1. Исторический обзор обоснования евклидовой геометрии

Евклид (330–275 гг. до н. э.) подытожил и систематизировал многовековую работу греческих геометров в труде “Начала” (Elements) — старейшем из дошедших до наших времен математическом сочинении (есть свидетельства в том числе и о других “началах”).

Название “элемент” использовалось (согласно Проклу[1]) как обозначение таких основных теорем на которых основывались доказательства многих других теорем. В греческом слово “элемент” также совпадает со словом “буква”.

Если Библия является самой продаваемой книгой всех времен, то Начала — самый популярный учебник по геометрии (и вторая книга) всех времен: после 1482 г. (первое печатное издание) они выдержали около 500 изданий (более 1000 изданий).

13 книг: геометрия — I–IV, VI книги (планиметрия), XI–XIII (стереометрия), остальные — арифметика в геометрическом изложении.

В каждой книге:

1. определяются все понятия, которые встречаются далее

   Примеры (книга I, Определения 1–10, всего 23):

   1. Точка есть то, что не имеет частей.
   2. Линия есть длина без ширины.
   3. Границы линии суть точки.
   4. Прямая есть такая линия, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам.
   5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
   6. Границы поверхности суть линии.
   7. Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена по отношению ко всем прямым, на ней лежащим.

[1] 412–485 до н. э., древнегреческий математик

8. Плоский угол есть наклонение друг к другу двух линий, в плоскости встречающихся друг с другом, но не расположенных по одной прямой.
9. Когда линии, содержащие угол, прямые, то угол называется прямолинейным.
10. Когда прямая, восстановленная на другой прямой, образует рядом углы, равные между собой, то каждый из равных углов есть прямой, а восстановленная прямая называется перпендикуляром к той, на которой она восстановлена.

   …

2. идут “постулаты” и “аксиомы” (предложения без доказательства)

   Примеры (книга I, Постулаты 1–5):

   I. Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую.
   II. И чтобы каждую прямую можно было неопределенно продолжить.
   III. И чтобы от любого центра можно было описать окружность любого радиуса.
   IV. И чтобы все прямые углы были равны.
   V. И чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

   Примеры (книга I, Аксиомы, всего 9):

   I. Равные порознь третьему равны между собой.
   II. И если к равным прибавить равные, то получим равные.
   III. И если от равных отнимем равные, то получим равные.
   VII. И совмещающиеся равны.

VIII. И целое больше части.

…

3. идут “предложения” — теоремы (доказываемые предложения) и задачи на построение

   Примеры (книга I, Предложения, всего 48):

   4. Первый признак равенства треугольников.
   5. Углы при основании в равнобедренном треугольнике.
   6. Обратная теорема.
   13. О равенстве суммы смежных углов двум прямым.
   15. Вертикальные углы равны.

   (a) …

   Заканчивается I книга теоремой Пифагора.

“Начала” считаются вершиной античной математики и обладают чрезвычайной строгостью рассуждений для математики того времени. С точки зрения требований к точности в современной математике изложение неприемлемое.

Примеры:

1. Не ясные определения: чем отличается прямая от окружности?
2. Неопределенные понятия: “длина” и “ширина”
3. Не все используемые утверждения доказываются:

   признак равенства треугольников доказывается методом наложения, никак не описанным в постулатах и аксиомах;

   используется без доказательств, что две окружности, с центрами на расстоянии, равном их радиусу, пересекаются в двух точках.

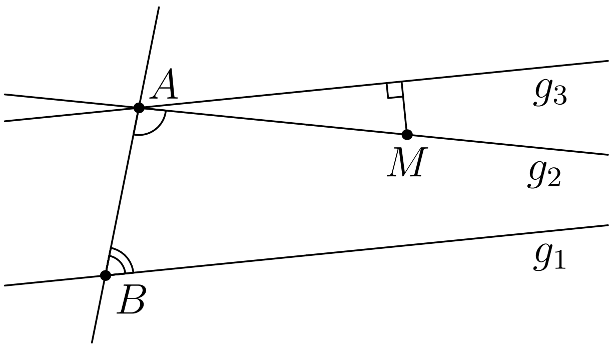
Уже древние греки пытались улучшить изложение “Начал” Евклида.

