1 Проективное пространство

1.1 Определение и модели проективного пространства

Пусть V — $(n+1)$-мерное линейное пространство над полем F. На $V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ через $\sim$ обозначим отношение коллинеарности, то есть $\overrightarrow{x} \sim \overrightarrow{y} \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{y}$ для некоторого $0 \neq \lambda \in F$. Отношение $\sim$ будет эквивалентностью.

Опр. *Проективным пространством P, порожденным линейным пространством V, называется фактор множество $V \setminus \{0\}/\sim$.*

Опр. *Размерностью проективного пространства P, порожденного линейным пространством V, называется число $n = \dim V - 1$.*

Элементы проективного пространства называют точками. Для проективного пространства P существует каноническая проекция $\pi : V \setminus \{\overrightarrow{0}\} \longrightarrow P$, ставящая в соответствие всякому вектору класс коллинеарных ему векторов. Если $\pi(\overrightarrow{x}) = X$, то говорят, что $\overrightarrow{x}$ порождает точку X.

Опр. *Множество $\mathscr{P}$ называется моделью проективного пространства P^n, если существует биекция $\varphi : P^n \longrightarrow \mathscr{P}$.*

Прим 1 (Связка прямых)**.** Пусть $\mathscr{A}^{n+1}$ — $(n+1)$-мерное аффинное пространство над линейным пространством V^{n+1} и S — некоторая точка $\mathscr{A}^{n+1}$. Зададим модель для проективного пространства P^n, порожденного V^{n+1}. Обозначим $\mathscr{P}$ связку прямых, проходящих через S, и определим отображение $\varphi : P^n \longrightarrow \mathscr{P}$, которое каждому классу векторов, порожденному $\overrightarrow{x}$, из P^n ставит в соответствие прямую из $\mathscr{P}$ с направляющим вектором $\overrightarrow{x}$.

Прим 2 (Сфера)**.** Пусть дана единичная гиперсфера в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве $\mathscr{A}^{n+1}$, связанное с линейным пространством V^{n+1}. Обозначим $\mathscr{P}$ множество всех пар диаметрально противоположных точек гиперсферы. Отображение φ каждому классу коллинеарных векторов ставит в соответствие пару точек пересечения прямой, проходящей через центр гиперсферы параллельно этим векторам, с гиперсферой.

Прим 3 (Расширенная гиперплоскость)**.** Пусть $\mathscr{A}^{n+1}$ — $(n+1)$-мерное аффинное пространство над линейным пространством V^{n+1}, $S \in \mathscr{A}^{n+1}$ и σ — некоторая гиперплоскость в $\mathscr{A}^{n+1}$, причем $S \notin \sigma$. Зададим модель для проективного пространства P^n, порожденного V^{n+1}.

Дополним $\mathscr{A}^{n+1}$ элементами, которые называются "бесконечно удаленными точками", так, что каждой прямой в $\mathscr{A}^{n+1}$ соответствует одна такая точка, параллельным прямым — одинаковые, а не параллельным — разные. Каждую прямую, дополненную соответствующей ей "бесконечно удаленной" точкой, называют "расширенной прямой". Гиперплоскость σ, дополненная "бесконечно удаленными" точками лежащих в ней прямых, называется "расширенной гиперплоскостью" (то же касается любых плоскостей). Ее мы обозначим $\mathscr{P}$.

Определим отображение $\varphi : P^n \to \mathscr{P}$, которое каждому классу векторов, порожденному $\overrightarrow{x} \in P^n$, поставит в соответствие точку пересечения расширенной прямой, проходящая через S параллельно $\overrightarrow{x}$, и расширенной гиперплоскости $\mathscr{P}$.

В случае, когда $\overrightarrow{x}$ не принадлежит направляющему пространству σ, то прямая $l = S + L(\overrightarrow{x})$ пересечет σ в точке из $\mathscr{A}^{n+1}$; если же прямая l параллельна σ, то расширенная прямая, задаваемая l, пересечет расширенную прямую, параллельную l и лежащую в σ, в бесконечно удаленной точке.

1.2 Проективный репер

Опр. *Два базиса $(\overrightarrow{u}_i)$ и $(\overrightarrow{v}_i)$ $(n+1)$-мерного линейного пространства V называются гомотетичными, если существует такое $\lambda \in F$, что $\overrightarrow{v}_i = \lambda \overrightarrow{u}_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n+1$.*

Опр. *Проективным репером (системой координат) проективного пространства P^n, порожденного линейным пространством V^{n+1}, называется класс гомотетичных базисов линейного пространства V^{n+1}.*

Опр. *Пусть M — точка проективного пространства P^n для которой вектор $\overrightarrow{m}$ является порождающим. Проективными (или однородными) координатами точки M в проективном репере $\mathscr{R}$ называют класс ненулевых наборов, пропорциональных координатам $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ вектора $\overrightarrow{m}$ в некотором базисе из $\mathscr{R}$, обозначаемый $(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})_{\mathscr{R}}$.*

