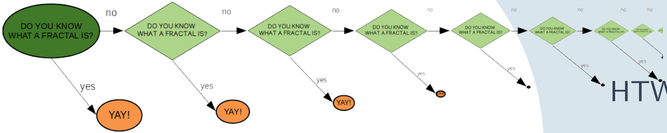
Hochschule Konstanz
Fakultät Informatik

1 Folgen & Reihen

1.1 Folgen
1.2 Reihen



Mathe II

HTWG - Fakultät für Informatik

Prof. Dr. R. Axthelm

Folgen & Reihen

- Folgen
- Reihen

Motivation

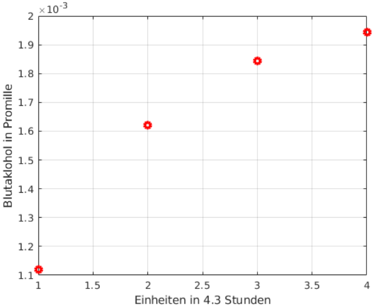
Nach einem Liter Bier haben Sie (weiblich, 60 kg) ungefähr 1.12 ‰ Blutalkohol. Nach ungefähr 4.07 Stunden ist der Promillewert unter 0.5 ‰ gesunken. Das heißt Sie haben ca. 44.64 % Alkohol im Blut abgebaut. Wenn Sie sich einen weiteren Liter Bier gönnen stellt sich dann direkt ein Wert von 1.62 ‰ ein.

Was passiert, wenn Sie sehr lange so weiter machen?

Nach einem Liter Bier haben Sie (weiblich, 60 kg) ungefähr 1.12 ‰ Blutalkohol. Nach ungefähr 4.07 Stunden ist der Promillewert unter 0.5 ‰ gesunken. Das heißt Sie haben ca. 44.64 % Alkohol im Blut abgebaut. Wenn Sie sich einen weiteren Liter Bier gönnen stellt sich dann direkt ein Wert von 1.62 ‰ ein.

Was passiert, wenn Sie sehr lange so weiter machen?

Stunden (4.07 h)	nach Abbau (‰)	nach Konsum (‰)
1		$a_1 = 1.12$
2	0.50	$a_2 = 1.62$
3	0.72	$a_3 = 1.84$
4	0.82	$a_4 = 1.94$

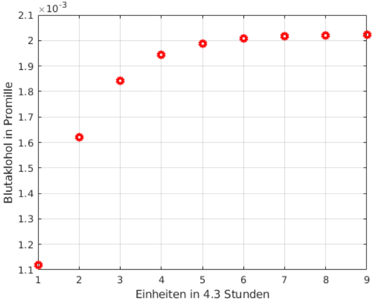


Motivation

Nach einem Liter Bier haben Sie (weiblich, 60 kg) ungefähr 1.12 ‰ Blutalkohol. Nach ungefähr 4.07 Stunden ist der Promillewert unter 0.5 ‰ gesunken. Das heißt Sie haben ca. 44.64 % Alkohol im Blut abgebaut. Wenn Sie sich einen weiteren Liter Bier gönnen stellt sich dann direkt ein Wert von 1.62 ‰ ein.

Was passiert, wenn Sie sehr lange so weiter machen?

Stunden (4.07 h)	nach Abbau (‰)	nach Konsum (‰)
1	0.50	1.62
2	0.72	1.84
3	0.82	1.94
4	0.87	1.99
5	0.89	2.01
6	0.90	2.02
7	0.90	2.02
8	0.90	2.02



Definition: Folge

Es sei M eine Menge. Eine Folge ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M:

$$a_n \ : \ \mathbb{N} \to M$$

Die geordnete Menge aller Werte der Folge bezeichnen wir mit

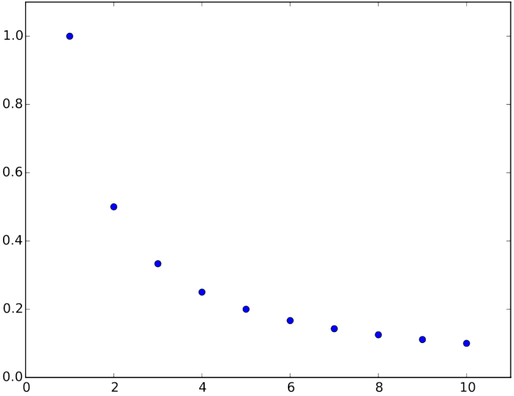
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \overbrace{(a_1, \underbrace{a_2}_{\text{Folgenglied}}, a_3, \dots, a_{\underbrace{k}_{\text{Index}}}, \dots)}^{\text{Folge}} .$$

Notation: Wir schreiben auch kurz

$$(a_n)_n := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

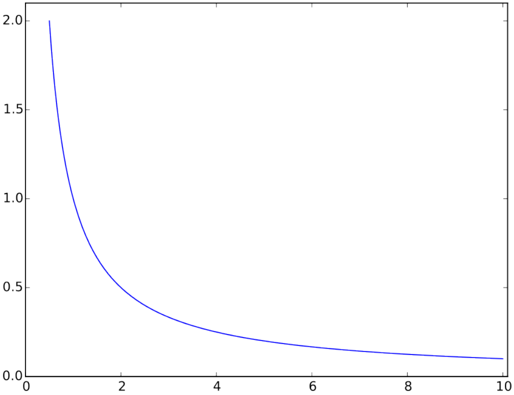
Nicht verwechseln!

Diese Folge ist die geordnete Menge der y-Werte / eine Teilmenge von $\mathbb{R}$



$a_n = \frac{1}{n}$

Diese Funktion ist die Menge aller "blauen Punkte" $(x, f(x))$ / eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$



$f(x) = \frac{1}{x}$

"Wenn es die Vermutung eines Grenzwertes gibt."

Definition: Konvergenz und Grenzwert einer Folge

Für eine Folge $(a_n)_n$ heißt a *Grenzwert der Folge*:$\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ : \ |a_n - a| < \epsilon$$

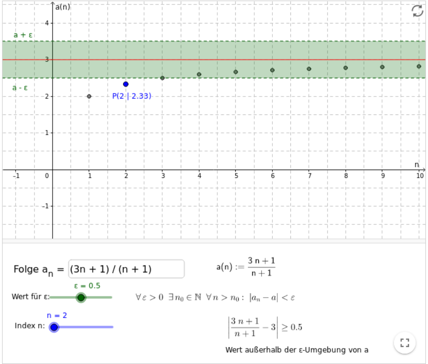
Besitzt eine Folge einen Grenzwert so heißt sie *konvergente Folge*.
Notation: Wir schreiben auch

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n \quad \text{oder} \quad a_n \xrightarrow{(n \to \infty)} a \quad \text{und auch} \quad a_n \to a \quad (n \to \infty)\,.$$

Eine Folge, die nicht konvergent ist heißt *divergente Folge*.

Eine Folge heißt *bestimmt divergiert*, wenn der Limes entweder $+\infty$ oder $-\infty$ liefert. Damit wird ausgedrückt, dass man weiß "wohin die Folge läuft". Wir nennen dann auch $+\infty$, bzw. $-\infty$ - je nachdem - einen *uneigentlichen Grenzwert*.
Eine Folge heißt *unbestimmt divergent*, wenn der Limes unaufhörlich zwischen Werten hin- und herspringt.

Beispiel / Anschauung der Definition des Grenzwertes



https://www.geogebra.org/m/HPjMS7c7

Eine Rechnung, wie man einen vermuteten Grenzwert prüft

Memo:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; : \; |a_n - a| < \epsilon$$

Vermutung: 0 ist Grenzwert der Folge $a_n = \frac{1}{n}$.

Eine Rechnung, wie man einen vermuteten Grenzwert prüft

Memo:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; : \; |a_n - a| < \epsilon$$

Vermutung: 0 ist Grenzwert der Folge $a_n = \frac{1}{n}$.

Beweis:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < 10^{-12}$$

Eine Rechnung, wie man einen vermuteten Grenzwert prüft

Memo:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; : \; |a_n - a| < \epsilon$$

Vermutung: 0 ist Grenzwert der Folge $a_n = \frac{1}{n}$.

