# 集合论

李 辉

## Table of Contents

# 集合的概念

集合的定义及表示

集合的概念是数学中最基本的概念之一.难以精确定义.

简单地说,把一些事物汇集到一起组成一个整体称为集合(Set).

这些事物称为集合的元素(Element),可以是具体的,也可以是抽象的.

例:全体中国人,教室里的所有学习用具,坐标平面上所有的点分别构成了3个不同的集合.

通常用大写英文字母$A, B, C, \cdots, Z$表示集合的名称,用小写英文字母$a, b, c, \cdots, z$表示集合的元素.

集合的表示方法有两种:

**枚举法**

将集合的元素全部列举出来(或列出足够多的元素以反映集合的特征),元素之间用逗号隔开,并把它们用花括号括起来.

例:

- $A = \{a, b, c, d\}$
- $B = \{2,4,6,8, \cdots, 2n, \cdots\}$
- $C = \{\{a, b\}, c, \{1, c\}\}$
- $D = \{m_1, m_2, \cdots, m_n\}$
- $E = \{$电灯,铅笔,计算机$\}$

元素与集合的隶属关系:

- 若$a$是集合$S$中的元素,记作$a \in S$,读作"$a$属于集合$S$" 或 "$a$在集合$S$中".
- 若$a$不是集合$S$中的元素,记作$a \notin S$,读作"$a$不属于集合$S$" 或 "$a$不在集合$S$中".

叙述法(描述法,条件表示法)

将集合的元素用文字描述或谓词来概括.

$$A = \{x|P(x)\}$$

表示集合$A$由使$P(x)$为真的全体$x$构成.

例:

- $P = \{y|y = a \vee y = b\}$
- $Q = \{x|x$是素数$\}$
- $R = \{x|x$是美国人$\}$
- $S = \{x|x \in R \wedge x^2 = 1\}$
- $T = \{x|x$是小于10的素数$\}$
- $U = \{x|x$是正奇数$\}$

集合的性质

**无序性**:一个集合中,每个元素的地位都是相同的,元素之间是无序的.

例:$\{1,2,3,4\}$ 和 $\{1,3,2,4\}$是同一个集合.

**确定性**:给定一个集合,任给一个元素,该元素或者属于或者不属于该集合,二者必居其一.

例:要么$x \in S$,要么$x \notin S$.

**互异性**:一个集合中,任何两个元素都互不相同,即每个元素只能出现一次.

例:$\{1,1,2\}$与$\{1,2\}$相同,只有两个元素.

常常存在这样一些集合,其元素本身也是一个集合. 例:

$$X = \{a, 3, \{s, 2\}, \{t\}, 8\}$$

对于这种情形,关键是要把集合$\{a\}$与元素$a$区别开来.

在上述例子中,集合$\{t\}$是集合$X$的元素, 即$\{t\} \in X$.

而$t$是集合$\{t\}$的元素,即$t \in \{t\}$. 但$t$不是$X$的元素,即$t \notin X$.

特殊集合

对于一个集合$A$,如果它是由有限个元素组成的,则称$A$为有限(穷)集合,简称**有限(穷)集**;不是有限集合的集合称为无限(穷)集合,简称**无限(穷)集**.

对于一个有限集$A$来说,通常把$A$中不同元素的个数称为$A$的**势**(基数),用$card(A)$,$|A|$或$K(A)$来表示.

若$A$中包含$m$个不同元素,记$|A| = m$,也称$A$为$m$元集.

例:$A = \{1,2,3,a,b,c\}$,$|A| = 6$,$A$是6元集.

约定几个常见集合的表示符号:

- $N$:自然数集合$N = \{0,1,2,\cdots\}$
- $Z$:整数集合$Z = \{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$
- $Z_+$:正整数集合$Z_+ = \{1,2,3,\cdots\}$
- $Z_-$:负整数集合$Z_- = \{\cdots,-3,-2,-1\}$
- $P$:素数集合$P = \{2,3,5,7,11,13,\cdots\}$
- $Ev$:偶数集合$Ev = \{\cdots,-4,-2,0,2,4,\cdots\}$
- $Od$:奇数集合$Od = \{\cdots,-3,-1,1,3,\cdots\}$
- $R$:实数集合
- $C$:复数集合
- $Q$:有理数集合

集合间的关系

几个逻辑符号的含义:

- ∨:或(或者)
- ∧:与(和,并且)
- →:如果…,那么…(若…,则… )
- ⇔:等价于(当且仅当)

定义:不含任何元素的集合为空集,记作$\Phi$.

符号化:$\Phi = \{x|x \neq x\}$.

例:$\{x|x \in R \wedge x^2 + 1 = 0\}$是方程$x^2 + 1 = 0$的实数解集合,然而该方程无实数解,所以解集是个空集.

