关 系

李 辉

Table of Contents

关系的概念在现实世界中是普遍存在的.

如:兄弟关系,同学关系,同事关系,数的大小关系,集合间的包含关系等等.

集合论为刻画此类关系提供了一种数学模型:关系(Relation).

关系也是一个集合,以具有相应关系的对象组合为其元素.

序偶与笛卡尔乘积

定义:由两个具有给定次序的x和y所组成的序列称为序偶(Ordered Pair),记作$\langle x, y\rangle$.其中,x称为第1元素(分量),y称为第2元素(分量).

例:在笛卡尔坐标系中,2维平面上1个点的坐标$\langle x, y\rangle$就是1个序偶.

这里特别强调的是次序:

- 当$x \neq y$时, $\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$
- $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$的充分必要条件是: $x = u, y = v$

定义:由n个具有给定次序的个体
$a_1, a_2, \cdots, a_n$组成的序列,称为有序n元组.
记作:$\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$.
其中a_i称为第i个分量.

$$\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle = \langle b_1, b_2, \cdots, b_n \rangle$$

当且仅当

$$a_i = b_i \ (i = 1,2, \cdots, n).$$

定义:设A, B是任意两个集合,用A中元素为第1元,B中元素为第2元构成序偶.

这样的序偶组成的集合称为A和B的笛卡尔积(Cartesian Product).

符号化: $A \times B = \{\langle x, y \rangle | x \in A, y \in B\}$.

例:设$A=\{a,b\},B=\{0,1,2\},C=\Phi$,则

$$A\times B=\{\langle a,0\rangle,\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$$

$$B\times A=\{\langle 0,a\rangle,\langle 0,b\rangle,\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$$

$$A\times A=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$$

$$B\times B=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$$

$$A\times C=\Phi$$

$$C\times A=\Phi$$

显然,$A\times B\neq B\times A$,故笛卡儿乘积不满足交换律.

例: 花色 × 大小:

$$\{(\spadesuit,A),(\spadesuit,K),(\spadesuit,Q),(\spadesuit,J),(\spadesuit,10),\cdots\cdots,(\lozenge,6),(\lozenge,5),(\lozenge,4),(\lozenge,3),(\lozenge,2)\}.$$

由排列组合的知识可知:

如果$|A|=m,|B|=n$, 则$|A\times B|=mn$.

定义:设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是任意给定的n个集合,若有序n元组$\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$的第1元取自集合$A_1$,第2元取自$A_2$,…,第$n$元取自$A_n$,则由所有这样的有序$n$元组组成的集合称为集合$A_1,A_2,\cdots,A_n$的笛卡儿积,并用$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$表示.即

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle|a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

例:设$A=\{1\},B=\{a,b\},C=\{x,y\}$,则:

$$A\times B=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle\}$$

$$B\times C=\{\langle a,x\rangle,\langle b,x\rangle,\langle a,y\rangle,\langle b,y\rangle\}$$

$$(A\times B)\times C=\{\langle\langle 1,a\rangle,x\rangle,\langle\langle 1,a\rangle,y\rangle,\langle\langle 1,b\rangle,x\rangle,\langle\langle 1,b\rangle,y\rangle\}$$

$$A\times(B\times C)=\{\langle 1,\langle a,x\rangle\rangle,\langle 1,\langle a,y\rangle\rangle,\langle 1,\langle b,x\rangle\rangle,\langle 1,\langle b,y\rangle\rangle\}$$

显然,笛卡尔乘积不满足结合律.

下列分配律成立:

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
- $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
- $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

若$C \neq \Phi$,则

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (A \times C \subseteq B \times C) \Leftrightarrow (C \times A \subseteq C \times B)$$

设A, B, C, D是四个非空集合,则

$$A \times B \subseteq C \times D$$

当且仅当

$$A \subseteq C \wedge B \subseteq D$$

例:证明分配律 $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ 成立.

证明:对任意的$\langle x,y\rangle$, $\langle x,y\rangle\in A\times(B\cup C)$, 则:

$$x\in A\wedge y\in(B\cup C)$$
$$x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$$
$$(x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$$
$$\langle x,y\rangle\in A\times B\vee\langle x,y\rangle\in A\times C$$
$$\langle x,y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C)$$

所以$A\times(B\cup C)\subseteq(A\times B)\cup(A\times C)$

对任意的$\langle x,y\rangle$,$\langle x,y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C)$,

$$\langle x,y\rangle\in A\times B\vee\langle x,y\rangle\in A\times C$$
$$(x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$$
$$x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$$
$$x\in A\wedge y\in(B\cup C)$$
$$\langle x,y\rangle\in A\times(B\cup C)$$

所以$(A\times B)\cup(A\times C)\subseteq A\times(B\cup C)$

综上:

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C).$$

例:设A,B,C是三个任意集合且$C \neq \Phi$,则$A \subseteq B$当且仅当$A \times C \subseteq B \times C$.

证明:(必要性)设$A \subseteq B$,任取$x \in A$,则$x \in B$.

对任意的$\langle x,y \rangle$,若$\langle x,y \rangle \in A \times C$,则:

$$x \in A \wedge y \in C$$
$$x \in B \wedge y \in C$$
$$\langle x,y \rangle \in B \times C$$

所以

$$A \times C \subseteq B \times C.$$

(充分性)设$A \times C \subseteq B \times C$.

因$C \neq \Phi$,故存在$y \in C$. 任取$x \in A$,则

$$x \in A \wedge y \in C$$
$$\langle x,y \rangle \in A \times C$$
$$\langle x,y \rangle \in B \times C$$
$$x \in B \wedge y \in C$$
$$x \in B$$

所以$A \subseteq B$.

故 $A \subseteq B$当且仅当$A \times C \subseteq B \times C$.

关系及其表示

关系的定义

定义:如果一个集合的全部元素都是序偶,则称这个集合为一个二元关系,记作R.

例:设$A = \{2,3,4\}$,定义:

$$R_1 = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A \wedge x > y\}$$
$$R_2 = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A \wedge x \geq y\}$$

即:

$$R_1 = \{\langle 4,3\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 3,2\rangle\}$$

表示集合A上元素的大于关系.

$$R_2 = \{\langle 4,4\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,2\rangle\}$$

表示集合A上元素的大于等于关系.

定义:设A, B是任意两个集合,$A \times B$的任意一个子集所定义的二元关系R称为从集合A到集合B的一个二元关系.

当$A = B$时,称R为A上的二元关系.

例:设$A = \{1,2,3\}, B = \{a, b\}$,则:

$$A \times B = \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 3, b\rangle\}$$

$A \times B$的任一子集都是一个关系.如:

$$R_1 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle\}$$
$$R_2 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle\}$$

等都是从A到B的二元关系.

一般地,在n个集合上可以定义n元关系.

定义:设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是任意给定的集合,笛卡儿积$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$的任意一个子集$R$称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$上的一个$n$元关系.

当$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$时,称$R$为$A$上的$n$元关系.

例:设A, B是任意两个集合,若$|A| = m, |B| = n$,问从集合A到集合B共有多少个不同的二元关系?

解:由于笛卡尔积$A \times B$的任何一个子集都是从A到B的二元关系,而

$$|A \times B| = m \times n$$

$$|P(A \times B)| = 2^{m \times n}$$

所以,从集合A到集合B共有$2^{m \times n}$个不同的二元关系.

例:设$A=\{0,1\}, B=\{2\}$是任意两个集合,则

$$A\times B=\{\langle 0,2\rangle,\langle 1,2\rangle\}$$

所以$|A\times B|=2\times 1=2, |P(A\times B)|=2^2=4$.

从集合A到集合B共有4个不同的二元关系. 包括:

$$R_1=\Phi$$
$$R_2=\{\langle 0,2\rangle\}$$
$$R_3=\{\langle 1,2\rangle\}$$
$$R_4=\{\langle 0,2\rangle,\langle 1,2\rangle\}$$

例:设$A=\{a,b,c\}$,A上可定义多少个二元关系?

解:因为$|A|=3$,

所以$|A\times A|=3\times 3=9, |P(A\times A)|=2^9=512$.

A上可定义512个二元关系.

定义:设R是从集合A到集合B的一个二元关系。

则由R中所有序偶的第1元组成的集合称为R的定义域,记作domR(或$D(R)$).

由R中所有序偶的第2元组成的集合称为R的值域,记作ranR(或$V(R)$). 即:

$$D(R) = \{x|x \in A \wedge \langle x,y\rangle \in R\}$$
$$V(R) = \{y|y \in B \wedge \langle x,y\rangle \in R\}$$

显然,$D(R) \subseteq A, V(R) \subseteq B$.

例:设$A = \{1,2,3,4\}$,求A上的小于关系及相应的定义域和值域.

解:小于关系:

$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,4\rangle\},$$
$$D(R) = \{1,2,3\}, V(R) = \{2,3,4\}.$$

例:设$X = \{a,b,c,d,e,f\}$,X上的二元关系:

$$R = \{\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle, \langle e,f\rangle\},$$

求R的定义域和值域.

解:

$$D(R) = \{a,c,e\}, V(R) = \{b,d,f\}.$$

几种常见的二元关系:设A是任意集合,则:

- $R_A = \Phi$,称作A上的空关系
- $E_A = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A\}$,称作$A$上的全域关系
- $I_A = \{\langle x, x\rangle | x \in A\}$,称作$A$上的恒等关系
- $D_A = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A \wedge x|y\}$,称作$A$上的整除关系
- $L_A = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A \wedge x \leq y\}$,称作$A$上的小于等于关系
- $L_{A'} = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A \wedge x < y\}$,称作$A$上的小于关系

例:设$X = \{1,2,3\}$,则:

$$E_X = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$

$$I_X = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$

$$D_X = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$

$$L_X = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$

$$L_{X'} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle\}$$

关系矩阵

定义:设X,Y是两个有限集合,R是X到Y的二元关系,并且$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$,$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$,则R的关系矩阵M_R(或$M(R)$)是一个m行n列矩阵,矩阵中元素m_{ij}的值定义为:

$$m_{ij}=\begin{cases}0 & \langle x_i,y_j\rangle\notin R\\ 1 & \langle x_i,y_j\rangle\in R\end{cases}$$

$$1\le i\le m,1\le j\le n$$

例:设$A=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$,$B=\{y_1,y_2,y_3\}$,A到B的二元关系:

$$R=\{\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_1,y_3\rangle,\langle x_2,y_2\rangle,\langle x_2,y_3\rangle,\langle x_3,y_1\rangle,\langle x_4,y_1\rangle,\langle x_4,y_2\rangle\}$$

求R的关系矩阵M_R.