<u>Beweis:</u>

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < 10^{-12}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left| \frac{1}{n} \right| < 10^{-12}$$

Eine Rechnung, wie man einen vermuteten Grenzwert prüft

Memo:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \ :\ |a_n - a| < \epsilon$$

Vermutung: 0 ist Grenzwert der Folge $a_n = \frac{1}{n}$.

<u>Beweis:</u>

$$\begin{aligned} & \left|\frac{1}{n} - 0\right| < 10^{-12} \\ \Leftrightarrow \quad & \left|\frac{1}{n}\right| < 10^{-12} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{n} < 10^{-12} \end{aligned}$$

Eine Rechnung, wie man einen vermuteten Grenzwert prüft

Memo:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; : \; |a_n - a| < \epsilon$$

Vermutung: 0 ist Grenzwert der Folge $a_n = \frac{1}{n}$.

<u>Beweis:</u>

$$\begin{aligned} & \left|\frac{1}{n} - 0\right| < 10^{-12} \\ \Leftrightarrow \quad & \left|\frac{1}{n}\right| < 10^{-12} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{n} < 10^{-12} \\ \Leftrightarrow \quad & n > \frac{1}{10^{-12}} = 10^{12} \end{aligned}$$

$\square$

Übersicht

Darstellung von Folgen: aufzählend, darstellend (explizit/implizit)	Überprüfen eines vermuteten GWs ϵ-Kriterium
Berechnung eines GWs (keine eind. Methode vorhanden)	Prüfung auf Konvergenz Monotonie & Beschr. Kein GW

Übersicht

darstellend (explizit): $a_n = \frac{1}{n}$ aufzählend: $(a_n)_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$	Überprüfen eines vermuteten GWs ϵ-Kriterium
Berechnung eines GWs (keine eind. Methode vorhanden)	Prüfung auf Konvergenz Monotonie & Beschr. Kein GW

Übersicht

darstellend (explizit):
$a_n = \frac{1}{n}$

aufzählend:
$(a_n)_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$

Berechnung eines GWs

(keine eind. Methode vorhanden)

Prüfung auf Konvergenz

Monotonie & Beschr.

Kein GW

Rechenregeln für den Limes

Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente Folgen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b\,.$$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \pm \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = a \pm b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = a \cdot b$$

Rechenregeln für den Limes

Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente Folgen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b\,.$$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \pm \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = a \pm b$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = a \cdot b$$

Satz: Folgerung

Für konvergente Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ gilt auch:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}\,, \text{ falls } b \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n^{b_n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{(\lim_{n\to\infty} b_n)} = a^b\,, \text{ falls } a, b \neq 0$$

Beispiele

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$$

Beispiele

1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{=0} = 0$$

Beispiele

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{=0} = 0$$

2. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Beispiele

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{=0} = 0$$

2. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

3. $$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

Beispiele

1.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{=0} = 0$$

2.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

3.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,n^2 - 1}{n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}$$

1.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{=0} = 0$$

2.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

3.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,n^2 - 1}{n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}$$

Beispiele

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{=0} = 0$$

2. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

3. $$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,n^2 - 1}{n^2 + 1} = \frac{\lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}$$

Beispiele

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{=0} = 0$$

2. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

3. $$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,n^2 - 1}{n^2 + 1} = \frac{\lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}$$

Beispiele

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{=0} = 0$$

2. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

3. $$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,n^2 - 1}{n^2 + 1} = \frac{\lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{2 - 0}{1 + 0} = 2$$

Beispiele

4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{20}$$

Beispiele

4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{20} = \lim_{n\to\infty} 20^{\frac{1}{n}}$$

Beispiele

4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{20} = \lim_{n\to\infty} 20^{\frac{1}{n}} = 20^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}$$

Beispiele

4.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{20} = \lim_{n\to\infty} 20^{\frac{1}{n}} = 20^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = 20^0$$

4.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{20} = \lim_{n\to\infty} 20^{\frac{1}{n}} = 20^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = 20^0 = 1$$

Beispiele

4.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{20} = \lim_{n\to\infty} 20^{\frac{1}{n}} = 20^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = 20^0 = 1$$

5.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$$

Beispiele

4. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{20} = \lim_{n\to\infty} 20^{\frac{1}{n}} = 20^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = 20^0 = 1$$

5. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$$

Beispiele

4. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{20} = \lim_{n\to\infty} 20^{\frac{1}{n}} = 20^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = 20^0 = 1$$

5. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \left[\infty^0\right] \qquad \text{unbestimmter Ausdruck}$$

4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{20} = \lim_{n\to\infty} 20^{\frac{1}{n}} = 20^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = 20^0 = 1$$

5.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \left[\infty^0\right] \qquad \text{unbestimmter Ausdruck}$$

Definition: unbestimmte Ausdrücke

Als *unbestimmte Ausdrücke* bezeichnen wir Limes, die von folgender Form sind:

$$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [0\cdot\infty], \left[0^0\right], [1^\infty], \left[\infty^0\right], [\infty-\infty]$$

Beispiel (heuristisch)

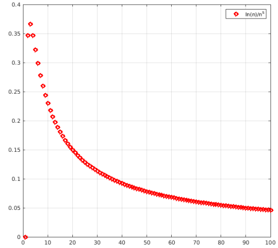
Wir werden uns später davon überzeugen, dass der Logrithmus “sehr langsam” und gleichzeitig die Exponentialfunktion “sehr schnell” ist.

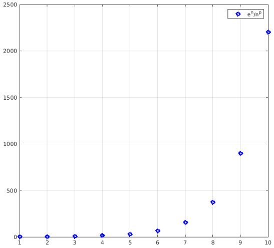
Beispiel (heuristisch)

Wir werden uns später davon überzeugen, dass der Logrithmus “sehr langsam” und gleichzeitig die Exponentialfunktion “sehr schnell” ist.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^n}{n^s} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n^p} = \infty$$

Egal wie klein $s > 0$ ist und egal wie groß $p > 0$ ist. (Probieren Sie das gerne am Rechner aus.)





Beispiel

aus der Trickkiste:

$$a^b = \mathrm{e}^{\ln\left(a^b\right)} = \mathrm{e}^{b \ln a}$$

Beispiel

aus der Trickkiste:

$$a^b = \mathrm{e}^{\ln\left(a^b\right)} = \mathrm{e}^{b\,\ln a}$$

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}$$

aus der Trickkiste:

$$a^b = \mathrm{e}^{\ln\left(a^b\right)} = \mathrm{e}^{b \ln a}$$

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$$

Beispiel

aus der Trickkiste:

$$a^b = \mathrm{e}^{\ln\left(a^b\right)} = \mathrm{e}^{b \ln a}$$

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}$$

Beispiel

aus der Trickkiste:

$$a^b = \mathrm{e}^{\ln\left(a^b\right)} = \mathrm{e}^{b \ln a}$$

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} &= \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}} \\ &= \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} \end{aligned}$$

Beispiel

aus der Trickkiste:

$$a^b = \mathrm{e}^{\ln\left(a^b\right)} = \mathrm{e}^{b \ln a}$$

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = \mathrm{e}^0 = 1$$

Definition

Definition: Monotonie & Beschränktheit

Eine Folge $(a_n)_n$ heißt nach oben (nach unten) *beschänkt*, falls gilt:

$$\exists C\ \forall n \in \mathbb{N}\ :\ a_n < \ (>)\ C$$

Eine Folge heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.
Die Folge heißt *monoton* wachsend (fallend), falls gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ :\ a_n \leq \ (\geq)\ a_{n+1}$$

Im Falle von $<$ $(>)$ statt $\leq$ $(\geq)$ sprechen wir von *streng monoton* wachsend (fallend).

Beispiel

Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ ist wegen

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

streng **monoton fallend**

Beispiel

Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ ist wegen

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

streng **monoton fallend** und wegen

$$\frac{1}{n} > -1$$

nach unten beschränkt.

