Волгоградский государственный педагогический университет

Кафедра алгебры, геометрии и информатики

Элементы проективной геометрии

Методическая разработка

Составил доцент Крячков Ю.Г.

Волгоград
2009

Содержание

Введение

Данная методическая разработка предназначена студентам стационара и ОЗО математического факультета. Надеемся, что она окажется полезной и молодым преподавателям, впервые читающим курс лекций по проективной геометрии.

Предполагаются известными основные понятия линейной алгебры. Проективное пространство построено на базе векторного, которое определяется над произвольным полем. Такое проективное пространство называют проективным пространством, порожденным векторным пространством. Подобный подход использован в источниках [1], [2], [5], [8], [7], [9]. Иной подход использован в книге [4].

Заметим, что если в определении или формулировке теоремы поле явно не указано, оно предполагается произвольным. Если же свойства поля существенны для утверждения теоремы, поле явно указывается. При первом чтении проективное пространство всегда можно предполагать действительным. Кроме того, размерность пространства всегда можно считать не превосходящей трех, хотя в формулировках говорится об n-мерном проективном пространстве. Таким образом достигается необходимая общность формулировок при их компактности.

Отметим также, что проективные отображения рассматриваются лишь как отображения прямой на прямую и плоскости на плоскость.

Материал разбит на разделы и подразделы. Нумерация определений и теорем производится заново в каждом разделе. Так, например, ссылка (Лемма 2.3) означает третью лемму второго раздела.

Разработка снабжена достаточно большим списком литературы, на которую в тексте производятся многочисленные ссылки. Конечно, этот список далеко не полный. Отдельные теоремы приведены без доказательства. В этом случае указаны источники, где эти доказательства можно прочитать.

Сделаем краткий обзор литературы, указанной в конце разработки. Книги [5] [7] и [8] рассчитаны на подготовленного читателя. Первая вообще является научной монографией. Все три книги написаны известными французскими учеными, профессорами ведущих университетов. Книги [9], [10] и [11], [12] являются учебными пособиями для университетов.

Специально для студентов педагогических вузов предназначены [1], [2] и [4]. Последняя из указанных, учебник Н.Ф.Четверухина, построен на другом понимании проективного пространства. Он несколько устарел, однако написан простым и понятным языком, содержит большой материал и потому мы рекомендуем его в числе прочих. Пособие [3] написано специально для студентов ОЗО, а [17], [16], [13] и [14] представляют собой задачники. В книге [14] приведены решения задач по всем темам. Единственным недостатком этого пособия является сравнительно небольшое количество задач на вычисление. Напротив, задачник [13] содержит преимущественно задачи аналитического плана. [17] и [16] в этом отношении более сбалансированы, они содержат задачи и на доказательство, и на построение, и на вычисление.

Материал задачников в значительной мере перекрывается, хотя они написаны разными авторами и творческими коллективами. Отметим задачник [15] для студентов ОЗО, он содержит необходимый минимум задач.

Центральными понятиями этого раздела геометрии являются понятие *проективного пространства* и *проективного отображения (преобразования)*. Мы обращаем на это внимание читателей. Рекомендуем внимательно разобрать и осмыслить определения этих понятий, разобрать достаточное количество примеров, причем использовать для этого различные источники, указанные в списке литературы.

Отметим, что главным критерием понимания материала является решение задач. Только при получении навыков самостоятельного решения задач достигается необходимая глубина его освоения.

1 Проективное пространство

1.1 Определение и модели проективного пространства

В основе определения проективного пространства в данной методической разработке лежит подход, изложеный в [5]. Аналогичного подхода придерживаются авторы [9] и [10].

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{F}$. На множестве ненулевых векторов $V \setminus \{\vec{0}\}$ определим отношение ρ следующим образом:

$$\vec{x}\rho\vec{y} \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\} \text{ такой, что } \vec{x} = \lambda\vec{y}.$$

Отношение ρ называют отношением коллинеарности. Легко показать, что ρ есть отношение эквивалентности, а следовательно можно говорить о фактормножестве по этому отношению, то есть о множестве, элементами которого в данном случае являются классы ненулевых коллинеарных векторов.

Определение 1.1 *Проективным пространством, порожденным векторным пространством V, называют фактормножество множества $(V \setminus \{\vec{0}\})$ по отношению коллинеарности ρ.*

Свойства проективного пространства существенно зависят от свойств поля $\mathbb{F}$, поэтому говорят о *проективном пространстве над полем* $\mathbb{F}$. В частности, если поле $\mathbb{F}$ есть поле действительных чисел, проективное пространство называют действительным, а если $\mathbb{F}$ есть поле комплексных чисел, комплексным проективным пространством.

Проективное пространство называют n-мерным, если размерность порождающего его векторного пространства V равна $n+1$. При $n = 1$ проективное пространство называют проективной прямой, а при $n = 2$ — проективной плоскостью. В дальнейшем, если поле $\mathbb{F}$ произвольное, n-мерное проективное пространство будем обозначать P^n, а его элементы называть *точками*. Далее точки проективного пространства будем обозначать большими латинскими буквами.

Если ненулевой вектор $\vec{m}$ принадлежит классу эквивалентности M (точке M), то в этом случае будем говорить, что $\vec{m}$ *порождает* точку M и записывать это так: $M = \pi(\vec{m})$. Здесь буквой π обозначена каноническая проекция множества $V^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$ на свое фактормножество — проективное пространство P^n. Далее вектор, порождающий точку A, будем обозначать символом $\vec{A}$. Примерно тот же смысл будем вкладывать в обозначение $P^n = \pi(V^{n+1} \setminus \{\vec{0}\})$.

Некоторое множество $\mathcal{P}$ называют *моделью* проективного пространства P^n, если существует биекция

$$\xi : P^n \longrightarrow \mathcal{P}$$

этого проективного пространства P^n на $\mathcal{P}$. Элементы множества $\mathcal{P}$ также принято называть *точками.*

В качестве примера рассмотрим несколько моделей проективного пространства P^n.

1. *Связка прямых.* Пусть S — произвольная точка в $(n+1)$-мерном аффинном пространстве $\mathcal{A}^{n+1}$. Рассмотрим в качестве множества $\mathcal{P}$ связку прямых, проходящих через точку S, а в качестве биекции ξ — отображение, которое каждой точке P^n (каждому классу ненулевых коллинеарных векторов в $V^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$) ставит в соответствие ту прямую связки, для которой все векторы класса служат направляющими векторами.

2. *Сфера с диаметрально отождествленными точками.* Рассмотрим единичную гиперсферу в $(n + 1)$-мерном евклидовом пространстве и связку прямых, проходящих через центр гиперсферы. Возьмем в качестве множества $\mathcal{P}$ множество всех пар диаметрально противоположных точек гиперсферы, а в качестве биекции ξ — отображение, которое каждой точке P^n (каждому классу ненулевых коллинеарных векторов в $V^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$) ставит в соответствие ту пару диаметрально противоположных точек гиперсферы, которая получается при пересечении гиперсферы с прямой связки, для которой все векторы класса служат направляющими векторами.

3. *Расширенная гиперплоскость.* Дополним аффинную гиперплоскость в $(n + 1)$-мерном аффинном пространстве $\mathcal{A}^{n+1}$, присоединив к ее точкам новые, так называемые "бесконечно удаленные". Каждая такая "бесконечно удаленная точка" является пучком параллельных прямых на аффинной гиперплоскости. Возьмем в качестве множества

$\mathcal{P}$ множество точек аффинной гиперплоскости вместе с присоединенными к ним "бесконечно удаленными". Будем называть $\mathcal{P}$ *расширенной гиперплоскостью.*

Возьмем связку прямых, центр которой не лежит в данной аффинной гиперплоскости. Рассмотрим отображение η, которое каждой обычной точке аффинной гиперплоскости ставит в соответствие прямую связки, проходящую через эту точку, а "бесконечно удаленной" точке — ту прямую связки, которая параллельна пучку, представляющему данную "бесконечно удаленную" точку. В качестве ξ возьмем отображение, обратное к η.

4. *Числовая модель.* Этот пример следует разобрать после изучения подраздела о проективных координатах.

   Рассмотрим $\mathbb{F}^{n+1}$, из которого удален нулевой набор $(0, 0, \ldots, 0)$. Пусть элементами множества $\mathcal{P}$ служат классы ненулевых пропорциональных наборов, а биекцией ξ — отображение, которое каждой точке P^n (каждому классу ненулевых коллинеарных векторов в $V^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$) ставит в соответствие проективные координаты этой точки относительно некоторого фиксированного проективного репера.

Полагая $n = 2$, а $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, получим модели двумерного действительного проективного пространства или, говоря иначе, действительной проективной плоскости. (Смотри также [10]).

1. Пусть S — произвольная точка в трехмерном аффинном пространстве. Рассмотрим в качестве множества $\mathcal{P}$ связку прямых, проходящих через точку S, а в качестве биекции ξ — отображение, которое каждой точке P^2 (каждому классу ненулевых коллинеарных векторов в $V^3 \setminus \{\vec{0}\}$) ставит в соответствие ту прямую связки, для которой все векторы класса служат направляющими векторами.

2. Рассмотрим единичную сферу в трехмерном евклидовом пространстве и связку прямых, проходящих через центр сферы. Возьмем в качестве множества $\mathcal{P}$ множества всех пар диаметрально противоположных точек сферы, а в качестве биекции ξ — отображение, которое каждой точке P^2 (каждому классу ненулевых коллинеарных векторов в $V^3 \setminus \{\vec{0}\}$) ставит в соответствие ту пару диаметрально противоположных точек сферы, которая получается при пересечении сферы с прямой связки, для которой все векторы класса служат направляющими векторами.

3. Дополним аффинную плоскость $\mathcal{A}^2$, присоединив к ее точкам новые, так называемые "бесконечно удаленные". Каждая "бесконечно удаленная" точка — это пучок параллельных прямых на аффинной плоскости. Возьмем в качестве множества $\mathcal{P}$ точки аффинной плоскости вместе с присоединенными. Возьмем связку прямых, центр которой не лежит в данной аффинной плоскости. Рассмотрим отображение η, которое каждой точке аффинной плоскости ставит в соответствие прямую связки, проходящую через эту точку, а "бесконечно удаленной" точке — ту прямую связки, которая параллельна пучку, представляющему данную "бесконечно удаленную" точку. В качестве ξ возьмем отображение, обратное к η. Так построенная модель по своей сути и была исторически первой моделью проективной плоскости.

4. Рассмотрим $\mathbb{R}^3$, из которого удалена нулевая тройка $(0, 0, 0)$. Пусть элементами множества $\mathcal{P}$ служат классы ненулевых пропорциональных троек, а биекцией ξ — отображение, которое каждой точке P^2 (каждому классу ненулевых коллинеарных векторов в $V^3 \setminus \{\vec{0}\}$) ставит в соответствие проективные координаты этой точки относительно некоторого фиксированного проективного репера.

1.2 Проективные координаты

Определение 1.2 *Два базиса* $\{\vec{u}_i\}$ *и* $\{\vec{v}_i\}$*, где* $i = 1, 2, \ldots, n = \dim V$*, называются гомотетичными, если*

$$\exists \lambda \neq 0 \text{ такое, что } \forall\, i \quad \vec{v}_i = \lambda \vec{u}_i.$$

Определение 1.3 *Проективным репером называется класс гомотетичных базисов векторного пространства* V.

Пусть M — точка n-мерного проективного пространства P^n , а $\overrightarrow{M}$ — какой-либо порождающий ее вектор. Если $\mathcal{R}$ — проективный репер, а $\sigma \in \mathcal{R}$ — базис векторного пространства V, то вектор $\overrightarrow{M}$ имеет в σ определенный набор координат $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$. При переходе к другому базису из того же репера координаты вектора $\overrightarrow{M}$ умножаются на некоторое число $\lambda \neq 0$. Таким образом при задании репера $\mathcal{R}$ каждой точке M соответствует класс ненулевых пропорциональных наборов $(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})$. Очевидно, что этот класс не зависит выбора вектора, порождающего точку M.

Определение 1.4 *Координатами точки M в проективном репере $\mathcal{R}$ называют класс*

$$(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})$$

ненулевых пропорциональных наборов, содержащий координаты $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})_{\sigma\in\mathcal{R}}$ некоторого вектора $\overrightarrow{M}$, порождающего данную точку.

Координаты точки записывают следующим образом:

$$M(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})_{\mathcal{R}}.$$

В литературе такие координаты называют *проективными*, а еще *однородными*.

Определение 1.5 *Говорят, что точки $A_1, A_2, \dots, A_k$ в проективном пространстве являются точками общего положения, если порождающие их векторы линейно независимы.*[1]

Определение 1.6 *Говорят, что точки $A_1, A_2, \dots, A_k$ — почти общего положения, если при удалении любой из них оставшиеся точки будут точками общего положения.*

Очевидно, что в n-мерном проективном пространстве множество точек общего положения содержит не более $(n + 1)$-ой точки, что точки общего положения существуют и что любое непустое подмножество точек общего положения также является множеством точек общего положения. Так же очевидно, что в n-мерном проективном пространстве множество точек почти общего положения может содержать не более $(n + 2)$-х точек.

Определение 1.7 *Говорят, что базис $\{\vec{e_i}\}$ согласован с последовательностью точек почти общего положения $\{A_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n+2$, если при $i = 1, 2, \dots, n+1$ имеет место*

$$\pi(\vec{e_i}) = A_i, \ \text{а} \ \ \pi(\vec{e}_1 + \dots + \vec{e}_{n+1}) = A_{n+2}$$

Теорема 1.1 *В проективном пространстве P для любой максимальной последовательности точек почти общего положения в векторном пространстве V, порождающем P, существует проективный репер $\mathcal{R}$, такой, что каждый принадлежащий ему базис σ согласован с данной последовательностью точек.*

Пусть $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_{n+1}, \vec{A}_{n+2}$ – какие либо векторы, порождающие данные точки. Тогда, по определению точек почти общего положения, векторы $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_{n+1}$, образуют базис, по которому можно разложить вектор $\vec{A}_{n+2}$: $\quad \vec{A}_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \vec{A}_i$.

Обозначим при $i = 1, \dots, (n + 1)$ векторы $\lambda_i \vec{A}_i$ через $\vec{e}_i$, а $\vec{A}_{n+2}$ через $\vec{e}$. Тогда базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n+1}$ согласован с данной последовательностью точек. Поскольку любой гомотетичный ему базис будет также согласован с данной последовательностью точек, то существование репера доказано.

