Отчет по заданию 1.

Рахматуллаев Темурбек.
Группа 403

10 декабря 2021 г.

Номер задания **1.42**. Требуется решить уравнение итерационным процессом сжимающих отображений. Исходное уравнение:

$$\int_0^x \sqrt{t^3 + \frac{1}{t}} dt = \alpha^2 + 5\sqrt{x}$$

1 Численный подсчет интеграла

Заметим, что подынтегральное выражение имеет особенность в 0. Это создает затруднения для численного подсчета интеграла и подсчета погрешностей. Для решения этой проблемы приблизим аналитически подынтегральное выражение рядом и подсчитаем приближено значение интеграла на отрезке $[0, 0.1]$:

$$g(t) = \sqrt{t^3 + \frac{1}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}t^{7/2} - \frac{1}{8}t^{15/2} + o\left(t^{21/2}\right)$$

Таким образом, при $t \in [0, 0.1]$ абсолютная погрешность подсчета не превосходит $0.1 * (0.1)^{23/2} < 10^{-11}$.

$$\tilde{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}t^{7/2} - \frac{1}{8}t^{15/2}$$

$$\int_0^{0.1} \tilde{g}(t)dt = \left(\frac{t^{7/2}}{2} - \frac{t^{15/2}}{8} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\Big|_0^{0.1} = 0.632459045629...$$

Обозначим $C_0 := 0.632459045629$ константу, которая будет использоваться далее для подсчета.

Согласно указанию на стр. 5 интеграл ищем как:

$$\int_a^b g(x)dx \simeq A_{mid} = \frac{h}{2}(g(a) + g(b)) + h\sum_{m=1}^{M-1} g_m,$$

где $h = \frac{b-a}{M}$, а $g_m = g(a+mh)$, то есть методом средних прямоугольников. Известна погрешность данного метода:

$$\left|\int_a^b g(x)dx - A_{mid}\right| \leq \frac{g''(\zeta)(b-a)^3}{24n^2}$$

Находим

$$g''(t) = \frac{3t^8 + 22t^4 + 3}{4t^3\sqrt{t^3 + \frac{1}{t}}\,(t^4+1)}$$

- ограниченная(убывающая к 0) функция при $t > 1 (g''(1) < 2.5)$. Поэтому можно считать $\frac{g''(t)}{24} < 1$, благодаря чему можно оценить необходимое количество отрезков разбиения:

$$n^2 > \frac{(b-a)^3}{\varepsilon}$$

где $\varepsilon = 10^{-6}$, для того чтобы погрешность вычисления интеграла влияла достаточно мало на вычисление корня.

2 Поиск сжимающего отображения

Вернемся к исходному уравнению, обозначим:

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{t^3 + \frac{1}{t}}dt - \alpha^2 - 5\sqrt{x}$$

Заметим, при $x > 1$:

$$f'(x) = \sqrt{x^3 + \frac{1}{x}} - \frac{5}{2\sqrt{x}} < (?)\sqrt{x^3} + 1$$

Кроме того, при $x > 1$ функция $f'(x)$ возрастающая. Таким образом, если поиск корня зажать на отрезке $x \in [a, b]$, то

$$\left|\left(\frac{f(x)}{f'(b)}\right)'\right| < 1$$

$$\left|\left(x - \frac{f(x)}{f'(b)}\right)'\right| < 1$$

Что доказывает, что следующее отображение является сжимающим на $[a, b]$:

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(b)}$$

С другой стороны заметим, что можно оценить коэффициент сжатия $q = \min_{x\in[a,b]}(\phi'(x)) = 1 - f'(a)/f'(b)$

3 Зажатие корня на отрезке, критерий останова

Аналитическими соображениями установим единственность корня. Известно $f(0) = -\alpha^2$, $f(2) < 0$, $f'(2) > 1$, $\forall x > 2 : f'(x) > 1$ т.к.

$$f''(x) = \frac{5}{4x^{3/2}} + \frac{3x^4 - 1}{2x^2\sqrt{x^3 + \frac{1}{x}}} > 0$$

Таким образом, на $[0, 2]$ ноль искать не приходится, а после производная остается положительной. Перебирая x_0 с шагом в 0.1 найдем первое значение $x_0 > 0 : f(x_0) > 0$, тогда отрезок зажатия $[a, b] = [x_0 - 0.1, x_0 + 0.1]$.

Требуемый критерий останова - достижение относительной погрешности приближенного значения $\tilde{x}$ корня x_r точности $\delta = 10^{-5}$:

$$\left|\frac{\tilde{x} - x_r}{x_r}\right| < \delta$$

Проведем оценку погрешности на n-ой итерации зная коэффициент сжатия q:

$$\left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right| < \left|\frac{q^n(a-b)}{a}\right| < \delta \Rightarrow n > \log_q \frac{\delta a}{b - a}$$