

SEMINARARBEIT

Rahmenthema des Wissenschaftspropädeutischen Seminars:

Klima

Leitfach: Physik

Thema der Arbeit:

Die Strahlungsphysik des CO₂-
Treibhauseffekts

Verfasser/in: Christopher Mehnert

Kursleiter/in: Ulrich Steiner

Abgabetermin:

11. November 2025

Bewertung	Note	Notenstufe in Worten	Punkte		Punkte
Schriftliche Arbeit				x 3	
Abschlusspräsentation				x 1	
Summe:					
Gesamtleistung nach § 29 (6) GSO = Summe : 2 (gerundet)					

Datum und Unterschrift der Kursleiterin oder des Kursleiters

Erklärung:

Ich versichere, dass ich die vorgelegte Seminararbeit persönlich und unverfälscht verfasst, sämtliche hierfür zu Hilfe genommene gedruckte sowie digitale Quellen im Literaturverzeichnis angegeben und die aus diesen Quellen stammenden Zitate oder Belegstellen für sinngemäß wiedergegebene Inhalte in meiner Seminararbeit als solche kenntlich gemacht habe.

Die Seminararbeit ist in dieser oder einer ähnlichen Form in keinem anderen Kurs des diesjährigen oder eines vorhergehenden Abiturjahrgangs vorgelegt worden.

Ort, Datum

Unterschrift des/der Oberstufenschülers/in

S E M I N A R A B E I T

Rahmenthema des Wissenschaftspropädeutischen Seminars:

Klima

Leitfach: Physik

Thema der Arbeit:

Die Strahlungsphysik des CO₂-Treibhauseffekts

Verfasser/in: Christopher Mehnert

Kursleiter/in: Ulrich Steiner

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	3
2 Physikalische Grundlagen der Wärmestrahlung	4
2.1 Strahlungsgesetze	5
2.1.1 Das Plancksche Strahlungsgesetz	5
2.1.2 Das Stefan-Boltzmann Gesetz	5
2.1.3 Wiensches Verschiebungsgesetz	6
2.2 Strahlungsbilanz der Erde	8
3 Molekülphysik des CO₂	11
3.1 Grundlagen der molekularen Absorption	11
3.2 Molekülstruktur und Schwingungsmoden	11
3.3 Molekülstruktur und Schwingungsmoden	12
3.4 Quantenmechanische Grundlagen der Absorption	12
3.5 Das CO ₂ -Absorptionsspektrum	12
4 Der Treibhauseffekt	12
4.1 Strahlungsbilanz der Erde ohne Atmosphäre	12
5 Anhang	13
5.1 Literaturverzeichnis	13
5.2 Daten und Tabellen	A
5.3 Quellcode	A

1 Einleitung

Test

2 Physikalische Grundlagen der Wärmestrahlung

Wärmestrahlung bezeichnet die elektromagnetische Strahlung, die von Materie aufgrund ihrer thermischen Energie emittiert wird. Elektromagnetische Strahlung ist eine Form der Energieübertragung, die sich im Raum ausbreitet und entweder als elektromagnetische Wellen (wie von der elektromagnetischen Wellentheorie beschrieben; [9]) oder als masselose Energiequanten, sogenannte *Photonen* (wie von der Quantenmechanik beschrieben; [2]), aufgefasst werden kann. Keine der beiden Sichtweisen kann alle beobachteten Strahlungsphänomene vollständig beschreiben, weshalb beide Konzepte komplementär verwendet werden. [10, S. 1–2]

Elektromagnetische Strahlung bewegt sich mit der *Lichtgeschwindigkeit* $c = c_0/n$ wobei $c_0 = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist und n der Brechungsindex des Mediums ist. Da die in dieser Arbeit betrachteten Strahlungsprozesse hauptsächlich im Vakuum ($n \equiv 1$) oder in Luft ($n \approx 1.0002$) stattfinden, wird im Folgenden die Näherung $n = 1$ und somit $c = c_0$ verwendet. [10, S. 3]

Elektromagnetische Wellen werden durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

Eigenschaft	Beschreibung und Einheit
Frequenz, f	Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit, $[\text{Hz}] = [\text{s}^{-1}]$
Wellenlänge, λ	Abstand zwischen zwei Wellenmaxima, $[\mu\text{m}]$ oder $[\text{nm}]$
Wellenzahl, η	Anzahl der Wellen pro Längeneinheit, $[\text{cm}^{-1}]$

Tabelle 2.1: Charakteristische Eigenschaften elektromagnetischer Wellen [10, S. 4].

$$f = \frac{c_0}{\lambda} = c_0 \eta \quad [10, \text{S. 4}] \quad (2.1)$$

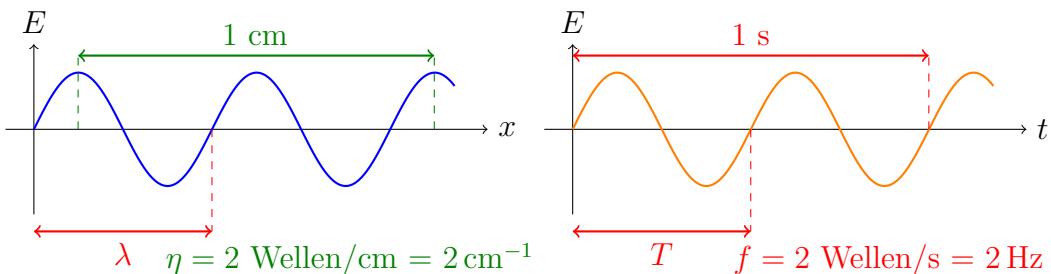


Abbildung 2.1: Visualisierung charakteristischer Eigenschaften elektromagnetischer Wellen. Links: Räumliche Darstellung zeigt die Wellenlänge λ und die Wellenzahl η . Rechts: Zeitliche Darstellung zeigt die Periode T und die Frequenz f .

2.1 Strahlungsgesetze

Jedes Medium emittiert elektromagnetische Strahlung zufällig in alle Richtungen. Die Intensität dieser Emission hängt sowohl von der Temperatur als auch von den Materialeigenschaften des Mediums ab. Der von einer Oberfläche abgegebene Strahlungswärmestrom wird als *spezifische Ausstrahlung* bezeichnet.

