Hochschule Konstanz
Fakultät Informatik

4 Multivariate Differentiation
4.1 erster Ordnung

Mathe II

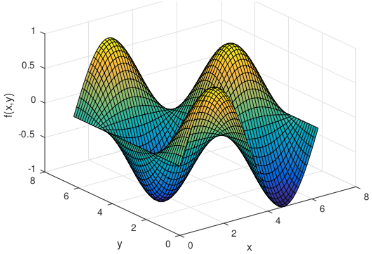
HTWG - Fakultät für Informatik

Prof. Dr. R. Axthelm

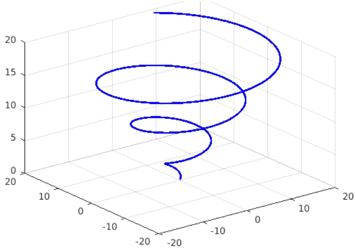
Multivariate Differentiation

Ableitungsterme erster Ordnung

Übersicht



$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

Was bedeutet Steigung?
Auf welchem Weg bleiben wir auf einer Höhe?
Wo entlang geht es am steilsten bergauf/bergab?
Wie finden wir kritische Punkte?

Wir betrachten zunächst skalare Funktionen

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,.$$

Definitione: Richtungsableitung

Die *Richtungsableitung* von u am Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ in Richtung $y \in \mathbb{R}^n$, mit $|y| = 1$, ist gegeben durch den Grenzwert (sofern existent)

$$\frac{\partial}{\partial y}\, u(x) := \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h\,y) - u(x)}{h}\,.$$

Wir schreiben auch u_y oder $D_y\, u$ statt $\frac{\partial}{\partial y}\, u$.

Ableitung erster Ordnung: partielle Ableitung

Ein Spezialfall einer Richtungsableitung ist die in Richtung der Koordinatenachsen:

Definition: partielle Ableitung

Die *partiellen Ableitungen* von u am Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} u(x) &:= \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h\, e_i) - u(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - u(x_1, \ldots, x_n)}{h}\,, \quad i = 1, \ldots, n\end{aligned}$$

Ein Spezialfall einer Richtungsableitung ist die in Richtung der Koordinatenachsen:

Definition: partielle Ableitung

Die *partiellen Ableitungen* von u am Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) &:= \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h\, e_i) - u(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - u(x_1, \ldots, x_n)}{h}\,, \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Beispiel:
Die partiellen Ableitungen von
$u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \sin(x_2)$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x_2) &= 2\, x_1 + \sin(x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, x_2) &= x_1 \cos(x_2)\,. \end{aligned}$$

Ein Spezialfall einer Richtungsableitung ist die in Richtung der Koordinatenachsen:

Definition: partielle Ableitung

Die *partiellen Ableitungen* von u am Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) &:= \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h\, e_i) - u(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - u(x_1, \ldots, x_n)}{h}\,, \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Beispiel:

Die partiellen Ableitungen von $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \sin(x_2)$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x_2) &= 2\, x_1 + \sin(x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, x_2) &= x_1 \cos(x_2)\,. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen von u bei $x = (1, 2)^T$ sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} u(1, 2) &= 2 + \sin 2 \approx 2.9093 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} u(1, 2) &= \cos 2 \approx -0.41615\,. \end{aligned}$$

Ableitung erster Ordnung: Gradient

Definition: Gradient

Der *Gradient* einer Funktion u ist gegeben durch

$$\operatorname{grad}(u)^T = \nabla u := \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}.$$

∇ heißt *Nabla-Operator*.

Der Nabla-Operator liefert immer einen Spaltenvektor, wärend hingegen der

$$\operatorname{grad} f := (f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$$

einen Zeilenvektor beschreibt. Die Komponenten sind aber die Gleichen.

Beispiel: Gradient

Der Gradient von $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \sin(x_2)$ ist gegeben durch

$$\nabla u = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ u_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x_1 + \sin(x_2) \\ x_1 \cos(x_2) \end{pmatrix}.$$

Der Gradient von $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \sin(x_2)$ am Punkt $x = (1, 0)$ ist gegeben durch

$$\left(\nabla u\right)(x)\Big|_{x=\binom{1}{0}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Gradient

Der Gradient von $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \sin(x_2)$ ist gegeben durch

$$\nabla u = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ u_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x_1 + \sin(x_2) \\ x_1 \cos(x_2) \end{pmatrix}.$$

Der Gradient von $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \sin(x_2)$ am Punkt $x = (1, 0)$ ist gegeben durch

$$\left(\nabla u\right)(x)\Big|_{x=\binom{1}{0}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

generell:

$$\nabla u = \underbrace{\|\nabla u\|}_{\text{Länge}} \; \underbrace{\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}}_{\text{normierte Richtung}}$$

Beispiel: Gradient

Der Gradient von $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \sin(x_2)$ ist gegeben durch

$$\nabla u = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ u_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x_1 + \sin(x_2) \\ x_1 \cos(x_2) \end{pmatrix}.$$

Der Gradient von $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \sin(x_2)$ am Punkt $x = (1, 0)$ ist gegeben durch

$$(\nabla u)\,(x)\big|_{x=\binom{1}{0}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>generell:</u>

$$\nabla u = \underbrace{\|\nabla u\|}_{\text{Länge}} \quad \underbrace{\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}}_{\text{normierte Richtung}}$$

Der Gradient, also hier $\binom{2}{1}$ ist ein Vektor im $\mathbb{R}^2$.
Ein Vektor hat stets 2 Eigenschaften:

1. Richtung: $\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \binom{2}{1}$
2. Länge: $\|\nabla u\| = \sqrt{5}$

Beispiel: Gradient

Der Gradient von $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \sin(x_2)$ ist gegeben durch

$$\nabla u = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ u_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x_1 + \sin(x_2) \\ x_1 \cos(x_2) \end{pmatrix}.$$

Der Gradient von $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \sin(x_2)$ am Punkt $x = (1, 0)$ ist gegeben durch

$$(\nabla u)\,(x)\big|_{x=\binom{1}{0}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>generell:</u>

$$\nabla u = \underbrace{\|\nabla u\|}_{\text{Länge}} \; \underbrace{\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}}_{\text{normierte Richtung}}$$

Der Gradient, also hier $\binom{2}{1}$ ist ein Vektor im $\mathbb{R}^2$.
Ein Vektor hat stets 2 Eigenschaften:

1. Richtung: $\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \binom{2}{1}$
2. Länge: $\|\nabla u\| = \sqrt{5}$

Beide Eigenschaften haben eine Bedeutung für u an der Stelle $P = (1, 0)$

1. Richtung: Der Gradient zeigt immer (!) in Richtung des steilsten Anstiegs, bzw $-\nabla u$ in Richtung des steilsten Abstiegs, auch **Fluss**richtung genannt.
2. Länge: Der Betrag des Gradienten gibt die Steigung in Richtung des Gradienten an.

Saalaufgabe

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x) = \ln \frac{x_1}{x_2}$$

stellen Sie den Gradienten im Punkt $P = (1, 2)$ auf und berechnen Sie die Steigung dort in Richtung des Gradienten.