Более того, докажем, что если два базиса $\{\vec{e_i}\}$ и $\{\vec{v_i}\}$ согласованы с данной последовательностью точек, то они гомотетичны, то есть принадлежат одному реперу. В силу согласованности базисов,

$$\pi(\vec{e_i}) = \pi(\vec{v_i}) = A_i \text{ при } i = 1, \dots, (n+1),$$

откуда следует существование скаляров α_i таких, что $\vec{e_i} = \alpha_i \vec{v_i}$. С другой стороны,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \vec{e_i} = \beta \sum_{i=1}^{n+1} \vec{v_i}, \quad \text{поскольку} \quad \pi\left(\sum_{i=1}^{n+1} \vec{e_i}\right) = \pi\left(\sum_{i=1}^{n+1} \vec{v_i}\right).$$

[1] Отметим, что это определение не совпадает с определением понятия точек общего положения в аффинном пространстве.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n+1}(\alpha_i - \beta)\vec{v}_i = 0,$$

следовательно, для всех $i = 1, \ldots, (n+1)$, $\alpha_i = \beta$. Тогда $\vec{e}_i = \beta\vec{v}_i$, следовательно базисы $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{v}_i\}$ гомотетичны, что и требовалось доказать.

Замечание 1.1 *Пусть d — аффинная прямая и на ней заданы две различные точки O и E. Тогда на d определен аффинный репер $(O, \vec{e}_1)$, где $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE}$ и пусть проективная прямая d' получена из аффинной прямой d присоединением "бесконечно удаленной" точки D_∞.*

Тогда с аффинным репером $(O, \vec{e}_1)$ можно связать проективный репер $\mathcal{R}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ специального вида, а именно репер, согласованный с точками (D_∞, O, E), где точка $D_\infty = \pi(\vec{e}_1)$, точка $O = \pi(\vec{e}_2)$, точка $E = \pi(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$.

Если точка A имеет в репере $(O, \vec{e}_1)$ аффинную координату a, то в репере $\mathcal{R}$ она будет иметь набор проективных координат $(a : 1)$.

Теорема 1.2 *Если в проективном пространстве P^n заданы два репера, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$, то координаты $(x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1})$ точки M в репере $\mathcal{R}$ связаны с координатами $(x'_1 : x'_2 : \cdots : x'_{n+1})$ этой точки в репере $\mathcal{R}'$ следующей формулой:*

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n+1} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+1,1} & c_{n+1,2} & \cdots & c_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_{n+1} \end{pmatrix}$$

где $|C| \neq 0$ и $\lambda \neq 0$.

Обозначим через C матрицу перехода от базиса $\sigma \in \mathcal{R}$ к базису $\sigma^{'} \in \mathcal{R}^{'}$. Это означает, что

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1^{\,'} \\ \vec{e}_2^{\,'} \\ \vdots \\ \vec{e}_{n+1}^{\,'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n+1,1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n+1,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1,n+1} & c_{2,n+1} & \cdots & c_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \ \ |C| \neq 0.$$

Пусть $\overrightarrow{M}$ есть вектор, порождающий точку M. Тогда $\overrightarrow{M} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i\vec{e}_i$, а с другой стороны, $\overrightarrow{M} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^{'}\vec{e}_i^{\,'}$. Остюда получаем уравнение:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{'} & x_2^{'} & \ldots & x_{n+1}^{'} \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \ \ C -$$

матрица перехода от первого базиса ко второму. Транспонируя обе части уравнения и приравнивая коэффициенты при одних и тех же базисных векторах, получаем утверждение теоремы.

1.3 Плоскости в проективном пространстве

Определение 1.8 *Пусть $P^n = \pi(V^{n+1} \setminus \{\vec{0}\})$ — проективное пространство, порожденное векторным пространством V^{n+1} и подпространство $W \subset V^{n+1}$. Плоскостью в проективном пространстве P^n, определенной (заданной) подпространством W, называется множество $\alpha \subset P^n$, содержащее те и только те точки пространства P^n, порождающие векторы которых лежат в W.*

Тот факт, что точки плоскости α порождаются векторами из подпространства W мы будем записывать следующим образом: $\alpha = \pi(W)$.

Определение 1.9 *Говорят, что плоскость α имеет размерность k , если размерность подпространства W, порождающего ее точки, равна $k+1$.*

Одномерные плоскости проективного пространства называют *прямыми.* Тот факт, что плоскость α имеет размерность k записывают обычным образом: $\dim\alpha = k$. Плоскость размерности k кратко называют k-плоскостью. Плоскости в P^n, размерность которых равна $n-1$, называют *гиперплоскостями.*

Теорема 1.3 *В произвольном проективном репере $\mathcal{R}$ проективного пространства P^n k-мерная плоскость $\alpha = \pi(W)$ задается следующей системой уравнений:*

$$\begin{cases} x_1 & = & a_{11}t_1 & + & a_{12}t_2 & +\ldots+ & a_{1,k+1}t_{k+1} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ x_{n+1} & = & a_{n+1,1}t_1 & + & a_{n+1,2}t_2 & +\ldots+ & a_{n+1,k+1}t_{k+1} \end{cases}$$

В этой формуле коэффициенты при $t_1, \ldots, t_{k+1}$ являются соответственно координатами векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k+1}$, порождающих подпространство W. Эти уравнения называют *параметрическими.*

Пусть $\sigma = \{\vec{e}_i\}$ базис, принадлежащий данному реперу $\mathcal{R}$, и пусть M, текущая точка плоскости α, имеет в репере $\mathcal{R}$ координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$.

Пусть также координаты векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k+1}$ в базисе σ будут

$$\vec{a}_1(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n+1,1}),\ \vec{a}_2(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n+1,2}),\ \ldots,\ \vec{a}_{k+1}(a_{1,k+1}, a_{2,k+1}, \ldots, a_{n+1,k+1}).$$

Тогда

$$M \in \alpha = \pi(W) \Longleftrightarrow \overrightarrow{M} = t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \ldots + t_{k+1}\vec{a}_{k+1}.$$

Записав последнее векторное равенство в координатах, получим искомое параметрическое уравнение.

Следствие 1.1 *Уравнение прямой, проходящей через две точки A и B, имеет вид:*

$$\overrightarrow{M} = \lambda\overrightarrow{A} + \mu\overrightarrow{B}.$$

Теорема 1.4 *Множество точек проективного пространства $P^n, n \geq 2$ тогда и только тогда является плоскостью, когда вместе с любыми своими двумя точками A и B оно содержит и все точки прямой AB.*

Необходимость. Пусть $\alpha = \pi(W)$ – плоскость. $A, B \in \alpha,\ M \in (AB)$. Тогда $\exists\ \lambda,\ \mu$ такие, что $\overrightarrow{M} = \lambda\overrightarrow{A} + \mu\overrightarrow{B} \Longrightarrow \overrightarrow{M} \in W \Longrightarrow M \in \alpha$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть α – множество точек, удовлетворяющих условию теоремы:

$$\forall\ A, B \in \alpha \Longrightarrow (AB) \subset \alpha.$$

Покажем, что $\pi^{-1}(\alpha)$ есть подпространство векторного пространства V.

Пусть $\vec{x} \in \pi^{-1}(\alpha)$ и $\vec{y} \in \pi^{-1}(\alpha)$ – линейно независимые векторы. Тогда, если

$$A = \pi(\vec{x}) \text{ и } B = \pi(\vec{y}),\ \text{ то } \pi(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = M \in (AB) \subset \alpha \Longrightarrow \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in \pi^{-1}(\alpha),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1.5 *В произвольном проективном репере $\mathcal{R}$ проективного пространства P^n k- мерная плоскость $\alpha = \pi(W)$ задается следующей системой уравнений:*

$$\begin{cases} b_{11}x_1 & + & b_{12}x_2 & +\ldots+ & b_{1,n+1}x_{n+1} & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ b_{n-k,1}x_1 & + & b_{n-k,2}x_2 & +\ldots+ & b_{n-k,n+1}x_{n+1} & = & 0 \end{cases}$$

Эти уравнения называют *общими уравнениями* плоскости. Здесь набор коэффициентов b_{ij} при неизвестных $x_1, \ldots, x_{n+1}$ в каждой строке является координатами вектора, принадлежащего $W^{\perp}$.

Исключая из параметрических уравнений параметры $t_1, \ldots, t_{k+1}$, получим систему $(n-k)$ однородных линейных уравнений, связывающих координаты текущей точки M плоскости α. Обратно, всякая система $(n-k)$ однородных линейных уравнений, связывающих координаты текущей точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ имеет множество решений. Из алгебры известно, что все такие векторы, координаты которых удовлетворяют данной системе, заполняют некоторое $(k+1)$-мерное подпространство $(n+1)$-мерного пространства, что окончательно доказывает теорему. Более подробное доказательство теорем 1.4 и 1.5 можно прочесть, например, в [11].

Определение 1.10 *Пересечением плоскостей называют наибольшую по включению плоскость, которая содержится в каждой из данных плоскостей.*

Пересечение двух проективных плоскостей α и β обозначают обычно $\alpha \cap \beta$.

Теорема 1.6 *Если $\alpha = \pi(U)$ и $\beta = \pi(W)$, то $\alpha \cap \beta = \pi(U \cap W)$.*

Определение 1.11 *Проективной оболочкой плоскостей называют наименьшую по включению плоскость, в которой содержатся все данные плоскости.*

В дальнейшем проективную оболочку двух плоскостей α и β будем обозначать $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Теорема 1.7 *Если $\alpha = \pi(U)$ и $\beta = \pi(W)$, то $\langle \alpha, \beta \rangle = \pi(U + W)$.*

Имеет место следующая теорема:

Теорема 1.8 *Для любых двух плоскостей α и β*

$$\dim\langle \alpha, \beta \rangle = \dim \alpha + \dim \beta - \dim(\alpha \cap \beta).$$

Теоремы 1.6, 1.7 и 1.8 предлагается доказать в качестве упражнений.

2 Основные факты проективной геометрии

2.1 Теорема Дезарга

Определение 2.1 *Треугольником в проективной геометрии будем называть фигуру, состоящую из трех точек общего положения и трех прямых, проходящих через пары этих точек.*

Эти точки общего положения называют *вершинами,* а прямые – *сторонами* треугольника.

Определение 2.2 *Два треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ в проективном пространстве называются перспективными, если прямые AA_1, BB_1, CC_1 проходят через одну точку.*

Эту точку называют *центром перспективы.*

Теорема 2.1 (Дезарга) *Если два треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ перспективны, то точки пересечения сторон $X = AB \cap A_1B_1, \quad Y = AC \cap A_1C_1, \quad Z = BC \cap B_1C_1$ лежат на одной прямой.*

Такую прямую называют *осью перспективы.*

Имеет место и обратная теорема.

Теорема 2.2 *Пусть даны два треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$. Если точки пересечения сторон $X = AB \cap A_1B_1, \quad Y = AC \cap A_1C_1, \quad Z = BC \cap B_1C_1$ лежат на одной прямой, то эти треугольники перспективны.*

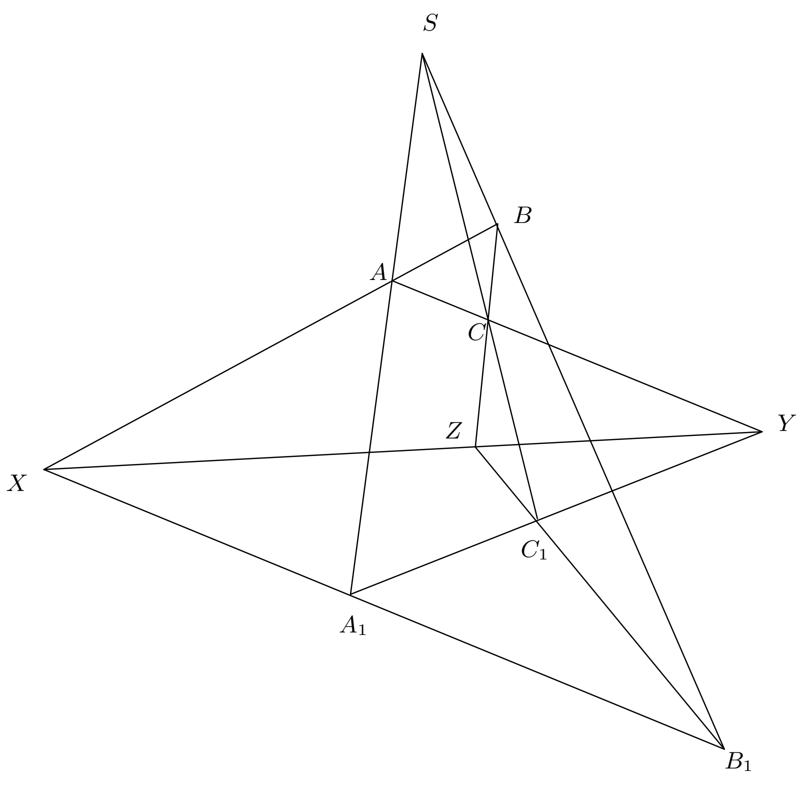

Рис. 1: Конфигурация Дезарга.

Различные варианты доказательства теоремы Дезарга и обратной к ней хорошо изложены в литературе. Синтетическое доказательство можно прочесть в [4], а векторное — в [2]. В [1] приведено доказательство теоремы координатным способом.

Разнообразные упражнения по этой теме можно найти в [14], а более глубокие теоретические сведения – в [7], [9], [10] и [8].

Теоремы 2.1 и 2.2 иллюстрирует рисунок 1. На нем изображены стороны треугольников, три прямые, содержащие центр перспективы и пары соответствующих вершин, а также ось перспективы, всего 10 прямых. На каждой из них лежат три точки. Всего точек также 10. Это шесть вершин треугольников, центр перспективы и три точки пересечения соответствующих сторон. Такие 10 точек и 10 прямых образуют так называемую *конфигурацию Дезарга.*

2.2 Сложное отношение четырех точек прямой

В литературе по проективной геометрии сложное отношение четырех точек прямой определяется разными способами. Мы придерживаемся, с некоторыми изменениями, того способа определения, который изложен в книге [6].

Упражнения по теме можно найти в [13], [14], [15].

Определение 2.3 *Пусть A, B, C, D – четыре различные точки проективного пространства, лежащие на одной прямой, а $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}, \overrightarrow{D}$ – порождающие их векторы. Выделим точки A и B, назовем их базисными, а точки C и D - делящими.*

Пусть $A \neq B$ и $\overrightarrow{C} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}, \quad \overrightarrow{D} = \gamma\overrightarrow{A} + \delta\overrightarrow{B}$. Говорят, что элемент $\omega \in F$,

$$\omega = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}$$

есть сложное (двойное) отношение упорядоченной четверки точек A, B, C, D.