注意:$\Phi$和$\{\Phi\}$是不相同的集合.

$\Phi$是一个集合,$\Phi$中不含有任何元素,而集合$\{\Phi\}$中含有一个元素$\Phi$,所以$\Phi \in \{\Phi\}$.

定义:设$A, B$是任意给定的两个集合,如果$A$的每一个元素都是$B$的元素,则称集合$A$是集合$B$的子集,或称集合$A$包含于集合$B$中,或集合$B$包含集合$A$.

记作$A \subseteq B$,或$B \supseteq A$.

符号化: $A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B)$

显然,对于任意的非空集合$S$,都有$\Phi \subseteq S$和$S \subseteq S$.

称$\Phi$和$S$为$S$的平凡子集.

例: 设

$A = \{1,2,3\}, B = \{5,9,\{5,9\}\}, C = \{1,3\}, D = \{5,9\},$

则: $C \subseteq A, D \subseteq B$.

本例中:$D$既是$B$的子集又是$B$的元素,即$D \subseteq B$且$D \in B$.

定义:设$A, B$是两个集合,如果$A \subseteq B$,且$A \neq B$,称$A$是$B$的真子集,记为$A \subset B$.

例:偶数集是整数集的真子集($Ev \subset Z$),整数集是实数集的真子集($Z \subset R$).

例:设$A = \{1,2,3\}, B = \{1,2\}, C = \{1,3\}$, $D = \{3\}$,

则$B \subset A, C \subset A, D \subset A, D \subset C$.

外延公理(Zermelo–Fraenkel Axiom): 如果集合$A$和$B$有完全相同的元素,那么称集合$A$和$B$相等,记作$A = B$.

如果集合A与B不相等,则记作$A \neq B$.

两个集合相等可以通过两个集合相互包含来证明.

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

例: 设$A = \{3,6,9\}$,$B = \{6,3,9\}$,$C = \{3, \{6\}, 9\}$.

则:$A = B, A \neq C$.

对于任意集合$A$,$B$和$C$,有:

- $A \subseteq A$.⊆具有自反性(Reflexivity).
- $A \subseteq B$且$B \subseteq A$,则$A = B$. ⊆具有反对称性(Antisymmetric).
- $A \subseteq B$且$B \subseteq C$,则$A \subseteq C$.⊆具有传递性(Transitivity)

定理:空集是任一集合的子集.

证明:(反证法).

设存在一个集合$A$,$\Phi$不是$A$的子集,则至少有一个元素$x$,使得$x \in \Phi$且$x \notin A$.

但空集$\Phi$不包含任何元素,所以假设不成立.

定理:空集是唯一的.

证明:(反证法).

设有两个空集$\Phi_1$和$\Phi_2$.

因为空集被包含于每一个集合中,因此有$\Phi_1 \subseteq \Phi_2$且$\Phi_2 \subseteq \Phi_1$,于是$\Phi_1 = \Phi_2$.

定义:给定集合A,以A的全部子集为元素构成的集合,称为A的幂集(Power set),记为$P(A)$或$2^A$. 即: $P(A) = \{x|x \subseteq A\}$

例:设$A = \{1,2,3\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{\Phi\}$,求$A$,$B$和$C$的幂集.

解:

$$P(A) = \{\Phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$
$$P(B) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$
$$P(C) = \{\Phi, \{\Phi\}\}$$

空集$\Phi$的幂集:$P(\Phi) = \{\Phi\}$.

定理:如果有限集合$A$有$n$个元素,则它的幂集$P(A)$有$2^n$个元素.

证明:从集合$A$中:

任意抽取0个元素构成的子集共有个$C_n^0$

任意抽取一个元素构成的子集共有个$C_n^1$

任意抽取两个元素构成的子集共有个$C_n^2$

$\cdots\cdots$

任意抽取n个元素构成的子集共有个$C_n^n$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

例:设集合$A = \{1,2,3\}$, 则:

$$P(A) = \{\Phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

$$|P(A)| = 2^3 = 8$$

定义:若一个集合$A$的所有元素都是集合,称该集合为**集合族**.

例:幂集就是集合族.

$A = \{\{1,2\}, \{a\}, \{$张三,老虎,10$\}\}$是集合族.

定义:给定一个集合,如果讨论范围内的所有集合都是它的子集,称该集合为全集(Universal Set). 记作$U$(或$E$).

全集是一个相对的概念,由于研究的问题不同,所取的全集也不同.

例:在研究平面上直线的关系时,可以把整个平面上的点坐标作为全集;

例:在研究有关整数问题时,可以取整数集合$Z$作为全集,也可以取有理数集合$Q$作为全集,还可以取实数集合$R$作为全集.