Saalaufgabe

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x) = \ln \frac{x_1}{x_2}$$

stellen Sie den Gradienten im Punkt $P = (1, 2)$ auf und berechnen Sie die Steigung dort in Richtung des Gradienten.

$$f_{x_1} = \frac{x_2}{x_1} \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1}$$

Saalaufgabe

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x) = \ln \frac{x_1}{x_2}$$

stellen Sie den Gradienten im Punkt $P = (1, 2)$ auf und berechnen Sie die Steigung dort in Richtung des Gradienten.

$$f_{x_1} = \frac{x_2}{x_1}\frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1} \qquad f_{x_2} = \frac{x_2}{x_1}\frac{-x_1}{x_2^2} = \frac{-1}{x_2}$$

Saalaufgabe

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x) = \ln \frac{x_1}{x_2}$$

stellen Sie den Gradienten im Punkt $P = (1, 2)$ auf und berechnen Sie die Steigung dort in Richtung des Gradienten.

$$f_{x_1} = \frac{x_2}{x_1}\,\frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1} \qquad f_{x_2} = \frac{x_2}{x_1}\,\frac{-x_1}{x_2^2} = \frac{-1}{x_2}$$

$$\text{Gradient:} \quad \nabla f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \frac{-1}{x_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{x_1\,x_2} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

Saalaufgabe

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x) = \ln \frac{x_1}{x_2}$$

stellen Sie den Gradienten im Punkt $P = (1, 2)$ auf und berechnen Sie die Steigung dort in Richtung des Gradienten.

$$f_{x_1} = \frac{x_2}{x_1} \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1} \qquad f_{x_2} = \frac{x_2}{x_1} \frac{-x_1}{x_2^2} = \frac{-1}{x_2}$$

$$\text{Gradient:} \quad \nabla f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \frac{-1}{x_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{x_1 x_2} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gradient am Punkt } P\text{:} \quad \nabla f(P) = \frac{1}{x_1 x_2} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \Big|_{x_1=1,\ x_2=2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Saalaufgabe

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x) = \ln \frac{x_1}{x_2}$$

stellen Sie den Gradienten im Punkt $P = (1, 2)$ auf und berechnen Sie die Steigung dort in Richtung des Gradienten.

$$f_{x_1} = \frac{x_2}{x_1}\,\frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1} \qquad f_{x_2} = \frac{x_2}{x_1}\,\frac{-x_1}{x_2^2} = \frac{-1}{x_2}$$

$$\text{Gradient:} \quad \nabla f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \frac{-1}{x_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{x_1\,x_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gradient am Punkt } P\text{:} \quad \nabla f(P) = \frac{1}{x_1\,x_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}\Big|_{x_1=1\,,\ x_2=2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Steigung dort:} \quad \|\nabla f(P)\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.12$$

Satz: Rechenregeln für den Gradienten

Für alle Konstanten $c \in \mathbb{R}$ und Skalarfelder $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\nabla c = \vec{0}$$

Linearität

$$\nabla (c\, u) = c \nabla u$$
$$\nabla (u + v) = \nabla u + \nabla v$$

Produktregel

$$\nabla (u\, v) = u \nabla v + v \nabla u$$

Kettenregel

$$\nabla (u^n) = n\, u^{n-1} \nabla u \quad \text{für} \quad n \neq 0$$

(ohne Beweis)

Nächster Schritt: Zusammenhang zwischen der Richtungs- und der partiellen Ableitung.

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad g'(t) =$$

Ableitung einer Parametrisierung

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad g'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \\ g_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t + t \cos t \\ 2\,t \end{pmatrix}$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t\ \sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad g'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \\ g_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t + t\ \cos t \\ 2\,t \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad g''(t) = \begin{pmatrix} g_1''(t) \\ g_2''(t) \\ g_3''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\ \cos t - t\ \sin t \\ 2 \end{pmatrix}$$

etc.

Fahrplan:

partielle Abl. u_{x_i}

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad g'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \\ g_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t + t \cos t \\ 2\,t \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad g''(t) = \begin{pmatrix} g_1''(t) \\ g_2''(t) \\ g_3''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cos t - t \sin t \\ 2 \end{pmatrix}$$

etc.

Fahrplan:

partielle Abl. u_{x_i}

$\downarrow$

Gradienten $(\nabla u)_i = u_{x_i}$

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t\,\sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad g'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \\ g_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t + t\,\cos t \\ 2\,t \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad g''(t) = \begin{pmatrix} g_1''(t) \\ g_2''(t) \\ g_3''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\,\cos t - t\,\sin t \\ 2 \end{pmatrix}$$

etc.

Ableitung einer Parametrisierung

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t\ \sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad g'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \\ g_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t + t\ \cos t \\ 2\,t \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad g''(t) = \begin{pmatrix} g_1''(t) \\ g_2''(t) \\ g_3''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\ \cos t - t\ \sin t \\ 2 \end{pmatrix}$$

etc.

Fahrplan:

partielle Abl. u_{x_i}

$\downarrow$

Gradienten $(\nabla u)_i = u_{x_i}$

$\downarrow$

Richtungsbaleitung
$u_v = \nabla u \cdot v$, $(\|v\| = 1)$

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t\,\sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad g'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \\ g_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t + t\,\cos t \\ 2\,t \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad g''(t) = \begin{pmatrix} g_1''(t) \\ g_2''(t) \\ g_3''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\,\cos t - t\,\sin t \\ 2 \end{pmatrix}$$

etc.

Fahrplan:

partielle Abl. u_{x_i}

$\downarrow$

Gradienten $(\nabla u)_i = u_{x_i}$

$\downarrow$

Richtungsbaleitung
$u_v = \nabla u \cdot v$, $(\|v\| = 1)$

$\uparrow$

Kettenregel für
multivariate Funktionen

Fahrplan:

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad g'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \\ g_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t + t \cos t \\ 2\,t \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad g''(t) = \begin{pmatrix} g_1''(t) \\ g_2''(t) \\ g_3''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cos t - t \sin t \\ 2 \end{pmatrix}$$

etc.

partielle Abl. u_{x_i}

$\downarrow$

Gradienten $(\nabla u)_i = u_{x_i}$

$\downarrow$

Richtungsbaleitung
$u_v = \nabla u \cdot v$, $(\|v\| = 1)$

$\uparrow$

Kettenregel für
multivariate Funktionen

$\uparrow$

Ableitungen für
vektorwertige Funktionen

Ableitung einer Parametrisierung

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad g'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \\ g_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t + t \cos t \\ 2\,t \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad g''(t) = \begin{pmatrix} g_1''(t) \\ g_2''(t) \\ g_3''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cos t - t \sin t \\ 2 \end{pmatrix}$$

etc.

Fahrplan:

partielle Abl. u_{x_i}

$\downarrow$

Gradienten $(\nabla u)_i = u_{x_i}$

$\downarrow$

Richtungsbaleitung
$u_v = \nabla u \cdot v, \; (\|v\| = 1) \quad \rightarrow \quad$ Fluss: $-\nabla u$

$\uparrow$

Kettenregel für
multivariate Funktionen

$\uparrow$

Ableitungen für
vektorwertige Funktionen

Komposition/Verkettung

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{und} \quad g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

Komposition/Verkettung

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{und} \quad g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), \ldots, g_n(t))$$

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{und} \quad g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), \ldots, g_n(t))$$

Beispiel: Für $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x_1 \cos x_2$ und $g(t) = \binom{t^2}{\sqrt{t}}$ gilt:

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{und} \quad g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), \ldots, g_n(t))$$

Beispiel: Für $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x_1 \cos x_2$ und $g(t) = \binom{t^2}{\sqrt{t}}$ gilt:

$$(f \circ g)(t) = f(g(t))$$

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{und} \quad g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), \dots, g_n(t))$$

Beispiel: Für $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x_1 \cos x_2$ und $g(t) = \binom{t^2}{\sqrt{t}}$ gilt:

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t))$$

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{und} \quad g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), \dots, g_n(t))$$

Beispiel: Für $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x_1 \cos x_2$ und $g(t) = \binom{t^2}{\sqrt{t}}$ gilt:

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t)) = g_1(t) \cos g_2(t)$$

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

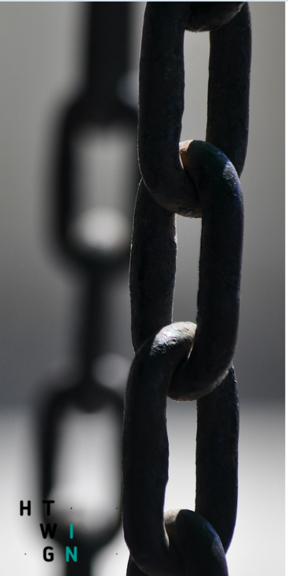
$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{und} \quad g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), \dots, g_n(t))$$