Beispiel

Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ ist wegen

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

streng **monoton fallend** und wegen

$$\frac{1}{n} > -1$$

nach unten beschränkt.
Damit wissen wir, dass die Folge **konvergent** ist. Wir kennen deshalb aber nicht den GW selbst.

Beispiel “Eulersche Zahl”

Wie im Tutorial “Die Eulersche Zahl” gezeigt ist die Folge

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

steng **monoton wachsend** und **nach oben beschränkt**:

$$a_{n+1} > a_n \qquad \text{und} \qquad a_n < 3$$

Wie im Tutorial “Die Eulersche Zahl” gezeigt ist die Folge

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

steng **monoton wachsend** und **nach oben beschränkt**:

$$a_{n+1} > a_n \qquad \text{und} \qquad a_n < 3$$

Somit ist sie **konvergent** und besitzt einen Grenzwert. Der ist allerdings nicht bekannt und lässt sich auch nicht berechnen. Also definiert man einen Namen für den Grenzwert:

Wie im Tutorial "Die Eulersche Zahl" gezeigt ist die Folge

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

steng **monoton wachsend** und **nach oben beschränkt**:

$$a_{n+1} > a_n \qquad \text{und} \qquad a_n < 3$$

Somit ist sie **konvergent** und besitzt einen Grenzwert. Der ist allerdings nicht bekannt und lässt sich auch nicht berechnen. Also definiert man einen Namen für den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: \mathrm{e} \qquad \text{Die } \textit{Eulersche Zahl}$$

Eigenschaften von Folgen

- Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.
- Monoton wachsende und nach oben beschränkte Folgen sind konvergent.
- Monoton fallende und nach unten beschränkte Folgen sind konvergent.
- Konvergente Folgen sind beschränkt.

Übersicht

Darstellung von Folgen: aufzählend, darstellend (explizit/implizit)	Überprüfen eines vermuteten GWs ϵ-Kriterium
Berechnung eines GWs (keine eind. Methode vorhanden)	Prüfung auf Konvergenz Monotonie & Beschr. Kein GW

Übersicht

Darstellung von Folgen:

aufzählend, darstellend (explizit/implizit)

Überprüfen eines vermuteten GWs

ϵ-Kriterium

Beispiele:

$\sqrt[n]{20} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

Prüfung auf Konvergenz

Monotonie & Beschr.

Kein GW

Übersicht

Darstellung von Folgen:

aufzählend, darstellend (explizit/implizit)

Überprüfen eines vermuteten GWs

ϵ-Kriterium

Beispiele:

$\sqrt[n]{20} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

Beispiel:

$\frac{1}{n}$ ist fallend und nach unten beschränkt, also konvergent

nicht konvergente Folgen

Eine nicht konvergente Folge ist divergent aber wir unterscheiden zwischen bestimmt und unbestimmt divergent:

Eine nicht konvergente Folge ist divergent aber wir unterscheiden zwischen bestimmt und unbestimmt divergent:

<u>bestimmt divergent:</u>

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+10000000} = \infty$$

Eine nicht konvergente Folge ist divergent aber wir unterscheiden zwischen bestimmt und unbestimmt divergent:

<u>bestimmt divergent:</u>

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 1}{n + 10000000} = \infty$$

<u>unbestimmt divergent:</u>

Die alternierende Folge

$$a_n = (-1)^n$$

ist eine unbestimmt divergente Folge, da sie keinen Grenzwert bestitzt. Es ist

$$a_n = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots)\,.$$

bestimmt divergent:

$$a_n = (-2)^n$$

bestimmt divergent:

$$a_n = (-2)^n$$

konvergent:

$$\frac{(-1)^n}{2^n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

etwas Allgemeines:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} ? & \text{falls } a < -1 \\ ? & \text{falls } a = -1 \\ ? & \text{falls } |a| < 1 \\ ? & \text{falls } a = 1 \\ ? & \text{falls } a > 1 \end{cases}$$

<u>etwas Allgemeines:</u>

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \pm\infty & \text{falls } a < -1 \\ ? & \text{falls } a = -1 \\ ? & \text{falls } |a| < 1 \\ ? & \text{falls } a = 1 \\ ? & \text{falls } a > 1 \end{cases}$$

etwas Allgemeines:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \pm\infty & \text{falls } a < -1 \\ \text{unb. div.} & \text{falls } a = -1 \\ ? & \text{falls } |a| < 1 \\ ? & \text{falls } a = 1 \\ ? & \text{falls } a > 1 \end{cases}$$

etwas Allgemeines:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \pm\infty & \text{falls } a < -1 \\ \text{unb. div.} & \text{falls } a = -1 \\ 0 & \text{falls } |a| < 1 \\ ? & \text{falls } a = 1 \\ ? & \text{falls } a > 1 \end{cases}$$

etwas Allgemeines:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \pm\infty & \text{falls } a < -1 \\ \text{unb. div.} & \text{falls } a = -1 \\ 0 & \text{falls } |a| < 1 \\ 1 & \text{falls } a = 1 \\ ? & \text{falls } a > 1 \end{cases}$$

etwas Allgemeines:

$$\lim_{n \to \infty} a^n = \begin{cases} \pm\infty & \text{falls } a < -1 \\ \text{unb. div.} & \text{falls } a = -1 \\ 0 & \text{falls } |a| < 1 \\ 1 & \text{falls } a = 1 \\ \infty & \text{falls } a > 1 \end{cases}$$

Definition

Definition: Häufungspunkte

Für eine Folge $(a_n)_n$ heißt a *Häufungspunkt*:$\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n > N \ : \ |a_n - a| < \epsilon$$

Definition

Definition: Häufungspunkte

Für eine Folge $(a_n)_n$ heißt a *Häufungspunkt*:$\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n > N \ : \ |a_n - a| < \epsilon$$

Memo: Grenzwert einer Folge:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ : \ |a_n - a| < \epsilon$$

Saalaufgabe

Gegeben ist die Folge

$$(a_n)_n = (1, 1, 2, 1, 2, 2.5, 1, 3, 2.6\bar{7}, 1, 4, 2.75, \ldots)\,.$$

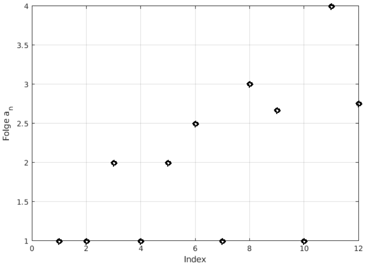
- skizzieren Sie die Folge. Was vermuten Sie?

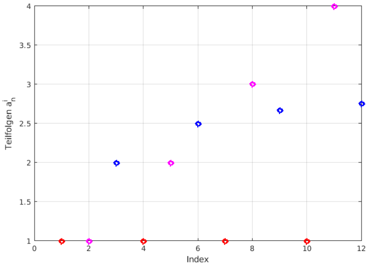
Gegeben ist die Folge

$$(a_n)_n = (1, 1, 2, 1, 2, 2.5, 1, 3, 2.6\bar{7}, 1, 4, 2.75, \ldots)\,.$$

- skizzieren Sie die Folge. Was vermuten Sie?
- Ist die Folge konvergent/(un-)besimmt divergent?
- Gibt es Teilfolgen?
- Gibt es konvergente/(un-)besimmt divergente Teilfolgen?
- Welche Häufungsunkte gibt es?