一般情况下,全集应尽量取小一些.这样的话,问题的描述和处理相对容易.

定义:设$A,B$是任意给定的两个集合,$A$和$B$的交集$A\cap B$,并集$A\cup B$ ,$B$对$A$的相对补集$A-B$,以及对称差集$A\oplus B$ 分别定义如下:

- $A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$
- $A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$
- $A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$
- $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=\{x|(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A\}$

$A\cap B$是由$A,B$的所有公共元素组成.

$A\cup B$是由$A,B$的所有元素组成.

$A-B$是由属于$A$但不属于$B$的元素组成.

$A\oplus B$是由属于$A$或属于$B$,但不同时属于$A$和$B$的元素组成.

例:设$A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{e,f,a,d\}$

求:$A\cap B$,$A\cup B$,$A-B$,$A\oplus B$.

解:$A\cap B=\{a,d\}$, $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$, $A-B=\{b,c\}$, $B-A=\{e,f\}$, $A\oplus B=\{b,c,e,f\}$

定义:设$U$是全集,$A$是$U$的任一子集,$U-A$称为集合$A$的绝对补集.

记作$\sim A$,$A^c$或$A'$.

$$\sim A = U - A = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$$

由集合$A$的绝对补集可知:

- 若$x \notin A$,则$x \in \sim A$
- 若$x \in A$,则$x \notin \sim A$

例:设$U=\{0,1,2,3\}$,$A=\{1,2,3\}$,$B=\{0,1,2,3\}$,$C=\Phi$,

求$\sim A$,$\sim B$,$\sim C$.

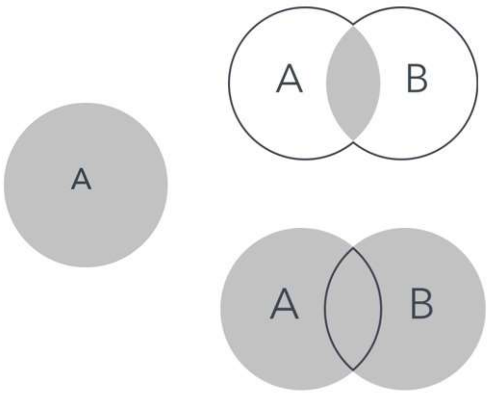
解:

$$\sim A = \{0\},$$
$$\sim B = \Phi,$$
$$\sim C = \{0,1,2,3\}.$$

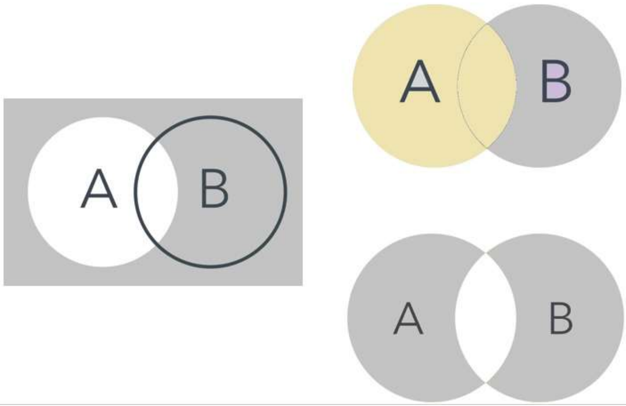
维恩图

当集合中的元素不多时,可以用维恩图(Venn diagram)或文氏图直观地表示集合间的关系及运算结果.

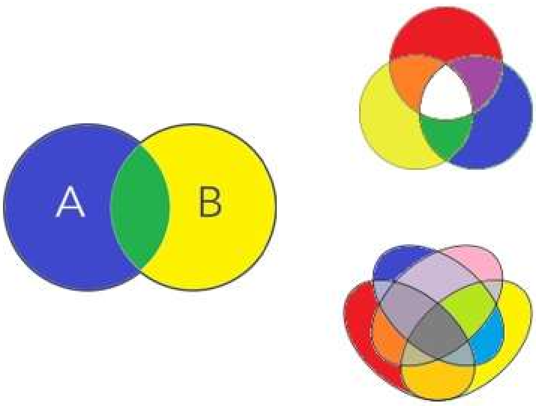
在维恩图中,通常用一个矩形表示全集$U$.然后在矩形的内部画一些圆(或其它封闭的曲线),圆的内部代表集合,不同的圆代表不同的集合.