Beispiel: Für $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x_1 \cos x_2$ und $g(t) = \binom{t^2}{\sqrt{t}}$ gilt:

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t)) = g_1(t) \cos g_2(t) = t^2 \cos \sqrt{t} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

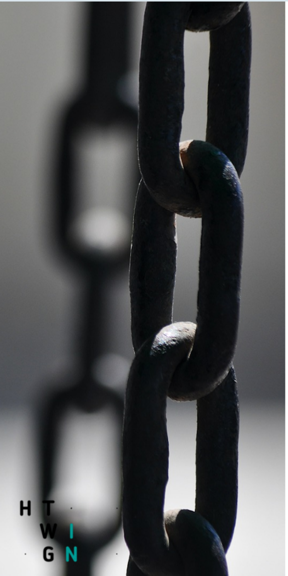


Satz: Kettenregel

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}(f \circ g)(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial g_k} f(g(t)) g_k'(t)\,.$$

(Beweis: analog zum 1d-Fall)



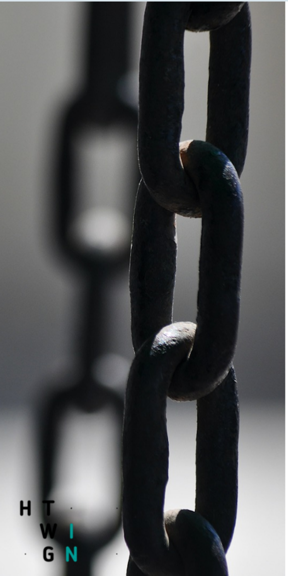
Satz: Kettenregel

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\,(f \circ g)\,(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial g_k} f(g(t))g_k'(t)\,.$$

(Beweis: analog zum 1d-Fall)

<u>Beispiel:</u> Für $g\ :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ und $f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x_1\ \cos x_2$ und $g(t) = \binom{t^2}{\sqrt{t}}$ gilt:



Satz: Kettenregel

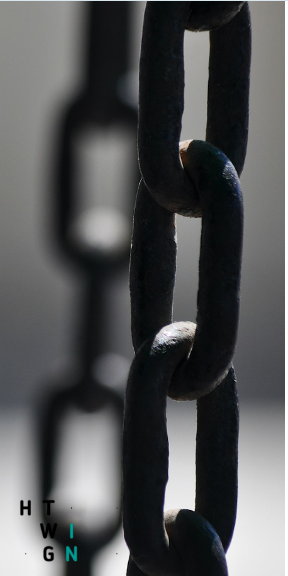
Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\,(f \circ g)\,(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial g_k} f(g(t)) g_k'(t)\,.$$

(Beweis: analog zum 1d-Fall)

Beispiel: Für $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x_1 \cos x_2$ und $g(t) = \binom{t^2}{\sqrt{t}}$ gilt:

$$(f \circ g)'(t) = f(g(t))' = \frac{d}{dt}\, f(g(t))$$



Satz: Kettenregel

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt

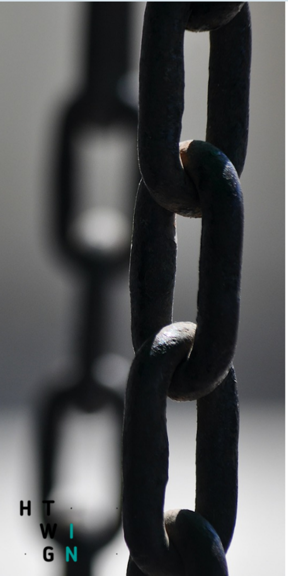
$$\frac{d}{dt}(f \circ g)(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial g_k} f(g(t)) g_k'(t) \,.$$

(Beweis: analog zum 1d-Fall)

Beispiel: Für $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x_1 \cos x_2$ und $g(t) = \binom{t^2}{\sqrt{t}}$ gilt:

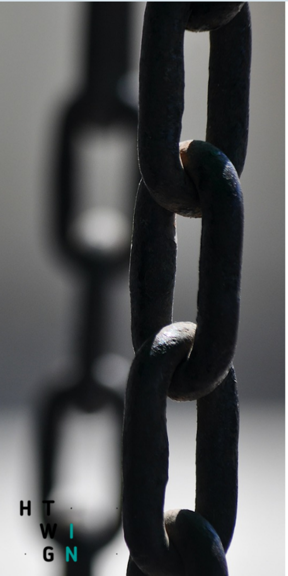
$$(f \circ g)'(t) = f(g(t))' = \frac{d}{dt} f(g(t)) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial g_k} f(g(t))\, g'(t)$$

Beispiel: Kettenregel



Memo: $f(x) = x_1 \cos x_2$ und $g(t) = \binom{t^2}{\sqrt{t}}$: $\frac{d}{dt} f(g(t)) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial g_k} f(g(t))\, g'(t)$

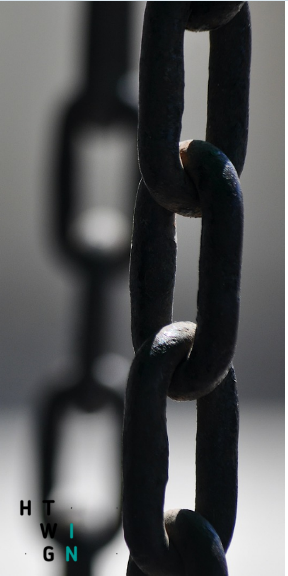
Beispiel: Kettenregel



Memo: $f(x) = x_1 \cos x_2$ und $g(t) = \binom{t^2}{\sqrt{t}}$: $\frac{d}{dt}\, f(g(t)) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial g_k}\, f(g(t))\, g'(t)$

$$g'(t) = \begin{pmatrix} (t^2)' \\ \sqrt{t}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,t \\ \frac{1}{2\,\sqrt{t}} \end{pmatrix}$$

Beispiel: Kettenregel



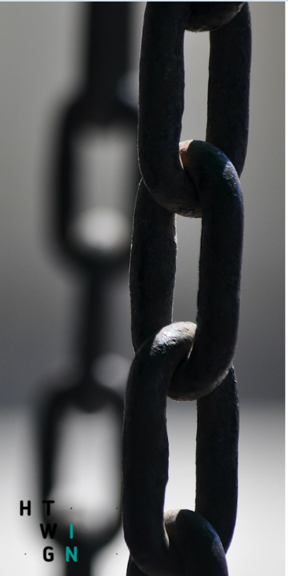
Memo: $f(x) = x_1 \cos x_2$ und $g(t) = \binom{t^2}{\sqrt{t}}$: $\frac{d}{dt} f(g(t)) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial g_k} f(g(t))\, g'(t)$

$$g'(t) = \begin{pmatrix} (t^2)' \\ \sqrt{t}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,t \\ \frac{1}{2\,\sqrt{t}} \end{pmatrix}$$

und

$$f_{x_1}(x) = (x_1 \cos x_2)_{x_1} = \cos x_2$$

Beispiel: Kettenregel

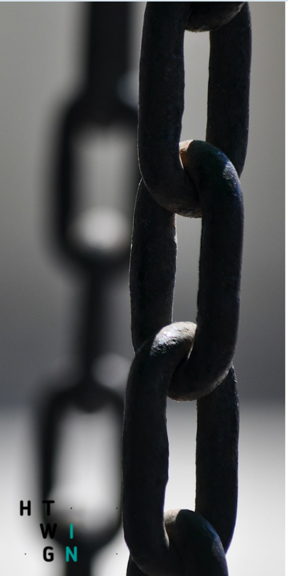


Memo: $f(x) = x_1 \ \cos x_2$ und $g(t) = \binom{t^2}{\sqrt{t}}$: $\frac{d}{dt} f(g(t)) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial g_k} f(g(t))\, g'(t)$

$$g'(t) = \begin{pmatrix} (t^2)' \\ \sqrt{t}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,t \\ \frac{1}{2\,\sqrt{t}} \end{pmatrix}$$

und $$f_{x_1}(x) = (x_1 \ \cos x_2)_{x_1} = \cos x_2 \ \Rightarrow \ f_{g_1}(g(t)) = \cos g_2(t)$$