$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$$

例:设$A=\{x_1,x_1,x_3,x_4\}$,A上的二元关系:
$R=\{\langle x_1,x_1\rangle,\langle x_1,x_3\rangle,\langle x_2,x_3\rangle,\langle x_2,x_4\rangle,$
$\langle x_3,x_1\rangle,\langle x_3,x_2\rangle,\langle x_4,x_4\rangle\}$,
求R的关系矩阵M_R.

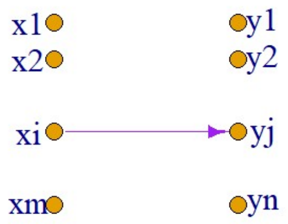
$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

关系图

设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$,$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$是两个有限集,R是X到Y的二元关系.

R的关系图G_R或$G(R)$是一个有向图,画法如下:

1. 对于X中的每个元素x_i,在平面上画1个小圆圈来表示;对应Y中的每个元素y_j,在平面上画1个小圆圈来表示.每个元素对应的小圆圈称为**结点**.
2. 若$\langle x_i,y_j\rangle\in R$,则画1条从结点$x_i$到结点$y_j$的**有向线段**.有向线段两端点中箭头指向的结点称为**终点**,另1个端点称为**始点**.

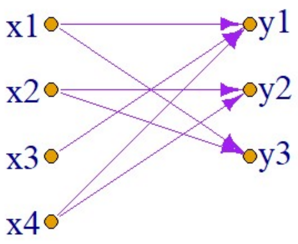


Relationship Graph G_R

例:设$A=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$,$B=\{y_1,y_2,y_3\}$,
A到B的二元关系:

$$R=\{\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_1,y_3\rangle,\langle x_2,y_2\rangle,\langle x_2,y_3\rangle,\langle x_3,y_1\rangle,\langle x_4,y_1\rangle,\langle x_4,y_2\rangle\},$$

求:R的关系图G_R.



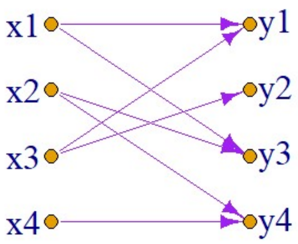
$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

G_R

例:设$A=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$,A上的二元关系:

$$R=\{\langle x_1,x_1\rangle,\langle x_1,x_3\rangle,\langle x_2,x_3\rangle,\langle x_2,x_4\rangle, \langle x_3,x_1\rangle,\langle x_3,x_2\rangle,\langle x_4,x_4\rangle\},$$

求R的关系图G_R.

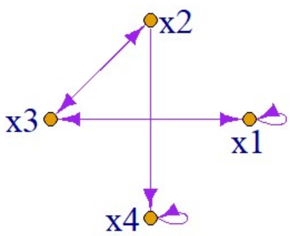


$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

G_R

$R = \{\langle x_1, x_1\rangle, \langle x_1, x_3\rangle, \langle x_2, x_3\rangle$
$, \langle x_2, x_4\rangle, \langle x_3, x_1\rangle, \langle x_3, x_2\rangle, \langle x_4, x_4\rangle\}$

由于$A = B$,因此关系图中也可以只画出A中的每个元素.



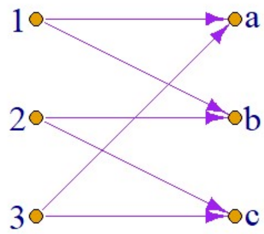
G_R

例:设 $X=\{1,2,3\}, Y=\{a,b,c\}$,
$R=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 2,c\rangle,$
$\langle 3,a\rangle,\langle 3,c\rangle\}$

求:R的关系矩阵和关系图.

解:R的关系矩阵为:

$$M_R=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

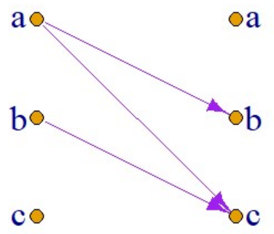


G_R

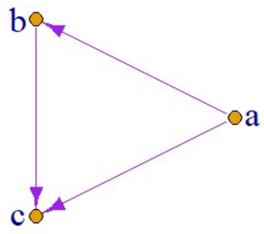
例:设集合$A=B=\{a,b,c\}$,从A到B的二元关系是:

$$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\},$$

画出R的关系图.



G_R



A=B

关系的运算

逆关系(关系的逆运算)

定义:设R是从集合X到集合Y的二元关系,

$$R = \{\langle a, b\rangle | a \in X \wedge b \in Y\},$$

则:

$$R^{-1} = \{\langle b, a\rangle | \langle a, b\rangle \in R\}$$

称为R的逆关系.

显然,R^{-1}为集合Y到X的二元关系.

例:设集合$X=\{1,2,3,4\}$, $Y=\{a,b,c\}$,R是从X到Y的二元关系,且:

$$R=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,c\rangle,\langle 4,c\rangle\}$$

求:R^{-1}

解:

$$R^{-1}=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,3\rangle,\langle c,4\rangle\}$$

定理:设R和S都是从集合X到集合Y的二元关系,$D(R)$和$V(R)$分别表示R的定义域和值域,$\sim R=(X\times Y)-R$,则下列各式成立:

- $D(R^{-1})=V(R)$
- $V(R^{-1})=D(R)$
- $(R^{-1})^{-1}=R$
- $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$
- $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$
- $(X\times Y)^{-1}=Y\times X$

- $(\Phi)^{-1} = \Phi$
- $R = S \Leftrightarrow R^{-1} = S^{-1}$
- $R \subseteq S \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$
- $(\sim R)^{-1} = \sim (R^{-1})$
- $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$

例: $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

证明:对于任意的$\langle y, x\rangle$,

若$\langle y, x\rangle \in (R \cap S)^{-1}$,则:

$$\langle x, y\rangle \in R \cap S$$
$$\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \in S$$
$$\langle y, x\rangle \in R^{-1} \wedge \langle y, x\rangle \in S^{-1}$$
$$\langle y, x\rangle \in R^{-1} \cap S^{-1}$$

所以

$$(R \cap S)^{-1} \subseteq R^{-1} \cap S^{-1}.$$

对于任意的$\langle y,x\rangle$,若$\langle y,x\rangle \in R^{-1}\cap S^{-1}$,则:

$$\langle y,x\rangle \in R^{-1} \wedge \langle y,x\rangle \in S^{-1}$$
$$\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle x,y\rangle \in S$$
$$\langle x,y\rangle \in R\cap S$$
$$\langle y,x\rangle \in (R\cap S)^{-1}$$

所以

$$R^{-1}\cap S^{-1} \subseteq (R\cap S)^{-1}$$

故

$$(R\cap S)^{-1} = R^{-1}\cap S^{-1}.$$

例: $(R-S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$

证明:

$$(R-S)^{-1} = (R\cap\sim S)^{-1}$$
$$= R^{-1}\cap(\sim S)^{-1}$$
$$= R^{-1}\cap\sim(S^{-1})$$
$$= R^{-1} - S^{-1}$$

所以

$$(R-S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}.$$

设

$$A=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\},$$
$$B=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\},$$

R是A到B的二元关系.

则R^{-1}是B到A的二元关系,且它们的关系矩阵有如下关系:

$$M_R=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$M_{R^{-1}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$M_{R^{-1}}=(M_R)^T$$

设

$$A=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\},$$
$$B=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\},$$

R是A到B的二元关系,则R^{-1}是B到A的二元关系,且它们的关系图有如下关系:

G_R $\qquad$ G_R^{-1}

例:设 $X=\{1,2,3\}, Y=\{a,b,c,d\}$,

$R=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,c\rangle,\langle 3,d\rangle\}$

求:R和R^{-1}的关系矩阵和关系图.

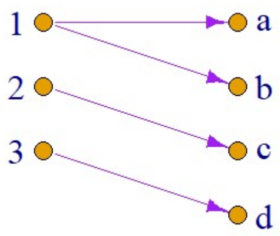
解:

$R^{-1}=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle,\langle d,3\rangle\}$

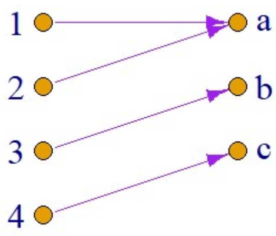
所以R和R^{-1}的关系矩阵和关系图为:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{R^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



G_R



G_R^{-1}

复合关系(关系的复合运算)

定义:设R是从集合X到集合Y的一个二元关系,S是从集合Y到集合Z的一个二元关系.

则R与S的复合关系(合成关系)$R\cdot S$是一个从X到Z的二元关系,表示为:

$$R\cdot S=\{\langle x,z\rangle|x\in X,z\in Z,\exists y\in Y,\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in S)\}$$

例:设集合

$X=\{1,2,3\},Y=\{a,b,c\},Z=\{\alpha,\beta,\gamma\},$

R是从X到Y的关系,S是从Y到Z的关系:

$$R=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 2,c\rangle\}$$
$$S=\{\langle a,\beta\rangle,\langle b,\alpha\rangle,\langle c,\gamma\rangle,\langle c,\beta\rangle\}$$

求:$R\cdot S$.

解:

$$R\cdot S=\{\langle 1,\beta\rangle,\langle 2,\alpha\rangle,\langle 2,\gamma\rangle,\langle 2,\beta\rangle\}.$$

例:设$X=\{0,1,2,3\}$,X上的二元关系:

$$R=\{\langle i,j\rangle | j=i+1\ or\ i=2j\},$$
$$T=\{\langle i,j\rangle | i=j+2\},$$

求$R\cdot T$和$T\cdot R$.