Говорят также, что упорядоченная пара точек (C, D) делит упорядоченную пару точек (A, B) в отношении ω.

Этот факт записывают так:

$$\omega = (AB, CD) \text{ или } (AB, CD) = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta},$$

где обозначения соответствуют определению 2.3.

В следующей теореме утверждается корректность определения 2.3.

Теорема 2.3 *Сложное отношение четырех точек не зависит от выбора порождающих эти точки векторов.*

Допустим, что данные точки A, B, C, D порождаются другими векторами: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Тогда новое значение сложного отношения ω_1 будет находится из равенств

$$(\star) \qquad \vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}, \quad \vec{d} = \gamma_1\vec{a} + \delta_1\vec{b}$$

следующим образом

$$\omega_1 = \frac{\beta_1\gamma_1}{\alpha_1\delta_1}.$$

Но $\vec{a} = \lambda\vec{A},\ \vec{b} = \mu\vec{B},\ \vec{c} = \tau\vec{C},\ \vec{d} = \upsilon\vec{D}$. Сделав соответствующие подстановки в равенства $(\star)$, получим равенства:

$$\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}, \quad \vec{D} = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B},$$

в которых

$$\alpha = \frac{\alpha_1\lambda}{\tau},\ \beta = \frac{\beta_1\mu}{\tau},\ \gamma = \frac{\gamma_1\lambda}{\upsilon},\ \delta = \frac{\delta_1\mu}{\upsilon}.$$

Отсюда следует, что $\omega = \omega_1$, что и требовалось доказать.

Теорема 2.4 *Сложное (двойное) отношение точек имеет следующие свойства:*

1. $(AB, CD) = (CD, AB)$.
2. $(AB, DC) = (BA, CD) = \dfrac{1}{(AB, CD)}$.
3. $(AC, BD) = (DB, CA) = 1 - (AB, CD)$.
4. *Сложное отношение сохраняется при центральном проектировании.*

Докажем эти свойства:

1) Пусть $\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$ и $\vec{D} = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B}$. Тогда

$$\vec{A} = \frac{\delta}{\triangle}\vec{C} - \frac{\gamma}{\triangle}\vec{D} \text{ и } \vec{B} = -\frac{\beta}{\triangle}\vec{C} + \frac{\alpha}{\triangle}\vec{D}, \text{ где } \triangle = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

Тогда, подсчитав сложное отношение по формуле, получим $(AB, CD) = (CD, AB)$.

2)

$$(AB, DC) = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} = \frac{1}{(AB, CD)}.$$

3) (AC, BD) можно вычислить, выразив $\vec{B}$ и $\vec{D}$ через $\vec{A}$ и $\vec{C}$. Действительно,

$$\vec{B} = -\frac{\alpha}{\beta}\vec{A} + \frac{1}{\beta}\vec{C}, \quad \vec{D} = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B} = (\gamma - \frac{\alpha\delta}{\beta})\vec{A} + \frac{\delta}{\beta}\vec{C}.$$

Тогда

$$(AC, BD) = 1 - \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta} = 1 - (AB, CD).$$

4) Свойство следует из теоремы 2.3, так как точки A, B, C, D и их проекции A_1, B_1, C_1, D_1 порождаются одними и теми же, либо коллинеарными векторами.

Теорема 2.5 *Если в репере $\mathcal{R}$ на проективной прямой известны координаты точек*

$$A(a_1 : a_2), B(b_1 : b_2), C(c_1 : c_2), D(d_1 : d_2),$$

то сложное отношение вычисляется по формуле:

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}$$

Для вычисления сложного отношения ω выразим множители $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ через координаты векторов $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$, порождающих точки A, B, C, D . Поскольку $\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$ и $\vec{D} = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B}$, то α и β найдутся из системы

$$\begin{cases} c_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 \\ c_2 = \alpha a_2 + \beta b_2 \end{cases}$$

по правилу Крамера. Множители γ и δ находятся из системы

$$\begin{cases} d_1 = \gamma a_1 + \delta b_1 \\ d_2 = \gamma a_2 + \delta b_2 \end{cases}$$

аналогично. Подставив найденные значения в формулу для вычисления ω, получим утверждение теоремы.

Следствие 2.1 *Если в аффинном репере на прямой известны координаты четырех точек*

$$A(a),\ B(b),\ C(c),\ D(d),$$

то сложное отношение вычисляется по формуле:

$$(AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}.$$

Для доказательства используем замечание 1.1 и перейдем к проективным координатам. Тогда

$$A(a : 1), B(b : 1), C(c : 1), D(d : 1).$$

Применяя предыдущую теорему, получим

$$\omega = \frac{(a - c)(d - b)}{(c - b)(a - d)} = \frac{c - a}{(b - c)} : \frac{d - a}{(b - d)} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}.$$

Следствие 2.2 *Если в аффинном репере $(O, \vec{e})$ на расширенной прямой с бесконечно удаленной точкой D_∞, где $\vec{e} = \overrightarrow{OE}$, точка M имеет координату ξ, (т.е. $\overrightarrow{OM} = \xi\vec{e}$), то*

$$\xi = (D_\infty O, EM).$$

Выберем на проективной прямой репер $\mathcal{R}(D_\infty O, E)$. Тогда, согласно замечанию 1.1,

$$D_\infty(1:0),\ O(0:1),\ E(1:1),\ M(\xi:1).$$

Следовательно

$$\omega = (D_\infty O, EM) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \xi & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \xi.$$

Определение 2.4 *Говорят, что пара (A, B) разделяет пару (C, D), если $(AB, CD) < 0$ и не разделяет, если $(AB, CD) > 0$.*

Определение 2.5 *Говорят, что пара точек (A, B) разделяет пару точек (C, D) гармонически, если сложное отношение $(AB, CD) = -1$. В этом случае упорядоченную четверку точек A, B, C, D называют гармонической четверкой точек.*

Следствие 2.3 *Гармоническая разделенность двух пар точек не зависит ни от порядка пар точек, ни от порядка точек в каждой паре.*

Следствие 2.4 *Если на аффинной прямой AB точка C является серединой отрезка AB, а D_∞ — бесконечно удаленная точка расширенной прямой AB, то*

$$(AB, CD_\infty) = -1.$$

2.3 Полный четырехвершинник

Материал этого подраздела хорошо изложен в [1], [2], [4]. Упражнения по теме можно найти в [13], [14], [15].

Определение 2.6 *Полным четырехвершинником называют фигуру проективной плоскости, состоящую из четырех точек почти общего положения, и шести прямых, проходящих через всевозможные пары этих точек.*

Эти четыре точки почти общего положения называют *вершинами,* а шесть прямых, проходящих через всевозможные пары этих точек, называют *сторонами.*

Определение 2.7 *Две стороны полного четырехвершинника называются смежными, если они имеют общую вершину.*

Определение 2.8 *Две стороны полного четырехвершинника называются противоположными, если они не имеют общей вершины.*

Так на рисунке 2 точки A, B, C, D являются вершинами полного четырехугольника, стороны AB и CD, BC и AD, BD и AC противоположные.

Определение 2.9 *Точка пересечения двух противоположных сторон четырехвершинника называется диагональной точкой.*

Определение 2.10 *Прямая, проходящая через две диагональные точки, называются диагональю полного четырехвершинника.*

На рисунке 2 точки $P = AB \cap CD,\ Q = BC \cap AD,\ R = BD \cap AC$. являются диагональными точками, а диагонали PQ, QR и PR изображены пунктирными линиями.

Теорема 2.6 (Фано) *На действительной проективной плоскости P^2 диагональные точки полного четырехвершинника не лежат на одной прямой.*

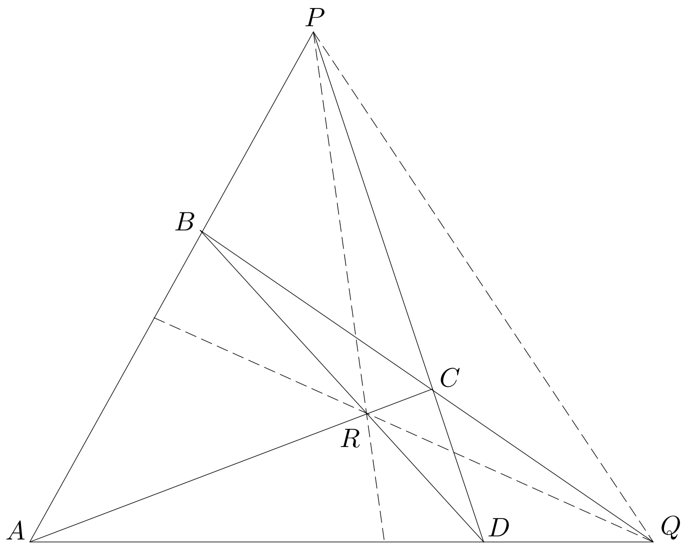

Рис. 2: Полный четырехвершинник.

Пусть дан полный четырехвершинник $ABCD$ с диагональными точками

$$P = AB \cap CD,\ Q = BC \cap AD,\ R = BD \cap AC.$$

Доказательство: Рассмотрим доказательство этой теоремы координатным методом. Для этого произвольные три вершины, например A, B, C, примем за базисные точки репера, а четвертую, D, – за единичную. Теперь в репере $\mathcal{R}(ABC, D)$ вершины полного четырехвершинника $ABCD$ имеют следующие координаты: $A(1:0:0)$, $B(0:1:0)$, $C(0:0:1)$, $D(1:1:1)$. Утверждение теоремы будет доказано, если мы покажем, что определитель, составленный из координат точек P, Q, R будет отличен от нуля. Для этого необходимо вычислить координаты точек P, Q, R в выбранном репере.

Поскольку $P = AB \cap CD$, то координаты P можно вычислить, составив уравнения прямых AB и CD. Предположим, что прямая AB имеет уравнение $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$. Для нахождения неизвестных коэффициентов a, b, c подставим в уравнение $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ координаты точек A и B. Получим $a = 0, b = 0$. Тогда уравнение прямой AB примет вид: $x_3 = 0$.

Аналогично получаем уравнение прямой CD: $x_1 - x_2 = 0$. Решая систему из полученных уравнений, найдем координаты точки $P : P(1:1:0)$. Потом найдем координаты точки $Q(0:1:1)$ и координаты точки $R(1:0:1)$. Подсчитав значение определителя, составленного из координат точек P, Q, R, получим, что оно отлично от нуля. Теорема доказана.

Теорема 2.7 *На каждой диагонали полного четырехвершинника существует гармоническая четверка точек, состоящая из пары диагональных точек и пары точек пересечения этой диагонали со сторонами, проходящими через третью диагональную точку.*

Доказательство: На рисунке 3 изображен полный четырехвершинник $ABCD$ с диагональными точками

$$M = AB \cap CD,\ N = BC \cap AD,\ T = BD \cap AC.$$

Рассмотрим, например, диагональ MN и точки $P = MN \cap AC$, $Q = MN \cap BD$. Докажем, что на диагонали MN точки M, N, P, Q образуют гармоническую четверку, то есть, что сложное отношение $(MN, PQ) = -1$.

Рассмотрим пучок прямых с центром в точке A и два сечения этого пучка прямыми MQ и BQ. Тогда по свойству сложного отношения четырех точек $(MN, PQ) = (BD, TQ)$. Рассмотрим теперь пучок прямых с центром в точке C и те же два сечения этого пучка прямыми MQ и BQ. Тогда по свойству сложного отношения четырех точек $(MN, PQ) = (DB, TQ)$. Поскольку $(BD, TQ) = 1/(DB, TQ)$, получаем, что $(MN, PQ)^2 = 1$.

Итак, мы получили, что сложное отношение (MN, PQ) четырех различных точек может принять либо значение единица, либо минус единица. Однако первая возможность реализуется лишь в случае, когда точки P и Q совпадают. Но тогда совпадают и прямые BD и AC, что

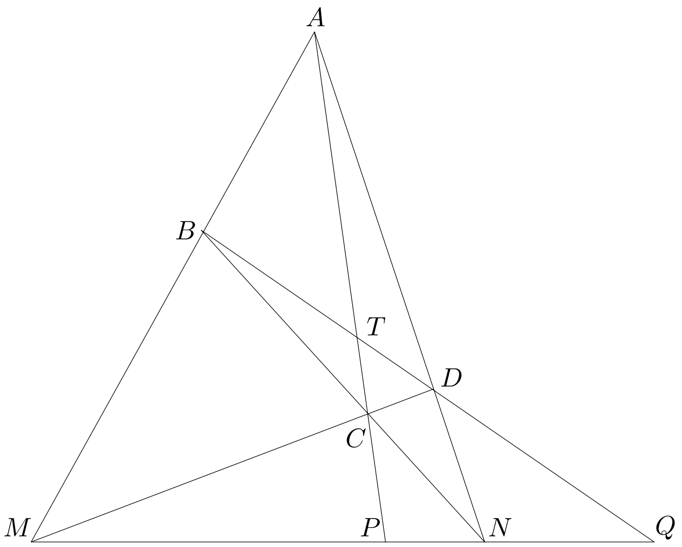

Рис. 3: Чертеж к теореме 2.7

невозможно, поскольку никакие три вершины полного четырехвершинника $ABCD$ не могут лежать на одной прямой. Следовательно $(MN, PQ) = -1$. Аналогично можно рассмотреть другие диагонали. Теорема доказана.

Теорема 2.8 *На каждой стороне полного четырехвершинника существует гармоническая четверка точек, состоящая из пары вершин этой стороны, диагональной точки этой стороны и точки пересечения этой стороны с диагональю, проходящей через две другие диагональные точки.*

Доказательство: На рисунке 4 изображен полный четырехвершинник $ABCD$ с диагональными точками

$$M = AB \cap CD,\ N = BC \cap AD,\ T = BD \cap AC.$$

Рассмотрим какую-либо сторону четырехвершинника, например сторону CD. Теорема доказывается аналогично предыдущей. Обозначим $K = NT \cap DC,\ L = NT \cap AB$. Рассмотрим пучок прямых с центром в точке N и два сечения этого пучка прямыми MA и MD. Тогда по свойству сложного отношения четырех точек $(MK, DC) = (ML, AB)$. Рассмотрим теперь пучок прямых с центром в точке T и те же два сечения этого пучка прямыми MA и MD. Тогда по свойству сложного отношения четырех точек $(MK, DC) = (ML, BA)$. Поскольку $(ML, BA) = 1/(ML, AB)$, получаем, что $(MK, DC)^2 = 1$.

