

SEMINARARBEIT

Rahmenthema des Wissenschaftspropädeutischen Seminars:

Klima

Leitfach: Physik

Thema der Arbeit:

Die Strahlungsphysik des CO₂-
Treibhauseffekts

Verfasser/in: Christopher Mehnert

Kursleiter/in: Ulrich Steiner

Abgabetermin:

11. November 2025

Bewertung	Note	Notenstufe in Worten	Punkte		Punkte
Schriftliche Arbeit				x 3	
Abschlusspräsentation				x 1	
Summe:					
Gesamtleistung nach § 29 (6) GSO = Summe : 2 (gerundet)					

Datum und Unterschrift der Kursleiterin oder des Kursleiters

Erklärung:

Ich versichere, dass ich die vorgelegte Seminararbeit persönlich und unverfälscht verfasst, sämtliche hierfür zu Hilfe genommene gedruckte sowie digitale Quellen im Literaturverzeichnis angegeben und die aus diesen Quellen stammenden Zitate oder Belegstellen für sinngemäß wiedergegebene Inhalte in meiner Seminararbeit als solche kenntlich gemacht habe.

Die Seminararbeit ist in dieser oder einer ähnlichen Form in keinem anderen Kurs des diesjährigen oder eines vorhergehenden Abiturjahrgangs vorgelegt worden.

Ort, Datum

Unterschrift des/der Oberstufenschülers/in

S E M I N A R A B E I T

Rahmenthema des Wissenschaftspropädeutischen Seminars:

Klima

Leitfach: Physik

Thema der Arbeit:

Die Strahlungsphysik des CO₂-Treibhauseffekts

Verfasser/in: Christopher Mehnert

Kursleiter/in: Ulrich Steiner

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Test

2 Physikalische Grundlagen der Wärmestrahlung

2.1 Strahlungsgesetze

Jedes Medium emittiert elektromagnetische Strahlung zufällig in alle Richtungen. Die Intensität dieser Emission hängt sowohl von der Temperatur als auch von den Materialeigenschaften des Mediums ab. Der von einer Oberfläche abgegebene Strahlungswärmestrom wird als *spezifische Ausstrahlung* bezeichnet.

Dabei wird zwischen der *gesamten spezifischen Ausstrahlung* E und der *spektralen spezifischen Ausstrahlung* E_f unterschieden:

$E_f \equiv$ abgestrahlte Energie pro Zeit, Oberfläche und Frequenz.

$E \equiv$ abgestrahlte Energie pro Zeit und Oberfläche.

[6, S. 6–7]

2.1.1 Das Plancksche Strahlungsgesetz

Die spektrale spezifische Ausstrahlung eines ideal schwarzen Körpers E_b wird durch das Plancksche Strahlungsgesetz beschrieben. Es gibt an, wie viel Energie pro Zeit, Fläche und Frequenzintervall von einer ideal schwarzen Oberfläche bei einer bestimmten Temperatur T emittiert wird. Dieses Gesetz wurde 1900 von Max Planck [7] hergeleitet und ist heute als *Plancksches Strahlungsgesetz* bekannt. Für eine schwarze Oberfläche, die an ein transparentes Medium mit dem Brechungsindex n grenzt, ergibt sich die spektrale spezifische Ausstrahlung[6, S.7] zu:

$$E_{bf}(T, f) = \frac{2\pi h f^3 n^2}{c_0^2} \cdot \frac{1}{e^{hf/kT} - 1} \quad [6, \text{S.8}] \quad (2.1)$$

Zur Vereinfachung wird angenommen, dass der Brechungsindex $n = 1$ beträgt, da sich die betrachteten Vorgänge im Vakuum oder in Luft abspielen, wo dieser Wert nahezu identisch ist.

$$E_{bf}(T, f) = \frac{2\pi h f^3}{c_0^2} \cdot \frac{1}{e^{hf/kT} - 1} \quad (2.2)$$

Das Plancksche Strahlungsgesetz lässt sich auch in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ

formulieren:

$$E_{b\lambda}(T, \lambda) = \frac{2\pi hc_0^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc_0/\lambda kT} - 1} \quad (2.3)$$

Dabei bezeichnet $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s das Plancksche Wirkungsquantum, $c_0 = 2.998 \times 10^8$ m s⁻¹ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und $k = 1.381 \times 10^{-23}$ J K⁻¹ die Boltzmann-Konstante [9].