Такое определение корректно. Возьмем проективные координаты точки $M\,(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})_{\mathscr{R}}$ и $(y_1 : y_2 : \dots : y_{n+1})_{\mathscr{R}}$. Тогда $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ — координаты какого-то вектора $\overrightarrow{x}$, порождающего M, в некотором базисе σ из $\mathscr{R}$, и $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ — координаты $\overrightarrow{y}$, порождающего M, в базисе σ' из $\mathscr{R}$. По определению, $\overrightarrow{x} = \mu \overrightarrow{y}$ для подходящего μ. Расписывая это равенство по базисам σ и σ', которые пропорциональны с некоторым коэффициентом λ, получаем, что взятые вначале проективные координаты пропорциональны с коэффициентом $\mu\lambda$.

Опр. *Точки $A_1, A_2, \dots, A_k$ проективного пространства называют точками общего положения, если порождающие их векторы линейно независимы.*

Точки $A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$ называют точками почти общего положения, если любые k из низ являются точками общего положения.

Опр. *Пусть в проективном пространстве задан репер $\mathscr{R}$. Говорят, что базис $\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_{n+1}$ из $\mathscr{R}$ согласован с последовательностью точек почти общего положения $A_1, \dots, A_{n+2}$, если $\overrightarrow{e}_i$ порождает A_i для всех $i = 1, \dots, n+1$, и $\overrightarrow{e}_1 + \dots + \overrightarrow{e}_{n+1}$ порождает A_{n+2}.*

Теор 1. *В проективном пространстве для любой максимальной последовательности точек почти общего положения существует единственный проективный репер $\mathscr{R}$ такой, что каждый принадлежащий ему базис согласован с данной последовательностью точек.*

Док-во. Пусть $A_1, \dots, A_{n+2}$ — максимальная последовательность точек почти общего положения, и $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n+2}$ — порождающие их векторы. Тогда $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n+1}$ — базис линейного пространства, и $\vec{a}_{n+2} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots \lambda_{n+1} \vec{a}_{n+1}$ для некоторого ненулевого набора λ_i. Векторы $\vec{e}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1, \dots, \vec{e}_{n+1} = \lambda_{n+1} \vec{a}_{n+1}$ также образуют базис, который согласован с точками $A_1, \dots, A_{n+2}$. Для любого базиса, гомотетичного рассмотренному, это тоже верно. Получили репер $\mathscr{R}$.

Пусть $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+1}$ — еще один базис, который согласован с последовательностью $A_1, \dots, A_{n+2}$. Тогда $\vec{v}_i$ порождает A_i и поэтому $\vec{v}_i = \mu_i \vec{e}_i$ для всех $i = 1, \dots, n+1$. Кроме того, $\vec{v}_1 + \dots \vec{v}_{n+1} = \mu_{n+2}(\vec{e}_1 + \dots \vec{e}_{n+1})$ для некоторого μ_{n+2}. Отсюда $\mu_1 \vec{e}_1 + \dots \mu_{n+1} \vec{e}_{n+1} = \mu_{n+2} \vec{e}_1 + \dots \mu_{n+2} \vec{e}_{n+1})$ и, с учетом независимости, $\mu_i - \mu_{n+2} = 0$ для всех $i \leqslant n+1$. Таким образом, базис $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+1}$ гомотетичен $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n+1}$. Показано, что любой базис, согласованный с последовательностью $A_1, \dots, A_{n+2}$ принадлежит реперу $\mathscr{R}$. □

Теор 2 (формулы преобразования координат). *Пусть в проективном пространстве заданы два репера $\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}'$. Тогда для координат $(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})_{\mathscr{R}}$ и $(x'_1 : x'_2 : \dots : x'_{n+1})_{\mathscr{R}'}$ точки M верны формулы*

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_{n+1} \end{pmatrix}$$

где $\lambda \neq 0$ и C — матрица перехода от некоторого базиса из $\mathscr{R}$ к базису из $\mathscr{R}'$.

Док-во. Пусть $\sigma \in \mathscr{R}$ и $\sigma' \in \mathscr{R}'$ и вектор $\vec{m}$ порождает M. Для некоторого μ координаты $\vec{m}$ в базисе σ можно записать $(\mu x_1, \dots, \mu x_{n+1})$ и, аналогично, $(\mu' x_1, \dots, \mu' x_{n+1})$ — координаты $\vec{m}$ в σ'. Обозначив C матрицу перехода от σ к σ' и $\lambda = \frac{\mu}{\mu'}$, получаем указанную формулу. □

1.3 Плоскости в проективном пространстве

Опр. *Пусть P — проективное пространство, порожденное линейным пространством V, и W — $(k+1)$-мерное подпространство в V. Множество всех точек из P, порожденных векторами из W, называется k-мерной плоскостью.*

Одномерные плоскости называют прямыми, двухмерные плоскости — плоскостями, нульмерные плоскости уже названы точками. В n-мерном пространстве плоскости размерности $n-1$ называют гиперплоскостями.