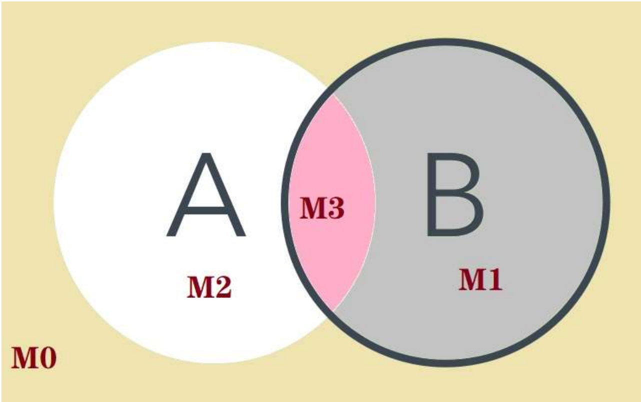

集合、集合的并与交




绝对补集、相对补集和对称差集




2、3、4集合的维恩图




极小项的概念

集合$A,B$将全集$U$划分成4个子集$m_0,m_1,m_2,m_3$,称为极小项.

$$A\cap B=m_3,\ A\cup B=m_1\cup m_2\cup m_3$$
$$A-B=m_2,\ B-A=m_1$$
$$A\oplus B=m_1\cup m_2$$
$$\sim A=m_0\cup m_1,\ \sim B=m_0\cup m_2$$

任意两个极小项交集为空,因此

$$m_i\cup m_j=m_i\oplus m_j$$

定义:设$A$,$B$是任意的集合,运用下面的规则可以产生**集合公式**.

- 集合$A$是集合公式.
- 若$A$是集合公式,则$\sim A$也是集合公式.
- 若$A, B$是集合公式,则$(A \cup B), (A \cap B), (A - B), (A \oplus B)$也都是集合公式.
- 有限次地使用以上规则得到的公式都是集合公式.

为减少使用括号的数量,有时候省略集合公式的最外层括号.

例:

$$(A \cup B) \cap C,$$
$$(A \oplus B) \cap (B - C),$$
$$(B \oplus D) \oplus ((B - C) - D)$$

都是集合公式.

# 集合恒等式

一些基本集合恒等式(集合定律),其中 $A, B, C$ 是全集 $U$ 的任意子集.

- 幂等律(Idempotent Laws)
  $$A \cup A = A,\ A \cap A = A$$
- 交换律(Commutative Property)
  $$A \cup B = B \cup A$$
  $$A \cap B = B \cap A$$
  $$A \oplus B = B \oplus A$$

- 结合律(Associative Property)
  $$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
  $$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
  $$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$
- 分配律(Distributive Property)
  $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
  $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
  $$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

注意:

$$A \cup (B - C) \neq (A \cup B) - (A \cup C)$$
$$A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$$

- 同一律(Identity)

$$A \cup \Phi = A,\ A \cap U = A$$
$$A - \Phi = A,\ A \oplus \Phi = A$$

- 零律或支配律(Domination Laws)

$$A \cup U = U,\ A \cap \Phi = \Phi$$

- 互补律(Complement)

$$A \cup \sim A = U,\ A \cap \sim A = \Phi$$
$$\sim U = \Phi,\ \sim \Phi = U$$

- 吸收律(Absorption Laws)

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

- 德·摩根律(De Morgan’s Laws)

$$\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$$
$$\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$$
$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$
$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

- 双重否定律(Double Complement)

$$\sim(\sim A) = A$$

- $A \oplus A = \Phi,\ A - A = \Phi$
- $A \cap B \subseteq A,\ A \cap B \subseteq B$
- $A \subseteq A \cup B,\ B \subseteq A \cup B$
- $A - B \subseteq A,\ A - B = A \cap \sim B$
- $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)$

由于集合的交,并运算满足结合律,当多个集合进行交运算或并运算时,可以写成:

$$S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n = \bigcap_{i=1}^{n} S_i$$

$$S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$$

例:设

$$S_1 = \{3, c\}, S_2 = \{a, c\},$$
$$S_3 = \{c, 2\}, S_4 = \{c, 3\}$$

则:

$$\bigcap_{i=1}^{4} S_i = \{c\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{4} S_i = \{a, c, 2,3\}$$

以上集合恒等式,可以采用三种方式证明:

- 基本定义法
- 维恩图法
- 公式推演法

例:设$A, B$为任意两个集合,则$A - B = A \cap \sim B$.

证明(基本定义法):拟证明$A - B$和$A \cap \sim B$相互包含.

对于任意的$x$,若$x \in A - B$,则$x \in A \wedge x \notin B$,即$x \in A \wedge x \in \sim B$,则$x \in A \cap \sim B$.

所以$A - B \subseteq A \cap \sim B$.

反之,对于任意的$x$,若$x \in A \cap \sim B$,则$x \in A \wedge x \in \sim B$,即$x \in A \wedge x \notin B$.

所以$x \in A - B$,故$A \cap \sim B \subseteq A - B$.