2.1.2 Das Stefan-Boltzmann Gesetz

Die Integration der spektralen spezifischen Ausstrahlung über das gesamte elektromagnetische Spektrum liefert die *Gesamtausstrahlung* E :

$$E = \int_0^\infty E_f df \quad (2.4)$$

[1]

Für einen idealen schwarzen Körper setzen wir E_{bf} aus Gleichung (??) in das Integral ein:

$$E_b(T) = \int_0^\infty \frac{2\pi h f^3}{c_0^2} \cdot \frac{1}{e^{hf/kT} - 1} df$$

Die Auswertung dieses Integrals erfordert komplexe Integrationstechniken und ist in Integraltabellen dokumentiert [6, S.13]. Das Ergebnis ist das *Stefan-Boltzmann Gesetz*:

$$E_b(T) = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c_0^2 h^3} T^4 = \sigma T^4 \quad [1] \quad (2.5)$$

Dabei bezeichnet $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$ W m⁻² K⁻⁴ die Stefan-Boltzmann Konstante [9].

2.1.3 Wiensches Verschiebungsgesetz

Die Wellenlänge λ_{max} bei welcher die spektrale spezifische Ausstrahlung eines schwarzen idealen Körpers $E_{b\lambda}$ mit der Temperatur T ein Maximum erreicht, erhält man indem man die Gleichung (??) nach λ ableitet und diese Gleichung gleich Null setzt. Die folgende mathematische Herleitung folgt Kraus [3, S.101].

$$\frac{\partial E_{b\lambda}(T, \lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

Die Ableitung nach λ ergibt mit der Produktregel:

$$\begin{aligned} -10 \frac{hc_0^2}{\lambda^6} \cdot \frac{1}{e^{hc_0/k\lambda T} - 1} - 2 \frac{hc_0^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{(e^{hc_0/k\lambda T} - 1)^2} \cdot e^{hc_0/k\lambda T} \cdot \left(-\frac{hc_0}{k\lambda^2 T} \right) = 0 \\ \frac{5}{\lambda} = \frac{1}{e^{hc_0/k\lambda T} - 1} \cdot e^{hc_0/k\lambda T} \cdot \frac{hc_0}{k\lambda^2 T} \end{aligned}$$

Mit der Substitution $x = \frac{hc_0}{k\lambda T}$ ergibt sich die transzendenten Gleichung:

$$5 = \frac{x \cdot e^x}{e^x - 1}$$

Die numerische Lösung dieser Gleichung liefert $x \approx 4.9651$. Rücksubstitution in $x_{max} = \frac{hc_0}{k\lambda_{max} T}$ ergibt das *Wiensche Verschiebungsgesetz*:

$$\begin{aligned} \lambda_{max} &= \frac{hc_0}{kx_{max} T} \\ \lambda_{max} T &= \frac{hc_0}{kx_{max}} \\ &= \frac{6.62612 \times 10^{-34} \text{ Js} \cdot 2.99792 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{1.38065 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \cdot 4.9651} \\ &= 2.8978 \times 10^{-3} \text{ m K} \end{aligned}$$

Das Wiensche Verschiebungsgesetz besagt, dass sich das Maximum der spektralen Ausstrahlung mit steigender Temperatur zu kürzeren Wellenlängen verschiebt[3, S.101]. Die Konstante $b = 2.8978 \times 10^{-3} \text{ m K}$ wird als *Wiensche Verschiebungskonstante* bezeichnet[9, S.49]. Umgestellt nach der Wellenlänge des Maximums ergibt sich:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} \quad (2.6)$$