Beispiel: Kettenregel



Memo: $f(x) = x_1 \ \cos x_2$ und $g(t) = \binom{t^2}{\sqrt{t}}$: $\qquad \frac{d}{dt} f(g(t)) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial g_k} f(g(t))\, g'(t)$

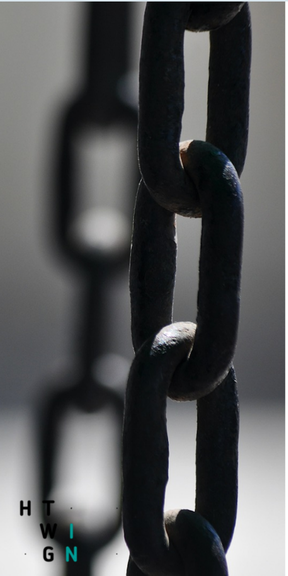
$$g'(t) = \begin{pmatrix} (t^2)' \\ \sqrt{t}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,t \\ \frac{1}{2\,\sqrt{t}} \end{pmatrix}$$

und

$$f_{x_1}(x) = (x_1 \ \cos x_2)_{x_1} = \cos x_2 \ \Rightarrow \ f_{g_1}(g(t)) = \cos g_2(t)$$

$$f_{x_2}(x) = (x_1 \ \cos x_2)_{x_2} = -x_1 \ \sin x_2$$

Beispiel: Kettenregel



Memo: $f(x) = x_1 \ \cos x_2$ und $g(t) = \binom{t^2}{\sqrt{t}}$: $\frac{d}{dt}\, f(g(t)) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial g_k}\, f(g(t))\, g'(t)$

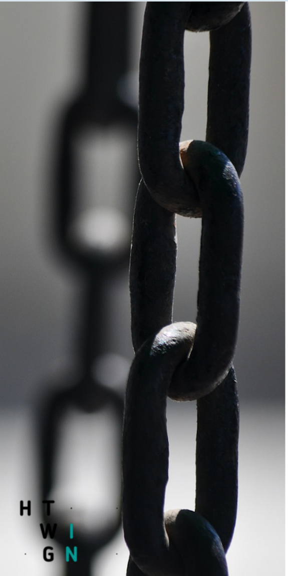
$$g'(t) = \begin{pmatrix} (t^2)' \\ \sqrt{t}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,t \\ \frac{1}{2\,\sqrt{t}} \end{pmatrix}$$

und

$$f_{x_1}(x) = (x_1 \ \cos x_2)_{x_1} = \cos x_2 \ \Rightarrow \ f_{g_1}(g(t)) = \cos g_2(t)$$

$$f_{x_2}(x) = (x_1 \ \cos x_2)_{x_2} = -x_1 \ \sin x_2 \ \Rightarrow \ f_{g_2}(g(t)) = -g_1(t) \ \sin g_2(t)$$

Beispiel: Kettenregel



Memo: $f(x) = x_1 \cos x_2$ und $g(t) = \binom{t^2}{\sqrt{t}}$: $\quad \frac{d}{dt} f(g(t)) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial g_k} f(g(t))\, g'(t)$

$$g'(t) = \begin{pmatrix} (t^2)' \\ \sqrt{t}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,t \\ \frac{1}{2\,\sqrt{t}} \end{pmatrix}$$

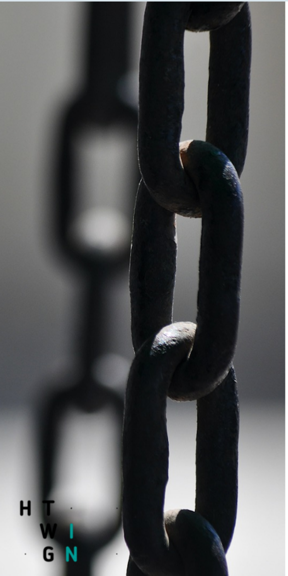
und

$$f_{x_1}(x) = (x_1 \cos x_2)_{x_1} = \cos x_2 \;\Rightarrow\; f_{g_1}(g(t)) = \cos g_2(t)$$

$$f_{x_2}(x) = (x_1 \cos x_2)_{x_2} = -x_1 \sin x_2 \;\Rightarrow\; f_{g_2}(g(t)) = -g_1(t) \sin g_2(t)$$

$$\Rightarrow \quad f_{g_1}(g(t))\, g_1'(t) + f_{g_2}(g(t))\, g_2'(t)$$

Beispiel: Kettenregel



Memo: $f(x) = x_1 \cos x_2$ und $g(t) = \binom{t^2}{\sqrt{t}}$: $\quad \frac{d}{dt} f(g(t)) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial g_k} f(g(t))\, g'(t)$

$$g'(t) = \begin{pmatrix} (t^2)' \\ \sqrt{t}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,t \\ \frac{1}{2\,\sqrt{t}} \end{pmatrix}$$

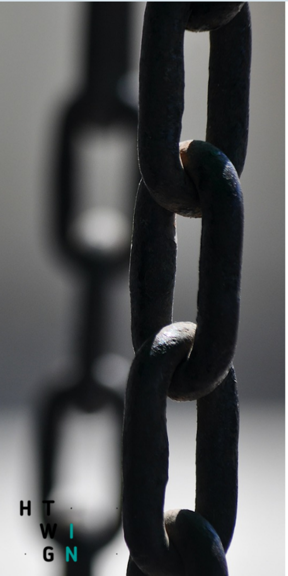
und

$$f_{x_1}(x) = (x_1 \cos x_2)_{x_1} = \cos x_2 \;\Rightarrow\; f_{g_1}(g(t)) = \cos g_2(t)$$

$$f_{x_2}(x) = (x_1 \cos x_2)_{x_2} = -x_1 \sin x_2 \;\Rightarrow\; f_{g_2}(g(t)) = -g_1(t) \sin g_2(t)$$

$$\Rightarrow \quad f_{g_1}(g(t))\, g_1'(t) + f_{g_2}(g(t))\, g_2'(t) = \cos g_2(t)\, 2\,t - g_1(t) \sin g_2(t)\, \frac{1}{2\,\sqrt{t}}$$

Beispiel: Kettenregel



Memo: $f(x) = x_1 \cos x_2$ und $g(t) = \binom{t^2}{\sqrt{t}}$: $\quad \frac{d}{dt} f(g(t)) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial g_k} f(g(t))\, g'(t)$

$$g'(t) = \begin{pmatrix} (t^2)' \\ \sqrt{t}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,t \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix}$$

und

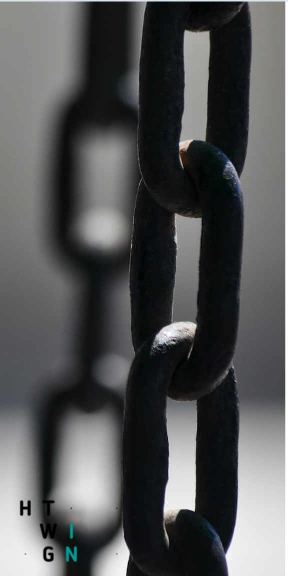
$$f_{x_1}(x) = (x_1 \cos x_2)_{x_1} = \cos x_2 \;\Rightarrow\; f_{g_1}(g(t)) = \cos g_2(t)$$

$$f_{x_2}(x) = (x_1 \cos x_2)_{x_2} = -x_1 \sin x_2 \;\Rightarrow\; f_{g_2}(g(t)) = -g_1(t) \sin g_2(t)$$

$$\Rightarrow \quad f_{g_1}(g(t))\, g_1'(t) + f_{g_2}(g(t))\, g_2'(t) = \cos g_2(t)\, 2\,t - g_1(t) \sin g_2(t)\, \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$= 2\,t \cos\sqrt{t} - \frac{1}{2}\sqrt{t} \sin\sqrt{t}$$