Главная задача при этом: свести систему постулатов и аксиом Евклида к минимуму. Поэтому некоторые из постулатов и аксиом пытались вывести из остальных.

Например, IV постулат о равенстве всех прямых углов был выведен из других.

Но попытки доказать V постулат были и остались безрезультатными. В книге I “Начал” первые 28 предложений доказываются без ссылок на пятый постулат.

Пример доказательства Прокла:



Проведем через A прямую $g_3 \parallel g_1$. На прямой g_2 возьмем M и опустим из нее перпендикуляр на g_3.

При удалении M от A ее расстояние от g_3 неограниченно растет, а расстояние между параллельными g_1 и g_3 постоянно. Поэтому на g_2 найдется C, принадлежащая g_1.

Используемое в доказательстве свойство об постоянстве расстояния между параллельными прямыми не может быть доказано без аксиомы параллельности в каком-то виде.

Известны и другие утверждения, с помощью которых можно доказать V постулат.

1. Все перпендикуляры к одной стороне некоторого острого угла пересекают его другую сторону.

2. Существуют подобные и неравные треугольники.

3. Существуют треугольники сколь угодно большой площади.

4. Существуют треугольники с суммой углов, равной двум прямым.
5. Через точку вне данной прямой можно провести не более одной прямой, ей параллельной.

Попытки доказательства V постулата не привели к желаемому результату, но сыграли положительную роль в развитии геометрии.

Один из способов доказательства V постулата, которым пользовались многие геометры XVIII–XIX в. состоял в следующем: V постулат заменялся его отрицанием или каким-либо утверждением, эквивалентным отрицанию и полученная система постулатов и аксиом использовалась для доказательства различных теорем. Если V постулат следует из остальных постулатов и аксиом, то измененная система противоречива, то есть мы придем к двум взаимно исключающим утверждениям.

Саккери[2] рассматривал четырехугольник с двумя прямыми углами при основании и равными боковыми сторонами. Относительно двух других углов этого четырехугольника (они равны) можно рассматривать три гипотезы: углы прямые, острые или тупые.

Саккери доказывает, что гипотеза прямых углов эквивалентна V постулату. Постулировав гипотезу тупого угла, Саккери приходит к противоречию и рассматривает гипотезу острого угла. Здесь он получает различные следствия. Например, параллельные прямые имеют либо только один общий перпендикуляр, в обе стороны от которого неограниченно расходятся, либо не имеют ни одного, и, сближаясь ассимптотически в одном направлении, неограниченно расходятся в другом.

Эти следствия противоречат привычным представлениям, но логических противоречий найти не получается (он его нашел, но, как оказалось, в результате вычислительной ошибки).

Ламберт[3] (1766) брал четырехугольник с тремя прямыми углами. Рассматривал три гипотезы для четвертого угла: угол прямой, тупой, острый.

Он доказал, что гипотеза прямого угла эквивалентна V постулату, а гипотеза тупого угла невозможна. Гипотеза острого угла тоже привела к большо-

[2] Джироламо, 1667–1733, итальянский математик

[3] Иоганн Генрих, 1728–1777, немецкий философ, математик, физик и астроном

му количеству следствий, но в них не было противоречий. Развивая систему следствий гипотезы острого угла, Ламберт обнаружил аналогию этой системы с геометрией на сфере.

Лежандр[4] рассматривал три гипотезы относительно суммы углов треугольника: сумма углов равна двум прямым, больше двух прямых или меньше.

Лежандр показал, что равенство двум прямым эквивалентно V постулату, а превышение суммой углов двух прямых ведет к противоречию. Приняв гипотезу о том, что сумма углов меньше двух прямых он пришел к противоречию. Но, все же он неявно воспользовался в этом доказательстве V постулатом через одно из эквивалентных ему утверждений.

Лобачевский[5] тоже пытался доказать V постулат. Он рассмотрел одно из эквивалентных утверждений:

Через точку вне данной прямой проходит не более одной прямой, параллельной данной.

В этом виде ее сформулировал Плейфер (1795). Лобачевский заменил V постулат отрицанием этого утверждения:

Через точку вне прямой на плоскости проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную.

Развив свою систему до объема “Начал” Евклида, он не обнаружил в ней противоречий. В результате он сделал вывод (1826), что существует геометрия, отличная от геометрии Евклида, в которой V постулат не имеет места.

