Волгоградский государственный педагогический университет

Кафедра алгебры, геометрии и информатики

Элементы аффинной и евклидовой геометрии

Методическая разработка
в помощь студентам стационара и ОЗО

Составил доцент Крячков Ю.Г.

Волгоград
2005

Содержание

Введение **2**

Список литературы **3**

1 Аффинные и евклидовы пространства **4**
1.1 Аффинное пространство 4
1.2 Простейшие фигуры в аффинном пространстве 6
1.3 Взаимное расположение двух плоскостей 9
1.4 Аффинная оболочка плоскостей 10
1.5 Евклидово пространство 11

2 Аффинные отображения и преобразования **14**
2.1 Аффинные отображения и преобразования 14
2.2 Аффинные преобразования плоскости 20
2.3 Основная теорема аффинной геометрии 23

3 Движения и подобия **29**
3.1 Ортогональные и изометрические операторы 29
3.2 Движения 30
3.3 Движения евклидовой плоскости E^2 34
3.4 Движения евклидова пространства E^3 35
3.5 Линейные подобия 36
3.6 Подобия 39

4 Квадратичные формы **42**
4.1 Основные определения и теоремы 42
4.2 Приведение квадратичной формы к каноническому виду 42
4.3 Квадратичные формы в евклидовом пространстве 43
4.4 Приведение пары форм 43

5 Квадрики **44**
5.1 Квадрики в аффинном пространстве 44
5.2 Квадрики в евклидовом пространстве 44

Введение

Методическая разработка предназначена для студентов дневного и заочного отделений математических факультетов. Возможно она окажется полезной и преподавателям, ведущим практические занятия по геометрии.

В основе изложения лежит подход, который восходит к Г.Вейлю. Он первый в 1918 году предложил построение евклидовой геометрии, опирающееся на понятие векторного пространства[1]. Концепция Г.Вейля оказалась столь плодотворной, что теперь без нее трудно представить развитие математики на протяжении последних восьмидесяти пяти лет.

Мы надеемся, что разработка будет хорошим дополнением к имеющейся литературе, часть которой указана ниже. Список достаточно большой, хотя далеко не полный.

Сделаем краткий обзор литературы.

В математической литературе второй половины прошлого столетия есть много книг, реализующих геометрические идеи Г. Вейля, в том числе на русском языке: [4], [6], [7], [9], [10], [12], [13], [14], [16], [18], [19].

Книга [6] – замечательная монография известного французского ученого, содержит огромное количество информации, но не являтся учебником. Она рассчитана на уже подготовленного читателя. Книги [9], [14] также трудны для первоначального ознакомления с предметом, однако специально посвящены аффинной и евклидовой геометрии. Они приспособлены к системе французского университетского преподавания.

На студентов отечественных педуниверситетов рассчитаны учебники [4], [7]. К ним примыкают учебные пособия [19], [10], [12], [13] университетского типа. Монография [18] содержит много дополнительного материала. Пособие [16] предназначено для студентов-заочников.

Система аксиом заимствована нами в учебнике [19], аналогичный подход принят в [12], [13].

Материал разбит на разделы и подразделы. Нумерация определений, лемм и теорем производится в каждом подразделе. Например, ссылка (Лемма 2.3.1) означает, что имеется в виду первая лемма третьего подраздела второго раздела. Аналогично для теорем и определений.

Основной текст снабжен комментариями, содержит ссылки на литературу.

Подавляющее число теорем, приведенных в тексте, доказано, а к остальным даны указания или источники, в которых доказательства можно прочитать.

Отметим, что студенту, изучающему этот раздел геометрии, прежде всего необходимо усвоить центральные понятия *аффинное пространство* и *аффинное отображение (преобразование)*. Центральными теоремами являются теоремы 2.1.1 и 2.1.5 (существования и единственности), теорема 2.1.6 (теорема о свойствах) и теорема 2.3.1 (основная теорема аффинной геометрии)

Далее студент должен усвоить не менее важные понятия *евклидово пространство*, *движение* и *подобие*. Главными теоремами о движениях являются теоремы 3.2.6 и 3.2.7 (существования и единственности), теоремы 3.2.1- 3.2.2 (теорема о свойствах) и теорема 3.2.3 (признак движения).

Студент должен хорошо понимать отличие подобия от движения, владеть понятием *гомотетии*, уметь формулировать и доказывать теорему 3.6.1 (признак подобия) и следствия из нее.

В темах квадратичные формы и квадрики студент должен усвоить понятия *билинейной формы* и *квадратичной формы*, уметь приводить квадратичную форму к каноническому виду.

Студент должен также хорошо понимать отличие квадрики от квадратичной формы, уметь практически определять вид квадрик в E^2 и E^3.

Наконец заметим, что для успешного освоения материала совершенно необходимо решать задачи. Поэтому для систематических занятий по решению задач следует использовать книги: [2], [3], [5], [11], [15], [17].

[1] Об этом можно прочитать, например, в заключительной статье редактора перевода книги [9].

Список литературы

[1] *Атанасян Л.С., Базылев В.Т.* Геометрия. Ч.1. М: Просвещение, 1986.

[2] *Аргунов Б.И. и др.* Задачник-практикум по геометрии. ч.3 М: Просвещение, 1979.

[3] *Атанасян Л.С., Атанасян В.А.* Сборник задач по геометрии. Ч.1. М: Просвещение, 1973.

[4] *Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П.* Геометрия. Ч.1. М: Просвещение, 1974.

[5] *Базылев В.Т. и др.* Сборник задач по геометрии. М: Просвещение, 1980.

[6] *Берже М.* Геометрия. т.1 М: Мир, 1984.

[7] *Вернер А.Л., Кантор Б.Е., Франгулов С.А.* Геометрия ч.1, ч.2. СПб: Специальная литература, 1997.

[8] *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. М: Наука, 1971.

[9] *Дьедонне Ж.* Линейная алгебра и элементарная геометрия. М: Наука, 1972.

[10] *Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. М: Наука, 1970.

[11] *Икрамов Х.Д.* Задачник по линейной алгебре. М: Наука, 1975.

[12] *Кострикин А.И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия. М: МГУ, 1980.

[13] *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра. М: ФИЗМАТЛИТ, 2000.

[14] *Лелон-Ферран Ж.* Основания геометрии. М: Мир, 1989.

[15] *Моденов П.С., Пархоменко А.С.* Сборник задач по аналитической геометрии. М: Наука, 1976.

[16] *Парнасский И.В., Парнасская О.Е.* Многомерные пространства. Квадратичные формы и квадрики. М: Просвещение, 1978.

[17] *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. М: Наука, 1974.

[18] *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М: Наука, 1966.

[19] *Тышкевич Р.И., Феденко А.С.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Минск: Вышэйшая школа, 1968.

[20] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М: Наука, 1969.

1 Аффинные и евклидовы пространства

1.1 Аффинное пространство

Пусть $\mathcal{A}$ – произвольное непустое множество, элементы которого называются точками, а V — векторное пространство над полем F. Пусть также $\theta : \mathcal{A} \times V \longrightarrow \mathcal{A}$ – отображение, которое далее будем называть *откладыванием вектора от точки.*

Точку $\theta(M, \vec{m}) \in \mathcal{A}$ будем обозначать $M + \vec{m}$.

Определение 1.1.1 *Аффинным пространством над полем F называется непустое множество $\mathcal{A}$, связанное с векторным пространством V над полем F отображением откладывания вектора от точки, причем выполнены следующие условия:*

1) $\forall\ M \in \mathcal{A}$ *и* $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in V \qquad (M + \vec{x}) + \vec{y} = M + (\vec{x} + \vec{y})$.
2) $\forall\ M \in \mathcal{A} \qquad M + \vec{0} = M$.
3) $\forall\ M$ *и* $N \in \mathcal{A} \quad \exists!\ \vec{x} \in V$ *такой, что* $\quad M + \vec{x} = N$.

Эти три условия называют *аксиомами аффинного пространства.* Вектор $\vec{x}$, о существовании которого говорится в аксиоме 3), будем обозначать $\overrightarrow{MN}$, так что запись $M + \vec{x} = N$ и запись $M + \overrightarrow{MN} = N$ имеют один и тот же смысл.

Таким образом понятие аффинного пространства подразумевает наличие трех вещей: a) множества $\mathcal{A}$, b) векторного пространства V над полем F и c) отображения θ, удовлетворяющего вышеперечисленным аксиомам 1) — 3).

Далее в тексте аффинное пространство будем обозначать $\mathcal{A}$, а там, где необходимо подчеркнуть векторное пространство, с которым связано данное аффинное, либо существенно поле F, над которым построено V, будем использовать более длинное обозначение $\mathcal{A}(V)$ либо $\mathcal{A}(V, F)$.

Следствие 1.1.1 $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

Доказательство. По аксиоме 3, для пары точек M и M существует единственный вектор $\vec{x}$ такой, что $M + \vec{x} = M$. Согласно аксиоме 2, вектор $\overrightarrow{MM} = \vec{x} = \vec{0}$.

Следствие 1.1.2 $\quad \overrightarrow{MN} = \vec{x} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} = -\vec{x}$.

Доказательство. Обозначим вектор $\overrightarrow{NM}$ через $\vec{y}$. Тогда по условию $M + \vec{x} = N$ и в силу принятых обозначений $N + \vec{y} = M$. По аксиоме 1, $M + (\vec{x} + \vec{y}) = (M + \vec{x}) + \vec{y} = M$. Тогда, по следствию 1, $\overrightarrow{MM} = \vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$. Следовательно $\overrightarrow{NM} = \vec{y} = -\vec{x}$.

Следствие 1.1.3 $\quad \forall\ A, B, C \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Доказательство. По аксиоме 1, $A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = (A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{BC} = C$. Тогда, согласно принятым обозначениям, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Зафиксируем во множестве $\mathcal{A}$ некоторую точку O.

Определение 1.1.2 *При фиксированной точке O вектор $\overrightarrow{OM}$ называют радиусом-вектором точки M.*

Следствие 1.1.4 *При фиксированной точке $O \in \mathcal{A}$ множество векторов $\{\overrightarrow{OM}\}$, где $M \in \mathcal{A}$ совпадает с V.*

Доказательство. Покажем, что отображение, которое каждой точке $M \in \mathcal{A}$ ставит в соответствие ее радиус вектор $\overrightarrow{OM}$, является биекцией множества $\mathcal{A}$ на V.

Действительно, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}$ влечет, что $M = O + \overrightarrow{OM} = O + \overrightarrow{ON} = N$, следовательно это отображение инъективно. С дугой стороны, по определению отображения откладывания вектора от точки, для любого вектора $\vec{m} \in V$ существует единственная точка $M \in \mathcal{A}$, такая, что $O + \vec{m} = M$, что означает $\overrightarrow{OM} = \vec{m}$. Это значит, что при этом отображении у каждого вектора есть единственный прообраз. Следовательно рассматриваемое отображение также и сюръективно, что завершает доказательство.

Следствие 1.1.5 $\forall\ A, B \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$

Доказательство. С учетом второго и третьего следствия, вектор $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Приведем примеры аффинных пространств.

1. Геометрические пространства E^2 и E^3.

2. Возьмем два экземпляра векторного пространства V. Векторы из первого экземпляра будем называть точками и обозначать первыми буквами латинского алфавита, а векторы второго – последними буквами латинского алфавита. В качестве операции откладывания вектора от точки возьмем обычное сложение векторов в V.

   Выполнение аксиом почти очевидно. Первая следует из ассоциативности сложения векторов, вторая – из существования нулевого вектора. Третья аксиома выполняется в силу существования разности векторов.

3. Возьмем арифметическое векторное пространство $\mathbb{R}^{n+1}$. Назовем точками такие наборы действительных чисел из $\mathbb{R}^{n+1}$, в которых последний элемент единица, а векторами – наборы действительных чисел из $\mathbb{R}^{n+1}$, в которых последний элемент нуль.

   Очевидно, что наборы с нулем в качестве последнего элемента образуют векторное пространство. Обозначим его V. Множество наборов, названых точками, обозначим $\mathcal{A}$.

   В качестве операции откладывания вектора от точки возьмем обычное сложение векторов в $\mathbb{R}^{n+1}$.

   Выполнение первых двух аксиом очевидно, а в качестве вектора $\vec{x}$ в третьей возьмем набор, который является разностью наборов N и M. Тогда легко проверяется и третья аксиома.

Определение 1.1.3 *Размерностью аффинного пространства $\mathcal{A}(V)$ называют размерность векторного пространства V.*

Определение 1.1.4 *Аффинным репером $\mathcal{R}$ называют упорядоченную пару (O, σ), где точка $O \in \mathcal{A}$, а σ – базис векторного пространства V.*

Определение 1.1.5 *Координатами точки M в аффинном репере $\mathcal{R}$ называют координаты ее радиуса вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе σ.*

Теорема 1.1.1 *Если $\mathcal{R}(O, \sigma), \mathcal{R}'(O', \sigma')$ – аффинные реперы, причем $O'(a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{R}}$, а матрица C^t есть матрица перехода от базиса σ к базису σ', то имеют место следующие формулы преобразования координат:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad , \text{ где } \det C \neq 0, \tag{1.1}$$

где $M(x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}}$ и $M(x'_1, \ldots, x'_n)_{\mathcal{R}'}$.

Доказательство. Из следствия 3 следует, что с одной стороны выполняется равенство:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}. \tag{1.2}$$

С другой стороны, по определению координат точки в аффинном репере, имеем:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Аналогично,

$$\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

и

$$\overrightarrow{O'M} = \begin{pmatrix} x'_1 & \dots & x'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e'}_1 \\ \vdots \\ \vec{e'}_n \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Подставим равенства (1.3), (1.4) и (1.5) в (1.2) и используем матрицу перехода C, получим

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & \dots & x'_n \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Транспонируя обе части последнего равенства и приравнивая коэффициенты при соответствующих базисных векторах в правой и левой частях, получим формулу (1.1) теоремы.

Замечание. Поскольку C – матрица перехода от одного базиса к другому, она невырождена.

Упражнение.

1. Доказать. что если $A(a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{R}}$ и $B(b_1, \dots, b_n)_{\mathcal{R}}$, то $\overrightarrow{AB}$ $(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)_{\mathcal{R}}$.

1.2 Простейшие фигуры в аффинном пространстве

Определение 1.2.1 *Пусть $\mathcal{A}(V)$ – аффинное пространство и $V^k \subset V$ – подпространство. Плоскостью в аффинном пространстве называют множество точек $\pi \subset \mathcal{A}$ аффинного пространства, содержащее те и только те точки, которые получаются откладыванием от некоторой точки $M \in \pi$ всевозможных векторов из V^k.*

Подпространство V^k называют *направляющим пространством* плоскости π, а точку M называют *начальной точкой* плоскости. Плоскость с начальной точкой M и направляющим пространством V^k будем обозначать далее $M + V^k$.

Таким образом, согласно принятым обозначениям, точка $X \in M+V^k$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{MX} \in V^k$. Иначе говоря, плоскость в аффинном пространстве — это такое множество точек π из $\mathcal{A}$, что $\forall\, M, N \in \pi$ вектор $\overrightarrow{MN} \in V^k$ и наоборот: $\forall\, \vec{v} \in V^k$ существуют такие точки $M, N \in \pi$, что $\overrightarrow{MX} = \vec{v}$. Конечно же такая пара точек $M, N \in \pi$ не единственная.

Определение 1.2.2 *Число $k = \dim V^k$ называют размерностью плоскости. Нульмерные плоскости – это точки, одномерные принято называть прямыми, а $(n-1)$-мерные плоскости в n-мерном пространстве — гиперплоскостями.*

Теорема 1.2.1 *За начальную точку плоскости можно принять любую принадлежащую этой плоскости точку.*

Доказательство. Пусть $M_0 + V^k$ – плоскость и точка $M_1 \in M_0 + V^k$. Покажем, что плоскости $M_0 + V^k$ и $M_1 + V^k$ совпадают. Для этого достаточно показать два включения:

$$M_0 + V^k \subset M_1 + V^k \quad \text{и} \quad M_1 + V^k \subset M_0 + V^k.$$

Итак, пусть точка $X \in M_0 + V^k$. По условию теоремы имеем также, что $M_1 \in M_0 + V^k$.

Следовательно $\overrightarrow{M_0X} \in V^k$ и $\overrightarrow{M_0M_1} \in V^k$, откуда $\overrightarrow{M_1M_0} \in V^k$, а, значит,

$$\overrightarrow{M_1M_0} + \overrightarrow{M_0X} = \overrightarrow{M_1X} \in V^k \Longrightarrow X \in M_1 + V^k.$$

Первое включение показано. Поменяв в этом доказательстве местами точки M_0 и M_1, можно аналогично доказать второе включение.

Упражнение. Доказать, что если две точки прямой принадлежат плоскости, то и любая точка этой прямой также принадлежит плоскости.

Теорема 1.2.2 *В репере $\mathcal{R}$ n-мерного аффинного пространства k-плоскость $M+V^k$ задается следующими формулами:*

$$\begin{cases} x_1 & = & m_1 & + & t_1 a_{11} & + & \ldots & + & t_k a_{k1} \\ x_2 & = & m_2 & + & t_1 a_{12} & + & \ldots & + & t_k a_{k2} \\ \ldots & = & \ldots & + & \ldots & + & \ldots & + & \ldots \\ x_n & = & m_n & + & t_1 a_{1n} & + & \ldots & + & t_k a_{kn}, \end{cases} \tag{1.7}$$

где $M(m_1,\ldots,m_n)_{\mathcal{R}}$ – координаты начальной точки плоскости, $X(x_1,\ldots,x_n)_{\mathcal{R}}$ – координаты текущей точки плоскости, а $\vec{a}_s(a_{s1},\ldots,a_{sn})$, $s=1,\ldots,k$, – порождающие линейно независимые векторы направляющего пространства плоскости.

Доказательство. По определению плоскости имеем:

$$X \in M+V^k \Longleftrightarrow \overrightarrow{MX} \in V^k \Longleftrightarrow \overrightarrow{MX} = \sum_{s=1}^{k} t_s \vec{a}_s. \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) запишем в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1-m_1 \\ x_2-m_2 \\ \vdots \\ x_n-m_n \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} + \ldots + t_k \begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

Проделав матричные вычисления, приведем последнее уравнение к виду (1.7), указанному в формулировке теоремы.