Dabei wird zwischen der *gesamten spezifischen Ausstrahlung* E und der *spektralen spezifischen Ausstrahlung* E_f unterschieden:

$E_f \equiv$ abgestrahlte Energie pro Zeit, Oberfläche und Frequenz.

$E \equiv$ abgestrahlte Energie pro Zeit und Oberfläche.

[10, S. 6–7]

2.1.1 Das Plancksche Strahlungsgesetz

Die spektrale spezifische Ausstrahlung eines ideal schwarzen Körpers E_b wird durch das Plancksche Strahlungsgesetz beschrieben. Es gibt an, wie viel Energie pro Zeit, Fläche und Frequenzintervall von einer ideal schwarzen Oberfläche bei einer bestimmten Temperatur T emittiert wird. Dieses Gesetz wurde 1900 von Max Planck [11] hergeleitet und ist heute als *Plancksches Strahlungsgesetz* bekannt. Für eine schwarze Oberfläche ergibt sich die spektrale spezifische Ausstrahlung[10, S. 7] zu:

$$E_{bf}(T, f) = \frac{2\pi h f^3}{c_0^2} \cdot \frac{1}{e^{hf/kT} - 1} \quad (2.2)$$

Das Plancksche Strahlungsgesetz lässt sich auch in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ formulieren:

$$E_{b\lambda}(T, \lambda) = \frac{2\pi h c_0^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc_0/\lambda kT} - 1} \quad (2.3)$$

Dabei bezeichnet $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s das Plancksche Wirkungsquantum, $c_0 = 2.998 \times 10^8$ m s⁻¹ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und $k = 1.381 \times 10^{-23}$ J K⁻¹ die Boltzmann-Konstante [14].

2.1.2 Das Stefan-Boltzmann Gesetz

Die Integration der spektralen spezifischen Ausstrahlung über das gesamte elektromagnetische Spektrum liefert die *Gesamtausstrahlung* E :

$$E = \int_0^\infty E_f df \quad (2.4)$$

[1]

Für einen idealen schwarzen Körper setzen wir E_{bf} aus Gleichung (2.2) in das Integral ein:

$$E_b(T) = \int_0^\infty \frac{2\pi h f^3}{c_0^2} \cdot \frac{1}{e^{hf/kT} - 1} df$$

Die Auswertung dieses Integrals erfordert komplexe Integrationstechniken und ist in Integraltabellen dokumentiert[10, S. 13]. Das Ergebnis ist das *Stefan-Boltzmann Gesetz*:

$$E_b(T) = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c_0^2 h^3} T^4 = \sigma T^4 \quad [1] \quad (2.5)$$

Dabei bezeichnet $\sigma = 5.670 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ die Stefan-Boltzmann Konstante [14].

2.1.3 Wiensches Verschiebungsgesetz

Die Wellenlänge λ_{max} bei welcher die spektrale spezifische Ausstrahlung eines schwarzen idealen Körpers $E_{b\lambda}$ mit der Temperatur T ein Maximum erreicht, erhält man indem man die Gleichung (2.3) nach λ ableitet und diese Gleichung gleich Null setzt. Die folgende mathematische Herleitung folgt Kraus [6, S. 101].

$$\frac{\partial E_{b\lambda}(T, \lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

Die Ableitung nach λ ergibt mit der Produktregel:

$$\begin{aligned} & -10 \frac{hc_0^2}{\lambda^6} \cdot \frac{1}{e^{hc_0/k\lambda T} - 1} - 2 \frac{hc_0^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{(e^{hc_0/k\lambda T} - 1)^2} \cdot e^{hc_0/k\lambda T} \cdot \left(-\frac{hc_0}{k\lambda^2 T} \right) = 0 \\ & \frac{5}{\lambda} = \frac{1}{e^{hc_0/k\lambda T} - 1} \cdot e^{hc_0/k\lambda T} \cdot \frac{hc_0}{k\lambda^2 T} \end{aligned}$$

Mit der Substitution $x = \frac{hc_0}{k\lambda T}$ ergibt sich die transzendente Gleichung:

$$5 = \frac{x \cdot e^x}{e^x - 1}$$

Die numerische Lösung dieser Gleichung liefert $x \approx 4.9651$. Rücksubstitution in $x_{max} = \frac{hc_0}{k\lambda_{max} T}$ ergibt das *Wiensche Verschiebungsgesetz*:

$$\begin{aligned}\lambda_{max} &= \frac{hc_0}{kx_{max}T} \\ \lambda_{max}T &= \frac{hc_0}{kx_{max}} \\ &= \frac{6.626\,12 \times 10^{-34} \text{ J s} \cdot 2.997\,92 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{1.380\,65 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \cdot 4.9651} \\ &= 2.8978 \times 10^{-3} \text{ m K}\end{aligned}$$

Das Wiensche Verschiebungsgesetz besagt, dass sich das Maximum der spektralen Ausstrahlung mit steigender Temperatur zu kürzeren Wellenlängen verschiebt[6, S. 101]. Die Konstante $b = 2.8978 \times 10^{-3} \text{ m K}$ wird als *Wiensche Verschiebungskonstante* bezeichnet[14, S. 49]. Umgestellt nach der Wellenlänge des Maximums ergibt sich:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} \quad (2.6)$$

