线性动态系统 (Linear Dynamic System)

在之前的章节中，我们介绍了隐马尔可夫模型 (Hidden Markov Model, HMM)。HMM 是最基础的动态模型 (Dynamic Model) 或状态空间模型 (State Space Model)。本章我们将探讨另一种重要的动态模型——线性动态系统 (Linear Dynamic System, LDS)，在信号处理和控制领域中，它通常被称为**卡尔曼滤波 (Kalman Filter)**。

1. 背景 (Background)

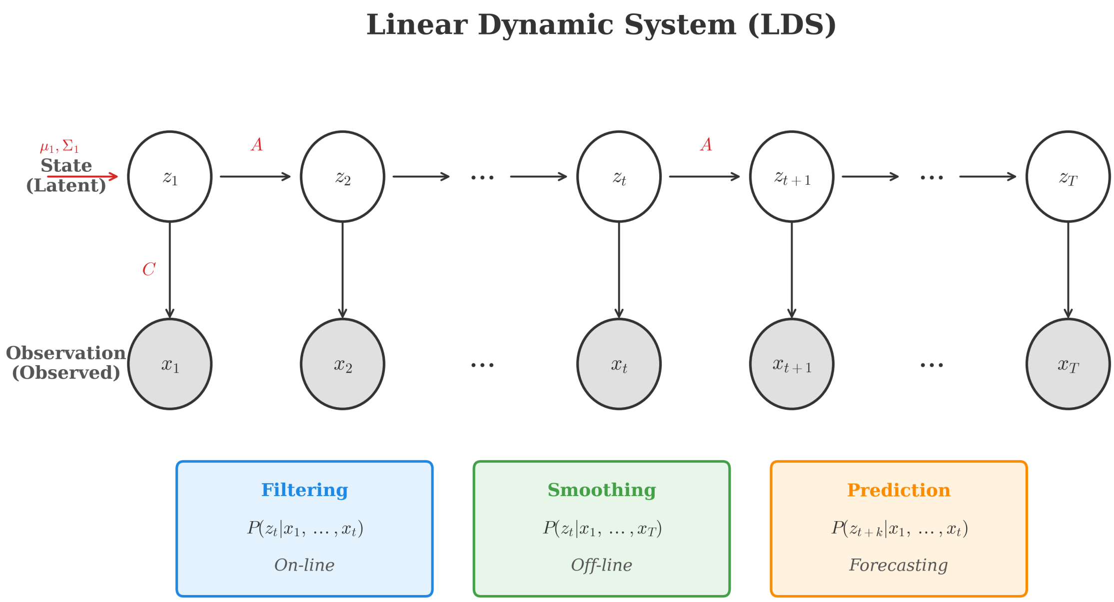
1.1 动态模型概览 (Overview of Dynamic Models)

动态模型主要描述随时间变化的系统，通常由观测变量 (Observed Variables) x 和隐变量 (Latent/Hidden Variables) z 组成。根据隐变量的状态类型和分布特性，我们可以将常见的动态模型分为以下几类：

1. **隐马尔可夫模型 (HMM)**:
    - 状态 z_t 是**离散 (Discrete)** 的。
    - 例如：语音识别中的音素序列，或者词性标注中的词性序列。
2. **线性动态系统 (LDS) / 卡尔曼滤波 (Kalman Filter)**:
    - 状态 z_t 是**连续 (Continuous)** 的。
    - 状态转移和观测发射过程均是**线性 (Linear)** 的。
    - 噪声服从**高斯分布 (Gaussian Distribution)**。
    - 因此，LDS 也被称为 Linear Gaussian Model。
3. **粒子滤波 (Particle Filter)**:
    - 状态 z_t 是连续的。
    - 模型是**非线性 (Non-Linear)** 的，且噪声可以是**非高斯 (Non-Gaussian)** 的。
    - 粒子滤波是一种基于蒙特卡洛采样的数值近似方法。

1.2 LDS 的定义 (Definition of LDS)

LDS 是一个线性高斯模型，其概率图模型结构与 HMM 相同（如下主要图示），但状态和观测变量均为连续值。



我们通常用以下两个方程来描述 LDS。根据白板推导，我们将状态转移和观测方程写在一起：

$$\begin{cases} z_t = A \cdot z_{t-1} + B + \epsilon, & \epsilon \sim \mathcal{N}(0, Q) \\ x_t = C \cdot z_t + D + \delta, & \delta \sim \mathcal{N}(0, R) \end{cases} \tag{1}$$