Верно и обратное, если координаты некоторой точки X удовлетворяют системе (1.7), то эта точка принадлежит плоскости $M+V^k$.

Уравнения вида (1.7) называют *параметрическими уравнениями плоскости.*

Замечание. Представление плоскости в виде (1.7) неоднозначно. Оно зависит от выбора репера, от выбора начальной точки, а также от выбора базиса направляющего пространства плоскости.

Теорема 1.2.3 *Всякая k-плоскость n-мерного аффинного пространства $\mathcal{A}(V)$ задается в некотором репере $\mathcal{R}$ следующей системой уравнений:*

$$\begin{cases} b_{11}x_1 & + & b_{12}x_2 & + & \ldots & + & b_{1n}x_n & = & c_1 \\ b_{21}x_1 & + & b_{22}x_2 & + & \ldots & + & b_{2n}x_n & = & c_2 \\ \ldots & + & \ldots & + & \ldots & + & \ldots & = & \ldots \\ b_{n-k,1}x_1 & + & b_{n-k,2}x_2 & + & \ldots & + & b_{n-k,n}x_n & = & c_{n-k}, \end{cases} \tag{1.10}$$

где $X(x_1,\ldots,x_n)_{\mathcal{R}}$ – координаты текущей точки плоскости, а ранг матрицы (b_{ij}) равен $n-k$.

Доказательство. Пусть в некотором репере $k-$плоскость задана параметрическим уравнением (1.7). По теореме (1.2.2) всякая точка, лежащая в этой $k-$плоскости, имеет в этом репере координаты, удовлетворяющие параметрическому уравнению. Иначе говоря, при подстановке в (1.7) координат этой точки мы получаем n тождеств. Поскольку векторы

$$\vec{a}_s(a_{s1},\ldots,a_{sn}), \text{ где } s=1,\ldots,k,$$

линейно независимы, то ранг матрицы (a_{ij}) равен k.

Предположим, что определитель к-ого порядка, отличный от нуля, состоит из элементов a_{ij}, входящих в первые k уравнений. Этого всегда можно добиться перенумерацией координат. Тогда систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 & = & m_1 & + & t_1 a_{11} & + & \ldots & + & t_k a_{k1} \\ x_2 & = & m_2 & + & t_1 a_{12} & + & \ldots & + & t_k a_{k2} \\ \ldots & = & \ldots & + & \ldots & + & \ldots & + & \ldots \\ x_k & = & m_k & + & t_1 a_{1k} & + & \ldots & + & t_k a_{kk}, \end{cases}$$

можно, согласно теореме Крамера, разрешить относительно $t_1, t_2, \dots, t_k$, выразив их через $x_1, x_2, \dots, x_k$. Подставив найденные выражения $t_1, t_2, \dots, t_k$ в оставшиеся $n-k$ уравнений и сделав очевидные преобразования, получим систему (1.10).

Поскольку переменные $t_1, t_2, \dots, t_k$ выражаются только через переменные $x_1, x_2, \dots, x_k$, то первое из уравнений (1.10) не содержит переменных $x_{k+2}, x_{k+3}, \dots, x_n$, второе – переменных $x_{k+1}, x_{k+3}, \dots, x_n$, наконец, последнее не содержит переменных $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{n-1}$.

Это значит, что матрица (b_{ij}) уравнения (1.10) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & \dots & b_{2k} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-k,1} & \dots & b_{n-k,k} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Этот вид показывает, что ранг матрицы (b_{ij}) уравнения (1.10) равен $n-k$.

Покажем теперь обратное, что всякая система вида (1.10), ранг матрицы которой равен $n-k$, определяет некоторую к-мерную плоскость. Из алгебры известно, что любое решение неоднородной системы линейных уравнений можно представить в виде суммы некоторого частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы линейных уравнений.[2] Пусть $\vec{z}(z_1, \dots, z_n)$ – частное решение системы (1.10), а $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ – фундаментальная система решений соответствующей однородной системы.

Тогда общее решение $\vec{y}(y_1, \dots, y_n)$ системы (1.10) можно записать в виде

$$\vec{y} = \vec{z} + \sum_{i=1}^{k} t_i \vec{v}_i.$$

Зафиксировав некоторый репер $\mathcal{R}$, возьмем точку $Z(z_1, \dots, z_n)_{\mathcal{R}}$ и подпространство V^k, порожденное векторами $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$. Тогда точка $Y(y_1, \dots, y_n)_{\mathcal{R}}$ очевидным образом принадлежит плоскости $Z + V^k$.

Замечание 1. Уравнения вида (1.10) называют *общими уравнениями $k-$плоскости.*

Замечание 2. Гиперплоскость задается одним уравнением вида (1.10).

Определение 1.2.3 *Пусть A и B – две точки. Отрезком с концами A и B называют множество точек X аффинного пространства, таких, что $X = A + \lambda\overrightarrow{AB}$, где $\lambda \in [0, 1]$.*

Отрезок обозначается символом $[AB]$. Точки отрезка, не являющиеся концами, называют *внутренними.*

Следствие 1.2.1 $[AB] = [BA]$.

Следствие 1.2.2 $X \in [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{OX} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$.

Следствие 1.2.3 *Если A и $B \in \pi \Rightarrow [AB] \subset \pi$.*

Следствие 1.2.4 *Если $X \in [AB]$ и $Y \in [AB]$, то $[XY] \subset [AB]$.*

Определение 1.2.4 *Говорят, что точка C делит отрезок $[AB]$ в отношении $\lambda \neq -1$, если*

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}.$$

Это число λ называют *простым отношением* трех точек A, B, C. В этом случае точки A и B называют *базисными*, а точку C – *делящей.* Простое отношение λ точек A, B, C обозначают (AB, C).

Определение 1.2.5 *Говорят, что точка X лежит между точками A и B, если X – внутренняя точка отрезка $[AB]$.*

[2] Смотри, например, [13] или [19]

1.3 Взаимное расположение двух плоскостей

Термин *пересечение плоскостей* можно понимать в теоретико-множественном и сугубо геометрическом смысле.

Определение 1.3.1 *Теоретико-множественным пересечением двух плоскостей называется непустое множество их общих точек.*

При этом не исключено, что плоскости совпадают или одна из них содержится в другой.

Поэтому часто говорят, что плоскости пересекаются, если множество их общих точек не пусто.

Геометрическое понятие *пересечение* отличается от теоретико-множественного.

Определение 1.3.2 *Говорят, что плоскости пересекаются трансверсально, если они пересекаются, но не совпадают и ни одна из них не содержится в другой.*

Теорема 1.3.1 *Для того, чтобы плоскости $M + V^k$ и $N + W^l$ имели общие точки, необходимо и достаточно, чтобы "вектор-мост" $\overrightarrow{MN} \in V^k + W^l$.*

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть данные плоскости имеют общую точку X. Тогда $\overrightarrow{MX} \in V^k$ и $\overrightarrow{NX} \in W^l$, откуда следует, что $\overrightarrow{XN} \in W^l$, так как W^l – подпространство, следовательно, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MX} + \overrightarrow{XN} \in V^k + W^l$.

2. Достаточность. Предположим, что $\overrightarrow{MN} \in V^k + W^l$. Тогда, по определению суммы подпространств, существуют $\vec{v} \in V^k$ и $\vec{w} \in W^l$ такие, что $\overrightarrow{MN} = \vec{v} + \vec{w}$. Тогда $M + (\vec{v} + \vec{w}) = N$, следовательно $(M + \vec{v}) + \vec{w} = N$. Обозначим точку $M + \vec{v} = Z$.

С одной стороны, так как $\vec{v} \in V^k$, то $Z \in M + V^k$. С другой стороны, $Z + \vec{w} = N$, откуда $\overrightarrow{ZN} = \vec{w} \in W^l$, что влечет $\overrightarrow{NZ} \in W^l$ и, следовательно, $Z \in N + W^l$. Итак, мы получили, что точка Z – общая точка данных плоскостей.

Теорема 1.3.2 *Множество общих точек двух плоскостей является плоскостью.*

Доказательство. Пусть даны плоскости $M + V^k$ и $N + W^l$ и пусть множество их общих точек непусто. Если оно сводится к единственной общей точке, то теорема доказана. Если же общих точек более одной, обозначим одну из них P.

Покажем, что плоскость $P + (V^k \cap W^l)$ есть множество общих точек, из этого будет следовать утверждение теоремы.

Покажем, во-первых, что любая точка X, принадлежащая плоскости $P + (V^k \cap W^l)$, является общей точкой данных плоскостей. Действительно,

$$X \in P + (V^k \cap W^l) \Longrightarrow \overrightarrow{PX} \in V^k \cap W^l \subset V^k \Longrightarrow X \in P + V^k = M + V^k.$$

Аналогично

$$X \in P + (V^k \cap W^l) \Longrightarrow \overrightarrow{PX} \in V^k \cap W^l \subset W^l \Longrightarrow X \in P + W^l = N + W^l.$$

Итак, получили, что точка X принадлежит обеим плоскостям.

Обратно, пусть $X \in M + V^k$ и $X \in N + W^l$. Приняв общую точку P данных плоскостей за начальную, мы получим, что $\overrightarrow{PX} \in V^k$ и $\overrightarrow{PX} \in W^l$, откуда следует, что $\overrightarrow{PX} \in V^k \cap W^l$, следовательно $X \in P + (V^k \cap W^l)$. Теорема доказана.

Определение 1.3.3 *Говорят, что плоскость α параллельна плоскости β, если $V_\alpha \subset V_\beta$.*

Определение 1.3.4 *Говорят, что плоскость α собственно параллельна плоскости β, если*

$$V_\alpha \subset V_\beta \text{ и } \alpha \cap \beta = \varnothing.$$

Определение 1.3.5 *Говорят, что плоскость α частично параллельна плоскости β, если*

$$\alpha \cap \beta = \varnothing, \text{ и } V_\alpha \cap V_\beta \neq \vec{0}, \neq V_\alpha, \neq V_\beta.$$

Определение 1.3.6 *Говорят, что две плоскости α и β скрещиваются, если $\alpha \cap \beta = \varnothing$ и $V_\alpha \cap V_\beta = \vec{0}$.*

1.4 Аффинная оболочка плоскостей

Определение 1.4.1 *Аффинной оболочкой плоскостей α и β называется плоскость, которая является пересечением всевозможных плоскостей, содержащих как плоскость α, так и плоскость β.*

Будем обозначать аффинную оболочку плоскостей α и β через $aff(\alpha, \beta)$.

Замечание 1. Определение корректно, поскольку пересечение плоскостей не пусто и является плоскостью.

Замечание 2. Определение аффинной оболочки двух плоскостей по индукции можно распространить на любое конечное число плоскостей. В частности, можно говорить об аффинной оболочке некоторого множества точек. Можно также говорить об аффинной оболочке любого множества точек.

Теорема 1.4.1 *Аффинная оболочка двух плоскостей всегда существует. Для данной пары плоскостей существует только одна аффинная оболочка.*

Доказательство. Множество плоскостей, которые содержат обе данные плоскости, непусто, так как оно обязательно включает все пространство. Пересечение всех таких плоскостей, согласно теореме 1.3.2, есть плоскость. Пусть γ_1 и γ_2 – две аффинных оболочки плоскостей α и β. Так как γ_1 и γ_2 содержат плоскости α и β, а γ_1 – пересечение всех таких плоскостей, то $\gamma_1 \subset \gamma_2$. С другой стороны, γ_2 – пересечение всех таких плоскостей, то $\gamma_2 \subset \gamma_1$. Следовательно, $\gamma_2 = \gamma_1$.

Теорема 1.4.2 *Пусть $\alpha = M + V^k$, $\beta = N + V^l$. Обозначим через s размерность аффинной оболочки $aff(\alpha, \beta)$, а через p – размерность пересечения $\alpha \cap \beta$.*

Тогда, если $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$, то $s = k + l - p$, если $\alpha \cap \beta = \varnothing$, то $s = k + l - p + 1$.

Доказательство. 1. Пусть $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$, и пусть P – общая точка плоскостей, которую можно принять за начальную в обеих плоскостях. Покажем, что плоскость $P + (V^k + W^l)$ является аффинной оболочкой данных плоскостей. В самом деле, поскольку

$$V^k \subset (V^k + W^l) \Longrightarrow P + V^k \subset P + (V^k + W^l) \Longrightarrow \alpha = M + V^k = P + V^k \subset P + (V^k + W^l).$$

Аналогично

$$W^l \subset (V^k + W^l) \Longrightarrow P + W^l \subset P + (V^k + W^l) \Longrightarrow \beta = N + W^l = P + W^l \subset P + (V^k + W^l).$$

Итак. плоскость $P + (V^k + W^l)$ содержит обе данные плоскости.

Пусть $\gamma = P + L$ какая-либо плоскость, содержащая α и β. Тогда $V^k \subset L$ и $W^l \subset L$, следовательно $(V^k + W^l) \subset L$, откуда следует, что $P + (V^k + W^l) \subset P + L = \gamma$.

В силу произвольности плоскости γ, плоскость $P + (V^k + W^l)$ совпадает с пересечением плоскостей, содержащих как α, так и β и, следовательно является аффинной оболочкой данных плоскостей.

Теперь размерность s аффинной оболочки равна размерности $V^k + W^l$, которая равна, по формуле Грассмана, сумме размерностей V^k и W^l минус размерность пересечения $V^k \cap W^l$. Итак $s = k + l - p$.

2. Пусть теперь $\alpha \cap \beta = \varnothing$, и пусть $L(V^k, W^l, \overrightarrow{MN})$ – линейная оболочка указанных векторов. Аналогично пункту 1. можно показать, что плоскость $M + L(V^k, W^l, \overrightarrow{MN})$ является аффинной оболочкой данных плоскостей. [3] В этом случае размерность s аффинной оболочки равна размерности $L(V^k, W^l, \overrightarrow{MN})$, которая равна, по формуле Грассмана, $k + l + 1$ минус размерность пересечения $V^k \cap W^l$. Итак $s = k + l + 1 - p$. Теорема доказана.

Определение 1.4.2 *Говорят, что точки $A_0, \dots, A_k$; $k > 0$, являются точками общего положения, если ни одна из них не принадлежит аффинной оболочке остальных.*

Теорема 1.4.3 *Для того, чтобы точки $A_0, \dots, A_k$ были точками общего положения, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$ были линейно независимы.*

[3] Более подробные доказательства можно прочесть, например, в [18], стр.97-100, [10], стр. 103-106, [13], стр.185.

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть $A_0, \ldots, A_k;\quad k > 0,$ – точки общего положения. Допустим противное, то есть, что векторы $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}$ являются линейно зависимыми. Тогда среди них есть вектор, который линейно выражается через остальные. Допустим, что это вектор $\overrightarrow{A_0A_k}$. Это можно записать в виде: $\overrightarrow{A_0A_k} = t_1\overrightarrow{A_0A_1} + \ldots + t_{k-1}\overrightarrow{A_0A_{k-1}}$.

Покажем, что тогда точка A_k принадлежит аффинной оболочке точек $A_0, \ldots, A_{k-1}$. Любая плоскость, содержащая точки $A_0, \ldots, A_{k-1}$, может быть представлена в виде $A_0 + W$, где W есть направляющее пространство этой плоскости, которое, очевидно, содержит векторы $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_{k-1}}$. Но тогда и вектор $\overrightarrow{A_0A_k}$, который является их линейной комбинацией, также принадлежит W, откуда следует, что точка A_k лежит в плоскости $A_0 + W$. Поскольку точка A_k принадлежит любой плоскости, содержащей точки $A_0, \ldots, A_{k-1}$, то A_k принадлежит аффинной оболочке точек $A_0, \ldots, A_{k-1}$. Получили противоречие с условием. Следовательно, предположение о зависимости векторов неверно, что и требовалось доказать.

2. Достаточность. Пусть векторы $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}$ являются линейно независимыми.

Опять будем рассуждать от противного. Допустим, что точки $A_0, \ldots, A_k$ не являются точками общего положения. Тогда среди них существует хотя бы одна, которая принадлежит аффинной оболочке остальных. Не ограничивая общность рассуждений, можно считать такой точку A_k.

Аффинная оболочка точек $A_0, \ldots, A_{k-1}$, то есть наименьшая плоскость, содержащая точки $A_0, \ldots, A_{k-1}$, есть плоскость $A_0 + W$, где W – линейная оболочка независимых векторов $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_{k-1}}$. Следовательно, если $A_k \in A_0 + W$, то вектор $\overrightarrow{A_0A_k}$ является линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_{k-1}}$, что противоречит условию.

Из этого следует достаточность.

Следствие 1.4.1 *Две различные точки являются точками общего положения.*

Следствие 1.4.2 *Любое подмножество множества точек общего положения также является множеством точек общего положения.*

Следствие 1.4.3 *В любой k-плоскости существует $k+1$ точка общего положения. Если точки $A_0, \ldots, A_k$ – точки общего положения, то их аффинная оболочка является k-плоскостью.*

1.5 Евклидово пространство

Определение 1.5.1 *Аффинное пространство $\mathcal{A}(V)$ называют евклидовым, если евклидовым является векторное пространство V, связанное с аффинным.*

Определение 1.5.2 *Аффинный репер $\mathcal{R}(O, \{\vec{e}_i\})$ назвают ортонормированным, если базис $\{\vec{e}_i\}$ является ортонормированным.*

Координаты точек в ортонормированном репере называют *декартовыми.*

Определение 1.5.3 *Расстоянием между точками A и B в евклидовом пространстве называют число $|\overrightarrow{AB}|$, т.е. длину вектора $\overrightarrow{AB}$.*

Расстояние между точками A и B будем обозначать $|AB|$. Очевидно, что $|AB|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$.

Теорема 1.5.1 *В евклидовом пространстве расстояние между точками A и B вычисляется по формуле:*

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2},$$

где $A(x_1, \ldots, x_n), B(y_1, \ldots, y_n)$.

