует группу относительно операции композиции отображений.*
3. *Линейный оператор, соответствующий движению является ортогональным.*

Док-во. 1. Пусть f — движение евклидова аффинного пространства $\mathscr{A}$, связанного с линейным пространством V. Обозначим $\varphi : V \longrightarrow V$, заданное равенством $\varphi(\overrightarrow{XY}) = \overrightarrow{g(X)g(Y)}$ для любых точек X и Y. Установим, что φ — линейный оператор и подходит в качестве однородной части f.

Сначала проверим, что φ сохраняет скалярное произведение. Для произвольных $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{BC}$ выполняется $|\vec{x}+\vec{y}| = |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| =^*$ g сохраняет расстояние $^*= |\overrightarrow{g(A)g(C)}| = |\overrightarrow{g(A)g(B)} + \overrightarrow{g(B)g(C)}| = |\varphi(x) + \varphi(y)|$. Возведем в квадрат начало и конец: $|\vec{x} + \vec{y}|^2 = (\vec{x} + \vec{y})^2 = |\vec{x}|^2 + 2\vec{x}\,\vec{y} + |\vec{y}|^2$ с одной стороны и $|\varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})|^2 = |\varphi(\vec{x})|^2 + 2\varphi(\vec{x})\varphi(\vec{y}) + |\varphi(\vec{y})|^2$ с другой. Подставляя $\vec{y} = \vec{0}$, с учетом $\varphi(\vec{0}) = \varphi(\overrightarrow{XX}) = \overrightarrow{g(X)g(X)} = \vec{0}$, получим $|\varphi(\vec{x})| = |\vec{x}|$ для любого $\vec{x}$. Используя это, окончательно получаем $\vec{x}\,\vec{y} = \varphi(\vec{x})\varphi(\vec{y})$.

Теперь проверим, что φ — линейный оператор. Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ — ортонормированный базис V. Тогда $\varphi(\vec{e}_1), \ldots, \varphi(\vec{e}_n)$ — также ортонормированный базис V, так как φ сохраняет длину векторов и их перпендикулярность. Согласно Теор. о сущ. и ед. линейного оператора, существует единственный оператор, переводящий векторы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ в векторы $\varphi(\vec{e}_1), \ldots, \varphi(\vec{e}_n)$: для произвольного $\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n$ такой оператор задается по правилу $\vec{x} \mapsto$

$\alpha_1\varphi(\overrightarrow{e}_1) + \ldots + \alpha_n\varphi(\overrightarrow{e}_n)$. Но i-ая координата $\varphi(x)$ в базисе $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ равна $\varphi(\overrightarrow{x})\varphi(\overrightarrow{e}_i) =^*$ используем сохранение скалярного произведения $^* = \overrightarrow{x}\overrightarrow{e}_i = \alpha_i$, то есть φ делает так же, как этот оператор, значит это он и есть.

Осталось убедиться, что $g(M + \overrightarrow{m}) = g(M) + \varphi(\overrightarrow{m})$ для любых M и $\overrightarrow{m}$. Обозначим $M + \overrightarrow{m} = N$. Тогда $g(M) + \varphi(\overrightarrow{MN}) = g(M) + \varphi(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = g(M) + \varphi(\overrightarrow{ON}) - \varphi(\overrightarrow{OM}) = g(M) + \overrightarrow{Og(N)} - \overrightarrow{Og(M)} = g(N)$.

2. Замкнутость относительно композиции очевидна. Обратное отображение для движения также очевидно является движением. □

Теор 13. *Линейный оператор сохраняет длину векторов тогда и только тогда, когда он ортогональный.*

Док-во. Если φ сохраняет длину векторов, то $|\overrightarrow{x}|^2 + 2\overrightarrow{x}\overrightarrow{y} + |\overrightarrow{y}|^2 = |\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}|^2 = |\varphi(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y})|^2 = |\varphi(\overrightarrow{x}) + \varphi(\overrightarrow{y})|^2 = |\varphi(\overrightarrow{x})|^2 + 2\varphi(\overrightarrow{x})\varphi(\overrightarrow{y}) + |\varphi(\overrightarrow{y})|^2 = |\overrightarrow{x}|^2 + 2\varphi(\overrightarrow{x})\varphi(\overrightarrow{y}) + |\overrightarrow{y}|^2$. Что влечет $\overrightarrow{x}\overrightarrow{y} = \varphi(\overrightarrow{x})\varphi(\overrightarrow{y})$.