Итак, мы получили, что сложное отношение (MK, DC) четырех различных точек может принять либо значение единица, либо минус единица. Однако первая возможность реализуется лишь в случае, когда точки D и C совпадают. Но тогда совпадают и прямые BD и AC, что невозможно, поскольку никакие три вершины полного четырехвершинника $ABCD$ не могут лежать на одной прямой. Следовательно $(MK, DC) = -1$.

2.4 Принцип двойственности

Утверждения проективной геометрии обладают замечательным свойством: их можно объединить в пары, причем, во-первых, формулировки утверждений получаются друг из друга некоторой подстановкой слов, а, во-вторых, истинность одного из утверждений пары влечет за собой истинность другого.

Эта своеобразная "симметрия" утверждений проективной геометрии получила в математике название: *Принцип двойственности.*

Для простоты рассуждений в данном подразделе мы жертвуем общностью [2] — предположим, что векторное пространство, на основе которого построено проективное, является евклидовым.[3]

[2]Более общие рассуждения можно прочесть, например, в [2].

[3]Эта идея принадлежит моему учителю, замечательному человеку и прекрасному лектору, А.М. Меркулову.

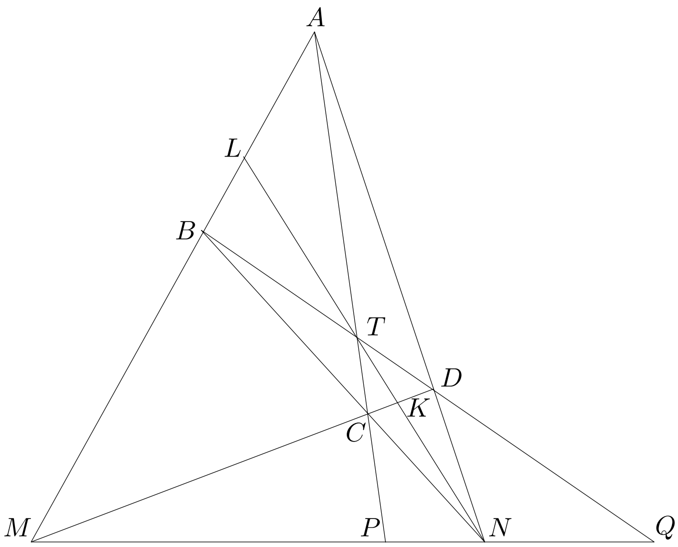

Рис. 4: Чертеж к теореме 2.8

Пусть $P^n = \pi(V^{n+1})$ — проективное n-мерное пространство над полем действительных чисел, порожденное **евклидовым векторным пространством** V^{n+1}.

Определение 2.11 *Плоскости размерностей (k) и $(n-k-1)$ называются двойственными.*

Определение 2.12 *Говорят, что плоскости α и β инцидентны, если одна и только одна из плоскостей строго содержится в другой, т.е. либо $\alpha \subseteq \beta$, либо $\beta \subseteq \alpha$.*

Теорема 2.9 *Пусть P^n — действительное n-мерное проективное пространство и Π — множество его собственных плоскостей.*

Тогда существует биекция $\varkappa : \Pi \longrightarrow \Pi$, при которой каждая плоскость отображается на двойственную и сохраняется инцидентность плоскостей.

Скалярное умножение векторов, определенное на векторном пространстве V^{n+1}, позволяет говорить об ортогональных дополнениях подпространств в пространстве V^{n+1}.

Если некоторая k-мерная плоскость α порождается подпространством W^{k+1}, то его ортогональное дополнение $W^{\perp}$ порождает плоскость β размерности $n-k-1$, значит плоскости α и β являются двойственными.

Определим отображение $\varkappa : \Pi \longrightarrow \Pi$ по правилу:

$$\varkappa(\pi(V)) = \pi(V^{\perp}).$$

Докажем несколько важных свойств отображения $\varkappa$.

Теорема 2.10 *1. $\varkappa$ отображает каждую плоскость на двойственную.*

2. $\varkappa$ является биекцией.

3. $\varkappa$ инволютивно, т.е. $\varkappa^2 = 1$.

4. $\varkappa$ сохраняет инцидентность плоскостей.

1. Пусть $\dim\ \alpha = k, \alpha = \pi(V^{k+1})$. Поскольку $\varkappa(\alpha) = \pi(V^{\perp}),$ то $\dim \varkappa(\alpha) = n-k-1$.

2. Легко проверить, что $\varkappa$ — биекция. Если

$$\alpha \neq \beta,\ \text{где}\ \alpha = \pi(V), \quad \beta = \pi(W),\ \text{то}\ V \neq W,\ \text{следовательно}\ V^{\perp} \neq W^{\perp}.$$

Тогда $\pi(V^{\perp}) \neq \pi(W^{\perp})$, откуда следует $\varkappa(\alpha) \neq \varkappa(\beta)$ и значит $\varkappa$ инъективно. Поскольку

$$\forall\ \alpha \in \Pi, \quad \alpha = \pi(V) = \pi((V^{\perp})^{\perp}) = \varkappa(\pi(V^{\perp})) = \varkappa(\beta),$$

где $\beta = \pi(V^{\perp})$, то $\varkappa$ есть сюръекция.

3. Докажем инволютивность отображения $\varkappa$.

$$\varkappa^2(\alpha) = \varkappa(\varkappa(\pi(V)) = \varkappa(\pi(V^\perp)) = \pi((V^\perp)^\perp) = \pi(V) = \alpha.$$

4. Докажем теперь, что $\varkappa$ сохраняет инцидентность плоскостей.

Пусть плоскости α и β инцидентны. Тогда $\alpha \neq \beta$. Если $\alpha = \pi(V)$, а $\beta = \pi(W)$, то $V \neq W$, откуда следует $V^\perp \neq W^\perp$. Если $\alpha \subseteq \beta$, то $V \subseteq W$, следовательно $W^\perp \subseteq V^\perp$. Из этого следует, что $\pi(W^\perp) \subseteq \pi(V^\perp)$. а по определению отображения $\varkappa$ отсюда следует, что $\varkappa(\beta) \subseteq \varkappa(\alpha)$. Аналогично

$$\beta \subseteq \alpha \Rightarrow W \subseteq V \Rightarrow V^\perp \subseteq W^\perp \Rightarrow \pi(V^\perp) \subseteq \pi(W^\perp) \Rightarrow (\varkappa(\alpha) \subseteq \varkappa(\beta).$$

Объединяя оба случая, получаем

$$(\alpha \supseteq \beta \text{ либо } \alpha \subseteq \beta) \Rightarrow (\varkappa(\alpha) \subseteq \varkappa(\beta), \text{ либо } \varkappa(\alpha) \supseteq \varkappa(\beta)).$$

Пусть $\alpha' = \varkappa(\alpha)$ и $\beta' = \varkappa(\beta)$.

Докажем, что из инцидентности плоскостей α' и β' следует инцидентность плоскостей α и β. Действительно,

$$\beta' \subseteq \alpha' \Rightarrow \varkappa(\alpha') \subseteq \varkappa(\beta') \Leftrightarrow \varkappa^2(\alpha) \subseteq \varkappa^2(\beta) \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta.$$

Аналогично показывается обратное включение.

Теорема 2.11 *При отображении $\varkappa$ пересечение плоскостей $\alpha \cap \beta$ отображается на проективную оболочку $\langle \varkappa(\alpha), \varkappa(\beta) \rangle$ двойственных образов этих плоскостей и наоборот.*

Говоря иначе, в теореме утверждается, что

$$\varkappa(\alpha \cap \beta) = \langle \varkappa(\alpha), \varkappa(\beta) \rangle$$

Следует из того, что

$$(V \cap W)^\perp = L(V^\perp, W^\perp) = V^\perp + W^\perp$$

и свойств отображения $\varkappa$.

Сформулируем теперь сам принцип двойственности, который в проективной геометрии не является теоремой. Он является примером утверждения в так называемой *метатеории*, то есть теории, изучающей определения и теоремы проективной геометрии.

Метатеорема (Принцип двойственности)
Если в теореме, говорящей об инцидентности проективных плоскостей, название каждой плоскости заменить двойственным, то получится также теорема проективной геометрии.

Пусть $A(\alpha, \dots, \beta)$ и $B(\alpha, \dots, \beta)$ — высказывания об инцидентности проективных плоскостей $\alpha, \dots, \beta$ и $A \Rightarrow B$ теорема. Обозначим через $\alpha', \dots, \beta'$ плоскости, соответственно двойственные к плоскостям $\alpha, \dots, \beta$. Покажем, что импликация

$$A(\alpha', \dots, \beta') \Rightarrow B(\alpha', \dots, \beta')$$

также является теоремой.

Допустим, что высказывание $A(\alpha', \dots, \beta')$ истино. Тогда, поскольку отображение $\varkappa$ сохраняет инцидентность плоскостей, истиным является утверждение $A(\varkappa(\alpha'), \dots, \varkappa(\beta'))$.

Следовательно, в силу истинности исходной импликации $A \Rightarrow B$, истино утверждение $B(\varkappa(\alpha'), \dots, \varkappa(\beta'))$. Но тогда истино высказывание $B(\varkappa^2(\alpha'), \dots, \varkappa^2(\beta')) = B(\alpha', \dots, \beta')$, так как отображение $\varkappa^2$ — тождественное. Утверждение метатеоремы доказано.

Следствие 2.5 *Если в теореме, говорящей о включении, пересечении, проективной оболочке плоскостей, заменить их названия двойственными, а также поменять местами слова* пересечение *и* проективная оболочка*, а знаки включения поменять на противоположные, то полученное утверждение также будет теоремой проективной геометрии.*

Замечание. В проективной геометрии следует различать понятие плоскости как объекта от понятия плоскости, как множества составляющих ее точек.

Действительно, например, прямая как объект в n-мерном проективном пространстве двойственна $(n-2)$ - плоскости, а как множество точек двойственна пучку гиперплоскостей.

3 Проективные отображения и преобразования

3.1 Определение и основные теоремы

Понятие проективного отображения и, соответственно, проективного преобразования трактуется в литературе по геометрии различным образом. В этом разделе мы даем определение проективного отображения, следуя [12]. Более общие, но аналогичные определения даны в источниках [5], [8], [9], [10]. Иные определения даны в книгах [2], [11], [4].

Ограничимся рассмотрением отображений проективных пространств одной и той же размерности и определенных над одним и тем же полем, а именно: отображений проективной прямой на себя или другую проективную прямую и проективных отображений проективной плоскости на себя или другую проективную плоскость.

Пусть V и $V\ '$ - два векторных пространства одной размерности, над одним и тем же полем F, а P и $P\ '$ - порожденные ими проективные пространства.

Рассмотрим некоторую линейную биекцию $\varphi : V \longrightarrow V'$. Согласно свойствам линейных биекций, образами одномерных подпространств в V при отображении φ являются одномерные подпространства в V', причем различные подпространства отображаются на различные и каждое одномерное подпространство в V' имеет при φ единственный прообраз — некоторое одномерное подпространство в V.

Линейная биекция φ порождает некоторую биекцию f проективного пространства P на $P\ '$, а именно такую биекцию, при которой соответствующими будут являться точки, порождаемые векторами соответствующих при φ одномерных подпространств..

Однако далеко не каждая биекция проективного пространства P на проективное пространство $P\ '$ будет порождаться некоторой линейной биекцией векторного пространства V на векторное пространство $V\ '$. Поэтому не каждая биекция проективного пространства P на проективное пространство $P\ '$ может быть названа проективным отображением.

Эти рассуждения мотивируют следующее определение:

Определение 3.1 *Проективным отображением проективного пространства P на проективное пространство $P\ '$ называют такую биекцию $f : P \longrightarrow P\ '$, для которой существует линейная биекция $\varphi : V \longrightarrow V\ '$, такая, что*

$$f = \pi' \circ \varphi \circ \pi^{-1}.$$

Существует способ наглядно изобразить отношения между объектами этого определения с помощью некоторой диаграммы:

Изобразим отображение f проективного пространства P на проективное пространство $P\ '$ обычным образом:

$$P \longrightarrow P',$$

а отображение φ векторного пространства V на векторное пространство V' аналогично

$$V \longrightarrow V'.$$

Так как проективные пространства P и P' получены из векторных пространств V и V', поставим буквы V и V' соответственно над P и P' и укажем стрелками канонические проекции π и π':

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & V\ ' \arrow[d, "\pi"] \\ P \arrow[r, "f"'] & P\ ' \end{tikzcd}$$

Об этой диаграмме говорят, что она коммутативна [4].

Итак, говорят, что *линейная биекция φ порождает проективное отображение f*, а про f говорят, что оно *порождается линейным отображением φ*. Это отношение между f и φ мы будем записывать следующим образом: $f = \underline{\varphi}$.

Пусть V — трехмерное векторное пространство над полем F и $P(V)$ — порожденная им проективная плоскость. Пусть l и l' — две прямые из $P(V)$.

[4] Пусть имеется диаграмма, состоящая из вершин и соединяющих их стрелок, причем каждой вершине сопоставлено определенное множество, а каждой стрелке, соединяющей две вершины, сопоставлено отображение

Проективное отображение $f : l \longrightarrow l'$ называют *проективным соответствием* между точками прямой l и прямой l'.

Если между точками прямых l и l' установлено проективное соответствие, то в некоторых книгах используют обозначение $l \barwedge l'$.

Определение 3.2 *Проективным преобразованием проективного пространства называют проективное отображение проективного пространства на себя.*

Пример: Тождественное преобразование проективного пространства является проективным, поскольку порождается тождественным линейным оператором векторного пространства.

Замечание: Отметим, что тождественное преобразование проективного пространства порождается также любой гомотетией векторного пространства. Тождественное преобразование проективного пространства P будем обозначать 1_P.

Теорема 3.1 *Проективные отображения (преобразования) имеют следующие свойства:*

1. *при проективном отображении (преобразовании) образы точек общего положения также являются точками общего положения;*
2. *при проективном отображении (преобразовании) образы точек почти общего положения также являются точками почти общего положения;*
3. *при проективном отображении образом k-плоскости является k-плоскость;*
4. *при проективном отображении плоскости на плоскость образом прямой является прямая;*
5. *проективные отображения (преобразования) сохраняют инцидентность плоскостей;*
6. *проективные отображения (преобразования) сохраняют сложное (двойное) отношение четырех точек прямой;*
7. *проективные отображения (преобразования) сохраняют сложное (двойное) отношение четырех прямых пучка;*
8. *проективные преобразования образуют группу.*

Докажем эти свойства:

1) Так как точки общего положения порождаются линейно независимыми векторами, а при линейной биекции образы линейно независимых векторов также линейно независимы, то эти образы, в свою очередь, порождают точки общего положения.

