Волгоградский государственный педагогический университет

Кафедра алгебры, геометрии и информатики

Элементы планиметрии Лобачевского

Методическая разработка

Составил доцент Крячков Ю.Г.

Волгоград
2004

Содержание

1 Введение в аксиоматику геометрии

1.1 Определение абсолютной геометрии

Абсолютная геометрия является некоторой общей частью как евклидовой геометрии, так и геометрии Лобачевского. Далее понятие абсолютной геометрии будет сформулировано более точно.

Существует много аксиоматических теорий, описывающих евклидову геометрию. Наиболее известными из них являются аксиоматические теории Д.Гильберта (смотри [7], [5], [6]) и Г.Вейля, ([1], [2], [11]), которые отличаются прежде всего набором основных понятий и отношений.

В теории Д.Гильберта основными понятиями являются: точка, прямая и плоскость, а основными отношениями: отношение принадлежности, отношение между и отношение конгруентности для отрезков и углов.

Все аксиомы разбиты на пять групп: аксиомы принадлежности, аксиомы порядка, аксиомы конгруентности, аксиомы непрерывности и аксиому, которую называют *аксиомой параллельности.*

Аксиомой параллельности в геометрии называют следующее утверждение:

Пусть дана плоскость, на плоскости дана любая прямая и любая не принадлежащая этой прямой точка. Тогда в данной плоскости может существовать не более одной прямой, проходящей через данную точку и не пересекающей данную прямую.

Заметим, что такая формулировка аксиомы параллельности принадлежит английскому ученому Дж.Плейферу (1795 г.).

В теории Г.Вейля основными понятиями являются: точка, вектор и действительное число.

Кроме отличия в основных понятиях, между теориями Д.Гильберта и Г.Вейля есть еще одно принципиальное отличие.

Теория Д.Гильберта не использует теорию действительных чисел до тех пор, пока не появляется необходимость в построении теории измерения геометрических величин, прежде всего измерения отрезков и углов, а также площадей и объемов.

Теория Г.Вейля основана на понятии векторного пространства, которое с самого начала предполагает использование теории действительных чисел. В аксиоматике Г.Вейля аксиома параллельности отсутствует.

Пусть дана какая-либо аксиоматика евклидовой геометрии, содержащая аксиому параллельности. Таковыми являются, например, вышеупомянутая аксиоматика Д.Гильберта, аксиоматика Ф.Шура, основанная на понятии движения, аксиоматика А.Н.Колмогорова, основанная на понятии расстояния, аксиоматика А.В.Погорелова, аксиоматика Л.С.Атанасяна [1], [2], созданные специально для использования в школьном преподавании и другие, смотри, например, [8], [13]. Удалим аксиому параллельности из списка аксиом, сохранив при этом все остальные аксиомы.

Теорию, основанную на полученной таким способом аксиоматике, называют *абсолютной геометрией.* Иначе говоря, к теоремам абсолютной геометрии можно отнести все теоремы евклидовой, доказательства которых не опираются на аксиому параллельности.

Более точно следует сказать, что к теоремам абсолютной геометрии можно отнести все теоремы евклидовой геометрии, доказательства которых не используют как саму аксиому параллельности, так и ее следствия.

1.2 Треугольники в абсолютной геометрии

Ниже будут сформулированы и доказаны некоторые теоремы абсолютной геометрии, необходимые для изложения основ как евклидовой геометрии, так и геометрии Лобачевского.

Теорема 1.2.1 *Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.*

Приведем доказательство этой теоремы, не опирающееся на аксиому параллельности. Идея доказательства заимствована из [7].

1. Докажем сначала, что внешний угол треугольника не может быть *равным* какому-либо внутреннему углу треугольника, не смежному с внешним. Например, рассмотрим $\triangle ABC$ и луч AB_1, противоположный лучу AB.

Будем рассуждать от противного. Допустим, что $\angle B_1AC = \angle ACB$. Отложим на луче AB_1 отрезок $AD = CB$.

Тогда $\triangle ACB = \triangle CAD$ по первому признаку равенства треугольников.(см. рис.1)

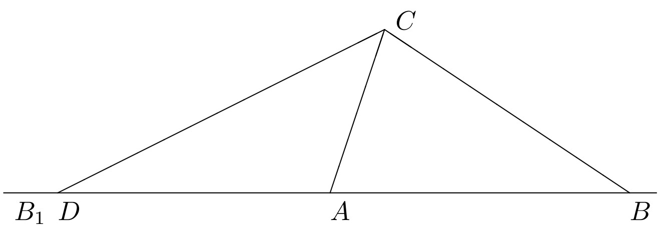

Рис. 1

Поскольку углы $\angle CAB$ и $\angle CAB_1$ смежные, а $\angle CAB = \angle ACD$, то углы $\angle ACB$ и $\angle ACD$ также смежные, откуда следует, что точки D, C и B лежат на одной прямой, чего быть не может по условию теоремы.

2. Докажем теперь, что внешний угол треугольника не может быть *меньше* внутреннего угла треугольника, не смежного с данным внешним. Например, рассмотрим $\triangle ABC$ и луч AB_1, противоположный лучу AB. (см. рис.2)

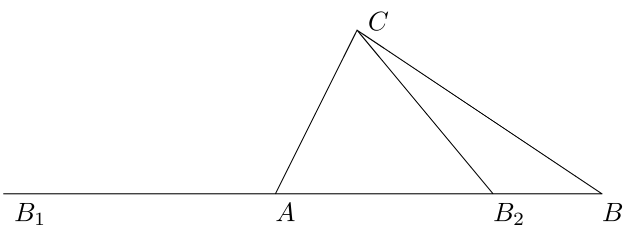

Рис. 2

Допустим, что $\angle B_1AC < \angle ACB$. Тогда на отрезке AB найдется такая точка B_2, что $\angle B_1AC = \angle ACB_2$. Тогда, согласно пункта 1., внешний угол $\angle B_1AC$ треугольника $\triangle AB_2C$ не может быть равен внутреннему углу $\angle ACB_2$ этого треугольника. Полученное противоречие показывает, что из трех возможных соотношений между углами $\angle B_1AC$ и $\angle ACB$ остается лишь одно соотношение: $\angle B_1AC > \angle ACB$.

Аналогично можно показать, что $\angle B_1AC > \angle ABC$. Теорема доказана.

Следствие 1.2.1 *Сумма двух внутренних углов треугольника меньше* $2d$.

Пусть α и β – произвольные внутренние углы треугольника, а φ – внешний угол треугольника, смежный с углом β. Тогда $\alpha < \varphi \Longrightarrow \alpha + \beta < \varphi + \beta$. Так как $\varphi + \beta = 2d$, получаем, что $\alpha + \beta < 2d$.

Следующие три теоремы принадлежат французскому ученому А.М.Лежандру.

Теорема 1.2.2 *Ни в одном треугольнике сумма внутренних углов не может быть больше двух прямых.*

Приведем доказательство этой теоремы, следуя изложению в [3] и [4]. Другой вариант доказательства этой теоремы приведен в [5] и [6].

Доказательство от противного. Допустим, что сумма углов треугольника $\triangle ABC$ равна $2d + \varphi$, где $\varphi > 0$. Пусть $\angle BAC = \alpha$ – наименьший угол этого треугольника (в частности, если треугольник равносторонний, то можно взять любой угол, а если равнобедренный с основанием, большим боковой стороны, то α — любой из равных углов).

Проведем медиану AD к противоположной стороне, продолжим ее и отложим на ней отрезок $DB_1 = AD$. (см. рис.3) Из равенства треугольников $\triangle ABD$ и $\triangle B_1DC$ следует, что $\angle DB_1C = \angle DAB$, а $\angle DCB_1 = \angle DBA$. Таким образом, в треугольнике $\triangle AB_1C$, (назовем его первым выводным треугольником) сумма внутренних углов равна $2d + \varphi$, сумма двух углов с вершинами в концах удвоенной медианы исходного треугольника равна α, а наименьший угол в нем не превосходит $\alpha/2$.

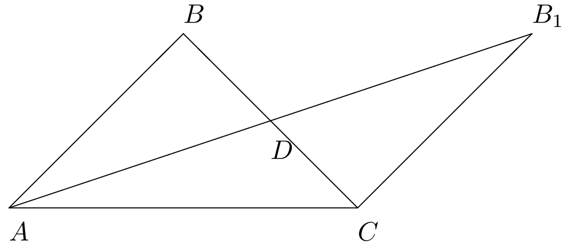

Рис. 3

Из первого выводного треугольника аналогичным построением получаем второй выводной треугольник: берем в первом наименьший угол, проводим в нем медиану и т.д. В полученном втором выводном треугольнике сумма внутренних углов по-прежнему равна $2d + \varphi$, сумма двух углов с вершинами в концах удвоенной медианы первого выводного треугольника не превосходит $\alpha/2$, а наименьший угол в нем не превосходит $\alpha/2^2$.

Продолжая этот процесс, в n-ом выводном треугольнике сумма внутренних углов по-прежнему равна $2d+\varphi$, сумма двух углов с вершинами в концах удвоенной медианы $(n-1)$-го выводного треугольника не превосходит $\alpha/2^{n-1}$.

Если взять n достаточно большим, то дробь $\alpha/2^{n-1}$ можно сделать меньше φ. Тогда третий угол в таком треугольнике будет больше $2d$. Противоречие доказывает теорему.

Теорема 1.2.3 *Если существует треугольник, в котором сумма внутренних углов равна двум прямым, то и в любом треугольнике сумма внутренних углов равна двум прямым.*

Доказательство теоремы проводится по следующей схеме:

1. Доказывается, что если существует треугольник, в котором сумма внутренних углов равна двум прямым, то существует прямоугольный треугольник, в котором сумма внутренних углов также равна двум прямым.

2. Доказывается, что если существует прямоугольный треугольник, в котором сумма внутренних углов равна двум прямым, то в любом прямоугольном треугольнике сумма внутренних углов равна двум прямым.

3. Доказывается, что если в любом прямоугольном треугольнике сумма внутренних углов равна двум прямым, то она равна двум прямым в любом треугольнике.

Условимся обозначать через $\sum_{ABC}$ сумму внутренних углов треугольника ABC.

1. Итак, пусть $\triangle ABC$ такой, что $\sum_{ABC} = 2d$. Предположим, что AC наибольшая сторона треугольника. Тогда высота BD, опущенная из вершины B на сторону AC разбивает треугольник на два прямоугольных, причем $\sum_{ABC} = \sum_{ABD} + \sum_{DBC} - 2d$. (см. рис.4)

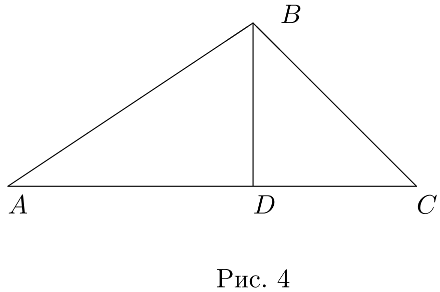

Рис. 4

Поскольку $\sum_{ABC} = 2d$, из полученного равенства следует, что $\sum_{ABD} + \sum_{DBC} = 4d$.

Так как по теореме 1.2.2 имеем

$$\sum_{ABD} \leqslant 2d \quad \text{и} \quad \sum_{DBC} \leqslant 2d,$$

то сумма $\sum_{ABD} + \sum_{DBC}$ равна $4d$ только в том случае, когда $\sum_{ABD} = 2d$ и $\sum_{DBC} = 2d$.

Таким образом нашлись два прямоугольных треугольника, в которых сумма внутренних углов равна двум прямым.

2. Итак, поскольку прямоугольные треугольники, в которых сумма внутренних углов равна двум прямым существуют, возьмем один из них, например, $\triangle ABD$. (см. рис. 5)

Возьмем теперь произвольный прямоугольный треугольник $\triangle PQR$ с прямым углом Q и докажем, что $\sum_{PQR} = 2d$. Совместим $\triangle ABD$ и $\triangle PQR$ прямыми углами и допустим, что $\triangle PQR$ целиком попал внутрь $\triangle ABD$ так, что $P \in AD$, $R \in BD$. Проведем отрезок BP. Рассуждая как в первом пункте, получим:

$$\sum_{ABD} = \sum_{ABP} + \sum_{BPD} - 2d \implies \sum_{ABP} + \sum_{BPD} = 4d.$$

Так как в последнем равенстве каждое слагаемое не превосходит $2d$, то $\sum_{ABP} = \sum_{BPD} = 2d$. Заметим, что $\triangle BPD = \triangle BPQ$.