Если φ ортогонален, то $|\overrightarrow{x}|^2 = \overrightarrow{x}\overrightarrow{x} = \varphi(\overrightarrow{x})\varphi(\overrightarrow{x}) = |\varphi(\overrightarrow{x})|^2$. □

Теор 14. *Для того, чтобы преобразование евклидова пространства было движением, необходимо и достаточно, чтобы оно было аффинным и его однородная часть была ортогональным оператором.*

Док-во. Необходимость доказана в Теор. 12 (Свойства). Если же однородная часть сохраняет длины векторов, то само преобразование — расстояние между точками. □

Теор 15. *Для любых двух точек O и O' в евклидовом пространстве и для любого ортогонального линейного оператора φ существует единственное движение f такое, что $f(O) = O'$ и φ — его однородная часть.*

Док-во. Ортогональный линейный оператор сохраняет длину, поэтому является невырожденным. По Теор. сущ. и ед. аффинного преобразования, есть аффинное преобразование f с однородной частью φ и $f(O) = O'$. Применяем Теор. 14. □

Теор 16. *В ортонормированной аффинной системе координат формулы движения совпадают с формулами аффинного преобразования, кроме того матрица однородной части является ортогональной.*

Док-во. Движение есть аффинное преобразование и в матрице C однородной части записаны координаты базисных векторов, а значит координаты векторов некоторого ортонормированного базиса. Поэтому $C^t \cdot C = E$. □

2.4 Классификация движений

Лем 2. *В линейном пространстве над полем $\mathbb{R}$ всякий линейный оператор имеет одномерное или двумерное инвариантное пространство.*

Док-во. Покажем, что существует минимальный многочлен, аннулирующий оператор φ, то есть такой многочлен $t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} t + \alpha_n$, что в алгебре линейных операторов над полем $\mathbb{R}$ рассматриваемого линейного пространства оператор $\varphi^n + \alpha_1 \varphi^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\varphi + \alpha_n \varepsilon$ является нулевым.

Алгебра линейных операторов конечномерна, поэтому возможно выбрать максимальный линейно независимый набор операторов вида $\varepsilon, \varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{n-1}$, начатый с тождественного оператора. Тогда φ^n линейно выражается через них, а значит $\varphi^n + \alpha_1\varphi^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\varphi + \alpha_n\varepsilon$ — нулевой оператор для подходящих коэффициентов α_i. Видим, что многочлен $t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} t + \alpha_n$ аннулирует φ. Если бы нашелся многочлен $\beta_0 t^m + \beta_1 t^{m-1} + \ldots + \beta_{n-1} t + \beta_n$ степени m меньшей n и аннулирующий φ, или иначе $\beta_0\varphi^m + \beta_1\varphi^{m-1} + \ldots + \beta_{n-1}\varphi + \beta_n\varepsilon$ — нулевой оператор и $\beta_0 \neq 0$, получилось бы противоречие с линейной независимостью операторов $\varepsilon, \varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{m-1}$.

Заметим далее, что любой аннулирующий φ многочлен делится на этот минимальны без остатка в кольце многочленов над полем $\mathbb{R}$.

Пусть $f(t)$ — минимальный многочлен, аннулирующий оператор φ.

Если у f есть действительный корень α, то $f(t) = (t-\alpha)g(t)$ для некоторого многочлена $g(t) \in \mathbb{R}[x]$. Многочлен g не аннулирует φ, поэтому существует $\vec{u}$ для которого $g(\varphi)(\vec{u}) \neq \vec{0}$. Обозначим $\vec{v} = g(\varphi)(\vec{u})$. Получаем $\vec{0} = f(\varphi)(\vec{u}) = (\varphi - \alpha\varepsilon)g(\varphi)(\vec{u}) = \varphi g(\varphi)(\vec{u}) - \alpha g(\varphi)(\vec{u}) = \varphi(\vec{v}) - \alpha\vec{v}$. Отсюда $\varphi(\vec{v}) = \alpha\vec{v}$, а значит $\vec{v}$ — собственный вектор.

Если же у f нет действительных корней, тогда у φ нет собственных векторов. Но у f найдется пара сопряженных комплексных корней, поэтому можно записать $f(t) = (t^2 - \alpha t - \beta)g(t)$ для некоторого многочлена $g(t)$. Многочлен g не аннулирует φ, поэтому $\vec{v} = g(\varphi)(\vec{u}) \neq \vec{0}$ для некоторого $\vec{u}$. Имеем $\vec{0} = f(\varphi)(\vec{u}) = (\varphi^2 - \alpha\varphi - \beta\varepsilon)g(\varphi)(\vec{u}) = \varphi^2 g(\varphi)(\vec{u}) - \alpha\varphi g(\varphi)(\vec{u}) - \beta g(\varphi)(\vec{u}) = \varphi^2(\vec{v}) - \alpha\varphi(\vec{v}) - \beta\vec{v}$, а значит $\varphi^2(\vec{v}) = \alpha\varphi(\vec{v}) + \beta\vec{v}$ принадлежит $L(\varphi(\vec{v}), \vec{v})$. Линейная оболочка $L(\varphi(\vec{v}), \vec{v})$ образует двухмерное пространство, так как $\varphi(\vec{v}) \neq \lambda\vec{v}$ ни для какого λ, и инвариантна относительно φ: любой элемент $\vec{x} \in L(\varphi(\vec{v}), \vec{v})$ можно представить как $\gamma\vec{v} + \delta\varphi(\vec{v})$, а значит $\varphi(\gamma\vec{v} + \delta\varphi(\vec{v})) = \gamma\varphi(\vec{v}) + \delta\varphi^2(\vec{v}) \in L(\varphi(\vec{v}), \vec{v})$. □