2) Следует из определений и свойства 1).

3) Пусть $f = \underline{\varphi}$. тогда из того, что k-плоскость $\alpha^k = \pi(W^{k+1})$, где W^{k+1} — $(k+1)$-мерное подпространство из V, следует, что $f(\alpha^k)$ порождается подпространством $\varphi(W^{k+1}) \subset V'$. Однако φ — линейная биекция, следовательно подпространство $\varphi(W^{k+1})$ также $(k+1)$-мерное, а, значит, $f(\alpha^k)$ также является k-плоскостью.

4) Следует из свойства 3).

5) Пусть $f = \underline{\varphi}$. Если $\alpha = \pi(V)$, а $\beta = \pi(W)$, то $V \neq W$, и если $\alpha \subseteq \beta$, то $V \subseteq W$, следовательно $\varphi(V) \subseteq \varphi(W)$, откуда будет следовать, что $\pi(\varphi(V)) \subseteq \pi(\varphi(W))$, а, значит, $f(\alpha) \subseteq f(\beta)$. Теперь свойство следует из определения инцидентности плоскостей.

соответствующих множеств. Например,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ B & \xrightarrow{\varphi} & D \end{array}$$

Диаграмма называется *коммутативной*, если всякий раз, когда от одной ее вершины к другой можно перейти по двум разным путям, двигаясь все время по стрелкам, совпадают композиции соответствующих отображений в соответствующем порядке. (первым действует отображение, соответствующее первой стрелке пути, и.т.д.). Так, например, коммутативность изображенной выше диаграммы означает, что

$$\pi \circ f = \varphi \circ \pi$$

6) Пусть $(AB,CD)=\omega$. Тогда

$$\omega = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}, \text{ где } \quad \vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} \text{ и } \vec{D} = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B}.$$

Введем обозначения: $A_1 = f(A),\ B_1 = f(B),\ C_1 = f(C),\ D_1 = f(D)$. Тогда в силу проективности f, точки $A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1$ порождаются векторами $\varphi(\vec{A}),\ \varphi(\vec{B}),\ \varphi(\vec{C}),\ \varphi(\vec{D})$, где $f = \underline{\varphi}$. Но так как φ – линейное и невырожденное, эти векторы ненулевые и

$$\varphi(\vec{C}) = \alpha\varphi(\vec{A}) + \beta\varphi(\vec{B}) \text{ и } \varphi(\vec{D}) = \gamma\varphi(\vec{A}) + \delta\varphi(\vec{B}).$$

Тогда

$$(A_1B_1, C_1D_1) = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta},$$

что и требовалось доказать.

7) Следует из предыдущего.

8) Поскольку композиция любых трех преобразований ассоциативна, а тождественное преобразование является проективным (оно порождается тождественным линейным оператором), то для доказательства этого свойства достаточно проверить выполнение двух условий:

a) если f и g — проективные преобразования, то их композиция $g \circ f$ также проективное преобразование;

b) если f — проективное преобразование, то f^{-1} также проективное преобразование;

Проверим условие a). Пусть f и g — проективные преобразования. Тогда $\exists\, \varphi, \psi$ — линейные биекции, такие, что $f = \pi \circ \varphi \circ \pi^{-1}$ и $g = \pi \circ \psi \circ \pi^{-1}$. Тогда композиция

$$g \circ f = (\pi \circ \psi \circ \pi^{-1}) \circ (\pi \circ \varphi \circ \pi^{-1}),$$

откуда следует, что

$$g \circ f = \pi \circ (\psi \circ \varphi) \circ \pi^{-1},$$

так как $\pi^{-1} \circ \pi = 1_V$. Композиция $\psi \circ \varphi$ — линейная биекция, следовательно $g \circ f$ — проективное преобразование, порожденное этой линейной биекцией.

Доказательство иллюстрируется следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccccc}
V & \xrightarrow{\varphi} & V & \xrightarrow{\psi} & V \\
{\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\
P & \xrightarrow[f]{} & P & \xrightarrow[g]{} & P
\end{array}$$

Проверим условие b).

Так как f — проективное. то $\exists\, \varphi$ — линейная биекция, такая, что $f = \pi \circ \varphi \circ \pi^{-1}$. Рассмотрим проективное преобразование g, порожденное линейной биекцией φ^{-1}, а именно $g = \pi \circ \varphi^{-1} \circ \pi^{-1}$. Тогда, согласно определению 3.1, пункту a) и ассоциативности композиции

$$g \circ f = \pi \circ \varphi^{-1} \circ \pi^{-1} \circ \pi \circ \varphi \circ \pi^{-1} = 1_P,$$

что означает $g = f^{-1}$. Поскольку отображение g — проективное, то и отображение f^{-1} также проективное. Свойство доказано.

Теорема 3.2 *Пусть P проективное пространство, $\{A_i\} \in P$ — последовательность точек почти общего положения и h — проективное преобразование, такое, что*

$$\forall\ i = 1, \ldots, n+2 \quad h(A_i) = A_i.$$

Тогда $h = 1_P$.

Пусть ψ — линейная биекция, порождающая h. Тогда для любого базиса $\{\vec{e}_i\}$, согласованного с последовательностью точек $\{A_i\}$, имеем

$$\psi(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i, \text{ а также } \psi\left(\sum \vec{e}_i\right) = \lambda \sum \vec{e}_i,$$

поскольку $h(A_i) = A_i$. Так как ψ — линейное, то

$$\psi\left(\sum \vec{e}_i\right) = \sum \psi(\vec{e}_i) = \sum \lambda_i \vec{e}_i.$$

Приравнивая правые части полученных равенств, получаем

$$\sum (\lambda - \lambda_i)\vec{e}_i = \vec{0},$$

и так как $\vec{e}_i$ линейно независимы, все $\lambda_i = \lambda$. Теперь можно доказать, что ψ — гомотетия. Действительно,

$$\psi(\vec{x}) = \psi\left(\sum \alpha_i \vec{e}_i\right) = \sum \psi(\alpha_i \vec{e}_i) = \sum \alpha_i \psi(\vec{e}_i) = \sum \alpha_i \lambda \vec{e}_i = \lambda \sum \alpha_i \vec{e}_i = \lambda \vec{x},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3.3 (Существования и единственности) *Пусть P и P' - проективные пространства одной и той же размерности над одним и тем же полем. Для любых двух максимальных последовательностей точек почти общего положения $\{A_i\} \in P$ и $\{A_i'\} \in P'$ существует единственное проективное отображение*

$$f : P \longrightarrow P\ ', \ \text{такое, что} \quad \forall\ i = 1, \ldots, n+2 \quad f(A_i) = A_i'.$$

1. Существование. Пусть $\dim P = \dim P\ ' = n$ и $\{\vec{e}_i\}, \{\vec{e}_i\,'\}$ — базисы в V и V', согласованные с данными последовательностями точек. Из алгебры известно, что существует линейное отображение $\varphi : V \longrightarrow V'$ такое, что $\varphi(\vec{e}_i) = \vec{e}_i\,'$, значит отображение φ — биекция.

Тогда можно рассмотреть отображение $f = \pi' \circ \varphi \circ \pi^{-1}$. Оно проективно. Так как

$$\forall\ i = 1, \ldots, (n+1) \quad A_i = \pi(\vec{e}_i), \ \text{а}\ A_i' = \pi'(\vec{e}_i\,'),$$

то, учитывая, что

$$f = \pi' \circ \varphi \circ \pi^{-1} \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in V, \ f(\pi(\vec{x})) = \pi'(\varphi(\vec{x})),$$

получаем

$$f(A_i) = f(\pi(\vec{e}_i)) = \pi'(\varphi(\vec{e}_i)) = \pi'(\vec{e}_i\,') = A_i'.$$

Осталось показать, что $f(A_{n+2}) = A_{n+2}'$. В самом деле

$$f(A_{n+2}) = f\left(\pi\left(\sum \vec{e}_i\right)\right) = \pi'\left(\varphi\left(\sum \vec{e}_i\right)\right) = \pi'\left(\sum \varphi(\vec{e}_i)\right) = \pi'\left(\sum \vec{e}_i\,'\right) = A_{n+2}'.$$

Получили, что существует проективное отображение f, удовлетворяющее условию теоремы.

2. Единственность. Пусть проективные отображения f и g удовлетворяют условию теоремы, то есть

$$\forall\ i = 1, \ldots, (n+2) \quad f(A_i) = A_i^{'} = g(A_i).$$

Рассмотрим $h = g^{-1} \circ f$. Тогда, поскольку f и g – проективные, отображение h также проективное и

$$\forall\ i = 1, \ldots, (n+2) \quad h(A_i) = A_i.$$

Тогда по теореме 3.2 $\ h = 1_P$. Тогда

$$g^{-1} \circ f = 1_P \ \Rightarrow\ g \circ g^{-1} \circ f = g \circ 1_P \ \Rightarrow\ 1_{P'} \circ f = g \circ 1_P \ \Rightarrow\ f = g,$$

что и требовалось доказать. Единственность, и, следовательно, вся теорема доказана.

Из доказанной теоремы как следствие получается

Теорема 3.4 *Пусть P и P' — проективные пространства одной и той же размерности над одним и тем же полем, а $A_0, \ldots, A_n, E \in P$ и $A_0', \ldots, A_n', E' \in P'$ — две последовательности точек почти общего положения, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ реперы, содержащие базисы, согласованные с данными последовательностями точек почти общего положения. Тогда при проективном отображении f, о существовании которого говорится в предыдущей теореме, точка $M' = f(M)$ имеет в репере $\mathcal{R}'$ координаты, пропорциональные координатам точки M в репере $\mathcal{R}$.*

В этом случае часто говорят, что отображение f действует в реперах $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ "по равенству координат".

Теорема 3.5 *Пусть P^n — проективное пространство, а f — проективное преобразование этого пространства. Пусть $\mathcal{R}$ — некоторый репер в P^n. Тогда координаты точек $M(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})_{\mathcal{R}}$ и $M' = f(M)(x'_1 : x'_2 : \dots : x'_{n+1})_{\mathcal{R}}$, связаны следущим образом:*

$$\lambda \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n+1} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+11} & c_{n+12} & \dots & c_{n+1n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

где $|C| \neq 0$ и $\lambda \neq 0$.

Обозначим через $\sigma = \{\vec{e}_i\}$ какой-либо базис репера $\mathcal{R}$, а через φ — линейную биекцию, порождающую проективное преобразование f. Обозначим через $\mathcal{R}^{'}$ репер, содержащий базис $\sigma_1 = \{\varphi(\vec{e}_i)\}$. Тогда по теореме 3.4, координаты точки M в репере $\mathcal{R}$ будут пропорциональны соответствующим координатам точки $M^{'} = f(M)$ в репере $\mathcal{R}^{'}$.

Учитывая сказанное, будем иметь $M^{'}(\mu x_1 : \mu x_2 : \dots : \mu x_{n+1})_{\mathcal{R}'}$. Применяя формулы теоремы 1.2 к координатам точки $M^{'}$ в старом репере $\mathcal{R}$ и новом репере $\mathcal{R}^{'}$, получаем

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n+1} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+11} & c_{n+12} & \dots & c_{n+1n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu x_1 \\ \mu x_2 \\ \vdots \\ \mu x_{n+1} \end{pmatrix}$$

Если вынести μ из последней матрицы и разделить на него обе части уравнения, получим утверждение теоремы, где $\lambda = 1/\mu$.

Сформулируем два признака проективности отображения.

Теорема 3.6 *Пусть P и P' - два проективных пространства, соответственно порожденные векторными пространствами V и V'. Для того, чтобы отображение $f : P \longrightarrow P\ '$ было проективным, необходимо и достаточно, чтобы для любого репера $\mathcal{R} \in V$ существовал репер $\mathcal{R}' \in V'$ такой, что в этой паре реперов f действовало "по равенству координат".*

1. Необходимость. Пусть $f : P \longrightarrow P^{'}$ проективное, $\mathcal{R}$ – репер и $\sigma = \{\vec{e}_i\}$ – один из его базисов. Тогда существует линейная биекция φ, порождающая f. Обозначим через $\sigma^{'} = \{\vec{e}_i^{\ '}\}$ базис, состоящий из векторов $\vec{e}_i^{\ '} = \varphi(\vec{e}_i)$. Обозначая через $\mathcal{R}^{'}$ репер, содержащий базис $\sigma^{'}$, по теореме 3.4 имеем, что f действует в реперах $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^{'}$ "по равенству координат".

2. Достаточность. Пусть для любого репера $\mathcal{R} \in V$ существует репер $\mathcal{R}^{'} \in V^{'}$ такой, что отображение f действует в этих реперах "по равенству координат." Тогда в реперах $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^{'}$ существуют базисы $\sigma = \{\vec{e}_i\}$ и $\sigma^{'} = \{\vec{e}_i^{\ '}\}$ такие, что если $M(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})_R$, то $M' = f(M)$ имеет координаты $M'(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})_{\mathcal{R}'}$. Рассмотрим линейную биекцию φ, такую, что $\varphi(\vec{e}_i) = \vec{e}_i^{\ '}$. Она будет порождать f, поскольку тогда $\varphi(\vec{M}) = \vec{M}\ '$, следовательно, $f(\pi(\vec{M})) = \pi^{'}(\varphi(\vec{M}))$.

Это означает, что $f \circ \pi = \pi^{'} \circ \varphi$, следовательно f — проективное.

Теорема 3.7 *Пусть P и P' — два проективных пространства, соответственно порожденные векторными пространствами V и V'. Для того, чтобы отображение $f : P \longrightarrow P\ '$ было проективным, необходимо и достаточно, чтобы для любого репера $\mathcal{R} \in V$ существовал репер $\mathcal{R}' \in V'$ такой, что в этой паре реперов f определялось формулами*

$$\lambda \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n+1} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+11} & c_{n+12} & \dots & c_{n+1n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

где $M' = f(M)$, $|C| \neq 0$ и $\lambda \neq 0$, $\quad M(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})_{\mathcal{R}}$ и $M'(x'_1 : x'_2 : \dots : x'_{n+1})_{\mathcal{R}'}$.