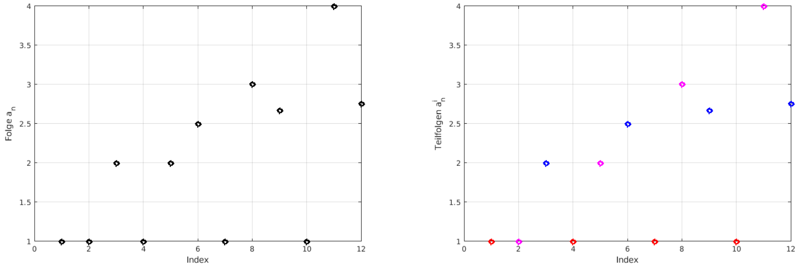
Saalaufgabe





$$a_n^1 = (1\,,\,,\ 1\,,\ 1\,,\ 1\,,\ \ldots)\,,\ a_n^2 = (2\,,\ 2.5\,,\ 2.67\,,\ 2.7\,,\ \ldots)\,,\ a_n^3 = (1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ \ldots)$$

Saalaufgabe



$$a_n^1 = (1\,,\,,\ 1\,,\ 1\,,\ 1\,,\ \ldots)\,,\ a_n^2 = (2\,,\ 2.5\,,\ 2.67\,,\ 2.7\,,\ \ldots)\,,\ a_n^3 = (1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ \ldots)$$

weitere Eigenschaften von Folgen

- Jede beschränkte Folge besitzt (mindestens) eine konvergente Teilfolge.
- Eine Folge kann mehrere Häufungspunkte haben aber nicht mehr als einen Grenzwert.

Übersicht

Darstellung von Folgen: aufzählend, darstellend (explizit/**implizit**)	Überprüfen eines vermuteten GWs ϵ-Kriterium
Berechnung eines GWs (keine eind. Methode vorhanden)	Prüfung auf Konvergenz Monotonie & Beschr. Kein GW

Motivation

"Zimmerflucht in Goethes Wohnhaus"

Sie haben eine Tafel Schokolade ($a_0 = 1$) und essen sie zur Hälfte.

Motivation

"Zimmerflucht in Goethes Wohnhaus"

Sie haben eine Tafel Schokolade ($a_0 = 1$) und essen sie zur Hälfte. Am Tag 1 besitzen Sie also noch

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

dieser Tafel.

Motivation

"Zimmerflucht in Goethes Wohnhaus"

Sie haben eine Tafel Schokolade ($a_0 = 1$) und essen sie zur Hälfte. Am Tag 1 besitzen Sie also noch

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

dieser Tafel. Davon essen Sie dann wieder die Hälfte. Sie haben am Tag 2 dann

$$a_2 = \frac{1}{2} a_1$$

und so weiter bis zum $n+1$-ten Tag.

Motivation

"Zimmerflucht in Goethes Wohnhaus"

Sie haben eine Tafel Schokolade ($a_0 = 1$) und essen sie zur Hälfte. Am Tag 1 besitzen Sie also noch

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

dieser Tafel. Davon essen Sie dann wieder die Hälfte. Sie haben am Tag 2 dann

$$a_2 = \frac{1}{2} a_1$$

und so weiter bis zum $n+1$-ten Tag. Dann haben Sie

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$$

von der Tafel Schokolade noch übrig.

Definition

"Zimmerflucht in Goethes Wohnhaus"

Definition: (implizite/rekursive) Folge

Eine *implizite* oder auch *rekursive Folge* ist eine Folge, deren $n+1$-tes Folgenglied von davorliegenden Folgengliedern abhängt.

Spezielle implizite Folgen mit Startwert a_1 (oder a_0):

geometrische Folge $\quad a_{n+1} = q\, a_n$

arithmetsiche Folge $\quad a_{n+1} = c + a_n$

Beispiel (geometrische Folge): von implizit nach explizit

$$\boxed{a_1 = 5 \qquad a_{n+1} = 2\,a_n}$$

Beispiel (geometrische Folge): von implizit nach explizit

$$\boxed{a_1 = 5 \qquad a_{n+1} = 2\,a_n}$$

Umrechnung in explizite Darstellung:

Beispiel (geometrische Folge): von implizit nach explizit

$$\boxed{a_1 = 5 \qquad a_{n+1} = 2\,a_n}$$

Umrechnung in explizite Darstellung:

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n$$

Beispiel (geometrische Folge): von implizit nach explizit

$$\boxed{a_1 = 5 \qquad a_{n+1} = 2\, a_n}$$

Umrechnung in explizite Darstellung:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2 \cdot a_n \\ &= 2 \cdot 2 \cdot a_{n-1} \end{aligned}$$

Beispiel (geometrische Folge): von implizit nach explizit

$$\boxed{a_1 = 5 \qquad a_{n+1} = 2\,a_n}$$

Umrechnung in explizite Darstellung:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2 \cdot a_n \\ &= 2 \cdot 2 \cdot a_{n-1} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a_{n-2} \end{aligned}$$

Beispiel (geometrische Folge): von implizit nach explizit

$$\boxed{a_1 = 5 \qquad a_{n+1} = 2\,a_n}$$

Umrechnung in explizite Darstellung:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2 \cdot a_n \\ &= 2 \cdot 2 \cdot a_{n-1} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a_{n-2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Beispiel (geometrische Folge): von implizit nach explizit

$$a_1 = 5 \qquad a_{n+1} = 2\, a_n$$

Umrechnung in explizite Darstellung:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2 \cdot a_n \\ &= 2 \cdot 2 \cdot a_{n-1} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a_{n-2} \\ &\vdots \\ &= 2^{k+1} \cdot a_{n-k} \end{aligned}$$

Beispiel (geometrische Folge): von implizit nach explizit

$$\boxed{a_1 = 5 \qquad a_{n+1} = 2\,a_n}$$

Umrechnung in explizite Darstellung:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2 \cdot a_n \\
&= 2 \cdot 2 \cdot a_{n-1} \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a_{n-2} \\
&\vdots \\
&= 2^{k+1} \cdot a_{n-k} \\
&\vdots (k = n-1)
\end{aligned}$$

Beispiel (geometrische Folge): von implizit nach explizit

$$a_1 = 5 \qquad a_{n+1} = 2\,a_n$$

Umrechnung in explizite Darstellung:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2 \cdot a_n \\
&= 2 \cdot 2 \cdot a_{n-1} \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a_{n-2} \\
&\vdots \\
&= 2^{k+1} \cdot a_{n-k} \\
&\vdots (k = n-1) \\
&= 2^n \cdot a_1
\end{aligned}$$

Beispiel (geometrische Folge): von implizit nach explizit

$$\boxed{a_1 = 5 \qquad a_{n+1} = 2\,a_n}$$

Umrechnung in explizite Darstellung:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2 \cdot a_n \\
&= 2 \cdot 2 \cdot a_{n-1} \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a_{n-2} \\
&\vdots \\
&= 2^{k+1} \cdot a_{n-k} \\
&\vdots (k = n-1) \\
&= 2^n \cdot a_1 \\
&= 2^n \cdot 5
\end{aligned}$$

Beispiel (geometrische Folge): von implizit nach explizit

$$a_1 = 5 \qquad a_{n+1} = 2\,a_n$$

Umrechnung in explizite Darstellung:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2 \cdot a_n \\ &= 2 \cdot 2 \cdot a_{n-1} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a_{n-2} \\ &\vdots \\ &= 2^{k+1} \cdot a_{n-k} \\ &\vdots (k = n-1) \\ &= 2^n \cdot a_1 \\ &= 2^n \cdot 5 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ explizite Darstellung

$$\boxed{a_n = 5 \cdot 2^{n-1}}$$

Beispiel (geometrische Folge): von implizit nach explizit

$$a_1 = 5 \qquad a_{n+1} = 2\,a_n$$

Umrechnung in explizite Darstellung:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2 \cdot a_n \\ &= 2 \cdot 2 \cdot a_{n-1} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a_{n-2} \\ &\vdots \\ &= 2^{k+1} \cdot a_{n-k} \\ &\vdots (k = n-1) \\ &= 2^n \cdot a_1 \\ &= 2^n \cdot 5 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ explizite Darstellung

$$\boxed{a_n = 5 \cdot 2^{n-1}}$$

Test:

$$a_1 = 5$$

Beispiel (geometrische Folge): von implizit nach explizit

$$\boxed{a_1 = 5 \qquad a_{n+1} = 2\,a_n}$$

Umrechnung in explizite Darstellung:

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2 \cdot a_n \\
&= 2 \cdot 2 \cdot a_{n-1} \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a_{n-2} \\
&\vdots \\
&= 2^{k+1} \cdot a_{n-k} \\
&\vdots (k = n-1) \\
&= 2^n \cdot a_1 \\
&= 2^n \cdot 5
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ explizite Darstellung

$$\boxed{a_n = 5 \cdot 2^{n-1}}$$

Test:

$$a_1 = 5$$

und

$$
\begin{aligned}
& a_{n+1} = 2 \cdot a_n \\
\Leftrightarrow \quad & 5 \cdot 2^n = 2 \cdot 5 \cdot 2^{n-1} \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Saalaufgabe: arithmetische Folge

Rechnen Sie die (implizite) arithmetische Folge

$$\boxed{a_0 = 3 \qquad a_{n+1} = -4 + a_n}$$

in explizite Darstellung um.