解:

$$R=\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 0,0\rangle,\langle 2,1\rangle\}$$
$$T=\{\langle 2,0\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$
$$R\cdot T=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,1\rangle\}$$
$$T\cdot R=\{\langle 2,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 3,2\rangle\}$$

例:设集合$X=\{1,2,3,4,5\}$,R,S,T均是X上的二元关系:

$$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 2,2\rangle\}$$
$$S=\{\langle 4,2\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$$
$$T=\{\langle 2,3\rangle,\langle 4,1\rangle\}$$

求:$R\cdot S, S\cdot R, (R\cdot S)\cdot T, R\cdot(S\cdot T)$

解:

$$R \cdot S = \{\langle 1,5\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,5\rangle\}$$
$$S \cdot R = \{\langle 4,2\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 1,4\rangle\}$$
$$(R \cdot S) \cdot T = \{\langle 3,3\rangle\}$$
$$S \cdot T = \{\langle 4,3\rangle\}, R \cdot (S \cdot T) = \{\langle 3,3\rangle\}$$

$$R \cdot S \neq S \cdot R, (R \cdot S) \cdot T = R \cdot (S \cdot T)$$

复合关系的关系图:

设:$A = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$,

$B = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$,

$C = \{z_1, z_2, \cdots, z_p\}$,

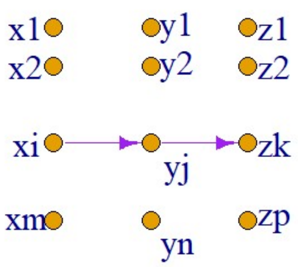
R是从集合A到集合B的二元关系,

S是从集合B到集合C的二元关系,

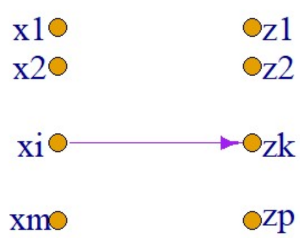
则复合关系$R \cdot S$的关系图画法如下:

对应A中的每一个元素$x_i(i=1,2,\cdots,m)$,在平面上画一个结点. 同样对应C中的每一个元素$z_k(k=1,2,\cdots,p)$,在平面上画一个结点. 得关系图$G_{R\cdot S}$的所有结点.

在$G_{R\cdot S}$中画出所有满足下面条件的有向边:若在G_R中有x_i到y_j的有向边,且在G_S中有y_j到z_k的有向边,则在$G_{R\cdot S}$中画一条从x_i到z_k的有向边.



G_R and G_S



$G_{R.S}$

例:设集合$X = \{1,2,3\}, Y = \{a, b, c\}, Z = \{\alpha, \beta, \gamma\}$,

R是从X到Y的关系.S是从Y到Z的关系.

$$R = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 2, c\rangle\}$$

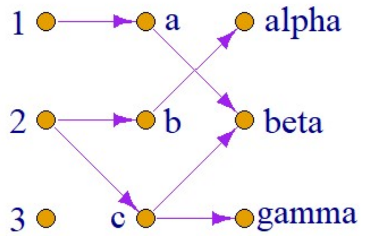
$$S = \{\langle a, \beta\rangle, \langle b, \alpha\rangle, \langle c, \beta\rangle\}, \langle c, \gamma\rangle$$

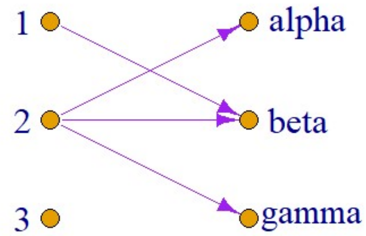
求:$G_{R\cdot S}$

解:

$$R \cdot S = \{\langle 1, \beta\rangle, \langle 2, \alpha\rangle, \langle 2, \beta\rangle, \langle 2, \gamma\rangle\}$$

$R \cdot S$复合关系$R \cdot S$的关系图:

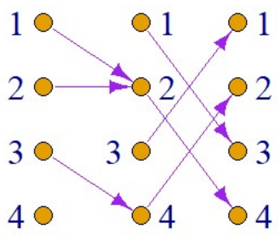




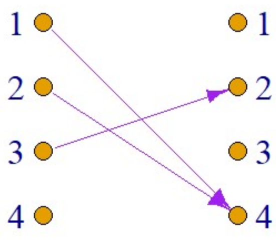
例:设集合$X=\{1,2,3,4\}$,R,T均是X上的二元关系:

$$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,4\rangle\}$$
$$T=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$$

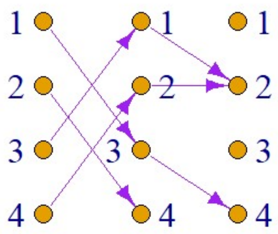
求:$G_{R\cdot T}$和$G_{T\cdot R}$.



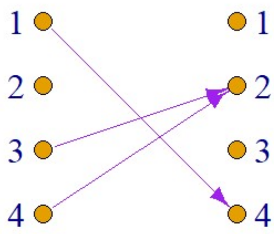
G_R and G_T



$G_{R.T}$



G_T and G_R



$G_{T.R}$

$$R \cdot T = \{\langle 1,4\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle\}$$

$$T \cdot R = \{\langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,2\rangle\}$$

$$T \cdot R \neq R \cdot T$$

复合关系的关系矩阵也可以通过矩阵的逻辑乘法来求得.

定理:复合关系的关系矩阵等于各关系矩阵的逻辑乘.

设: $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$, $B=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$, $C=\{z_1,z_2,\cdots,z_p\}$,

R是A到B的二元关系,S是B到C的二元关系,则:

$$M_{R\cdot S}=M_R\times M_S$$

设:A是$m\times n$矩阵:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

B是$n\times p$矩阵:

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

则:矩阵的逻辑乘运算$C = A \times B$定义为:

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}$$

这里,

$$c_{ik} = \bigvee_{j=1}^{n} (a_{ij} \wedge b_{jk})$$

a_{ij}、b_{jk}都只取0或1,运算是逻辑运算.

例:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例:设有集合$X = \{1,2,3,4,5\}$,X上的关系

$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,4\rangle\},$$

$$T = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,2\rangle\},$$

求$M_{R\cdot T}$和$M_{T\cdot R}$

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{R\cdot T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{T\cdot R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由$M_{R\cdot T}$和$M_{T\cdot R}$得到

$$R \cdot T = \{\langle 1,5\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,2\rangle\}$$

$$T \cdot R = \{\langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,2\rangle\}$$

复合运算的性质:

- 满足结合律:$(R \cdot S) \cdot P = R \cdot (S \cdot P)$
- 不满足交换律:$R \cdot S \neq S \cdot R$
- 复合运算对并运算满足分配律:
  $R \cdot (S \cup P) = (R \cdot S) \cup (R \cdot P)$
  $(S \cup P) \cdot R = (S \cdot R) \cup (P \cdot R)$
- 复合运算对交运算满足下面的包含关系
  $R \cdot (S \cap P) \subseteq (R \cdot S) \cap (R \cdot P)$
  $(S \cap P) \cdot R \subseteq (S \cdot R) \cap (P \cdot R)$
- 设R是X到Y的关系,I_x为X上的恒等关系,I_y为Y上的恒等关系,则 $I_x \cdot R = R \cdot I_y = R$.

证明结合律:

$$(R \cdot S) \cdot P = R \cdot (S \cdot P)$$

证:对任意的

$$\langle x, w \rangle \in (R \cdot S) \cdot P$$

必存在 $z \in Z$,使得 $\langle x, z \rangle \in R \cdot S$ 且 $\langle z, w \rangle \in P$

又必存在 $y \in Y$,使得 $\langle x, y \rangle \in R$ 及 $\langle y, z \rangle \in S$

由于$\langle y, z \rangle \in S, \langle z, w \rangle \in P$, 故$\langle y, w \rangle \in S \cdot P$.

由于$\langle x, y \rangle \in R$,$\langle y, w \rangle \in S \cdot P$,故$\langle x, w \rangle \in R \cdot (S \cdot P)$.

故:$R \cdot (S \cdot P) \subseteq (R \cdot S) \cdot P$

同理可证:$R \cdot (S \cdot P) \subseteq (R \cdot S) \cdot P$

因而$(R \cdot S) \cdot P = R \cdot (S \cdot P)$.

定理:设R是X到Y的二元关系,S是Y到Z的二元关系,则

$$(R\cdot S)^{-1}=S^{-1}\cdot R^{-1}$$

证明:对任意的$\langle z,x\rangle$,若$\langle z,x\rangle\in(R\cdot S)^{-1}$,

则:$\langle x,z\rangle\in(R\cdot S)$,

故存在$y\in Y$,使

$$\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in S$$

必有:

$$\langle y,x\rangle\in R^{-1}\wedge\langle z,y\rangle\in S^{-1}.$$

则:$\langle z,y\rangle\in S^{-1}\wedge\langle y,x\rangle\in R^{-1}$

故得:$\langle z,x\rangle\in S^{-1}\cdot R^{-1}$

所以:$(R\cdot S)^{-1}\subseteq S^{-1}\cdot R^{-1}$

同理:$S^{-1}\cdot R^{-1}\subseteq(R\cdot S)^{-1}$

从而$(R\cdot S)^{-1}=S^{-1}\cdot R^{-1}$.

幂运算

定义:设R是集合A上的二元关系,n为自然数,R的n次幂记作R^n,并且规定

- $R^0 = I_A$
- $R^{n+1} = R^n \cdot R$

由定义可以看出,对于集合A上任意一个关系R,都有$R^0 = I_A$,$R^1 = R$.

例:设$X = \{1,2,3\}$,X中的二元关系

$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}$$

求:R的各次幂.

解:

$$R^0 = I_x = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$
$$R^1 = R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}$$
$$R^2 = R \cdot R = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$

$$R^3 = R^2 \cdot R$$
$$= \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\} \cdot \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}$$
$$= \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\} = R$$
$$R^4 = R^3 \cdot R$$
$$= \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\} \cdot \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}$$
$$= \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\} = R^2$$
$$R = R^3 = \cdots = R^{2n+1}$$
$$= \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}$$
$$R^2 = R^4 = \cdots = R^{2n+2}$$
$$= \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$

例:设$A = \{a, b, c, d\}$,A上的二元关系:

$$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$$

求:R的各次幂.

解:

$$R^0 = I_A = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$$
$$R^1 = R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$$
$$R^2 = R \cdot R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, d\rangle\}$$
$$R^3 = R^2 \cdot R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle\}$$

$$R^4 = R^3 \cdot R = \{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,d\rangle\} = R^2$$
$$R^5 = R^4 \cdot R = \{\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\} = R^3$$
$$R^2 = R^{2n+2} = \{\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$$
$$R^3 = R^{2n+1} = \{\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$$

设R是集合X中的二元关系,$m,n \in N$,则:

$$R^m \cdot R^n = R^{m+n}$$
$$(R^m)^n = R^{m \times n}$$

关系的性质

定义:设R是集合X中的二元关系,若对于任意的$x \in X$,都有$\langle x, x\rangle \in R$,则称$R$是自反关系(自反的).

例:

集合间的包含"$\subseteq$"关系;

数之间的小于等于"$\leq$"关系;

直线间的"平行"关系等都是自反关系.

定义:设R是集合X中的二元关系,若对于任意的$x \in X$,都有$\langle x, x\rangle \notin R$,则称$R$是反自反关系(反自反的).

例:

集合间的真包含"$\subset$"关系;

数之间的小于"$<$"关系.