Теор 3. *Пусть $\mathscr{R}$ — репер проективного пространства P^n и k-мерная плоскость α в P^n порождается линейным пространством W, заданным своим базисом $\vec{a}_1(a_{11}, \dots, a_{n+1,1})_\sigma, \dots, \vec{a}_{k+1}(a_{1,k+1}, \dots, a_{n+1,k+1})_\sigma$ для $\sigma \in \mathscr{R}$. Тогда плоскость α задается следующей системой параметрических уравнений:*

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \dots + a_{1,k+1}t_{k+1} \\ x_2 = a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{2,k+1}t_{k+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n+1} = a_{n+1,1}t_1 + a_{n+1,2}t_2 + \dots + a_{n+1,k+1}t_{k+1} \end{cases} \tag{1}$$

Док-во. Пусть $\vec{m}$ порождает M. Точка M принадлежит α тогда и только тогда, когда $\vec{m} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_{k+1}\vec{a}_{k+1}$ для некоторых $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$.

Если M имеет проективные координаты $(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})_{\mathscr{R}}$, то вектор $\vec{m}$ будет иметь координаты $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ в некотором $\sigma' \in \mathscr{R}$. Найдется такое λ, что в базисе $\sigma \in \mathscr{R}$ вектор $\vec{m}$ будет иметь координаты $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1})$. Поэтому, если точка M принадлежит плоскости α, то верно следующее равенство $\lambda(x_1, \dots, x_{n+1}) = \lambda_1(a_{11}, \dots, a_{n+1,1}) + \dots + \lambda_{k+1}(a_{1,k+1}, \dots, a_{n+1,k+1})$. То есть, взяв $t_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$, получаем что заказывали.

Аналогично и обратное. Если для $M(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})_{\mathscr{R}}$ верны формулы теоремы, то умножая их на подходящее λ переходим к координатам $\vec{m}$ в базисе σ, а затем и к векторному равенству. □

Теор 4. *Пусть $\mathscr{R}$ — репер n-мерного проективного пространства. Всякая k-мерная плоскость α задается в репере $\mathscr{R}$ системой линейных уравнений вида:*

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1,n+1}x_{n+1} = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2,n+1}x_{n+1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{n-k,1}x_1 + b_{n-k,2}x_2 + \dots + b_{n-k,n+1}x_{n+1} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

где ранг матрицы (2) равен $n - k$.

Всякая система (2) задает в репере $\mathscr{R}$ некоторую k-мерную плоскость.

Док-во. Для плоскости α можно составить параметрические уравнения (1). Ранг матрицы (1), как системы относительно t_i, равен $k + 1$. Поэтому можно выбрать $k + 1$ уравнений в новую систему так, чтобы эта система была однозначно разрешима относительно t_i. Будем считать, что выбраны первые $k + 1$ уравнений, так как этого можно добиться перестановкой уравнений и временным переименованием неизвестных. Решая эту подсистему, получим выражения $t_1, \dots, t_{k+1}$ через $x_1, \dots, x_{k+1}$. Подставляя полученные выражения t_i в оставшиеся неиспользованными $(n+1)-(k+1) = n-k$ уравнений (1), запишем систему вида (2), которая будет иметь ранг $n - k$, так как в каждом из ее уравнений будет только одна из неизвестных $x_{k+2}, x_{k+3}, \dots, x_n$ и матрица системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,k+1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,k+1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-k,1} & b_{n-k,2} & \dots & b_{n-k,k+1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Эта система (2) будет задавать плоскость α.

Пусть теперь дана система (2). Ранг $n - k$ максимально возможный, поэтому есть решения. Как известно, множество решений однородной системы линейных уравнений образует линейное пространство, размерность которого совпадает с числом свободных неизвестных $(n + 1) - (n - k) = k + 1$.

> Это пространство будет подпространством в пространстве векторов из F^{n+1}, где F — поле над которым все рассматривается. Но оно очевидно изоморфно $(k+1)$-мерному подпространству в линейном пространстве V, которым порождается проективное пространство: изоморфизм сопоставляет вектору $(x_1, \dots, x_{n+1})$ из F^{n+1} вектор в V, имеющий координаты $(x_1, \dots, x_{n+1})$.

Это линейное пространство по определению порождает k-мерную плоскость в нашем проективном пространстве. □

Теор 5. *Множество общих точек двух плоскостей плоскостей образует плоскость.*

Опр. *Проективной оболочкой плоскостей называют наименьшую по включению плоскость, в которой содержатся все данные плоскости.*

Теор 6. *Проективной оболочкой плоскостей α и β, порожденных линейными пространствами V и W соответственно, является плоскость, порожденная пространством $V + W$.*

1.4 Сложное отношение четырех точек

Опр. *Пусть A, B, C и D — четыре различные точки проективного пространства, лежащие на одной прямой, и $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ – порождающие их векторы. Пусть также $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, $\vec{d} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}$. Элемент $\omega = \dfrac{\beta\gamma}{\alpha\delta}$ называется сложным (двойным) отношением точек A, B, C, D.*

Сложное отношение четырех точек A, B, C, D обозначается (AB, CD).