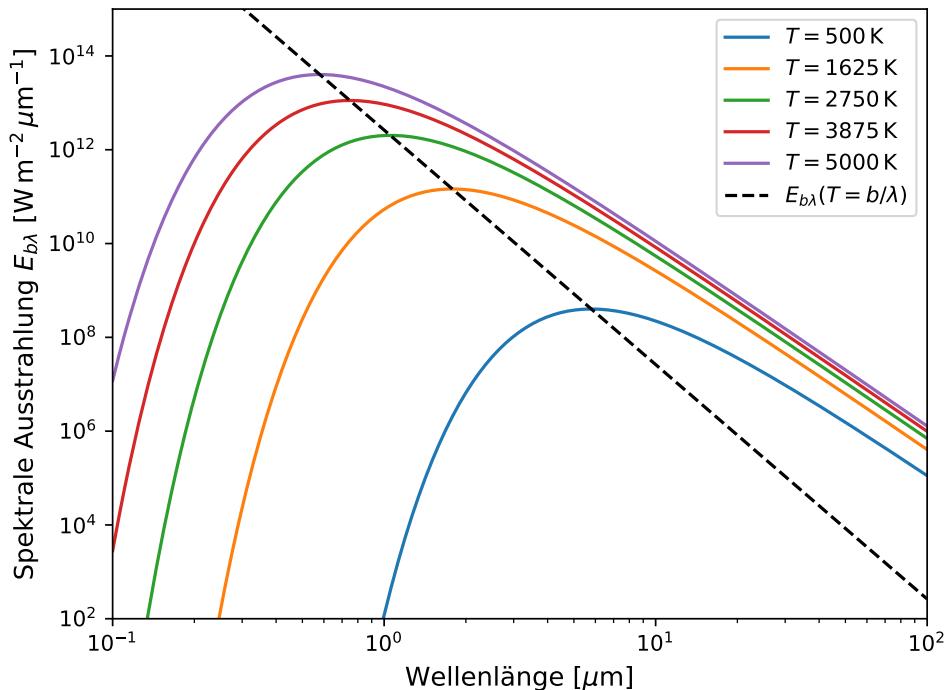


Abbildung 2.2: Spektrale spezifische Ausstrahlung $E_{b\lambda}$ eines schwarzen Körpers nach dem Planckschen Strahlungsgesetz für verschiedene Temperaturen. Die gestrichelte Linie verbindet die Maxima der Planck-Kurven und verdeutlicht das Wiensche Verschiebungsgesetz. Grafik wurde mithilfe von [12] erstellt, der Code ist im Anhang 5.3 dokumentiert.

2.2 Strahlungsbilanz der Erde

Die Erde bezieht nahezu ihre gesamte Energie von der Sonne. Um ein thermisches Gleichgewicht aufrechtzuerhalten, muss sie Energie mit derselben Rate wieder abstrahlen, mit der sie diese empfängt[8, S. 9]:

$$P_{\text{in}} = P_{\text{out}} \quad (2.7)$$

Die einfallende solare Bestrahlungsstärke am oberen Rand der Atmosphäre, die sogenannte *Solarkonstante*, beträgt $S_0 = 1361 \text{ W m}^{-2}$ [5, S. 5–6]. Da die Querschnittsfläche der Erde, welche die solare Strahlung abfängt, πr^2 beträgt[8, S. 11], wobei $r = 6.371 \times 10^6 \text{ m}$ [13, S. 56] der Erdradius ist, ergibt sich für die einfallende Strahlungsleistung:

$$\begin{aligned} P_{\text{solar}} &= S_0 \pi r^2 \\ &= 1.735 \times 10^{17} \text{ W} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Jedoch wird nicht die gesamte Strahlung von der Erde absorbiert, da ein Teil reflektiert wird. Der Anteil der reflektierten Strahlung wird als *Albedo* α bezeichnet. Abbildung 2.3 zeigt, dass α von der reflektierenden Oberfläche abhängt (detaillierte Werte für verschiedene Oberflächen siehe Anhang Tabelle 5.1). Im globalen Mittel wird ein Anteil von $\alpha_p \simeq 0,30$ der eingehenden Strahlung reflektiert. Diese Größe wird als *planetare Albedo* bezeichnet[8, S. 11].

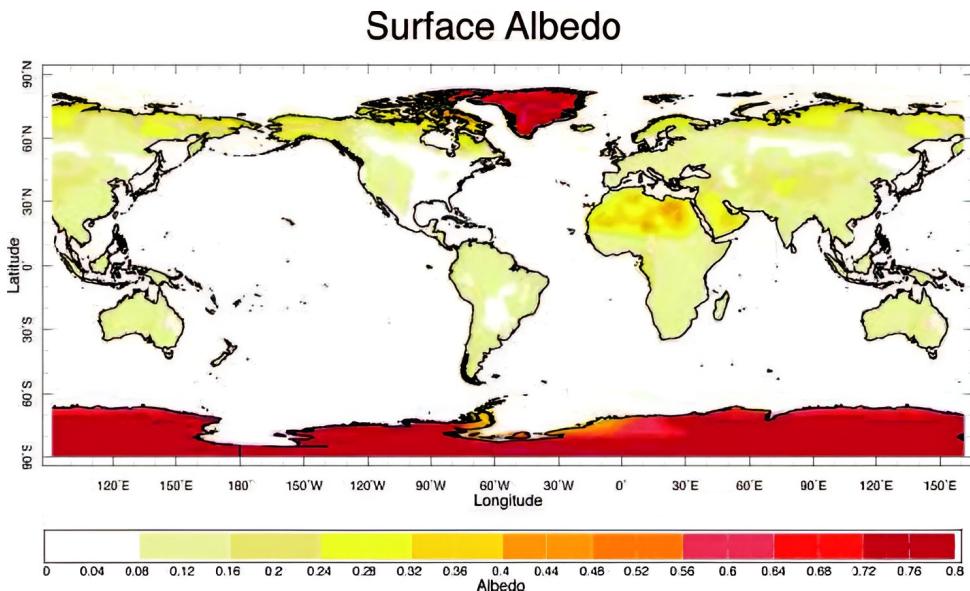


Abbildung 2.3: Räumliche Verteilung der Albedo an der Erdoberfläche[8, S. 12].

Daraus folgt für die von der Erde absorbierte Strahlungsleistung:

$$\begin{aligned} P_{\text{in}} &= (1 - \alpha_p) S_0 \pi r^2 \\ &= 1.215 \times 10^{17} \text{ W} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Wegen des Energiegleichgewichts muss die von der Erde emittierte Strahlung die absorbierte Strahlung kompensieren. Dazu kann man annehmen, dass sich die Erde wie ein idealer schwarzer Körper mit gleichmäßiger Temperatur T_e verhält (bekannt als *effektive planetare Temperatur*) und dass das *Stefan-Boltzmann-Gesetz* wie in Unterunterabschnitt 2.1.2 anwendbar ist.