例:设 $X=\{1,2,3\}$,判断如下X上的二元关系是否是自反关系或反自反关系.这些二元关系是:
$E_x, I_x, D_x, L_x, L_{x'}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}$.
解:

$$E_X=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$I_x=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$D_X=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$L_X=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$L_{X'}=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}$$

$$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}$$

自反关系、反自反关系在关系图上的反映:

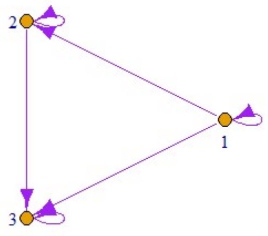
- 如果R是自反的,则其关系图中每个结点有环;
- 如果R是反自反的,则其关系图中每个结点无环;
- 如果R是即非自反又非反自反的,则其关系图中有些结点有环同时有些结点无环.

例:设$X=\{1,2,3\}$,X上二元关系如下,画出关系图.

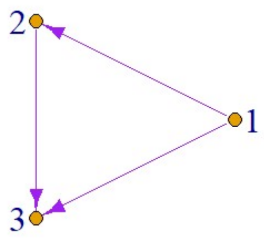
$$L_X=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$L'_X=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}$$

$$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}$$



L_x



$L_{x'}$

自反关系、反自反关系在关系矩阵上的反映:

- 如果R是自反的,则其关系矩阵的主对角线元素全为1;
- 如果R是反自反的,则其关系矩阵的主对角线元素全为0;
- 如果R是即非自反又非反自反的,则其关系矩阵的主对角线元素0和1同时存在.

例:设$X=\{1,2,3\}$,X上二元关系如下,求关系矩阵.

$$L_X=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$
$$L'_X=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}$$
$$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}$$

$$L_x=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ L_{x'}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

定理:设R是集合A中的二元关系,则:

- R是自反的当且仅当$I_A\subset R$
- R是反自反的当且仅当$R\cap I_A=\Phi$

定理:设R_1和R_2是集合A中的二元关系,若R_1,R_2是自反的,则:

- R_1^{-1}、$R_1\cup R_2$、$R_1\cap R_2$也是自反的.

证明:

设R_1是集合A中的自反关系.任意取$x\in A$,有$\langle x,x\rangle\in R_1$,则$\langle x,x\rangle\in R_1^{-1}$.故$R_1^{-1}$也是自反的.

设R_1和R_2是集合A中的自反关系.任意取$x \in A$,有$\langle x,x\rangle \in R_1$,$\langle x,x\rangle \in R_2$,则$\langle x,x\rangle \in R_1 \cup R_2$,故$R_1 \cup R_2$也是自反的.

设R_1和R_2是集合A中的自反关系.任意取$x \in A$,有$\langle x,x\rangle \in R_1$,$\langle x,x\rangle \in R_2$,则$\langle x,x\rangle \in R_1 \cap R_2$,故$R_1 \cap R_2$也是自反的.

定义:设R是集合X中的二元关系,若对任意的$x,y \in X$,只要有$\langle x,y\rangle \in R$,就必有$\langle y,x\rangle \in R$,则称R是**对称关系**.

例:

- 数之间的相等“=”关系;
- 两个三角形的“相似”关系.

定义:设R是集合X中的二元关系,若对任意的$x, y \in X$,当$\langle x, y\rangle \in R$且$\langle y, x\rangle \in R$时,必有$x = y$,则称$R$是反对称关系.

例:

- 集合间的包含"$\subseteq$"关系;
- 数之间的小于等于"$\leq$"关系.

例:设 $X = \{1,2,3\}$,判断如下X上的二元关系是否是对称关系或反对称关系.这些二元关系是: $E_x, I_x, D_x, L_x, L_{x'}, \Phi$,

$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}$$

解:

$$E_X = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$

$$I_x = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$

$$D_X = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$

$$L_X = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$

$$L'_X = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle\}$$

$$\Phi = \{\}$$

$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}$$

R既非对称关系，也非反对称关系.

例:设$X = \{1,2,3\}$,给出几个X上的对称关系和反对称关系.

解:

$$R_1 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}$$
$$R_2 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}$$

等都是X上的对称关系.

$$R_3 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}$$
$$R_4 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle\}$$
$$R_5 = \{\langle 3,2\rangle\}$$

等都是反对称关系.

$$R_6 = \{\langle 3,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle\}$$

这个关系既非对称又非反对称的.

而:

$$R_7 = \{\langle 2,2\rangle\}$$

既是对称的,又是反对称的.

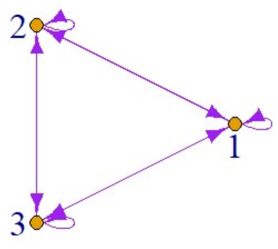
对称关系、反对称关系在关系图上的反映:

- 如果R是对称的,则其关系图中,若x_i到x_j有有向边,则x_j到x_i也有有向边;
- 如果R是反对称的,则其关系图中,若x_i到x_j有有向边,则x_j到x_i无有向边;
- 如果R是即非对称又非反对称的,则其关系图中,有些结点对之间有一对方向相反的边,有些结点对之间只有一条边,且两种情况同时存在.

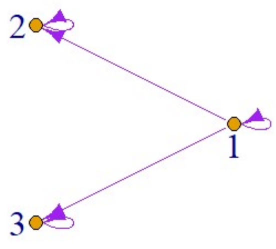
例:设$X=\{1,2,3\}$,X上二元关系如下,画出关系图.

二元关系为:

$E_X, D_X, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$



E_x



D_x

对称关系、反对称关系在关系矩阵上的反映:

- 如果R对称的,则其关系矩阵为对称矩阵;
- 如果R是反对称的,则其关系矩阵为反对称矩阵. 即:在M_R中,若$m_{ij}=1(i\neq j)$时,$m_{ji}=0$.

例:设$X=\{1,2,3\}$,X上二元关系如下,给出关系矩阵.

二元关系为:

$E_X, D_X, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

$$E_x=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\ D_x=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

定理:设R是集合A中的二元关系,则

- R是对称的当且仅当$R = R^{-1}$.
- R是反对称的当且仅当$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.

定理:设R_1和R_2是集合A中的二元关系,若R_1,R_2是对称的,则: R_1^{-1}、$R_1 \cup R_2$、$R_1 \cap R_2$也是对称的.

证明: 设R_1是集合A中的对称关系.

任取$\langle x, y\rangle$, 若$\langle x, y\rangle \in R_1^{-1}$,有$\langle y, x\rangle \in R_1$.

因为R_1是对称的,所以$\langle x, y\rangle \in R_1$.

故:$\langle y, x\rangle \in R_1^{-1}$,所以:$R_1^{-1}$也对称的.

设R_1、R_2是集合A中的对称关系.
任取$\langle x,y\rangle$,若$\langle x,y\rangle \in R_1 \cup R_2$,有:
$\langle x,y\rangle \in R_1$或 $\langle x,y\rangle \in R_2$.
因为R_1和R_2是对称的,所以:
$\langle y,x\rangle \in R_1$或$\langle y,x\rangle \in R_2$.
故:$\langle y,x\rangle \in R_1 \cup R_2$.
所以: $R_1 \cup R_2$是对称的.

设R_1、R_2是集合A中的对称关系.
任取$\langle x,y\rangle$,若$\langle x,y\rangle \in R_1 \cap R_2$,有:
$\langle x,y\rangle \in R_1, \langle x,y\rangle \in R_2$.
因为R_1和R_2是对称的,所以:
$\langle y,x\rangle \in R_1, \langle y,x\rangle \in R_2$.
故:$\langle y,x\rangle \in R_1 \cap R_2$.
所以: $R_1 \cap R_2$是对称的.

定义:设R是集合X中的二元关系,若对任意的$x, y, z \in X$, 当$\langle x, y\rangle \in R$且$\langle y, z\rangle \in R$时,有 $\langle x, z\rangle \in R$,

则称关系R在X上是传递关系.

例:

- 集合间的包含“⊆”关系
- 数之间的小于“<”关系
- 平面几何中三角形之间的“相似”关系

定理:设R是集合A中的二元关系,则R是传递的当且仅当$R \cdot R \subseteq R$.

例:$E_x, I_x, D_x, L_x, L_{x'}$都是传递关系.

因为:

$$E_X = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$

有:$E_X \cdot E_X = E_X$,$E_X \cdot E_X \subseteq E_X$. 故$E_x$是传递关系;

$$I_x = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$

有:$I_x \cdot I_x = I_x$, $I_x \cdot I_x \subseteq I_x$. 故$I_x$是传递关系.

$$D_x = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$
$$D_x \cdot D_x = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$

有:$D_x \cdot D_x = D_x$,$D_x \cdot D_x \subseteq D_x$, 故$D_x$是传递关系.

$$L_X = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$
$$L_X \cdot L_X$$
$$= \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$

有:$L_X \cdot L_X = L_X$,

$L_X \cdot L_X \subseteq L_X$, 故$L_X$是传递关系.

$$L_{X'} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle\}$$
$$L_{X'} \cdot L_{X'} = \{\langle 1,3\rangle\}$$

有:$L_{X'} \cdot L_{X'} \subseteq L_{X'}$, 故$L_{X'}$是传递关系.

例:$R_1=\{\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}$是传递关系.
因为
$R_1\cdot R_1=\{\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}\cdot\{\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}=\Phi$
显然$R_1\cdot R_1\subseteq R_1$
故R_1是传递关系.
$R_2=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$不是传递关系.
因为:$\langle 2,3\rangle\in R_2,\langle 3,2\rangle\in R_2$,但$\langle 2,2\rangle\in R_2$,
也即:$R_2\cdot R_2\nsubseteq R_2$.

例:设 $X=\{1,2,3\}$,给出几个X上的传递关系.
解:

$$R_1=\{\langle 1,1\rangle\}$$
$$R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}$$
$$R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}$$

都是X上的传递关系.
而

$$R_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$
$$R_5=\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

都不是传递关系.

传递关系在关系图上的反映:

如果R是传递的,则其关系图中,若x_i到x_k有有向边,且x_k到x_j有有向边,则x_i到x_j有有向边.

传递关系在关系矩阵上的反映:

如果R是传递的,则:

在矩阵$M_R = (m_{ij})_{n\times n}$和$M_R \cdot M_R = (b_{ij})_{n\times n}$中, 若

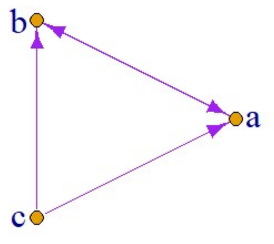
$$b_{ij} = 1,$$

则有

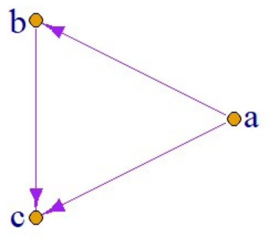
$$m_{ij} = 1,$$

其中,$i, j = 1,2,\cdots, n$.