Возникают следующие вопросы. Вдруг, развивая соответствующую систему далее, можно прийти к противоречию? Причем тот же вопрос можно задать и для геометрии Евклида. Какая из этих геометрий отражает пространственные отношения в окружающем мире?

Через три года (1832) после выхода в свет работы Лобачевского (1830) Бойяи[6], не зная об исследованиях Лобачевского, опубликовал работу, в которой излагал ту же теорию, но в менее развитой форме.

К выводу о существовании новой геометрии пришел и Гаусс[7] (1824, пере-

[4]Адриен Мари, 1752–1833, французский математик

[5]Николай Иванович, 1792–1856, русский математик

[6]Янош, 1802–1860, венгерский математик

[7]Карл Фридрих, 1777–1855, немецкий ученый

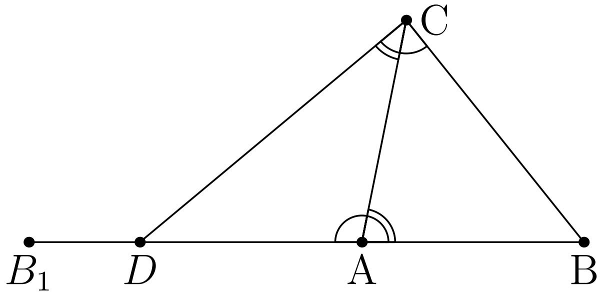
писка), но свои выводы он не опубликовал.

Положительный ответ на вопрос о непротиворечивости новой геометрии (в предположении непротиворечивости геометрии Евклида) дал Бельтрами[8] (1868), который доказал, что для части плоскости геометрии Лобачевского может быть построена модель и этим частично доказал непротиворечивость геометрии Лобачевского. Клейн[9] (1871) доказал непротиворечивость геометрии Лобачевского.

2. Абсолютная геометрия

Теор 1 (I, Предложение 16)**.** *Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.*

Док-во. Допустим $\angle B_1AC = \angle ACB$. Возьмем D на луче AB_1 так, чтобы $AD = CB$. Тогда $\triangle ACB = \triangle CAD$ по Начала I, Предложению 4. Получаем



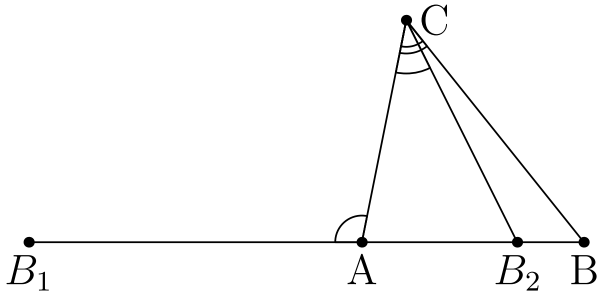
$\angle CAB = \angle ACD$. Но $\angle CAB$ и $\angle CAB_1$ смежные, а значит $\angle ACB$ и $\angle ACD$ смежные, и DCB — развернутый угол по Начала I, Предложение 14. Противоречие.

Если выбрать другой внутренний угол, то с использованием вертикальных углов приходим к уже рассмотренному.

Допустим $\angle B_1AC < \angle ACB$. Найдется такая B_2 на отрезке AB, что $\angle B_1AC = \angle ACB_2$. Рассмотрим $\triangle ACB$: внешний $\angle B_1AC$ равен внутреннему $\angle ACB_2$. Противоречие рассмотренному случаю. □

[8] Эудженио, 1835–1900, итальянский математик

[9] Феликс, 1849–1925, немецкий математик



След 1 (I, Предложение 27). *Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы (или соответственные углы) равны, то прямые не пересекаются.*

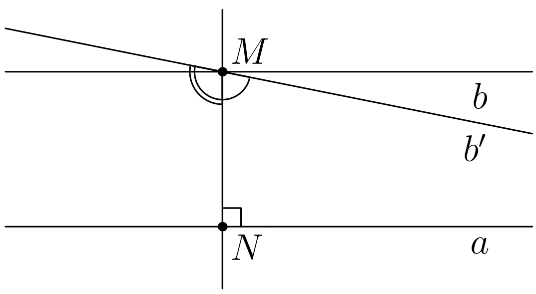
След 2. *Через каждую точку, не лежащую на прямой, проходит прямая параллельная данной.*