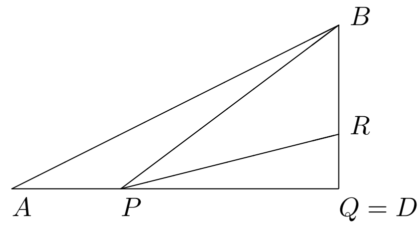

Рис. 5

Рассмотрим теперь $\triangle BPQ$. Имеем

$$\sum_{BPQ} = \sum_{BPR} + \sum_{PQR} - 2d \implies \sum_{BPR} + \sum_{PQR} = 4d.$$

Так как в последнем равенстве каждое слагаемое не превосходит $2d$, то $\sum_{BPR} = \sum_{PQR} = 2d$.

Напомним, что утверждение второго пункта доказано лишь в предположении, что при совмещении прямых углов $\triangle PQR$ целиком попал внутрь $\triangle ABD$. Как же показать, что $\sum_{PQR} = 2d$, если при совмещении прямых углов Q и D $\triangle PQR$ не попадает целиком внутрь $\triangle ABD$? Допустим, например, что точка $P \notin QA$.

Покажем, что можно построить $\triangle BQA_n$ такой, что:

1. $\triangle BQA_n$ прямоугольный с прямым углом Q.
2. $\sum_{BQA_n} = 2d$.
3. $\triangle PQR$ целиком попадает внутрь $\triangle BQA_n$.

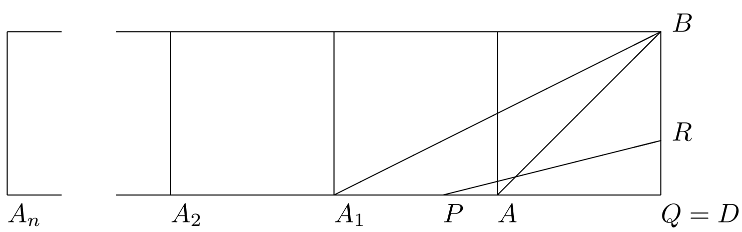

Рис. 6

Действительно, согласно аксиоме Архимеда,[1] существует такое натуральное число n, что отрезок $nQA > QP$.

Тогда, отложив от точки Q на луче $[QP)$ отрезок nQA, получим точку $A_n \in [QP)$, такую, что $P \in QA_n$.[2] (см. рис.6) Но тогда $\triangle PQR$ целиком попадает внутрь прямоугольного $\triangle BQA_n$, который, как нетрудно доказать, имеет сумму углов, равную $2d$.

Аналогичными рассуждениями можно решить проблему, если точка $P \in QA$, а точка точка $R \notin QB$ либо одновременно $P \notin QA$ и $R \notin QB$.[3]

3. Из того, что существует треугольник с суммой внутренних углов, равной $2d$, следует, согласно пункту первому, что существуют прямоугольные треугольники с суммой внутренних углов, равной $2d$. Но тогда согласно второго пункта в каждом прямоугольном треугольнике сумма внутренних углов равна $2d$. Так как произвольный треугольник $\triangle ABC$ можно разбить на два прямоугольных треугольника, $\triangle ABD$ и $\triangle DBC$ высотой BD, опущеной, например, как в пункте первом, на большую сторону AC, то

$$\sum_{ABC} = \sum_{ABD} + \sum_{DBC} - 2d = 2d,$$

поскольку $\sum_{ABD} = \sum_{DBC} = 2d$.

Следствие 1.2.2 *Либо во всех треугольниках сумма внутренних углов равна двум прямым, либо во всех треугольниках сумма внутренних углов меньше двух прямых.*

Теорема 1.2.4 *Если в некотором треугольнике сумма внутренних углов равна двум прямым, то величина внешнего угла треугольника равна сумме величин двух внутренних углов треугольника, не смежных с внешним.*

Обозначим величины внутренних углов треугольника через α, β и γ, а величину внешнего угла, смежного с углом γ, через ω. Тогда $\alpha + \beta + \gamma = 2d$ и $\gamma + \omega = 2d \Longrightarrow \omega = \alpha + \beta$.

Следствие 1.2.3 *Величина внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника равна удвоенной величине внутреннего угла, не смежного с ним.*

Теорема 1.2.5 *Если в некотором треугольнике сумма внутренних углов равна двум прямым, то выполняется аксиома параллельности.*

Заметим сначала, что согласно условию и следствию 1.2.2 из теоремы 1.2.3 во всех треугольниках сумма внутренних углов равна $2d$. Докажем, что выполняется аксиома параллельности.

Пусть в плоскости даны прямая AA' и точка $P \notin AA'$. Покажем, что через точку P проходит единственная прямая, не пересекающая прямую AA'. Отметим прежде всего, что такая прямая есть.(см. рис.7)

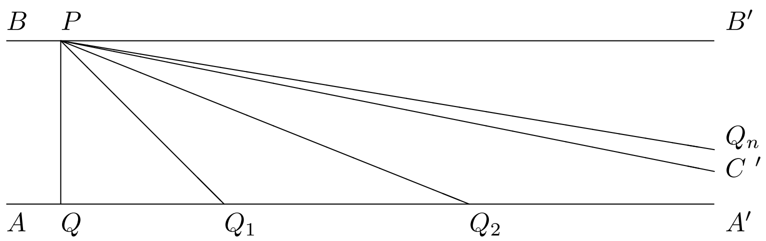

Рис. 7

Опустим из точки P перпендикуляр PQ на прямую AA', а затем через точку P проведем прямую BB', перпендикулярную PQ. Прямая BB' не может пересекать AA', так как в случае пересечения этих прямых в точке R получился бы $\triangle PQR$ с двумя прямыми углами P и Q, что противоречит следствию 1.2.1.

Для доказательства единственности непересекающей прямой достаточно показать, что любая другая прямая, проходящая через точку P, будет пересекать прямую AA'.

[1]Более подробно о ней можно прочесть в [5], [6], [1] или [13].

[2]На рис.6 такое натуральное число $n = 2$.

[3]Студентам предлагается самостоятельно провести полные рассуждения или прочитать их, например в [4].

Докажем это от противного. Допустим, что некоторая прямая CC' проходит через точку P и не пересекает прямую AA'. Отложим на луче $[QA')$ отрезок $QQ_1 = QP$. В равнобедренном прямоугольном $\triangle PQQ_1$ величина $\angle QPQ_1$ равна величине $\angle PQ_1Q$ и равна $d/2$ по следствию 1.2.3 из теоремы 1.2.4.

Отложим на луче $[Q_1A')$ отрезок $Q_1Q_2 = PQ_1$. В равнобедренном $\triangle PQ_1Q_2$ величина $\angle Q_1PQ_2$ равна величине $\angle PQ_2Q_1$ и равна $d/2^2$ по следствию 1.2.3 из теоремы 1.2.4.

Отложим на луче $[Q_2A')$ отрезок $Q_2Q_3 = PQ_2$. В равнобедренном $\triangle PQ_2Q_3$ величина $\angle Q_2PQ_3$ равна величине $\angle PQ_3Q_2$ и равна $d/2^3$ по следствию 1.2.3 из теоремы 1.2.4.

Продолжим процесс получения треугольников $\triangle Q_3PQ_4, \triangle Q_4PQ_5$ и так далее. Величина угла $\angle QPQ_n$ равна

$$\frac{d}{2} + \frac{d}{2^2} + \cdots + \frac{d}{2^n}.$$

Теперь можно вычислить сумму

$$\frac{d}{2} + \frac{d}{2^2} + \cdots + \frac{d}{2^n} + \cdots$$

Используем формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии и получим:

$$\frac{d}{2} + \frac{d}{2^2} + \cdots + \frac{d}{2^n} + \cdots = d.$$

Из этого следует, что существует такое натуральное число n, при котором прямая PQ_n проходит внутри угла $\angle B'PC'$. Тогда луч $[PC')$ выходит из вершины P треугольника $\triangle QPQ_n$ внутри угла $\angle QPQ_n$, но не пересекает противоположную сторону, что противоречит сделанному допущению. Противоречие доказывает теорему.

Теорема 1.2.6 *Если в некотором треугольнике сумма внутренних углов меньше двух прямых, то выполняется отрицание аксиомы параллельности.*

Допустим, что $\sum_{ABC} < 2d$. Тогда, по следствию 1.2.2 из теоремы 1.2.3, сумма величин внутренних углов любого треугольника меньше $2d$.

Докажем, что если дана прямая AA' и вне прямой точка P, то найдутся по крайней мере две прямые, проходящие через P и не пересекающие AA'.

Опустим из точки P перпендикуляр PQ на прямую AA', а затем через точку P проведем прямую BB', перпендикулярную PQ.

Прямая BB', по предыдущей теореме, не пересекает прямую AA'.

Докажем, что существуют прямые, проходящие через точку P, не совпадающие с BB', и не пересекающие AA'. (см. рис.8) Для этого возьмем на прямой AA' произвольную точку M, не совпадающую с Q. Далее в полуплоскости с границей PM и содержащей луч $[PB')$ отложим угол $\angle MPR$, равный углу $\angle PMQ$.

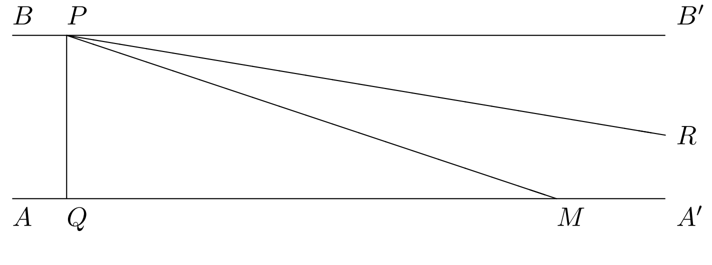

Рис. 8

Величина угла $\angle QPR$ меньше d, так как $\sum_{MPQ} < 2d$. Следовательно луч $[PR)$ проходит внутри угла $\angle QPB'$. Он не пересекает прямую AA', так как в противном случае, если луч $[PR)$ пересекает прямую AA' в точке K, внешний угол $\angle QMP$ треугольника $\triangle MPK$ равен внутреннему углу $\angle MPK$, не смежному с ним, а это противоречит теореме 1.2.1.

1.3 Четырехугольники в абсолютной геометрии

Определение 1.3.1 *Четырехугольником Саккери называют четырехугольник, к одной из сторон которого прилегают прямые углы.*

Сторону, к которой примыкают прямые углы, называют *нижним основанием*, а противоположную сторону — *верхним основанием*. Оставшиеся стороны называют *боковыми*.

Четырехугольник Саккери называют *равнобочным*, если его боковые стороны равны.

Теорема 1.3.1 *В равнобочном четырехугольнике Саккери углы при верхнем основании четырехугольника равны.*

Пусть $ABCD$ — четырехугольник Саккери с основанием AB и $AD = BC$. (см. рис.9)

Проведем диагонали AC и BD. $\triangle DAB = \triangle CBA$ по первому признаку равенства треугольников. Тогда $AC = BD$, и следовательно $\triangle ADC = \triangle BCD$ по трем сторонам. Тогда в этих треугольниках соответствующие углы $\angle D$ и $\angle C$ равны.

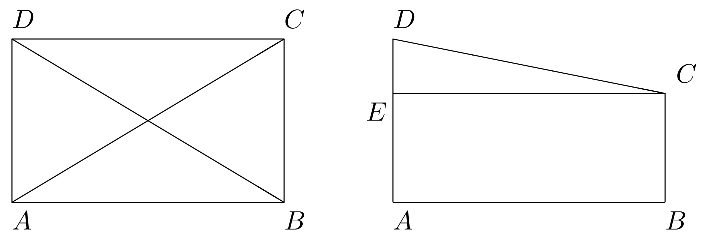

Рис. 9

Теорема 1.3.2 *В четырехугольнике Саккери к большей боковой стороне прилегает меньший угол при верхнем основании.*

Пусть $AD > BC$. Отложим на стороне AD отрезок $AE = BC$. Тогда по предыдущей теореме $\angle AEC = \angle BCE$. Однако $\angle D < \angle AEC = \angle BCE < \angle C$. Теорема доказана.

Теорема 1.3.3 *Четырехугольник Саккери с равными углами при верхнем основании равнобочный.*

Докажем от противного. Предположив, что одна боковая сторона больше другой получим по предыдущей теореме, что и углы при верхнем основании не равны, что противоречит условию. Противоречие доказывает теорему.