Определение корректно. Точки A, B, C, D прямой различны, а поэтому порождающие их векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ попарно линейно независимы и принадлежат двухмерному линейному пространству. Так можно записать $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, $\vec{d} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}$ для α, β, γ, δ, причем $\alpha, \delta \neq 0$. Отсюда сложное отношение существует. Если векторы $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$, $\vec{d}'$ порождают те же точки, то $\vec{a} = \lambda_a\vec{a}'$, $\vec{b} = \lambda_b\vec{b}'$, $\vec{c} = \lambda_c\vec{c}'$, $\vec{d} = \lambda_d\vec{d}'$. Подставляя, $\lambda_c\vec{c}' = \alpha\lambda_a\vec{a}' + \beta\lambda_b\vec{b}'$, $\lambda_d\vec{d}' = \gamma\lambda_a\vec{a}' + \delta\lambda_b\vec{b}'$ или $\vec{c}' = \frac{\alpha\lambda_a}{\lambda_c}\vec{a}' + \frac{\beta\lambda_b}{\lambda_c}\vec{b}'$, $\vec{d}' = \frac{\gamma\lambda_a}{\lambda_d}\vec{a}' + \frac{\delta\lambda_b}{\lambda_d}\vec{b}'$. Теперь запишем новое сложное отношение $\frac{\beta\lambda_b\gamma\lambda_a}{\alpha\lambda_a\delta\lambda_b} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}$, то есть сложное отношение определено однозначно.

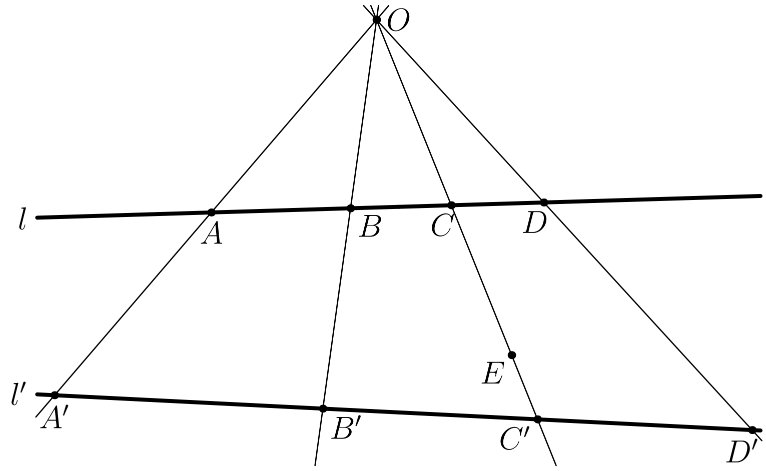
Теор 7 (Свойства)**.**

1. $(AB, CD) = (CD, AB)$
2. $(AB, DC) = (BA, CD) = \dfrac{1}{(AB, CD)}$
3. $(AC, BD) = (DB, CA) = 1 - (AB, CD)$

Док-во. Непосредственно по определению. □

Теор 8. *Сложное отношение сохраняется при центральном проектировании.*

Док-во. Пусть точки A, B, C, D принадлежат проективной прямой l и A', B', C', D' — их проекции из центра O на прямую l'. Возьмем точку E на прямой OC отличную от O, C и C'. Рассмотрим проективные реперы плоскости R и R', согласованные с точками (A, B, O, E) и (A', B', O, E) соответственно.



В репере R имеем $A'(1 : 0 : a)$, $B'(0 : 1 : b)$, $O(0 : 0 : 1)$ и $E(1 : 1 : 1)$. Запишем формулы преобразования координат при переходе от R к R':

> для некоторого базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \in R$ векторы $\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_1 + a\vec{e}_3$, $\vec{e}\,'_2 = \vec{e}_2 + b\vec{e}_3$, $\vec{e}\,'_3 = \vec{e}_3$ порождают точки A', B', O; подберем k_1, k_2, k_3 так, чтобы $k_1\vec{e}\,'_1 + k_2\vec{e}\,'_2 + k_3\vec{e}\,'_3$ порождал E, то есть базис $(k_1\vec{e}\,'_1, k_2\vec{e}\,'_2, k_3\vec{e}\,'_3)$ был согласован с (A', B', O, E) и поэтому принадлежал R'

$$\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k_1 & 0 & 0\\0 & k_2 & 0\\k_1 a & k_2 b & k_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}$$

Для согласованности столбцов $\begin{pmatrix}k_1 & 0 & 0 & 1\\0 & k_2 & 0 & 1\\k_1 a & k_2 b & k_3 & 1\end{pmatrix}$ берем $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1-a-b$.