След 3. *Сумма двух внутренних углов треугольника меньше $2d$.*

Док-во. Пусть α и β — внутренние углы треугольника, а φ — внешний угол, смежный с углом β. Тогда $\alpha < \varphi$, и $\alpha + \beta < \varphi + \beta$. Так как $\varphi + \beta = 2d$, получаем $\alpha + \beta < 2d$. □

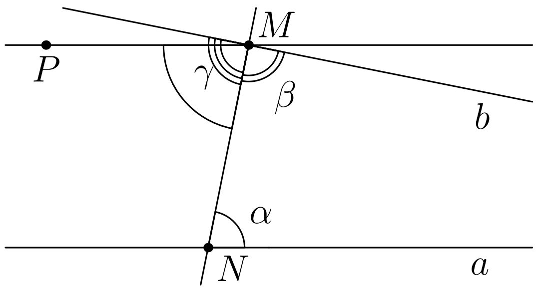
Теор 2. *Если имеет место V постулат, то через каждую точку M, не лежащую на прямой a, проходит только одна прямая, параллельная прямой a.*

Док-во. Проведем прямую MN перпендикулярно прямой a, $N \in a$, и прямую b, проходящую через M перпендикулярно прямой MN. Прямые a и b параллельны. Если некоторая прямая b', отличная от b, проходит через M, то один из смежных углов образуемых при прямых MN и b' будет острым. Применяя V постулат к прямым a, b' и MN, получаем пересечение a и b'. □



Теор 3. *Если принять, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной, то справедлив V постулат.*

Док-во. Пусть секущая MN для прямых a и b образует внутренние односторонние углы α и β, причем $\alpha + \beta < 2d$. Смежный с β угол обозначим γ, и получим $\beta + \gamma = 2d$. Вычитая из предыдущего, получаем $\alpha < \gamma$.



Отложим от MN угол NMP, равный α внутри угла γ. Согласно Следствию 1, прямые MP и a параллельны. Прямые MP и b различны, так как $\alpha \neq \gamma$. По условию теоремы прямая b пересекает прямую a.

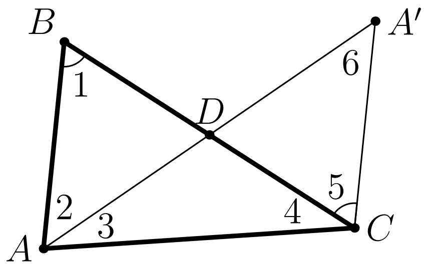
Если пересечение и углы α, β находится в разных полуплоскости относительно MN, то это противоречит ($\alpha < \gamma$) Теореме 1 о внешнем угле. □

Доказано, что:

V постулат равносилен аксиоме параллельных прямых.

Теор 4 (Лежандр). *Сумма углов любого треугольника не больше $2d$.*

Док-во. Пусть $\angle BAC$ – наименьший угол в $\triangle ABC$. От середины D стороны BC отложим DA', равный AD. Получим пару равных равнобедренных треугольников.



Сумма углов $\triangle AA'C$ равна $\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$, а сумма углов $\triangle ABC$ равна $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4$. Но $\angle 1 + \angle 2 = \angle 5 + \angle 6$, поэтому суммы углов одинаковы.

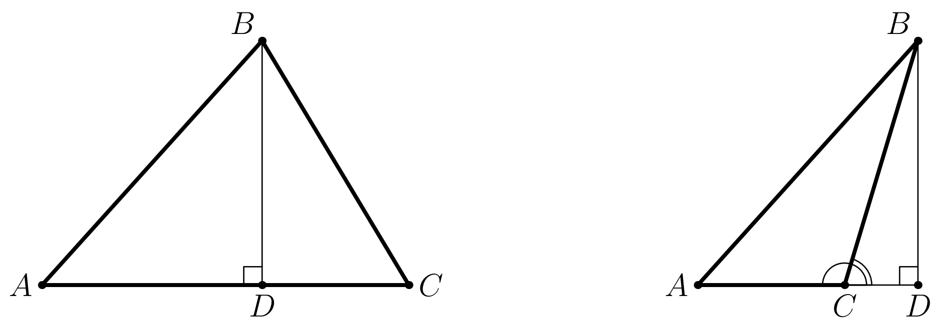
Кроме того, $\angle BAC = \angle 2 + \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 6$, а значит $\angle 3$ или $\angle 6$ в $\triangle AA'C$ не превышает величины $\angle BAC$. То есть для $\triangle ABC$ существует треугольник с такой же суммой углов и меньшим углом, не превышающим половины меньшего угол $\triangle ABC$.