Gleichung 2.5 gibt die Gesamtausstrahlung $E_b(T)$ an, welche die ausgestrahlte Leistung pro Einheit der Oberfläche beschreibt: $E_b = \frac{P}{A}$ [1]. Die Erde strahlt über ihre gesamte Oberfläche $A = 4\pi r^2$ ab. Umgestellt nach der Strahlungsleistung ergibt sich[8, S. 11]:

$$P_{\text{out}} = \sigma \cdot 4\pi r^2 \cdot T_e^4 \quad (2.10)$$

Durch Einsetzen von Gleichung 2.9 und Gleichung 2.10 in Gleichung 2.7 und Umstellen nach T_e erhält man:

$$T_e = \left(\frac{S_0(1 - \alpha_p)}{4\sigma} \right)^{1/4} \quad (2.11)$$

Mit den Werten $S_0 = 1361 \text{ W m}^{-2}$, $\alpha_p = 0,30$ und $\sigma = 5.670 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} T_e &= \left(\frac{1361 \text{ W m}^{-2} \cdot (1 - 0,30)}{4 \cdot 5.670 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}} \right)^{1/4} \\ &= 254,6 \text{ K} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Diese Temperatur von etwa -18°C liegt deutlich unter der gemessenen globalen Mitteltemperatur der Erdoberfläche von circa 288 K [8, S. 11]. Die Differenz von etwa 33 K wird durch den natürlichen Treibhauseffekt der Atmosphäre verursacht. Lacis et al. (2010) schlussfolgern: „In round numbers, water vapor accounts for about 50% of Earth’s greenhouse effect, with clouds contributing 25%, CO₂ 20%, and the minor GHGs and aerosols accounting for the remaining 5%.“[7], was zunächst vermuten lässt, dass CO₂ nicht die bedeutendste Rolle im Treibhauseffekt spielt. Jedoch bilden die nicht kondensierenden Treibhausgase CO₂, O₃, N₂O und CH₄ die Grundlage des Treibhauseffekts, da sie im Gegensatz zu Wasserdampf nicht durch Niederschlag aus der Atmosphäre entfernt werden. Wasserdampf und Wolken (zusammen 75%) wirken als schnelle Rückkopplungsmechanismen, deren Konzentration von der Temperatur und damit von den nicht kondensierenden

Treibhausgasen abhängt[7].

Die Anwendung des Wienschen Verschiebungsgesetzes (Gleichung 2.6) auf Sonne ($T_{\text{Sonne}} = 5772 \text{ K}$ [5, S. 6]) und Erde ($T_{\text{Erde}} = 288 \text{ K}$ [8, S. 11]) verdeutlicht die fundamentale spektrale Asymmetrie zwischen solarer und terrestrischer Strahlung. Während die solare Strahlung ihr Maximum bei $\lambda_{\text{Sonne},\text{max}} = 0.50 \mu\text{m}$ hat, liegt das Maximum der terrestrischen Strahlung bei $\lambda_{\text{Erde},\text{max}} = 10.06 \mu\text{m}$ (visualisiert in Abbildung 2.4).

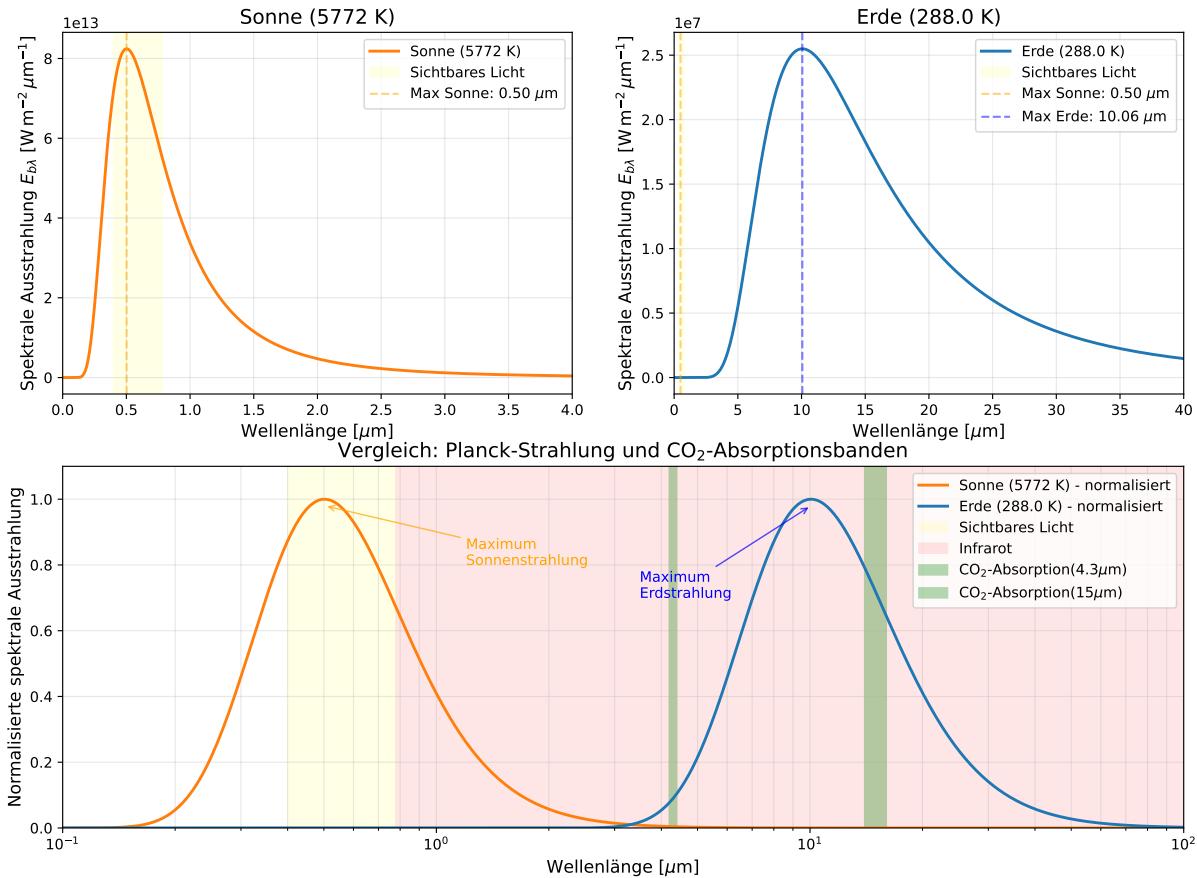


Abbildung 2.4: Vergleich der spektralen spezifischen Ausstrahlung von Sonne und Erde nach dem Planckschen Strahlungsgesetz mit den Absorptionsbanden von CO₂. Grafik erstellt mit [12], Code dokumentiert in Anhang 5.4.