Формулы превращаются в

$$\begin{cases}\lambda x_1 = x'_1\\ \lambda x_2 = x'_2\\ \lambda x_3 = ax'_1 + bx'_2 + (1-a-b)x'_3\end{cases}$$

Пусть в репере R точка D будет иметь координаты $(d_1 : d_2 : 0)$, а в R' — $D(d_1' : d_2' : d_3')$. Тогда $\frac{d_1}{d_2} = \frac{d_1'}{d_2'}$ с одной стороны.

Теперь покажем, что в репере на прямой l, согласованном с точками (A, B, C), точка D будет иметь координаты $(d_1 : d_2)$. Действительно, точка C лежит на l с уравнением $x_3 = 0$, а еще на прямой OE с уравнением $x_1 - x_2 = 0$, поэтому $C(1 : 1 : 0)_R$. Для некоторого базиса из R обозначим $\vec{a}$, $\vec{b}$ его векторы, порождающие A, B. Тогда вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ порождает C. Кроме того, $\vec{d} = d_1\vec{a} + d_2\vec{b}$ порождает D. Это означает, что в согласованном с (A, B, C) базисе $(\vec{a}, \vec{b})$ точка D имеет координаты (d_1, d_2). Отсюда $(AB, CD) = \frac{d_1}{d_2}$.

Аналогично, в репере на прямой l', согласованном с (A', B', C'), точка D' будет иметь координаты $(d_1' : d_2')$. Поэтому $(A'B', C'D') = \frac{d_1'}{d_2'}$. Таким образом, $(AB, CD) = (A'B', C'D')$. □

Теор 9. *Если в проективном репере на прямой известны координаты точек $A(a_1 : a_2)$, $B(b_1 : b_2)$, $C(c_1 : c_2)$, $D(d_1 : d_2)$, то*

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}$$

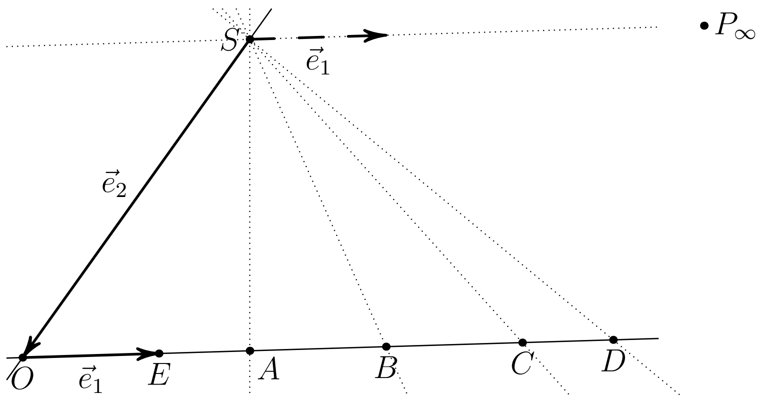
Док-во. Пусть $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, $\vec{d} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}$ для $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Выписывая координаты векторов в некотором общем базисе из проективного репера, получаем $\begin{cases} \lambda_c c_1 = \alpha\mu a_1 + \beta\nu b_1 \\ \lambda_c c_2 = \alpha\mu a_2 + \beta\nu b_2 \end{cases}$ и $\begin{cases} \lambda_d d_1 = \gamma\mu a_1 + \delta\nu b_1 \\ \lambda_d d_2 = \gamma\mu a_2 + \delta\nu b_2 \end{cases}$. Решения по формулам Крамера $\alpha = \frac{\lambda_c\nu\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\mu\nu\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$, $\beta = \frac{\lambda_c\mu\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\mu\nu\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$, $\gamma = \frac{\lambda_d\nu\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\mu\nu\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$, $\delta = \frac{\lambda_d\mu\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\mu\nu\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$. Соотношение $\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}$ дает искомое выражение. □

В модели проективной прямой называемой расширенной прямой сложное отношение можно представить следующим образом через простое отношение:

След 1. *Если в аффинном репере на расширенной прямой даны четыре точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, то сложное отношение этих точек по вычисляется формуле:*

$$(AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)}.$$

Док-во. Пусть $(O, \vec{e}_1)$ — аффинный система координат на той прямой, которая вместе с бесконечно удаленной точкой P_∞ образует расширенную прямую. Заметим, что в модели расширенной прямой точку P_∞ порождает $\vec{e}_1$. Обозначим $E = O + \vec{e}_1$. Зададим согласованный с точками (P_∞, O, E)



проективный репер $\mathscr{R}$, который определяется базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. В репере $\mathscr{R}$ точка A имеет проективные координаты $(a : 1)_{\mathscr{R}}$, так как порождается вектором $\vec{e}_2 + a\vec{e}$, и, аналогично, $B(b : 1)_{\mathscr{R}}$, $C(c : 1)_{\mathscr{R}}$, $D(d : 1)_{\mathscr{R}}$. По Теор. 9