Beispiel: Kettenregel



Memo: $f(x) = x_1 \cos x_2$ und $g(t) = \binom{t^2}{\sqrt{t}}$: $\quad \frac{d}{dt} f(g(t)) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial g_k} f(g(t))\, g'(t)$

$$g'(t) = \begin{pmatrix} (t^2)' \\ \sqrt{t}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,t \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix}$$

und

$$f_{x_1}(x) = (x_1 \cos x_2)_{x_1} = \cos x_2 \;\Rightarrow\; f_{g_1}(g(t)) = \cos g_2(t)$$

$$f_{x_2}(x) = (x_1 \cos x_2)_{x_2} = -x_1 \sin x_2 \;\Rightarrow\; f_{g_2}(g(t)) = -g_1(t) \sin g_2(t)$$

$$\Rightarrow \quad f_{g_1}(g(t))\, g_1'(t) + f_{g_2}(g(t))\, g_2'(t) = \cos g_2(t)\, 2\,t - g_1(t) \sin g_2(t)\, \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$= 2\,t \cos\sqrt{t} - \frac{1}{2}\sqrt{t} \sin\sqrt{t}$$

<u>Test:</u> $f(g(t)' = \left(t^2 \cos\sqrt{t}\right)' = 2\,t \cos\sqrt{t} - \frac{t^2}{2\sqrt{t}} \sin\sqrt{t} = 2\,t \cos\sqrt{t} - \frac{1}{2}\sqrt{t} \sin\sqrt{t} \quad \checkmark$

Fahrplan:

partielle Abl. u_{x_i}

$\downarrow$

Gradienten $(\nabla u)_i = u_{x_i}$

$\downarrow$

Richtungsbaleitung
$u_v = \nabla u \cdot v$, $(\|v\| = 1)$ $\rightarrow$ Fluss: $-\nabla u$

$\uparrow$

Kettenregel für
multivariate Funktionen

$\uparrow$

Ableitungen für
vektorwertige Funktionen

Satz: Zusammenhang zwischen Nabla-Operator und Richtungsableitung

Sei $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\nu\| = 1$. Dann gilt

$$\nabla u \cdot \nu = u_\nu \, .$$

Satz: Zusammenhang zwischen Nabla-Operator und Richtungsableitung

Sei $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\nu\| = 1$. Dann gilt

$$\nabla u \cdot \nu = u_\nu \, .$$

Satz: Zusammenhang zwischen Nabla-Operator und Richtungsableitung

Sei $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\nu\| = 1$. Dann gilt

$$\nabla u \cdot \nu = u_\nu \, .$$

<u>Beweis:</u>

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x) := \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h\, y) - u(x)}{h} \qquad \text{(Memo)}$$

Satz: Zusammenhang zwischen Nabla-Operator und Richtungsableitung

Sei $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\nu\| = 1$. Dann gilt
$$\nabla u \cdot \nu = u_\nu \,.$$

Beweis:

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x) := \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h\,y) - u(x)}{h} \qquad \text{(Memo)}$$

$$u_\nu = \frac{d}{dt} u(x + t\,\nu)\Big|_{t=0} \,,$$

Satz: Zusammenhang zwischen Nabla-Operator und Richtungsableitung

Sei $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\nu\| = 1$. Dann gilt
$$\nabla u \cdot \nu = u_\nu \,.$$

Beweis:

$$\frac{\partial}{\partial y}\, u(x) := \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h\, y) - u(x)}{h} \qquad \text{(Memo)}$$

$$u_\nu = \frac{d}{dt}\, u(x + t\,\nu)\Big|_{t=0}\,, \qquad g(t) = x + t\,\nu = (x_1 + t\,\nu_1, x_2 + t\,\nu_2)^T = (g_1(t), g_2(t))^T$$

Satz: Zusammenhang zwischen Nabla-Operator und Richtungsableitung

Sei $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\nu\| = 1$. Dann gilt

$$\nabla u \cdot \nu = u_\nu \,.$$

<u>Beweis:</u>

$$\frac{\partial}{\partial y}\, u(x) := \lim_{h\to 0} \frac{u(x + h\,y) - u(x)}{h} \qquad \text{(Memo)}$$

$$\begin{aligned} u_\nu &= \frac{d}{dt}\, u(x + t\,\nu)\Big|_{t=0}\,, \qquad g(t) = x + t\,\nu = (x_1 + t\,\nu_1, x_2 + t\,\nu_2)^T = (g_1(t), g_2(t))^T \\ &= \frac{d}{dt}\, u(g(t))\Big|_{t=0} \end{aligned}$$

Satz: Zusammenhang zwischen Nabla-Operator und Richtungsableitung

Sei $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\nu\| = 1$. Dann gilt
$$\nabla u \cdot \nu = u_\nu \, .$$

Beweis:

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x) := \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h\, y) - u(x)}{h} \qquad \text{(Memo)}$$

$$\begin{aligned} u_\nu &= \frac{d}{dt} u(x + t\,\nu)\Big|_{t=0} \, , \qquad g(t) = x + t\,\nu = (x_1 + t\,\nu_1, x_2 + t\,\nu_2)^T = (g_1(t), g_2(t))^T \\ &= \frac{d}{dt} u(g(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} u(g_1(t), g_2(t))\Big|_{t=0} \end{aligned}$$

Satz: Zusammenhang zwischen Nabla-Operator und Richtungsableitung

Sei $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\nu\| = 1$. Dann gilt
$$\nabla u \cdot \nu = u_\nu \,.$$

Beweis:

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x) := \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h\, y) - u(x)}{h} \qquad \text{(Memo)}$$

$$\begin{aligned} u_\nu &= \frac{d}{dt}\, u(x + t\,\nu)\Big|_{t=0}, \qquad g(t) = x + t\,\nu = (x_1 + t\,\nu_1, x_2 + t\,\nu_2)^T = (g_1(t), g_2(t))^T \\ &= \frac{d}{dt}\, u(g(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\, u(g_1(t), g_2(t))\Big|_{t=0} \\ &= \left(u_{g_1}\, g_1'(t) + u_{g_2}\, g_2'(t)\right)\Big|_{t=0} \qquad \text{(Kettenregel)} \end{aligned}$$

Satz: Zusammenhang zwischen Nabla-Operator und Richtungsableitung

Sei $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\nu\| = 1$. Dann gilt
$$\nabla u \cdot \nu = u_\nu \,.$$

Beweis:

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x) := \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h\,y) - u(x)}{h} \qquad \text{(Memo)}$$

$$\begin{aligned}
u_\nu &= \frac{d}{dt}\, u(x + t\,\nu)\Big|_{t=0}, \qquad g(t) = x + t\,\nu = (x_1 + t\,\nu_1, x_2 + t\,\nu_2)^T = (g_1(t), g_2(t))^T \\
&= \frac{d}{dt}\, u(g(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\, u(g_1(t), g_2(t))\Big|_{t=0} \\
&= \left(u_{g_1}\, g_1'(t) + u_{g_2}\, g_2'(t)\right)\Big|_{t=0} \qquad \text{(Kettenregel)} \\
&= u_{g_1}\,\nu_1 + u_{g_2}\,\nu_2
\end{aligned}$$