Лем 3. *Пусть U — инвариантное подпространство относительно ортогонального оператора φ в V. Тогда ортогональное дополнение $U^\perp$ к U в V также инвариантно относительно φ.*

Док-во. Возьмем произвольно $\vec{v} \in U^\perp$. Для любого $\vec{u} \in U$ есть прообраз $\vec{u}' \in U$ при φ, так как φ невырожденный. Поэтому $\vec{u}\varphi(\vec{v}) = \varphi(\vec{u}')\varphi(\vec{v}) = \vec{u}'\vec{v} = 0$, то есть $\varphi(\vec{v}) \in U^\perp$. □

По Лем. 2 и 3 линейное пространство V над полем $\mathbb{R}$ можно разложить в прямую сумму одномерных и двухмерных (неразложимых в одномерные, то есть без инвариантных подпространств) инвариантных подпространств: $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$ Выберем в каждом подпространстве ортонормированные базисы, объединив которые получим базис всего пространства. Матрица оператора в этом базисе будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} C_1 & O & & O \\ O & C_2 & & O \\ & & \ddots & \\ O & O & & C_n \end{pmatrix}$$

где C_i — матрица ограничения оператора φ на подпространство V_i, а O — нулевые матрицы соответствующих размеров. Каждое ограничение является ортогональным оператором на пространстве одномерном, либо двухмерном пространстве без (нетривиальных) инвариантных подпространств.

Если V_i размерности 1, то $C_i = (\pm 1)$.

Если размерность V_i равна 2, то пусть $C = C_i = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$. Обозначив выбранный в V_i базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, получим элемент $c_{ij} = \varphi(\vec{e}_j)\vec{e}_i = \cos\varphi_{ij}$ — косинус угла между $\varphi(\vec{e}_j)$ и $\vec{e}_i$. Матрица ортогональная, поэтому $|C| = \pm 1$. Но в случае с $|C| = -1$ характеристический многочлен $\lambda^2 - \lambda(c_{11} + c_{22}) + c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = \lambda^2 - \lambda(c_{11} + c_{22}) - 1$ оператора на V_i имеет пару действительных корней, а оператор имеет одномерное инвариантное подпространство, что противоречит неразложимости V_i. Значит $|C| = 1$. Теперь можно вычислить обратную матрицу $\begin{pmatrix} c_{22} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{11} \end{pmatrix} = C^{-1} = C^t = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$. Кроме того, $c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1$ и с учетом $c_{11} = \cos\varphi$ получаем $c_{21} = \pm\sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \pm\sin\varphi$. Следовательно, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & -c_{21} \\ c_{21} & c_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, где φ — угол между $\vec{e}_1$ и $\varphi(\vec{e}_1)$, либо $\varphi = 2\pi - \psi$ где ψ — угол между $\vec{e}_1$ и $\varphi(\vec{e}_1)$.

Теор 17. *Для любого движения n-мерного евклидова пространства существует ортонормированная система координат, в которой это движение задается формулами вида:*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & O & & O \\ O & R_2 & & O \\ & & \ddots & \\ O & O & & R_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \text{где } R_i = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}.$$

Теор 18. *Любое движение двухмерного евклидова пространства (плоскости) есть движение одного из следующих видов:*

1. *тождественное преобразование,*

2. *параллельный перенос (сдвиг на вектор),*

3. *поворот вокруг точки,*

4. *симметрия относительно прямой (осевая симметрия),*

5. *симметрия относительно прямой и сдвиг вдоль нее (скользящая симметрия).*

Док-во. Формулы имеют вид $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Матрица C однородной части движения может быть одной из матриц:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 3. $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

В первом случае получается тождественное преобразование и сдвиг.

Во втором случае $\begin{cases} x_1' = -x_1 + a_1 \\ x_2' = x_2 + a_2 \end{cases}$ перейдем к новой системе координат формулами $\begin{cases} x_1 = x + a_1/2 \\ x_2 = y \end{cases}$ получим $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y + a_2 \end{cases}$, а это симметрия относительно прямой $y = 0$ и сдвиг на вектор $(0, a_2)$.

В третьем случае перейдем к новому началу (a_1, a_2) координат, которое является неподвижной точкой, и получим формулы поворота вокруг начала координат. □