Rechnen Sie die (implizite) arithmetische Folge

$$\boxed{a_0 = 3 \qquad a_{n+1} = -4 + a_n}$$

in explizite Darstellung um.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -4 + a_n \\ &= -4 - 4 + a_{n-1} \\ &= -3 \cdot 4 + a_{n-2} \\ &\vdots \\ &= -(k+1) \cdot 4 + a_{n-k} \\ &\vdots (k = n) \\ &= -(n+1) \cdot 4 + a_0 \\ &= -(n+1) \cdot 4 + 3 \end{aligned}$$

explizite Darstellung:

$$\boxed{a_n = 3 - 4\,n}$$

Test:

$$a_0 = 3$$

und

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -4 + a_n \\ \Leftrightarrow \qquad 3 - 4\,(n+1) &= -4 + 3 - 4\,n \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Beispiel: Das Heron-Verfahren (1750 v. Chr.)

Heron von Alexandria
(100 n. Chr.)

"Grenzwert berechnen"

$$a_0 = 1\,, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

ist eine implizite Folge, die sich nicht als explizite darstellen lässt.

Beispiel: Das Heron-Verfahren (1750 v. Chr.)

Heron von Alexandria
(100 n. Chr.)

"Grenzwert berechnen"

$$a_0 = 1\,, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

ist eine implizite Folge, die sich nicht als explizite darstellen lässt.
Grenzwertberechnung: Es sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$

Beispiel: Das Heron-Verfahren (1750 v. Chr.)

Heron von Alexandria
(100 n. Chr.)

"Grenzwert berechnen"

$$a_0 = 1\,, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

ist eine implizite Folge, die sich nicht als explizite darstellen lässt.
Grenzwertberechnung: Es sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

Beispiel: Das Heron-Verfahren (1750 v. Chr.)

Heron von Alexandria
(100 n. Chr.)

"Grenzwert berechnen"

$$a_0 = 1\,, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

ist eine implizite Folge, die sich nicht als explizite darstellen lässt.
Grenzwertberechnung: Es sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{2}{\lim_{n\to\infty} a_n}\right)$$

Beispiel: Das Heron-Verfahren (1750 v. Chr.)

Heron von Alexandria
(100 n. Chr.)

"Grenzwert berechnen"

$$a_0 = 1\,, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

ist eine implizite Folge, die sich nicht als explizite darstellen lässt.
Grenzwertberechnung: Es sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$

$$\begin{aligned}
& & a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \\
&\Rightarrow & \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \\
&\Leftrightarrow & \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{2}{\lim_{n\to\infty} a_n}\right) \\
&\Leftrightarrow & a &= \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) & \quad \Big| \cdot a
\end{aligned}$$

Beispiel: Das Heron-Verfahren (1750 v. Chr.)

Heron von Alexandria
(100 n. Chr.)

"Grenzwert berechnen"

$$a_0 = 1\,, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

ist eine implizite Folge, die sich nicht als explizite darstellen lässt.
Grenzwertberechnung: Es sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$

$$\begin{aligned}
& & a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \\
&\Rightarrow & \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \\
&\Leftrightarrow & \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{2}{\lim_{n\to\infty} a_n}\right) \\
&\Leftrightarrow & a &= \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) & &\Big|\cdot a \\
&\Leftrightarrow & a^2 &= \frac{1}{2}\left(a^2 + 2\right)
\end{aligned}$$

Beispiel: Das Heron-Verfahren (1750 v. Chr.)

Heron von Alexandria
(100 n. Chr.)

"Grenzwert berechnen"

$$a_0 = 1\,, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

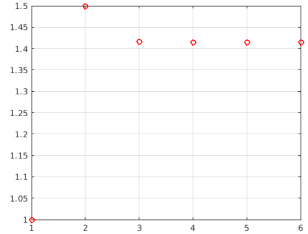
ist eine implizite Folge, die sich nicht als explizite darstellen lässt.
Grenzwertberechnung: Es sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$

$$\begin{aligned}
& & a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) & \\
&\Rightarrow & \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) & \\
&\Leftrightarrow & \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{2}{\lim_{n\to\infty} a_n}\right) & \\
&\Leftrightarrow & a &= \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) & \Big|\cdot a \\
&\Leftrightarrow & a^2 &= \frac{1}{2}\left(a^2 + 2\right) & \\
&\Leftrightarrow & a &= \sqrt{2} &
\end{aligned}$$

Labor: $a_n \approx \sqrt{2} \approx 1.4142$

```
a = 1;
for i=1:10
    a = (a+2/a)/2;
end
```

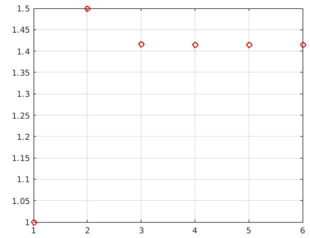
src/Heron.m



Labor: $a_n \approx \sqrt{2} \approx 1.4142$

```
a = 1;
for i=1:10
    a = (a+2/a)/2;
end
```

src/Heron.m



Fehler:

```
a = 1;
e = abs(a-sqrt(2));
for i=1:10
    a = (a+2/a)/2;
    e = abs(a-sqrt(2));
    fprintf('|sqrt(2)-a|=%.10e\n',e);
end
```

src/HeronError.m

$$\begin{aligned}
\|sqrt(2) - a\| &= 8.58\text{e-}02\\
\|sqrt(2) - a\| &= 2.45\text{e-}03\\
\|sqrt(2) - a\| &= 2.12\text{e-}06\\
\|sqrt(2) - a\| &= 1.59\text{e-}12\\
\|sqrt(2) - a\| &= 2.22\text{e-}16\\
\|sqrt(2) - a\| &= 2.22\text{e-}16
\end{aligned}$$

noch mehr Eigenschaften von Folgen

- Eine explizit dargestellt Folge lässt sich immer auch implizit darstellen.
- Eine implizit/rekursiv dargestellt Folge lässt sich nicht immer in explizite Darstellung umrechnen.

Definition

Augustin-Louis Cauchy
(1789-1857)

Definition: Cauchy-Folge

Eine Folge $(a_n)_n$ heißt *Cauchy-Folge* wenn Folgendes erfüllt ist:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n > M \ : \ |a_m - a_n| < \epsilon$$

Definition

Augustin-Louis Cauchy
(1789-1857)

Definition: Cauchy-Folge

Eine Folge $(a_n)_n$ heißt *Cauchy-Folge* wenn Folgendes erfüllt ist:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall m, n > M \; : \; |a_m - a_n| < \epsilon$$

(a) konvergente Folge: $a_n = \frac{1}{n}$: $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{|m-n|}{nm} < \frac{m}{nm} = \frac{1}{n} \to 0$

Augustin-Louis Cauchy
(1789-1857)

Definition: Cauchy-Folge

Eine Folge $(a_n)_n$ heißt *Cauchy-Folge* wenn Folgendes erfüllt ist:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall m, n > M \; : \; |a_m - a_n| < \epsilon$$

(a) konvergente Folge: $a_n = \frac{1}{n}$: $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{|m-n|}{nm} < \frac{m}{nm} = \frac{1}{n} \to 0$

(b) divergente Folge: $a_n = n$ Es sei Œ $m > n$, dann gilt

$$|m - n| = m - n \geq (n + 1) - n = 1 \quad \text{zu groß}\,.$$

Augustin-Louis Cauchy
(1789-1857)

Definition: Cauchy-Folge

Eine Folge $(a_n)_n$ heißt *Cauchy-Folge* wenn Folgendes erfüllt ist:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall m, n > M \;\; : \;\; |a_m - a_n| < \epsilon$$

(a) konvergente Folge: $a_n = \frac{1}{n}$: $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{|m-n|}{nm} < \frac{m}{nm} = \frac{1}{n} \to 0$

(b) divergente Folge: $a_n = n$ Es sei Œ $m > n$, dann gilt

$$|m-n| = m - n \geq (n+1) - n = 1 \quad \text{zu groß}\,.$$

Eigenschaften von Cauchy-Folgen

- Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ (!) ist konvergent.

