

绪论

一、核心两大流派与研究方向

- 频率派 (**Frequentist**) → 统计机器学习 (**Statistical Machine Learning**)
 - 侧重于模型优化、正则化以及对已知数据的拟合。
- 贝叶斯派 (**Bayesian**) → 概率图模型 (**Probabilistic Graphical Models, PGM**)
 - 侧重于先验概率的引入、后验推断以及变量间的依赖关系。

二、推荐教材 (Books)

1. 入门与进阶经典

- 《统计学习方法》 — 李航
 - 特点：专注“十二章、十个算法”，是国内公认的统计机器学习敲门砖。
- 《机器学习》（西瓜书） — 周志华
 - 特点：内容全面，结构严谨，适合建立完整的学科体系。

2. 国际泰斗级著作 (英文原著及译本)

- PRML (*Pattern Recognition and Machine Learning*) — Christopher Bishop
 - 核心：回归、分类、神经网络、核方法、概率分布及近似推断。
- MLAPP (*Machine Learning: A Probabilistic Perspective*) — Kevin Murphy
 - 特点：“百科全书”式著作，内容详尽。
- ESL (*The Elements of Statistical Learning*) — Hastie, Tibshirani & Friedman
 - 特点：频率派的巅峰之作，侧重统计理论。
- Deep Learning (花书) — Ian Goodfellow 等
 - 中文版：由张志华团队翻译。

三、推荐视频课程 (Videos)

1. 台湾大学经典

- 林轩田 (Hsuan-Tien Lin)
 - 《机器学习基石》 (*Machine Learning Foundations*)：侧重 VC Theory、线性模型等。
 - 《机器学习技法》 (*Machine Learning Techniques*)：涵盖 SVM、决策树、随机森林及神经网络 Deep Learning。
- 李宏毅 (Hung-yi Lee)
 - ML 2017 / MLDS 2018：以通俗易懂著称，适合快速上手前沿技术。

2. 学院派深度理论

- 张志华 (Zhihua Zhang)
 - 《机器学习导论》：侧重频率派视角。
 - 《统计机器学习》：深入贝叶斯派视角，探讨模型背后的数学逻辑。
- 徐亦达 (Yida Xu)
 - 《概率图模型》：深入讲解贝叶斯推断、GitHub 上有配套的详细笔记 (notes)。

3. 斯坦福公开课

- Andrew Ng (吴恩达)
 - CS229 (2017)：最经典的机器学习入门课程，连接了统计理论与实际工程应用。

四、频率派 vs 贝叶斯派：数学表述

1. 基本符号定义

- 数据 (Data): 有 N 个样本，每个样本的维度为 p ，可以记作 $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ ，为 $N \times p$ 矩阵

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{Np} \end{pmatrix}_{N \times p} \quad (1)$$

- 参数 (Parameter): θ 未知，需要估计出来
- 概率模型: $x \sim p(x|\theta)$

2. 频率派 (Frequentist) 观点

- θ 是未知的常量（固定但未知）
- X 是随机变量 (random variable)
- 目标：通过最大似然估计 (MLE) 找到最优参数

$$\theta_{MLE} = \arg \max_{\theta} \log P(X|\theta) \quad (2)$$

原理解释：

其中 $\log P(X|\theta)$ 被称为对数似然函数 (Log-Likelihood Function)，常记为 $L(\theta)$ 。

假设数据样本 X 是独立同分布 (i.i.d.) 的，即 $x_i \sim p(x|\theta)$ ，则联合概率分布可展开为边缘概率的乘积：

$$P(X|\theta) = \prod_{i=1}^N p(x_i|\theta) \quad (3)$$

取对数将乘积转换为求和，即得：

$$L(\theta) = \log \left(\prod_{i=1}^N p(x_i|\theta) \right) = \sum_{i=1}^N \log p(x_i|\theta) \quad (4)$$