Die spektrale Lage der CO₂-Absorptionsbanden erklärt, warum CO₂ als Treibhausgas wirkt: Es ist weitgehend transparent für die kurzwellige Sonnenstrahlung, absorbiert jedoch die langwellige Strahlung, die von der Erde emittiert wird. Die fundamentale Frage, die sich daraus ergibt, ist: *Warum absorbiert CO₂ gerade bei diesen Wellenlängen?* Im folgenden Kapitel wird die molekulophysikalische Grundlage dieser Absorption detailliert untersucht.

3 Molekülphysik des CO₂

Die Wechselwirkung elektromagnetischer Strahlung mit atmosphärischen Molekülen ist ein quantenmechanisches Phänomen von erheblicher Komplexität. Im Rahmen dieser Arbeit liegt der Fokus auf den für den Treibhauseffekt wesentlichen Aspekten, ohne die vollständige molekülphysikalische Theorie zu behandeln.

Für praktische Berechnungen atmosphärischer Strahlungstransfers stehen umfassende spektroskopische Datenbanken zur Verfügung. Die HITRAN-Datenbank (High-Resolution Transmission Molecular Absorption Database) [3][4] enthält hochauflöste Absorptionslinien für über 50 atmosphärische Moleküle und bildet den Standard für quantitative Analysen. Die folgenden Abschnitte erläutern die physikalischen Grundlagen dieser Absorptionsprozesse, ohne die vollständige quantenmechanische Behandlung zu vertiefen.

3.1 Grundlagen der molekularen Absorption

Ein Photon, welches auf ein Gasmolekül trifft, kann entweder absorbiert oder gestreut werden. Die Streuung ändert die Ausbreitungsrichtung und gegebenenfalls die Energie des Photons. Dieser Effekt ist für unsere Betrachtung jedoch von untergeordneter Bedeutung, weswegen wir uns auf die Absorption konzentrieren. Die Absorption eines Photons führt dazu, dass das Energieniveau des Moleküls angehoben wird. Umgekehrt kann ein Molekül sein Energieniveau senken, indem es ein Photon emittiert.

Die Gesamtenergie eines Moleküls setzt sich aus verschiedenen Beiträgen zusammen: der elektronischen Energie, die durch die Verteilung der Elektronen in den Molekülorbitalen bestimmt wird, der Rotationsenergie, die aus der Drehbewegung des gesamten Moleküls um seine Trägheitsachsen resultiert, sowie der Schwingungsenergie, die durch die periodischen Relativbewegungen der Atomkerne gegeneinander entsteht.

Die Quantenmechanik besagt, dass die Energieniveaus für molekulare Elektronenorbitale, ebenso wie die Energieniveaus für molekulare Rotation und Vibration, nur diskrete Werte annehmen können. Da die Energie eines Photons direkt proportional zu seiner Frequenz ist ($E = hf$), müssen Photonen eine bestimmte Frequenz haben, um absorbiert oder emittiert zu werden. Dies führt zu diskreten Spektrallinien.

3.2 Molekülstruktur und Schwingungsmoden

Wir haben bereits die 3 möglichen Arten der Energieniveaus eines Moleküls kennengelernt. Jedoch ist die Energie welche nötig ist um den Orbit eines Elektrons zu ändern so groß, das man Elektromagnetische Strahlung mit sehr niedriger Wellenlänge benötigt (zwischen 10×10^{-2} µm und 1.5 µm)[10, S. 287]. Da wir uns auf CO₂ konzentrieren wollen und dieses keine für uns relevanten Absorptionsbanden im Bereich unter 1.5 µm besitzt

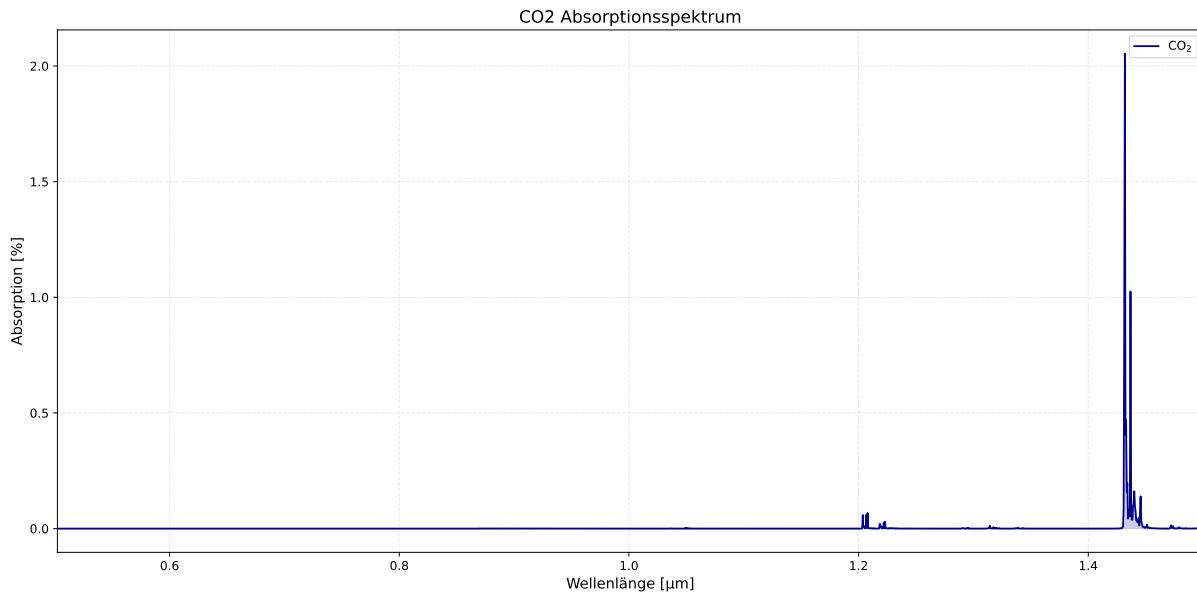


Abbildung 3.1: Spektrale spezifische Ausstrahlung $E_{b\lambda}$ eines schwarzen Körpers nach dem Planckschen Strahlungsgesetz für verschiedene Temperaturen. Die gestrichelte Linie verbindet die Maxima der Planck-Kurven und verdeutlicht das Wiensche Verschiebungsgesetz. Grafik wurde mithilfe von [12] erstellt, der Code ist im Anhang 5.3 dokumentiert.