Доказательство можно прочитать в [1].

3.2 Проективные отображения прямой на прямую

Теорема 3.8 (Штейнера) *Для того, чтобы биекция f проективной прямой s на проективную прямую s' была проективным отображением, необходимо и достаточно, чтобы она сохраняла сложное отношение произвольной четверки точек.*

1. Необходимость следует из свойства 6) проективных отображений и преобразований.

2. Достаточность. Пусть A, B, C – три произвольные точки прямой s. Возьмем проективное отображение $g : s \longrightarrow s'$, такое, что

$$f(A) = A^{'} = g(A), \quad f(B) = B^{'} = g(B), \quad f(C) = C^{'} = g(C).$$

Так как f сохраняет сложное отношение, то

$$\forall\ D \in s \quad (AB, CD) = (A'B', C'f(D)),$$

а так как g проективное, то

$$(AB, CD) = (A'B', C'g(D)) \text{ откуда } f(D) = g(D).$$

В силу произвольного выбора точки D, $f = g$, следовательно f, как и g, является проективным.

Теорема 3.9 (Штаудта) *Для того, чтобы биекция $f : s \longrightarrow s'$ действительной проективной прямой s на действительную проективную прямую s' была проективным отображением, необходимо и достаточно, чтобы она сохраняла гармонические четверки точек, т.е.*

$$(AB, CD) = -1 \implies (f(A)f(B), f(C)f(D)) = -1$$

Доказательство теоремы Штаудта можно получить, решив ряд упражнений в [7]. Смотри также [8]. Отметим, что существенно используется утверждение:

Лемма (об автоморфизме поля $\mathbb{R}$) *Единственным монотонным автоморфизмом поля действительных чисел является тождественный автоморфизм.*

Определение 3.3 *Пусть V^3 — трехмерное векторное пространство над полем F и P^2 — порожденная им проективная плоскость. Пусть l и l' — две прямые из P^2. Пусть точка $O \notin l$ и $O \notin l'$. Отображение $f : l \longrightarrow l'$, такое, что $\forall\ A \in l$ точка $A' = f(A)$ определяется по правилу: $A' = OA \cap l'$, называется перспективным отображением прямой l на прямую l' из центра O.*

Отображение f назвают также *перспективой с центром O* или *центральным проектированием* прямой l из центра O на прямую l'. Еще говорят, что точки прямых l и l' находятся в *перспективном соответствии,* центром которого служит точка O.

Перспективное соответствие прямых l и l' обозначают знаком $\overline{\overline{\wedge}}$, например $l \overline{\overline{\wedge}} l'$, а иногда указывают и центр соответствия, записывая его над знаком $\overline{\overline{\wedge}}$ следующим образом: $l \overset{O}{\overline{\overline{\wedge}}} l'$.

Следствие 3.1 *Центральное проектирование (перспектива) является проективным преобразованием.*

Теорема 3.10 *Для того, чтобы проективное отображение одной проективной прямой на другую проективную прямую было перспективным, необходимо и достаточно, чтобы общая точка этих двух прямых отображалась на себя.*

1. Необходимость следует из определения перспективного отображения.

2. Достаточность. Пусть отображение $f : s \longrightarrow s'$ – проективное и точка $O = s \cap s'$ — общая точка прямых s и s'. (См. рисунок 5). По условию $f(O) = O$. Обозначим произвольные две точки прямой s, отличные от O, через A и B, а их образы, точки $f(A)$ и $f(B)$, через A' и B'. Тогда A' и B' отличны от O. Рассмотрим перспективное отображение $g : s \longrightarrow s'$ с центром $S = (AA^{'}) \cap (BB^{'})$. Поскольку $g(O) = O$, получаем

$$f(A) = A^{'} = g(A), \quad f(B) = B^{'} = g(B), \quad f(O) = O^{'} = g(O).$$

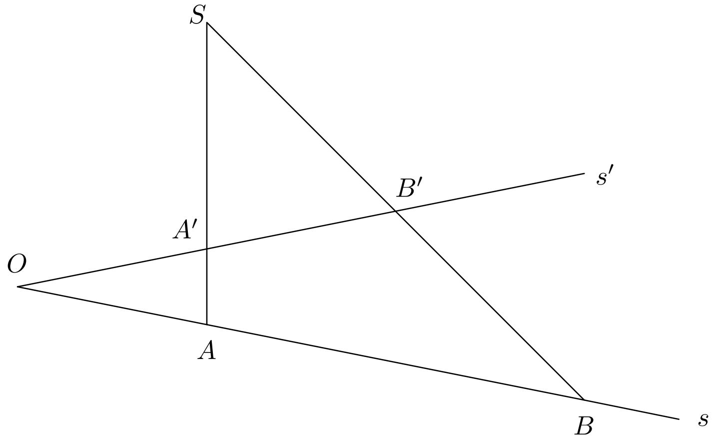

Рис. 5: Чертеж к теореме 3.10

Так как f и g совпадают на трех точках прямой s, то из теоремы 3.3 (части единственности) вытекает, что $f = g$.

Так как g перспективное, а $f = g$, то и f — перспективное.

Замечание. Говорят, что на проективной плоскости два пучка *перспективны*, если между их элементами установлено такое биективное соответствие, при котором точки пересечения соответствующих прямых лежат на одной прямой.

Очевидно, что при перспективном соответствии между двумя пучками сложные отношения соответствующих прямых равны, следовательно всякое перспективное соответствие пучков является проективным соответствием.

Однако обратное неверно. Поэтому говорят, что два пучка *собственно проективны*, если между их элементами установлено проективное, но не перспективное соответствие.

Теорема 3.11 *Проективное преобразование прямой, отличное от тождественного, не может иметь более двух неподвижных точек.*

Следует из теоремы 3.2, поскольку на прямой каждые три различные точки являются точками почти общего положения.

Определение 3.4 *Преобразование называют инволюцией, если его квадрат является тождественным преобразованием, но само оно не является тождественным.*

Теорема 3.12 *Если A и A', B и B' — четыре различные точки проективной прямой, то существует единственная проективная инволюция f, при которой $f(A) = A'$ и $f(B) = B'$.*

Рассмотрим два репера, $R(A, B, A^{'})$ и $R^{'}(A^{'}, B^{'}, A)$. Тогда существует единственное проективное преобразование f, такое, что $f(A) = A^{'}$, $f(B) = B^{'}$, $f(A^{'}) = A$. Покажем, что f — инволюция, то есть для любой точки прямой $f(M) = M^{'}$ и $f(M^{'}) = M$. Так как f — проективное, оно сохраняет сложное отношение любых четырех точек прямой, следовательно $(AA^{'}, MM^{'}) = (A^{'}A, M^{'}f(M^{'}))$.

Учитывая, что по свойствам сложного отношения $(AA^{'}, MM^{'}) = (A^{'}A, M^{'}M)$, получаем $(A^{'}A, M^{'}f(M^{'})) = (A^{'}A, M^{'}M)$. Тогда $f(M^{'}) = M$. Теорема доказана.

Теорема 3.13 *Если проективная инволюция имеет одну неподвижную точку, то она имеет и вторую неподвижную точку.*

Пусть f — проективная инволюция, B — неподвижная точка этой инволюции, то есть $f(B) = B$. Для произвольной точки $A \neq B$ прямой, обозначим через $f(A) = A^{'}$. Тогда $f(A^{'}) = A$ и точка $A^{'} \neq B$. Для трех различных точек $A, B, A^{'}$ существует такая точка C, что $(AA^{'}, BC) = -1$, откуда следует, в силу проективности f, что $(A^{'}A, Bf(C)) = -1$, Но тогда, по свойству 2) сложного отношения $(AA^{'}, Bf(C)) = -1$. Тогда $f(C) = C$.

3.3 Проективные преобразования плоскости

Определение 3.5 *Говорят, что биекция f проективной плоскости на себя сохраняет коллинеарность точек, если любым трем точкам A, B, C, принадлежащим одной прямой, соответствуют три точки $f(A), f(B), f(C)$, также лежащие на одной прямой.*

Теорема 3.14 *Если биекция f проективной плоскости на себя сохраняет коллинеарность точек, то образы любых трех точек A, B, C, общего положения также являются точками общего положения.*

Допустим противное. Предположим, что нашлись три точки общего положения, A, B и C такие, что их образы $f(A) = A', f(B) = B'$ и $f(C) = C'$ лежат на одной прямой. Обозначим ее m'. Возьмем произвольную точку X', не лежащую на m'. Докажем, что тогда она не имеет прообраза при f, а это будет противоречить биективности отображения f. Если какая-либо точка Y лежит на прямых AB, AC или BC, то ее образ $Y' = f(Y)$ принадлежит m' по условию. Если Y не лежит ни на одной из данных прямых, то любая прямая l, проходящая через Y будет пересекать указанные прямые, причем не менее, чем в двух точках. Пусть, для определенности, это будут точки $K \in AB$ и $L \in BC$. Тогда $K' \in m'$ и $L' \in m'$, а, следовательно, и $Y' \in m'$. Мы получим, что

$$\forall\ Y \in \alpha \quad Y' = f(Y) \in m'.$$

Следовательно, $\alpha = f^{-1}(m')$, а так как $X' \notin m'$, то $f^{-1}(X') = \varnothing$. Это противоречит биективности f.

Следствие 3.2 *Если биекция проективной плоскости сохраняет коллинеарность точек, то образом прямой является прямая.*

Пусть $l \subset \alpha$. Возьмем $A, B \in l$ и обозначим через l' прямую $A'B'$, где $A' = f(A)$ и $B' = f(B)$. Тогда $\forall M \in l$ точка $M' = f(M) \in l$, то есть $f(l) \subset\ l'$.

Возьмем теперь произвольную точку $N' \subset l'$. Тогда $f^{-1}(N') \in l$. Если $N = f^{-1}(N') \notin l$, то точки A, B, N – общего положения, следовательно по теореме 3.14 $\ N' \notin l'$, что противоречит выбору точки N'. Значит $f(l) = l'$, что и требовалось доказать.

Следствие 3.3 *Если биекция проективной плоскости сохраняет коллинеарность точек, то образы точек почти общего положения также будут точками почти общего положения.*

Следствие 3.4 *Если биекция проективной плоскости сохраняет коллинеарность точек, то образом полного четырехвершинника также будет полный четырехвершинник.*

Теорема 3.15 *Если биекция проективной плоскости $P^2(F)$ на себя*
а) сохраняет коллинеарность точек;
б) сохраняет сложное отношение четырех точек прямой.
в) оставляет неподвижными какие-либо четыре точки почти общего положения,
то она является тождественным преобразованием.

Пусть A, B, C и D – неподвижные точки почти общего положения. (Смотри рис. 6) Тогда прямые AC и BD различны. Обозначим через E точку пересечения этих прямых. Поскольку точки A и C неподвижны, а f сохраняет коллинеарность точек, то $E' = f(E) \in AC$. Поскольку точки B и D неподвижны, а f сохраняет коллинеарность точек, то $E' = f(E) \in BD$. Тогда $E' \in ((AC) \cap (BD))$, следовательно $E' = E$. Таким образом мы нашли еще одну неподвижную точку биекции f. Мы получили, что на прямых AC и BD есть по три неподвижных точки: $A, C, E \in AC$ и $B, D, E \in BD$. Докажем теперь, что любая точка на прямой AC неподвижна при отображении f. Пусть точка $M \in AC$ и не совпадает с точками A, C, E. Тогда $M' = f(M) \in AC$, так как A и C неподвижны, а f сохраняет коллинеарность точек. Поскольку f сохраняет еще и сложное отношение четырех точек прямой, то $(AC, EM) = (AC, EM')$, откуда следует, что $M = M'$. В силу произвольного выбора точки M мы получаем, что любая точка прямой AC неподвижна. Аналогично можно доказать неподвижность любой точки прямой BD.

Проводя подобные рассуждения для любой пары прямых, проходящих через точки A, B, C и D, получим, что все точки, принадлежащие каждой из шести прямых

$$AB,\ AC,\ AD,\ BC,\ BD,\ CD,$$

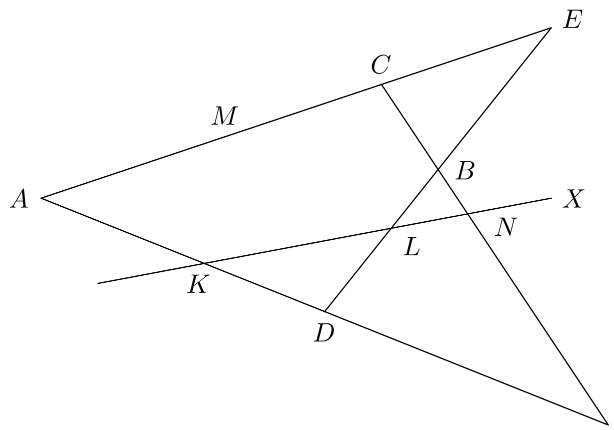

Рис. 6: Чертеж к теореме 3.15

неподвижны при биекции f.

Покажем, что любая точка плоскости, не лежащая на указанных прямых, также будет неподвижной. Пусть X — такая точка, а $X' = f(X)$. Проведем через нее произвольную прямую. Тогда из шести точек пересечения этой прямой с указанными точечно-неподвижными прямыми по меньшей мере три различных. Обозначим их K, L, N. Так как они неподвижны, а $(KL, NX) = (KL, NX')$, то $X' = X$, и, значит, точка X неподвижна. В силу произвольности выбора точки X, утверждение теоремы 3.15 доказано.

Сформулируем признак проективности биекции проективной плоскости на себя, который иногда называют *основной теоремой проективной геометрии* на плоскости.

Теорема 3.16 (Основная теорема проективной геометрии) *Для того, чтобы биекция проективной плоскости $P^2(F)$ на себя была проективным преобразованием, необходимо и достаточно, чтобы она*

а) сохраняла коллинеарность точек;

б) сохраняла сложное отношение четырех точек прямой.

1. Необходимость следует из свойств проективных преобразований.