3. 贝叶斯派 (Bayesian) 观点

核心理念：

贝叶斯派认为 $p(x|\theta)$ 中的参数 θ 不是一个固定的常数，而是一个随机变量。

这意味着 θ 本身也满足一个概率分布，即预设的**先验分布 (Prior)** $\theta \sim p(\theta)$ 。

根据贝叶斯定理，结合观测数据 X ，参数的**后验分布 (Posterior)** 可以写成：

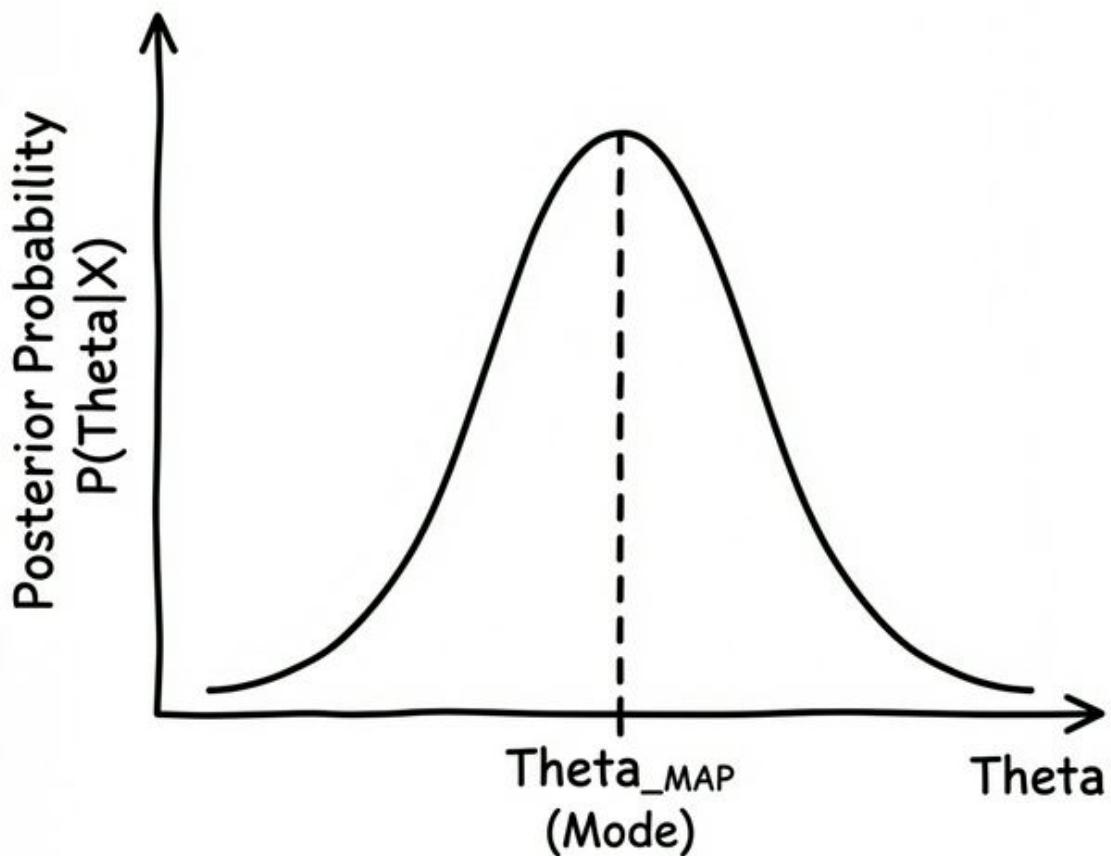
$$p(\theta|X) = \frac{p(X|\theta) \cdot p(\theta)}{p(X)} \propto p(X|\theta) \cdot p(\theta) \quad (5)$$

- $p(\theta|X)$ (**后验**)：在看到数据 X 后，我们对参数 θ 的新认识。
- $p(X|\theta)$ (**似然**)：我们的模型分布，即给定参数下数据出现的概率。
- $p(\theta)$ (**先验**)：在看数据之前，我们认为参数 θ 长什么样。
- $p(X)$ ：归一化常数（分母）， $P(X) = \int_{\theta} P(X|\theta)P(\theta)d\theta$ 。
 - 解释：注意分母 $P(X)$ 与 θ 无关（是对 θ 积分掉了），对于 θ 来说是一个常数。因此，我们在比较不同 θ 的后验概率大小时，只需要关注分子即可，即 **后验 \propto 似然 \times 先验**。

3.1 最大后验估计 (MAP)