Теорема 1.3.4 *В четырехугольнике Саккери к меньшему углу при верхнем основании прилегает большая боковая сторона.*

Пусть $ABCD$ — четырехугольник Саккери с основанием AB. Пусть $\angle D < \angle C$. Допустим, что $AD = BC$ либо $AD < BC$. Если $AD = BC$, то по теореме 1.3.1 $\angle D = \angle C$, что противоречит условию. Если $AD < BC$, то по теореме 1.3.1 $\angle D > \angle C$, что также противоречит условию.

2 Основы планиметрии Лобачевского

2.1 Определение геометрии Лобачевского

Пусть дана какая-либо система аксиом евклидовой геометрии, содержащая аксиому параллельности.

Заменим аксиому параллельности аксиомой, которую называют *аксиомой Лобачевского:*

Пусть дана плоскость, на плоскости дана любая прямая и любая не принадлежащая этой прямой точка. Тогда в данной плоскости существуют по крайней мере две прямые, проходящие через данную точку и не пересекающие данную прямую.

Основанную на такой системе аксиом теорию называют *геометрией Лобачевского.*

2.2 Треугольники и четырехугольники

Теорема 2.2.1 *В геометрии Лобачевского сумма величин внутренних углов любого треугольника меньше* $2d$.

Сумма величин внутренних углов треугольника не может быть больше $2d$. Это следует из теоремы 1.2.2. Если же мы предположим, что существуют треугольники с суммой углов $2d$, то по теореме 1.2.3 сумма углов равна $2d$ во всех треугольниках. Тогда по теореме 1.2.5 выполняется аксиома параллельности Плейфера, что противоречит аксиоме Лобачевского. Остается единственная возможность — сумма величин внутренних углов любого треугольника меньше $2d$.

Следствие 2.2.1 *В геометрии Лобачевского сумма величин внутренних углов четырехугольника меньше* $4d$.

Разбив четырехугольник диагональю на два треугольника, используем теорему 2.2.1.

Следствие 2.2.2 *В равнобочном четырехугольнике Саккери углы при верхнем основании острые.*

Согласно следствия 2.2.1 сумма углов при верхнем основании меньше $2d$, а по теореме 1.3.1 они равны. Следовательно они острые.

Определение 2.2.1 *Дефектом треугольника* ABC *называется разность* $\delta = 2d - \sum_{ABC}$.

Будем обозначать дефект треугольника ABC символом δ_{ABC}. В евклидовой геометрии понятие дефекта не используют, поскольку дефект любого треугольника равен нулю.

Дефект треугольника имеет следующие свойства:

1. дефект треугольника неотрицателен;

   Следует из теоремы 2.2.1.

2. дефект обладает свойством аддитивности. Это значит, что если треугольник разбит на два треугольника некоторой трансверсалью [4], то дефект треугольника равен сумме дефектов треугольников, его составляющих;

   Пусть $\triangle ABC$ разбит отрезком BD на два треугольника $\triangle ABD$ и $\triangle DBC$. Тогда

$$\delta_{ABC} = 2d - \sum_{ABC} = 2d - (\sum_{ABD} + \sum_{DBC} - 2d) =$$
$$= (2d - \sum_{ABD}) + (2d - \sum_{DBC}) = \delta_{ABD} + \delta_{DBC}.$$

3. дефект треугольника не может превосходить $2d$.

   Следует из теоремы 2.2.1.

Теорема 2.2.2 *На плоскости Лобачевского сумма внутренних углов треугольника не постоянна, а зависит от треугольника, его формы и размеров.*

[4] *Трансверсалью* треугольника называтся отрезок, соединяющий вершину треугольника с внутренней точкой противоположной стороны.

Из первого и второго свойства дефекта следует, что, например, $\delta_{ABC} > \delta_{ABD}$. Отсюда следует, что $\sum_{ABC} < \sum_{ABD}$.

Теорема 2.2.3 *Если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответствующие углы равны, то треугольники равны.*

Иначе говоря, на плоскости Лобачевского не существует подобных, но не равных треугольников.

Пусть $\triangle ABC \neq \triangle A_1B_1C_1$. Тогда у этих треугольников есть хотя бы одна пара не равных сторон. Положим, для определенности, что $AB > A_1B_1$.

Наложим угол B_1 на угол B, совместив вершины, так, что $A_1 \in AB$. В силу равенства углов B_1 и B, для положения точки C_1 возможны следующие ситуации: $C \in BC_1$, $C = C_1$, $C_1 \in BC$.

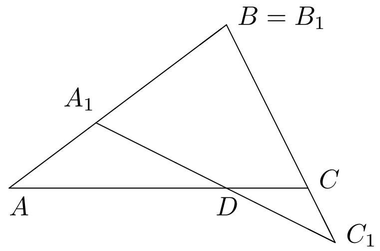

Рис. 10

1. Если $C \in BC_1$ (см. рис.10) то точки A_1 и C_1 лежат по разные стороны от прямой AC, следовательно отрезок A_1C_1 должен пересекать прямую AC в некоторой точке D. Тогда в $\triangle AA_1D$ внешний угол A_1 равен внутреннему углу A, не смежному с ним, что противоречит теореме 1.2.1 о внешнем угле.

2. Если $C = C_1$ (см. рис.11), то в $\triangle AA_1C$ внешний угол A_1 равен внутреннему углу A, не смежному с ним, что противоречит теореме 1.2.1 о внешнем угле.

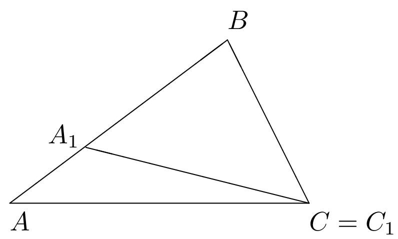

Рис. 11

Остается третья возможная ситуация. (см. рис. 12) Но тогда в четырехугольнике AA_1C_1C сумма величин внутренних углов равна $4d$, что противоречит следствию 2.2.1 из теоремы 2.2.1.

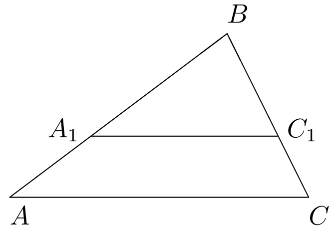

Рис. 12

2.3 Определение параллельности по Лобачевскому

Докажем прежде всего одно простое следствие из аксиомы Лобачевского.

Теорема 2.3.1 *На плоскости Лобачевского через точку, не лежащую на данной прямой, проходят бесконечно много прямых, не пересекающих данную.*

Пусть дана прямая AA_1, точка P, не лежащая на ней, и пусть прямые l и m проходят через точку P и не пересекают, согласно аксиомы Лобачевского, прямую AA_1. Возьмем на прямой AA_1 произвольную точку Q. Тогда отрезок PQ принадлежит одной из двух пар вертикальных углов с вершиной в точке P. (см. рис. 13)

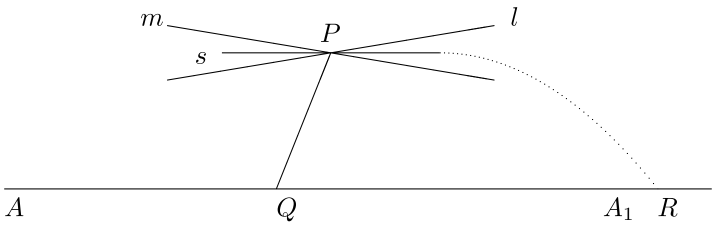

Рис. 13

Проведем через точку P произвольную прямую s, лежащую в другой паре вертикальных углов. Тогда прямая s не пересекает прямую AA_1.

Это можно доказать от противного. Если мы предположим, что прямая s пересекает прямую AA_1 в некоторой точке R, то либо прямая l, либо прямая m пройдет через вершину P треугольника $\triangle PQR$ внутри угла P, но не пересечет противоположную сторону QR.

Получили противоречие. В силу произвольности выбора прямой s получаем утверждение теоремы.

Из этой теоремы следует, что на плоскости Лобачевского понятие параллельности сложнее, чем на плоскости Евклида.

Пусть дана прямая AA_1, точка P, не лежащая на ней и точка Q, принадлежащая прямой AA_1.

Определение 2.3.1 *Всякий угол с вершиной P и стороной PQ называют опорным углом направления AA_1, если луч с начальной точкой Q и сонаправленный с лучом AA_1, целиком лежит внутри этого угла.*

Определение 2.3.2 *Говорят, что прямая BB_1 параллельна прямой AA_1 в точке P в направлении AA_1, если выполняются следующие условия:*

1. *прямая BB_1 проходит через точку P.*
2. *прямая BB_1 не пересекает прямую AA_1.*
3. *любой луч, выходящий из вершины опорного угла B_1PQ, пересекает прямую AA_1.*

Из этого определения непосредственно не видно, существует ли такая прямая, а если существует, то будет ли она единственной с такими свойствами. Чтобы получить ответы на эти вопросы, докажем несколько простых теорем.

Теорема 2.3.2 *Если прямая BB_1 параллельна прямой AA_1 в точке P в направлении AA_1, то она параллельна прямой AA_1 в любой своей точке $P_1 \in$ лучу PB_1.*

Пусть точка $P_1 \in PB_1$, то есть она смещена от точки P в направлении параллельности. Покажем, что прямая BB_1 параллельна прямой AA_1 в точке P_1 в направлении AA_1. (см. рис.14)

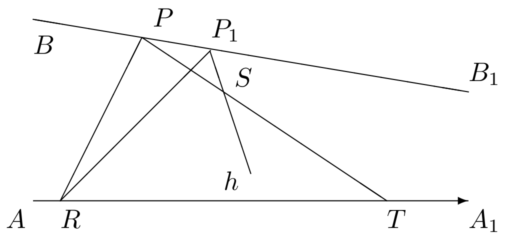

Рис. 14

Выпустим луч h внутри опорного угла $\angle RPB_1$ и возьмем на нем точку S. Так как точки S и P лежат по разные стороны от прямой RP_1, то луч PS пройдет внутри опорного угла $\angle B_1PR$ и , следовательно, будет пересекать прямую AA_1 в некоторой точке T. Тогда по предложению Паша для треугольника $\triangle RPT$ и прямой $P_1S = h$ получим, что P_1S пересекает прямую AA_1, что и требовалось доказать.

Пусть точка $P_2 \in PB$, то есть она смещена от точки P в направлении, противоположном направлению параллельности.(см. рис.15)

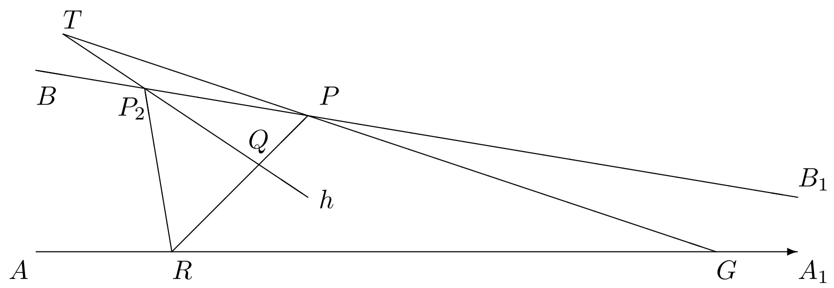

Рис. 15

Покажем, что прямая BB_1 также параллельна прямой AA_1 в точке P_2 в направлении AA_1.

Выпустим луч h внутри опорного угла $\angle B_1P_2R$. Пусть $\overline{h}$ есть луч, противоположный лучу h и точка $T \in \overline{h}$. Тогда луч TP пройдет внутри опорного угла $\angle RPB_1$, а следовательно будет пересекать прямую AA_1 в некоторой точке G.

Тогда по предложению Паша для треугольника $\triangle RPG$ и прямой $TQ = h$ получим, что h пересекает прямую AA_1, что и требовалось доказать.

Теперь, если на прямой AA_1 зафиксировать направление, можно говорить, что прямая BB_1 параллельна прямой AA_1 в некотором направлении, не указывая точку.

Теорема 2.3.3 (Единственности параллельной) *Для любой прямой a с заданным направлением AA_1 и для каждой точки P, не принадлежащей прямой a, существует не более одной прямой, проходящей через P и параллельная прямой a в направлении AA_1.*

Это утверждение легко доказать от противного, предположив, что таких прямых по крайней мере две. Тогда одна из них непременно проходит внутри опорного угла, образованного другой из них, а значит пересекает прямую AA_1. Противоречие доказывает теорему.