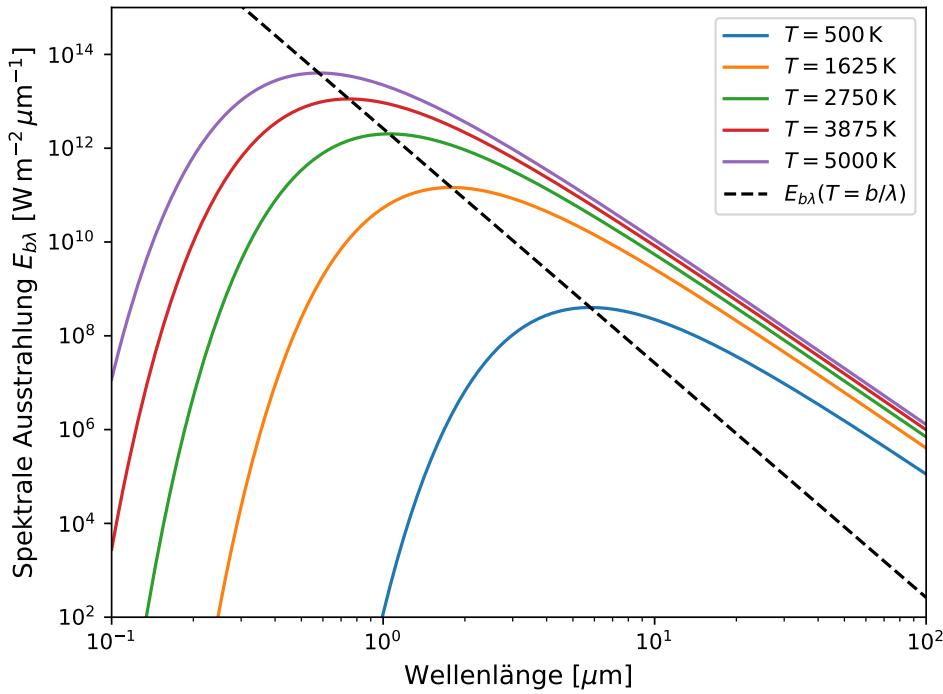


Abbildung 2.1: Spektrale spezifische Ausstrahlung $E_{b\lambda}$ eines schwarzen Körpers nach dem Planckschen Strahlungsgesetz für verschiedene Temperaturen. Die gestrichelte Linie verbindet die Maxima der Planck-Kurven und verdeutlicht das Wiensche Verschiebungsgesetz.

2.2 Strahlungsbilanz der Erde

Die Erde bezieht nahezu ihre gesamte Energie von der Sonne. Um ein thermisches Gleichgewicht aufrechtzuerhalten, muss sie Energie mit derselben Rate wieder abstrahlen, mit der sie diese empfängt[5, S.9]:

$$P_{\text{in}} = P_{\text{out}} \quad (2.7)$$

Die einfallende solare Bestrahlungsstärke am oberen Rand der Atmosphäre, die sogenannte *Solarkonstante*, beträgt $S_0 = 1361 \text{ W m}^{-2}$ [2, S. 5–6]. Da die Querschnittsfläche der Erde, welche die solare Strahlung abfängt, πr^2 beträgt[5, S.11], wobei $r = 6.371 \times 10^6 \text{ m}$ [8, S.56] der Erdradius ist, ergibt sich für die einfallende Strahlungsleistung:

$$\begin{aligned} P_{\text{solar}} &= S_0 \pi r^2 \\ &= 1.735 \times 10^{17} \text{ W} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Jedoch wird nicht die gesamte Strahlung von der Erde absorbiert, da ein Teil reflektiert wird. Der Anteil der reflektierten Strahlung wird als *Albedo* α bezeichnet. Abbildung ?? zeigt, dass α von der reflektierenden Oberfläche abhängt (detaillierte Werte für verschie-

dene Oberflächen siehe Anhang ??). Im globalen Mittel wird ein Anteil von $\alpha_p \simeq 0,30$ der eingehenden Strahlung reflektiert. Diese Größe wird als *planetare Albedo* bezeichnet[5, S.11].