2. Достаточность. Пусть f – преобразование проективной плоскости α, удовлетворяющее условиям теоремы. Возьмем на плоскости α четыре точки почти общего положения A, B, C и D. Обозначим через $A^{'}, B^{'}, C^{'}$ и $D^{'}$ их образы при преобразовании f. Тогда по следствию 3.3 из теоремы 3.14 точки $A^{'}, B^{'}, C^{'}$ и $D^{'}$ являются также точками почти общего положения. Согласно теореме 3.3 существует единственное проективное преобразование g проективной плоскости α такое, что

$$g(A) = A^{'},\ g(B) = B^{'},\ g(C) = C^{'},\ g(D) = D^{'}.$$

Тогда композиция преобразований $g^{-1} \circ f$ удовлетворяет условиям теоремы 3.15, поскольку f удовлетворяет им по условию, а g^{-1} — как обратное к проективному. Тогда $g^{-1} \circ f = 1_\alpha$, откуда следует

$$(g \circ g^{-1}) \circ f = g \circ 1_\alpha \Longrightarrow 1_\alpha \circ f = g \circ 1_\alpha \Longrightarrow f = g.$$

Но g — проективное, следовательно и f также проективное. Теорема доказана.

Замечание. Для действительной проективной плоскости второе условие в теореме 3.15 является лишним, однако в этом случае для доказательства теоремы потребуются дополнительные усилия. Смотри, например, [7].

Теорема 3.17 *Проективное преобразование действительной проективной плоскости имеет хотя бы одну неподвижную точку и хотя бы одну инвариантную прямую.*

Подробное доказательство можно прочитать, например, в [2].

При проективном преобразовании точка будет неподвижной тогда и только тогда, когда порождающий эту точку вектор будет собственным вектором линейного оператора, порождающего данное проективное преобразование. Так как характеристическое уравнение, которое нужно решить для нахождения собственного вектора, будет третьей степени, оно всегда имеет хотя бы один действительный корень. Следовательно собственный вектор, соответствующий этому корню, будет порождать неподвижную точку. Из линейной алгебры известно, что в действительном векторном пространстве линейный оператор всегда имеет двумерное инвариантное подпространство. (Смотри, например, И.М.Гельфанд, Лекции по линейной алгебре.) Тогда порожденная им прямая будет инвариантной.

Определение 3.6 *Гомологией называется не тождественное преобразование проективной плоскости, имеющее точечно-неподвижную прямую.*

Определение 3.7 *Точечно-неподвижная прямая гомологии называется осью гомологии.*

Следствие 3.5 *Гомология имеет пучок инвариантных прямых.*

Зададимся вопросом, сколько неподвижных точек, не лежащих на точечно неподвижной прямой, может иметь гомология? Докажем, что если такие есть, их не более одной. Допустим, что существуют две различные неподвижные точки гомологии, не лежащие на точечно-неподвижной прямой. Тогда очевидно, что найдется четверка точек почти общего положения, каждая из которых неподвижна при данной гомологии.[5] Тогда проективное преобразование должно быть тождественным. Это противоречит определению гомологии как не тождественного преобразования. Обозначим через S неподвижную точку гомологии, не лежащую на точечно неподвижной прямой. Тогда каждая прямая пучка с центром S является инвариантной. Итак, в этом случае существует пучок инвариантных прямых.

В случае, когда все неподвижные точки гомологии лежат на точечно неподвижной прямой, по принципу двойственности все инвариантные прямые пересекаются в одной точке, которая обязана быть неподвижной, следовательно должна лежать на точечно неподвижной прямой. Итак, в этом случае также существует пучок инвариантных прямых, причем центр пучка лежит на точечно неподвижной прямой.

Определение 3.8 *Точечно-неподвижная прямая гомологии называется осью гомологии, а центр пучка инвариантных прямых называется центром гомологии.*

Теорема 3.18 *Если при гомологии f точка A не лежит на оси гомологии и $A_1 = f(A)$, то прямая AA_1 — инвариантная прямая гомологии и, следовательно, проходит через центр S гомологии.*

Если $A \neq S$, то прямая AS инвариантная, то есть $SA = SA_1$, следовательно образ точки A, точка $A_1 = f(A) \in AS$, что и требовалось доказать.

На рис. 7 показано построение соответствующих точек гомологии с центром S и осью s.

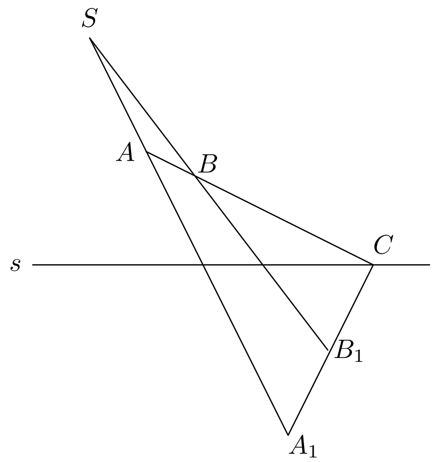

Рис. 7: Построение соответствующих точек гомологии.

[5] Такую четверку образуют, например, такие точки: две данные точки A и B, не лежащие на оси гомологии и любая пара точек оси гомологии, отличных от точки пересечения прямой AB с осью гомологии.

4 Кривые второго порядка на проективной плоскости

4.1 Основные определения и теоремы

В данном разделе проективная плоскость рассматривается над полем действительных чисел.

Упражнения по теме можно найти в [13], [14], [15].

Определение 4.1 *Множество точек действительной проективной плоскости называется кривой второго порядка, если их координаты в некотором проективном репере удовлетворяют уравнению второй степени*

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0, \text{ где } a_{ij} = a_{ji}.$$

Теорема 4.1 *Определение корректно, то есть в любом проективном репере координаты точек кривой второго порядка удовлетворяют уравнению вида*

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0, \text{ где } a_{ij} = a_{ji}.$$

Проверяется непосредственно использованием формул преобразования матрицы формы при замене базиса.

Следствие 4.1 *При любом проективном преобразовании f действительной проективной плоскости образом кривой второго порядка также является кривая второго порядка.*

Теорема 4.2 *На действительной проективной плоскости существуют ровно пять типов кривых второго порядка.*

Для любой кривой второго порядка можно подобрать такой специальный репер, в котором уравнение кривой примет один из следующих видов:

$$1.\quad x_1^2+x_2^2+x_3^2=0;\quad 2.\quad x_1^2+x_2^2-x_3^2=0;$$

$$3.\quad x_1^2+x_2^2=0;\quad 4.\quad x_1^2-x_2^2=0;\quad 5.\quad x_1^2=0$$

Доказательство следует из теоремы Лагранжа о возможности приведения квадратичной формы к каноническому виду. Если ранг формы равен трем, мы имеем первые два вида, если ранг формы равен двум, мы имеем вторые два вида, если ранг равен единице — имеем вид пять.

Определение 4.2 *Овальной кривой на действительной проективной плоскости называют множество точек пересечения соответствующих прямых двух собственно проективных пучков*[6].

Теорема 4.3 (Штейнера) *Всякая овальная кривая есть кривая второго порядка типа 2).*

Пусть $\pi(S_1)$ и $\pi(S_2)$ — два собственно проективных пучка с центрами в точках S_1 и S_2 соответственно. Покажем, что в некотором специальном (а следовательно и в любом) проективном репере точки пересечения соответствующих прямых этих пучков имеют координаты, удовлетворяющие некоторому уравнению второй степени. Обозначим

$$(S_1S_2) = a \in \pi(S_1), \quad (S_1S_2) = b' \in \pi(S_2), \quad f(a) = a' \in \pi(S_2), \quad b = f^{-1}(b') \in \pi(S_1).$$

Пусть также $E = c\cap c'$, $P = b\cap a'$, а $X = x\cap x'$ — текущая точка пересечения соответствующих прямых пучков. Другими словами, X — текущая точка овальной кривой. Смотри рис. 8.

Итак, при собственно проективном соответствии f

$$a \longrightarrow a',\ b \longrightarrow b' = a,\ c \longrightarrow c',\ x \longrightarrow x'.$$

Выберем репер $R(S_1, S_2, P, E)$, где $S_1, S_2, P,$ – базисные точки, а E – единичная. Обозначим

$$E_1 = (S_1E)\cap a' \quad E_2 = (S_2E)\cap b \quad X_1 = (S_1X)\cap a' \quad X_2 = (S_2X)\cap b$$

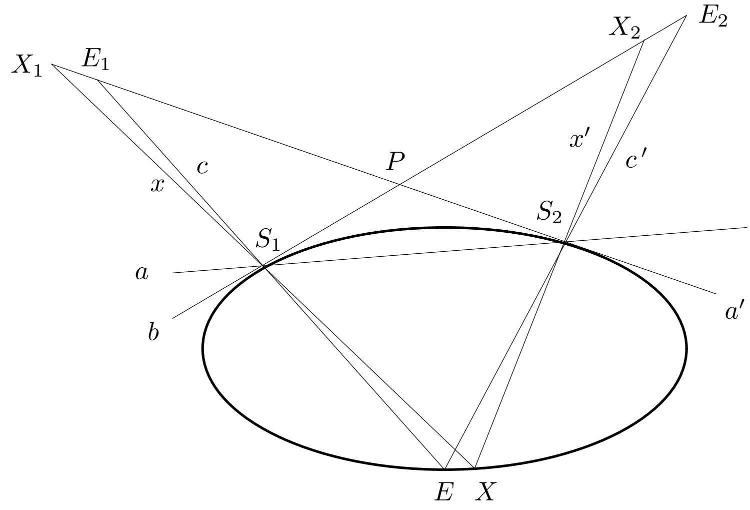

Рис. 8: Теорема 4.3 (Штейнера)

Так как $a' \notin \pi(S_1)$, а $b \notin \pi(S_2)$, то

$$(ab, cx) = (S_2P, E_1X_1), \quad (a'b', c'x') = (PS_1, E_2X_2).$$

Тогда, поскольку отображение f проективное, $(ab, cx) = (a'b', c'x')$, откуда следует равенство: $(S_2P, E_1X_1) = (PS_1, E_2X_2)$. Вычислив проективные координаты точек, входящих в полученное равенство сложных отношений и вычислив сами сложные отношения, получим уравнение: $x_1x_2 - x_3^2 = 0$. Действительно,

$$S_1(1:0:0),\ S_2(0:1:0),\ P(0:0:1),\ E(1:1:1),\ X(x_1:x_2:x_3).$$

Поскольку S_1P имеет уравнение $x_2 = 0$, а S_2P имеет уравнение $x_1 = 0$, то $E_1(0:1:1)$ и $E_2(1:0:1)$. Аналогично $X_1(0:x_2:x_3)$, $X_2(x_1:0:x_3)$. Теперь

$$(S_2P, E_1X_1) = x_2/x_3, \quad (PS_1, E_2X_2) = x_3/x_1.$$

Так как сложные отношения равны, то $x_2/x_3 = x_3/x_1$. Отсюда получаем заявленное уравнение. Непосредственной подстановкой координат легко убедиться в том, что точки S_1, S_2, E принадлежат кривой. Простая линейная замена координат

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 - y_2, \quad x_3 = y_3$$

показывает, что кривая имеет тип 2).

Покажем теперь, что любая точка, координаты которой удовлетворяют в репере R уравнению $x_1x_2 - x_3^2 = 0$, может быть получена как точка пересечения соответствующих прямых проективных пучков $\pi(S_1)$ и $\pi(S_2)$.

Итак, пусть точка $A(\xi_1 : \xi_2 : \xi_3)$ такова, что $\xi_1\xi_2 - \xi_3^2 = 0$, тогда $\xi_2/\xi_3 = \xi_3/\xi_1$. Проведем через точку A две прямые, S_1A и S_2A. Остается показать, что $f(S_1A) = S_2A$. Обозначим $S_1A = l,\ S_2A = l'$ и покажем, что $(ab, cl) = (a'b', c'l')$. Имеем

$$(ab, cl) = (S_2P, E_1L_1) = \xi_2/\xi_3, \quad (a'b', c'l'') = (PS_1, E_2L_2) = \xi_3/\xi_1, \text{ где}$$

$$L_1 = (S_1A) \cap a', \quad L_2 = (S_2A) \cap b.$$

Из равенства отношений $\xi_2/\xi_3 = \xi_3/\xi_1$ следут, что $(ab, cl) = (a'b', c'l')$. Теорема доказана.

Теорема 4.4 *Всякая кривая второго порядка типа 2) является овальной, причем за центры порождающих пучков можно принять любые две точки кривой, а соответствующими считать те прямые пучков, которые пересекаются в точке, принадлежащей данной кривой.*

Доказательство теорем 4.3 и 4.4 можно прочитать, например, в книгах [1] или [2].

Следствие 4.2 *Через любые пять точек плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, проходит единственная овальная кривая (кривая второго порядка).*

[6]Смотри замечание после теоремы 3.10.

4.2 Полюсы и поляры

Определение 4.3 *Пусть $A(\vec{x}, \vec{y})$ — симметричная билинейная форма. Будем говорить что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сопряжены относительно этой формы, если $A(\vec{p}, \vec{q}) = 0$.*

В зафиксированном базисе условие сопряженности векторов $\vec{p}\ (p_1, p_2, p_3)$ и $\vec{q}\ (q_1, q_2, q_3)$ относительно формы $A(\vec{x}, \vec{y})$ выглядит так:

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} p_i q_j = 0, \text{ где } a_{ij} = a_{ji}.$$

Определение 4.4 *Пусть γ — кривая второго порядка с уравнением*

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0 \quad \textit{в некотором репере, где } a_{ij} = a_{ji}$$

и P – точка. Говорят, что точка Q сопряжена точке P относительно кривой γ, если вектор $\overrightarrow{Q}$ сопряжен вектору $\overrightarrow{P}$ относительно симметричной билинейной формы, которая определена левой частью уравнения кривой.

Теорема 4.5 *Сопряженность точек не зависит от выбора репера.*

Следствие 4.3 *Каждая точка кривой γ сопряжена сама с собой.*

Определение 4.5 *Полярой данной точки P относительно кривой γ называется множество всех точек проективной плоскости, сопряженных с P относительно кривой γ.*

Теорема 4.6 *Поляра точки относительно овальной кривой есть прямая.*

Пусть в некотором проективном репере точка P имеет координаты $(p_1 : p_2 : p_3)$, а овальная кривая задана уравнением

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0, \qquad \text{где } a_{ij} = a_{ji}.$$

Запишем уравнение поляры точки P :

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} p_i x_j = 0, \qquad \text{где } a_{ij} = a_{ji}.$$

Более подробно,

$$(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3)x_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3)x_2 + (a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3)x_3 = 0.$$

Все три скобки в левой части уравнения не могут обращаться в нуль, поскольку матрица (a_{ij}) невырождена, следовательно при обращении в нуль всех трех скобок система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3 &= 0 \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3 &= 0 \\ a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 &= 0 \end{cases}$$

имела бы лишь нулевое решение, следовательно точка P имела бы все три нулевые координаты, что невозможно.