例:设R_1和R_2是$X=\{a,b,c\}$上的二元关系,
其关系图如下,判断它们是否具有传递性.



G_{R1}



G_{R2}

解:R_1不是传递的,因为有$a \to b$和$b \to a$的有向线段,但没有$a \to a$的有向线段.

R_2是传递的,有$a \to b$和$b \to c$的有向线段,也有$a \to c$的有向线段,故R_2是传递的.

实际上,

$$R_2 = \{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\},$$
$$R_2 \cdot R_2 = \{\langle a,c\rangle\} \subseteq R_2.$$

也可通过关系矩阵判断.

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{R_1 \cdot R_1} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

可见$b_{11} = 1$,但 $m_{11} = 0$

$$M_{R_2}=\begin{pmatrix}0&1&\boxed{1}\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M_{R_2\cdot R_2}=\begin{pmatrix}0&0&\boxed{1}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$b_{13}=1$,$m_{13}=1$,所以是传递的.

定理:设R_1和R_2是集合A中的二元关系,若R_1,R_2是传递的,则R_1^{-1}、$R_1\cap R_2$也是传递的. 但$R_1\cup R_2$不一定是传递的.

证明: 设R_1是集合A中的传递关系.

任意$x,y,z\in A$,若$\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle\in R_1^{-1}$,则:

$\langle y,x\rangle,\langle z,y\rangle\in R_1$,即$\langle z,y\rangle,\langle y,x\rangle\in R_1$.

有$\langle z,x\rangle\in R_1$,故: $\langle x,z\rangle\in R_1^{-1}$.

所以R_1^{-1}是传递的.

设R_1,R_2是集合A中的传递关系.

任意$x,y,z \in A$,若$\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle \in R_1 \cap R_2$,
则:

$$\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle \in R_1,\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle \in R_2.$$

因为R_1,R_2是传递的,有

$$\langle x,z\rangle \in R_1,\langle x,z\rangle \in R_2.$$

故:$\langle x,z\rangle \in R_1 \cap R_2$.

所以$R_1 \cap R_2$是传递的.

例:设$A=\{a,b,c\}$,集合A上传递关系:

$$R_1=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\}$$
$$R_2=\{\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle b,a\rangle\}$$

显然:

$$R_1 \cup R_2 = \{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle b,a\rangle\}$$

不是传递的.

因为$\langle a,b\rangle \in R_1 \cup R_2$,$\langle b,a\rangle \in R_1 \cup R_2$,但
$\langle a,a\rangle \notin R_1 \cup R_2$

例:设$A=\{1,2,3,4\}$,A上的二元关系:

$$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$$

讨论R的性质(自反性,对称性和传递性).

解:R的关系矩阵如下:

$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

M_R的对角线均为1,所以R是自反的;

M_R是对称矩阵,所以R是对称的.

$$M_R=(m_{ij})_{4\times 4}=\begin{pmatrix}1&0&1&\boxed{0}\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R\cdot R}=(b_{ij})_{4\times 4}=\begin{pmatrix}1&0&1&\boxed{1}\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$b_{14}=1$,但$m_{14}=0$,所以R不是传递的.

关系的闭包

定义:设集合X,R是X中的二元关系,若有另一个二元关系R'满足:

- R'是自反的 (对称的、传递的)
- $R \subseteq R'$
- 对于任何一个自反的(对称的,传递的)二元关系R,如果有$R \subseteq R''$,就有$R' \subseteq R''$,则称R'为R的自反闭包(closures) (对称闭包,传递闭包),记作$r(R)(s(R), t(R))$.

定理:设R是集合X中的二元关系,I_x是X上的恒等关系,R^{-1}是R的逆关系,则

- $r(R) = R \cup I_x$
- $s(R) = R \cup R^{-1}$
- $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots = \cup_{i=1}^{\infty} R^i$

例:设$X=\{1,2,3,4\}$,R是X中的二元关系,并且: $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,4\rangle\}$

求:R的自反闭包、对称闭包和传递闭包.

解:自反闭包:

$$\begin{aligned} r(R) &= R \cup I_x \\ &= \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,4\rangle\} \\ &\cup \{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\} \\ &= \{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle, \\ &\quad \langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,4\rangle\} \end{aligned}$$

对称闭包:

$$\begin{aligned} s(R) &= R \cup R^{-1} \\ &= \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,4\rangle\} \\ &\cup \{\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle\} \\ &= \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle\} \end{aligned}$$

传递闭包:

$$t(R) = R \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 \cup \cdots$$

因为

$$R^2 = R \cdot R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle\}$$
$$R^3 = R^2 \cdot R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,3\rangle\}$$
$$R^4 = R^3 \cdot R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle\}$$

所以

$$t(R) = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,4\rangle\}$$

定理:设R是集合X中的二元关系,则

(1)$R = r(R)$,当且仅当R是自反的;

(2)$R = s(R)$,当且仅当R是对称的;

(3)$R = t(R)$,当且仅当R是可传递的.

引理:若R和S都是对称的,则$R \cup S$也是对称的.

引理:若R是对称的,则R^n也是对称的,n为任意正整数.

定理:设R是集合X中的二元关系,则

(1)若R是自反的,则$s(R)$和$t(R)$也是自反的;

(2)若R是对称的,则$r(R)$和$t(R)$也是对称的;

(3)若R是可传递的,则$r(R)$也是传递的.

定理:设R,S都是集合X上的二元关系,并且$R \subseteq S$,则:

(1)$r(R) \subseteq r(S)$

(2)$s(R) \subseteq s(S)$

(3)$t(R) \subseteq t(S)$

等价关系

定义:设R是定义在集合X上的二元关系,若R是自反的、对称的和传递的,则称R是等价关系(Equivalence Relation).

例:设$X=\{1,2,3,4\}$,X上的关系:

$$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,4\rangle\}$$

证明R是X上的等价关系.

证明:R的关系矩阵如下:

$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

显然,M_R的主对角线均为1,故R是自反的.

M_R是对称矩阵,故R是对称的.

$$M_{R\cdot R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_R$$

故R是传递的.
所以R是等价关系.

例:设$X = \{1,2,3\}$,X上的关系:
$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}$.
R是等价关系.

例:设$X = \{1,2,3\}$, E_X、I_x是X上的等价关系.

定义:设整数集合Z,R是Z上的一个二元关系,m是某个正整数,若

$$R = \{\langle x, y\rangle | x, y \in Z \wedge m|(x-y)\}$$

则称R是模m等价关系,也叫**同余关系**(Congruence Relation),记作:

$$x \equiv y(mod\, m).$$

同余关系是等价关系,但等价关系不都是同余关系.

例:设$X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$,R是X上的模3同余关系:

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in X \wedge 3|(x-y)\}.$$

验证R是等价关系.

解:

- 对于任意的$x \in X$,都有$3|(x-x)$,即$\langle x, x\rangle \in R$,故$R$是自反的;
- 对于任意的$x, y \in X$,若$\langle x, y\rangle \in R$,即$3|(x-y)$,则必有$3|(y-x)$,即$\langle y, x\rangle \in R$,故$R$是对称的;

- 对于任意的$x, y, z \in X$,若$\langle x, y\rangle \in R$,$\langle y, z\rangle \in R$, 即$3|(x-y)$,$3|(y-z)$,则$3|(x-y)+(y-z)$,即$3|(x-z)$,故$\langle x, z\rangle \in R$,所以,$R$是传递的.

因此,R是等价关系.

定义:设R是集合X中的等价关系,对于任意的$x \in X$,

$$[x]_R = \{y \mid y \in X \wedge \langle x, y\rangle \in R\}$$

称为是由x生成的R等价类(Equivalence Class).

x称为$[x]_R$的一个代表(Representative).

例:设$X=\{1,2,3,4\}$,X上的等价关系:

$$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\\ \langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,4\rangle\}$$

X中各元素的等价类是:

$$[1]_R=\{1,4\},[2]_R=\{2,3\},\\ [3]_R=\{2,3\},[4]_R=\{1,4\}.$$

例:设$X=\{1,2,3\}$,X上的等价关系:

$$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$$

求X中各元素的等价类.

解:

$$[1]_R=\{1\},[2]_R=\{2,3\},[3]_R=\{2,3\}$$

定理:设R是非空集合X上的一个等价关系,
则对于任意的$a,b \in X$:

- $[a]_R \neq \Phi$ 且$[a]_R \subseteq X$
- $\langle a,b\rangle \in R$ 当且仅当 $[a]_R = [b]_R$
- $\langle a,b\rangle \notin R$ 当且仅当 $[a]_R \cap [b]_R = \Phi$
- $\cup_{x \in X} [x]_R = X$

定义:设R是非空集合X上的一个等价关系,
则以R的所有等价类为元素组成的集合称
为X对R的商集. 记作X/R.

即:

$$X/R = \{[a]_R | a \in X\}$$

X/R的基数称为R的秩.

例:设$X=\{a,b,c,d\}$,R是X中的等价关系,且:

$$R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\\ \langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$$

求商集X/R及R的秩.

解:因为$[a]_R=\{a,b\}=[b]_R$, $[c]_R=\{c,d\}=[d]_R$

所以: $X/R=\{\{a,b\},\{c,d\}\}$.

R的秩=2.

例:设N为自然数集合,R为N中的模3同余关系,即:

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in N \wedge 3|(x-y)\}$$

求N/R及R的秩.

解:

$$[0]_R=\{0,3,6,9,\cdots\}=[3]_R=[6]_R=[9]_R=\cdots$$

$$[1]_R=\{1,4,7,10,\cdots\}=[4]_R=[7]_R=[10]_R=\cdots$$

$$[2]_R=\{2,5,8,11,\cdots\}=[5]_R=[8]_R=[11]_R=\cdots$$

故:$N/R=\{[0]_R,[1]_R,[2]_R\}$.R的秩=3.

例:非空集合A上的全域关系E_A是A上的等价关系,求A中任一元素x的等价类.

解:对于任意的$x \in A$,有

$$[x]_R = \{ y \mid y \in A \land \langle x, y \rangle \in E_A \} = A$$

故:$A/E_A = \{A\}$

例:非空集合A上的恒等关系I_A是A上的等价关系,求A中任一元素x的等价类.