Доказательство. Так как, согласно следствию 1.1.4, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, и по определению координат точки имеем $\overrightarrow{AB}(y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$(Смотри упражнение в конце раздела 1.1). Из алгебры известно, что длина вектора выражается через его координаты по формуле:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}.$$

Теорема 1.5.2 *В евклидовом пространстве имеет место теорема Пифагора и обратная к ней.*

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC с прямым углом C. Тогда $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$.

Поскольку $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$. Возводя обе части последнего равенства в квадрат и учитывая, что $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, получим

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2.$$

По определению расстояния между точками получаем теорему Пифагора:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2.$$

Докажем обратное утверждение. Пусть в треугольнике ABC выполнено равенство: $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$, откуда следует $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$.

Имеем равенство: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$. Возведем его почленно в квадрат, получим $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$. Следовательно, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, откуда $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$.

Теорема 1.5.3 *В евклидовом пространстве в общем уравнении плоскости коэффициенты при неизвестных являются координатами векторов некоторого базиса ортогонального дополнения к направляющему пространству плоскости.*

Доказательство. Пусть V^{n-k} – подпространство, порожденное линейно независимыми векторами $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-k}$ и M_0 – фиксированная точка пространства.

Выведем уравнение плоскости, которая проходит через точку M_0 перпендикулярно подпространству V^{n-k}.

Положим, что в некотором ортонормированном репере $\mathcal{R}$ точка M_0 имеет координаты $M_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, а $M(x_1, \ldots, x_n)$ – текущая точка плоскости. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты $\overrightarrow{M_0M}(x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n)$.

Положим также, что векторы $\vec{v}_i, \quad i = 1, \ldots, n-k$, имеют в базисе репера $\mathcal{R}$ координаты $\vec{v}_i(v_{i1}, \ldots, v_{in})$.

Поскольку для всех $i = 1, \ldots, n-k$ должно выполняться условие $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{v}_i = 0$, получим систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} v_{11}(x_1 - \alpha_1) & + \ldots + & v_{1n}(x_n - \alpha_n) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n-k,1}(x_1 - \alpha_1) & + \ldots + & v_{n-k,n}(x_n - \alpha_n) & = & 0 \end{array} \right. \tag{1.11}$$

После очевидных преобразований система (1.11) получает вид:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} v_{11}x_1 & + \ldots + & v_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n-k,1}x_1 & + \ldots + & v_{n-k,n}x_n & = & b_{n-k} \end{array} \right. \tag{1.12}$$

Система (1.12) отличается от системы (1.10) только геометрическим истолкованием смысла коэффициентов при переменных в левых частях уравнений, который приведен в формулировке теоремы.

Определение 1.5.4 *Ортогональной проекцией точки P на плоскость $\alpha = M + V^k$ называют такую точку P_1 плоскости α, что вектор $\overrightarrow{PP_1} \perp V^k$.*

Теорема 1.5.4 *Каждая точка пространства имеет и при том единственную ортогональную проекцию на заданную плоскость.*

Доказательство. Пусть задана плоскость $M_0 + V^k$ и точка P. Существует единственная плоскость размерности $n-k$, проходящая через точку P и ортогональная направляющему пространству V^k заданной плоскости. Она имеет с данной плоскостью единственную общую точку, которая и будет ортогональной проекцией точки P на плоскость $M_0 + V^k$. [4]

[4]Другие подходы можно прочесть в [18], стр.91-94, [10], стр.289, [13].

Теорема 1.5.5 *Если гиперплоскость* π *в некотором репере* $\mathcal{R}$ *задана уравнением* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ *а точка* $P(p_1, \ldots, p_n)_{\mathcal{R}}$, *то расстояние от точки* P *до гиперплоскости* π *можно вычислить по формуле:*

$$d = \frac{|a_1 p_1 + \ldots + a_n p_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}$$

Доказательство. Пусть $P_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – ортогональная проекция точки P на гиперплоскость. Тогда вектор $\overrightarrow{P_1 P}$ коллинеарен нормальному вектору $\vec{n}$ гиперплоскости π, где $\vec{n}(a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{R}}$. Получим

$$\overrightarrow{P_1 P} \cdot \vec{n} = \pm\, |\overrightarrow{P_1 P}| \cdot |\vec{n}| = \pm\, d \cdot |\vec{n}|, \text{ откуда } d = \pm \frac{\overrightarrow{P_1 P} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}.$$

Следовательно

$$d = \pm \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i (p_i - \alpha_i)}{(\sum a_i^2)^{1/2}} = \pm \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i p_i - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \alpha_i}{(\sum a_i^2)^{1/2}}$$

Учитывая, что $P_1 \in \pi$, имеем $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \alpha_i = b$. Тогда формула окончательно принимает вид, указанный в формулировке теоремы.

2 Аффинные отображения и преобразования

2.1 Аффинные отображения и преобразования

Пусть $\mathcal{A}(V)$ и $\mathcal{A}'(V')$ - два аффинных пространства над одним и тем же полем F.

Определение 2.1.1 *Отображение $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}\ '$, называют аффинным, если существует линейное отображение $\vec{f} : V \longrightarrow V\ '$, такое, что*

$$\forall\ M \in \mathcal{A}\ \text{и}\ \forall\ \vec{m} \in V \quad f(M + \vec{m}) = f(M) + \vec{f}(\vec{m}).$$

Линейное отображение $\vec{f}$ называют *однородной частью* аффинного отображения f.

Определение 2.1.2 *Аффинным преобразованием аффинного пространства $\mathcal{A}(V)$ называется биективное аффинное отображение аффинного пространства $\mathcal{A}(V)$ на себя.*

Теорема 2.1.1 *Для любых двух точек O и $O\ '$ и для любого невырожденого линейного оператора φ существует единственное аффинное преобразование f, такое, что*

$$f(O) = O\ '\ \text{и}\ \vec{f} = \varphi.$$

Доказательство. 1. Существование. Определим отображение f следующим образом:

$$\forall\ M \in \mathcal{A} \quad f(M) = O' + \varphi(\overrightarrow{OM}).$$

Покажем, что f аффинное. Пусть X произвольная точка и $\vec{x}$ — произвольный вектор. Положим $X + \vec{x} = Y$. Тогда

$$f(X+\vec{x}) = f(Y) = O' + \varphi(\overrightarrow{OY}) = O' + \varphi(\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XY}) = O' + \varphi(\overrightarrow{OX}) + \varphi(\overrightarrow{XY}) = f(X) + \varphi(\vec{x}),$$

так как $\overrightarrow{XY} = \vec{x}$.

2. Единственность. Пусть f и g – оба аффинные и оба удовлетворяют условию теоремы. Тогда

$$f(O) = g(O) = O\ '\ \text{и}\ \vec{f} = \vec{g} = \varphi.$$

Имеем

$$\forall M, \quad f(M) = O\ ' + \vec{f}(\overrightarrow{OM}) = g(O) + \vec{g}(\overrightarrow{OM}) = g(O + \overrightarrow{OM}) = g(M).$$

Теорема доказана.

Приведем два важных примера аффинных преобразований. Первое из них называют *сдвигом на вектор*[5], а второе — *гомотетией.*

Определение 2.1.3 *Сдвигом на вектор $\vec{v}$ называют отображение $t_{\vec{v}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, определенное по правилу*

$$t_{\vec{v}}(M) = M + \vec{v}.$$

Упражнение 1. Доказать, что сдвиг на вектор $\vec{v}$ является биекцией аффинного пространства на себя.

Обозначим через $S(\mathcal{A})$ группу преобразований множества $\mathcal{A}$, в которой бинарной операцией служит композиция преобразований.

Упражнение 2. Доказать, что отображение $\sigma : V \longrightarrow S(\mathcal{A})$, определенное правилом

$$\forall \vec{v} \in V \quad \sigma(\vec{v}) = t_{\vec{v}}$$

является инъективным гомоморфизмом аддитивной группы $(V, +)$ в группу $S(\mathcal{A})$.

Теорема 2.1.2 *Сдвиг на вектор $\vec{v}$ является аффинным преобразованием.*

[5]Сдвиг на вектор $\vec{v}$ называют также *параллельным переносом на вектор $\vec{v}$.*

Доказательство. Действительно, для любой точки M и любого вектора $\vec{m}$

$$t_{\vec{v}}(M+\vec{m}) = (M+\vec{m})+\vec{v} = (M+\vec{v})+\vec{m} = t_{\vec{v}}(M)+\vec{m} = t_{\vec{v}}(M)+1_V(\vec{m}).$$

Мы получили, что однородной частью сдвига на вектор $\vec{v}$ является тождественный линейный оператор векторного пространства V.

Теорема 2.1.3 *Для того, чтобы преобразование f аффинного пространства $\mathcal{A}(V)$ было сдвигом, необходимо и достаточно, чтобы оно было аффинным с однородной частью $\vec{f} = 1_V$.*

Доказательство. 1. Необходимость следует из теоремы 2.1.2.

2. Достаточность. Пусть преобразование f — аффинное и $\vec{f} = 1_V$. Пусть M — произвольная точка и $M' = f(M)$. Обозначим вектор $\overrightarrow{MM'}$ через $\vec{v}$. Так как f — аффинное, то для любой точки A имеем:

$$f(A) = f(M+\overrightarrow{MA}) = f(M)+1_V(\overrightarrow{MA}) = M'+\overrightarrow{MA} = M'+\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{M'A} = (M'+\overrightarrow{M'A})+\vec{v} = A+\vec{v}.$$

Итак, для любой точки A имеем: $f(A) = A+\vec{v}$. Мы получили, что преобразование f есть сдвиг на вектор $\vec{v}$.

Определение 2.1.4 *Гомотетией $h_{O,k}$ с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называют такое преобразование аффинного пространства, которое определено формулой:*

$$h_{O,k}(M) = O + k\overrightarrow{OM}.$$

Теорема 2.1.4 *Гомотетия $h_{O,k}$ является аффинным преобразованием. Однородной частью этой гомотетии служит линейный оператор $h_k : V \longrightarrow V$, такой, что $h_k(\vec{x}) = k\vec{x}$.*

Доказательство. Пусть $h_{O,k}$ — гомотетия. Для любой точки A и для любого вектора $\vec{a}$ имеем

$$h_{O,k}(A+\vec{a}) = h_{O,k}(B) \text{ где } B = A+\vec{a}.$$

Следовательно, по определению гомотетии,

$$h_{O,k}(B) = O+k\overrightarrow{OB} = O+k(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}) = (O+k\overrightarrow{OA})+k\vec{a} = h_{O,k}(A)+k\vec{a}.$$

В итоге получаем, что $h_{O,k}(A+\vec{a}) = h_{O,k}(A)+k\vec{a}$, следовательно гомотетия является аффинным преобразованием с однородной частью, которая представляет собой векторную гомотетию с тем же коэффициентом.

Теорема 2.1.5 *Пусть $\mathcal{A}(V^n)$ — аффинное пространство. Для любых двух максимальных последовательностей точек общего положения $\{A_i\} \in \mathcal{A}$ и $\{A'_i\} \in \mathcal{A}$, где $i = 0,\dots,n$, существует единственное аффинное преобразование f, такое, что для каждого значения i образ $f(A_i) = A'_i$.*

Доказательство. Обозначим векторы $\overrightarrow{A_0A_k} = \vec{e}_k$. В силу максимальности и линейной независимости они образуют базис $\{\vec{e}_k\}$ пространства V. Второй базис, $\{\vec{e}_k{}'\}$, получим, обозначая $\overrightarrow{A'_0A'_k} = \vec{e}_k{}'$.

Из курса алгебры известно, что существует единственный невырожденный линейный оператор φ, который отображает векторы первого базиса на соответствующие векторы второго базиса.[6]

Согласно теореме 2.1.1 для двух точек A_0 и A'_0 и линейного оператора φ существует единственное аффинное преобразование f, такое, что $f(A_0) = A'_0$ и $\vec{f} = \varphi$.

Покажем, что для всех $i = 1,\dots,n \quad f(A_i) = A'_i$. Действительно,

$$f(A_i) = f(A_0+\overrightarrow{A_0A_i}) = f(A_0)+\varphi(\overrightarrow{A_0A_i}) = A'_0+\varphi(\vec{e}_i) = A'_0+\vec{e}_i{}' = A'_0+\overrightarrow{A'_0A'_i} = A'_i.$$

Теорема доказана.

[6]Смотри, например, [13], глава 2, §1.

Теорема 2.1.6 *Аффинные преобразования имеют следующие свойства:*

1. *при аффинном преобразовании образы точек общего положения также являются точками общего положения;*
2. *при аффинном преобразовании образом k - плоскости является k - плоскость;*
3. *аффинные преобразования сохраняют взаимное расположение плоскостей (отношения совпадения. включения. пересечения. параллельности. скрещивания);*
4. *аффинные преобразования сохраняют простое отношение трех точек прямой;*
5. *аффинные преобразования образуют группу.*

Доказательство. 1. Пусть $\{A_i\}$ – точки общего положения и f – аффинное преобразование.

Тогда векторы $\vec{e_i} = \overrightarrow{A_0A_i}$ линейно независимы. Проведем доказательство от противного.

Введем обозначение $A_i' = f(A_i)$ и предположим, что точки $\{A_i'\}$ не являются точками общего положения. Тогда, обозначив векторы $\{\overrightarrow{A_0'A_i'}\}$ через $\{\vec{e}_i{}'\}$, получим, что векторы $\{\vec{e}_i{}'\}$ линейно зависимы. Это означает, что существует ненулевой набор $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in F^n$ такой, что $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i{}' = \vec{0}$.

Но $\vec{e}_i{}' = \vec{f}(\vec{e}_i)$, следовательно $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{f}(\vec{e}_i) = \vec{0}$, откуда $\vec{f}(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i) = \vec{0}$. Поскольку $\vec{f}$ – невырожденный линейный оператор, то $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i = \vec{0}$, а значит векторы $\{\vec{e}_i\}$ также линейно зависимы, откуда вытекает, что точки $\{A_i\}$ не являются точками общего положения. Это противоречит условию.

Следовательно наше допущение неверно и точки $\{A_i'\}$ есть точки общего положения,

2.Пусть $\pi^k = M + V^k$ – плоскость Обозначим $M_1 = f(M)$ и $V_1^k = \vec{f}(V^k)$. Покажем, что:

$$a)\ \forall\, X \in \pi^k \quad f(X) \in \pi_1^k = M_1 + V_1^k.$$

$$b)\ \forall\, Y \in \pi_1^k \quad \exists X \in \pi^k \text{такая, что} \quad f(X) = Y.$$

Действительно,

$$X \in \pi^k \Leftrightarrow \overrightarrow{MX} \in V^k \Rightarrow \vec{f}(\overrightarrow{MX}) \in V_1^k.$$

$$f(X) = f(M + \overrightarrow{MX}) = f(M) + \vec{f}(\overrightarrow{MX}) = M_1 + \vec{f}(\overrightarrow{MX}) \in \pi_1^k.$$

Пункт a) доказан.

Пусть $Y \in \pi_1^k \Leftrightarrow Y = M_1 + \vec{y}$, где $\vec{y} \in V_1^k$. Так как $\vec{f}$ биективно, то существует $\vec{x} \in V^k$, такой, что $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}$.

Положим $X = M + \vec{x}$. Тогда

$$f(X) = f(M + \vec{x}) = f(M) + \vec{f}(\vec{x}) = M_1 + y = Y.$$

Пункт b) доказан.

3. Докажем, например, что $(\alpha \parallel_c \beta) \Longrightarrow (\alpha' \parallel_c \beta')$. Для этого достаточно показать, что:

$$a) \quad \alpha' \cap \beta' = \varnothing \ \text{ и } \ b) \quad V_\alpha' \subset V_\beta'.$$

Для доказательства a) предположим, что $\alpha' \cap \beta' \neq \varnothing$. Тогда $\exists\ M_1 \in \alpha$ и $\exists\ M_2 \in \beta$ такие, что $f(M_1) = f(M_2) = M'$, поскольку f биекция. Так как $\alpha \cap \beta = \varnothing$, то $M_1 \neq M_2$, что противоречит биективности f.

Докажем b). Поскольку оператор $\vec{f}$ биективен,

$$\alpha \parallel \beta \Longrightarrow V_\alpha \subset V_\beta \Longrightarrow V_\alpha' = \vec{f}(V_\alpha) \subset \vec{f}(V_\beta) = V_\beta' \Longrightarrow \alpha' \parallel \beta'.$$

4. Пусть $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$ и $A' = f(A),\ B' = f(B),\ C' = f(C)$,

Тогда

$$\overrightarrow{A'C'} = \vec{f}(\overrightarrow{AC}) = \vec{f}(\lambda \overrightarrow{CB}) = \lambda \vec{f}(\overrightarrow{CB}) = \lambda \overrightarrow{C'B'}.$$

5. Докажем сначала, что если f и g аффинные, то их композиция $g \circ f$ также аффинное преобразование. Действительно,

$$\forall\ M \text{ и } \forall\ \vec{m} \quad g \circ f(M + \vec{m}) = g(f(M + \vec{m})) = g(f(M) + \vec{f}(\vec{m})) =$$

$$g(f(M)) + \vec{g}(\vec{f}(\vec{m})) = g \circ f(M) + \vec{g} \circ \vec{f}(\vec{m}).$$

Так как $\vec{g} \circ \vec{f}$ — невырожденный линейный оператор, то положим $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$ и тогда утверждение доказано.

Пусть f — аффинное преобразование. Докажем, что f^{-1} также аффинное.

Пусть M и $\vec{m}$ произвольны. Тогда $\exists!$ точка N такая, что $f(N) = M$ и $\exists!$ вектор $\vec{n}$ такой, что $\vec{f}(\vec{n}) = \vec{m}$. Иначе это можно записать так:

$$N = f^{-1}(M) \ \text{ и } \ \vec{n} = (\vec{f}\ )^{-1}(\vec{m}).$$

Тогда, поскольку f аффинное, то

$$f(N + \vec{n}) = f(N) + \vec{f}(\vec{n}) = M + \vec{m}$$

или иначе

$$N + \vec{n} = f^{-1}(M + \vec{m}) = f^{-1}(M) + (\vec{f}\ )^{-1}(\vec{m}).$$

Последнее равенство означает, что для f^{-1} существует линейный оператор $\varphi = (\vec{f}\ )^{-1}$ такой, что для него выполняется определение аффинного отображения. Значит отображение f^{-1} аффинное и

$$\overrightarrow{f^{-1}} = (\vec{f}\ )^{-1}.$$

Итак, аффинные преобразования образуют группу.