$$E_j = \frac{\hbar^2}{2I} j(j+1) = hc_0 j(j+1), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad [10, \text{S. 293}] \quad (3.1)$$

$$E = hf = hc_0\eta \Rightarrow \eta = \frac{E}{hc_0}$$

3.3 Molekülstruktur und Schwingungsmoden

3.4 Quantenmechanische Grundlagen der Absorption

3.5 Das CO₂-Absorptionsspektrum

4 Der Treibhauseffekt

4.1 Strahlungsbilanz der Erde ohne Atmosphäre

5 Anhang

5.1 Literaturverzeichnis

- [1] Physics Department. *STEFAN - BOLTZMANN'S LAW OF RADIATION*. URL: https://laboratoriofisica.uc3m.es/guiones_ingles/qp/Stefan-Boltzmann_guide_english.pdf (besucht am 31.10.2025).
- [2] P. A. M. Dirac. *The principles of quantum mechanics*. und. 1962.
- [3] I.E. Gordon u. a. „The HITRAN2020 molecular spectroscopic database“. In: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 277 (2022), S. 107949. ISSN: 0022-4073. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2021.107949>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022407321004416>.
- [4] HITRAN. *HITRAN2020 molecular spectroscopic database*. 2020. URL: <https://hitran.org> (besucht am 04.11.2025).
- [5] Greg Kopp. „Solar irradiance measurements“. In: *Living Reviews in Solar Physics* 22 (Juli 2025). DOI: [10.1007/s41116-025-00040-5](https://doi.org/10.1007/s41116-025-00040-5).
- [6] H. Kraus. *Die Atmosphäre der Erde: Eine Einführung in die Meteorologie*. Springer Berlin Heidelberg, 2007. ISBN: 9783540350170. URL: <https://books.google.de/books?id=2RI1BgAAQBAJ>.
- [7] Andrew Lacis u. a. „Atmospheric CO₂: Principal Control Knob Governing Earth's Temperature“. In: *Science (New York, N.Y.)* 330 (Okt. 2010), S. 356–9. DOI: [10.1126/science.1190653](https://doi.org/10.1126/science.1190653).
- [8] J. Marshall und R.A. Plumb. *Atmosphere, Ocean and Climate Dynamics: An Introductory Text*. International Geophysics. Academic Press, 2007. ISBN: 9780080556703. URL: <https://books.google.de/books?id=KvJfvYBHiegC>.
- [9] James Clerk Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism*. eng. Oxford: Clarendon Press.
- [10] M. F. Modest. *Radiative heat transfer*. eng. 2nd ed. Amsterdam ; Academic Press, 2003. ISBN: 1-281-11929-6.
- [11] Max Planck. „Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum“. In: *Annalen der Physik* 309.3 (1901), S. 553–563. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19013090310>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.19013090310>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19013090310>.
- [12] Python Software Foundation. *Python Programming Language*. Version 3.13. 2024. URL: <https://www.python.org>.
- [13] Westermann Schulbuchverlag. *Mathematisch-Naturwissenschaftliche Formelsammlung IQB - Für die Abiturprüfung*. Braunschweig, Deutschland: Westermann Bildungsmedien Verlag GmbH, 2024, S. 72. ISBN: 978-3-14-127795-1.

- [14] Eite Tiesinga u.a. „CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2018“. In: *Rev. Mod. Phys.* 93 (2 Juni 2021), S. 025010. DOI: [10.1103/RevModPhys.93.025010](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.93.025010). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.93.025010>.

5.2 Daten und Tabellen

Art der Oberfläche	Albedo (%)
Ozean	2-10
Wald	6-18
Städte	14-18
Grass	7-25
Acker	10-20
Natürliche Graslandökosysteme	16-20
Wüste(Sand)	35-45
Eis	20-70
Wolken (dünn)	30
Wolken (dick)	60-70
Schnee (alt)	40-60
Schnee (frisch)	75-95

Tabelle 5.1: Albedos für Unterschiedliche Oberflächen[8, S.11].

5.3 Quellcode

Liste aller Quellcodes

- | | | | |
|-----|--|-------|---|
| 5.1 | Verschiedene implementierungen für physikalische Gesetze. | | B |
| 5.2 | Verschiedene Hilfs-Funktionen | | C |
| 5.3 | Planck Funktion für verschiedene Temperaturen mit Wienschem Verschiebungsgesetz. | | D |
| 5.4 | Planck Funktion für Sonne & Erde mit CO ₂ Absorptionsbändern. | | F |
| 5.5 | Visualisierung des CO ₂ -Absorptionsspektrums | | H |

```
1  from scipy import constants
2  import numpy as np
3
4  def plancks_law(wavelength: float, temperature: float, *, refractive_index: float = 1.0) -> float:
5      """Planck's radiation law
6
7          Returns spectral radiance in W/(m^3)
8          """
9
10     first = (2 * constants.pi * constants.h * (constants.c ** 2)) / ((refractive_index**2) * (wavelength
11         ** 5))
12     second = 1 / (np.exp((constants.h * constants.c) / (wavelength * constants.k * temperature)) - 1)
13     return first * second
14
15
16
17  def wiens_displacement_law(temperature: float, *, refractive_index: float = 1.0) -> float:
18      """Wien's displacement law
19
20          Returns the peak wavelength of a body's radiation
21          """
22
23  def wiens_displacement_law_temperature(wavelength: float) -> float:
24      """Wien's displacement law temperature
25
26          Returns the peak temperature of a body's radiation
27          """
28
29      b_wien = constants.value("Wien wavelength displacement law constant")
30      return b_wien / wavelength
```