解:对于任意的$x \in A$,有

$$[x]_R = \{ y \mid y \in A \land \langle x, y \rangle \in I_A \} = \{x\}$$

故:$A/I_A = \{\{x\} | x \in A\}$

定义:对于非空集S,若有集合族$\pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$,使得:

- $S_i \neq \Phi(i = 1,2,\cdots,n)$
- $S_i \subseteq S(i = 1,2,\cdots,n)$
- $S_i \cap S_j = \Phi(i,j = 1,2,\cdots,n)$
- $S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_n = S$

则称π是集合S的一个划分.

π中的元素S_i称为划分块.

例:设集合$S = \{a,b,c\}$,对集合族:

$$\pi_1 = \{\{a,b\},\{b,c\}\}$$
$$\pi_2 = \{\{a\},\{b,c\}\}$$
$$\pi_3 = \{\{a\},\{a,b\}\}$$
$$\pi_4 = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$$
$$\pi_5 = \{\{a,b,c\}\}$$

显然,π_2,π_4,π_5都是S的划分,π_1和π_3都不是.

定义:设S是一个非空集合,$\pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$是$S$的一个划分.

若$n = |S|$,则称π是S的最大划分.

若$n = 1$,则称π是S的最小划分.

例:上例$S = \{a, b, c\}$的三个划分:

$$\pi_2 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$$
$$\pi_4 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$
$$\pi_5 = \{\{a, b, c\}\}$$

π_4是S的最大划分,π_5是S的最小划分.

定义:设$A = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$, $B = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$是非空集合$S$的两个划分:

- 若对任意的$B_i \in B$,存在一个$A_j \in A$,使得:$B_i \subseteq A_j$,则称B是A的**加细(细分)**;
- 若B是A的加细且$B \neq A$,则称B是A的**真加细**.

例:上例$S = \{a, b, c\}$的三个划分:

$\pi_2 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$,$\pi_4 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$,$\pi_5 = \{\{a, b, c\}\}$

π_4是π_2的真加细,π_2是π_5的真加细.

定理:若R是非空集合X中的一个等价关系,则商集X/R是X的一个划分.

我们把这种划分称为**由等价关系R诱导出来的划分**,记为X_R.

例:设$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,R为X上的模3同余关系,即:

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in X \wedge 3|(x-y)\}$$

求:

- X中个元素的等价类;
- 商集X/R
- 由等价关系R诱导出的划分X_R.

解:

等价类:

$$[1]_R = \{1,4,7\} = [4]_R = [7]_R$$
$$[2]_R = \{2,5,8\} = [5]_R = [8]_R$$
$$[3]_R = \{3,6\} = [6]_R$$

商集:

$$X/R = \{[1]_R, [2]_R, [3]_R\}$$
$$= \{\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\}\}$$

由等价关系R诱导出的划分:

$$X_R = \{[1]_R, [2]_R, [3]_R\}$$
$$= \{\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\}\}$$

定理:集合A中的一个划分π,确定了A中的一个等价关系,称为**由划分π诱导出的等价关系**,记为R_π.

由划分$\pi = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$诱导的等价关系是:

$$R_\pi = A_1 \times A_1 \cup A_2 \times A_2 \cup \cdots \cup A_n \times A_n$$

例:设$A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,A的一个划分

$$C=\{\{1,4,7\},\{2,5\},\{3,6\}\}$$

试给出由划分C所诱导的等价关系R_C.

解:

$$R_C=\{1,4,7\}\times\{1,4,7\}\cup\{2,5\}\times\{2,5\}\cup\{3,6\}\times\{3,6\}$$

$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,7\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 4,7\rangle,\langle 7,1\rangle,$
$\langle 7,4\rangle,\langle 7,7\rangle\langle 2,2\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 5,2\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 6,3\rangle,\langle 6,6\rangle\}$

R_C是由划分C所诱导的等价关系.

等价关系和划分是一一对应的.

集合A上不同的等价关系R确定不同的商集A/R,进而对应不同的划分A_R.

反之,任给集合A的一个划分π,就可确定A上的一个等价关系R_π.

不同的划分确定不同的等价关系.

这些划分与集合A上等价关系一一对应,集合A上的所有等价关系为:

$$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$
$$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$
$$R_3=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$
$$R_4=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$
$$R_5=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

定理:设R_1和R_2是等价关系,则$R_1\cap R_2$也是等价关系.

证明: 因为R_1和R_2是等价关系,则R_1和R_2是自反的、对称的和传递的.

所以$R_1\cap R_2$也是自反的、对称的和传递的,故$R_1\cap R_2$是等价关系.

相容关系

定义:设R是X中的二元关系,若R是自反的、对称的,则称R是相容关系(Tolerance Relation, or Dependency Relation).

若$\langle x, y\rangle \in R$,称$x$和$y$是相容的.

例:设$X = \{1,2,3,4\}$,R是X上的二元关系:

$$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$$

容易验证R是自反的、对称的,故R是相容关系.

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

定义:设R是集合X中的一个相容关系,$A \subseteq X$, 若A中任意两个元素都是相容的,则称A是由R产生的**相容类**.

更进一步,若$(X - A)$中没有一个元素能与A中的所有元素相容,则称A为**最大相容类**(极大相容类).

在前例中:

$$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$$

$\{1,4\}$、$\{2,3,4\}$、$\{2,4\}$、$\{3,4\}$、$\{1\}$等是相容类;

其中$\{1,4\}$, $\{2,3,4\}$等是最大相容类.

对于X上的相容关系R,可以从它的关系图中得到R的最大相容类.

对相容关系的关系图进行简化.

由于相容关系是自反的和对称的,所以它的关系图中每个结点都有环,并且如果两个结点之间有边,一定是双向边.

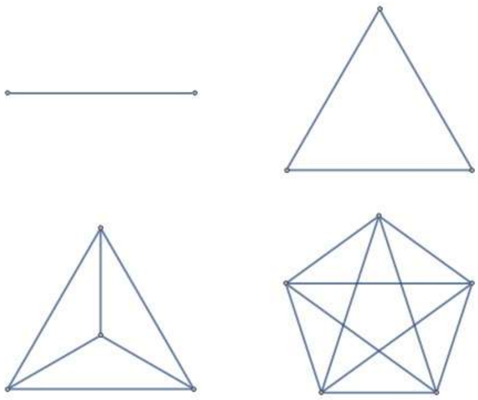
简化相容关系的关系图:

(1)去掉图中的所有环;

(2)用一条连接两点的线段代替两点之间的双向边;

在一个简化的相容关系的关系图中,含有n个结点的最大相容类的任何一个结点与这个类中的其他$n-1$个几点都是有边相连.

而类外中的任何结点不可能与类的所有结点相连,我们把这n个结点及其关联的边构成的图称为G的极大完全子图.



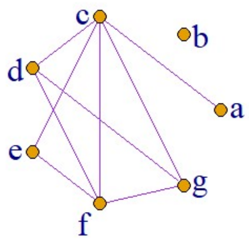
n=2,3,4,5时的极大完全子图

可以从相容关系的简化关系图中很方便地求得最大相容类.

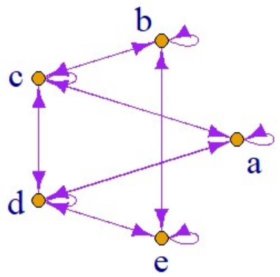
在简化图中:

- 一个极大完全子图的结点集合是一个最大相容类.
- 一个孤立结点是一个最大相容类;
- 不在极大完全子图中的边,其两个端点的集合,也是一个最大相容类.

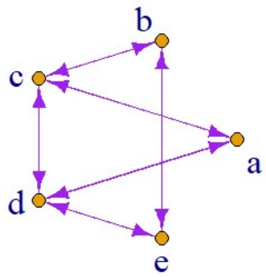
例:给定一个相容关系,求最大相容类.



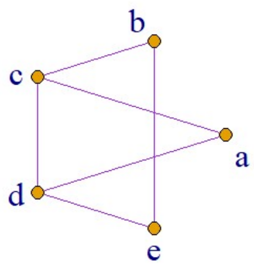
{b},{a,c},{c,e,f},{c,d,f,g}



(1)



(2)



(3): {a,d,c},{e,d},{b,e},{b,c}

设R是集合X上相容关系,X关于R的最大相容类具有以下特点:

(1)每个最大相容类都是X的非空子集;

(2)不同的最大相容类是可以相交的;

(3)所有的最大相容类的并集等于X.

定义:任意给定一个非空集合S,若有集合族$\pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$,使得:

(1)$S_i \neq \Phi (i = 1,2,\cdots,n)$

(2)$S_i \subseteq S (i = 1,2,\cdots,n)$

(3)$S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n = S$

则称集合族π是集合S的一个**覆盖**,S_i称为**覆盖块**.

注意与划分和划分块比较.

定义:对于非空集S,若有集合族$\pi=\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$,使得:

(1)$S_i\neq\Phi$

(2)$S_i\subseteq S$

(3)$S_i\cap S_j=\Phi$

(4)$S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n=S$

则称π是集合S的一个划分.π中的元素S_i称为划分块.

例:设集合$S=\{a,b,c\}$,若

$$\pi_1=\{\{a\},\{a,b\},\{b,c\}\}$$
$$\pi_2=\{\{a,c\},\{b,c\}\}$$
$$\pi_3=\{\{a,b,c\}\}$$
$$\pi_4=\{\{a\},\{a,b\},\{b\}\}$$

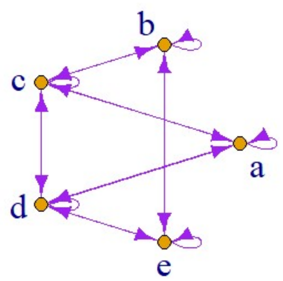
则π_1、π_2、π_3都是S的覆盖,π_4不是.

定义:设$S=\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$是集合A的一个覆盖,若对任意的$S_i\in S$,不存在S中其它元素S_j,使得$S_i\subseteq S_j$,则称S是A的一个完全覆盖.

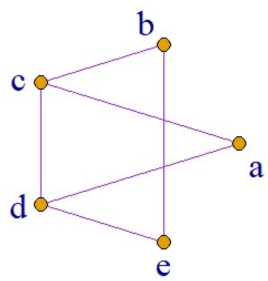
例:设集合$S=\{a,b,c\}$,若

$$\pi_1=\{\{a\},\{a,b\},\{b,c\}\}$$
$$\pi_2=\{\{a,c\},\{b,c\}\}$$
$$\pi_3=\{\{a,b,c\}\}$$

则π_1、π_2、π_3都是S的覆盖. π_2,π_3都是S的完全覆盖.