В дальнейшем группу всех аффинных преобразований будем обозначать GA.

Теорема 2.1.7 *Множество всех сдвигов аффинного пространства является подгруппой в группе аффинных преобразований.*

Доказательство. Так как $t_{\vec{b}} \circ t_{\vec{a}} = t_{\vec{a}+\vec{b}}$ и $t_{\vec{a}}^{-1} = t_{-\vec{a}}$, то замкнутость множества сдвигов в группе GA доказана.

Следствие 2.1.1 *Группа сдвигов T изоморфна аддитивной группе $(V, +)$ векторного пространства V.*

Доказательство. Из упражнения 2 следует, что отображение $\sigma : V \longrightarrow GA$, определенное по правилу $\sigma(\vec{v}) = t_{\vec{v}}$ есть инъективный и сюръективный гомоморфизм аддитивной группы $(V, +)$ в группу T.

Следствие 2.1.2 *Подгруппа сдвигов T в группе GA аффинных преобразований является нормальной подгруппой.*

Доказательство. Покажем, что для любого $f \in GA$ выполняется включение $f \circ T \circ f^{-1} \subset T$. Действительно, пусть $g \in f \circ T \circ f^{-1}$. Это равносильно тому, что существует сдвиг $t_{\vec{v}} \in T$, такой, что $g = f \circ t_{\vec{v}} \circ f^{-1}$. Применим к g теорему 2.1.3. Поскольку g аффинное, как композиция аффинных, а однородная часть

$$\vec{g} = \vec{f} \circ \vec{t_{\vec{v}}} \circ \overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f} \circ 1_v \circ (\vec{f})^{-1} = 1_v,$$

то, следовательно, по теореме 2.1.3, g – сдвиг, то есть $g \in T$. Нужное включение показано.

Замечание. Это же следует из того, что T является ядром гомоморфизма α из группы GA в группу GL невырожденных линейных операторов. Этот гомоморфизм определяется равенством: $\alpha(f) = \vec{f}$.

Определение 2.1.5 *Аффинное преобразование, сохраняющее винт* [7]*, называют аффинным преобразованием первого рода.*

[7] О понятии винта или ориентации можно более подробно прочесть, например, в [10], глава 6, §1.

Теорема 2.1.8 *Для того, чтобы аффинное преобразование f было аффинным преобразованием первого рода, необходимо и достаточно, чтобы* $det\vec{f} > 0$.

Доказательство. Это следует из определения 2.1.5 и определения винта.

Теорема 2.1.9 *Множество аффинных преобразований первого рода является подгруппой в группе всех аффинных преобразований.*

Доказательство. Проверяется непосредственно.

Следствие 2.1.3 *Группа сдвигов является подгруппой группы аффинных преобразований первого рода.*

Доказательство. Проверяется непосредственно.

Определение 2.1.6 *Аффинное преобразование f называют эквиаффинным, если абсолютная величина определителя его однородной части равна единице ($|\det \vec{f}\,| = 1$.)*

Теорема 2.1.10 *Множество эквиаффинных преобразований является подгруппой аффинной группы.*

Доказательство. Пусть $\vec{f}$ и $\vec{g}$ эквиаффинные. Так как $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$, то, по теореме об умножении определителей произведения матриц, $\det(\overrightarrow{g \circ f}) = \det \vec{g} \cdot \det \vec{f}$.

Тогда $|\det(\overrightarrow{g \circ f})| = |\det \vec{g}\,| \cdot |\det \vec{f}\,| = 1$, значит композиция эквиаффинных преобразований является преобразованием эквиаффинным.

Кроме того, из $\vec{f} \circ \overrightarrow{f^{-1}} = 1_V$ следует, что $|\det \vec{f}\,| \cdot |\det \overrightarrow{f^{-1}}\,| = 1$ откуда $|\det \overrightarrow{f^{-1}}\,| = 1$, следовательно f^{-1} — эквиаффинное.

Теорема 2.1.11 *Множество гомотетий с фиксированным центром O и всевозможными коэффициентами $k \neq 0$ является подгруппой аффинной группы.*

Доказательство. Во первых,

$$h_{o,k_2} \circ h_{o,k_1}(M) = h_{o,k_2}(h_{o,k_1}(M)) = h_{o,k_2}(O + k_1\overrightarrow{OM}) = O + k_2\overrightarrow{OM'} = O + k_2k_1\overrightarrow{OM} = h_{k_2k_1}(M).$$

Во вторых, так как $h_{o,k^{-1}} \circ h_{o,k} = 1_{\mathcal{A}}$, то $(h_{o,k})^{-1} = h_{o,k^{-1}}$.

Определение 2.1.7 *Стабилизатором точки O в группе GA называют множество всех аффинных преобразований, оставляющих точку O на месте.*

Теорема 2.1.12 *Стабилизатор любой точки O в группе GA является подгруппой. Она называется группой центроаффинных преобразований.*

Доказательство. Группу центроаффинных преобразований далее будем обозначать GA_o.

Следствие 2.1.4 *Гомотетия является центроаффинным преобразованием.*

Доказательство. Следует из определения гомотетии и центроаффинного преобразования.

Теорема 2.1.13 *Для любой точки O группа GA_o изоморфна группе $GL(V)$ невырожденных линейных операторов.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\alpha : GA \longrightarrow GL(V)$, определенное по правилу $\alpha(f) = \vec{f}$. Тогда α – гомоморфизм групп. Эпиморфизм следует из теоремы существования и единственности. Остается доказать инъективность. Пусть $\vec{f} = \vec{g}$. Тогда

$$\forall\ X \in \mathcal{A} \quad f(X) = f(O + \overrightarrow{OX}) = O + \vec{f}(\overrightarrow{OX}) = O + \vec{g}(\overrightarrow{OX}) = g(O + \overrightarrow{OX}) = g(X),$$

поскольку $f(O) = g(O) = O$, откуда следует, что $f = g$.

Теорема 2.1.14 *Пусть O – фиксированная точка. Тогда каждое аффинное преобразование f единственным образом разлагается в композицию некоторого центроаффинного преобразования g и некоторого сдвига $t_{\vec{v}}$.*

Доказательство. Пусть дана точка O и $f \in GA$. Обозначим $O' = f(O)$ и через $\vec{v} = \overrightarrow{OO'}$.

По теореме существования и единственности

$$\exists\ !\ g \in GA,\ \text{такое что}\ g(O) = O\ \text{и}\ \vec{g} = \vec{f}.$$

Очевидно, что $g \in GA_o$. Кроме того, $\exists\ !\ t_{\vec{v}} \in T$. Сравним f и $t_{\vec{v}} \circ g$.

$$f(O) = O' = t_{\vec{v}}(g(O)), \quad \vec{f} = \overrightarrow{t_{\vec{v}} \circ g},$$

поскольку $\overrightarrow{t_{\vec{v}} \circ g} = \vec{t}_{\vec{v}} \circ \vec{g} = 1_V \circ \vec{g} = \vec{g} = \vec{f}$.

Тогда по теореме (2.1.1) (часть единственность) следует, что $f = t_{\vec{v}} \circ g$, что и требовалось доказать.

Теорема 2.1.15 *Пусть $\mathcal{R}$ – репер в аффинном пространстве и f – аффинное преобразование. Тогда координаты точек $M(x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}}$ и $M'(x'_1, \ldots, x'_n)_{\mathcal{R}}$, где $M' = f(M)$ связаны формулой:*

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad ,\ \text{где } detC \neq 0.$$

Доказательство. Пусть O – начальная точка репера $\mathcal{R}$, а σ – базис репера.

Положим $O' = f(O)$ и пусть $O'(a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{R}}$. Поскольку $M' = f(M)$ и $O' = f(O)$, то $\vec{f}(OM) = \overrightarrow{O'M'}$. Обозначим матрицу $\vec{f}$ в базисе σ через C.

В исходном репере $\mathcal{R}$ вектор $\overrightarrow{O'M'}(x'_1 - a'_1, \ldots, x'_n - a'_n)_{\sigma}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} x'_1 - a'_1 \\ x'_2 - a'_2 \\ \vdots \\ x'_n - a'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

что равносильно утверждению теоремы.

Следствие 2.1.5 *Формулы центроаффинного преобразования в репере, начальная точка которого является неподвижной, имеют следующий вид:*

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad ,\ \text{где } detC \neq 0.$$

Доказательство. Если f – центроаффинное, то $f(O) = O$ и все координаты $a'_i = 0$.

Утверждение следствия вытекает из предыдущей теоремы.

Следствие 2.1.6 *Формулы гомотетии $h_{O,k}$ в репере, начальная точка которого совпадает с центром гомотетии, имеют следующий вид:*

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Доказательство. Вытекает из предыдущего следствия и того факта, что $\vec{h}_{O,k} = 1_V$.

2.2 Аффинные преобразования плоскости

В этом подразделе термин аффинное преобразование будет означать аффинное преобразование плоскости.

Теорема 2.2.1 *Аффинное преобразование плоскости либо не имеет неподвижных точек, либо имеет единственную неподвижную точку, либо является тождественным.*

Доказательство. Если аффинное преобразование f является сдвигом на ненулевой вектор, то оно не тождественное и не имеет неподвижных точек. Если оно является гомотетией с коэффициентом, не равным единице, то оно имеет единственную неподвижную точку. Это следует из определений сдвига и гомотетии.

Для завершения доказательства покажем, что любое не тождественное аффинное преобразование f, которое имеет две различные неподвижные точки, будет иметь и точечно-неподвижную прямую, но не может иметь трех неподвижных точек общего положения.

Пусть $f(A) = A$ и $f(B) = B$, где $A \neq B$. Докажем, что $\forall\ C \in (AB), \quad f(C) = C$. Иными словами, прямая, проходящая через точки A и B будет точечно-неподвижной.

Действительно, пусть $\forall\ C \in (AB)$. Тогда $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Следовательно,

$$f(C) = f(A + \overrightarrow{AC}) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AC}) = A + \vec{f}(\lambda\overrightarrow{AB}) = A + \lambda\overrightarrow{AB} = A + \overrightarrow{AC} = C,$$

и значит прямая AB – точечно-неподвижная.

Допустим, что f имеет три неподвижные точки общего положения: $f(A) = A,\ f(B) = B,\ f(C) = C$. Поскольку векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ линейно независимы, то для произвольной точки M плоскости $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$. следовательно

$$f(M) = f(A + \overrightarrow{AM}) = f(A) + \vec{f}(\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}) = A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} = A + \overrightarrow{AM} = M.$$

Мы получили, что любая точка M плоскости неподвижна при f. Тогда f тождественное, что противоречит предположению. Теорема доказана.

Определение 2.2.1 *Не тождественное аффинное преобразование, имеющее точечно-неподвижную прямую, называется родственным.*

Точечно-неподвижная прямая назвается *осью родства.*

Теорема 2.2.2 *Множество родственных преобразований с общей осью является подгруппой аффинной группы GA.*

Доказательство. Проверяется непосредственно.

Теорема 2.2.3 *Для любой прямой s и для любых точек A и A', не принадлежащих s, существует единственное родственное преобразование r с осью родства s такое, что $r(A) = A'$.*

Доказательство. Пусть O – произвольная точка прямой s.

Рассмотрим два репера, $\mathcal{R}(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, где $\vec{e}_1 \in s, \vec{e}_2 = \overrightarrow{OA}$ и $\mathcal{R}'(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2{}')$, где $\vec{e}_2{}' = \overrightarrow{OA'}$. Тогда по теореме существования и единственности $\exists!$ аффинное r такое, что $r : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}'$.

Покажем, что r имеет точечно-неподвижную прямую s и $r(A) = A'$. Действительно, для любой точки M прямой s имеем:

$$r(M) = r(O + \overrightarrow{OM}) = r(O) + \vec{r}(\lambda\vec{e}_1) = O + \lambda\vec{r}(\vec{e}_1) = O + \lambda\vec{e}_1 = O + \overrightarrow{OM} = M.$$

Кроме того

$$r(A) = r(O + \overrightarrow{OA}) = r(O) + \vec{r}(\overrightarrow{OA}) = O + \vec{r}(\vec{e}_2) = O + \vec{e}_2{}' = O + \overrightarrow{OA'} = A'.$$

Теорема доказана.

Определение 2.2.2 *Направление, определяемое пучком параллельных прямых, называется инвариантным направлением аффинного преобразования f, если любая прямая этого пучка отображается преобразованием f на прямую, также принадлежащую этому пучку.*

Теорема 2.2.4 *Родственное преобразование либо имеет единственное инвариантное направление (в этом случае оно совпадает с направлением оси родства), либо имеет два различных инвариантных направления (тогда одно из них совпадает с направлением оси родства).*

Доказательство. 1. Пусть r — родство с осью s и прямая $a \parallel s$. При аффинном преобразовании образом прямой является прямая. Кроме того, параллельные прямые отображаются на параллельные (смотри теорему 2.1.6). Тогда $a' = r(a) \parallel r(s) = s$. Итак направление оси родства — инвариантное. Оно есть всегда.

2. Пусть существует пара точек A, A' такая, что $A' = r(A) \neq A$. Обозначим прямую (AA') через a и предположим, что $(AA') = a \not\parallel s$. Обозначим $B = a \cap s$.

Покажем, что такая прямая a также определяет инвариантное направление. Докажем сначала, что любая точка M прямой a отображается на точку M', также лежащую на прямой a. Действительно, так как точка $M \in a = (AB)$, то $r(M) \in r(a) = (A'B)$, следовательно $M' = r(M) \in a$. Итак, мы получили, что $r(a) = a$. Заметим, что в этом случае прямая a не является точечно-неподвижной.

Пусть прямая $b \parallel a$ и $b \neq a$. Поскольку $r(a) = a$ и сохраняется параллельность, то

$$b \parallel a \Longrightarrow r(b) \parallel r(a) \Longrightarrow b' \parallel a.$$

Получили, что любая прямая $b \parallel a$ имеет инвариантное направление. Более того, $b' = b$. Это следует из того, что на ней есть неподвижная точка (точка пересечения с осью родства)

Проведенные рассуждения показывают также, что любая прямая, проходящая через пару различных родственных точек, имеет инвариантное направление, более того, она отображается на себя.

Действительно, либо

а) для любой пары A, A' различных родственных точек прямая $(AA') \parallel s$,

либо

б) существует пара A, A' различных родственных точек, такая что $(AA') \not\parallel s$.

Тогда в случае а) родство имеет единственное инвариантное направление, а в случае б) родство имеет еще одно, второе инвариантное направление. [8]

Определение 2.2.3 *Родственное преобразование, имеющее единственное инвариантное направление (совпадающее с направлением оси родства s) называется сдвигом вдоль прямой s.* [9]

Определение 2.2.4 *Родственное преобразование, которое имеет инвариантное направление, отличное от направления оси родства, называется косым сжатием.*

Теорема 2.2.5 *Если r — родственное преобразование, M и $M' = r(M)$ — пара родственных точек, то вектор $\overrightarrow{MM'}$ является собственным вектором однородной части $\vec{r}$.*

Доказательство. Выберем специальным образом репер $R(O, \sigma), O \in s$, где s – ось родства, а базис $\sigma(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\vec{e}_1 \parallel s$.

Пусть точка $E = O + \vec{e}_2$, а

$$E' = r(E) = r(O + \vec{e}_2) = r(O) + \vec{r}(\vec{e}_2) = O + \vec{r}(\vec{e}_2).$$

Положим, что $E'(\alpha, \beta)_R$. Так как $E' \notin s$, то $\beta \neq 0$.

Применяя теорему 2.1.15, запишем формулы родства

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ при } \beta \neq 0. \tag{2.1}$$

[8] Заметим также, что в случае б) все прямые, проходящие через пару различных родственных точек, пересекают ось родства, а все прямые, параллельные оси родства, не совпадают со своими образами, за исключением, очевидно, самой оси родства.

[9] Не путать со сдвигом $t_{\vec{v}}$ на вектор $\vec{v}$.

Тогда, поскольку из (2.1) следует, что $\overrightarrow{MM'}(\alpha, \beta - 1)$, получаем

$$\vec{r}(\overrightarrow{MM'}) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \beta(\beta - 1) \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta - 1 \end{pmatrix} = \beta \overrightarrow{MM'}. \tag{2.2}$$

Это доказывает, что вектор $\overrightarrow{MM'}$ – собственный.

Замечание.

Очевидно, что собственный вектор родства определяет инвариантное направление родства. Поэтому, если родство имеет только один (с точностью до множителя) собственный вектор, то инвариантное направление одно.

Если же существуют два неколлинеарных собственных вектора, то инвариантных направления также два.

Замечание позволяет использовать формулы родства для нахождения инвариантных направлений.

Характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & \alpha \\ 0 & \beta - \lambda \end{pmatrix} = 0. \tag{2.3}$$

Решая его, получим корни: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \beta$.

Случай 1. Если $\beta = 1$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и следовательно инвариантное направление одно. Координаты собственного вектора найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + \alpha x_2 &= 0 \\ (1-\lambda)x_2 &= 0. \end{cases}$$

При подстановке в систему $\lambda = 1$ получаем собственный вектор $\vec{c}(1, 0)$. Мы видим, что $\vec{c} \parallel s$.

Случай 2. Если $\beta \neq 1$, то $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \beta \neq \lambda_1$ и следовательно собственные векторы линейно независимы. Так как $\lambda_1 = 1$ дает собственный вектор $\vec{c} \parallel s$, то собственный вектор $\vec{d}$, соответствующий значению $\lambda_2 = \beta$, такой, что $\vec{d} \nparallel s$.

Теорема 2.2.6 *При специальном выборе репера формулы сдвига вдоль прямой имеют вид:*

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + \alpha x_2 \\ x_2' = x_2. \end{cases}$$

Доказательство. Выберем репер $\mathcal{R}$ следующим образом: $O \in s$, а векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ имеют инвариантные направления. Тогда $\beta = 1$ и формулы (2.1) принимают вид, указанный в теореме.