Satz: Zusammenhang zwischen Nabla-Operator und Richtungsableitung

Sei $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\nu\| = 1$. Dann gilt

$$\nabla\, u \cdot \nu = u_\nu\,.$$

Beweis:

$$\frac{\partial}{\partial y}\, u(x) := \lim_{h\to 0} \frac{u(x + h\, y) - u(x)}{h} \qquad \text{(Memo)}$$

$$\begin{aligned}
u_\nu &= \frac{d}{dt}\, u(x + t\,\nu)\big|_{t=0}\,, \qquad g(t) = x + t\,\nu = (x_1 + t\,\nu_1, x_2 + t\,\nu_2)^T = (g_1(t), g_2(t))^T \\
&= \frac{d}{dt}\, u(g(t))\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\, u(g_1(t), g_2(t))\big|_{t=0} \\
&= \left(u_{g_1}\, g_1'(t) + u_{g_2}\, g_2'(t)\right)\big|_{t=0} \qquad \text{(Kettenregel)} \\
&= u_{g_1}\, \nu_1 + u_{g_2}\, \nu_2 = \nabla\, u(x) \cdot \nu
\end{aligned}$$

Fahrplan:

partielle Abl. u_{x_i}

$\downarrow$

Gradienten $(\nabla u)_i = u_{x_i}$

$\downarrow$

Richtungsbaleitung
$u_v = \nabla u \cdot v$, $(\|v\| = 1)$ $\rightarrow$ Fluss: $-\nabla u$

$\uparrow$

Kettenregel für
multivariate Funktionen

$\uparrow$

Ableitungen für
vektorwertige Funktionen

Fahrplan:

partielle Abl. u_{x_i}

$\downarrow$

Gradienten $(\nabla u)_i = u_{x_i}$

$\downarrow$

Richtungsbaleitung
$u_v = \nabla u \cdot v$, $(\|v\| = 1)$ $\quad\rightarrow\quad$ Fluss: $-\nabla u$

$\uparrow$

Kettenregel für
multivariate Funktionen

$\uparrow$

Ableitungen für
vektorwertige Funktionen

Folgerung:

Der Gradient einer Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zeigt immer in Richtung des steilsten Anstiegs

Fahrplan:

partielle Abl. u_{x_i}

$\downarrow$

Gradienten $(\nabla u)_i = u_{x_i}$

$\downarrow$

Richtungsbaleitung
$u_v = \nabla u \cdot v$, $(\|v\| = 1)$ $\quad\rightarrow\quad$ Fluss: $-\nabla u$

$\uparrow$

Kettenregel für
multivariate Funktionen

$\uparrow$

Ableitungen für
vektorwertige Funktionen

Folgerung:

Der Gradient einer Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zeigt immer in Richtung des steilsten Anstiegs

<u>Beweis:</u> Es gilt $\forall \nu \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\nu\| = 1$

Fahrplan:

partielle Abl. u_{x_i}

$\downarrow$

Gradienten $(\nabla u)_i = u_{x_i}$

$\downarrow$

Richtungsbaleitung
$u_v = \nabla u \cdot v$, $(\|v\| = 1)$ $\rightarrow$ Fluss: $-\nabla u$

$\uparrow$

Kettenregel für
multivariate Funktionen

$\uparrow$

Ableitungen für
vektorwertige Funktionen

Folgerung:

Der Gradient einer Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zeigt immer in Richtung des steilsten Anstiegs

Beweis: Es gilt $\forall \nu \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\nu\| = 1$

$$|u_\nu| = |\nabla u \cdot \nu|$$

Fahrplan:

partielle Abl. u_{x_i}

$\downarrow$

Gradienten $(\nabla u)_i = u_{x_i}$

$\downarrow$

Richtungsbaleitung
$u_v = \nabla u \cdot v$, $(\|v\| = 1)$ $\rightarrow$ Fluss: $-\nabla u$

$\uparrow$

Kettenregel für
multivariate Funktionen

$\uparrow$

Ableitungen für
vektorwertige Funktionen

Folgerung:

Der Gradient einer Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zeigt immer in Richtung des steilsten Anstiegs

Beweis: Es gilt $\forall \nu \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\nu\| = 1$

$$|u_\nu| = |\nabla u \cdot \nu| = \|\nabla u\| \, \|\nu\| \underbrace{|\cos \angle(\nabla u, \nu)|}_{\leq 1}$$

Fahrplan:

partielle Abl. u_{x_i}

$\downarrow$

Gradienten $(\nabla u)_i = u_{x_i}$

$\downarrow$

Richtungsbaleitung
$u_v = \nabla u \cdot v$, $(\|v\| = 1)$ $\quad\rightarrow\quad$ Fluss: $-\nabla u$

$\uparrow$

Kettenregel für
multivariate Funktionen

$\uparrow$

Ableitungen für
vektorwertige Funktionen

Folgerung:

Der Gradient einer Funktion $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zeigt immer in Richtung des steilsten Anstiegs

<u>Beweis:</u> Es gilt $\forall \nu \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\nu\| = 1$

$$|u_\nu| = |\nabla u \cdot \nu| = \|\nabla u\| \, \|\nu\| \, \underbrace{|\cos \angle(\nabla u, \nu)|}_{\leq 1}$$

$$\leq \|\nabla u\| \, \underbrace{\|\nu\|}_{=1}$$

Fahrplan:

partielle Abl. u_{x_i}

$\downarrow$

Gradienten $(\nabla u)_i = u_{x_i}$

$\downarrow$

Richtungsbaleitung
$u_\nu = \nabla u \cdot \nu$, $(\|\nu\| = 1)$ $\rightarrow$ Fluss: $-\nabla u$

$\uparrow$

Kettenregel für
multivariate Funktionen

$\uparrow$

Ableitungen für
vektorwertige Funktionen

Folgerung:

Der Gradient einer Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zeigt immer in Richtung des steilsten Anstiegs

<u>Beweis:</u> Es gilt $\forall \nu \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\nu\| = 1$

$$|u_\nu| = |\nabla u \cdot \nu| = \|\nabla u\| \, \|\nu\| \underbrace{|\cos \angle(\nabla u, \nu)|}_{\leq 1}$$

$$\leq \|\nabla u\| \underbrace{\|\nu\|}_{=1} = \|\nabla u\| .$$

$\square$

Der Wert des steilsten Anstiegs von $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \sin(x_2)$ am Punkt $x = \binom{1}{0}$:

$$\|\nabla u(1,0)\| = \left\| \begin{pmatrix} u_{x_1}(1,0) \\ u_{x_2}(1,0) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}$$

Ableitung in beliebiger Richtung:

$$\nabla u \cdot \nu = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = 2\,\nu_1 + \nu_2$$

Beispiel: steilster Anstieg

Der Wert des steilsten Anstiegs von $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \sin(x_2)$ am Punkt $x = \binom{1}{0}$:

$$\|\nabla u(1,0)\| = \left\| \begin{pmatrix} u_{x_1}(1,0) \\ u_{x_2}(1,0) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}$$

Ableitung in beliebiger Richtung:

$$\nabla u \cdot \nu = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = 2\,\nu_1 + \nu_2$$

Egal welche Werte wir für ν einsetzen (normierter Vektor!) $2\,\nu_1 + \nu_2$ wird immer kleiner sein als $\sqrt{5}$.

Beispiel: steilster Anstieg

Der Wert des steilsten Anstiegs von $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \sin(x_2)$ am Punkt $x = \binom{1}{0}$:

$$\|\nabla u(1,0)\| = \left\| \begin{pmatrix} u_{x_1}(1,0) \\ u_{x_2}(1,0) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}$$

Ableitung in beliebiger Richtung:

$$\nabla u \cdot \nu = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = 2\,\nu_1 + \nu_2$$

Egal welche Werte wir für ν einsetzen (normierter Vektor!) $2\,\nu_1 + \nu_2$ wird immer kleiner sein als $\sqrt{5}$.

Folgerung:

In Richtung orthogonal zum Gradienten ist die Steigung immer Null!

Beispiel: steilster Anstieg

Der Wert des steilsten Anstiegs von $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \sin(x_2)$ am Punkt $x = \binom{1}{0}$:

$$\|\nabla u(1,0)\| = \left\| \begin{pmatrix} u_{x_1}(1,0) \\ u_{x_2}(1,0) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}$$

Ableitung in beliebiger Richtung:

$$\nabla u \cdot \nu = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = 2\,\nu_1 + \nu_2$$

Egal welche Werte wir für ν einsetzen (normierter Vektor!) $2\,\nu_1 + \nu_2$ wird immer kleiner sein als $\sqrt{5}$.