Сформулируем и докажем теперь теорему существования параллельной прямой.

Для доказательства теоремы существования необходимо использовать какую-нибудь из аксиом непрерывности. Это может быть, например, аксиома Дедекинда, либо совокупность аксиом Архимеда и Кантора, а в аксиоматиках, подобных аксиоматике Погорелова А.В., следует использовать теорему о существовании верхней грани множества действительных чисел.[5]

Аксиома Дедекинда. *Пусть все точки отрезка AB, включая его концы, разбиты на два класса так, что:*

1. *каждая точка отрезка принадлежит одному и только одному из этих классов, точка A принадлежит первому классу, а точка B – второму.*

[5]Более подробно об аксиомах непрерывности можно прочесть в [5], [6], [1] или [13].

2. *Каждая точка первого класса, отличная от A, лежит между A и любой точкой второго класса.*

Тогда на отрезке AB существует точка C такая, что всякая точка, лежащая между A и C, принадлежит первому классу, а всякая точка, лежащая между C и B, принадлежит второму классу.

Замечания:

1. Можно доказать, что каждая точка второго класса, отличная от B, лежит между B и любой точкой первого класса.

2. Можно доказать, что ни одна точка первого класса не лежит между какими -либо двумя точками второго класса, равно как ни одна точка второго класса не лежит между какими -либо двумя точками первого класса.

3. Легко доказать единственность точки C.

4. Аксиому Дедекинда можно переформулировать для точек прямой, а также для лучей, лежащих внутри угла и выходящих из его вершины.

Теорема 2.3.4 (Существования параллельной) *Для любой прямой a с заданным направлением AA_1 и для каждой точки P, не принадлежащей прямой a, существует прямая g, проходящая через P и параллельная прямой a в направлении AA_1.*

Пусть a прямая и P точка, не принадлежащая этой прямой. Выберем на прямой a направление AA_1. Опустим из точки P на прямую a перпендикуляр PP_1, а также проведем через точку P прямую BB_1, перпендикулярную PP_1. (см. рис. 16)

Рассмотрим множество всех лучей, содержащее стороны угла $\angle P_1PB_1$, а также все лучи, выходящие из точки P и лежащие внутри угла $\angle P_1PB_1$.

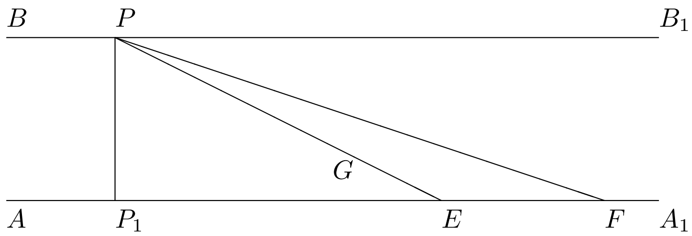

Рис. 16

Покажем, что среди лучей с вершиной в точке P, лежащих внутри угла $\angle P_1PB_1$ найдется такой луч PG, который не пересекает прямой AA_1, но любой луч с вершиной в точке P, лежащий внутри угла $\angle P_1PG$, уже будет пересекать прямую AA_1.

На множестве лучей с вершиной в точке P, содержащем стороны угла $\angle P_1PB_1$ и лучи, лежащие внутри угла $\angle P_1PB_1$ введем отношение порядка. Будем считать, что луч PK предшествует лучу PL, если луч PK лежит внутри угла $\angle P_1PL$. Будем также считать, что луч PP_1 предшествует лучу PB_1. Легко проверить, что введенное отношение есть отношение строгого порядка.

Разобьем это множество лучей на два класса, полагая, что луч принадлежит первому классу, если он пересекает прямую AA_1 и принадлежит второму, если не пересекает.

Проверим выполнение условий аксиомы Дедекинда.

1. Действительно, каждый луч принадлежит одному и только одному из этих классов. Луч PP_1 принадлежит первому классу, а луч PB_1 ко второму.

2. Каждый луч первого класса предшествует любому лучу второго класса. В самом деле, если бы нашелся луч второго класса, предшествующий какому нибудь лучу первого класса, это противоречило бы теореме о поперечине угла.

Но тогда аксиома Дедекинда утверждает, что найдется такой луч PG, что всякий луч, предшествующий ему, является лучом первого класса, а любой внутренний луч угла $\angle GPB_1$ является лучом второго класса.

Аксиома Дедекинда ничего не говорит о том, к какому классу относится сам граничный луч PG. Докажем, что он второго класса, то есть не пересекает прямую AA_1. Доказательство проведем от противного.

Предположим, что луч PG пересекает прямую AA_1 в некоторой точке E. Тогда возьмем на луче EA_1 произвольную точку F и соединим ее с точкой P. Тогда луч PF первого класса, причем является внутренним лучом угла $\angle GPB_1$. Это противоречит утверждению аксиомы Дедекинда, согласно которому любой внутренний луч угла $\angle GPB_1$ является лучом второго класса.

Теперь легко проверить, что прямая $g = PG$ параллельна прямой a в точке P в направлении AA_1.

2.4 Свойства параллельных прямых

Пусть прямая BB_1 параллельна прямой AA_1 в направлении AA_1. Следуя [4], будем называть *биссектрисой полосы* между прямыми AA_1 и BB_1 прямую, относительно которой они симметричны.

Теорема 2.4.1 *Если прямая BB_1 параллельна прямой AA_1 в направлении AA_1, то существует биссектриса полосы между AA_1 и BB_1 .*

Возьмем две точки, $D \in AA_1$ и $E \in BB_1$. (см. рис. 17) Проведем биссектрисы углов EDA_1 и DEB_1. Они пересекутся в точке O. Покажем, что перпендикуляры OP и OR, опущенные на прямые AA_1 и BB_1 равны.

Проведем биссектрису CC_1 угла POR. Покажем, что любая точка прямой CC_1 равноудалена от границ полосы.

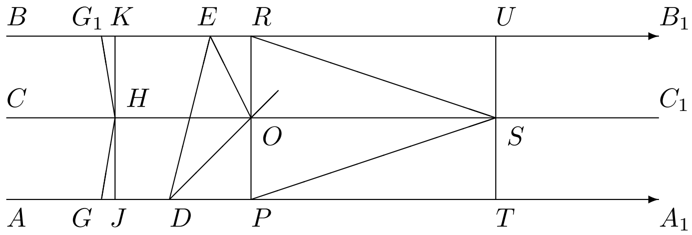

Рис. 17

Возьмем на прямой CC_1 произвольную точку S, опустим из нее на прямые AA_1 и BB_1 перпендикуляры ST и SU. Докажем, что $ST = SU$. Действительно, $\triangle SPO = \triangle SRO$ по первому признаку, а $\triangle SPT = \triangle SRU$ по гипотенузе и острому углу. Тогда $ST = SU$. Кроме этого, прямая CC_1 является биссектрисой угла $\angle TSU$.

Теперь покажем, что для любой точки $G \in AA_1$ найдется такая точка G_1, которая симметрична G относительно прямой CC_1.

Опустим из точки G на прямую CC_1 перпендикуляр GH, затем из точки H опустим на прямые AA_1 и BB_1 перпендикуляры HJ и HK. Отложим на луче $[KB)$ отрезок $KG_1 = GJ$. $\triangle HJG = \triangle HKG_1$ по двум катетам.

Поскольку $\angle KHC_1 = \angle JHC_1$, то

$$\angle G_1HC_1 = \angle G_1HK + \angle KHC_1 = \angle GHJ + \angle JHC_1 = \angle GHC_1 = d.$$

Таким образом $\angle GHG_1 = 2d$. Следовательно, точки G, H и G_1 лежат на одной прямой. Так как $GG_1 \perp CC_1$ и $HG = HG_1$, то точки G и G_1 симметричны относительно прямой CC_1.

Теорема 2.4.2 *Если прямая BB_1 параллельна прямой AA_1 в направлении AA_1, то прямая AA_1 параллельна прямой BB_1 в направлении BB_1.*

Пусть $G \in AA_1$ — произвольная точка и $G_1 \in BB_1$ — симметричная ей относительно биссектрисы полосы между AA_1 и BB_1.

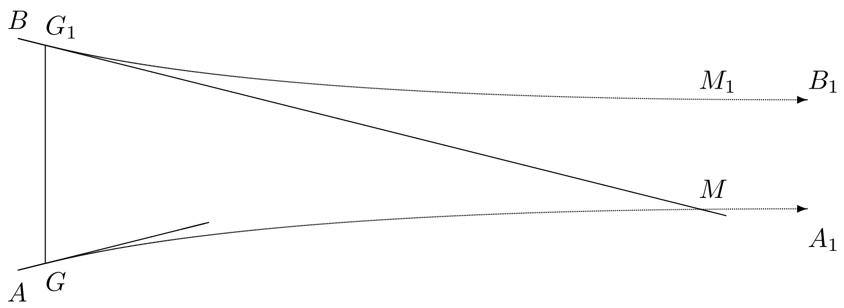

Рис. 18

Выпустим из точки G внутри опорного угла $\angle G_1GA_1$ любой луч h и обозначим через φ величину угла между лучами h и GA_1 и докажем, что он будет пересекать прямую BB_1.

Выпустим из точки G_1 луч k, который проходит внутри опорного угла $\angle GG_1B_1$ под таким же углом к лучу G_1B_1. Поскольку прямая BB_1 параллельна прямой AA_1 в направлении AA_1, то луч k будет пересекать прямую AA_1 в некоторой точке M, но тогда, в силу симметрии, симметричный ему луч h будет пересекать прямую BB_1 в точке $M_1 \in BB_1$, симметричной точке M.

Итак показано, что отношение параллельности симметрично. Теперь можно просто говорить, что две прямые параллельны в некотором направлении.

Для доказательства транзитивности отношения параллельности докажем две теоремы.

Теорема 2.4.3 *Если прямые AA_1 и BB_1 параллельны прямой CC_1 в направлении AA_1, и прямая BB_1 лежит в полосе между AA_1 и CC_1, то BB_1 пересекает любой отрезок с концами на AA_1 и CC_1.*

Отметим вначале, что прямые попарно не пересекаются, поскольку предположение о пересечении дает противоречие с единственностью параллельной.

Итак, для доказательства теоремы нужно показать, что прямая BB_1 пересекает любой отрезок PQ, где $P \in AA_1$ и $Q \in CC_1$.

Проведем доказательство от противного. Допустим, что существует такой отрезок PQ, где $P \in AA_1$ и $Q \in CC_1$, который прямая BB_1 не пересекает. (см. рис. 19)

Поскольку прямая BB_1 лежит в полосе между прямыми AA_1 и CC_1, то она должна тогда целиком лежать либо в области $CQPA$ полосы, либо в области C_1QPA_1.

В первом случае, для любой точки $T \in BB_1$ луч QP будет внутренним лучом опорного угла $\angle C_1QT$ при параллельных прямых CC_1 и BB_1. Следовательно, он должен пересекать прямую BB_1, что противоречит нашему предположению.

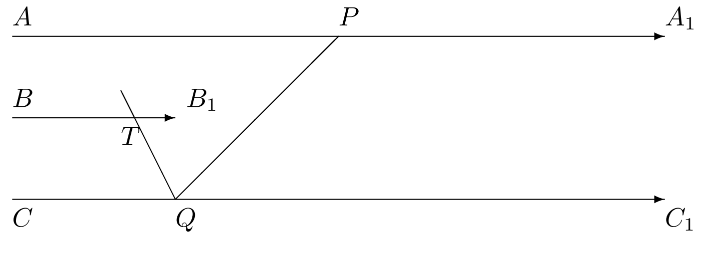

Рис. 19

Во втором случае для любой точки $T \in BB_1$ луч QT будет внутренним лучом опорного угла $\angle C_1QP$ при параллельных прямых CC_1 и AA_1. (см. рис. 20) Следовательно, он должен пересекать прямую AA_1 в некоторой точке R.

Рассмотрим треугольник $\triangle PQR$ и прямую BB_1. Прямая BB_1 пересекает сторону QR треугольника в точке T, не пересекает сторону PR. Но тогда по теореме Паша прямая BB_1 обязана пересекать сторону PQ, что противоречит нашему предположению.