为了求出一个具体的 θ 值作为估计，我们可以寻找让后验概率 $p(\theta|X)$ 最大的那个 θ ，这被称为 **最大后验估计 (Maximum A Posteriori, MAP)**：

$$\theta_{MAP} = \operatorname{argmax}_{\theta} p(\theta|X) = \operatorname{argmax}_{\theta} p(X|\theta) \cdot p(\theta) \quad (6)$$



注意：

- 如图所示，MAP 估计就是寻找后验概率密度函数曲线的最高点（峰值/Mode）对应的 θ 值。
- 第二个等号是因为分母 $p(X) = \int p(X|\theta)p(\theta)d\theta$ 与 θ 无关，在求最大值时可以忽略。
- 求解 θ_{MAP} 后，如果我们要得到完整的后验分布，可以再计算分母的积分进行归一化。

3.2 贝叶斯预测 (Bayesian Prediction)

贝叶斯派不仅仅满足于估计出一个参数值 θ （点估计），不仅仅是用 θ_{MAP} 来预测。

贝叶斯派更侧重于利用整个后验分布来进行预测。

给定观测数据 X ，预测新样本 \tilde{x} 的概率分布 $p(\tilde{x}|X)$ ：

$$p(\tilde{x}|X) = \int_{\theta} p(\tilde{x}, \theta|X) d\theta = \int_{\theta} p(\tilde{x}|\theta)p(\theta|X) d\theta \quad (7)$$

- 公式推导解释：

- 引入 θ ：我们无法直接从旧数据 X 推出新数据 \tilde{x} ，必须通过参数 θ 这个“桥梁”。
- 加法法则 (Sum Rule)：(中间项 $\int p(\tilde{x}, \theta|X) d\theta$)。我们先考虑 \tilde{x} 和 θ 同时发生的联合概

率，然后把所有可能的 θ 都加起来（积分），就只剩下了 \tilde{x} 的概率。

3. 乘法法则 (Product Rule): 联合概率 $p(\tilde{x}, \theta|X)$ 可以拆解为 $p(\tilde{x}|\theta) \times p(\theta|X)$ 。

■ 这里利用了独立性：一旦知道了参数 θ ，新样本 \tilde{x} 就只取决于 θ ，与旧数据 X 没关系了，所以 $p(\tilde{x}|\theta, X)$ 简化为 $p(\tilde{x}|\theta)$ 。

• 含义：我们不再依赖某一个具体的 θ ，而是把每一个可能的 θ 带入模型 $p(\tilde{x}|\theta)$ 算出预测结果，然后按照该参数的后验概率 $p(\theta|X)$ 进行加权求和（积分）。即：

- 被乘数 $p(\tilde{x}|\theta)$: 模型在特定参数下的预测。
- 乘数 $p(\theta|X)$: 该参数在当前数据下的可信度（权重）。

4. 小结：频率派 vs 贝叶斯派 (Summary)

频率派和贝叶斯派分别导出了机器学习领域的两大算法体系：

1. 频率派 → 统计机器学习 (Statistical Machine Learning)

- 核心观点：参数 θ 是未知的常量，数据是随机变量。
- 核心操作：最优化 (Optimization)。无论是 MLE 还是各种 Loss Function 的设计，最终都归结为解一个最优化问题。
- 代表算法：SVM, 神经网络 (Standard NN), 线性回归等。

2. 贝叶斯派 → 概率图模型 (Probabilistic Graphical Models)

- 核心观点：参数 θ 是随机变量，数据是固定的观测。
- 核心操作：求积分 (Integration)。无论是计算分母 $p(X)$ 还是进行贝叶斯预测，都涉及到对参数空间的积分。
- 求解难点：积分通常很难算出解析解，因此采样积分方法（如 MCMC）和变分推断占有极其重要的地位。
- 代表算法：LDA, HMM, Gaussian Processes 等。

特性	频率派 (Frequentist)	贝叶斯派 (Bayesian)
看待参数 θ	未知常量	随机变量 (Random Variable)
核心范式	Model + Loss Function + Algorithm	Probabilistic Model + Inference (Computing Posterior)
主要数学工具	最优化理论 (Calculus/Optimization)	积分与采样 (Integration/MCMC)