Итак, мы получили, что уравнение поляры является уравнением прямой.

Теорема 4.7 *Если точки P и Q различны и сопряжены относительно кривой γ, а прямая PQ пересекает γ в точках A и B, то $(AB, PQ) = -1$.*

На рис. 9 изображена кривая и точки $A,\ B,\ P$ и Q.

Пусть $\vec{X}=\lambda\vec{P}+\mu\vec{Q}$ – векторное уравнение прямой PQ, где $\vec{X}$ – текущая точка прямой. Уравнение кривой запишем в операторном виде: $\vec{x}C\vec{x}=0$, где $C=(c_{ij})$ – матрица коэффициентов уравнения кривой. Положим, что точкам A и B соответствуют следующие значения параметров λ и μ :

$$\vec{A}=\lambda_1\vec{P}+\mu_1\vec{Q} \text{ и } \vec{B}=\lambda_2\vec{P}+\mu_2\vec{Q}.$$

Так как точки A и B лежат на кривой, то параметры λ_1 и μ_1, а также λ_2 и μ_2 удовлетворяют уравнению:

$$\lambda^2\vec{P}C\vec{P}+2\lambda\mu\vec{P}C\vec{Q}+\mu^2\vec{Q}C\vec{Q}=0.$$

Не ограничивая общности рассуждений, можно предположить, что $\lambda\neq 0$ и обозначить через $t_1=\mu_1/\lambda_1$, а через $t_2=\mu_2/\lambda_2$. Тогда t_1 и t_2 являются корнями уравнения

$$qt^2+2rt+p=0, \text{ где } q=\vec{Q}C\vec{Q},\ r=\vec{P}C\vec{Q},\ p=\vec{P}C\vec{P}.$$

В силу сопряженности точек P и Q коэффициент $r=0$, откуда следует, что $t_1+t_2=0$. Тогда

$$\frac{\mu_1}{\lambda_1}+\frac{\mu_2}{\lambda_2}=0\Rightarrow\frac{\mu_1}{\lambda_1}:\frac{\mu_2}{\lambda_2}=-1\Rightarrow(PQ,AB)=-1.$$

Теорема доказана.

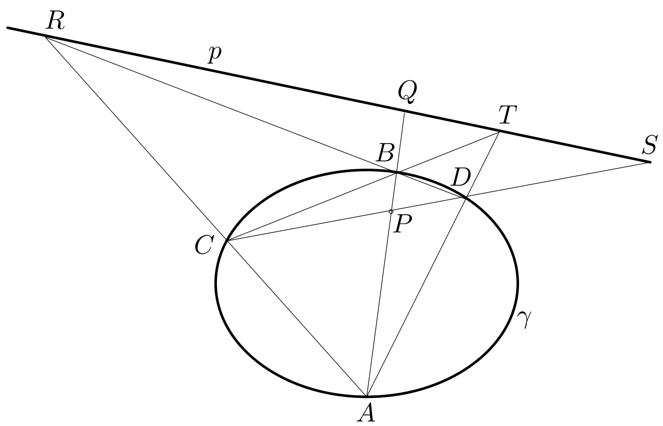

Рис. 9: Построение поляры точки P.

Теорема 4.8 *Пусть γ – овальная кривая, A и B – различные точки кривой. Любые точки P и Q, гармонически разделяющие хорду AB, сопряжены относительно кривой γ.*

Теорема доказывается аналогично предыдущей. Доказательство теоремы 4.8 можно прочитать, например, в [1] или [2].

Следствие 4.4 *Полярой точки P, принадлежащей кривой γ, является касательная к кривой γ в точке P.*

На рис. 9 можно увидеть построение поляры данной точки. [7]

Теорема 4.9 (Принцип взаимности) *Если точка Q лежит на поляре точки P, то точка P лежит на поляре точки Q.*

Пусть в некотором проективном репере точка P имеет координаты $(p_1:p_2:p_3)$, точка Q имеет координаты $(q_1:q_2:q_3)$, а овальная кривая задана уравнением

$$\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=0, \qquad \text{где } a_{ij}=a_{ji}.$$

[7]Чтобы построить поляру точки P, которая расположена внутри овальной кривой, как показано на рис. 9, проведем через эту точку P две хорды AB и CD. В полученном полном четырехвершиннике $ACBD$ построим диагональные точки R и T. Тогда диагональ $p=RT$ будет являться полярой точки P.

Запишем уравнение поляры точки P :

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} p_i x_j = 0, \quad \text{где } a_{ij} = a_{ji}.$$

Если точка Q лежит на поляре точки P, то

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} p_i q_j = 0,$$

что равносильно равенству

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} q_i p_j = 0.$$

Последнее можно получить из того, что точка P лежит на поляре точки Q.

Замечание: Задание на проективной плоскости некоторой фиксированной овальной кривой (кривой второго порядка типа 2) устанавливает некоторую биекцию между точками и прямыми проективной плоскости. Именно, каждой точке соответствует ее поляра и наооборот, каждой прямой соответствует полюс.

Отметим, что эта биекция сохраняет инцидентность точек и прямых и называется *полярным соответствием.*

4.3 Теоремы Паскаля и Брианшона

В первой из этих теорем речь идет о шестиугольнике, вписанном в кривую второго порядка (овальную кривую). При этом под *шестиугольником* понимается:

1) упорядоченная шестерка точек, которые называются *вершинами* шестиугольника. На рис. 10 вершинами шестиугольника являются точки $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$.

2) шесть прямых, проходящих через соседние вершины. Они называются *сторонами* шестиугольника. На рис. 10 сторонами являются прямые $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1$.

Говоря иначе, шестиугольником называют шестизвенную замкнутую ломаную, с той разницей, что стороны — это не отрезки, а прямые, а вершины ломаной пронумерованы в циклическом порядке.

Противоположными сторонами шестиугольника называют стороны, которые при циклическом обходе вершин встречаются через две.

Наконец, шестиугольник называют *вписанным* в кривую второго порядка, если она проходит через все его вершины.

Теорема 4.10 (Б.Паскаля) *Если шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ вписан в кривую второго порядка, то его противоположные стороны A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, A_3A_4 и A_6A_1, пересекаются соответственно в точках X, Y, Z, принадлежащих одной прямой.*

Доказательство этой теоремы и последующих хорошо изложено в [1], [2], [4].

Рассмотрим два пучка π_1 и π_5 с центрами в вершинах A_1 и A_5 соответственно. (Смотри рисунок 10) Тогда, согласно теореме 4.4, между прямыми пучков установлено проективное, но

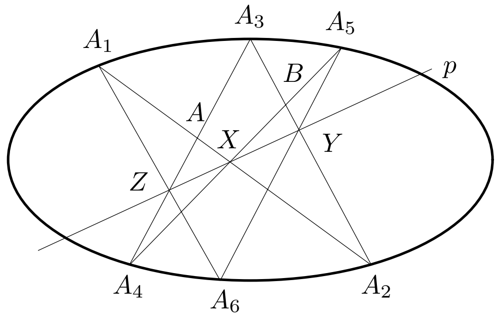

Рис. 10: Чертеж к теореме 4.10

не перспективное соответствие. При этом соответствующими будут следующие пары прямых:

$$A_1A_3 \longleftrightarrow A_5A_3 \quad A_1A_2 \longleftrightarrow A_5A_2 \quad A_1A_6 \longleftrightarrow A_5A_6 \quad A_1A_4 \longleftrightarrow A_5A_4$$

Рассмотрим два сечения этих пучков. Первое при пересечении пучка π_1 с прямой $s_1 = A_3A_4$, а второе при пересечении пучка π_5 с прямой $s_2 = A_3A_2$. При пересечении пучка π_1 с прямой s_1 получаем точки

$$A_3 = s_1 \cap A_1A_3, \quad A = s_1 \cap A_1A_2, \quad Z = s_1 \cap A_1A_6, \quad A_4 = s_1 \cap A_1A_4,$$

а при пересечении пучка π_5 с прямой s_2 получаем точки

$$A_3 = s_2 \cap A_5A_3, \quad A_2 = s_2 \cap A_5A_2, \quad Y = s_2 \cap A_5A_6, \quad B = s_2 \cap A_5A_4.$$

Теперь рассмотрим проективное соответствие между точками прямых s_1 и s_2 :

$$A_3 \longleftrightarrow A_3 \quad A \longleftrightarrow A_2 \quad Z \longleftrightarrow Y \quad A_4 \longleftrightarrow B.$$

Поскольку точка A_3 соответствует сама себе, это соответствие перспективное, а следовательно прямые $AA_2,\ ZY,\ A_4B$ пересекаются в одной точке. Но так как $A_2A = A_2A_1,\ A_4B = A_4A_5$, а $AA_2 \cap A_4B = A_2A_1 \cap A_4A_5 = X$, то прямая ZY проходит через точку X. Это означает, что точки X, Y, Z принадлежат одной прямой.

Теорема 4.11 *Если противоположные стороны шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой, то шестиугольник вписан в кривую второго порядка.*

Доказательство этой теоремы можно посмотреть, например, в [1], [2], [4].

Теорема 4.12 (Брианшона) *Три прямые, проходящие через противоположные вершины шестиугольника, описанного возле овальной кривой, пересекаются в одной точке.*

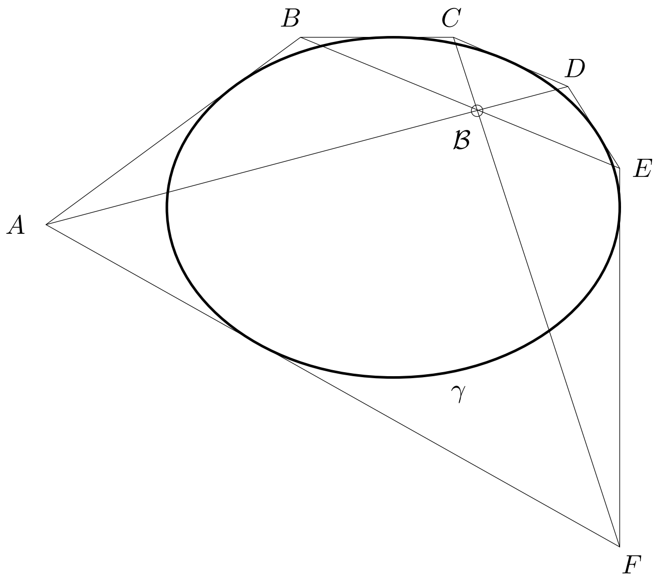

Рис. 11: Теорема Брианшона

На рис. 11 изображен шестиугольник, описанный около кривой второго порядка, и показана точка Брианшона $\mathcal{B}$.

Доказательство: Пусть γ – овальная кривая и $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – вписанный в нее шестиугольник. (См. рис. 12.) Применим к нему теорему Паскаля. Поляры t_i к точкам A_i относительно кривой γ являются касательными к линии γ в вершинах A_i и образуют шестиугольник $ABCDEF$, описанный около кривой γ. Так как полюсом стороны A_iA_j вписанного шестиугольника служит вершина описанного, являющаяся точкой пересечения касательных

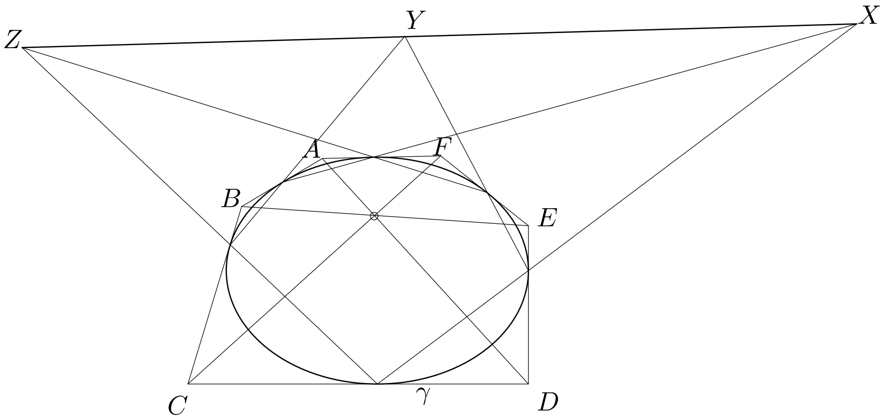

Рис. 12: Чертеж к теореме 4.12

t_i и t_j, то точкам Z, Y и X паскалевой прямой соответствуют при этом полярном соответствии три прямые, AD, BE и CF, проходящие через противоположные вершины описанного шестиугольника. Поскольку полярное соответствие сохраняет инцидентность, то из теоремы Паскаля и принципа двойственности следует истинность теоремы Брианшона.

Имеет место и обратная теорема.

Теорема 4.13 *Если в шестиугольнике прямые, проходящие через противоположные вершины шестиугольника, пересекаются в одной точке, то шестиугольник описан около некоторой овальной кривой.*

Доказательство можно прочитать, например, в [4] или [2]

Список литературы

[1] *Атанасян Л.С., Базылев В.Т.* Геометрия. Ч.2. М: Просвещение, 1987.

[2] *Базылев В.Т., Дуничев К.И.* Геометрия. Ч.2. М: Просвещение, 1975.

[3] *Певзнер С.Л.* Проективная геометрия. М: Просвещение, 1980.

[4] *Четверухин Н.Ф.* Проективная геометрия. М: Просвещение, 1969.

[5] *Бурбаки Н.* Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М: Физматгиз, 1962.

[6] *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М: Наука, 1966.

[7] *Лелон-Ферран Ж.* Основания геометрии. М: Мир, 1989.

[8] *Берже М.* Геометрия. т.1 М: Мир, 1984.

[9] *Кострикин А.И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия. М: МГУ, 1980.

[10] *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра. М: ФИЗМАТЛИТ, 2000.

[11] *Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. М: Наука, 1970.

[12] *Тышкевич Р.И., Феденко А.С.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Минск: Вышэйшая школа, 1968.

[13] *Моденов П.С., Пархоменко А.С.* Сборник задач по аналитической геометрии. М: Наука, 1976.

[14] *Комиссарук А.М.* Проективная геометрия в задачах. Минск: Вышэйшая школа, 1971.

[15] *Певзнер С.Л., Цаленко М.М.* Задачник-практикум по проективной геометрии. М: Просвещение, 1982.

[16] *Базылев В.Т. и др.* Сборник задач по геометрии. М: Просвещение, 1980.

[17] *Атанасян Л.С., Васильева М.В. и др.* Сборник задач по геометрии. Ч.2. М: Просвещение, 1975.