Предположим теперь, что сумма углов $\triangle ABC$ равна $2d+\varepsilon$, а его меньший угол равен α. Тогда существует треугольник с суммой углов $2d+\varepsilon$ и меньшим углом, не превышающим $\frac{\alpha}{2}$. Для него существует треугольник с меньшим углом, не превышающим $\frac{\alpha}{2^2}$ и так далее. Можно построить треугольник с меньшим углом меньше ε, а значит сумма двух других его внутренних углов будет больше $2d$. Противоречие Следствию 3. □

Теор 5 (Лежандр)**.** *Если в одном треугольнике сумма углов равна 2d, то сумма углов любого треугольника равна 2d.*

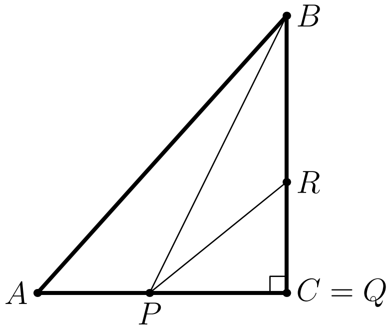
Док-во. Будем обозначать сумму углов треугольника $\triangle ABC$ с помощью S_{ABC}.

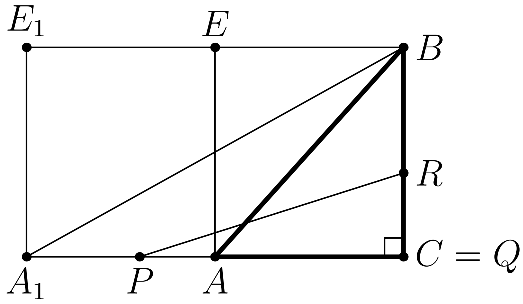
Пусть в $\triangle ABC$ сумма углов равна $2d$ и углы A и C острые. Тогда высота BD будет лежить внутри угла B.



Высота BD разбивает $\triangle ABC$ на два треугольника, причем $2d = S_{ABC} = S_{ABD} + S_{DBC} - 2d$. Таким образом, $S_{ABD} + S_{DBC} = 4d$. По Теореме 4 оба слагаемыех не превышают $2d$, что означает $S_{ABD} = S_{DBC} = 2d$. Показано, что существует прямоугольный треугольник с суммой углов $2d$.

Допустим $\triangle ABC$ прямоугольный с суммой углов $2d$. Возьмем произвольный прямоугольный треугольник $\triangle PQR$ с прямым углом $Q = C$ и P на отрезке AC, а R на отрезке BC. Тогда последовательно рассматривая S_{BPQ}, а затем S_{PQR} устанавливаем их равенство $2d$ с помощью Теоремы 4.





Если, скажем, P лежит за пределами отрезка A, то отложим точку A_1 на прямой AC на расстоянии AC от A. Покажем, что $S_{A_1BC} = 2d$.

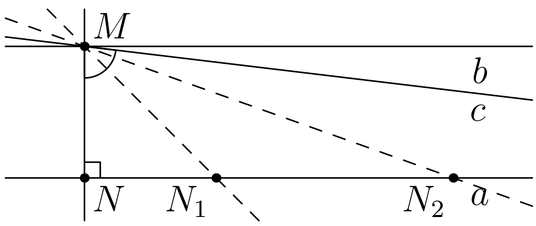
Достроим $\triangle BAE = \triangle ABC$, в котором угол E окажется прямым, а затем отложим точку E_1 на прямой BE на расстоянии BE от E. Так как $\triangle ABC$ прямоугольный, то четырехугольник $AEBC$ прямоугольный. Из равенства $\triangle E_1AE = \triangle BAE$ следует $\angle E_1AA_1 = \angle BAC$ и $\triangle AE_1A_1 = \triangle ABC$. Поэтому четырехугольник A_1E_1BC прямоугольный и сумма его углов $4d$. Получаем $S_{A_1BC} = 2d$.