Listing 5.1: Verschiedene implementierungen für physikalische Gesetze welche von anderen Quellcodes benutzt werden.

```
1 import numpy as np
2 import pandas as pd
3
4
5 def read_hitran_par(filename: str) -> pd.DataFrame:
6     """
7         Liest HITRAN .par Format ein
8     """
9     data = []
10
11    with open(filename, 'r') as f:
12        for line in f:
13            molecule_id = int(line[0:2])
14            isotopologue = int(line[2:3])
15            wavenumber = float(line[3:15])
16            intensity = float(line[15:25])
17
18            data.append({
19                'molecule': molecule_id,
20                'isotopologue': isotopologue,
21                'wavenumber': wavenumber,
22                'intensity': intensity
23            })
24
25    return pd.DataFrame(data)
26
27
28 def create_absorption_spectrum(wavenumbers, intensities, wn_grid,
29                                path_length=100, concentration=400e-6):
30    number_density = 2.69e19 * concentration
31
32    optical_depth = np.zeros_like(wn_grid)
33
34    gamma = 0.1
35
36    for wn, intensity in zip(wavenumbers, intensities):
37        lorentz = gamma / (np.pi * ((wn_grid - wn) ** 2 + gamma ** 2))
38        optical_depth += intensity * number_density * path_length * 100 * lorentz
39
40    absorbance = 1 - np.exp(-optical_depth)
41
42    return absorbance
```

Listing 5.2: Verschiedene Funktionen die in mehreren anderen Quellcodes benötigt werden.

```

1 import numpy as np
2 from simulationen.formeln import plancks_law, wiens_displacement_law_temperature
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from simulationen import ROOT_DIR
5
6
7 def main():
8     wavelengths = np.linspace(1e-7, 100e-6, 20000)
9     temperature_range = np.linspace(500, 5000, 5)
10
11    spectral_radiances = [plancks_law(wavelengths, T) for T in temperature_range]
12
13    radiances = plancks_law(wavelengths, wiens_displacement_law_temperature(wavelengths))
14
15    fig, ax = plt.subplots()
16
17    for i, s in enumerate(spectral_radiances):
18        ax.loglog(wavelengths * 1e6, s, label=fr"$T={temperature_range[i]:.0f}\text{K}$")
19
20    ax.plot(wavelengths * 1e6, radiances, 'k--', label=r"$E_b(\lambda)(T = b/\lambda)$")
21
22    ax.set_xlabel(r'Wellenlänge [ $\mu\text{m}$ ]', fontsize=12)
23    ax.set_ylabel(r"Spektrale Ausstrahlung  $E_b(\lambda)$  [ $\text{W}/\text{m}^2\text{nm}^{-2}$ ]", fontsize=12)
24
25    ax.set_yscale('log')
26    ax.set_xscale('log')
27    ax.legend(loc='upper right')
28    plt.tight_layout()
29    plt.savefig(ROOT_DIR / "seminararbeit" / "assets" / "wien_plot.pdf", bbox_inches='tight')
30    plt.show()
31
32
33 if __name__ == "__main__":
34     main()

```

Listing 5.3: Planck Funktion für verschiedene Temperaturen mit Wienschem Verschiebungsgesetz. Benutzt Formeln aus 5.1.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 from simulationen import ROOT_DIR
5 from simulationen.formeln import plancks_law, wiens_displacement_law
6
7
8
9 TEMPERATURE_EARTH = 288.0 # Kelvin
10 TEMPERATURE_SUN = 5772 # Kelvin
11
12 def main():
13
14     max_wavelength_sun = wiens_displacement_law(TEMPERATURE_SUN) # in Metern
15     max_wavelength_earth = wiens_displacement_law(TEMPERATURE_EARTH) # in Metern
16     print(max_wavelength_sun, max_wavelength_earth)
17
18     wavelengths = np.linspace(1e-7, 100e-6, 20000)
19     # anything under 1e-7 will just be shown as 0 because its to small and causes an overflow error.
20
21     spectral_radiance_earth, spectral_radiance_sun = [0.0], [0.0]
22     # we put 0.0 as the first value here so that in our data there will always be a point P(0 / 0)
23     # without having an overflow error as described above
24     for wavelength in wavelengths:
25         spectral_radiance_sun.append(plancks_law(wavelength, TEMPERATURE_SUN))
26         spectral_radiance_earth.append(plancks_law(wavelength, TEMPERATURE_EARTH))
27
28     wavelengths = np.insert(wavelengths, 0, 0.0)
29     # we put 0.0 as the first value here so that in our data there will always be a point P(0 / 0)
30     # without having an overflow error as described above
31
32
33     plt.figure(figsize=(14, 10))
34
35     ax1 = plt.subplot2grid((2, 2), (0, 0))
36     ax2 = plt.subplot2grid((2, 2), (0, 1))
37     ax3 = plt.subplot2grid((2, 2), (1, 0), colspan=2)
38
39     ax1.plot(wavelengths * 1e6, spectral_radiance_sun, linewidth=2.0, color='tab:orange', label=f'Sonne
40     ({TEMPERATURE_SUN} K)')
41     ax1.set_xlabel(r'Wellenlänge [$\mu\text{m}$]', fontsize=12)
42     ax1.set_ylabel(r"Spektrale Ausstrahlung $E_{\lambda}$"
43     r" [$\text{W}/\text{m}^{-2}\text{\AA}^{-1}$]", fontsize=12)
44     ax1.set_title(f'Sonne ({TEMPERATURE_SUN} K)', fontsize=14)
45     ax1.grid(True, alpha=0.3)
46     ax1.set_xlim(0, 4)
47     ax1.axvspan(0.4, 0.78, alpha=0.1, color='yellow', label='Sichtbares Licht')
48     ax1.axvline(x=max_wavelength_sun*1e6, color='orange', linestyle='--', alpha=0.5,
49                 label=f'Max Sonne: {max_wavelength_sun*1e6:.2f} ' + r'$\mu\text{m}$')
50     ax1.legend(loc='upper right')
51
52     ax2.plot(wavelengths * 1e6, spectral_radiance_earth, linewidth=2.0, color='tab:blue', label=f'Erde
53     ({TEMPERATURE_EARTH} K)')
54     ax2.set_xlabel(r'Wellenlänge [$\mu\text{m}$]', fontsize=12)
55     ax2.set_ylabel(r"Spektrale Ausstrahlung $E_{\lambda}$"
56     r" [$\text{W}/\text{m}^{-2}\text{\AA}^{-1}$]", fontsize=12)
57     ax2.set_title(f'Erde ({TEMPERATURE_EARTH} K)', fontsize=14)
58     ax2.grid(True, alpha=0.3)
59     ax2.set_xlim(0, 40)

```