In der Praxis, am Rechner, prüft man da gerne die Abstände aufeinanderfolgender Folgenglieder. Das ist ein wenig heikel, da das Cauchy-Kriterium schärfer ist. Es kann durchaus

$$|a_{n+1} - a_n| < \epsilon$$

für divergente Folgen erfüllt sein, aber es gilt dann nicht

$$|a_m - a_n| < \epsilon\,.$$

Bei Letzterem sind m und n Variablen, die unabhängig voneinander nach Unendlich gehen.

Definition: Reihe

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge

$$s_k := \sum_{n=0}^{k} a_n$$

heißt Folge der *Partialsummen*. Der Limes

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

heißt *(unendliche) Reihe* und stellt gleichzeitig bei Konvergenz den Grenzwert von $(s_k)_k$ dar.
Die spezielle Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

heißt *alternierende Reihe*.

Definition

Memo:

$$s_k := \sum_{n=0}^{k} a_n$$

Die Folgenglieder stellen sich dann dar als

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Beispiele

1. Die **Geometrische Reihe** ist eine der bemerkenswertesten und unentbehrlichsten Reihen in der Analysis. Ihre Konvergenzaussage spielt eine beherrschende Rolle in vielen Anwendungen.

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

für $q \neq 1$. (Beweis: Mathe 1, Vollständige Induktion)

Beispiele

1. Die **Geometrische Reihe** ist eine der bemerkenswertesten und unentbehrlichsten Reihen in der Analysis. Ihre Konvergenzaussage spielt eine beherrschende Rolle in vielen Anwendungen.

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

für $q \neq 1$. (Beweis: Mathe 1, Vollständige Induktion) Wie entwickelt sich diese, wenn wir n gegen ∞ streben lassen?

Beispiele

1. Die **Geometrische Reihe** ist eine der bemerkenswertesten und unentbehrlichsten Reihen in der Analysis. Ihre Konvergenzaussage spielt eine beherrschende Rolle in vielen Anwendungen.

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

für $q \neq 1$. (Beweis: Mathe 1, Vollständige Induktion) Wie entwickelt sich diese, wenn wir n gegen ∞ streben lassen?

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Beispiele

1. Die **Geometrische Reihe** ist eine der bemerkenswertesten und unentbehrlichsten Reihen in der Analysis. Ihre Konvergenzaussage spielt eine beherrschende Rolle in vielen Anwendungen.

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

für $q \neq 1$. (Beweis: Mathe 1, Vollständige Induktion) Wie entwickelt sich diese, wenn wir n gegen ∞ streben lassen?

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - \lim_{n\to\infty} q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

1. Die **Geometrische Reihe** ist eine der bemerkenswertesten und unentbehrlichsten Reihen in der Analysis. Ihre Konvergenzaussage spielt eine beherrschende Rolle in vielen Anwendungen.

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

für $q \neq 1$. (Beweis: Mathe 1, Vollständige Induktion) Wie entwickelt sich diese, wenn wir n gegen ∞ streben lassen?

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\
&= \frac{1-\lim_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q} \\
&= \frac{1}{1-q} \qquad \text{falls } |q| < 1
\end{aligned}$$

Beispiele

2. Wie können wir Zahlen der Form $0.\overline{9} = 0.9999\cdots$ und $0.\overline{1} = 0.1111\cdots$ addieren? Oder auch einfach verstehen?

Beispiele

2. Wie können wir Zahlen der Form $0.\bar{9} = 0.9999\cdots$ und $0.\bar{1} = 0.1111\cdots$ addieren? Oder auch einfach verstehen?

   Es ist

$$0.\bar{1} = 0.1111\cdots$$

Beispiele

2. Wie können wir Zahlen der Form $0.\bar{9} = 0.9999\cdots$ und $0.\bar{1} = 0.1111\cdots$ addieren? Oder auch einfach verstehen?

   Es ist

$$\begin{aligned} 0.\bar{1} &= 0.1111\cdots \\ &= 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots \end{aligned}$$

Beispiele

2. Wie können wir Zahlen der Form $0.\bar{9} = 0.9999\cdots$ und $0.\bar{1} = 0.1111\cdots$ addieren? Oder auch einfach verstehen?

Es ist

$$\begin{aligned} 0.\bar{1} &= 0.1111\cdots \\ &= 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots \\ &= 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + 10^{-4} + \cdots \end{aligned}$$

Beispiele

2. Wie können wir Zahlen der Form $0.\bar{9} = 0.9999\cdots$ und $0.\bar{1} = 0.1111\cdots$ addieren? Oder auch einfach verstehen?

   Es ist

$$\begin{aligned} 0.\bar{1} &= 0.1111\cdots \\ &= 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots \\ &= 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + 10^{-4} + \cdots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} \end{aligned}$$

Beispiele

2. Wie können wir Zahlen der Form $0.\bar{9} = 0.9999\cdots$ und $0.\bar{1} = 0.1111\cdots$ addieren? Oder auch einfach verstehen?

   Es ist

$$\begin{aligned}
0.\bar{1} &= 0.1111\cdots \\
&= 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots \\
&= 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + 10^{-4} + \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k
\end{aligned}$$

Beispiele

2. Wie können wir Zahlen der Form $0.\overline{9} = 0.9999\cdots$ und $0.\overline{1} = 0.1111\cdots$ addieren? Oder auch einfach verstehen?

Es ist

$$
\begin{aligned}
0.\overline{1} &= 0.1111\cdots \\
&= 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots \\
&= 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + 10^{-4} + \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k
\end{aligned}
$$

$$
= -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k
$$

Beispiele

2. Wie können wir Zahlen der Form $0.\bar{9} = 0.9999\cdots$ und $0.\bar{1} = 0.1111\cdots$ addieren? Oder auch einfach verstehen?

Es ist

$$
\begin{aligned}
0.\bar{1} &= 0.1111\cdots \\
&= 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots \\
&= 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + 10^{-4} + \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k \\
&= -1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{10^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10}}
\end{aligned}
$$

Beispiele

2. Wie können wir Zahlen der Form $0.\bar{9} = 0.9999\cdots$ und $0.\bar{1} = 0.1111\cdots$ addieren? Oder auch einfach verstehen?

Es ist

$$
\begin{aligned}
0.\bar{1} &= 0.1111\cdots \\
&= 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots \\
&= 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + 10^{-4} + \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k \\
&= -1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{10^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10}}
\end{aligned}
$$

2. Wie können wir Zahlen der Form $0.\bar{9} = 0.9999\cdots$ und $0.\bar{1} = 0.1111\cdots$ addieren? Oder auch einfach verstehen?

Es ist

$$\begin{aligned}
0.\bar{1} &= 0.1111\cdots \\
&= 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots \\
&= 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + 10^{-4} + \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{k} \\
&= -1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{10^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10}}
\end{aligned}$$

Aufgabe:

$$0.\bar{9} = ?$$

und

$$0.\bar{9} + 0.\bar{1} = ?$$

Saalaufgabe

Aufgabe:

$$0.\bar{9} = ?$$

und

$$0.\bar{9} + 0.\bar{1} = ?$$

Lösung:

$$0.\bar{9} = 9 \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} = 1$$

und damit

$$0.\bar{9} + 0.\bar{1} = \frac{10}{9} = 1.\bar{1}\,.$$

Uns interessieren heute gar nicht die Grenzwerte von konvergenten Reihen. Wir wollen nur wissen ob eine Reihe konvergent ist oder nicht.