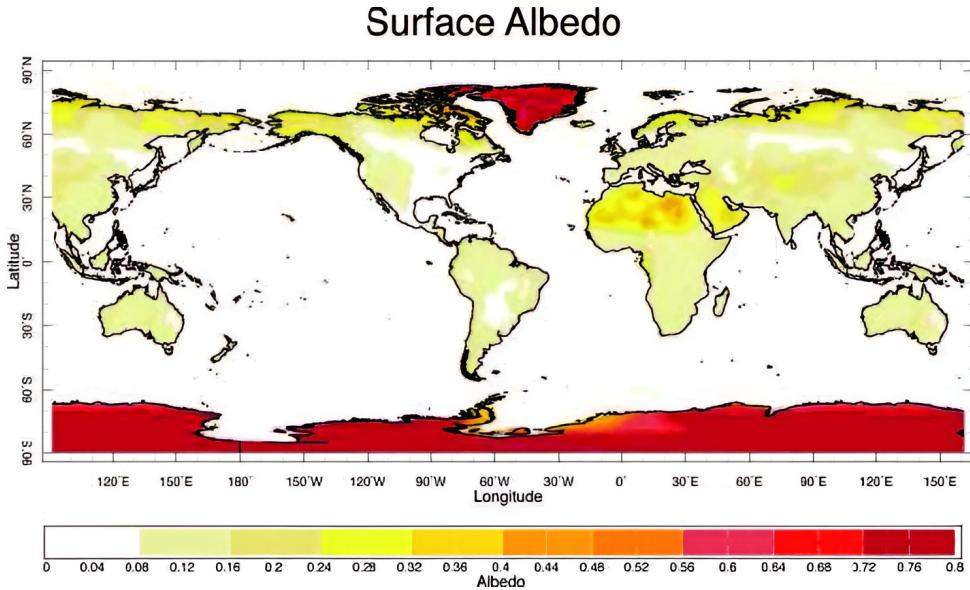


Abbildung 2.2: Räumliche Verteilung der Albedo an der Erdoberfläche[5, S.12].

Daraus folgt für die von der Erde absorbierte Strahlungsleistung:

$$\begin{aligned} P_{\text{in}} &= (1 - \alpha_p) S_0 \pi r^2 \\ &= 1.215 \times 10^{17} \text{ W} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Wegen des Energiegleichgewichts muss die von der Erde emittierte Strahlung die absorbierte Strahlung kompensieren. Dazu kann man annehmen, dass sich die Erde wie ein idealer schwarzer Körper mit gleichmäßiger Temperatur T_e verhält (bekannt als *effektive planetare Temperatur*) und dass das *Stefan-Boltzmann-Gesetz* wie in ?? anwendbar ist.

?? gibt die Gesamtausstrahlung $E_b(T)$ an, welche die ausgestrahlte Leistung pro Einheit der Oberfläche beschreibt: $E_b = \frac{P}{A}$ [1]. Die Erde strahlt über ihre gesamte Oberfläche $A = 4\pi r^2$ ab. Umgestellt nach der Strahlungsleistung ergibt sich[5, S.11]:

$$P_{\text{out}} = \sigma \cdot 4\pi r^2 \cdot T_e^4 \quad (2.10)$$

Durch Einsetzen von ?? und ?? in ?? und Umstellen nach T_e erhält man:

$$T_e = \left(\frac{S_0(1 - \alpha_p)}{4\sigma} \right)^{1/4} \quad (2.11)$$

Mit den Werten $S_0 = 1361 \text{ W m}^{-2}$, $\alpha_p = 0,30$ und $\sigma = 5.670 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} T_e &= \left(\frac{1361 \text{ W m}^{-2} \cdot (1 - 0,30)}{4 \cdot 5.670 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}} \right)^{1/4} \\ &= 254.6 \text{ K} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Diese Temperatur von etwa -18°C liegt deutlich unter der gemessenen globalen Mitteltemperatur der Erdoberfläche von circa 288 K[5, S.11]. Die Differenz von etwa 33 K wird durch den natürlichen Treibhauseffekt der Atmosphäre verursacht. Lacis et al. (2010) schlussfolgern: „In round numbers, water vapor accounts for about 50% of Earth’s greenhouse effect, with clouds contributing 25%, CO₂ 20%, and the minor GHGs and aerosols accounting for the remaining 5%.“[4], was zunächst vermuten lässt, dass CO₂ nicht die bedeutendste Rolle im Treibhauseffekt spielt. Jedoch bilden die nicht kondensierenden Treibhausgase CO₂, O₃, N₂O und CH₄ die Grundlage des Treibhauseffekts, da sie im Gegensatz zu Wasserdampf nicht durch Niederschlag aus der Atmosphäre entfernt werden. Wasserdampf und Wolken (zusammen 75%) wirken als schnelle Rückkopplungsmechanismen, deren Konzentration von der Temperatur und damit von den nicht kondensierenden Treibhausgasen abhängt[4].