(1) R



(3): {a,d,c},{e,d},{b,e},{b,c}

定理:若R是集合X上的相容关系,则X关于R的所有最大相容类的集合是X的一个覆盖(完全覆盖),称为由相容关系R诱导出的覆盖(完全覆盖),记为X_R.

定理:给定集合A的一个覆盖$\pi = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$,则由覆盖$\pi$确定的关系$R = A_1 \times A_1 \cup A_2 \times A_2 \cup \cdots \cup A_n \times A_n$是一个相容关系.

例:设$X = \{1,2,3,4\}$,X_1和X_2是X的两个不同的覆盖:

$$X_1 = \{\{1\}, \{2,3,4\}\}$$
$$X_2 = \{\{1\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$$

试给出分别由X_1和X_2所确定的相容关系.

解: 分别由X_1和X_2所确定的相容关系:

$$R_1 = \{1\} \times \{1\} \cup \{2,3,4\} \times \{2,3,4\}$$
$$= \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle,$$
$$\langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$$

$$X_2 = \{\{1\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$$
$$R_2 = \{1\}\times\{1\}\cup\{2,3\}\times\{2,3\}\cup$$
$$\{2,4\}\times\{2,4\}\cup\{3,4\}\times\{3,4\}$$
$$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle,$$
$$\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$$
$$R_1 = \{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle,$$
$$\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$$

这个例子说明,不同的覆盖可能产生相同的相容关系.

例:设$X=\{216,243,375,455,648\}$,相容关系:

$R=\{\langle x,y\rangle | x,y\in X\wedge x,y$有相同数字$\}$

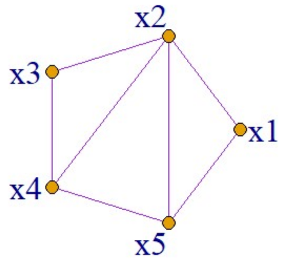
求最大相容类及由此产生的X的完全覆盖.

解:用x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 分别代表:

216, 243, 375, 455, 648

则:$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$

$$x_1 = 216, x_2 = 243, x_3 = 375,$$
$$x_4 = 455, x_5 = 648$$
$$R = \{\langle x_1, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \langle x_1, x_5\rangle,$$
$$\langle x_2, x_1\rangle, \langle x_2, x_2\rangle, \langle x_2, x_3\rangle, \langle x_2, x_4\rangle, \langle x_2, x_5\rangle,$$
$$\langle x_3, x_2\rangle, \langle x_3, x_3\rangle, \langle x_3, x_4\rangle,$$
$$\langle x_4, x_2\rangle, \langle x_4, x_3\rangle, \langle x_4, x_4\rangle, \langle x_4, x_5\rangle,$$
$$\langle x_5, x_1\rangle, \langle x_5, x_2\rangle, \langle x_5, x_4\rangle, \langle x_5, x_5\rangle\}$$



G_R

最大相容类为:

$$A_1 = \{x_1, x_2, x_5\}, A_2 = \{x_2, x_3, x_4\},$$
$$A_3 = \{x_2, x_4, x_5\}.$$

X的一个完全覆盖:

$$\pi = \{A_1, A_2, A_3\}$$
$$= \{\{x_1, x_2, x_5\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_2, x_4, x_5\}\}.$$

偏序关系

定义:设R是集合X上的二元关系,若R是自反、反对称和传递的,则称R是一个偏序关系.

通常用"$\leq$"表示偏序关系,并把序偶$\langle X, \leq\rangle$称为偏序集合.

若$\langle x, y\rangle \in R$,写作$x \leq y$,读作$x$小于等于$y$.

例:

- 实数集合中的小于等于关系.
- 整数集合中的整除关系.
- 集合之间的包含关系.

例:自然数N上的小于等于关系R是偏序关系.

证明:

$$R=\{\langle a,b\rangle | a,b\in N\wedge a\le b\}$$

- 对任意的$a\in N$,有$a\le a$,故$\langle a,a\rangle\in R$,R是自反的;
- 对任意的$a,b\in N$,若$\langle a,b\rangle\in R$,且$\langle b,a\rangle\in R$,即$a\le b,b\le a$,有$a=b$,故R是反对称的;
- 对任意的$a,b,c\in N$,若$\langle a,b\rangle\in R$,$\langle b,c\rangle\in R$,即$a\le b,b\le c$,有$a\le c$,即$\langle a,c\rangle\in R$,故R是传递的;

故R是偏序关系.

$$\begin{gathered}\le\,=R\\ =\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\cdots,\\ \langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\cdots,\\ \langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 3,5\rangle,\cdots,\\ \cdots\cdots\}\end{gathered}$$

例:给定集合$A=\{2,3,6,8\}$:

$$R=\{\langle a,b\rangle | a,b\in A\wedge a|b\}$$

问R是否是偏序关系.

证明:

$$R=\{\langle 2,2\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,6\rangle,\\ \langle 6,6\rangle,\langle 8,8\rangle\}$$

$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R\cdot R}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

显然,R是自反、反对称和传递的,故R是偏序关系.

定义:设R是集合X上的二元关系,若R是反自反的和传递的,则称R是一个**严格偏序关系(拟序关系)**.

通常用“$<$”表示严格偏序关系,并把序偶$\langle X,<\rangle$称为严格偏序集合.

若$\langle x,y\rangle \in R$,写做$x<y$,读作x小于y.

例:实数集合中的“小于关系”是严格偏序关系.因为它是反自反和传递的.

例:自然数N上的小于关系R是严格偏序关系.

证明:

$$R=\{\langle a,b\rangle | a,b\in N \wedge a<b\}$$

- 对任意的$a\in N$,有$a \nless a$,故$\langle a,a\rangle \notin R$,$R$是反自反的;
- 对任意的$a,b,c\in N$,若$\langle a,b\rangle \in R$,$\langle b,c\rangle \in R$,即$a<b$,$b<c$,有$a<c$,即$\langle a,c\rangle \in R$,故R是传递的.

故R是严格偏序关系.

$$
\begin{aligned}
<= R \\
= \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \cdots, \\
\langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,5\rangle, \cdots, \\
\langle 3,4\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 3,6\rangle, \cdots, \}
\end{aligned}
$$

定理:若R是集合A上的严格偏序关系,则R是反对称的.

证明:反证法.

假设R不是反对称的,即存在$x, y \in A, \langle x, y\rangle \in R, \langle y, x\rangle \in R$,且$x \neq y$.则由$R$的传递性,有$\langle x, x\rangle \in R$.这与$R$是反自反的相矛盾.故$R$是反对称的.

偏序关系:自反、反对称、传递

严格偏序关系:反自反、反对称、传递

定义:设$\langle A,\leq\rangle$为偏序集,对于任意的$x,y\in A$,如果$x\leq y$或$y\leq x$,则称x和y是可比的.

定义:在偏序集$\langle A,\leq\rangle$中,对于任意的$x,y\in A$,如果$x\leq y,x\neq y$,而且不存在任何其它元素$z\in A$,使得$x\leq z$且$z\leq y$,则称y覆盖x.

并记: $COV_A=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge y$覆盖$x\}$为覆盖集.

例:设$\langle A,\leq\rangle$为偏序集,其中A是正整数12的因子集合,并设$\leq$为整除关系,求COV_A.

解:$A=\{1,2,3,4,6,12\}$.

$\leq=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 1,12\rangle,\langle 2,4\rangle,$
$\langle 2,6\rangle,\langle 2,12\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 3,12\rangle,\langle 4,12\rangle,\langle 6,12\rangle,$
$\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 12,12\rangle\}$

覆盖集为:

$$COV_A=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 4,12\rangle,\langle 6,12\rangle\}$$

下面用哈斯图来描述一个偏序关系,这是一种简化的关系图.

方法一:对偏序集合$\langle A, \leq \rangle$,则先求出COV_A集合,然后按如下方法构造哈斯图:

- 用小圆点表示A中的元素;
- 若$\langle x, y \rangle \in COV_A$,即$y$覆盖$x$,则将$y$画在$x$的上层,并在$x, y$之间用一条线段相连;
- 若x, y之间不可比,则把x, y画在同一层上.

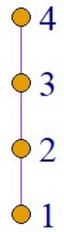
特别注意:若有$x \leq y, x \neq y$,但y不覆盖x,则x和y之间不能有连线.

例:设$\langle A, \leq \rangle$为偏序集,其中$A = \{1,2,3,4\}$,设$\leq$为小于等于关系,求其哈斯图.

解:

$\leq = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,4 \rangle\}$

$COV_A = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle\}$



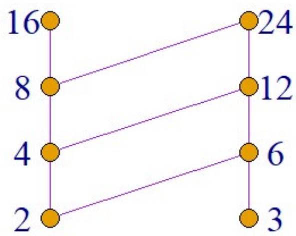
例:设$X=\{2,3,4,6,8,12,16,24\}$,

整除关系:

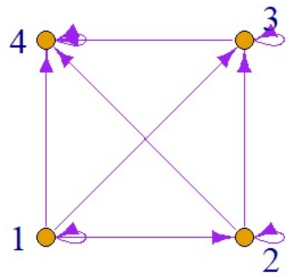
$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in X\wedge x|y\in X\}$

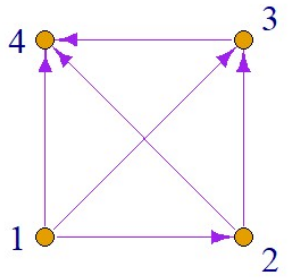
则

$$COV_X=\{\langle 2,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 4,8\rangle,\langle 4,12\rangle,\langle 8,16\rangle,\langle 8,24\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 6,12\rangle,\langle 12,24\rangle\}$$

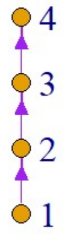


方法二:通过关系图的简化得到哈斯图.


4
3
1
2


4
3
1
2


4
3
2
1

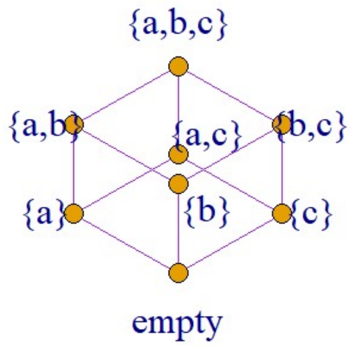

4
3
2
1

例:设$A=\{a,b,c\}$,求$\langle P(A),\subseteq\rangle$的哈斯图.