Теорема 2.2.7 *При специальном выборе репера формулы косого сжатия имеют вид:*

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = kx_2. \end{cases}$$

Доказательство. Выберем репер как в предыдущем случае и обозначим собственное число β через k. Ясно, что $k \neq 1$. Число k называют *коэффициентом косого сжатия.*

Теорема 2.2.8 *Множество сдвигов вдоль прямой s является абелевой нормальной подгруппой группы родственных преобразований с осью s, изоморфной аддитивной группе $(V^1, +)$, где V^1 – одномерное направляющее пространство оси родства s.*

Доказательство. Пусть $s = M_0 + V^1$. Сдвиг вдоль s вполне определен заданием s и пары соответствующих точек M и M', не принадлежащих оси s. Тогда по теореме 2.2.5 вектор $\overrightarrow{MM'} \in V^1$. Зафиксировав точку M, получим биекцию между сдвигами вдоль s и векторами из $(V^1, +)$. Так как композиция двух сдвигов вдоль s является сдвигом вдоль s и преобразование, обратное к сдвигу вдоль s есть также сдвиг вдоль s, то установленная биекция является изоморфизмом.

Можно рассуждать иначе. Отображение $\psi : GA_s \longrightarrow \mathbb{R}_+$, определенное по правилу

$$\psi(r) = \det \vec{r},$$

(то есть которое каждому родству r с осью s ставит в соответствие определитель $\det \vec{r}$ его однородной части), является гомоморфизмом. Ядро $\ker \psi$ этого гомоморфизма есть группа сдвигов.

Следствие 2.2.1 *Группа сдвигов вдоль прямой s есть подгруппа группы эквиаффинных преобразований.*

2.3 Основная теорема аффинной геометрии

В данном подразделе излагаются два признака, характеризующих аффинные преобразования. Первый из них касается аффинных преобразований пространства $\mathcal{A}(V)$ над произвольным полем, а второй — над полем действительных чисел.

В следующей теореме сформулированы условия, которые являются достаточными для того, чтобы преобразование было аффинным. Необходимость этих условий показана ранее. (Смотри теорему 2.1.6).

Теорема 2.3.1 (Признак аффинного преобразования) *Пусть $\mathcal{A}(V)$ – аффинное пространство над полем F и $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ – биекция, удовлетворяющая двум условиям:*

1) Для любых трех точек A, B и C, принадлежащих одной прямой, их образы $f(A), f(B)$ и $f(C)$ также принадлежат одной прямой.

2) f сохраняет простое отношение трех точек.

Тогда f – аффинное преобразование.

Доказательство. Построим, используя данное отображение f, некоторое линейное отображение φ и покажем, что тогда пара f, φ удовлетворяет определению 2.1.1.

Определим отображение φ следующим образом:

$$\forall\ A, B \in \mathcal{A} \quad \varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}.$$

Докажем линейность отображения φ. Действительно, положив $\vec{u} = \overrightarrow{AB},\ \vec{v} = \overrightarrow{BC}$ будем иметь:

$$\forall\ \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \varphi(\overrightarrow{AC}) =$$

$$= \overrightarrow{f(A)f(C)} = \overrightarrow{f(A)f(B)} + \overrightarrow{f(B)f(C)} = \varphi(\overrightarrow{AB}) + \varphi(\overrightarrow{BC}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}).$$

Докажем теперь, что для любого вектора $\vec{x}$ и для любого скаляра $\lambda \in F$ выполняется соотношение:

$$\varphi(\lambda\vec{x}) = \lambda\varphi(\vec{x}).$$

Возьмем произвольную точку A и положим $A + \vec{x} = B$ и $A + \lambda\vec{x} = C$. Это равносильно, согласно принятым обозначениям, что $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, а $\lambda\vec{x} = \overrightarrow{AC}$.

Рассмотрим вектор $\varphi(\lambda\vec{x})$. Тогда

$$\varphi(\lambda\vec{x}) = \varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{f(A)f(C)}.$$

Поскольку векторы $\vec{x}$ и $\lambda\vec{x}$ коллинеарны, точки A, B и C лежат на одной прямой. Кроме того, легко вычислить, что точка C делит отрезок AB в отношении $\mu = \lambda/(1 - \lambda)$. [10] По условию теоремы точки $f(A), f(B)$ и $f(C)$ также лежат на одной прямой. Из этого следует, что векторы $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ и $\overrightarrow{f(A)f(C)}$ коллинеарны. Кроме того, из сохранения простого отношения трех точек прямой следует, что точка $f(C)$ делит отрезок $f(A)f(B)$ в том же отношении μ. Следовательно , $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda\overrightarrow{f(A)f(B)}$. Тогда выполняются равенства:

$$\varphi(\lambda\vec{x}) = \varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda\overrightarrow{f(A)f(B)} = \lambda\varphi(\overrightarrow{AB}) = \lambda\varphi(\vec{x}).$$

Линейность отображения φ показана.

Невырожденность φ следует из того, что

$$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{0} \Longrightarrow f(A) = f(B) \Longrightarrow A = B \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Longrightarrow \ker\varphi = \vec{0}.$$

Покажем, наконец, что f аффинное с однородной частью φ. Пусть $B = A + \vec{v}$. Тогда

$$f(A + \vec{v}) = f(B) = f(A) + \overrightarrow{f(A)f(B)} = f(A) + \varphi(\overrightarrow{AB}) = f(A) + \varphi(\vec{v}).$$

[10] Подразумевается, что $\lambda \neq 1$, так как при $\lambda = 1$ равенство $\varphi(\lambda\vec{x}) = \lambda\varphi(\vec{x})$ очевидно.

Теорема доказана.

Замечание. Теорема 2.3.1 сформулирована как достаточный признак. Необходимость условий 1) и 2) непосредственно следует из теоремы 2.1.6. Таким образом условия 1) и 2) являются необходимыми и достаточными для аффинности биекции, а потому аффинное отображение и аффинное преобразование можно определять как биекции, для которых выполняются эти условия. Такой подход использован, например, в книге [1].

Следующая теорема показывает, что в случае действительной аффинной плоскости второе условие предыдущей теоремы является излишним.

Теорема 2.3.2 (Основная теорема аффинной геометрии над полем $\mathbb{R}$) *Пусть $\mathcal{A}(V)$ – аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$ и $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ – биекция, удовлетворяющая условию:*

Для любых трех точек A, B и C, принадлежащих одной прямой, их образы $f(A), f(B)$ и $f(C)$ также принадлежат одной прямой.

Тогда f – аффинное преобразование.

Полное доказательство этой теоремы довольно громоздко [11], поэтому мы ограничимся случаем, когда $\dim V = 2$. Тогда доказательство теоремы опирается на три леммы:

Лемма 2.3.1 *Если биекция f сохраняет коллинеарность точек, то образы точек общего положения также являются точками общего положения. Образом прямой является прямая.*

Доказательство. Пусть A, B и C – произвольные точки общего положения. Обозначим $A' = f(A), B' = f(B)$ и $C' = f(C)$. Будем рассуждать от противного. Предположим, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой a'. Тогда покажем, что для любой точки $X \in \mathcal{A}$ точка $X' = f(X) \in a'$.

Действительно, если X лежит на прямых AB, BC или AC, это прямо следует из условия леммы. Если же X не лежит ни на одной из этих прямых, то существует прямая, проходящая через X и пересекающая две из данных прямых в различных точках P и Q. Поскольку точки P' и Q' должны принадлежать a', а точки P', Q' и X лежат на одной прямой, то и точка $X \in a'$.

Мы получили, что все точки плоскости отобразились на точки прямой a', следовательно, точки, не лежащие на a', не имеют прообразов, что противоречит биективности f.

Покажем теперь, что образом любой прямой является прямая. Возьмем произвольную прямую и на ней две точки A и B. Если точка $X \in AB$, то по условию леммы $X' \in A'B'$. Обратно, если $Y' \in A'B'$ – произвольная точка, то ее прообраз $Y \in AB$, так как иначе точки общего положения A, B, Y отображались бы на точки A', B', Y', лежащие на одной прямой, что противоречит доказанному.

Теперь оба утверждения леммы доказаны.

Лемма 2.3.2 *Если биекция f сохраняет коллинеарность точек, то параллельные прямые отображаются на параллельные.*

Доказательство. Пусть, согласно предыдущей лемме, $a' = f(a)$ и $b' = f(b)$, где $a \parallel b$. Рассуждаем от противного. Допустим, что $a' \cap b' = M$. По предыдущей лемме найдутся точки $M_1 \in a$ и $M_2 \in b$ такие, что $f(M_1) = f(M_2) = M$. Но так как $a \parallel b$, то $M_1 \neq M_2$. Это противоречит биективности f.

Напомним два определения из курса алгебры.

Определение 2.3.1 *Полем называют такое множество F, в котором определены два отображения $F \times F \longrightarrow F$, первое из которых сопоставляет каждой паре a, b элементов из F единственный элемент из F, называемый суммой элементов a и b и обозначаемый $a + b$, а второе сопоставляет каждой паре a, b элементов из F единственный элемент из F, называемый произведением элементов a и b и обозначаемый ab, причем относительно сложения множество F является коммутативной группой, а умножение имеет следующие свойства:*

1. $\forall\ a, b, c \in F \quad (ab)c = a(bc).$

[11] Для ознакомления смотри [14], [6]

2. $\exists\ e \in F, \quad \forall\ a \in F \quad ea = ae = a.$

3. $\forall\ a, b \in F, \quad ab = ba.$

4. $\forall\ a \in F,\ a \neq 0,\ \exists\ b \in F, \quad ab = ba = e.$

5. $\forall\ a, b, c \in F \quad a(b + c) = ab + ac.$

Замечание. Элемент e называют *единицей* поля F, а элемент b, о котором говорится в свойстве 4, называют *обратным* к элементу a и обозначают его $b = a^{-1}$ или $b = 1/a$.

Более кратко можно сказать, что полем называется коммутативное кольцо F, в котором каждый ненулевой элемент имеет обратный.

Определение 2.3.2 *Отображение $\sigma : F \longrightarrow F$ называют автоморфизмом поля F, если σ биективно и $\forall\ x, y \in F$ выполняются два соотношения:*

$$\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y).$$

$$\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y).$$

Легко доказать, что $\sigma(0) = 0,\ \sigma(1) = 1$, а также что σ^{-1} тоже является автоморфизмом поля $\mathbb{R}$.

Лемма 2.3.3 *Поле действительных чисел не имеет автоморфизмов, отличных от тождественного.*

Доказательство. Достаточно показать, что если σ – автоморфизм поля $\mathbb{R}$, то

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad \sigma(x) = x.$$

Доказательство проводится в ряд последовательных шагов.

1. Докажем, что $\sigma(n) = n$ для любого натурального числа n. Поскольку $n = 1+1+\cdots+1$, то равенства $\sigma(1) = 1$ и $\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$ дают:

$$\sigma(n) = \sigma(1) + \cdots + \sigma(1) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

Применение индукции сделает доказательство более корректным.

2. Докажем, что $\sigma(n) = n$ для любого целого числа n. Так как $n + (-n) = 0$, тогда выполняется $\sigma(n) + \sigma(-n) = \sigma(n + (-n)) = \sigma(0) = 0$, откуда $\sigma(-n) = -\sigma(n) = -n$. Теперь из шагов 1 и 2 следует, что автоморфизм σ оставляет на месте все целые числа $\mathbb{Z}$.

3. Если $b \in \mathbb{Z}$ и $b \neq 0$, то следовательно $\sigma(1/b) = 1/\sigma(b) = 1/b$. В самом деле,

$$\sigma(b(1/b)) = 1 = \sigma(b)\sigma(1/b) = b\sigma(1/b)$$

откуда следует, что $\sigma(1/b) = 1/b$.

4. Если $a, b \in \mathbb{Z}$ и $b \neq 0$ то, с учетом 3,

$$\sigma(a/b) = \sigma(a(1/b)) = \sigma(a)\sigma(1/b) = a(1/b) = a/b.$$

Получили, что σ оставляет на месте все рациональные числа, т.е. $\forall\ q \in \mathbb{Q} \quad \sigma(q) = q$.

5. Докажем, что $x > 0 \Longrightarrow \sigma(x) > 0$. Действительно,

$$x > 0 \Longrightarrow \exists\ a,\ \text{такое, что } a \neq 0 \text{ и } a^2 = x,$$

откуда следует, что

$$\sigma(x) = \sigma(a^2) = \sigma(aa) = \sigma(a)\sigma(a) = [\sigma(a)]^2 > 0,\ \text{поскольку } a \neq 0 \Longrightarrow \sigma(a) \neq 0.$$

Следовательно, $\sigma(x) = [\sigma(a)]^2 > 0$. Верно и обратное:

$$\sigma(x) > 0 \Longrightarrow \sigma(x) = b^2 \Longrightarrow \sigma^{-1}(\sigma(x)) = \sigma^{-1}(b^2)$$

Но $\sigma^{-1}(\sigma(x)) = x$, а $\sigma^{-1}(b^2) = [\sigma^{-1}(b)]^2$, так как σ^{-1} – автоморфизм. Тогда $x = [\sigma^{-1}(b)]^2 > 0$. В итоге получили

$$x > 0 \Longleftrightarrow \sigma(x) > 0.$$

6. Покажем, что σ – монотонный автоморфизм.

$$x < y \Longleftrightarrow (y - x) > 0 \Longleftrightarrow \sigma(y - x) = \sigma(y) - \sigma(x) > 0 \Longleftrightarrow \sigma(x) < \sigma(y).$$

7. Покажем, наконец, что

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{R} \quad \sigma(\alpha) = \alpha.$$

Для любой последовательности рациональных чисел r_n,

$$\{r_n\} \longrightarrow \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \{\sigma(r_n)\} \longrightarrow \sigma(\alpha),$$

но $\{\sigma(r_n)\} = \{r_n\}$, следовательно $\{r_n\} \longrightarrow \sigma(\alpha)$.

Если $\sigma(\alpha) \neq \alpha$, то допустив $\sigma(\alpha) < \alpha$, получим, что существует такой номер N, что

$$\forall\ n > N \quad \sigma(\alpha) < r_n < \alpha \Longrightarrow \sigma(r_n) < \sigma(\alpha) \Longrightarrow r_n < \sigma(\alpha),$$

и мы получили противоречие. Аналогичное противоречие можно получить, если предположить $\sigma(\alpha) > \alpha$.

Следовательно, σ – тождественный автоморфизм. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.3.2. Доказательство теоремы проведем по следующей схеме:

- Используя данное отображение f, определим отображение $\varphi : V \longrightarrow V$.
- Докажем, что φ обладает свойствами:

$$\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}). \tag{2.4}$$

$$\varphi(\lambda\vec{x}) = \lambda\varphi(\vec{x}). \tag{2.5}$$

- Покажем, что тогда пара f, φ удовлетворяет определению 2.1.1.

Итак, первое. Используя данное отображение f, определим отображение $\varphi : V \longrightarrow V$:

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}, \tag{2.6}$$

так как любой вектор $\vec{x}$ можно отложить от произвольной точки A.

Второе. Выполнение равенства (2.4) доказывается так же, как в теореме 2.3.1.

Доказательство равенства (2.5) разбивается на два случая:

1. $\lambda = 0$ или $\vec{x} = \vec{0}$.

   Действительно, обозначим $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$. Тогда $\vec{x} = \vec{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Longleftrightarrow A = B \Longleftrightarrow f(A) = f(B) \Longleftrightarrow \overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{0}$. Тогда, с одной стороны $\varphi(\lambda\vec{x}) = \varphi(\lambda\vec{0}) = \varphi(\vec{0}) = \vec{0}$. С другой стороны, $\lambda\varphi(\vec{x}) = \lambda\varphi(\vec{0}) = \lambda\overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{0}$.

   При $\lambda = 0$ равенство почти очевидно.

2. $\lambda \neq 0,\ \vec{x} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$.

   (a) Проверяем выполнение равенства

   $$\varphi(\lambda\vec{x}) = \mu\varphi(\vec{x}),\ \text{где}\ \mu = \theta(\lambda, \vec{x}). \tag{2.7}$$

   Обозначим вектор $\vec{x}$ через $\overrightarrow{AB}$ и пусть $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{x}$. Тогда точки A, B, C лежат на одной прямой, откуда по условию теоремы точки $f(A), f(B), f(C)$ также лежат на одной прямой. Следовательно

   $$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{x} \Longrightarrow \overrightarrow{f(A)f(C)} = \mu\overrightarrow{f(A)f(B)} \Longleftrightarrow \varphi(\lambda\vec{x}) = \mu\varphi(\vec{x}).$$

   Числовой множитель μ может зависеть как от числа λ, так и от вектора $\vec{x}$, значит его можно считать функцией $\mu = \theta(\lambda, \vec{x})$.

(b) Покажем, что функция $\mu = \theta(\lambda, \vec{x})$ не зависит от $\vec{x}$. Для этого нужно показать, что для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ будет выполнено $\mu(\vec{x}) = \mu(\vec{y})$.

Рассмотрим сначала случай, когда векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ неколлинеарны. Отложим эти векторы от произвольной точки O. Получим $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{OQ}$.

Обозначим также $\overrightarrow{OR} = \lambda\vec{x}$ и $\overrightarrow{OS} = \lambda\vec{y}$. Так как, в силу линейной независимости векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, точки O, P, Q и O, R, S – общего положения, то $PQ \parallel RS$ по теореме, обратной к теореме Фалеса.

Обозначим образы точек O, P, Q, R, S при отображении f через O', P', Q', R', S'.

