

- Métodos computacionales:

Alejandro Segura

**Taller 3**

Fecha de entrega: Viernes 30/04/2021, 11:00 pm

## 1 Colisión de dos discos rígidos

1. **(10 Puntos)** La Figura [1] representa la colisión de dos discos de masa  $m_1$  y  $m_2$ , y radios  $r_1$  y  $r_2$  respectivamente. El primer disco tiene una velocidad inicial  $\vec{u}_1$  antes del choque y el segundo disco se encuentra en reposo  $\vec{u}_2 = 0$ . El parámetro de impacto  $b$ , que es la distancia entre la dirección de la velocidad  $\vec{u}_1$  y el centro del segundo disco; caracteriza la interacción.

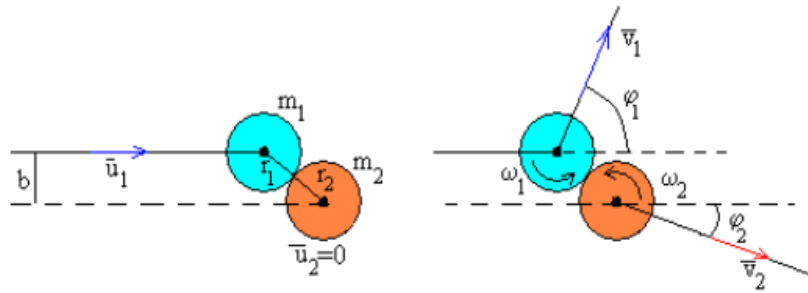


Figure 1: Esquema de colisión de dos discos rígidos.

- a) De la conservación del momento lineal demuestre que:

$$m_1 u_1 = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} \quad (1)$$

$$0 = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} \quad (2)$$

- b) De la conservación del momento angular respecto del punto de contacto demuestre que (ver Figura [2]):

$$-m_1 r_1 u_1 = I_1 \omega_1 - m_1 r_1 (v_{1x} \sin(\theta) + v_{1y} \cos(\theta)) \quad (3)$$

$$0 = I_2 \omega_2 + m_2 r_2 (v_{2x} \sin(\theta) + v_{2y} \cos(\theta)) \quad (4)$$

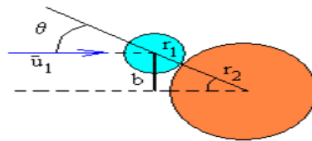


Figure 2: Esquema para la conservación del momentum angular.

c) De la definición del coeficiente de restitución demuestre que:

$$e = -\frac{(v_{1x}\cos(\theta) - v_{1y}\sin(\theta)) - (v_{2x}\cos(\theta) - v_{2y}\sin(\theta))}{u_1\cos(\theta)} \quad (5)$$

d) Si no se considera deslizamiento de un disco respecto al otro en el punto de contacto  $P$ . Las velocidades de los discos en el punto  $P$  son iguales. Muestre que esta restricción conduce a:

$$r_1\omega_1 + v_{1x}\sin(\theta) + v_{1y}\cos(\theta) = -r_2\omega_2 + v_{2x}\sin(\theta) + v_{2y}\cos(\theta) \quad (6)$$

Definamos  $M = \frac{m_1}{m_2} = 1.5$ ,  $I = kmr^2$  con  $k = 1/2$  para un disco,  $r_1 = 0.1$  cm,  $r_2 = 0.2$  cm, el coeficiente de restitución parcialmente elástico ( $e = 0.8$ ) y  $\vec{u}_1 = 2$  m/s  $\hat{i}$ . Variar el ángulo ( $0 < \theta < \pi/2$ ) de incidencia para describir algunos estados finales después del choque.

$$\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta & -\cos\theta & 1 & 1 \\ 0 & M & 0 & 1 & 0 & 0 \\ M & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{2x} \\ v_{2y} \\ r_1\omega_1 \\ r_2\omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Mu_1 \\ eu_1\cos\theta \\ u_1\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 2 Precesión de la órbita de Mercurio

1. **(20 Puntos)** Observaciones astronómicas realizadas en el siglo XIX mostraban que el perihelio de Mercurio que es el punto más cercano al sol no era estático, por el contrario, rota lentamente alrededor del sol. La influencia de los otros planetas no respondían completamente al valor de precesión observado y el perihelio de Mercurio avanza con una velocidad de precesión cercana a 43 segundos de arco por siglo. Fue la Relatividad General de Albert Einstein la teoría que dio una respuesta satisfactoria a dicho fenómeno. Esta teoría predice una corrección a la ley de gravitación de Newton dada por:

$$\vec{F} = -\frac{GM_1M_2}{r^2} \left(1 + \frac{\alpha}{r^2}\right) \hat{r}. \quad (7)$$