Folgerung:

In Richtung orthogonal zum Gradienten ist die Steigung immer Null!

Denn:

$$u_{\nabla u^\perp} = \nabla u \cdot \nabla u^\perp \frac{1}{\|\nabla u\|} = 0$$

Gegeben seien die vier Punkte

$$(0,0)\,,\ (1,2)\,,\ (2,1)\,,\ (3,5)\,.$$

Ein kleines Beispiel

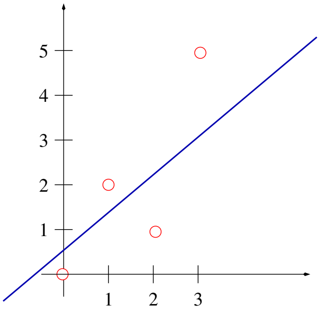
Gegeben seien die vier Punkte

$$(0,0)\,,\ (1,2)\,,\ (2,1)\,,\ (3,5)\,.$$

Wir suchen nun die Gerade

$$f(x) = m\,x + b\,,$$

die am besten durch die Punkte passt.



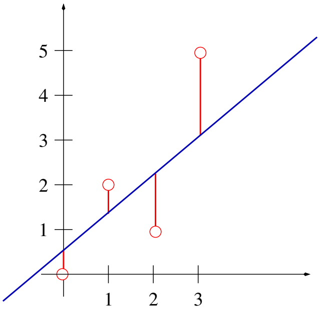
Gegeben seien die vier Punkte

$$(0,0)\,,\ (1,2)\,,\ (2,1)\,,\ (3,5)\,.$$

Wir suchen nun die Gerade

$$f(x) = m\,x + b\,,$$

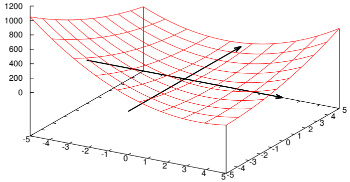
die am besten durch die Punkte passt.



$$
\begin{aligned}
f(0) &= b & &\Rightarrow & \mathrm{Res}_1 &= b - 0\\
f(1) &= m + b & &\Rightarrow & \mathrm{Res}_2 &= m + b - 2\\
f(2) &= 2\,m + b & &\Rightarrow & \mathrm{Res}_3 &= 2\,m + b - 1\\
f(3) &= 3\,m + b & &\Rightarrow & \mathrm{Res}_4 &= 3\,m + b - 5
\end{aligned}
$$

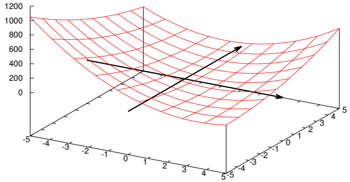
Beispiel: Regression

$$E(m,b) = \sum_{i=1}^{4} \mathrm{Res}_i^2 = b^2 + (m+b-2)^2 + (2\,m+b-1)^2 + (3\,m+b-5)^2$$
$$= 4\,b^2 + 14\,m^2 + 12\,m\,b - 38\,m - 16\,b + 30$$



$E(m,b)$

$$E(m,b) = \sum_{i=1}^{4} \mathrm{Res}_i^2 = b^2 + (m+b-2)^2 + (2\,m+b-1)^2 + (3\,m+b-5)^2$$
$$= 4\,b^2 + 14\,m^2 + 12\,m\,b - 38\,m - 16\,b + 30$$



$E(m,b)$

Minimum von E ist stationärer Punkt von $\binom{E_m}{E_b}$:

$$E_m := \frac{\partial}{\partial m} E(m,b)^2 = 28\,m + 12\,b - 38$$
$$E_b := \frac{\partial}{\partial b} E(m,b)^2 = 12\,m + 8\,b - 16$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 28 & 12 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \binom{m}{b} = \binom{38}{16} \\ \Leftrightarrow \qquad & \binom{m}{b} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \binom{19}{8} \frac{1}{2} \\ & \qquad = \frac{1}{10} \binom{14}{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 28 & 12 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \binom{m}{b} = \binom{38}{16}$$

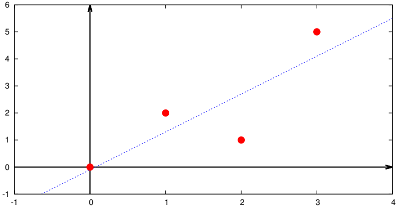
$$\Leftrightarrow \qquad \binom{m}{b} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \binom{19}{8} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{10} \binom{14}{-1}$$

$\Rightarrow$

$$f_{\text{best}}(x) = 1.4\,x - 0.1$$

$$E(1.4, -0.1) \approx 2.05$$



$$f_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Quadratfehler: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$E(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} |y_i - f_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(x_i)|^2 \;:\; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$$

Problem: Finde $\alpha^\star = (\alpha_1^\star, \dots, \alpha_n^\star)$ mit

$$E(\alpha^\star) = \min_\alpha E(\alpha)$$

Kandidaten sind stationäre Punkte von E:

$$\nabla_\alpha E(\alpha) = 0 \qquad \text{(Newton-Verfahren im } \mathbb{R}^n\text{)}$$

Nehmen wir einmal an

$$g(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{\beta\,x}$$

ist die passende Funktion, weil die Daten einem exponentiellen Wachstumsprozess entstammen. Dann gilt:

Noch ein kleines Beispiel

Nehmen wir einmal an

$$g(x) = \alpha\, e^{\beta\, x}$$

ist die passende Funktion, weil die Daten einem exponentiellen Wachstumsprozess entstammen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
g(0) &= \alpha & \Rightarrow && \mathrm{Res}_1 &= \alpha - 0 \\
g(1) &= \alpha\, e^{\beta} & \Rightarrow && \mathrm{Res}_2 &= \alpha\, e^{\beta} - 2 \\
g(2) &= \alpha\, e^{2\,\beta} & \Rightarrow && \mathrm{Res}_3 &= \alpha\, e^{2\,\beta} - 1 \\
g(3) &= \alpha\, e^{3\,\beta} & \Rightarrow && \mathrm{Res}_4 &= \alpha\, e^{3\,\beta} - 5
\end{aligned}$$

Noch ein kleines Beispiel

Nehmen wir einmal an

$$g(x) = \alpha\, \mathrm{e}^{\beta\, x}$$

ist die passende Funktion, weil die Daten einem exponentiellen Wachstumsprozess entstammen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
g(0) &= \alpha & \Rightarrow \quad & \mathrm{Res}_1 = \alpha - 0 \\
g(1) &= \alpha\, \mathrm{e}^{\beta} & \Rightarrow \quad & \mathrm{Res}_2 = \alpha\, \mathrm{e}^{\beta} - 2 \\
g(2) &= \alpha\, \mathrm{e}^{2\,\beta} & \Rightarrow \quad & \mathrm{Res}_3 = \alpha\, \mathrm{e}^{2\,\beta} - 1 \\
g(3) &= \alpha\, \mathrm{e}^{3\,\beta} & \Rightarrow \quad & \mathrm{Res}_4 = \alpha\, \mathrm{e}^{3\,\beta} - 5
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$E(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{4} \mathrm{Res}_i^2$$