Konvergenzkriterien

(1) Integralvergleichskriterium
(2) Das Majoranten-/Minorantenkriterium
(3) Das Leibnizkriterium
(4) Das Wurzelkriterium
(5) Das Quotientenkriterium

Integralvergleichskriterium

Die Reihe

$$\sum_{k=p}^{\infty} a_k = \sum_{k=p}^{\infty} f(k)$$

konvergiert genau dann, wenn

$$\int_p^{\infty} f(x)\, dx < \infty$$

erfüllt ist. Dabei muss sei $f(k)$ eine monoton fallende Folge sein, die nur positive Werte annimmt. Des weiteren muss $f \in C^0[p, \infty)$.

Bemerkung: Wir werden später (Kapitel Integration) verstehen, dass das keine Willkür ist, denn das (bestimmte) Integral ist nichts anderes als eine Reihe.

Beispiele


"Turm von Babylon"

1. Die **harmonische Reihe**
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
ist divergent,

Beispiele

“Turm von Babylon”

1. Die **harmonische Reihe**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ist divergent, denn das uneigentliche Integral

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$$

existiert nicht.

2. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

ist konvergent, denn das Integral

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{b} + 1 = 1$$

ist beschränkt.

2. Die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$
ist konvergent, denn das Integral
$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{b} + 1 = 1$$
ist beschränkt.

Der Wert des uneigentlichen Integrals sagt nur etwas über die Beschränktheit der Reihe, nicht über den Wert der Reihe, falls diese beschränkt ist.

Minoranten-/Majorantenkriterium

Majorantenkriterium:
Die Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergiert, wenn es eine konvergente Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} b_k$ gibt mit

$$|a_k| < b_k\,, \quad \forall k \geq m\,.$$

Minorantenkriterium:
Die Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ diveriert, wenn es eine divergente Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} b_k$ gibt mit

$$a_k \geq b_k\,, \quad \forall k \geq m\,.$$

Beispiele

1. **Majorantenkriterium:** Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$$

konvergiert, denn es gilt

Beispiele

1. **Majorantenkriterium:** Die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$$
konvergiert, denn es gilt
$$\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{1}{n^2}$$

Beispiele

1. **Majorantenkriterium:** Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$$

konvergiert, denn es gilt

$$\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{1}{n^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty\,.$$

2. **Minorantenkriterium:** Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

divergiert, denn es gilt

2. **Minorantenkriterium:** Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

divergiert, denn es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{k}$$

2. **Minorantenkriterium:** Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

divergiert, denn es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty\,.$$

Leibnizkriterium

Die alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$$

konvergiert, wenn $(a_k)_k$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

Leibnizkriterium

Die alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$$

konvergiert, wenn $(a_k)_k$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

Beispiele:

(1) $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$$ ist divergent

Leibnizkriterium

Die alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

konvergiert, wenn $(a_k)_k$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

Beispiele:

(1) $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$$ ist divergent

(2) $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \ln 2$$ ist konvergent

Leibnizkriterium

Die alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

konvergiert, wenn $(a_k)_k$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

Beispiele:

(1)	$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$	ist divergent
(2)	$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \ln 2$	ist konvergent
(3)	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$	ist konvergent

Wurzelkriterium

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, falls

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

und divergiert, falls

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$$

gilt. Beim Grenzwert $= 1$ liefert das Wurzelkriterium keine Aussage.

Wurzelkriterium

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, falls

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

und divergiert, falls

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$$

gilt. Beim Grenzwert $= 1$ liefert das Wurzelkriterium keine Aussage.

Beispiel (zerreißen von Papier): Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

konvergiert, denn es gilt

Wurzelkriterium

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, falls
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$
und divergiert, falls
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$$
gilt. Beim Grenzwert $= 1$ liefert das Wurzelkriterium keine Aussage.

Beispiel (zerreißen von Papier): Die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$
konvergiert, denn es gilt
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{2^k}}$$

Wurzelkriterium

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, falls

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

und divergiert, falls

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$$

gilt. Beim Grenzwert $= 1$ liefert das Wurzelkriterium keine Aussage.

Beispiel (zerreißen von Papier): Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

konvergiert, denn es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2} < 1\,.$$

Quotientenkriterium

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, falls

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

und divergiert, falls

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$$

gilt. Beim Grenzwert $= 1$ liefert das Quotientenkriterium keine Aussage.

Quotientenkriterium

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, falls

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

und divergiert, falls

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$$

gilt. Beim Grenzwert $= 1$ liefert das Quotientenkriterium keine Aussage.

Beispiele:

(a) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ konvergiert.

Quotientenkriterium

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, falls

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

und divergiert, falls

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$$

gilt. Beim Grenzwert $= 1$ liefert das Quotientenkriterium keine Aussage.

Beispiele:

(a) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ konvergiert.

(b) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-1}{k!}$ konvergiert.

Quotientenkriterium

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, falls

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$$

und divergiert, falls

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$$

gilt. Beim Grenzwert $= 1$ liefert das Quotientenkriterium keine Aussage.

Beispiele:

(a) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ konvergiert.

(b) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-1}{k!}$ konvergiert.

(c) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \binom{2k}{k}$ divergiert.

Beispiel (a)

Memo:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$$

Beispiel (a)

Memo:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$$

$$a_k = \frac{k^2}{2^k}$$

Beispiel (a)

Memo:

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$$

$$a_k = \frac{k^2}{2^k}$$

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}$$

Beispiel (a)

Memo:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$$

$$a_k = \frac{k^2}{2^k}$$

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)^2\,2^k}{2^{k+1}\,k^2}$$

Beispiel (a)

Memo:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{k^2}{2^k} \\ a_{k+1} &= \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \frac{(k+1)^2\,2^k}{2^{k+1}\,k^2} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{k^2+2\,k+1}{k^2} \Rightarrow \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

Beispiel (a)

Memo:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$$

$$a_k = \frac{k^2}{2^k}$$

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)^2\,2^k}{2^{k+1}\,k^2} = \frac{1}{2}\,\frac{k^2+2\,k+1}{k^2} \Rightarrow \frac{1}{2} < 1$$

Damit ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}$$

konvergent.

Saalaufgabe zu Beispiel (b)

Memo:

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$$

Saalaufgabe zu Beispiel (b)

Memo:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$$

Versuchen Sie es mal mit

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k-1}{k!}\,.$$

Tipp: Notieren Sie sich zunächst a_k und a_{k+1}, dann der Bruch, vereinfachen, Limes berechnen, fertig ;-)

Saalaufgabe zu Beispiel (b)

Memo:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$$

Lösung:

$$a_k = \frac{k-1}{k!}$$

Saalaufgabe zu Beispiel (b)

Memo:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$$

Lösung:

$$a_k = \frac{k-1}{k!}$$

$$a_{k+1} = \frac{k}{(k+1)!}$$

Saalaufgabe zu Beispiel (b)

Memo:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$$

Lösung:

$$a_k = \frac{k-1}{k!}$$

$$a_{k+1} = \frac{k}{(k+1)!}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k \cdot k!}{(k+1)!\,(k-1)}$$

Saalaufgabe zu Beispiel (b)

Memo:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$$

Lösung:

$$a_k = \frac{k-1}{k!}$$
$$a_{k+1} = \frac{k}{(k+1)!}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k\cdot k!}{(k+1)!\,(k-1)}$$
$$= \frac{k\cdot \cancel{k!}}{\cancel{k!}(k+1)\,(k-1)} \to 0 < 1$$

Saalaufgabe zu Beispiel (b)

Memo:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$$

Lösung:

$$a_k = \frac{k-1}{k!}$$

$$a_{k+1} = \frac{k}{(k+1)!}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k\cdot k!}{(k+1)!\,(k-1)}$$

$$= \frac{k\cdot \cancel{k!}}{\cancel{k!}\,(k+1)\,(k-1)} \to 0 < 1$$

Damit ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k-1}{k!}$$

konvergent.