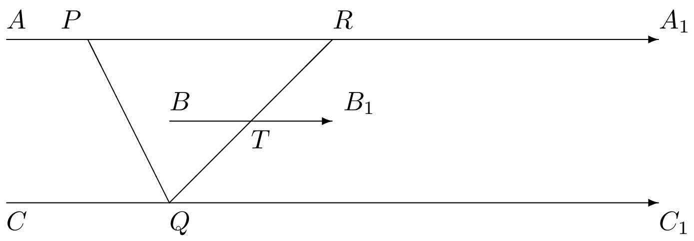

Рис. 20

Оба противоречия доказывют теорему 2.4.3.

Теорема 2.4.4 *Две прямые, параллельные третьей в одном и том же направлении, параллельны между собой (в том же направлении).*

Пусть $AA_1 \parallel CC_1$ и $BB_1 \parallel CC_1$ в направлении AA_1. Во первых, прямые AA_1 и BB_1 не могут пересекаться, так как в противном случае через одну точку проходили бы две прямые, параллельные третьей в одном и том же направлении, что невозможно.

Поскольку прямые попарно не пересекаются, то возможны следующие два случая:

1. Прямые AA_1 и BB_1 расположены по разные стороны от прямой CC_1. (см. рис. 21)
2. Прямые AA_1 и BB_1 расположены по одну сторону от прямой CC_1. (см. рис. 22)

Рассмотрим первый случай. Пусть AA_1 и BB_1 лежат по разные стороны от прямой CC_1.

Тогда они не пересекаются. Проверим критерий угла. Возьмем произвольные точки $P \in AA_1$ и $Q \in BB_1$ и выпустим внутри опорного угла $\angle A_1PQ$ произвольный луч h. Покажем, что он будет пересекать прямую BB_1.

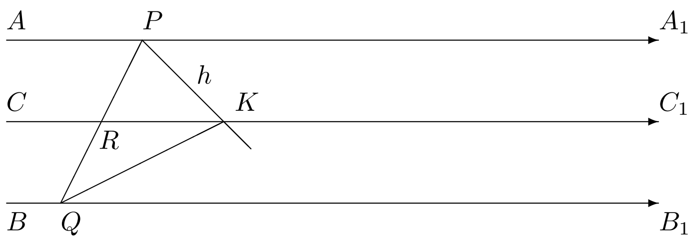

Рис. 21

Отрезок PQ будет пересекать прямую CC_1 в точке R. Так как h лежит внутри опорного угла $\angle A_1PR$ при параллельных прямых AA_1 и CC_1, то он пересекает CC_1 в некоторой точке K. Но тогда он проходит внутри опорного угла $\angle C_1KQ$ при параллельных прямых CC_1 и BB_1, следовательно пересекает прямую BB_1, что и требовалось доказать.

Рассмотрим второй случай. Не ограничивая общности рассуждений можем считать, что прямая BB_1 лежит в полосе между AA_1 и CC_1. Возьмем на прямой AA_1 произвольную точку P, а на прямой CC_1 произвольную точку R. Тогда по предыдущей теореме 2.4.3 прямая BB_1 будет пересекать отрезок PR в некоторой точке Q.

Выпустим из точки P внутри опорного угла $\angle A_1PQ$ произвольный луч h. Докажем, что h пересекает прямую BB_1.

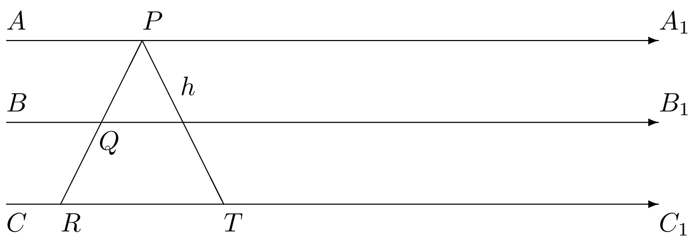

Рис. 22

Так как луч h проходит внутри опорного угла $\angle RPA_1$ при параллельных прямых AA_1 и CC_1, он пересекает прямую CC_1 в некоторой точке T.

Но тогда по теореме 2.4.3 прямая BB_1 будет пересекать отрезок PT. Так как луч h совпадает с лучом PT, он пересекает прямую BB_1.

Итак, мы доказали, что прямая AA_1 параллельна BB_1 в точке Q, а значит и в любой другой точке.

2.5 Угол параллельности. Функция Лобачевского

Определение 2.5.1 *Углом параллельности в точке P называют угол между перпендикуляром, опущенным из точки P на данную прямую и прямой, параллельной данной в точке P в некотором направлении.*

Теорема 2.5.1 *Величина угла параллельности в точке P не зависит от выбора направления на данной прямой.*

Пусть a прямая и P точка, не принадлежащая этой прямой. Выберем на прямой a направление AA_1. Опустим из точки P на прямую a перпендикуляр PP_1. Выпустим из точки P прямую BB_1, параллельную прямой a в направлении AA_1. (см. рис. 23)

Тогда $\angle B_1PP_1$ является углом параллельности. Будем называть его углом параллельности вправо.

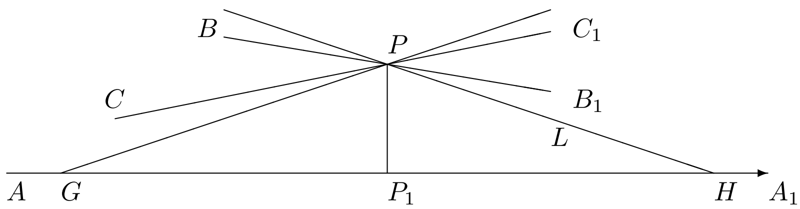

Рис. 23

Выпустим из точки P прямую C_1C, параллельную прямой a в направлении A_1A. Тогда $\angle CPP_1$ является углом параллельности. Будем называть его углом параллельности влево.

Докажем, что $\angle B_1PP_1 = \angle CPP_1$.

Доказательство проведем от противного. Допустим, что $\angle B_1PP_1 > \angle CPP_1$. Тогда отложим в правой полуплоскости от луча PP_1 угол $\angle P_1PL$, равный углу $\angle CPP_1$. Луч PL пройдет внутри опорного угла $\angle B_1PP_1$, значит обязан пересечь прямую AA_1 в некоторой точке H в силу параллельности прямых BB_1 и AA_1.

Отложим на луче P_1A отрезок $P_1G = P_1H$. Тогда $\triangle GPP_1 = \triangle HPP_1$ по двум катетам. Из равенства углов $\angle GPP_1 = \angle CPP_1$ следует совпадение лучей PC и PG, что противоречит параллельности прямых C_1C и a в направлении A_1A.

Аналогично можно опровергнуть предположение, что $\angle B_1PP_1 < \angle CPP_1$.

Теорема доказана.

Теорема 2.5.2 *Угол параллельности всегда острый.*

Действительно, пусть $BB_1 \parallel AA_1$ в направлении AA_1, $\quad P \in BB_1$ и $PQ \perp AA_1$. Тогда угол $\angle QPB_1$ не может быть тупым, (см. рис. 24 слева),

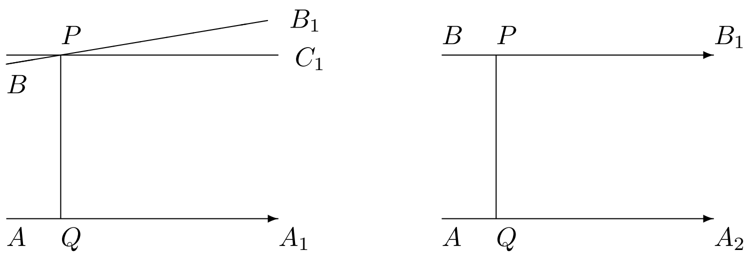

Рис. 24

поскольку луч $PC_1 \perp PQ$ тогда обязан пересекать AA_1, как проходящий внутри угла параллельности, что невозможно, поскольку два перпендикуляра к одной прямой не могут пересекаться.

Угол $\angle QPB_1$ не может быть прямым, (см. рис. 24 справа), так как тогда любая другая прямая, проходящая через точку P, пересекала бы прямую AA_1, как проходящая внутри угла параллельности, как слева, так и справа. Тогда прямая BB_1 была бы единственной прямой, которая проходит через точку P и не пересекает прямую AA_1, что противоречит аксиоме Лобачевского.

Определение 2.5.2 *Функцией Лобачевского называют функцию* $\Pi(x)$*, аргументом которой является расстояние* x *от точки до прямой, а значением которой является величина угла параллельности в данной точке.*

Теорема 2.5.3 *Функция* $\Pi(x)$ *определена корректно, то есть величина угла параллельности в данной точке зависит лишь от расстояния* x *от точки до прямой.*

Возьмем две прямые AA_1 и BB_1, две точки $P \notin AA_1$ и $P_1 \notin BB_1$, опустим из них перпендикуляры PQ и P_1Q_1 такие, что $Q \in AA_1$, $Q_1 \in BB_1$, $|PQ| = |P_1Q_1|$. (см. рис. 25 и 26) Пусть $CC_1 \parallel AA_1$ в точке P в направлении AA_1, а $DD_1 \parallel BB_1$ в точке P_1 в направлении BB_1 Докажем, что $\angle QPC_1 = \angle Q_1P_1D_1$.

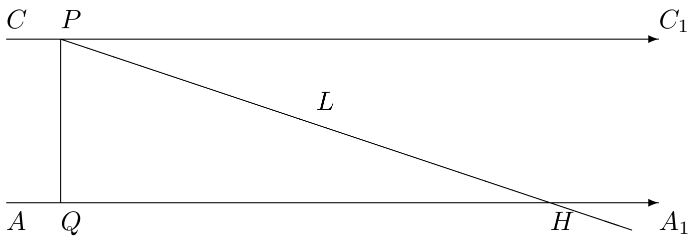

Рис. 25

Предположим противное. Пусть $\angle QPC_1 > \angle Q_1P_1D_1$. Тогда, как в теореме 2.5.1, отложим в правой полуплоскости от луча PQ угол $\angle QPL$, равный углу $\angle Q_1P_1D_1$. Луч PL пройдет внутри опорного угла $\angle QPC_1$, значит обязан пересечь прямую AA_1 в некоторой точке H в силу параллельности прямых CC_1 и AA_1.

Отложим на луче Q_1B_1 отрезок $Q_1G = QH$. Тогда $\triangle QPH = \triangle Q_1P_1G$ по двум катетам. Из равенства углов $\angle Q_1P_1D_1 = \angle Q_1P_1G$ следует совпадение лучей P_1G и PD_1, что противоречит параллельности прямых DD_1 и BB_1 в направлении BB_1.

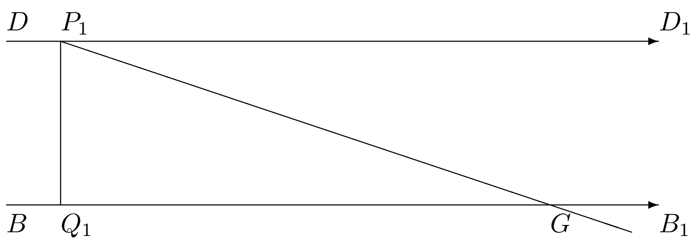

Рис. 26

Аналогично можно опровергнуть предположение, что $\angle QPC_1 < \angle Q_1P_1D_1$.

Теорема доказана.

Теорема 2.5.4 *Для каждого острого угла существует прямая, которая перпендикулярна одной стороне угла и параллельна другой.*

Доказательство проводится по следующей схеме:

1. Сначала покажем, что существуют перпендикуляры к стороне острого угла, не пересекающие другой стороны этого угла.

2. Покажем, что среди таких перпендикуляров есть ближайший к вершине угла.

3. Докажем наконец, что перпендикуляр, который является ближайшим к вершине угла, параллелен другой стороне угла.

Докажем 1. Пусть $\angle POQ$ — острый. Допустим, что любой перпендикуляр, восстановленный из точки на луче $[OQ)$ будет пересекать противоположную сторону угла.

Возьмем на луче OQ некоторый отрезок OA. (см. рис. 27)

Восстановим из точки A перпендикуляр к OQ, который будет пересекать сторону OP в точке B. Построим бесконечную последовательность точек $\{A_i\}$ таких, что

$$AA_1 = OA,\ A_1A_2 = OA_1, \ldots, A_{n-1}A_n = OA_n, \ldots$$

Перпендикуляры, восстановленные из них, дают на другой стороне угла, в силу сделанного допущения, последовательность точек $\{B_i\}$. Проведем отрезки

$$BA_1,\ B_1A_2,\ B_2A_3, \ldots,\ B_iA_{i+1}, \ldots$$

Обозначим дефект треугольника $\triangle OAB$ через δ.