По лемме 2.3.1 и условию теоремы точки O', P', Q' – общего положения. Из условия теоремы следует также, что $R' \in (O'P')$, $S' \in (O'Q')$. Тогда, согласно лемме 2.3.2, $P'Q' \parallel R'S'$. Из теоремы Фалеса тогда следует, что если

$$\overrightarrow{O'R'} = \mu\overrightarrow{O'P'}, \text{ то выполняется } \quad \overrightarrow{O'S'} = \mu\overrightarrow{O'Q'}. \tag{2.8}$$

Согласно принятых обозначений

$$\varphi(\lambda\vec{x}) = \varphi(\overrightarrow{OR}) = \overrightarrow{O'R'} = \mu(\vec{x})\overrightarrow{O'P'} = \mu(\vec{x})\varphi(\overrightarrow{OP}) = \mu(\vec{x})\varphi(\vec{x}). \tag{2.9}$$

Аналогично получим:

$$\varphi(\lambda\vec{y}) = \varphi(\overrightarrow{OS}) = \overrightarrow{O'S'} = \mu(\vec{y})\overrightarrow{O'Q'} = \mu(\vec{y})\varphi(\overrightarrow{OQ}) = \mu(\vec{y})\varphi(\vec{y}). \tag{2.10}$$

Из равенств (2.9) и (2.10) получаем, используя (2.8), что $\mu(\vec{x}) = \mu(\vec{y})$.

Рассмотрим теперь случай, когда векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны. Тогда всегда найдется вектор $\vec{z}$, такой, что векторы $\vec{x}$ и $\vec{z}$, а также векторы $\vec{z}$ и $\vec{y}$ неколлинеарны. Согласно первому случаю имеем: $\mu(\vec{x}) = \mu(\vec{z})$ и $\mu(\vec{z}) = \mu(\vec{y})$, что дает $\mu(\vec{x}) = \mu(\vec{y})$.

Итак, функция $\mu = \theta(\lambda, \vec{x})$ не зависит от $\vec{x}$, следовательно является функцией только от λ.

(c) Покажем, что функция $\mu = \theta(\lambda)$ является автоморфизмом поля $\mathbb{R}$.

Для этого достаточно $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ показать выполнение равенств:

$$\theta(\alpha + \beta) = \theta(\alpha) + \theta(\beta). \tag{2.11}$$

$$\theta(\alpha\beta) = \theta(\alpha)\theta(\beta). \tag{2.12}$$

Действительно, с одной стороны

$$\varphi((\alpha + \beta)\vec{x}) = \varphi(\alpha\vec{x} + \beta\vec{x}) = \varphi(\alpha\vec{x}) + \varphi(\beta\vec{x}).$$

Это дает нам

$$\varphi((\alpha + \beta)\vec{x}) = \theta(\alpha)\varphi(\vec{x}) + \theta(\beta)\varphi(\vec{x}) = [\theta(\alpha) + \theta(\beta)]\varphi(\vec{x}). \tag{2.13}$$

С другой стороны,

$$\varphi((\alpha + \beta)\vec{x}) = \theta(\alpha + \beta)\varphi(\vec{x}). \tag{2.14}$$

Тогда из (2.13) и (2.14) получаем (2.11).

Аналогично предыдущему, с одной стороны

$$\varphi((\alpha\beta)\vec{x}) = \theta(\alpha)\varphi(\beta\vec{x}) = \theta(\alpha)\theta(\beta)\varphi(\vec{x}) \tag{2.15}$$

С другой стороны

$$\varphi((\alpha\beta)\vec{x}) = \theta(\alpha\beta)\varphi(\vec{x}). \tag{2.16}$$

Тогда из (2.15) и (2.16) получаем (2.12).

Итак доказано, что θ – автоморфизм поля $\mathbb{R}$. Следовательно, по лемме 2.3.3,

$$\forall\ \lambda, \quad \theta(\lambda) = \lambda.$$

Значит отображение φ линейный оператор, поскольку равенство (2.6) теперь принимает вид

$$\varphi(\lambda\vec{x}) = \lambda\varphi(\vec{x}).$$

Невырожденность оператора φ следует из того, что

$$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{0} \Longleftrightarrow f(A) = f(B) \Longleftrightarrow A = B \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0}.$$

Наконец, покажем третье, что пара f, φ удовлетворяет определению 2.1.1.

Пусть $A \in \mathcal{A}$ и $\vec{a} \in V$ – произвольные. Обозначим $B = A + \vec{a}$. Тогда

$$f(A + \vec{a}) = f(B) = f(A) + \overrightarrow{f(A)f(B)} = f(A) + \varphi(\overrightarrow{AB}) = f(A) + \varphi(\vec{a}).$$

В итоге получаем $f(A + \vec{a}) = f(A) + \varphi(\vec{a})$. Теорема доказана.

3 Движения и подобия

В этом подразделе излагается сугубо алгебраический материал. Дополнительно рекомендуем читать [8], [9], [10] или [13].

3.1 Ортогональные и изометрические операторы

Пусть V - евклидово векторное пространство и φ – линейный оператор.

Определение 3.1.1 *Линейный оператор называется ортогональным, если он сохраняет скалярное произведение.*

Определение 3.1.2 *Линейный оператор называется изометрическим, если он сохраняет длину любого вектора.*

В любом стандартном курсе линейной алгебры доказывается теорема:

Теорема 3.1.1 *Для того, чтобы линейный оператор был изометрическим, необходимо и достаточно, чтобы он был ортогональным.*

Следствие 3.1.1 *Изометрический (ортогональный) оператор биективен.*

Доказательство. Из изометричности f следует, что $\ker f = \vec{0}$, следовательно f инъективно. Тогда базис пространства V отобразится на некоторое множество линейно независимых векторов. $\mathrm{Im}\, f$ будет их линейной оболочкой, следовательно $\dim(\mathrm{Im} f) = \dim V$, откуда следует сюръективность. На самом деле имеют место более общие утверждения. [12]

[12]Пусть V и V' – евклидовы векторные пространства и $f : V \longrightarrow V'$ – некоторое отображение.

Определение 3.1.3 *Отображение f называется ортогональным, если оно сохраняет скалярное произведение.*

Определение 3.1.4 *Отображение f называется изометрическим, если оно линейно и сохраняет длину любого вектора.*

Теорема 3.1.2 *Пусть V и V' – евклидовы векторные пространства. Для любого отображения*

$$f : V \longrightarrow V'$$

следующие два свойства равносильны:
1) f является изометрическим отображением
2) f является ортогональным отображением

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Так как f линейное и $\forall\ \vec{v} \in V \quad |f(\vec{v})| = |\vec{v}|$, то воспользуемся тождеством:

$$(f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y})) = \frac{1}{2}\left(|f(\vec{x}) + f(\vec{y})|^2 - |f(\vec{x})|^2 - |f(\vec{y})|^2\right). \tag{3.1}$$

Из линейности f следует, что $|f(\vec{x}) + f(\vec{y})|^2 = |f(\vec{x} + \vec{y})|^2$, и тогда правая часть (3.1) принимает вид:

$$(f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y})) = \frac{1}{2}\left(|f(\vec{x} + \vec{y})|^2 - |f(\vec{x})|^2 - |f(\vec{y})|^2\right), \tag{3.2}$$

откуда, в силу изометричности f, следует:

$$(f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y})) = \frac{1}{2}\left(|\vec{x} + \vec{y}|^2 - |\vec{x}|^2 - |\vec{y}|^2\right) = (\vec{x} \cdot \vec{y}), \tag{3.3}$$

что и требовалось доказать.

2) $\Longrightarrow$ 1). То, что f сохраняет длины векторов, следует из ортогональности f и определения длины вектора. Покажем, что из ортогональности f следует его линейность.

$\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in V$ обозначим

$$\vec{w} = f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) - \alpha f(\vec{x}) - \beta f(\vec{y}). \tag{3.4}$$

Докажем, что $\vec{w} = \vec{0}$. Для этого достаточно показать, что $\vec{w} \cdot \vec{w} = 0$. Для этого домножим обе части равенства (3.4) на $\vec{w}$. Получим:

$$\vec{w}^2 = \vec{w} \cdot f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) - \alpha\vec{w} \cdot f(\vec{x}) - \beta\vec{w} \cdot f(\vec{y}). \tag{3.5}$$

Докажем теперь, что $\forall\ \vec{z} \in V \quad \vec{w} \cdot f(\vec{z}) = 0$. Действительно, используя (3.4) получаем:

$$\vec{w} \cdot f(\vec{z}) = (f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \cdot f(\vec{z})) - \alpha(f(\vec{x}) \cdot f(\vec{z})) - \beta(f(\vec{y}) \cdot f(\vec{z})) = ((\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \cdot \vec{z}) - \alpha(\vec{x} \cdot \vec{z}) - \beta(\vec{y} \cdot \vec{z}) = 0,$$

так как f ортогонально. Но тогда

$$\vec{w} \cdot f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = 0, \quad \vec{w} \cdot f(\vec{x}) = 0, \quad \vec{w} \cdot f(\vec{y}) = 0$$

и тогда правая часть в (3.5) равна нулю. Теорема доказана.

3.2 Движения

Определение 3.2.1 *Биекцию одного евклидова пространства на другое называют изометрией, если она сохраняет расстояние между любыми точками.*

Определение 3.2.2 *Движением евклидова пространства называют изометрию этого пространства на себя.*

Теорема 3.2.1 *Движение евклидова пространства имеет следующие свойства:*
1) движение сохраняет коллинеарность точек;
2) движение сохраняет простое отношение трех точек прямой;

Доказательство. 1). Пусть f – движение и точки A, B, C лежат на одной прямой. Обозначим $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$. Из того, что точки A, B, C лежат на одной прямой следует, что одна из них лежит между двумя другими, например, B лежит между A и C. Отсюда $|AB| + |BC| = |AC|$, тогда из сохранения расстояний при движении следует, что $|A'B'| + |B'C'| = |A'C'|$.

Из последнего равенства следует, что точки A', B', C' лежат на одной прямой и значит первое утверждение теоремы доказано.

2). Пусть $(AC, B) = \lambda$, что равносильно $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$ и, значит, точки A, B, C лежат на одной прямой. Но тогда и точки A', B', C' лежат на одной прямой, причем сохраняется взаимное расположение точек. Тогда $\overrightarrow{A'B'} = \mu\overrightarrow{B'C'}$ и скаляры λ и μ одного знака. Кроме того, имеем $|AB| = |\lambda||BC|$ и $|A'B'| = |\mu||B'C'|$, откуда следует, что $\lambda = \mu$. Теорема доказана.

Следствие 3.2.1 *Движение является аффинным преобразованием.*

Доказательство. Вытекает из доказанной теоремы и признака аффинности.

Теорема 3.2.2 *Совокупность всех движений евклидова пространства образует группу.*

Доказательство. Следует из того, что композиция движений есть движение и обратное к движению есть также движение.

Следствие 3.2.2 *В евклидовом пространстве группа движений является подгруппой группы аффинных преобразований.*

Теорема 3.2.3 *Для того, чтобы преобразование евклидова пространства было движением, необходимо и достаточно, чтобы оно было аффинным и его однородная часть была ортогональным оператором.*

*Доказательство.*1.Необходимость. Пусть f – движение. По следствию из теоремы 3.2.1 движение f является аффинным преобразованием, а его однородная часть $\vec{f}$ сохраняет длины векторов, следовательно является изометрическим, а значит и ортогональным оператором.

2.Достаточность. Если f является аффинным преобразованием, а его однородная часть $\vec{f}$ является ортогональным оператором, то $\vec{f}$ сохраняет длины векторов, следовательно является изометрическим оператором, а значит f сохраняет расстояние между точками.

Теорема 3.2.4 *Сдвиг $t_{\vec{v}}$ евклидова пространства является движением.*

Доказательство. Следует из теоремы 2.1.2 и из того, что однородная часть сдвига есть тождественный линейный оператор, а он является ортогональным. Потом используем теорему 3.2.3.

Следствие 3.2.3 *Группа сдвигов является подгруппой группы движений.*

Теорема 3.2.5 *В ортонормированном репере формулы движения совпадают с формулами аффинного преобразования, с той разницей, что матрица однородной части является ортогональной.*

Доказательство. Следует из теорем 3.2.1, 3.2.3 и 2.1.15.

В евклидовом пространстве аналогом теоремы существования и единственности 2.1.1 является следующая теорема:

Теорема 3.2.6 *Для любых двух точек O и $O\,'$ в евклидовом пространстве $E(V)$ и для любого ортогонального линейного оператора $\varphi : V \longrightarrow V$ существует единственное движение f такое, что*
$$f(O) = O\,' \text{ и } \vec{f} = \varphi.$$

Доказательство. Поскольку ортогональный оператор является линейным и невырожденным, то можно применить теорему 2.1.1. Получим аффинное преобразование с ортогональной однородной частью, откуда по признаку 3.2.4 оно является движением.

Определение 3.2.3 *Две последовательности точек общего положения $\{A_i\}$ и $\{A_i'\}$ в евклидовом пространстве E называются конгруентными, если $|A_iA_j| = |A_i'A_j'|$ для любых индексов i, j.*

Следующая теорема аналогична теореме 2.1.5.

Теорема 3.2.7 *Для любых двух конгруентных максимальных последовательностей точек общего положения $\{A_i\}$ и $\{A_i'\}$ в евклидовом пространстве E существует единственное движение*
$$f : E \longrightarrow E, \text{ такое, что } \quad \forall\ i = 0, \ldots, n \quad f(A_i) = A_i'.$$

Доказательство. Введем следующие обозначения: $\forall\ i = 1, \ldots, n \quad \overrightarrow{A_0A_i} = \vec{e}_i,\ \overrightarrow{A_0'A_i'} = \vec{e}_i\,'$.

По теореме 2.1.5 существует единственное аффинное преобразование f, такое, что $f(A_i) = A_i'$. Тогда его однородная часть $\vec{f}$, согласно принятым обозначениям, такова, что $\vec{f}(\vec{e}_i) = \vec{e}_i\,'$. Докажем, что линейный оператор $\vec{f}$ является ортогональным.

Предварительно докажем, что
$$\forall\ i, j = 1, \ldots, n \qquad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_i\,' \cdot \vec{e}_j\,'. \tag{3.6}$$
То, что это верно при $i = j$, следует непосредственно из конгруентности данных последовательностей. Тогда получаем $(\vec{e}_i\,')^2 = \vec{e}_i^{\,2}$.

При $i \neq j$ из конгруентности последовательностей следует, что $(\overrightarrow{A_iA_j})^2 = (\overrightarrow{A_i'A_j'})^2$. Но, с одной стороны,
$$(\overrightarrow{A_iA_j})^2 = (\overrightarrow{A_0A_j} - \overrightarrow{A_0A_i})^2 = (\vec{e}_j - \vec{e}_i)^2 = \vec{e}_j^{\,2} + \vec{e}_i^{\,2} - 2\vec{e}_j\vec{e}_i,$$
а с другой стороны
$$(\overrightarrow{A_i'A_j'})^2 = (\overrightarrow{A_0'A_j'} - \overrightarrow{A_0'A_i'})^2 = (\vec{e}_j\,' - \vec{e}_i\,')^2 = (\vec{e}_j\,')^2 + (\vec{e}_i\,')^2 - 2\vec{e}_j\,'\vec{e}_i\,'.$$
Из равенства левых частей двух последних равенств вытекает равенство их правых частей, а, значит и (3.6).

Для доказательства ортогональности оператора возьмем два произвольных вектора:
$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i \quad \text{и} \quad \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i\vec{e}_i.$$
Вычислим теперь скалярное произведение $\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{f}(\vec{y})$:
$$\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{f}(\vec{y}) = \vec{f}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i\right) \cdot \vec{f}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i\,' \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i\vec{e}_i\,' = \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_j\vec{e}_i\,' \cdot \vec{e}_j\,' =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_j\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i\vec{e}_i = \vec{x} \cdot \vec{y}.$$
Ортогональность $\vec{f}$ доказана. Применение теоремы 3.2.3 завершает доказательство теоремы.

Определение 3.2.4 *Движение f называют движением первого рода, если* $\det\vec{f} = 1$ *и движением второго рода, если* $\det\vec{f} = -1$.

Теорема 3.2.8 *Движения первого рода образуют группу. Она является подгруппой группы движений.*

Доказательство. Следует из теоремы об умножении определителей.

Следствие 3.2.4 *Группа сдвигов является подгруппой группы движений первого рода.*

Определение 3.2.5 *Симметрией относительно гиперплоскости называют отображение евклидова пространства на себя, при котором каждая точка гиперплоскости неподвижна, а всякая точка, не лежащая в гиперплоскости, отображается на симметричную.*

Теорема 3.2.9 *Симметрия относительно гиперплоскости является движением.*

Доказательство. Выберем ортонормированный репер, такой, что его начало принадлежит гиперплоскости, первый базисный вектор ортогонален к ней, а остальные ей параллельны. В таком репере формулы симметрии принимают вид:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Так как матрица однородной части ортогональна, по теореме 3.2.3 симметрия является движением.

Теорема 3.2.10 *Если при аффинном преобразовании f точки общего положения $A_0, \dots, A_k$ неподвижны, то их аффинная оболочка целиком состоит из неподвижных точек.*

Доказательство. Обозначим через $A_0 + W$ аффинную оболочку неподвижных точек общего положения $A_0, \dots, A_k$. По условию теоремы векторы $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$ линейно независимы, порождают W и $\vec{f}(\overrightarrow{A_0A_k}) = \overrightarrow{A_0A_k}$.

Для любой точки $M \in A_0 + W$ вектор $\overrightarrow{A_0M} \in W$. Следовательно

$$f(M) = f(A_0 + \overrightarrow{A_0M}) = A_0 + \vec{f}\left(\sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{A_0A_i}\right) = A_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{A_0A_i} = A_0 + \overrightarrow{A_0M} = M.$$

В качестве следствия получаем следующую теорему:

Теорема 3.2.11 *В n-мерном евклидовом пространстве множество неподвижных точек не тождественного движения является k-плоскостью, где k может принимать значения от* 0 *до* $n-1$.

Определение 3.2.6 *Движение первого рода, которое имеет неподвижные точки, называют вращением.*

Теорема 3.2.12 *У вращения в n-мерном евклидовом пространстве, $(n > 1)$, множество всех неподвижных точек является k-плоскостью, причем k может принимать значения от* 0 *до* $n-2$, *если вращение не тождественное.*

Доказательство. От противного. Предположим, что некоторая гиперплоскость α является точечно-неподвижной при вращении f. Докажем, что f – тождественное движение. Для этого достаточно показать, что для любой точки M, не лежащей в α, $f(M) = M$. Обозначим $M_1 = f(M)$ и допустим, что $M \neq M_1$. В силу того, что движение первого рода, образ любой точки M, не лежащей в α, лежит в том же полупространстве относительно α, в котором лежит M. Тогда точки M и M_1 лежат по одну сторону от α. Кроме того, для любой точки

$A \in \alpha, \quad |AM_1| = |AM|$. Следовательно точка A лежит в гиперплоскости, которая делит отрезок $[MM_1]$ пополам и перпендикулярна ему. Так как точка A – произвольная точка α, то $\alpha \perp [MM_1]$ и делит его пополам. Получили, что точки M и M_1 лежат по разные стороны от α. Противоречие показывает, что точки M и M_1 не могут быть различными. Тогда f – тождественное движение.