综上,$A - B = A \cap \sim B$.证毕.

(维恩图法)

$$A = m_2 \cup m_3$$
$$\sim B = m_0 \cup m_2$$
$$A \cap \sim B = m_2$$
$$A - B = m_2$$

所以 $A - B = A \cap \sim B$.

例:证明结合律

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

证明(基本定义法).

对于任意的$x$,若$x \in (A \cap B) \cap C$, 则

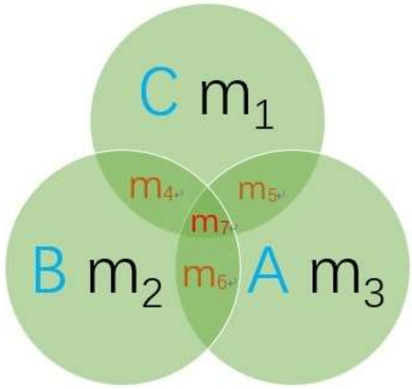
$$x \in (A \cap B) \wedge (x \in C),$$
$$(x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \in C),$$
$$x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C),$$
$$x \in A \wedge x \in (B \cap C),$$
$$x \in A \cap (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$$

反之,对于任意的$x$,若$x \in A \cap (B \cap C)$,则

$$x \in A \land x \in (B \cap C),$$
$$x \in A \land (x \in B \land x \in C),$$
$$(x \in A \land x \in B) \land (x \in C),$$
$$x \in (A \cap B) \land (x \in C),$$
$$x \in (A \cap B) \cap C,$$
$$A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$$

因此:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$




m1, m2, m3, m4, m5, m6, m7

证明: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. (维恩图法)

$$A = m_3 \cup m_5 \cup m_6 \cup m_7$$
$$C = m_1 \cup m_4 \cup m_5 \cup m_7$$
$$A \cap B = m_6 \cup m_7, B \cap C = m_4 \cup m_7$$
$$(A \cap B) \cap C$$
$$= (m_6 \cup m_7) \cap (m_1 \cup m_4 \cup m_5 \cup m_7)$$
$$= m_7$$
$$A \cap (B \cap C)$$
$$= (m_3 \cup m_5 \cup m_6 \cup m_7) \cap (m_4 \cup m_7)$$
$$= m_7$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

例:设$A \subseteq B$,$C$是任意集合,求证

$$A \cap C \subseteq B \cap C.$$

证明:由$A \subseteq B$知,若$x \in A$,则$x \in B$.

若$x \in A \cap C$,有$x \in A \wedge x \in C$,则

$$x \in B \wedge x \in C.$$
$$x \in B \cap C.$$

因此 $A \cap C \subseteq B \cap C$.

例:设$A \subseteq B$,$C \subseteq D$,求证:
$$A \cup C \subseteq B \cup D.$$
证明:任取$x \in A \cup C$,由“并”运算的定义有:
$x \in A$ 或 $x \in C$.
若$x \in A$,则由$A \subseteq B$,有$x \in B$,故$x \in B \cup D$
若$x \in C$,则由$C \subseteq D$,有$x \in D$,故$x \in B \cup D$.
因此 $A \cup C \subseteq B \cup D$.

例:求证 $A \subseteq B$ 当且仅当 $A \cup B = B$.
证明:(必要性) 设$A \subseteq B$,则$x \in A$,必有$x \in B$.
若$x \in A \cup B$,有$x \in A$或$x \in B$.
一定有$x \in B$, 所以$A \cup B \subseteq B$.
又因为$B \subseteq A \cup B$, 于是$A \cup B = B$.
(充分性)若$A \cup B = B$,因为$A \subseteq A \cup B$,所以$A \subseteq B$.

采用公式推演法也可以证明集合恒等式,利用已知的集合恒等式证明待证的集合恒等式.

例:证明分配律

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

证明:$A \cap (B - C) = A \cap (B \cap \sim C) = A \cap B \cap \sim C$

又

$$\begin{aligned}
&(A \cap B) - (A \cap C) \\
&= (A \cap B) \cap \sim (A \cap C) \\
&= (A \cap B) \cap (\sim A \cup \sim C) \\
&= (A \cap B \cap \sim A) \cup (A \cap B \cap \sim C) \\
&= \Phi \cup (A \cap B \cap \sim C) \\
&= A \cap B \cap \sim C
\end{aligned}$$

因此 $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

例:证明吸收律

$$A \cup (A \cap B) = A$$

证明:

$$\begin{aligned} & A \cup (A \cap B) \\ = & (A \cap U) \cup (A \cap B) \\ = & A \cap (U \cup B) \\ = & A \cap U \\ = & A \end{aligned}$$

例:求证分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

证明:

$$\begin{aligned} & x \in A \cap (B \cup C) \\ \Leftrightarrow & x \in A \wedge x \in (B \cup C) \\ \Leftrightarrow & x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ \Leftrightarrow & (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \\ \Leftrightarrow & x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

所以 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

例:求证交换律

$$A \cap B = B \cap A.$$

证明:

$$x \in A \cap B$$
$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$
$$\Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A$$
$$\Leftrightarrow x \in B \cap A$$

所以 $A \cap B = B \cap A$.