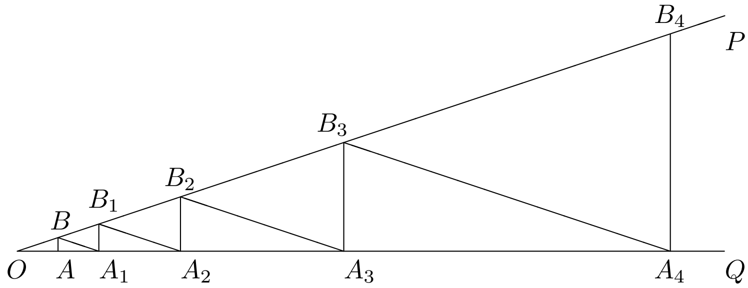

Рис. 27

Тогда по свойстам дефекта получим

$$\delta_{OA_1B_1} = 2\delta + \delta_{BA_1B_1} > 2\delta \Longrightarrow 2\delta_{OA_1B_1} > 2^2\delta;$$

$$\delta_{OA_2B_2} = 2\delta_{OA_1B_1} + \delta_{B_1A_2B_2} > 2^2\delta + \delta_{B_1A_2B_2} > 2^2\delta;$$

Далее путем аналогичных рассуждений получаем

$$\delta_{OA_nB_n} = 2\delta_{OA_{n-1}B_{n-1}} + \delta_{B_{n-1}A_nB_n} > 2^n\delta + \delta_{B_{n-1}A_nB_n} > 2^n\delta;$$

Так как процесс можно продолжать до бесконечности, то получается, что дефект $\delta_{OA_nB_n}$ растет с возрастанием номера n и может превысит любое число, а это противоречит свойству ограниченности дефекта.

Полученное противоречие говорит о том, что наше предположение неверно.

2. Разобьем все перпендикуляры к стороне OQ на два класса так, что к первому будут относится те, которые пересекают сторону QP, а ко второму — непересекающие. Тогда все точки стороны OQ будут удовлетворять аксиоме Дедекинда, если мы назовем точками первого класса те, из которых восстановлены перпендикуляры первого класса, а точками второго класса те, из которых восстановлены перпендикуляры второго класса.

Действительно, как следует из предыдущего пункта, оба класса непусты и не имеют общих точек. Докажем, что каждая точка первого класса лежит между точкой O и любой точкой второго класса.

Рассуждаемот противного. Допустим, что нашлась точка D второго класса, которая лежит между точкой O и некоторой точкой E первого класса. (см. рис. 28 слева) Тогда перпендикуляр, восстановленный из точки E, пересекает сторону OP в точке F. Применим к треугольнику $\triangle OEF$ и перпендикуляру, восстановленному из точки D, теорему Паша. Перпендикуляр из точки D не может пересекать сторону EF, поскольку два перпендикуляра к одной прямой не пересекаются, следовательно обязан пересечь OF, что невозможно, поскольку по предположению, точка D второго класса.

Обозначим через G граничную точку, разделяющую классы. Между ней и вершиной угла расположены точки первого класса, а сама G является точкой второго класса.

Докажем это от противного.

Если предположить, что перпендикуляр из точки G пересекает сторону OP в точке K, (см. рис. 28 справа), то взяв на OP точку L, такую, что K лежит между O и L, опустив из L перпендикуляр на OQ, получим

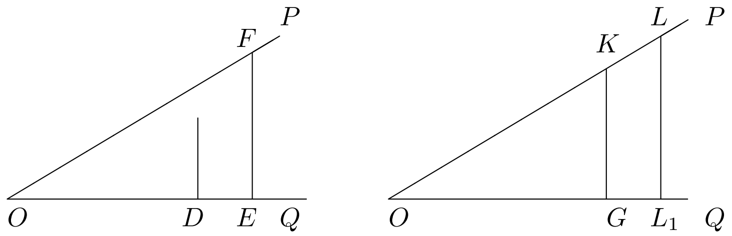

Рис. 28

точку первого класса, а это противоречит тому, что точка G граничная.

3. Докажем теперь, что перпендикуляр GG_1 из точки G параллелен стороне OP. Выпустим из вершины G внутри опорного угла $\angle G_1GO$ луч h и покажем, что он пересесекает сторону OP. (см. рис 29)

Возьмем на луче h произвольную точку M и опустим из нее перпендикуляр MR на прямую OQ.

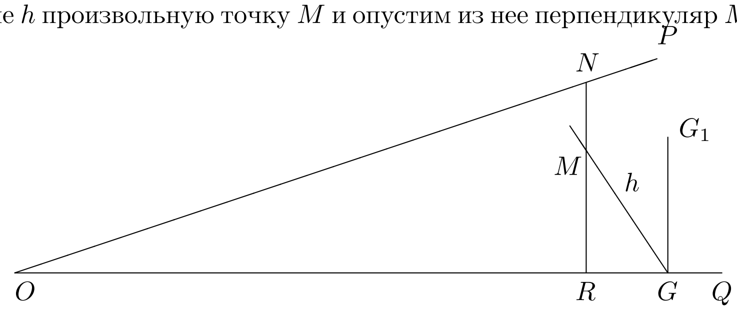

Рис. 29

Это будет перпендикуляр первого класса, а значит он будет пересекать сторону OP в некоторой точке N. Применяя к треугольнику $\triangle ORN$ и прямой h теорему Паша, покажем, что h пересекает OP. Теорема доказана.

Следствие 2.5.1 *Любой острый угол является углом параллельности для некоторого отрезка.*

Итак, функция $\Pi(x)$ имеет своей областью определения интервал $(0;\infty)$, а областью изменения — интервал $(0;\pi/2)$.

Теорема 2.5.5 *При возрастании x от нуля до бесконечности функция $\Pi(x)$ монотонно убывает от $\pi/2$ до нуля.*

Пусть $PQ \perp QQ_1$ и прямая PP_1 параллельна прямой QQ_1 в направлении QQ_1. (см. рис. 30) Положим $|PQ| = x$ и пусть $R \in PQ$ такая, что $|RP| = y < x$. Проведем $RR_1 \perp PQ$

Выпустим из точки Q внутри угла $\angle RQQ_1$ луч h, параллельный RR_1 в направлении RR_1.

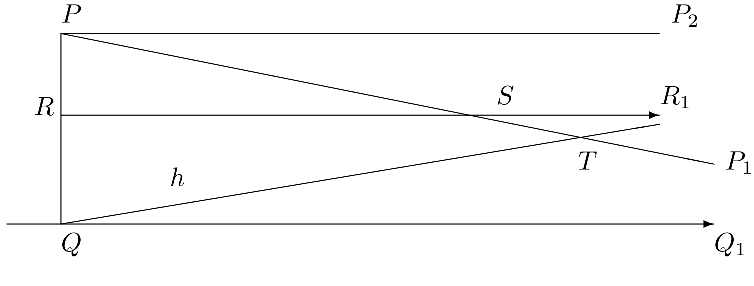

Рис. 30

Поскольку h проходит внутри опорного угла $\angle PQQ_1$ при параллельных прямых QQ_1 и PP_1, он пересекает PP_1 в некоторой точке T. Применяя к треугольнику $\triangle PQT$ и прямой RR_1 теорему Паша, получим, что прямая RR_1 пересекает сторону PT треугольника $\triangle PQT$ во внутренней точке S. (см. рис. 30) Делаем вывод: если прямая PP_2 параллельна прямой RR_1 в направлении RR_1, то луч $[PP_2)$ проходит выше прямой PP_1. Таким образом, $\Pi(y) > \Pi(x)$. Теорема доказана.[6]

Следующая теорема имеет вспомогательное значение.

Теорема 2.5.6 *Расстояние от точки, лежащей на одной стороне острого угла, до другой стороны неограниченно и монотонно возрастает при удалении точки от вершины по стороне угла.*

То, что расстояние монотонно возрастает, есть простое следствие теорем о четырехугольниках Саккери.

Покажем, что на стороне OP острого угла $\angle POQ$ можно найти такую точку S, расстояние от которой до стороны OQ будет больше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$.

Пусть $MN \perp OQ$ и $MN \parallel OP$ в направлении OP. Отложим на отрезке MN отрезок MR длины $\varepsilon > 0$. (см. рис. 31) Проведем из точки R перпендикуляр к MN. Он обязательно пересекает сторону OP в некоторой точке T, так как проходит внутри опорного угла $\angle ORN$ при параллельных прямых MN и OP.

Опустим из точки T перпендикуляр на сторону OQ, получим точку S.

Рассмотрим четырехугольник $RTSQ$ с тремя прямыми углами. Тогда угол RTS будет острым, а тогда из теорем о четырехугольниках Саккери получаем $ST > RM = \varepsilon$.

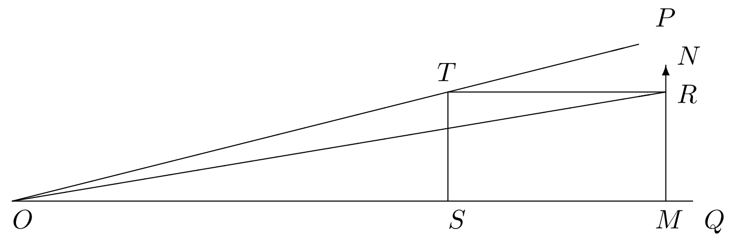

Рис. 31

Теорема 2.5.7 *Расстояние от точки, принадлежащей одной из параллельных прямых, до другой монотонно убывает до нуля при движении точки в направлении параллельности, и неограниченно и монотонно возрастает при движении точки в обратном направлении.*

1. Монотонность расстояния следует из теорем о четырехугольниках Саккери. Пусть, например, $AA_1 \parallel BB_1$ в направлении AA_1. Возьмем на AA_1 две точки P и R и опустим из них перпендикуляры на прямую BB_1. (см. рис. 32) Получим четырехугольник Саккери $PQSR$.

Так как углы $\angle RPQ$ и $\angle A_1RS$ острые, как углы параллельности, то угол $\angle PRS$ — тупой. Тогда в четырехугольнике Саккери $PQSR$ $\quad |PQ| > |RS|$.

2. Покажем теперь, что для любого $\varepsilon > 0$ на прямой AA_1 найдется такая точка M, что опущенный из нее перпендикуляр на прямую BB_1 будет иметь длину $d < \varepsilon$.

Из произвольной точки $C \in AA_1$ опустим перпендикуляр на BB_1. Получим точку D. Если $|CD| < \varepsilon$, то точка $M = C$ найдена.

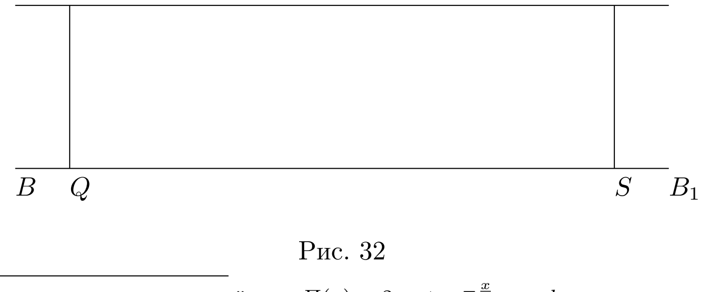

Рис. 32

[6]Функция Лобачевского имеет следующий вид: $\Pi(x) = 2\,\mathrm{arctg}\, e^{-\frac{x}{k}}$, где k — некоторая постоянная.

Если $|CD| > \varepsilon$, то отложим на CD отрезок $DE, |DE| < \varepsilon$, и найдем на AA_1 такую точку M, что расстояние от нее до BB_1 будет равно $|DE| < \varepsilon$. Выпустим из точки E две прямые $EE_1 \parallel BB_1$ и $EE_2 \parallel B_1B$. (см. рис. 33) Так как прямая E_2E пройдет внутри опорного угла $\angle CEE_1$, она будет пересекать AA_1 в точке F.

Опустим из точки F перпендикуляр на BB_1. Получим точку G. Отложим на луче FA_1 отрезок $FM = FE$. Опустим из точки M перпендикуляр на BB_1. Получим точку Q. Проведем отрезки EG и MG. Тогда $\triangle EFG = \triangle MFG$ по первому признаку и $\triangle EDG = \triangle MQG$ по гипотенузе и острому углу. Следовательно $MQ = DE < \varepsilon$.