Para Mercurio  $\alpha = 1.1 \times 10^{-8}$  au<sup>2</sup>. Dado el valor pequeño de  $\alpha$  se requiere un alto nivel de precisión para la integración de la órbita en cada revolución. Para encontrar dicho resultado se requiere una ligera modificación al método de Verlet:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t + \Delta t) &= \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(t)(\Delta t)^2 \\ \vec{v}(t + \Delta t) &= \vec{v}(t) + \frac{\Delta t}{2}(\vec{a}(t + \Delta t) + \vec{a}(t)) \end{aligned} \quad (8)$$

Los parámetros de órbita para Mercurio son:  $e = 0.205630$  y  $a = 0.387098$ . Inicializar la órbita en el afelio con:

$$\begin{aligned} \vec{r}(0) &= [a(1 + e), 0.] \\ \vec{v}(0) &= [0., \sqrt{G \frac{(1 - e)}{a(1 + e)}}] \end{aligned} \quad (9)$$

Demuestre las expresiones de la Ecuaciones (8) y (9). Usar un paso temporal del mismo orden de  $\alpha \sim \Delta t$  para poder medir el efecto de la precesión. Genere al menos 10 órbitas alrededor del Sol guardando en un archivo de datos el tiempo en años terrestres que tarda mercurio en llegar al perihelio y el ángulo de llegada que debe ser cercano a  $180^\circ$ . Usando el archivo de datos grafique 2 veces el ángulo de llegada vs 2 veces el tiempo en años terrestre que le toma en llegar de nuevo al perihelio. La gráfica que se obtiene es: (*Hint: el perihelio es fácil de encontrar dado que es el radio mínimo a lo largo de la órbita, Be careful con la estrategia para calcular ángulo, además de convertir los grados por año a segundos de arco por siglo*)

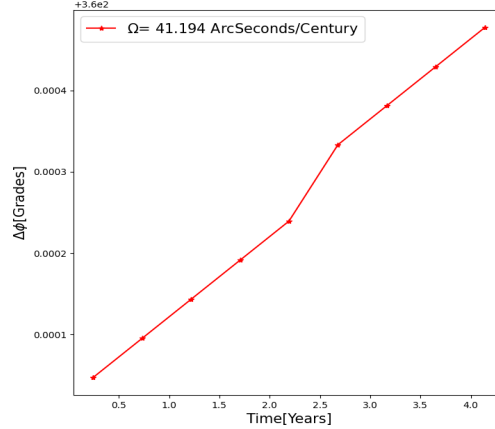


Figure 3: Ángulo que se desplaza el perihelio de Mercurio a lo largo de su movimiento alrededor del sol. Se han realizado 10 revoluciones para encontrar la velocidad de precesión, que tiene un error relativo  $\approx 2\%$  con respecto al valor observado.

### 3 Tensor de Inercia de una estrella naciente

1. **(20 Puntos)** En un instante de tiempo una estrella naciente está compuesta por un conjunto de masas unitarias ( $m = 1 \text{ kg}$ ). Las posiciones de cada una de las partículas están escritas en: <https://github.com/asegura4488/MetodosCompu2021/blob/main/Week10/data/CuerposCelestes.dat>

Para un sistema de  $N$  partículas con masa  $m_k$  y posiciones  $r_k$ , el tensor de inercia se define como:

$$\mathbf{I} = \sum_{k=1}^N m_k ((r_k \cdot r_k) \mathbf{E} - r_k \otimes r_k) \quad (10)$$

donde  $\mathbf{E}$  es el tensor unitario  $e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3$

a) Muestre que el tensor de inercia para esta estrella está dado por:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1.1163 \times 10^4 & 2.0524 \times 10^0 & 7.4286 \times 10^{-1} \\ 2.0524 \times 10^0 & 8.9520 \times 10^3 & -2.3483 \times 10^3 \\ 7.4286 \times 10^{-1} & -2.3483 \times 10^3 & 4.2341 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Note que el tensor es simétrico  $I_{ij} = I_{ji}$  como es esperado.

- b) Encuentre los auto-valores y auto-vectores. Si dos valores propios son cercanos o iguales ¿Qué interpretación tienen los auto-valores respecto a las simetrías de este sistema?
- c) Haga una gráfica en 3D de la estrella, los auto-vectores de la estrella y las estrellas sobre sus ejes principales. (ver Figura [4])

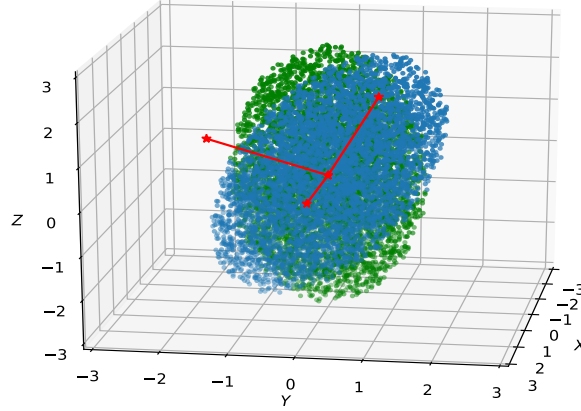


Figure 4: Estrella naciente: Puntos originales (azul), los ejes principales del cuerpo (rojo) y puntos sobre los ejes principales (verde.)