解:因为

$$P(A)=\{\Phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

$$COV_P(A)=\{\langle\Phi,\{a\}\rangle,\langle\Phi,\{b\}\rangle,\langle\Phi,\{c\}\rangle,\langle\{a\},\{a,b\}\rangle,\langle\{a\},\{a,b\}\rangle,\langle\{b\},\{a,b\}\rangle,\langle\{b\},\{b,c\}\rangle,\langle\{c\},\{a,c\}\rangle,\langle\{c\},\{b,c\}\rangle,\langle\{a,b\},\{a,b,c\}\rangle,\langle\{a,c\},\{a,b,c\}\rangle,\langle\{b,c\},\{a,b,c\}\rangle\}$$



定义:设$\langle A, \leq \rangle$是一个偏序集,$Q \subseteq A$.

若存在一个元素$a \in Q$,使得:

(1)对任意的$x \in Q$,都有$a \leq x$,则称a是Q的最小元.

(2)对任意的$x \in Q$,都有$x \leq a$,则称a是Q的最大元.

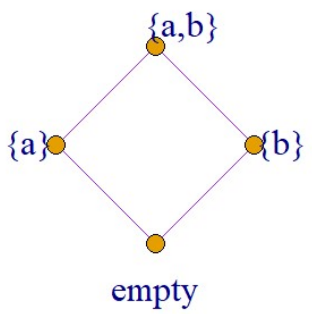
定义:设$\langle A, \leq \rangle$是一个偏序集,$Q \subseteq A$. 若存在一个元素$a \in Q$,使得:

(1)Q中无任何其它元素x能满足$x \leq a$,则称a是Q的极小元.

(2)Q中无任何其它元素x能满足$a \leq x$,则称a是Q的极大元.

例:设$A=\{a,b\}$,在偏序集$\langle P(A),\subseteq\rangle$中,求$\{\Phi,\{a\}\},\{\{a\},\{b\}\},P(A)$的最大元和最小元.

解:$P(A)=\{\Phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, 画出$\subseteq$的哈斯图.

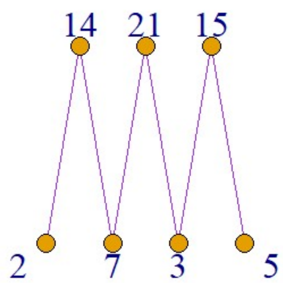


从哈斯图可以看出:

- $\{\Phi,\{a\}\}$的最大元是{a},最小元是Φ.
- $\{\{a\},\{b\}\}$的没有最大元和最小元.
- $P(A)$的最大元是$\{\{a\},\{b\}\}$,最小元是Φ.

例:设$A = \{2,3,5,7,14,15,21\}$,其上偏序关系
$R = \{\langle 2,14\rangle, \langle 3,15\rangle, \langle 3,21\rangle, \langle 5,15\rangle, \langle 7,14\rangle, \langle 7,21\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 7,7\rangle, \langle 14,14\rangle, \langle 15,15\rangle, \langle 21,21\rangle\}$

求:$B = \{2,7,3,21,14\}$的极大元、极小元、最大元和最小元.



$B = \{2,7,3,21,14\}$中
- 极小元: {2,7,3}
- 极大元: {14,21}
- 无最小元和最大元.

例:设$A=\{a,b,c\}$,在偏序集$\langle P(A),\subseteq\rangle$中,

$P(A)=\{\Phi,\{a\},\{b\},\{c\},$
$\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$,

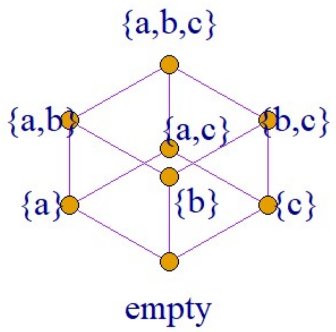
$Q_1=\{\Phi,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$,

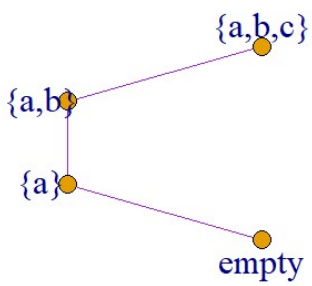
$Q_2=\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,

$Q_3=\{\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$,

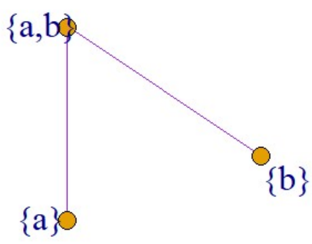
$Q_4=\{\{c\},\{a,b\}\}$,

求:Q_1、Q_2、Q_3和Q_4的极大元和极小元.

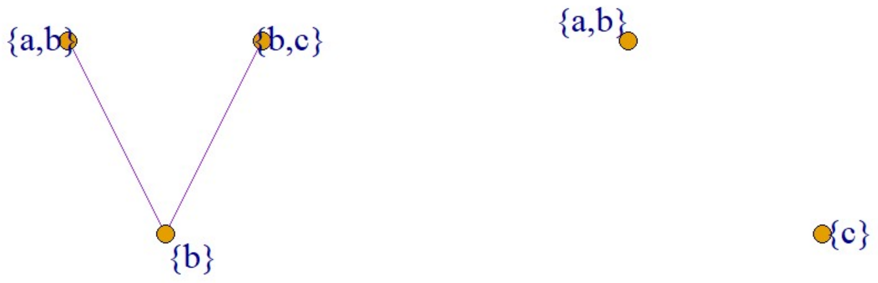




Q_1



Q_2



Q_3 Q_4

$$Q_1 = \{\Phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$$
$$Q_2 = \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$
$$Q_3 = \{\{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$$
$$Q_4 = \{\{c\}, \{a,b\}\}$$

Q_1的极大元是$\{a,b,c\}$,极小元是Φ.

Q_2的极大元是$\{a,b\}$,极小元是$\{a\},\{b\}$.

Q_3的极大元是$\{a,b\},\{b,c\}$,极小元是$\{b\}$.

Q_4的极大元是$\{a,b\},\{c\}$,极小元是$\{a,b\},\{c\}$.

定理:设$\langle A, \leq \rangle$是偏序集,Q是A的一个子集,则:

- 若Q有最小元,则最小元必是唯一的.
- 若Q有最大元,则最大元必是唯一的.

定义:设$\langle A, \leq \rangle$是偏序集,$Q \subseteq A$,若存在一个元素$a \in A$,使得:

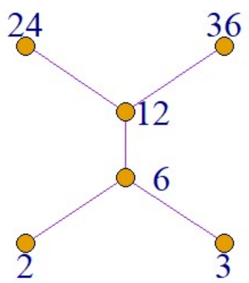
- 对任意的$x \in Q$,都有$x \leq a$,则称a是Q的上界,记作U_B;
- 对任意的$x \in Q$,都有$a \leq x$,则称a是Q的下界,记作L_B.

定义:设$\langle A,\le\rangle$是偏序集,$Q\subseteq A$,若存在一个元素$a\in X$,使得:

- a是Q的上界,并且对Q的每一个上界a',都有$a\le a'$,则称a是Q的最小上界(上确界),记作LU_B;
- a是Q的下界,并且对Q的每一个下界a',都有$a'\le a$,则称a是Q的最大下界(下确界),记作GL_B.

例:设$A=\{2,3,6,12,24,36\}$,A上的偏序关系R的哈斯图如图.

求子集{2,3,6}和子集{6,12}的上界、下界、上确界、下确界.



解:

{2,3,6}的上界:6,12,24,36; 上确界: 6; 下界:无; 下确界:无.

{6,12}的上界:12,24,36; 上确界:12; 下界:2,3,6; 下确界:6.

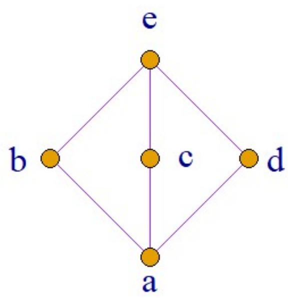
例:设$A=\{a,b,c,d,e\}$,A上的偏序关系R的哈斯图如下.

求A的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、上确界和下确界.

解:

极大元:e, 极小元:a, 最大元:e, 最小元:a,

上界:e, 下界:a, 上确界:e, 下确界:a.



定理:设$\langle X,\leq\rangle$是偏序集,$Q\subseteq A$

(1)若子集Q有上确界,则上确界是唯一的;

(2)若子集Q有下确界,则下确界是唯一的.

从以上的论述中可以得出下面一些结论:

(1)最大(小)元未必存在,若存在则必唯一;

(2)极大(小)元必存在,但不一定唯一;

(3)最大(小)元也必然是极大(小)元;

(4)上(下)界未必存在,若存在也未必唯一.

(5)上(下)确界未必存在,若存在则必唯一;

(6)有上(下)确界必有上(下)界;

(7)若a是子集Q的最大(小)元,则a必是Q的上(下)确界;反之,若a是子集Q的上(下)确界且$a \in Q$,则a必是Q的最大(小)元.

定义:设$\langle X, \leq \rangle$是偏序集,若X中任意两个元素都是可比的,则称$\leq$为全序关系,此时称$\langle X, \leq \rangle$为全序集合.

例:在自然数集合N中的$\leq$(小于等于)关系$\langle N, \leq \rangle$是全序集合.

因为它是:自反的、反对称的、传递的,而且对任意的$x, y \in N$,必有$x \leq y$或$y \leq x$之一成立.

所以,$\langle N, \leq \rangle$是全序集合.

例:设集合$A=\{a,b,c\}$中,在$P(A)$中定义$\subseteq$为集合中的包含关系,则$\langle P(A),\subseteq\rangle$不是全序集合.

因为:

$$P(A)=\{\Phi,\{a\},\{b\},\{c\},\\ \{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

而$\{a\}$和$\{b,c\}$是不可比的,即两者之间没有包含关系.

所以:$\langle P(A),\subseteq\rangle$不是全序集合.

定义:在偏序集$\langle X,\leq\rangle$中,若X的每一个非空子集都存在最小元,则称$\leq$为良序关系,此时称$\langle X,\leq\rangle$称为良序集合.

例:设$Z_n=\{1,2,3,\cdots,n\}$,$\leq$是通常的“小于等于”关系,则$\langle Z_n,\leq\rangle$是良序集,$\langle Z_+,\leq\rangle$也是良序集.

但$\langle Z,\leq\rangle$不是良序集,因子集$Z_-\subseteq Z$,而Z_-中没有最小元.

定理:良序集必是全序集.

定理:每一个有限全序集都是良序集.