例:求证结合律

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

证明:

$$x \in (A \cap B) \cap C$$
$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge (x \in C)$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \in C)$$
$$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \wedge x \in C)$$
$$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge x \in (B \cap C)$$
$$\Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$$

所以$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

同理可证$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

例:求证幂等律

$$A \cup A = A.$$

证明:

$$x \in A \cup A$$
$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in A$$
$$\Leftrightarrow x \in A$$

所以

$$A \cup A = A.$$

例:求证德·摩根定律

$$\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B.$$

证明:

$$\sim (A \cup B) = \{x | x \in \sim (A \cup B)\}$$
$$= \{x | x \notin (A \cup B)\}$$
$$= \{x | (x \notin A) \wedge (x \notin B)\}$$
$$= \{x | (x \in \sim A) \wedge (x \in \sim B)\}$$
$$= \sim A \cap \sim B$$

例:设$A,B$为任意两个集合,若$A \subseteq B$,则:

$$\sim B \subseteq \sim A$$

$$(B - A) \cup A = B$$

证明:

若$x \in A$ 则 $x \in B$

因此,$x \notin B$ 必有 $x \notin A$.

故 $x \in \sim B$ 必有 $x \in \sim A$.

即 $\sim B \subseteq \sim A$.

$$\begin{aligned} &(B - A) \cup A \\ &= (B \cap \sim A) \cup A \\ &= (B \cup A) \cap (\sim A \cup A) \\ &= (B \cup A) \cap U \\ &= B \cup A \end{aligned}$$

因为 $A \subseteq B$,于是有 $B \cup A = B$.

因此

$$(B - A) \cup A = B.$$

# 基本计数原理

计数是在数学中经常遇到的问题,是离散数学的重要部分.

许多组合问题都涉及到计数,因为需要考虑的对象往往很多,所以希望能直接对一个集合中的对象进行计数,而不是把它们全部列举出来.

本节介绍两个基本的计数原理:加法原理和乘法原理.

定理:(**加法原理**)假设有$k$个集合,其中第1个集合有$n_1$个元素,第2个集合有$n_2$个元素,依此类推.

如果所有的元素都不相同(即$k$个集合两两互不相交),那么可以从这些集合选出的元素总数为:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

例:1个学生可以从3类选修课中选修1门课程,这3类选修课分别包含5,11和9门选修课,那么该学生有多少种选修方式?

解:该学生对第1类课程的选修有5种方式,第2类课程的选修有11种方式,第3类课程的选修有9种方式.因此,共有5+11+9=25种选修课程方式.

加法原理是说:整体等于其部分之和.

例:1-100之间(包括1和100)共有多少个整数是偶数或以5结尾?

证明:用$A$代表1-100之间的偶数集合,$B$代表1-100之间以5结尾的整数的集合,且$A$和$B$中的元素是不相同的,则$A \cup B$就是1-100之间的偶数和以5结尾的整数集合.

可见$A$包含50个元素,$B$包含10个元素,因此1-100之间的偶数或以5结尾的整数共有50+10=60.

定理:(**乘法原理**) 假定一个任务需要$k$步完成. 如果执行第一步的方法有$n_1$种,执行第二步的方法有$n_2$种,执行第$i$步($i=3,4,\cdots,k$)有$n_i$种方法.

那么执行整个任务的不同方法就有:

$$n_1 n_2 \cdots n_k.$$

例:设一标识符由2个字符组成,第1个字符为$a,b,c,d,e$中的一个字母,第2个字符1,2,3中的一个数字,问共可以组成多少不同的标识符?

证明: 第一步为从$a,b,c,d,e$中选择1个字符作为标识符的第1个字符,共有5种方式. 第二个步为从1,2,3中选择1个字符作为标识符的第2个字符,共有3种方式. 根据乘法原理有5×3=15种不同的标识符.

例:求证:含有$n$个元素的集合共有$2^n$个子集.

证明:设该集合为$X = \{x_1, x_2, \cdots x_n\}$.

构造的一个子集可分为$n$个步骤:选取或不选取$x_1$,选取或不选取$x_2$,⋯,选取或不选取$x_n$. 每一步骤有2种选择,故所有可能的子集总数为:

$$2 \times 2 \times \cdots \times 2 \times 2 = 2^n.$$

计数问题不仅可以使用乘法原理或加法原理来解决,也可以同时使用这两个原理来解决.