## 4 Series de Fourier

Demostrar (con rigor matemático) los siguientes teoremas:

1. **(10 Puntos)** Si  $f(t)$  es continua cuando  $-T/2 \leq t \leq T/2$  con  $f(-T/2) = f(T/2)$ , y si la derivada  $f'(t)$  es continua por tramos y diferenciable; entonces la serie de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \quad (11)$$

se puede diferenciar término por término para obtener:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0 (-a_n \sin(n\omega_0 t) + b_n \cos(n\omega_0 t)) \quad (12)$$

Sea  $f(t)$  continua por tramos en el intervalo  $-T/2 \leq t \leq T/2$  y sea  $f(t+T) = f(t)$ . Demostrar que la serie de Fourier se puede integrar término por término para obtener:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \frac{1}{2} a_0 (t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0} [-b_n (\cos(n\omega_0 t_2) - \cos(n\omega_0 t_1)) + a_n (\sin(n\omega_0 t_2) - \sin(n\omega_0 t_1))] \quad (13)$$

**Aplicación numérica:** Usar la serie de Fourier de  $f(t) = t^2$  en el intervalo  $-\pi \leq t \leq \pi$  y  $f(t+2\pi) = f(t)$ . Para estimar numéricamente (Usando Python y la identidad de Parseval) la suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}. \quad (14)$$

## 5 Transformada de Fourier

1. **(10 Puntos)** Descargue los datos de las manchas solares desde 1600. <https://github.com/asegura4488/MetodosCompu2021/blob/main/Week10/data/ManchasSolares.dat>. La columna 1 es el año, la segunda es el mes y la tercera es el número de manchas. Para encontrar el periodo de manchas desde 1900 (Figura [1]) solares uno de los posibles caminos es:
  - a) Filtrar los datos a partir del año 1900.
  - b) Quitar el valor medio de los datos para que la frecuencia este centrada en cero.
  - c) Calcular la transformada rápida de Fourier (`np.fft.fft`) y las frecuencias (`np.fft.fftfreq`).
  - d) Encontrar la frecuencia dominante por año. Usar este valor para encontrar el periodo por año.
  - e) Reproducir la Figura [5] usando solo la frecuencia dominante.

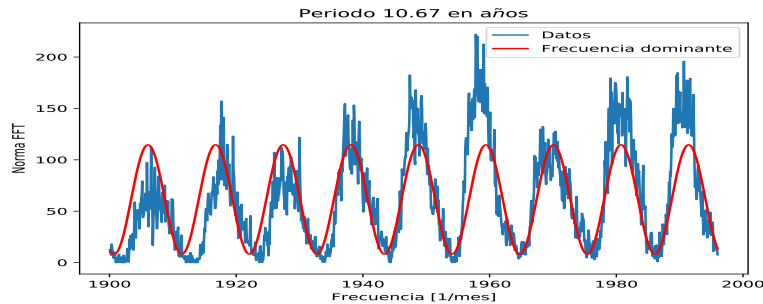


Figure 5: Frecuencia de manchas solares después de 1900.

## 6 Detección de bordes para medidas experimentales.

1. **(10 Puntos)** Diseñe un método experimental basado en la detección de bordes para medir la longitud de un lapicero. Primero, mida el objeto con una regla común y posteriormente, procese la imagen de los bordes asociada al lapicero. Deberá establecer una escala de medida con un patrón y luego con ese factor de escala ( $cm/pixel$ ); encontrar la longitud aproximada del objeto.

## 7 Redes Neuronales

1. **(5 Puntos)** Modifique el código sobre redes neuronales escrito en C++ para entrenar una red neuronal sencilla. La red neuronal debe comportarse como una compuerta XNOR. Dicha compuerta tiene la siguiente tabla de verdad:

La red debe tener la topología más simple posible (un par de neuronas en una capa o dos neuronas en dos capas) y entrenada usando solo números aleatorios.

A	B	Output
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

2. **(5 Puntos)** Derive analíticamente los términos necesarios para la propagación del error en una red neuronal.

$$\begin{aligned}\delta^L &= \frac{\partial C}{\partial a^L} \frac{\partial a^L}{\partial z^L} \\ \delta^{l-1} &= (\delta^l)^T W^l \frac{\partial a^{l-1}}{\partial z^{l-1}}.\end{aligned}\tag{15}$$

donde  $C$  es la función de costo (*métrica*) de la red.