其中：

- $z_t \in \mathbb{R}^p$ 是 t 时刻的隐状态。
- $x_t \in \mathbb{R}^m$ 是 t 时刻的观测值。
- A, C 分别是状态转移矩阵和发射矩阵。
- B, D 是偏置项。
- Q, R 分别是过程噪声和测量噪声的协方差矩阵。

我们将上述线性方程转化为概率分布的形式，可以得到 LDS 的概率图模型定义：

$$\begin{cases} P(z_t|z_{t-1}) = \mathcal{N}(A \cdot z_{t-1} + B, Q) \\ P(x_t|z_t) = \mathcal{N}(C \cdot z_t + D, R) \\ P(z_1) = \mathcal{N}(\mu_1, \Sigma_1) \end{cases} \tag{2}$$

1.3 模型参数 (Model Parameters)

一个线性动态系统完全由以下参数集合 θ 决定：

$$\theta = \{A, B, C, D, Q, R, \mu_1, \Sigma_1\} \tag{3}$$

1.4 学习与推断 (Learning & Inference)

与 HMM 类似，LDS 主要涉及两个核心问题：

1. **学习 (Learning)**:
   - 给定观测序列 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_T\}$，估计模型参数 θ。
   - 通常使用 EM 算法 (Expectation-Maximization) 进行参数估计。
2. **推断 (Inference)**:

- 已知模型参数 θ 和观测序列 X，推断隐状态 Z。常见的推断任务包括：
  - **解码 (Decoding)**: 推断最可能的隐状态序列 $P(z_1, z_2, \dots, z_T | x_1, x_2, \dots, x_T)$。在 LDS 中，由于全是高斯分布，最大后验概率路径与平滑结果（均值）是一致的。
  - **滤波 (Filtering)**: 在线 (Online) 推断当前时刻的隐状态 $P(z_t | x_1, x_2, \dots, x_t)$。这是卡尔曼滤波最常用的场景（例如：实时位置追踪）。
  - **平滑 (Smoothing)**: 离线 (Offline) 推断过去时刻的隐状态 $P(z_t | x_1, x_2, \dots, x_T)$，利用了整个序列的信息，通常比滤波更准确。
  - **预测 (Prediction)**: 推断未来的状态 $P(z_{t+1}, z_{t+2} | x_1, \dots, x_t)$ 或未来的观测值 $P(x_{t+1}, x_{t+2} | x_1, \dots, x_t)$。

2. 滤波问题 (Filtering Problem)

2.1 目标 (Goal)

滤波问题的目标是计算边缘后验分布 (Marginal Posterior)：

$$P(z_t | x_1, x_2, \dots, x_t) \tag{4}$$

即在时刻 t，根据所有历史观测数据 $x_{1:t}$，推断当前时刻隐状态 z_t 的分布。
由于 LDS 是线性高斯模型，这个后验分布也是高斯的，因此只要在该时刻求出均值和方差即可。

> **注意 (Note)**: 在滤波问题中，我们假设模型参数 $\theta = (A, B, C, D, Q, R, \mu_1, \Sigma_1)$ 是**已知且固定 (Known and Fixed)** 的。如果参数未知需要从数据中学习，这属于**学习 (Learning)** 问题（通常使用 EM 算法），而非滤波问题。

2.2 递推求解 (Recursive Solution)

为了实现**在线 (Online)** 学习，我们希望通过递推的方式求解，即利用 $t-1$ 时刻的结果 $P(z_{t-1} | x_{1:t-1})$ 来计算 t 时刻的结果 $P(z_t | x_{1:t})$。
这可以分解为两个步骤：**预测 (Prediction)** 和 **更新 (Update)**。

步骤 1: 预测 (Prediction)

根据 $t-1$ 时刻的后验分布，预测 t 时刻的状态分布。
目标：求 $P(z_t | x_{1:t-1})$。

$$\begin{aligned} P(z_t | x_{1:t-1}) &= \int P(z_t, z_{t-1} | x_{1:t-1}) dz_{t-1} \\ &= \int P(z_t | z_{t-1}, x_{1:t-1}) \cdot P(z_{t-1} | x_{1:t-1}) dz_{t-1} \\ &= \int \underbrace{P(z_t | z_{t-1})}_{\text{Transition}} \cdot \underbrace{P(z_{t-1} | x_{1:t-1})}_{\text{Previous Posterior}} dz_{t-1} \end{aligned} \tag{5}$$