例:设$A, B, C$是3个城市,从$A$到$B$有3条路,从$B$到$C$有4条路,从$A$到$C$有5条路,问从$A$到$C$有多少种不同的方式?

解:

$$3 \times 4 + 5 = 17.$$

例:我国曾推行的02式汽车牌照的式样如下:999.999,999.XXX,XXX.999.其中9表示该位为数字,X表示该位为大写字母,那么共有多少个不同的车牌号码?

解: 根据乘法原理,式样为999.999的有$10^6$种不同牌照. 式样为999.XXX的有$10^3 \times 26^3 = 17576000$种不同的牌照. 式样为XXX.999的同样有17576000种不同的牌照.

根据加法原理,车牌总量为1000000+17576000+17576000=36152000.

# 容斥原理

设$A_1, A_2$为有限集合,显然下列各式成立:

$$|A_1 \cup A_2| \le |A_1| + |A_2|$$
$$|A_1 \cap A_2| \le min(|A_1|, |A_2|)$$
$$|A_1 - A_2| \ge |A_1| - |A_2|$$
$$|A_1 \oplus A_2| = |A_1| + |A_2| - 2|A_1 \cap A_2|$$
$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

这些公式可由维恩图得出.

最后一个公式称为容斥原理.

容斥原理研究若干有限集合交与并的计数问题.

例:在10个青年人中有5个是北京人,7个是学生,其中既是北京人又是学生的青年有3人,问不是北京人又不是学生的青年有几人?

解:设U:青年人集合,A:学生集合,B:北京人集合. |U|=10,|A|=7,|B|=5, 则:

$A \cup B$:北京人或学生组成的集合.

$\sim (A \cup B)$:不是北京人也不是学生组成的集合.

$A \cap B$:是北京人又是学生组成的集合. $|A \cap B| = 3.$

则$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 7 + 5 - 3 = 9.$

故$| \sim (A \cup B)| = |U| - |A \cup B| = 10 - 9 = 1.$

即: 既不是北京人又不是学生的青年人有1人.

容斥原理可以推广到多个集合.

设$A,B,C$为有限集合,有:

$$|A \cup B \cup C| \\ = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| \\ - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

定理:设$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$为有限集,则

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \\ = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| \\ + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots \\ + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

例:设某高校足球队有球员38人,篮球队有球员15人,棒球队有球员20人,3队队员总数为58人,且其中只有3人同时参加3个队,试求同时参加2个队的队员共有几人?

解:设A:足球队员集合,B:篮球队员集合,C:棒球队员集合. $|A| = 38$,$|B| = 15$, $|C| = 20$, $|A \cup B \cup C| = 58$,$|A \cap B \cap C| = 3$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$58 = 38 + 15 + 20 - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + 3$$

$$|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| = 73 + 3 - 58 = 18$$

由于:$|A \cap B \cap C| = 3 = |m_7|$

$$|A \cap B| = |m_6| + |m_7|, |A \cap C| = |m_5| + |m_7|, |B \cap C| = |m_4| + |m_7|$$

$$|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| = |m_6| + |m_5| + |m_4| + 3 \times |m_7|$$

同时参加2个队的队员人数是$|m_6| + |m_5| + |m_4| + |m_7| = 18 - 3 - 3 = 12$人.

# 鸽巢原理

鸽巢原理(抽屉原理),是离散数学中的一个重要原理.以德国著名数学家狄利克雷(Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1855)命名，常被称作狄利克雷原理(Dirichlet’s drawer principle).

鸽巢原理主要用于证明某些存在性或必然性的问题,在数论、组合论以及集合论等领域中有广泛应用。

一群鸽子飞回鸽巢中,如果鸽子的数目比鸽巢多,那么一定至少有一个鸽巢里有2只或2只以上的鸽子,这就是鸽巢原理.

定理(鸽巢原理):如果$n+1$($n$为正整数)个或更多的对象被放入$n$个抽屉中,则至少有一个放入2个或更多的对象.

证明:假设$n$个抽屉中没有一个抽屉中有多于1个的对象,那么对象总数至多是$n$,这与至少有$n+1$个对象相矛盾.

例:至少要从集合$S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$中取出几个元素能保证有两个数相加等于10?

解:将1-9分成5个不同的集合(鸽巢):

{1,9},{2,8},{3,7},{4,6},{5}

由鸽巢原理,任取$S$中的6个数,一定会有2个数(对象)在1个集合(鸽巢)中,相加等于10.

例:任意8个正整数每个用7来除,其中至少有2个余数相同,请说明理由.

解:因为任意正整数除以7的余数最多只有0到6,一共7种可能.