Итак, найдена точка $M \in AA_1$ такая, что ее расстояние до прямой BB_1 меньше любого наперед заданного ε.

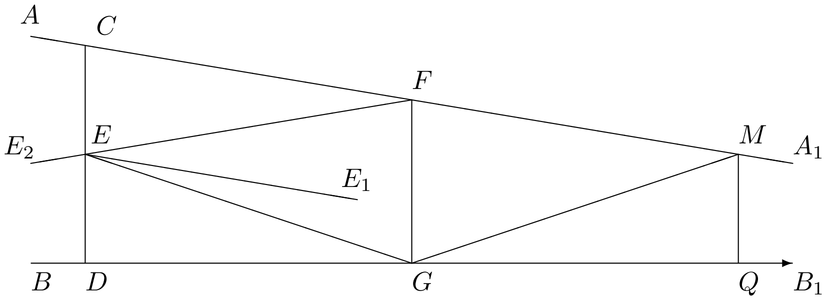

Рис. 33

Докажем, что в направлении, противоположном направлению расстояния монотонно и неограничено возрастают.

Возьмем на прямой AA_1 произвольную точку P и опустим из точки P перпендикуляр на BB_1. Получим точку Q. (см. рис. 34) Выпустим из точки Q внутри угла $\angle PQB$ прямую QQ_1, параллельную PA в направлении A_1A.

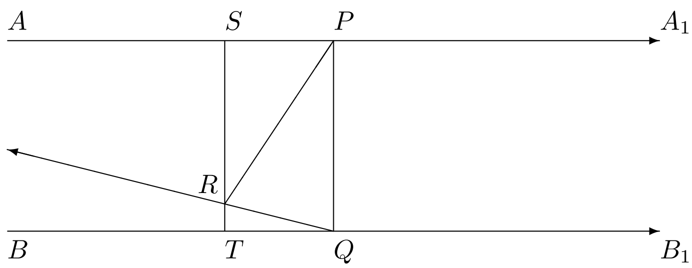

Рис. 34

Возьмем на прямой QQ_1 произвольную точку R и опустим из точки R перпендикуляр на BB_1. Получим точку T. Так как прямая TR пройдет внутри опорного угла $\angle PRQ_1$, она будет пересекать PA в точке S. Тогда при движении точки R по лучу QQ_1 от вершины в направлении параллельности длина отрезка RT по теореме 2.5.6 монотонно и неограниченно возрастает. Но тогда монотонно и неограниченно возрастает длина отрезка ST.

2.6 Расходящиеся прямые

Определение 2.6.1 *Две прямые называются расходящимися, если они не имеют общих точек и не параллельны (ни в одном направлении).*

Теорема 2.6.1 *Расходящиеся прямые существуют.*

Для доказательства покажем, что два перпендикуляра к одной прямой расходятся. В самом деле, они не могут пересекаться, что легко показать от противного с применением теоремы о внешнем угле треугольника.

Но они также не могут быть параллельными, так как применяя теоремы 2.5.1 или 2.5.2 получим противоречие.

Теорема 2.6.2 *Если при пересечении двух прямых третьей внутренние накрестлежащие углы равны, то прямые расходятся.*

Пусть при пересечении прямых AA_1 и BB_1 прямой c получились точки P и Q, а $\angle APQ = \angle PQB_1$. (см. рис. 35) Из середины S отрезка PQ опустим перпендикуляры SR и ST на прямые AA_1 и BB_1 соответственно.

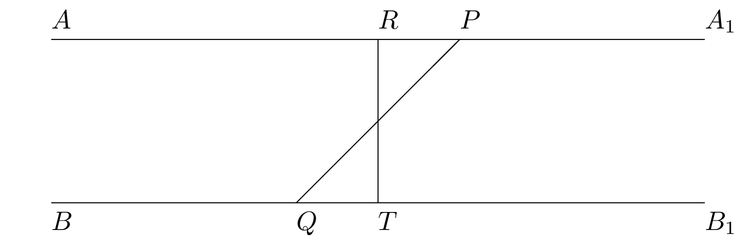

Рис. 35

Тогда $\triangle SRP = \triangle STQ$ по гипотенузе и острому углу. В силу равенства углов $\angle RSP$ и $\angle TSQ$ точки R, S и T лежат на одной прямой, следовательно RT — общий перпендикуляр прямых Тогда прямые AA_1 и BB_1 расходящиеся, как два перпендикуляра к прямой RT.

Теорема 2.6.3 *Расходящиеся прямые имеют единственный общей перпендикуляр. В обоих направлениях от него расстояния от точек одной прямой до другой прямой неограниченно возрастают.*

1.Существование. Пусть AA_1 и BB_1. расходящиеся. Возьмем произвольную точку $C \in AA_1$ и выпустим из нее два луча $CE \parallel B_1B$ и $CD \parallel BB_1$. (см. рис. 36) По теореме 2.5.4 существуют перпендикуляры $GG_1 \perp AA_1$ и $FF_1 \perp AA_1$ такие, что $GG_1 \parallel CE$ и $FF_1 \parallel CD$. Тогда $GG_1 \parallel BB_1$ и $FF_1 \parallel BB_1$ согласно транзитивности отношения параллельности.

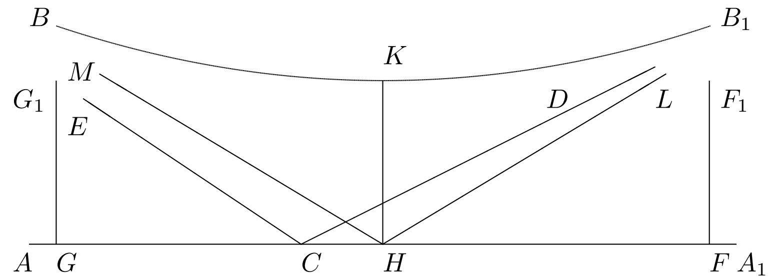

Рис. 36

Пусть H — середина отрезка GF. Опустим из H перпендикуляр на прямую BB_1 Получим точку K. Покажем, что HK — общий перпендикуляр прямых AA_1 и BB_1. Для этого из точки H проведем $HM \parallel B_1B$ и $HL \parallel BB_1$. Тогда углы $\angle KHL$ и $\angle KHM$ равны как углы параллельности. Их общее значение равно $\Pi(|HK|)$.

Углы $\angle FHL$ и $\angle GHM$ также равны как углы параллельности. Их общее значение равно $\Pi(|HF|) = \Pi(|HG|)$. Следовательно $\angle KHF = \angle KHG$. Но эти углы смежные, значит они прямые. Существование доказано.

2.Единственность. Предположим противное. Пусть PQ и RS — два общих перпендикуляра расходящихся прямых AA_1 и BB_1. (см. рис. 37 слева)

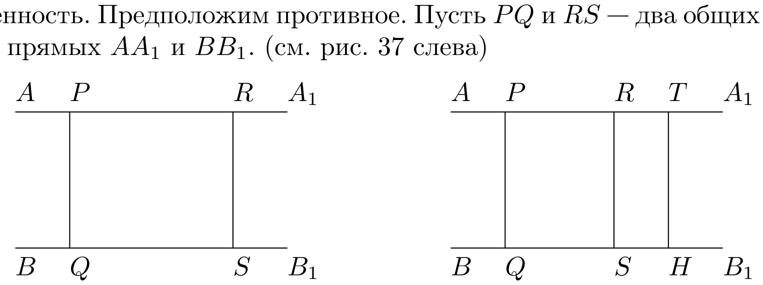

Рис. 37

Мы получили четырехугольник с четырьмя прямыми углами, что противоречит следствию из теоремы 2.2.1.

3. Докажем, что при движении точки по прямой в любую сторону от общего перпендикуляра расходящихся прямых, ее расстояние до другой прямой, расходящейся с ней, монотонно возрастает.

Пусть PQ — общий перпендикуляр прямых AA_1 и BB_1, а RS — другой перпендикуляр к прямой BB_1. (см. рис. 37 справа) Тогда четырехугольник $PQSR$ с тремя прямыми углами, следовательно угол $\angle PRS$ — острый. Отсюда следует, что $|RS| > |PQ|$. Возьмем перпендикуляр TH, такой, что R между P и T. В четырехугольнике $RSHT$ угол $\angle TRS$ — тупой, а угол $\angle RTH$ — острый. Следовательно $TH > RS$. Монотонность доказана.

4. Покажем, наконец, что расстояние возрастает неограниченно. Пусть PQ — общий перпендикуляр расходящихся прямых AA_1 и BB_1. Выпустим из точки P прямую PR, параллельную прямой AA_1 в направлении AA_1. (см. рис. 38) Тогда по теореме 2.5.6 для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $S \in PR$ такая, что $|ST| > \varepsilon$.

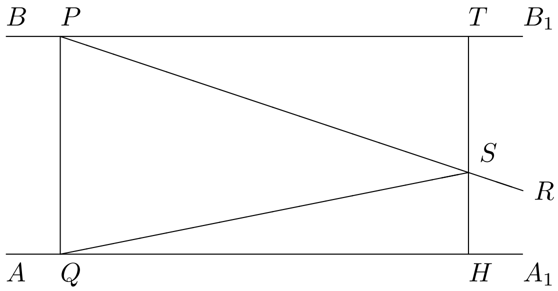

Рис. 38

Продолжим TS внутрь угла $\angle QSR$. Этот угол опорный при параллельных прямых PR и AA_1. Тогда прямая TS пересекает прямую AA_1 в точке H. Получили, что $TH > TS > \varepsilon$.

Неограниченность доказана.

2.7 Простейшие кривые на плоскости Лобачевского

На плоскости Лобачевского различают пучки прямых трех типов:

1. Пучок прямых, проходящих через одну точку. Его называют *эллиптическим.*
2. Пучок прямых, параллельных между собой в одном и том же направлении. Его называют *параболическим.*
3. Пучок расходящихся прямых. Его называют *гиперболическим.*

Ортогональные траектории этих пучков дают три типа простейших кривых на плоскости Лобачевского. Их называют соответственно *окружностью, орициклом и эквидистантой.*

Определение окружности на плоскости Лобачевского не отличается от ее определения в евклидовой геометрии, поэтому мы его не приводим.

Определение 2.7.1 *Эквидистантой называется множество точек, расположенных по одну сторону от прямой a и отстоящих от нее на фиксированном расстоянии h.*

Дословный перевод термина эквидистанта — *линия равных расстояний.* Прямая a называется *базой* эквидистанты, а расстояние h — *высотой* эквидистанты.

Докажем некоторые свойства эквидистанты.

Теорема 2.7.1 *Никакие три точки эквидистанты не лежат на одной прямой.*

Проведем доказательство методом "от противного". Допустим, что точки A, B и C эквидистанты лежат на одной прямой l. Опустим из каждой точки перпендикуляр на базу a. Мы получим три равнобочных четырехугольника Саккери: AA_1B_1B, BB_1C_1C и AA_1C_1C, в которых углы при верхних основаниях равные и острые. (см. рис. 39 слева) Предположим для определенности, что точка B лежит между A и C. Тогда при точке B сумма величин углов $\angle ABB_1$ и $\angle CBB_1$ меньше $2d$, чего быть не может, поскольку эти углы смежные.

Противоречие доказывает теорему.

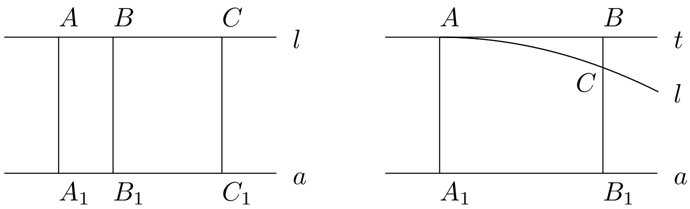

Рис. 39

Теорема 2.7.2 *Все точки эквидистанты лежат по одну сторону от прямой, которая проходит через какую-либо ее точку A перпендикулярно высоте, опущеной из A на базу. Эта прямая является касательной к эквидистанте в точке A.*

Обозначим буквой a базу эквидистанты l. Проведем через точку A, принадлежащую эквидистанте l, высоту эквидистанты $AA_1 \perp a$, а также прямую $t \perp AA_1$. (см. рис. 39 справа)

Пусть $B \in t$ — произвольная точка. Опустим из нее на базу a перпендикуляр BB_1. Тогда прямые t и a расходящиеся, поскольку имеют общий перпендикуляр AA_1, следовательно $AA_1 < BB_1$.