这里利用了齐次马尔可夫假设：$P(z_t | z_{t-1}, x_{1:t-1}) = P(z_t | z_{t-1})$。

高斯推导 (Gaussian Derivation):

假设上一时刻的后验分布为高斯分布：

$$P(z_{t-1} | x_{1:t-1}) = \mathcal{N}(z_{t-1} | \mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}) \tag{6}$$

状态转移概率为：

$$P(z_t|z_{t-1}) = \mathcal{N}(z_t|Az_{t-1} + B, Q) \tag{7}$$

我们需要计算上述积分：

$$P(z_t|x_{1:t-1}) = \int \mathcal{N}(z_t|Az_{t-1} + B, Q) \cdot \mathcal{N}(z_{t-1}|\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}) dz_{t-1} \tag{8}$$

根据线性高斯模型的性质（或者高斯分布的卷积性质），结果仍然是一个高斯分布 $\mathcal{N}(\mu_t^*, \Sigma_t^*)$。
参数计算如下：

$$\begin{cases} \mu_t^* = A\mu_{t-1} + B \\ \Sigma_t^* = A\Sigma_{t-1}A^T + Q \end{cases} \tag{9}$$

这里 μ_t^* 和 Σ_t^* 表示**预测 (Prior)** 的均值和方差。

步骤 2: 更新 (Update)

结合 t 时刻的新观测值 x_t，修正预测分布，得到 t 时刻的后验分布。
目标：求 $P(z_t|x_{1:t})$。

利用贝叶斯公式：

$$\begin{aligned} P(z_t|x_{1:t}) &= P(z_t|x_{1:t-1}, x_t) \\ &\propto P(x_t, z_t|x_{1:t-1}) \\ &= P(x_t|z_t, x_{1:t-1}) \cdot P(z_t|x_{1:t-1}) \\ &= \underbrace{P(x_t|z_t)}_{\text{Emission}} \cdot \underbrace{P(z_t|x_{1:t-1})}_{\text{Prediction}} \end{aligned} \tag{10}$$

这里利用了观测独立性假设：$P(x_t|z_t, x_{1:t-1}) = P(x_t|z_t)$。

2.1 高斯推导 (信息形式) | Gaussian Derivation (Information Form):

我们需要计算两个高斯分布的乘积：

$$P(z_t|x_{1:t}) \propto \mathcal{N}(x_t|Cz_t + D, R) \cdot \mathcal{N}(z_t|\mu_t^*, \Sigma_t^*) \tag{11}$$

这是一个典型的**高斯条件分布 (Gaussian Conditioning)** 问题。已知：

$$P(x) = \mathcal{N}(x|\mu, \Lambda^{-1}), \quad P(y|x) = \mathcal{N}(y|Ax + b, L^{-1}) \tag{12}$$

则后验 $P(x|y)$ 为：

$$P(x|y) = \mathcal{N}(x|\Sigma(A^T L(y-b) + \Lambda\mu), \Sigma) \tag{13}$$

其中 $\Sigma = (\Lambda + A^T LA)^{-1}$。

将我们的 LDS 变量代入上述公式：

- $x \to z_t$, $y \to x_t$, $\mu \to \mu_t^*$, $\Lambda \to (\Sigma_t^*)^{-1}$, $A \to C$, $b \to D$, $L \to R^{-1}$

我们可以得到更新后的均值 μ_t 和方差 Σ_t 的**信息形式 (Information Form)**：

$$\begin{cases} \Sigma_t = ((\Sigma_t^*)^{-1} + C^T R^{-1} C)^{-1} \\ \mu_t = \Sigma_t[C^T R^{-1}(x_t - D) + (\Sigma_t^*)^{-1}\mu_t^*] \end{cases} \tag{14}$$

2.2 推导标准形式 (卡尔曼增益) | Deriving Standard Form (Kalman Gain):

虽然信息形式在数学上正确，但在实际计算中求逆运算量较大。我们利用**伍德伯里矩阵恒等式 (Woodbury Matrix Identity)** 将其转化为高效的**卡尔曼增益形式**。

Woodbury 恒等式：$(A+UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$。
令 $A = (\Sigma_t^*)^{-1}, U = C^T, C = R^{-1}, V = C$，代入 Σ_t 公式：