Определение 3.2.7 *Плоскость, состоящая из всех неподвижных точек вращения, называется осью вращения.*

Легко доказать следующую теорему:

Теорема 3.2.13 *Множество всех движений первого рода, оставляющих фиксированную точку на месте, является группой. Она носит название группы вращений и является подгруппой в группе движений первого рода и группе центроаффинных преобразований.*

Теорема 3.2.14 *Всякая плоскость, ортогонально дополнительная к оси вращения, отображается при вращении на себя.*

Доказательство. Пусть плоскость $\alpha = A + V^\alpha$ – ось вращения, а плоскость $\beta = A + V^\beta$ является к ней ортогонально дополнительной. Тогда $V^\beta = (V^\alpha)^\perp$.

Для любой точки $M \in \beta$ имеем $f(M) = f(A + \overrightarrow{AM}) = A + \vec{f}(\overrightarrow{AM}) \in \beta$. Это следует из того, что оператор $\vec{f}$ ортогональный, откуда

$$\overrightarrow{AM} \perp V^\alpha \Longrightarrow \vec{f}(\overrightarrow{AM}) \perp V^\alpha \Longrightarrow \vec{f}(\overrightarrow{AM}) \in V^\beta \Longrightarrow f(M) \in \beta.$$

Теорема доказана. В этом случае говорят, что плоскость β инвариантна при вращении.

Докажем теорему, которая позволит нам классифицировать движения в евклидовом пространстве.

Теорема 3.2.15 *В n-мерном евклидовом пространстве над полем $\mathbb{R}$ в некотором ортонормированном репере движение задается формулами следующего вида:*

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{\varphi_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_{\varphi_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad , \textit{ где } R_{\varphi_k} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k \end{pmatrix}.$$

Сформулируем несколько лемм, необходимых для доказательства теоремы.

Лемма 3.2.1 *В любом линейном пространстве над полем $\mathbb{R}$ всякий линейный оператор имеет либо одномерное, либо двумерное инвариантное пространство, причем сужение оператора на двумерное инвариантное пространство имеет положительный определитель.*

Доказательство. Можно прочитать, например, в [10], приложение в конце книги.

Лемма 3.2.2 *Если f – изометрический оператор в евклидовом пространстве E и подпространство E' инвариантно относительно f, то $E'' = (E')^\perp$ также инвариантно относительно f.*

Доказательство. Из инвариантности подпространства E' и невырожденности оператора f следует, что $f(E') = E'$. Пусть $\vec{y} \in E''$ – произвольный вектор. Тогда $\vec{y} \perp E'$, откуда с учетом ортогональности оператора f следует, что $f(\vec{y}) \perp E'$, что означает $f(\vec{y}) \in E''$. Инвариантность E'' доказана.

Лемма 3.2.3 *В евклидовом пространстве E^2 всякая изометрия с положительным определителем является поворотом на некоторый угол.*

Доказательство. Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \in E^2$ – ортонормированный базис. Ортогональный (изометрический) оператор, действуя на $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, дает базис $(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}') \in E^2$, также ортонормированный, так как имеет то же самое направление вращения, что и исходный базис, поскольку $\det f > 0$.

Обозначим угол между $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_1{}'$ через φ, получим матрицу перехода от первого базиса ко второму вида

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Доказательство теоремы 3.2.15. Применим теорему 3.2.5. Тогда существует ортонормированный репер, в котором формулы движения имеют вид, указанный в теореме 2.1.15, где $CC^t = E$.

Покажем, что при подходящем выборе другого ортонормированного базиса матрицу C можно привести к виду, указанному в формулировке теоремы.

Действительно, согласно лемме 3.2.1 и лемме 3.2.2 евклидово векторное пространство E^n можно разложить в прямую сумму одномерных и двумерных инвариантных подпространств.

(Впрочем первых, либо вторых может и не быть.) Обозначим через k число двумерных инвариантных подпространств. В одномерных подпространствах ортогональный оператор $\vec{f}$ действует с собственным числом 1 либо -1.

Будем строить новый базис таким образом: в качестве первых $n-k$ векторов возьмем векторы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-k}$, лежащие по одному в каждом из одномерных инвариантных подпространств. Все эти векторы попарно ортогональны. В каждом из двумерных инвариантных подпространств, согласно лемме 3.2.3, оператор $\vec{f}$ действует как поворот на угол φ_k. Выбрав в каждом двумерном инвариантном подпространстве ортонормированный базис, получим в сумме базис всего пространства. В полученном базисе матрица оператора $\vec{f}$ имеет вид почти такой, какой указан в формулировке теоремы. Отличие состоит в том, что минус единиц на диагонали может быть более одной.

Матрица поворота на угол π имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому четное число минус единиц на диагонали можно заменить такими блоками и оставить таким образом на диагонали лишь одну минус единицу. Поменяв нумерацию базисных векторов, можно получить вид матрицы, как в формулировке теоремы.

Следствие 3.2.5 *В евклидовом n-мерном пространстве при нечетном $n > 1$ любое вращение имеет ось положительной размерности.*

Доказательство. Из формул теоремы 3.2.15 и из условия вытекает, что у вращения есть по крайней мере одно одномерное инвариантное подпространство. Собственное число в нем равно единице, так как вращение есть движение первого рода. Следовательно все точки прямой, проходящей через неподвижную точку вращения в направлении этого подпространства неподвижны. Эта неподвижная прямая является осью вращения.

3.3 Движения евклидовой плоскости E^2

Согласно теореме 3.2.15 в E^2 матрица однородной части в формулах движения может принимать один из следующих видов:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Тогда в случае a) формулы движения либо

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

либо

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Формулы (3.8) – это формулы параллельного переноса, а формулы (3.9) – это формулы параллельного переноса на нулевой вектор, или, что то же самое, формулы тождественного преобразования.

В случае b) формулы движения принимают вид либо

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

либо

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

Формулы (3.11) – это формулы осевой симметрии, а формулы (3.10) – это формулы скользящей симметрии с осью, параллельной оси y и вектором $\vec{a}(0, a_2)$.

Наконец, в случае c) формулы движения принимают вид

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

однако заменой координат (переносом начала репера в другую точку) их можно привести к виду:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

В последнем случае движение является поворотом плоскости на угол φ, а при $\varphi = 0$ – центральной симметрией.

Полученные результаты можно сформулировать в виде теоремы:

Теорема 3.3.1 *На евклидовой плоскости существуют движения только следующих пяти видов : тождественное, параллельный перенос, поворот, осевая симметрия, скользящая симметрия.*

3.4 Движения евклидова пространства E^3

В евклидовом пространстве E^3 матрицы однородных частей движений могут быть следующих видов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Тогда как в предыдущем подразделе получаем классификацию движений в E^3.

a) – тождественное преобразование:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

b) – параллельный перенос:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

c) – симметрия относительно плоскости x_2Ox_3:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

$d)$ – скользящая симметрия относительно плоскости, параллельной плоскости x_2Ox_3:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

$e)$ – поворот пространства на угол φ вокруг оси x_1:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

$f)$ – винтовое движение с осью, параллельной оси x_1:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

$g)$ – поворот пространства на угол φ относительно некоторой оси с симметрией относительно плоскости, перпендикулярной этой оси:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

3.5 Линейные подобия

Определение 3.5.1 *Невырожденный линейный оператор f в действительном евклидовом векторном пространстве E называют оператором подобия, если*

$$\exists\ k > 0, \ \text{такой, что} \ \forall\ \vec{x} \in E \quad |f(\vec{x})| = k|\vec{x}|.$$

Такой оператор называют также линейным подобием с коэффициентом k.

Теорема 3.5.1 *Если f – линейное подобие с коэффициентом k, то*

$$\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in E \quad (f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y})) = k^2(\vec{x} \cdot \vec{y}) \ \text{и обратно.}$$

Доказательство. Пусть $g = k^{-1}f$, тогда $\forall\ \vec{x} \in E$

$$|g(\vec{x})| = |k^{-1}f(\vec{x})| = k^{-1}|f(\vec{x})| = k^{-1}k|\vec{x}| = |\vec{x}|.$$

Значит, g – изометрический оператор, а следовательно и ортогональный. Тогда

$$(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (g(\vec{x}) \cdot g(\vec{y})) = \left(k^{-1}f(\vec{x}) \cdot k^{-1}f(\vec{y})\right) = k^{-2}\left(f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y})\right),$$

откуда следует равенство

$$(f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y})) = k^2(\vec{x} \cdot \vec{y}).$$

Обратное утверждение следует из свойств скалярного произведения и определения длины вектора.

Теорема 3.5.2 *Множество линейных подобий в евклидовом векторном пространстве является группой. Она является подгруппой группы невырожденных линейных операторов $GL(E)$.*

Будем далее обозначать группу линейных подобий $GO(E)$.

Доказательство. Очевидно, что если f линейное подобие, то f – биекция. Кроме того, если f, g – линейные подобия с коэффициентами λ и μ соответственно, то

$$\forall\ \vec{x} \in E \quad |(g \circ f)(\vec{x})| = \mu|f(\vec{x})| = \mu\lambda|\vec{x}|.$$

Если f – линейное подобие с коэффициентом $k > 0$ и $\vec{y} = f(\vec{x})$. Тогда $|\vec{y}| = k|\vec{x}|$, откуда следует, что $|\vec{x}| = k^{-1}|\vec{y}|$. Поскольку $\vec{x} = f^{-1}(\vec{y})$, то $f^{-1}(\vec{y}) = k^{-1}|\vec{y}|$. Последнее равенство означает, что f^{-1} – линейное подобие с кэффициентом k^{-1}.

Следствие 3.5.1 *Отображение $\theta : f \longrightarrow k_f$ есть гомоморфизм группы линейных подобий $GO(E)$ в мультипликативную группу $(R_+, \cdot)$*

Следствие 3.5.2 *Ядро $\ker \theta$ гомоморфизма θ является группой $O(E)$ ортогональных операторов, следовательно $O(E)$ есть нормальная подгруппа группы линейных подобий.*

Векторная гомотетия h_k является примером линейного подобия с коэффициентом $|k|$. Группу векторных гомотетий будем обозначать Z, а если $k > 0$, то Z^+.

Теорема 3.5.3 *Группа линейных подобий есть прямое произведение своих нормальных подгрупп Z^+ и $O(E)$.*

Доказательство. Для этого докажем, что любое линейное подобие разлагается в композицию гомотетии и ортогонального преобразования. Кроме того, такое разложение единственно.

Пусть f – линейное подобие с коэффициентом $k > 0$ и $h_{k^{-1}}$ – векторная гомотетия. Тогда

$$\forall \vec{x} \in E \quad |(h \circ f)(\vec{x})| = k^{-1}k|\vec{x}|.$$

Так как $k^{-1}k = 1$, то $h \circ f$ – изометрический оператор. Обозначим его I. Тогда $f = h^{-1} \circ I$. Первая часть доказана.

Докажем теперь единственность разложения. Предположим, что f разложено в композицию гомотетии и изометрии двумя способами: $f = h \circ I$ и $f = h' \circ I'$. Тогда $h \circ I = h' \circ I'$ и следовательно $h' = h \circ I \circ (I')^{-1}$. Домножив обе части последнего равенства слева на h^{-1}, получим

$$h^{-1} \circ h' = h^{-1} \circ h \circ I \circ (I')^{-1} = I \circ (I')^{-1},$$

откуда следует, что композиция гомотетий $h^{-1} \circ h'$ является изометрией. Следовательно, отношение положительных коэффициентов этих гомотетий равно единице.

Из равенства коэффициентов гомотетий следует, что $h = h'$, откуда вытекает, что

$$I = h^{-1} \circ f = (h')^{-1} \circ f = I'.$$

Из равенства гомотетий и равенства изометрий следует единственность разложения.

Следующая лемма нужна для доказательства теоремы, в которой формулируется признак линейного подобия.

Лемма 3.5.1 *Пусть E – евклидово векторное пространство и H – векторная гиперплоскость в E. Тогда:*

а) существует линейная форма g, определенная на E, такая, что $H = g^{-1}(0)$.

б) если $H = g_1^{-1}(0)$ для некоторой линейной формы g_1, то существует скаляр $k \neq 0$, такой что $g_1 = kg$.

Доказательство.[13]

Сначала докажем а). Пусть $\vec{e}$ – орт, перпендикулярный H. Тогда определим функцию $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ по правилу: $g(\vec{x}) = (\vec{e} \cdot \vec{x})$. Легко видеть, что $g(\vec{x})$ – линейная функция и $g(\vec{e}) = 1$. Кроме того, $\forall \vec{y} \in H \quad (\vec{e} \cdot \vec{y}) = 0$, следовательно $g(\vec{y}) = 0$, откуда $g^{-1}(0) = H$.

Теперь докажем б). Пусть g_1 – линейная форма на E, такая, что $H = g_1^{-1}(0)$. Тогда $g_1(\vec{e}) = k \neq 0$, так как $\vec{e} \notin H$. Тогда прямое вычисление показывает, что $\forall \vec{x} \in E \quad (g_1 - kg)(\vec{x}) = 0$, откуда $g_1 = kg$. Лемма доказана.

Теорема 3.5.4 *Если невырожденный линейный оператор f в евклидовом пространстве E любые ортогональные векторы отображает на ортогональные, то он является линейным подобием.*

Доказательство. Заметим, что в теореме подразумевается, что $\dim E \geqslant 2$, чтобы можно было говорить об ортогональности векторов.

Теорема будет доказана, если мы найдем скаляр k, о котором говорится в теореме 3.5.1.

[13] Более подробное доказательство смотри *Ж.Дьедонне.* Линейная алгебра и элементарная геометрия, М: Наука, 1972, стр 68.

Зафиксируем $\vec{x} \neq 0$. Тогда $\varphi(\vec{y}) = (f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}))$ – линейная форма на E. Обозначим через H векторную гиперплоскость в E, ортогональную к $\vec{x}$. Тогда $\varphi^{-1}(0) = H$. С другой стороны отображение ψ, определенное по правилу $\psi(\vec{y}) = (\vec{x} \cdot \vec{y})$, есть также линейная форма на E, такая, что $\psi^{-1}(0) = H$. Следовательно, по лемме 3.5.1 существует скаляр $k \neq 0$ такой, что

$$(f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y})) = k(\vec{x} \cdot \vec{y})$$

для всех $\vec{y} \in E$.

Такой скаляр найдется при любом фиксированном $\vec{x} \in E,\ \vec{x} \neq 0$. Значит можно говорить, что k есть функция от $\vec{x}$.

Итак

$$\forall\ \vec{x} \neq 0,\ \exists\ k(\vec{x}) \neq 0,\ \text{такой, что}\ (f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y})) = k(\vec{x})(\vec{x} \cdot \vec{y}).$$

Покажем, что на самом деле этот скаляр $k(\vec{x})$ не зависит от $\vec{x}$.

Пусть $\vec{x}$ и $\vec{z}$ – линейно независимые векторы. Тогда $\forall\ \vec{y} \in E$

$$(f(\vec{x}+\vec{z}) \cdot f(\vec{y})) = [k(\vec{x}+\vec{z})]\,((\vec{x}+\vec{z}) \cdot \vec{y}) = [k(\vec{x}+\vec{z})]\,(\vec{x} \cdot \vec{y}) + [k(\vec{x}+\vec{z})]\,(\vec{z} \cdot \vec{y}). \tag{3.21}$$

С другой стороны, поскольку f – линейный оператор, то

$$(f(\vec{x}+\vec{z}) \cdot f(\vec{y})) = k(\vec{x})(\vec{x} \cdot \vec{y}) + k(\vec{z})(\vec{z} \cdot \vec{y}). \tag{3.22}$$

Так как левые части (3.21) и (3.22) равны, то равны и правые части:

$$[k(\vec{x}+\vec{z}\ )]\,(\vec{x} \cdot \vec{y}) + [k(\vec{x}+\vec{z}\ )]\,(\vec{z} \cdot \vec{y}) = k(\vec{x})(\vec{x} \cdot \vec{y}) + k(\vec{z})(\vec{z} \cdot \vec{y}). \tag{3.23}$$

Преобразуя (3.23), получаем $\forall\ \vec{y} \in E$

$$\{[k(\vec{x}+\vec{z}) - k(\vec{x})]\,\vec{x} + [k(\vec{x}+\vec{z}) - k(\vec{z})]\,\vec{z}\} \cdot \vec{y} = 0 \tag{3.24}$$

Мы видим, что вектор, записанный в фигурных скобках (3.24), ортогонален к любому вектору из E, следовательно он является нулевым вектором. Получаем

$$[k(\vec{x}+\vec{z}) - k(\vec{x})]\,\vec{x} + [k(\vec{x}+\vec{z}) - k(\vec{z})]\,\vec{z} = \vec{0}, \tag{3.25}$$

откуда, в силу линейной независимости векторов $\vec{x}$ и $\vec{z}$, получаем

$$k(\vec{x}+\vec{z}) = k(\vec{x}) = k(\vec{z}).$$

Покажем, наконец, что $\forall\ \vec{u} \in E,\ \vec{u} \neq \vec{0}$, скаляр $k(\vec{u})$ постоянный.

Выберем произвольный базис $\{\vec{e}_i\}$ в E. Тогда из доказанного выше следует, что для всех базисных векторов $\vec{e}_i$ скаляры $k(\vec{e}_i)$ равны. Обозначим это общее значение через k.