Die Anwendung des Wienschen Verschiebungsgesetzes (??) auf Sonne ($T_{\text{Sonne}} = 5772 \text{ K}$ [2, S.6]) und Erde ($T_{\text{Erde}} = 288 \text{ K}$ [5, S.11]) verdeutlicht die fundamentale spektrale Asymmetrie zwischen solarer und terrestrischer Strahlung. Während die solare Strahlung ihr Maximum bei $\lambda_{\text{Sonne},\text{max}} = 0.50 \mu\text{m}$ hat, ist das Maximum der terrestrischen Strahlung bei $\lambda_{\text{Erde},\text{max}} = 10.06 \mu\text{m}$

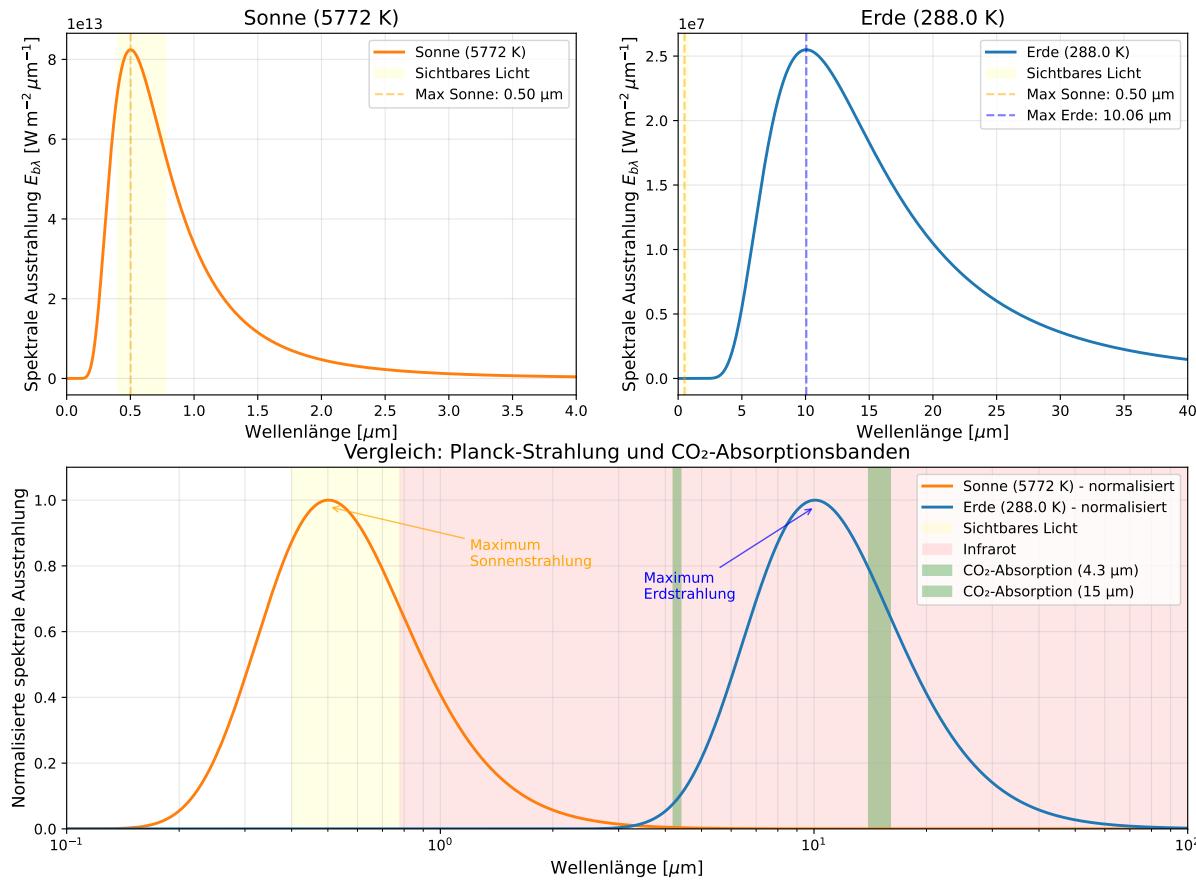


Abbildung 2.3: Vergleich von spektraler spezifischer Ausstrahlung von Sonne und Erde nach dem Planckschen Strahlungsgesetz mit den Absorptionsbanden des CO₂.