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} d & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & d \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(a-c)(d-b)}{(c-b)(a-d)} = \frac{a-c}{c-b} : \frac{a-d}{d-b}.$$

Но если простое отношение (AB, C) равно λ, то $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. Поэтому $(c - a)\vec{e}_1 = \lambda(b-c)\vec{e}_1$, а значит и $\lambda = \frac{c-a}{b-c}$. Аналогично $(AB, D) = \frac{d-a}{b-d}$. □

Опр. *Говорят, что пара (A, B) разделяет пару (C, D), если $(AB, CD) < 0$ и не разделяет, если $(AB, CD) > 0$.*

Опр. *Говорят, что пара точек (A, B) разделяет пару точек (C, D) гармонически, если сложное отношение $(AB, CD) = -1$. В этом случае упорядоченную четверку точек A, B, C, D называют гармонической четверкой точек.*

След 2. *Гармоническая разделенность двух пар точек не зависит ни от порядка пар точек, ни от порядка точек в каждой паре.*

1.5 Полный четырехвершинник

Опр. *Полным четырехвершинником называют фигуру, состоящая из четырех точек почти общего положения и шести прямых, которые задаются всевозможными парами этих точек.*

Эти четыре точки называют вершинами, а прямые называют сторонами.

Две стороны полного четырехвершинника называются смежными, если они имеют общую вершину, и противоположными в противном случае.

Точка пересечения двух противоположных сторон называется диагональной точкой.

Прямая, проходящая через две диагональные точки, называются диагональю полного четырехвершинника.

Теор 10 (Фано). *Диагональные точки полного четырехвершинника не лежат на одной прямой.*

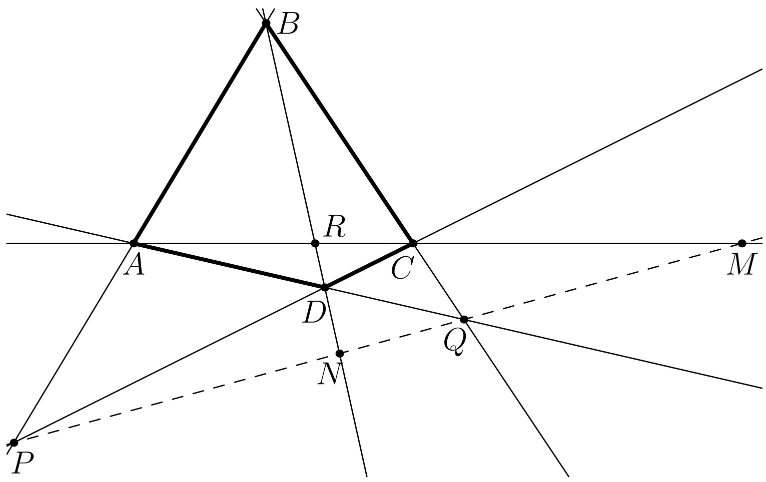
Док-во. Рассмотрим четырехвершинник $ABCD$. Найдем координаты диагональных точек $P = AB \cap CD$, $Q = BC \cap AD$ и $R = BD \cap AC$ в репере, согласованном с точками A, B, C, D. Составим уравнения сторон четырехвершинника и из уравнений найдем их пересечения.

Уравнение прямой на проективной плоскости имеет вид $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ по Теор. 4. Вершины в выбранном репере будут иметь координаты $A(1 : 0 : 0)$, $B(0 : 1 : 0)$, $C(0 : 0 : 1)$, $D(1 : 1 : 1)$. Поэтому прямая AB задается уравнением $x_3 = 0$, а прямая CD уравнением $x_1 + x_2 = 0$. Выберем одно из решений полученной системы в качестве проективных координат точки $P(1 : 1 : 0)$. Так же находим $Q(0 : 1 : 1)$ и $R(1 : 0 : 1)$.

Точки лежат на прямой в том и только том случае, когда порождающие их векторы линейно зависимы. Но для матрицы координат этих векторов $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, поэтому точки на одной прямой не лежат. □

Теор 11. *На каждой диагонали полного четырехвершинника четверка точек, состоящая из пары диагональных точек и пары точек пересечения этой диагонали со сторонами, проходящими через третью диагональную точку, является гармонической.*

Док-во. Рассмотрим четырехвершинник $ABCD$ с диагональными точками $P = AB \cap CD$, $Q = BC \cap AD$ и $R = BD \cap AC$. Проверим утверждение для диагонали PQ и точек $M = PQ \cap AC$, $N = PQ \cap BD$.