```

56     ax2.axvspan(0.4, 0.78, alpha=0.1, color='yellow', label='Sichtbares Licht')
57     ax2.axvline(x=max_wavelength_sun*1e6, color='orange', linestyle='--', alpha=0.5,
58                 label=f'Max Sonne: {max_wavelength_sun*1e6:.2f} ' + r'$\mu\text{m}$')
59     ax2.axvline(x=max_wavelength_earth*1e6, color='blue', linestyle='--', alpha=0.5,
60                 label=f'Max Erde: {max_wavelength_earth*1e6:.2f} ' + r'$\mu\text{m}$')
61     ax2.legend(loc='upper right')
62
63     # Normalisierte Werte für bessere Vergleichbarkeit
64     spectral_radiance_sun_norm = np.array(spectral_radiance_sun) / np.max(spectral_radiance_sun)
65     spectral_radiance_earth_norm = np.array(spectral_radiance_earth) / np.max(spectral_radiance_earth)
66
67     ax3.semilogx(wavelengths * 1e6, spectral_radiance_sun_norm,
68                   linewidth=2.0, color='tab:orange', label=f'Sonne ({TEMPERATURE_SUN} K) - normalisiert')
69     ax3.semilogx(wavelengths * 1e6, spectral_radiance_earth_norm,
70                   linewidth=2.0, color='tab:blue', label=f'Erde ({TEMPERATURE_EARTH} K) - normalisiert')
71
72
73     ax3.axvspan(0.4, 0.78, alpha=0.1, color='yellow', label='Sichtbares Licht')
74     ax3.axvspan(0.78, 100, alpha=0.1, color='red', label='Infrarot')
75
76     ax3.axvspan(4.2, 4.4, alpha=0.3, color='green', label=r'$\mathrm{CO}_2$-Absorption (4.3
77     ↪ $\mu\text{m}$)')
77     ax3.axvspan(14, 16, alpha=0.3, color='green', label=r'$\mathrm{CO}_2$-Absorption (15
78     ↪ $\mu\text{m}$)')
79
80     ax3.set_xlabel(r'Wellenlänge [$\mu\text{m}$]', fontsize=12)
81     ax3.set_ylabel('Normalisierte spektrale Ausstrahlung', fontsize=12)
82     ax3.set_title(r'Vergleich: Planck-Strahlung und $\mathrm{CO}_2$-Absorptionsbanden', fontsize=14)
83     ax3.grid(True, alpha=0.3, which="both")
84     ax3.set_xlim(0.1, 100)
85     ax3.set_ylim(0, 1.1)
86     ax3.legend(loc='upper right')
87
88     ax3.annotate('Maximum\nSonnenstrahlung', xy=(max_wavelength_sun*1e6, 0.98), xytext=(1.2, 0.8),
89                  arrowprops=dict(arrowstyle='->', color='orange', alpha=0.7),
90                  fontsize=10, color='orange')
91     ax3.annotate('Maximum\nErdstrahlung', xy=(max_wavelength_earth*1e6, 0.98), xytext=(3.5, 0.7),
92                  arrowprops=dict(arrowstyle='->', color='blue', alpha=0.7),
93                  fontsize=10, color='blue')
94
95
96     plt.savefig(ROOT_DIR / "seminararbeit" / "assets" / "planck_plot.pdf", bbox_inches='tight')
97     plt.tight_layout()
98     plt.show()
99
100
101 if __name__ == "__main__":
102     main()

```

Listing 5.4: Planck Funktion für Sonne & Erde mit CO₂ Absorptionsbändern. Benutzt Formeln aus 5.1.

```
1 import numpy as np
2 from matplotlib import pyplot as plt
3
4 from simulationen import ROOT_DIR
5 from simulationen.utils import read_hitran_par, create_absorption_spectrum
6
7 FILENAME = ROOT_DIR / "data" / "hitran_co2_2025-11-04.par"
8
9 df = read_hitran_par(FILENAME)
10
11 print(f"Geladene Linien: {len(df)}")
12 print(f"Wellenzahlbereich: {df['wavenumber'].min():.1f} - {df['wavenumber'].max():.1f}")
13 wn_min_filter = 555
14 wn_max_filter = 100000
15
16 df_filtered = df[(df['wavenumber'] >= wn_min_filter) &
17                   (df['wavenumber'] <= wn_max_filter)].copy()
18
19 print(f"\nNach Filter: {len(df_filtered)} Linien")
20 print(f"Gefilterte Wellenzahl: {df_filtered['wavenumber'].min():.1f} -
21      {df_filtered['wavenumber'].max():.1f}")
22 print(f"Entspricht Wellenlänge: {10000/df_filtered['wavenumber'].max():.2f} -
23      {10000/df_filtered['wavenumber'].min():.2f} micrometer")
24
25 wn_min = df_filtered['wavenumber'].min()
26 wn_max = df_filtered['wavenumber'].max()
27 wn_grid = np.linspace(wn_min, wn_max, 5000)
28
29 absorbance = create_absorption_spectrum(
30     df_filtered['wavenumber'].values,
31     df_filtered['intensity'].values,
32     wn_grid,
33     path_length=100,
34     concentration=400e-6
35 )
36
37 wl_grid = 10000.0 / wn_grid
38
39
40 fig, ax1 = plt.subplots(figsize=(14, 7))
41
42 ax1.plot(wl_grid, absorbance * 100, color='darkblue', linewidth=1.5, label=r"$\mathbf{CO}_2$")
43 ax1.set_xlabel('Wellenlänge [$\mu\text{m}$]', fontsize=12)
44 ax1.set_ylabel('Absorption [%]', fontsize=12)
45 ax1.set_title('CO2 Absorptionsspektrum',
46                 fontsize=14)
47 ax1.grid(True, alpha=0.3, linestyle='--')
48 ax1.set_ylimits(0, 100)
49 ax1.set_xlimits(wl_grid.min(), wl_grid.max())
50
51 ax1.fill_between(wl_grid, 0, absorbance * 100, color='darkblue', alpha=0.2)
52
53
54 ax1.legend(loc='upper right')
55
56 plt.tight_layout()
57 plt.savefig(ROOT_DIR / "seminararbeit" / "assets" / "co2_absorption.pdf", bbox_inches='tight')
```

58
59 plt.show()

Listing 5.5: Visualisierung des CO₂-Absorptionsspektrums mithilfe von HITRAN Daten [4]