Тогда при любом $i = 1, \ldots, n$

$$k(\vec{u}) = k\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i\right) = k(\alpha_i \vec{e}_i). \tag{3.26}$$

Пусть $i \neq j$. Тогда, с одной стороны

$$f(\alpha_i \vec{e}_i) \cdot f(\vec{e}_j) = k(\alpha_i \vec{e}_i)(\alpha_i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = k(\alpha_i \vec{e}_i)\alpha_i(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \tag{3.27}$$

С другой стороны, учитывая линейность f,

$$f(\alpha_i \vec{e}_i) \cdot f(\vec{e}_j) = \alpha_i f(\vec{e}_i) \cdot f(\vec{e}_j) = \alpha_i k(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \tag{3.28}$$

Так как левые части (3.27) и (3.28) равны, то равны и правые части:

$$k(\alpha_i \vec{e}_i)\alpha_i(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \alpha_i k(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j),$$

откуда следует $k(\alpha_i \vec{e}_i) = k$. Из (3.26) следует теперь, что $k(\vec{u}) = k$.

По теореме 3.5.1 f – линейное подобие (с коэффициентом $\sqrt{k}$).

Теорема 3.5.5 *Пусть f линейное подобие. Тогда в любом ортонормированном базисе формулы f имеют вид:*

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где $C^t = C^{-1}$.

Доказательство. По теореме 3.5.3 $f = h \circ I$, где h – векторная гомотетия, а I – изометрия. Тогда $f(\vec{x}) = (h \circ I)(\vec{x})$ и учитывая формулы изометрии и гомотетии в ортонормированном базисе, получаем, что требуется.

3.6 Подобия

Определение 3.6.1 *Биекция f евклидова пространства E на себя называется подобием с коэффициентом $k > 0$, если $\exists\ k > 0$, такое, что*

$$\forall\ A, B \in E \quad |f(A)f(B)| = k|AB|.$$

Теорема 3.6.1 *Для того, чтобы биекция f евклидова пространства E на себя была подобием с коэффициентом $k > 0$, необходимо и достаточно, чтобы f была аффинным преобразованием и $\vec{f} \in GO(E)$.*

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть f – биекция. для которой $|A'B'| = k|AB|$, где $A' = f(A)$ и $B' = f(B)$. Пусть $H_{O,k^{-1}}$ – гомотетия с центром в произвольной точке O и коэффициентом k^{-1}. Тогда $H_{O,k^{-1}} \circ f$ есть движение, поскольку сохраняет расстояние между любыми двумя точками. Следовательно $H_{O,k^{-1}} \circ f$ – аффинное и его однородная часть является изометрическим линейным оператором. Обозначим $H_{O,k^{-1}} \circ f = \partial$. Тогда преобразование $f = (H_{O,k^{-1}})^{-1} \circ \partial$ также аффинное, как композиция аффинных. Кроме того, $\vec{f} = \overrightarrow{H_{O,k}} \circ \overrightarrow{\partial}$ и, значит, $\vec{f}(\vec{x}) = k\overrightarrow{\partial}(\vec{x})$.

Следовательно $|\vec{f}(\vec{x})| = k|\vec{x}|$, так как $\overrightarrow{\partial}$ – изометрический оператор. В итоге получили, что f – аффинное и $\vec{f}$ – линейное подобие, что и требовалось доказать.

Следствие 3.6.1 *Подобие в ортонормированном репере задается формулами:*

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad , \text{ где } C^t = C^{-1}.$$

Следствие 3.6.2 *Всякое подобие можно разложить в композицию гомотетии с некоторым центром и движения.*

Замечание 1. Такое разложение не единственное.

Замечание 2. В таком разложении коэффициент гомотетии равен коэффициенту подобия.

Теорема 3.6.2 *Множество всех подобий евклидова пространства является группой, обозначаемой далее $SimE$.*

Доказательство. Очевидно в силу того, что при композиции подобий их коэффициенты перемножаются, а коэффициенты взаимно обратных подобий взаимно обратны.

Следствие 3.6.3 *В группе подобий любая группа гомотетий с фиксированным центром является подгруппой. В группе подобий группа движений является подгруппой.*

Как и в случае движения, можно определить понятие *подобия первого рода.* Также можно доказать, что множество всех подобий первого рода есть подгруппа группы подобий.

Теорема 3.6.3 *Всякое аффинное преобразование евклидовой плоскости можно разложить в композицию некоторого родства и некоторого подобия.*

Доказательство. Аффинное преобразование евклидовой плоскости можно задать указанием пары соответствующих треугольников: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$. На луче $[A_1B_1)$ существует единственная точка B_2 такая, что $|A_1B_2| = |AB|$. Пусть $\triangle A_1B_2C_2 = \triangle ABC$ и пусть $k > 0$ такое, что $|A_1B_1| = k|A_1B_2|$. Обозначим $C_3 = H_{A_1,k}(C_2)$. Тогда $\triangle A_1B_1C_3$ подобен $\triangle ABC$. Следовательно существует подобие $p : \triangle ABC \longrightarrow \triangle A_1B_1C_3$. Обозначим через r родство с осью $s = (A_1B_1)$ и парой соответствующих точек C_3 и $C_1 = r(C_3)$. Тогда аффинное преобразование $f = r \circ p$ таково, что $f : \triangle ABC \longrightarrow \triangle A_1B_1C_1$.

Теорема доказана.

Теорема 3.6.4 *Пусть E – евклидово пространство над полем действительных чисел. Для того, чтобы биекция f евклидова пространства E, $(\dim E \geq 2)$ на себя была подобием с коэффициентом $k > 0$, необходимо и достаточно, чтобы f сохраняла перпендикулярность прямых.*

Доказательство. 1. Необходимость. Если f – подобие, то по теореме 3.6.1 преобразование f – аффинное и его однородная часть $\vec{f}$ является линейным подобием. Тогда при данном преобразовании, во-первых, прямые отображаются на прямые, а, во-вторых, однородная часть $\vec{f}$ ортогональные векторы отображает на ортогональные. Поскольку перпендикулярность прямых определяется направляющими векторами, то необходимость доказана.

2. Достаточность. Пусть f – биекция евклидова пространства E на себя, сохраняющая перпендикулярность прямых. Прежде всего покажем, что f сохраняет коллинеарность точек. Предположим, что точки A, B и C лежат на одной прямой a, откуда следует, что $(AC) = (AB)$. Возьмем точку D так, чтобы прямые AB и AD были перпендикулярны. Будем обозначать штрихами образы точек и прямых при f. Тогда, с одной стороны, $A'B' \perp A'D'$, а, с другой стороны $A'C' \perp A'D'$, так как $(AC) = (AB)$. Теперь видно, что $(A'C') = (A'B')$, откуда следует, что $C' \in (A'B')$. Сохранение коллинеарности точек показано.

Применим теперь теорему 2.3.2. Получим, что f – аффинное, а однородная часть $\vec{f}$ сохраняет перпендикулярность векторов, из теоремы 3.5.4 следует, что $\vec{f}$ является линейным подобием. Следовательно по теореме 3.6.1 биекция f является подобием.

Докажем теперь весьма интересную теорему, которая называется *теоремой о неподвижной точке подобия.*

Теорема 3.6.5 *Пусть p – подобие евклидова пространства, не являющееся движением. Тогда p имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство.[14] Существование и единственность неподвижной точки доказывают в три этапа.

а) Докажем теорему в предположении, что коэффициент подобия $k < 1$. Для этого построим, используя подобие p, некоторую точку, про которую сможем доказать, что она неподвижна при p.

Прежде всего отметим, что для любых точек A и B можно утверждать, что

$$|p(A)p(B)| = k|AB| \text{ и } k < 1 \Longrightarrow |p(A)p(B)| < |AB|.$$

Пусть X_0 – произвольная точка. Обозначим $p(X_0) = X_1, p(X_1) = X_2, p(X_2) = X_3$, и так далее, до бесконечности. Рассмотрим последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$.

Покажем, что эта последовательность $\{X_n\}$ фундаментальная.[15] Положив для определенности $m > n$, запишем:

$$|X_nX_m| = |p(X_{n-1})p(X_{m-1})| = k|X_{n-1}X_{m-1}| = k^2|X_{n-2}X_{m-2}| = \ldots = k^n|X_0X_{m-n}|. \quad (3.29)$$

[14]Этот метод доказательства в математике используется в более общей ситуации для отображений метрических пространств, которые называют *сжимающими.*

[15]Иначе фундаментальные последовательности в литературе называют последовательностями Коши (смотри, например, [20] .)

Однако, учитывая тот факт, что длина отрезка, соединяющего начало и конец ломаной, не больше длины всей ломаной, получаем из (3.29):

$$|X_nX_m| = k^n|X_0X_{m-n}| \leqslant k^n\left(|X_0X_1| + |X_1X_2| + \ldots + |X_{m-n-1}X_{m-n}|\right) =$$
$$= k^n|X_0X_1|(1 + k + k^2 + \ldots + k^{m-n-1}). \tag{3.30}$$

Дополняя в правой части (3.30) сумму в круглых скобках до бесконечной геометрической прогрессии и используя формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $k < 1$ получаем:

$$|X_nX_m| < k^n|X_0X_1|(1 + k + k^2 + \ldots + k^{m-n-1} + \ldots) = k^n|X_0X_1|\frac{1}{1-k}. \tag{3.31}$$

Правая часть неравенства (3.31) стремится к нулю при возрастании n до бесконечности. Следовательно,

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N, \text{ что при всех } \ n > N \quad |X_0X_1|\frac{k^n}{1-k} < \varepsilon. \tag{3.32}$$

Тогда для любых $m > n > N \quad |X_nX_m| < \varepsilon$. Это доказывает фундаментальность последовательности.

Поскольку известно, что в евклидовом пространстве всякая фундаментальная последовательность точек сходится (имеет предел), то обозначим $\lim\limits_{n\to\infty}\{X_n\} = O$.

Теперь докажем непрерывность подобия p в любой точке евклидова пространства. Иначе говоря, мы должны показать, что

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \text{ такое, что } \ |AX| < \delta \Longrightarrow |p(A)p(X)| < \varepsilon.$$

Для доказательства достаточно взять за δ число $\frac{\varepsilon}{k}$.

Покажем, что точка $O = \lim\limits_{n\to\infty}\{X_n\}$ и есть неподвижная точка подобия p.

В силу непрерывности p

$$p(O) = p(\lim_{n\to\infty}\{X_n\}) = \lim_{n\to\infty}\{p(X_n)\} = \lim_{n\to\infty}\{X_{n+1}\} = \lim_{n\to\infty}\{X_n\} = O.$$

Существование неподвижной точки O доказано.

б) Рассмотрим теперь случай, когда $k > 1$. В этом случае подобие p^{-1} имеет коэффициент $k_1 = \frac{1}{k} < 1$ и к нему применимы выводы случая а). Существует точка O такая, что $p^{-1}(O) = O$. Но тогда $p(O) = p(p^{-1}(O)) = O$. Итак, подобие имеет неподвижную точку и в этом случае.

в) Докажем, что у всякого подобия неподвижная точка единственная. Предположим, что точка O_1 также неподвижная. Тогда $p(O) = O$ и $p(O_1) = O_1$.

Теперь, с одной стороны, $|p(O)p(O_1)| = k|OO_1|$, а с другой стороны $|p(O)p(O_1)| = |OO_1|$, откуда следует $k|OO_1| = |OO_1|$. Так как $k \neq 1$, то $|OO_1| = 0 \Longrightarrow O = O_1$, что и требовалось доказать.

4 Квадратичные формы

В данном и следующем разделе мы приведем краткий справочный материал. За всеми подробностями можно обращаться к имеющейся литературе. Теоретический материал хорошо изложен в [10], [19], [16], а практический — в известных задачниках, таких как [17], [11].

4.1 Основные определения и теоремы

Определение 4.1.1 *Числовая функция $f(\vec{x}, \vec{y})$ двух векторных аргументов называется билинейной, если она линейна по каждому аргументу.*

Доказательство следующей теоремы можно прочитать в [10], глава 4, §3, либо в [9].

Теорема 4.1.1 *В фиксированном базисе $\{\vec{e}_i\}$ значение билинейной формы $f(\vec{x}, \vec{y})$ на векторах $\vec{x}(x_1, \ldots, x_n)$ и $\vec{y}(y_1, \ldots, y_n)$ находится по формуле:*

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \text{ где } \quad a_{ij} = f(\vec{e_i}, \vec{e_j}).$$

Матрицу A с элементами a_{ij} называют *матрицей билинейной формы.*

Определение 4.1.2 *Билинейная форма $f(\vec{x}, \vec{y})$ называется симметричной, если для любых векторов $\vec{x}, \vec{y}$*

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x}).$$

В случае симметричной билинейной формы ее коэффициенты симметричны, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$. Таким образом матрица симметричной билинейной формы симметрична.

Определение 4.1.3 *Функция $g(\vec{x})$ называется квадратичной формой, если*

$$g(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x}),$$

где $f(\vec{x}, \vec{y})$ – симметричная билинейная форма.

Определение 4.1.4 *Рангом квадратичной формы называют ранг ее матрицы.*

Ранг квадратичной формы не зависит от от выбора базиса, в котором находится матрица формы. Доказательство этого можно прочесть в [10], глава 4, §3.

4.2 Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Определение 4.2.1 *Говорят, что квадратичная форма имеет в некотором базисе канонический вид, если в этом базисе все коэффициенты $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.*

Очевидно, что если в некотором базисе квадратичная форма имеет канонический вид, то ее матрица имеет в этом базисе диагональный вид. Такой базис далеко не единственный.

Теорема 4.2.1 *Для любой квадратичной формы существует базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид:*

$$g(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{rr}x_r^2, \quad \text{где r – ранг формы.}$$

Существование такого базиса доказывается в теореме Ж. Лагранжа (1736 – 1813) (смотри [10], глава 4, §5, или в теореме К.Якоби (1804 – 1851) [10], глава 4, §8 либо [8].)

Методы нахождения таких базисов носят названия метода Лагранжа и метода Якоби.

Определение 4.2.2 *Число положительных и число отрицательных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы называют соответственно положительным и отрицательным индексом формы.*

Следующая теорема принадлежит Д. Сильвестру (1814 – 1897) и носит название *закон инерции.*

Теорема 4.2.2 *Положительный и отрицательный индексы квадратичной формы не зависят от выбора базиса, в котором она приведена к каноническому виду.*

Доказательство теоремы можно также прочитать в [10], глава 4, §7, либо в [8].

Определение 4.2.3 *Говорят, что квадратичная форма имеет в некотором базисе нормальный вид, если в этом базисе все коэффициенты* $a_{ij} = 0$ *при* $i \neq j$, *а коэффициенты* a_{ii} *равны либо* 1, *либо* -1, *либо* 0.

Теорема 4.2.3 *Для любой квадратичной формы существует базис, в котором квадратичная форма имеет нормальный вид:*

$$g(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - x_{k+2}^2 - \ldots - x_r^2, \quad \text{где r – ранг формы.}$$

4.3 Квадратичные формы в евклидовом пространстве

Теорию по материалу данного подраздела можно прочесть, например, в [10], глава 8, §1-4, §11, а также глава 9, §1-4.

Определение 4.3.1 *Линейный оператор* φ *в евклидовом пространстве называют самосопряженным, если*

$$\varphi(\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \varphi(\vec{y})$$

Теорема 4.3.1 *Для того, чтобы линейный оператор в евклидовом пространстве был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы в некотором ортонормированном базисе его матрица была симметричной.*

Теорема 4.3.2 *Собственные значения самосопряженного оператора в евклидовом пространстве действительны.*

Теорема 4.3.3 *Собственные векторы самосопряженного оператора в евклидовом пространстве, соответствующие его различным собственным числам, ортогональны.*

Теорема 4.3.4 *Для любого самосопряженного оператора в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого оператора.*

Теорема 4.3.5 *Если квадратичная форма и линейный оператор в некотором базисе имеют одну и ту же матрицу, то их матрицы в любом базисе совпадают.*

Теорема 4.3.6 *Для любой квадратичной формы в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором она имеет канонический вид.*

4.4 Приведение пары форм

Определение 4.4.1 *Квадратичную форму* g *называют положительно определенной, если ее значение* $g(\vec{x}) > 0$ *для любого ненулевого вектора* $\vec{x}$.

Теорема 4.4.1 *Для положительной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы были положительны.*

Доказательство изложено в [10], глава 4, §9, или в [8], [19], глава14, §126.

Теорема 4.4.2 *Пусть даны две квадратичные формы,* f *и* g, *причем форма* g *положительно определенная. Тогда существует базис, в котором обе формы имеют канонический вид.*

Доказательство теоремы изложено в [8].

5 Квадрики

5.1 Квадрики в аффинном пространстве

Теоретический материал этого подраздела хорошо изложен, например в [19], глава16, §133, 141. Специально для студентов ОЗО написана книга [16], глава 3, §19-20.

Определение 5.1.1 *Квадрикой в аффинном пространстве называют множество точек, координаты которых в некотором репере удовлетворяют уравнению вида*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{k=1}^{n} b_kx_k + c = 0, \quad \text{где} \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \text{и} \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \neq 0.$$

Теорема 5.1.1 *В любом аффинном репере уравнение квадрики есть уравнение второй степени указанного вида.*

Определение 5.1.2 *Каноническим видом уравнения квадрики в аффинном пространстве называют один из следующих:*

$$1) \qquad \sum_{i=1}^{m} a_ix_i^2 = 1, \quad \text{где} \quad m \leq n$$

$$2) \qquad \sum_{i=1}^{m} a_ix_i^2 = 0, \quad \text{где} \quad m \leq n$$

$$3) \qquad \sum_{i=1}^{m} a_ix_i^2 = 2x_{m+1}, \quad \text{где} \quad m \leq n$$

Определение 5.1.3 *Нормальным видом уравнения квадрики в аффинном пространстве называют такой канонический вид, в котором коэффициенты $a_i = \pm 1$.*

Теорема 5.1.2 *Для любой квадрики в аффинном пространстве существует такой репер, в котором уравнение квадрики имеет канонический вид.*

5.2 Квадрики в евклидовом пространстве

Теорема 5.2.1 *Для любой квадрики в евклидовом пространстве существует такой ортонормированный репер, в котором уравнение квадрики имеет канонический вид.*

Доказательство теоремы и соответствующие приемы нахождения такого репера можно прочесть в [16], глава 4, §22-23.