Построим проекции P, Q и M, N на прямую AC из центра B и из центра D. По Теор. 8 получаем $(PQ, MN) = (CA, MR)$ и $(PQ, MN) = (AC, MR)$. Так как

$(CA, MR) = \frac{1}{(AC,MR)}$, получаем $(PQ, MN)^2 = 1$. Но $(PQ, MN) = 1$ влечет $M = N$, а значит совпадают прямые BD и AC что невозможно. Поэтому $(PQ, MN) = -1$. □

Теор 12. *На каждой стороне полного четырехвершинника четверка точек, состоящая из пары вершин этой стороны, диагональной точки этой стороны и точки пересечения этой стороны с диагональю, проходящей через две другие диагональные точки, является гармонической.*

Док-во. Доказательство аналогично Теор. 11.

Например, сразу имеем $-1 = (PQ, MN) = (AC, MR)$, то есть на стороне AC точки A, C, M, R образуют гармоническую четверку. Дальше можно пользоваться проектированием этих точек и Теор. 8. □

1.6 Принцип двойственности

Опр. *Говорят, что плоскости α и β инцидентны, если одна и только одна из плоскостей строго содержится в другой.*

Опр. *Плоскости n-мерного проективного пространства размерностей k и $n - k - 1$ называются двойственными.*

Утв 1 (Принцип двойственности). *Если для проективного пространства верна теорема, утверждение которой касается инцидентности плоскостей, то справедлива двойственная ей теорема, в которой все понятия заменены на двойственные.*

Прим 4. «Через пару точек на проективной плоскости проходит единственная прямая» двойственно «Любая пара прямых на проективной плоскости пересекается в единственной точке».

Покажем действие принципа двойственности для двухмерного пространства. Установим на проективной плоскости соответствие между прямыми и точками: точке с координатами $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ соответствует прямая $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$. Это соответствие является биекцией. Оно и обратное к нему сохраняет инцидентность: если точка (a_1, a_2, a_3) принадлежит плоскости $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$, то двойственная прямая $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ содержит двойственную точку (b_1, b_2, b_3). Поэтому, если верно некоторое утверждение об инцидентности прямых и точек, то будет верно и двойственное ему утверждение о точках и прямых.

Нетрудно проверить то же и для трехмерного пространства, в котором двойственными будут точки и плоскости, а прямые двойствены прямым: точки сопоставляются плоскостям как и выше, а каждой прямой с общим уравнением $\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 & = 0 \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 & = 0 \end{cases}$ соответствует прямая, проходящая через точки $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ и $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$.

1.7 Теорема Дезарга

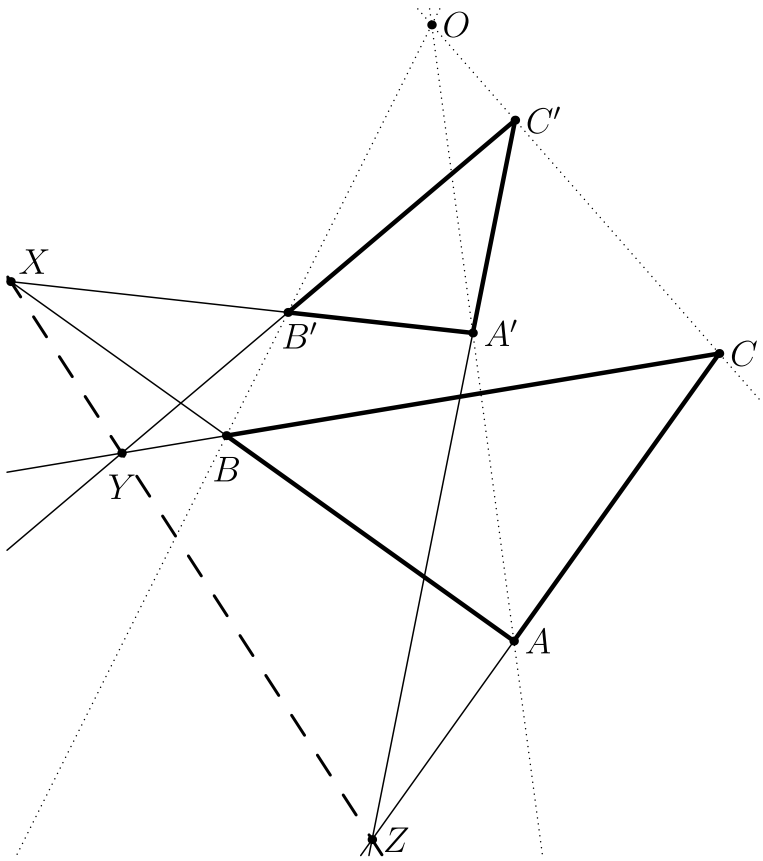
Опр. *Трехвершинником называют фигуру, состоящая из трех точек общего положения и трех прямых, которые задаются всевозможными парами этих точек.*

Эти три точки называют вершинами, а прямые называют сторонами.

Опр. *Два трехвершинника ABC и $A_1B_1C_1$ называются перспективными, если прямые AA_1, BB_1, CC_1 проходят через одну точку.*

Эту точку называют центром перспективы.