1. **方差更新**:

$$\Sigma_t = \Sigma_t^* - \Sigma_t^* C^T (R + C\Sigma_t^* C^T)^{-1} C\Sigma_t^* \tag{15}$$

   定义**卡尔曼增益 (Kalman Gain)** K_t:

$$K_t = \Sigma_t^* C^T (C\Sigma_t^* C^T + R)^{-1} \tag{16}$$

   则方差更新简化为：

$$\Sigma_t = (I - K_t C)\Sigma_t^* \tag{17}$$

2. **均值更新**:
   将 Σ_t 代入均值公式：

$$\begin{aligned} \mu_t &= \Sigma_t C^T R^{-1}(x_t - D) + \Sigma_t (\Sigma_t^*)^{-1}\mu_t^* \\ &= K_t(x_t - D) + (I - K_t C)\Sigma_t^* (\Sigma_t^*)^{-1}\mu_t^* \quad (\text{利用性质 } \Sigma_t C^T R^{-1} = K_t) \\ &= K_t(x_t - D) + (I - K_t C)\mu_t^* \\ &= \mu_t^* + K_t(x_t - C\mu_t^* - D) \end{aligned} \tag{18}$$

总结: 卡尔曼滤波方程 (Summary: Kalman Filter Equations)

通过上述推导，我们得到了标准的卡尔曼滤波五个核心方程：

预测 (Prediction) 阶段：

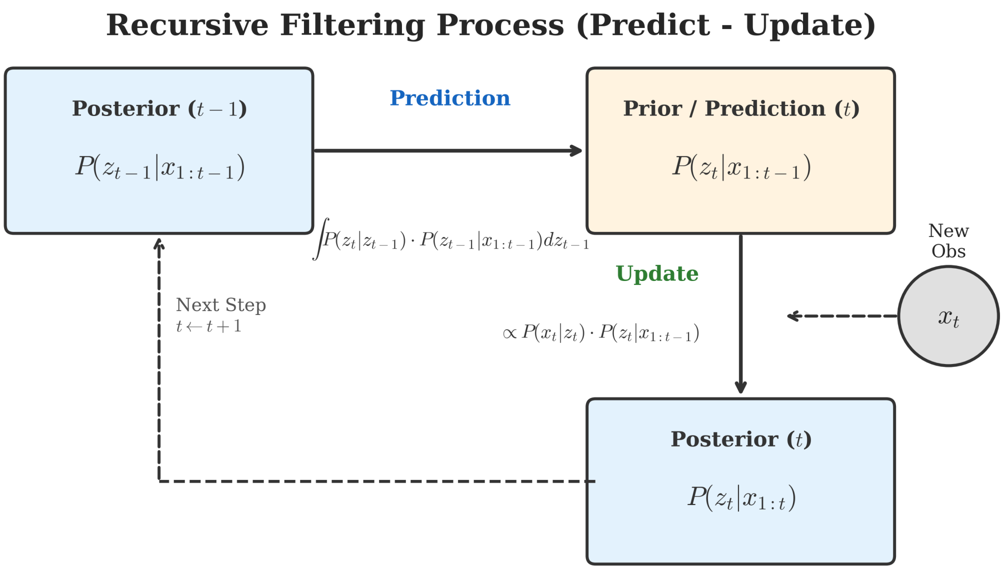
1. **预测状态均值**: $\mu_t^* = A\mu_{t-1} + B$
2. **预测状态协方差**: $\Sigma_t^* = A\Sigma_{t-1}A^T + Q$

更新 (Update) 阶段：

3. **计算卡尔曼增益**: $K_t = \Sigma_t^* C^T (C\Sigma_t^* C^T + R)^{-1}$
4. **更新状态均值**: $\mu_t = \mu_t^* + K_t(x_t - C\mu_t^* - D)$
5. **更新状态协方差**: $\Sigma_t = (I - K_t C)\Sigma_t^*$

2.3 在线过程 (Online Process)

这就构成了一个**预测——更新 (Prediction-Update)** 的循环过程，如下图所示：



1. **初始状态**: $t = 1$
   - $P(z_1|x_1) \propto P(x_1|z_1)P(z_1)$ (Update)
2. **递推**: $t = 2$
   - $P(z_2|x_1) = \int P(z_2|z_1)P(z_1|x_1)dz_1$ (**Prediction**)
   - $P(z_2|x_1, x_2) \propto P(x_2|z_2)P(z_2|x_1)$ (**Update / Correction**)
3. ...

如此不断循环，即可实现在线滤波。