Das führt auf das Problem

$$\nabla E(\alpha, \beta) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \alpha + (\alpha\,\mathrm{e}^{\beta} - 2)\,\mathrm{e}^{\beta} + \mathrm{e}^{2\,\beta}\,(\alpha\,\mathrm{e}^{2\,\beta} - 1) + \mathrm{e}^{3\,\beta}\,(\alpha\,\mathrm{e}^{3\,\beta} - 5) \\ \alpha\,(\alpha\,\mathrm{e}^{\beta} - 2)\,\mathrm{e}^{\beta} + 2\,\alpha\,\mathrm{e}^{2\,\beta}\,(\alpha\,\mathrm{e}^{2\,\beta} - 1) + 3\,\alpha\,\mathrm{e}^{3\,\beta}\,(\alpha\,\mathrm{e}^{3\,\beta} - 5) \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Das führt auf das Problem

$$\nabla E(\alpha, \beta) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \alpha + (\alpha\,\mathrm{e}^{\beta} - 2)\,\mathrm{e}^{\beta} + \mathrm{e}^{2\,\beta}\,(\alpha\,\mathrm{e}^{2\,\beta} - 1) + \mathrm{e}^{3\,\beta}\,(\alpha\,\mathrm{e}^{3\,\beta} - 5) \\ \alpha\,(\alpha\,\mathrm{e}^{\beta} - 2)\,\mathrm{e}^{\beta} + 2\,\alpha\,\mathrm{e}^{2\,\beta}\,(\alpha\,\mathrm{e}^{2\,\beta} - 1) + 3\,\alpha\,\mathrm{e}^{3\,\beta}\,(\alpha\,\mathrm{e}^{3\,\beta} - 5) \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Lösung:

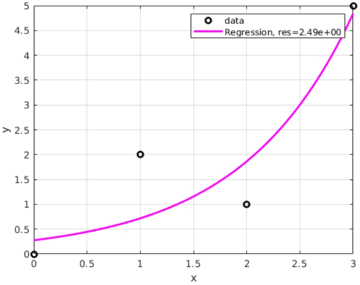
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2766 \\ 0.9541 \end{pmatrix}$$

ergibt

$$f(x) = 0.2766\,\mathrm{e}^{0.9541\,x}$$

mit

$$\|\mathrm{Res}\|^2 = 2.4924\,.$$



Carl Gustav Jacob Jacobi
1804-1855

Definition: Jacobi-Matrix

Für die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt die Matrix

$$J f = \mathrm{grad} f = \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\, f^1 \\ \vdots \\ \mathrm{grad}\, f^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1_{x_1} & \cdots & f^1_{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^m_{x_1} & \cdots & f^m_{x_n} \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix von f.

Carl Gustav Jacob Jacobi
1804-1855

Definition: Jacobi-Matrix

Für die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt die Matrix

$$J f = \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f^1 \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1_{x_1} & \cdots & f^1_{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^m_{x_1} & \cdots & f^m_{x_n} \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix von f.

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 \\ x_2 \ln x_1 \end{pmatrix}$

$$J f = J \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 \\ x_2 \ln x_1 \end{pmatrix}$$

Carl Gustav Jacob Jacobi
1804-1855

Definition: Jacobi-Matrix

Für die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt die Matrix

$$J f = \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f^1 \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1_{x_1} & \cdots & f^1_{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^m_{x_1} & \cdots & f^m_{x_n} \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix von f.

<u>Beispiel:</u> $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 \\ x_2 \ln x_1 \end{pmatrix}$

$$J f = J \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 \\ x_2 \ln x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1^2 x_2)_{x_1} & (x_1^2 x_2)_{x_2} \\ (x_2 \ln x_1)_{x_1} & (x_2 \ln x_1)_{x_2} \end{pmatrix}$$

Carl Gustav Jacob Jacobi
1804-1855

Definition: Jacobi-Matrix

Für die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt die Matrix

$$J f = \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f^1 \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1_{x_1} & \cdots & f^1_{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^m_{x_1} & \cdots & f^m_{x_n} \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix von f.

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2\, x_2 \\ x_2 \ln x_1 \end{pmatrix}$

$$J f = J \begin{pmatrix} x_1^2\, x_2 \\ x_2 \ln x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1^2\, x_2)_{x_1} & (x_1^2\, x_2)_{x_2} \\ (x_2 \ln x_1)_{x_1} & (x_2 \ln x_1)_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\, x_1\, x_2 & x_1^2 \\ \frac{x_2}{x_1} & \ln x_1 \end{pmatrix}$$

Ableitung erster Ordnung vektorwertiger, multivariater FUnktionen

Definition: Divergenz

Für die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt die skalare Funktion

$$\nabla \cdot f = \sum_{i=1}^{n} f^i_{x_i} = f^1_{x_1} + \cdots + f^n_{x_n}$$

Divergenz von f. Es ist die Spur der Jacobi-Matrix von f.

Definition: Divergenz

Für die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt die skalare Funktion

$$\nabla \cdot f = \sum_{i=1}^{n} f^i_{x_i} = f^1_{x_1} + \cdots + f^n_{x_n}$$

Divergenz von f. Es ist die Spur der Jacobi-Matrix von f.

Beispiel:

$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} \sin(x_1 + x_2) \\ \cos x_2^2 \\ \tan x_3 \end{pmatrix}$$

Definition: Divergenz

Für die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt die skalare Funktion

$$\nabla \cdot f = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}^i = f_{x_1}^1 + \cdots + f_{x_n}^n$$

Divergenz von f. Es ist die Spur der Jacobi-Matrix von f.

Beispiel:

$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} \sin(x_1 + x_2) \\ \cos x_2^2 \\ \tan x_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_1} \sin(x_1 + x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} \cos x_2^2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \tan x_3$$

Ableitung erster Ordnung vektorwertiger, multivariater FUnktionen

Definition: Divergenz

Für die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt die skalare Funktion

$$\nabla \cdot f = \sum_{i=1}^{n} f^i_{x_i} = f^1_{x_1} + \cdots + f^n_{x_n}$$

Divergenz von f. Es ist die Spur der Jacobi-Matrix von f.

Beispiel:

$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} \sin(x_1 + x_2) \\ \cos x_2^2 \\ \tan x_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_1} \sin(x_1 + x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} \cos x_2^2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \tan x_3 = \cos(x_1 + x_2) - 2\, x_2 \, \sin x_2^2 + \frac{1}{\cos^2 x_3}$$

Beispiel

Beispiel: Jacobi-Matrix & Divergenz Es sei $f(x) = \left(\begin{smallmatrix} x_1^2\,x_2 \\ x_2\,\ln x_1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist die Spur von

$$Jf = \begin{pmatrix} 2\,x_1\,x_2 & x_1^2 \\ \frac{x_2}{x_1} & \ln x_1 \end{pmatrix}$$

gerade die Divergenz von f:

$$\nabla \cdot f = \text{Spur}\, Jf = 2\,x_1\,x_2 + \ln x_1$$

Beispiel: Jacobi-Matrix & Divergenz Es sei $f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 \, x_2 \\ x_2 \, \ln x_1 \end{pmatrix}$. Dann ist die Spur von

$$Jf = \begin{pmatrix} 2\,x_1\,x_2 & x_1^2 \\ \frac{x_2}{x_1} & \ln x_1 \end{pmatrix}$$

gerade die Divergenz von f:

$$\nabla \cdot f = \text{Spur } Jf = 2\,x_1\,x_2 + \ln x_1$$

Definition: $C^k(D)$

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt auf D *k-mal stetig differenzierbar*, falls alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k existieren und stetig sind. Wir schreiben

$$f \in C^k(D) := \{f : D \to \mathbb{R} \mid f^{(m)} \in C^0(D)\,,\ m \leq k\}$$

Lernziele

- Sie können
  - partielle Ableitungen
  - eine Richtungsableitung
  - den Gradienten

  einer multivariaten Funktion berechnen und an einem bestimmten Punkte auswerten.
- Sie haben eine Anschauung des Gradienten und können damit die Richtungen
  - des steilsten Anstiegs/Abstiegs
  - der Höhenlinie

  berechnen.
- Sie können (partielle) Ableitungen von vektorwertigen Funktionen berechnen.
- Sie können Jacobi-Matrix und Divergenz einer vektorwertigen Funktion berechnen.
- Sie können Kompositionen von Funktionen bilden und diese mittels Kettenregel ableiten.