Теор 13 (Дезарг)**.** *Если два трехвершинника ABC и $A'B'C'$ перспективны, то их соответственные стороны пересекаются в трех точках, которые лежат на одной прямой.*



Док-во. Если центр перспективы O лежит на одной из прямых трехвершинника ABC, то с той прямой совпадает соответствующая ей из $A'B'C'$. Значит она пересекается с прямой, соединяющей два других пересечения соответствующих сторон и условие выполнено. Предположим поэтому, что это не так.

Если пара соответствующих точек совпадает, то в ней будут пересекаться две пары сторон и утверждение теоремы выполняется. Предположим, что соответствующие точки различны.

Зададим проективный репер, согласованный с точками (A, B, C, O).

Точка A' лежит на прямой OA с уравнением $x_2 - x_3 = 0$ и отлична от $A(1 : 0 : 0)$, поэтому $A'(a : 1 : 1)$. Также $B'(1 : b : 1)$ и $C'(1 : 1 : c)$.

Пусть прямые AB и $A'B'$, AC и $A'C'$, BC и $B'C'$ пересекаются в точках X, Y, Z соответственно. Точка X лежит на прямой AB с уравнением $x_3 = 0$ и на прямой $A'B'$ с уравнением $(1-b)x_1 + (1-a)x_2 + (ab-1)x_3 = 0$, а значит имеет координаты $X(a-1 : 1-b : 0)$. Для остальных, $Y(a-1 : 0 : 1-c)$ и $Z(0 : 1-b : c-1)$. Так как $\begin{vmatrix} a-1 & 1-b & 0 \\ a-1 & 0 & 1-c \\ 0 & 1-b & c-1 \end{vmatrix} = 0$, точки X, Y, Z лежат на одной прямой. □

По принципу двойственности верна

Теор 14 (обратная теорема Дезарга)**.** *Пусть даны два трехвершинника ABC и $A'B'C'$. Если точки пересечения сторон $X \in AB \cap A'B'$, $Y \in AC \cap A'C'$ и $Z \in BC \cap B'C'$ лежат на одной прямой, то эти трехвершинники перспективны.*

1.8 Проективные отображения и преобразования

Пусть проективные пространства P и P' порождаются линейными пространствами V и V' соответственно, с каноническими проекциями $\pi : V \setminus \{\overrightarrow{0}\} \longrightarrow P$ и $\pi' : V' \setminus \{\overrightarrow{0}\} \longrightarrow P'$.

Опр. *Проективным отображением проективного пространства P на проективное пространство P' называют всякое биективное отображение $f : P \longrightarrow P'$, для которого существует линейное биективное отображение $\varphi : V \longrightarrow V'$, такое, что для любого $X \in P$ и любого порождающего X вектора $\overrightarrow{x} \in V$, верно $\pi' \circ \varphi(\overrightarrow{x}) = f(X)$.*

В этом случае говорят, что линейное отображение φ порождает проективное отображение f.

Таким образом любое линейное биективное отображение $\varphi : V \longrightarrow V'$ порождает проективное отображение. Действительно, если для заданного φ проективное отображение f задать по определению выше, то f будет биекцией.

Для проверки однозначности возьмем $X \in P$ и $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ порождающие точку X. Тогда $\overrightarrow{y} = \lambda\overrightarrow{x}$ для подходящего λ и $\pi'(\varphi(\lambda\overrightarrow{x})) = \pi'(\lambda\varphi(\overrightarrow{x})) = \pi'(\varphi(\overrightarrow{x}))$.

Проверим инъективность. Пусть $f(X) = f(Y)$ для точек $X = \pi(\overrightarrow{x})$ и $Y = \pi(\overrightarrow{y})$ из P. По определению, $\pi'(\varphi(\overrightarrow{x})) = \pi'(\varphi(\overrightarrow{y}))$, для некоторого λ будет $\varphi(\overrightarrow{x}) = \lambda\varphi(\overrightarrow{y}) = \varphi(\lambda\overrightarrow{y})$ и $\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{y}$. Значит $X = Y$.

Для любого $Y \in P'$ и порождающего его $\overrightarrow{y} \in V'$ существует $\overrightarrow{x}$, $\varphi(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{y}$, который будет порождать прообраз Y при f.

1.9 Кривые второго порядка

В проективном пространстве, если множество точек удовлетворяет уравнению $F(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$ для некоторого многочлена F, то это условие может быть записано в виде системы однородных многочленов. Так, если координаты точки $(a_1 : \ldots : a_{n+1})$ удовлетворяет уравнению, то и координаты $(\lambda a_1 : \ldots : \lambda a_{n+1})$ тоже должны. Поэтому, разбив многочлен F на однородные многочлены F_k степени k, получаем равенство $F(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} F_k(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k F_k(a_1, \ldots, a_{n+1}) = 0$ для всех $\lambda \neq 0$. Так как многочлены $1, x, x^2, \ldots, x^n$ линейно независимы, то отсюда $F_k(a_1, \ldots, a_{n+1}) = 0$ для всех k.