Обозначим точку эквидистанты l, принадлежащую лучу B_1B, через C, тогда $B_1C = A_1A < B_1B$. Поскольку точка B произвольная, то все точки эквидистанты, кроме точки A, лежат в полосе между базой a и прямой t.

Докажем, что прямая t является касательной к эквидистанте l в точке A, то есть для произвольной точки X эквидистанты, $X \neq A$, ($\lim\limits_{X \to A} AX = t$).

Пусть X — произвольная точка эквидистанты, $h = AA_1 = XX_1$ — ее высота. (см. рис. 40) Обозначим величину угла $\angle XAA_1$ через α. Докажем, что

$$\lim_{X \to A} \alpha = d \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{X \to A} AX = t.$$

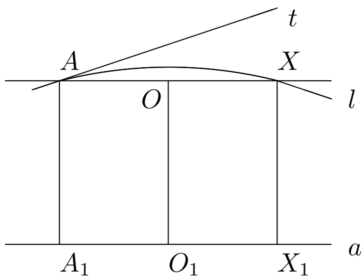

Рис. 40

Так как AA_1X_1X является равнобочным четырехугольником Саккери, то $\alpha < d$. Обозначим через OO_1 ось симметрии четырехугольника AA_1X_1X , а $|AO| = \delta$.

Имеем, что прямые AA_1 и OO_1 расходятся, откуда следует, что $\Pi(\delta) < \alpha < d$. Переходя в этом двойном неравенстве к пределу при $X \to A$ и учитывая, что $\lim\limits_{X \to A} \Pi(\delta) = d$, получим, что $\lim\limits_{X \to A} \alpha = d$.

Определение 2.7.2 *Две точки A и B, принадлежащие прямым параболического пучка называются соответствующими, если срединный перпендикуляр отрезка AB принадлежит этому же пучку.*

Теорема 2.7.3 *Прямая, проходящая через соответствующие точки параболического пучка, является секущей равного наклона.*

Доказательство теоремы очевидно, поскольку углы в соответствующих точках A и B равны как углы параллельности.

Теорема 2.7.4 *Если $a \parallel b$ и $A \in a$, то существует единственная секущая равного наклона, проходящая через точку A.*

Из теоремы 2.4.1 известно, что если $a \parallel b$, то существует прямая c, относительно которой a и b симметричны. Проведем через точку A прямую $m \perp c$ и обозначим $B = m \cap b$. Тогда прямая $m = AB$ является секущей равного наклона. Действительно, точка A', симметричная точке A относительно прямой c, должна совпасть с точкой B, следовательно, в силу симметрии, углы в точках A и B, о которых идет речь, равны. Существование секущей равного наклона к параллельным прямым a и b доказано.

Докажем, что секущая равного наклона к параллельным прямым $a = AA_1$ и $b = BB_1$, проходящая через точку $A \in a$, единственная. Допустим, что через точку A проходят две секущие равного наклона, $m = AB$ и $n = AC$. Пусть, для определенности точка C лежит в той полуплоскости с границей m, которая определена направлением параллельности AA_1. (см. рис. 41)

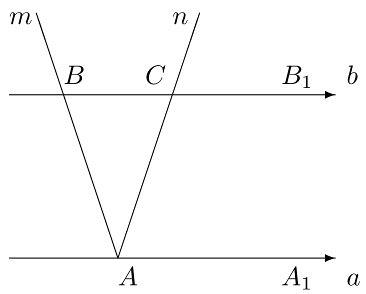

Рис. 41

Тогда $\angle ACB_1 > \angle ABB_1$ как внешний угол треугольника ABC, а с другой стороны

$$\angle ACB_1 = \angle CAA_1 < \angle BAA_1 = \angle ABB_1.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема 2.7.5 *Срединный перпендикуляр к секущей равного наклона параллельных прямых a и b параллелен им в том же направлении.*

В самом деле, срединный перпендикуляр к секущей AB равного наклона является осью симметрии полосы между параллельными a и b. Тогда, во-первых, он не может пересекаться ни с a, ни с b. Во-вторых, срединный перпендикуляр не может расходиться ни с a, ни с b, так как в этом случае и сами прямые a и b расходились бы как имеющие общий перпендикуляр.

Остается последняя возможность, срединный перпендикуляр к секущей равного наклона параллельных прямых a и b параллелен одной из них, а в силу симметрии и другой.

Теорема 2.7.6 *Пусть a, b и c – прямые параболического пучка, а A, B и C – принадлежащие им точки. Если AB и BC – секущие равного наклона, то и AC – секущая равного наклона.*

Доказательство разбивается на два случая.

Случай 1. Прямая b лежит в полосе между a и c. (см. рис. 42) Пусть p и q — срединные перпендикуляры к отрезкам AB и BC соответственно. Тогда точки P и Q — точки пересечения прямых p и q с прямой AC.

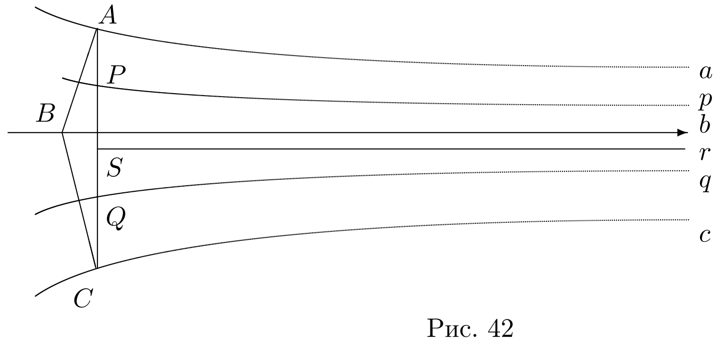

Рис. 42

Нетрудно доказать, что точка S, середина отрезка AC, принадлежит отрезку PQ. [7]

[7] $\angle PBC > \angle QBC = \angle PCB \Longrightarrow PB < PC \Longrightarrow AP < PC$, аналогично $CQ < QA$, тогда точка S, середина отрезка AC, лежит между P и Q

По теореме 2.7.5 прямые a, b, c, p и q параллельны в одном и том же направлении. Пусть r — срединный перпендикуляр к AC. Перпендикуляр r не пересекает ни p, ни q, так как в противном случае точка пересечения будет явться точкой пересечения всех трех прямых p, q и r — центром описаной вокруг $\triangle ABC$ окружности, что невозможно.

Перпендикуляр r не может расходиться ни с p ни с q, так как тогда расстояние между r и p, например, неограниченно возрастает, а между r и p стремится к нулю, в то время как r лежит между p и q.

Из полученного противоречия следует, что прямая r параллельна прямым a, b, c, p и q.

Очевидно, что AC — секщая равного наклона, так как углы при A и C — это углы параллельности для отрезков AS и CS.

Случай 2. Прямая b не лежит в полосе между a и c. Предположим, для определенности, что прямая a лежит в полосе между прямыми b и c. (см. рис. 43)

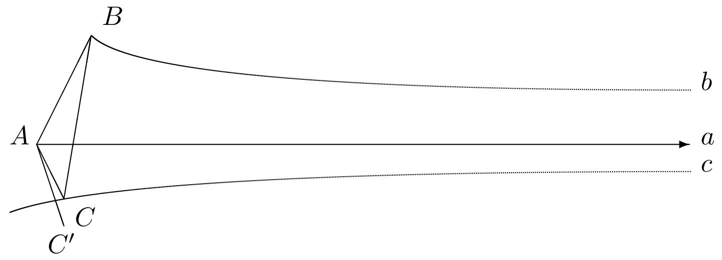

Рис. 43

Проведем доказательство от противного. Предположим, что отрезок AC не является секущей равного наклона.

Тогда, согласно теореме 2.7.4, существует прямая $AC' \neq AC$, которая является секущей равного наклона. Тогда, по случаю 1, прямая BC' также является секущей равного наклона. Однако $BC' \neq BC$.

Мы получили, что через точку B проходят две секущие равного наклона, что противоречит теореме 2.7.4

Определение 2.7.3 *Пусть прямая a определяет параболический пучок и точка $A \in a$. Множество точек, соответствующих точке A в этом пучке называется орициклом.*

Орицикл называют еще *предельной линией.*[8] Докажем некоторые свойства орицикла.

Теорема 2.7.7 *Никакие три точки орицикла не лежат на одной прямой.*

Теорема легко доказывается от противного. Допустим, что прямые a, b и c параллельны в одном направлении и точки $A \in a, B \in b$ и $C \in c$ одного и того же орицикла лежат на одной прямой. Пусть, для определенности, прямая b лежит в полосе между a и c. По определению орицикла отрезки AB и BC являются секущими равного наклона, следовательно углы в точке B равные и смежные, следовательно прямые. Но тогда и в точках A и C углы прямые. Тогда прямые a, b и c расходящиеся, как имеющие общий перпендикуляр, что противоречит условию.

Теорема 2.7.8 *Все точки орицикла лежат по одну сторону от прямой t, проходящей через точку A орицикла перпендикулярно к прямой пучка, содержащей A. Эта прямая t является касательной к орициклу в точке A.*

Пусть M — произвольная точка орицикла l, а точка O — середина отрезка AM. Обозначим через p срединный перпендикуляр к отрезку AM, а через $\delta = |OA|$.

Пусть $\alpha = \Pi(\delta)$, тогда угол α — острый, как угол параллельности, следовательно все точки M орицикла лежат по одну сторону от прямой t, а точнее расположены в той полуплоскости с

[8]Название мотивируется тем, что, с одной стороны, орицикл является пределом переменной окружности, которая проходит через некоторую точку A и центр которой удаляется в бесконечность по прямой a, проходящей через A; с другой стороны орицикл является пределом переменной эквидистанты, которая проходит через точку A и ось которой удаляется в бесконечность, оставаясь перпендикулярной к a.

границей t, которая содержит луч прямой a, задающий направление параллельности в пучке. (см. рис. 44)

Далее, поскольку при $M \to A$ величина $\delta \to 0$, то $\alpha = \Pi(\delta) \to d$, откуда следует, что t — касательная к орициклу в точке A.

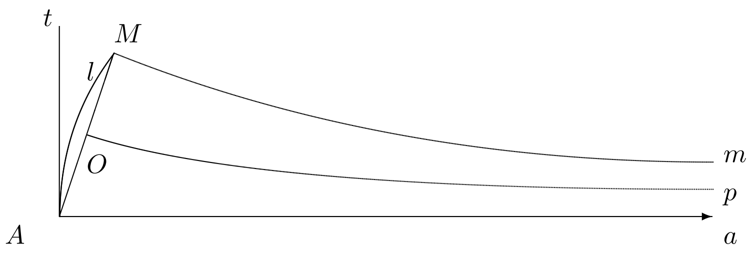

Рис. 44

Теорема 2.7.9 *Все орициклы равны.*

Равенство орициклов понимается следующим образом: между точками орициклов можно установить такое биективное соответствие, при котором хорды, соединяющие любые соответствующие дуги, равны.

Доказательство предлагается прочитать, например, в [4].

Список литературы

[1] *Атанасян Л.С., Базылев В.Т.* Геометрия. Ч.2. М: Просвещение, 1987.

[2] *Базылев В.Т., Дуничев К.И.* Геометрия. Ч.2. М: Просвещение, 1975.

[3] *Вернер А.Л., Кантор Б.Е., Франгулов С.А.* Геометрия. Ч.1. СПб: Специальная литература, 1997.

[4] *Широков П.А.* Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. М: Наука, 1983.

[5] *Трайнин Я.Л.* Основания геометрии. М: Учпедгиз, 1961.

[6] *Ефимов Н.В.* Высшая геометрия. М: Физматгиз, 1961.

[7] *Гильберт Д.* Основания геометрии. М-Л: ГИТТЛ, 1948.

[8] *Лелон-Ферран Ж.* Основания геометрии. М: Мир, 1989.

[9] *Кокстер Г.С.М.* Введение в геометрию. М: Наука, 1966.

[10] *Розенфельд Б.А.* История неевклидовой геометрии. М: Наука, 1976.

[11] *Берже М.* Геометрия. т.1, 2, М: Мир, 1984.

[12] *Комиссарук А.М.* Проективная геометрия в задачах. Минск: Вышэйшая школа, 1971.

[13] *Донеддю А.* Евклидова планиметрия. М: Наука, 1978.