所以,任意8个正整数,每个都用7来除,把余数为0的放到0号抽屉,把余数为1的放到1号抽屉,把余数为6的放到6号抽屉,……. 有8个数,被放到7个抽屉里,至少有1个抽屉中有2个数,即这2个数除以7的余数相同.

广义抽屉原理

定理(广义抽屉原理):如果$n$个抽屉被$kn+1$个或更多的对象占据($n, k$为正整数),则至少有一个抽屉有$k+1$个或更多的对象.

证明:(反证法)假设没有抽屉中装有比$k$个对象多的鸽巢屉,则对象的总数至多是$kn$个,$kn < kn+1$,这与存在有不少于$kn+1$对象相矛盾.

广义抽屉原理也可描述为:如果$m$个对象放到$n$个抽屉中,那么至少有1个抽屉有至少$\lceil m/n \rceil$对象.

一类普通的问题是:把$m$个对象分到$n$个抽屉中要使得某个抽屉至少有$r$个对象,求$m$的最小值.

例:求1个班的同学中能保证3人在同一月份出生的最少学生数量.

解:此处$n = 12$个月份为鸽巢,而$k + 1 = 3$,即$k = 2$.因此,$kn + 1 = 25$个同学中,有3人在同一月份出生.

例:从一幅标准52张扑克牌中必须选多少张牌才能保证选出的牌中至少有3张是同样花色的?

解:假设存在四个抽屉(n=4)存放四种花色的牌,选中的牌放在同样花色的抽屉中.根据广义抽屉原理,如果选了m张牌,那么至少有一个抽屉放入至少$\lceil m/4 \rceil$张牌.

因此如果$\lceil m/4 \rceil \geq 3$,则至少选了3张同样花色的牌.使得$\lceil m/4 \rceil \geq 3$的最小正整数$m$是$m = 2 \times 4 + 1 = 9$.

所以选择9张牌就可以保证至少有3张是同样花色的.

例:在$n+1$个小于等于$2n$的不相等的正整数中,一定存在两个数是互素的.

证明:先证下面事实:任意两个相邻的正整数是互素的.

反证法.假设$n$与$n+1$有公因子$q(q \geq 2)$,则有 $n = qp_1, n+1 = qp_2$,即$q(p_2 - p_1) = 1$,这与$q \geq 2$和$p_2 - p_1$是整数相矛盾.

因此,任意两个相邻的正整数是互素的.

现把$1,2,3,\cdots,2n$分成如下分组:

$$\{1,2\},\{3,4\},\cdots,\{2n-1,2n\}$$

从组中任取$n+1$个数,由鸽巢原理,至少有两个数取自同一个鸽巢,它们是相邻的数,互素.

例:取黑白围棋子21枚,黑白数目不限,排列成3行7列的长方形. 求证:无论怎样排放,都可以从中找到一个长方形,使该长方形的四个角的棋同色.

证明:设21枚棋子排列成的长方形如下:

$$\begin{array}{ccccccc} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{15} & q_{16} & q_{17} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & q_{25} & q_{26} & q_{27} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} & q_{35} & q_{36} & q_{37} \end{array}$$

由鸽巢原理知 $q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{15}, q_{16}, q_{17}$ 中至少有 $\lceil 7/2 \rceil = 4$枚棋子同色,不妨设它们是 $Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, Q_{14}$ (黑子).

$$\begin{array}{ccccccc} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & q_{15} & q_{16} & q_{17} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & q_{25} & q_{26} & q_{27} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} & q_{35} & q_{36} & q_{37} \end{array}$$

再考虑$q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{24}$,如果其中有2枚黑子,那么命题已成立.

$$
\begin{matrix}
Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & q_{15} & q_{16} & q_{17} \\
Q_{21} & q_{22} & q_{23} & Q_{24} & q_{25} & q_{26} & q_{27} \\
q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} & q_{35} & q_{36} & q_{37}
\end{matrix}
$$

若不然,$q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{24}$中至少有3枚白子,不妨设它们是$q_{21}, q_{22}, q_{23}$.

$$
\begin{matrix}
Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & q_{15} & q_{16} & q_{17} \\
q_{21} & q_{22} & q_{23} & Q_{24} & q_{25} & q_{26} & q_{27} \\
q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} & q_{35} & q_{36} & q_{37}
\end{matrix}
$$

再考虑$q_{31}, q_{32}, q_{33}$,这三枚棋子中必有$\lceil 3/2 \rceil = 2$枚棋子同色.

如果其中有两枚白子,那么与$q_{21}, q_{22}, q_{23}$中白组成长方形白色的四角.如果其中有两枚黑子,那么$Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, Q_{14}$中的黑子组成长方形黑色的四角.