Beispiel (c)

Memo:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$$

Damit Sie nicht denken hier konvergiert immer alles:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{2\,k}{k}$$

Beispiel (c)

Memo:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$$

Damit Sie nicht denken hier konvergiert immer alles:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{2\,k}{k}$$

$$a_k = \binom{2\,k}{k} = \frac{(2\,k)!}{k!\,(2\,k-k)!} = \frac{(2\,k)!}{k!^2}$$

Beispiel (c)

Memo:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$$

Damit Sie nicht denken hier konvergiert immer alles:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{2\,k}{k}$$

$$a_k = \binom{2\,k}{k} = \frac{(2\,k)!}{k!\,(2\,k-k)!} = \frac{(2\,k)!}{k!^2}$$

$$a_{k+1} = \frac{(2\,(k+1))!}{(k+1)!^2} = \frac{(2\,k+2)!}{(k+1)!^2}$$

Beispiel (c)

Memo:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$$

Damit Sie nicht denken hier konvergiert immer alles:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{2\,k}{k}$$

$$a_k = \binom{2\,k}{k} = \frac{(2\,k)!}{k!\,(2\,k-k)!} = \frac{(2\,k)!}{k!^2}$$

$$a_{k+1} = \frac{(2\,(k+1))!}{(k+1)!^2} = \frac{(2\,k+2)!}{(k+1)!^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(2\,k+2)!\,k!^2}{(k+1)!^2\,(2\,k)!}$$

Beispiel (c)

Memo:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$$

Damit Sie nicht denken hier konvergiert immer alles:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{2\,k}{k}$$

$$a_k = \binom{2\,k}{k} = \frac{(2\,k)!}{k!\,(2\,k-k)!} = \frac{(2\,k)!}{k!^2}$$

$$a_{k+1} = \frac{(2\,(k+1))!}{(k+1)!^2} = \frac{(2\,k+2)!}{(k+1)!^2}$$

$$\Rightarrow\quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(2\,k+2)!\,k!^2}{(k+1)!^2\,(2\,k)!}$$

$$= \frac{\cancel{(2\,k)!}\,(2\,k+1)\,(2\,k+2)\,\cancel{k!^2}}{\cancel{k!^2}(k+1)^2\,\cancel{(2\,k)!}}$$

Beispiel (c)

Memo:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$$

Damit Sie nicht denken hier konvergiert immer alles:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{2\,k}{k}$$

$$a_k = \binom{2\,k}{k} = \frac{(2\,k)!}{k!\,(2\,k-k)!} = \frac{(2\,k)!}{k!^2}$$

$$a_{k+1} = \frac{(2\,(k+1))!}{(k+1)!^2} = \frac{(2\,k+2)!}{(k+1)!^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(2\,k+2)!\,k!^2}{(k+1)!^2\,(2\,k)!}$$

$$= \frac{\cancel{(2\,k)!}\,(2\,k+1)\,(2\,k+2)\,\cancel{k!^2}}{\cancel{k!^2}(k+1)^2\,\cancel{(2\,k)!}}$$

$$= \frac{(2\,k+1)\,(2\,k+2)}{(k+1)^2}$$

Beispiel (c)

Memo:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$$

Damit Sie nicht denken hier konvergiert immer alles:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{2\,k}{k} = \infty$$

$$a_k = \binom{2\,k}{k} = \frac{(2\,k)!}{k!\,(2\,k-k)!} = \frac{(2\,k)!}{k!^2}$$

$$a_{k+1} = \frac{(2\,(k+1))!}{(k+1)!^2} = \frac{(2\,k+2)!}{(k+1)!^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(2\,k+2)!\,k!^2}{(k+1)!^2\,(2\,k)!}$$

$$= \frac{\cancel{(2\,k)!}\,(2\,k+1)\,(2\,k+2)\,\cancel{k!^2}}{\cancel{k!^2}(k+1)^2\,\cancel{(2\,k)!}}$$

$$= \frac{(2\,k+1)\,(2\,k+2)}{(k+1)^2}$$

$$\to 4 > 1$$

Beispiel: Leibnizkriterium

Memo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2\,k}{k}\ , \ \ a_k = \binom{2\,k}{k} = \frac{(2\,k)!}{k!^2}$$

Beispiel: Leibnizkriterium

Memo:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{2\,k}{k}\,,\ a_k=\binom{2\,k}{k}=\frac{(2\,k)!}{k!^2}$$

$$a_k=\frac{(2\,k)!}{k!^2}=\frac{1\cdots k\cdot(k+1)\cdots(2\,k)}{1\cdots k\cdot 1\cdots k}$$

Beispiel: Leibnizkriterium

Memo:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{2\,k}{k}\,,\ a_k=\binom{2\,k}{k}=\frac{(2\,k)!}{k!^2}$$

$$a_k=\frac{(2\,k)!}{k!^2}=\frac{1\cdots k\cdot(k+1)\cdots(2\,k)}{1\cdots k\cdot 1\cdots k}=\frac{\cancel{1\cdots k}\cdot(k+1)\cdots(2\,k)}{\cancel{1\cdots k}\cdot 1\cdots k}$$

Beispiel: Leibnizkriterium

Memo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2\,k}{k}\ ,\quad a_k = \binom{2\,k}{k} = \frac{(2\,k)!}{k!^2}$$

$$a_k = \frac{(2\,k)!}{k!^2} = \frac{1\cdots k\cdot(k+1)\cdots(2\,k)}{1\cdots k\cdot 1\cdots k} = \frac{\cancel{1\cdots k}\cdot(k+1)\cdots(2\,k)}{\cancel{1\cdots k}\cdot 1\cdots k}$$

$$= \underbrace{\frac{k+1}{1}}_{>1}\cdot\underbrace{\frac{k+2}{2}}_{>1}\cdots\underbrace{\frac{2\,k}{k}}_{=2}$$

Beispiel: Leibnizkriterium

Memo:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{2\,k}{k}\,,\quad a_k=\binom{2\,k}{k}=\frac{(2\,k)!}{k!^2}$$

$$a_k=\frac{(2\,k)!}{k!^2}=\frac{1\cdots k\cdot(k+1)\cdots(2\,k)}{1\cdots k\cdot 1\cdots k}=\frac{\cancel{1\cdots k}\cdot(k+1)\cdots(2\,k)}{\cancel{1\cdots k}\cdot 1\cdots k}$$

$$=\underbrace{\frac{k+1}{1}}_{>1}\cdot\underbrace{\frac{k+2}{2}}_{>1}\cdots\underbrace{\frac{2\,k}{k}}_{=2}$$

Das ist sicher keine Nullfolge!

Anwendung

Wir werden später lernen wie wir komplizierte Funktionen durch einfache ersetzen. Wir sprechen von **Taylorpolynomen**, bzw. **Taylorreihen**. Es ist im Grunde was auch Ihr Taschenrechner macht, wenn Sie Werte für

$$\sin\,,\ \cos\,,\ \ln\,,\ \textit{etc}.$$

anfordern.

Eine Funktion durch ein Taylorpolynom annähern wird sehr häufig in der Praxis eingesetzt. Das ist eine schicke Methode, sich das Leben leicht zu machen, aber es funktioniert nicht immer. Konvergenzkriterien von Reihen sagen uns, ob und wo diese Lebenserleichterung erlaubt ist.

Lernziele

- Folgen
  - Sie verstehen den Unterschied zwischen Folgen, Mengen und Funktionsgraphen und kennen die Darstellungsformen von Folgen.
  - Sie kennen Methoden, um
    - einen Limes zu berechnen,
    - einen vermuteten Grenzwert zu prüfen,
    - eine Folge auf Konvergenz (Monotonie und Beschränktheit) zu prüfen.
  - Sie wissen was ein unbestimmter Ausdruck ist und kennen einige Beispiele.
  - Sie können explizite in implizite Folgen umrechnen und falls möglich auch umgekehrt.
- Reihen
  - Sie kennen die Reihenkriterien und können diese anwenden.