Если P не принадлежит отрезку A_1, то по аналогии строим точку A_2 и так далее, пока (согласно аксиоме Архимеда) не получим P внутри A_kBC. Так же рассуждаем относительно точки R.

Произвольный треугольник можно разбить на два прямоугольных суммы углов которых равны по $2d$. Поэтому сумма углов произвольного треугольника равна $2d$. □

Теор 6 (Лежандр). *Если в некотором треугольнике сумма внутренних углов равна $2d$, то выполняется аксиома параллельности.*

Док-во. Покажем, что для прямой a и не лежащей на ней точки M существует не более одной прямой, параллельной данной. Для этого проведем перпендикуляр MN к прямой a, а через M — прямую b, перпендикулярно MN. Она будет параллельна a по Следствию 1.



Возьмем произвольно прямую c, проходящую через M и отличную от b. Обозначим α тот угол, который образован MN и прямой c и меньше прямого угла.

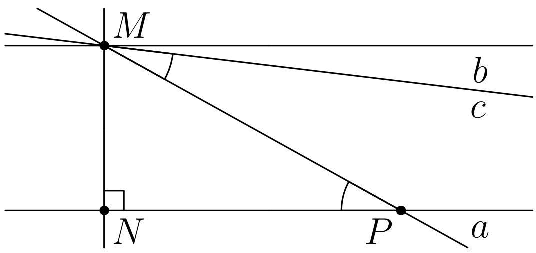
Отложим на прямой a следующие точки: от N точку N_1 на расстоянии MN, затем от N_1 точку N_2 на расстоянии MN_1, от N_2 точку N_3 на расстоянии MN_2, и так далее. Получим равнобедренные треугольники, суммы углов которых равны $2d$ по условию. Находим $\angle MN_1M = \frac{2d-d}{2} = \frac{d}{2}$, $\angle MN_2N = \frac{2d-(2d-\frac{d}{2})}{2} = \frac{d}{4}$ и в общем $\angle MN_kN = \frac{d}{2^k}$. Тогда в треугольниках $\triangle MN_kN$ можно найти $\angle NMN_k = 2d - d - \frac{d}{2^k} = d - \frac{d}{2^k}$, который может быть больше α при достаточно большом k. Для такого k прямая c пройдет внутри угла NMN_k и будет пересекать NN_k, а значит и прямую a. □

Получаем:

V постулат равносилен тому, что сумма углов треугольника равна $2d$.

Теор 7. *Если в некотором треугольнике сумма внутренних углов меньше $2d$, то выполняется отрицание аксиомы параллельности.*

Док-во. Для двух параллельных a, b и перпендикуляре NM покажем, что через M можно провести еще одну прямую, параллельную a.



Возьмем точку $P \in a$, отличную от N. Проведем через M прямую c так, что угол между MP и c будет равен $\angle P$. Прямые a и c будут параллельны по Следствию 1.

По условию $\angle NMP + \angle P + d < 2d$, или $\angle NMP < d - \angle P$. Это значит, что угол между MP и b будет больше угла между MP и c, так как $d - \angle NMP > \angle P$. Поэтому прямые b и c различны. □

3. Элементы геометрии Лобачевского

Итак, в любом треугольнике на плоскости в геометрии Лобачевского сумма внутренних углов меньше двух прямых.

Как следствие, сумма величин внутренних углов четырехугольника меньше $4d$, так как всякий можно разбить на два треугольника. В частности, в равнобочном четырехугольнике (рассматривал Саккери) углы при верхнем основании острые.

Опр. ***Дефектом*** *треугольника* ABC *называется разность* $\delta = 2d - S_{ABC}$*, где* S_{ABC} *— сумма величин внутренних углов* $\triangle ABC$*.*

Обозначим дефект $\triangle ABC$ через δ_{ABC}.

Дефект положителен и не превосходит $2d$.

Если разделить один треугльник на два, то его дефект равен сумме дефектов получившихся треугольников.

Теор 8. *Если у треугольников* ABC *и* $A'B'C'$ *соответствующие углы равны, то треугольники равны.*