3 Molekülphysik des CO₂

3.1 Molekülstruktur und Schwingungsmoden

3.2 Quantenmechanische Grundlagen der Absorption

3.3 Das CO₂-Absorptionsspektrum

4 Der Treibhauseffekt

4.1 Strahlungsbilanz der Erde ohne Atmosphäre

5 Anhang

5.1 Literaturverzeichnis

- [1] Physics Department. *STEFAN - BOLTZMANN'S LAW OF RADIATION*. URL: https://laboratoriofisica.uc3m.es/guiones_ingles/qp/Stefan-Boltzmann_guide_english.pdf (besucht am 31.10.2025).
- [2] Greg Kopp. „Solar irradiance measurements“. In: *Living Reviews in Solar Physics* 22 (Juli 2025). DOI: [10.1007/s41116-025-00040-5](https://doi.org/10.1007/s41116-025-00040-5).
- [3] H. Kraus. *Die Atmosphäre der Erde: Eine Einführung in die Meteorologie*. Springer Berlin Heidelberg, 2007. ISBN: 9783540350170. URL: <https://books.google.de/books?id=2RI1BgAAQBAJ>.
- [4] Andrew Lacis u. a. „Atmospheric CO₂: Principal Control Knob Governing Earth's Temperature“. In: *Science (New York, N.Y.)* 330 (Okt. 2010), S. 356–9. DOI: [10.1126/science.1190653](https://doi.org/10.1126/science.1190653).
- [5] J. Marshall und R.A. Plumb. *Atmosphere, Ocean and Climate Dynamics: An Introductory Text*. International Geophysics. Academic Press, 2007. ISBN: 9780080556703. URL: <https://books.google.de/books?id=KvJfvYBHiegC>.
- [6] M. F. Modest. *Radiative heat transfer*. eng. 2nd ed. Amsterdam ; Academic Press, 2003. ISBN: 1-281-11929-6.
- [7] Max Planck. „Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum“. In: *Annalen der Physik* 309.3 (1901), S. 553–563. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19013090310>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.19013090310>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19013090310>.
- [8] Westermann Schulbuchverlag. *Mathematisch-Naturwissenschaftliche Formelsammlung IQB - Für die Abiturprüfung*. Braunschweig, Deutschland: Westermann Bildungsmedien Verlag GmbH, 2024, S. 72. ISBN: 978-3-14-127795-1.
- [9] Eite Tiesinga u. a. „CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2018“. In: *Rev. Mod. Phys.* 93 (2 Juni 2021), S. 025010. DOI: [10.1103/RevModPhys.93.025010](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.93.025010). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.93.025010>.

5.2 Daten und Tabellen

Art der Oberfläche	Albedo (%)
Ozean	2-10
Wald	6-18
Städte	14-18
Grass	7-25
Acker	10-20
Natürliche Graslandökosysteme	16-20
Wüste(Sand)	35-45
Eis	20-70
Wolken (dünn)	30
Wolken (dick)	60-70
Schnee (alt)	40-60
Schnee (frisch)	75-95

Tabelle 5.1: Albedos für Unterschiedliche Oberflächen[5, S.11].

5.3 Quellcode

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 from simulationen import ROOT_DIR
5 from simulationen.formeln import plancks_law, wiens_displacement_law
6
7
8
9 TEMPERATURE_EARTH = 288.0 # Kelvin
10 TEMPERATURE_SUN = 5772 # Kelvin
11
12 def main():
13
14     max_wavelength_sun = wiens_displacement_law(TEMPERATURE_SUN) # in Metern
15     max_wavelength_earth = wiens_displacement_law(TEMPERATURE_EARTH) # in
16         ↪ Metern
17     print(max_wavelength_sun, max_wavelength_earth)
18
19     wavelengths = np.linspace(1e-7, 100e-6, 20000)
20     # anything under 1e-7 will just be shown as 0 because its to small and
21         ↪ causes an overflow error.
22
23     spectral_radiance_earth, spectral_radiance_sun = [0.0], [0.0]
24     # we put 0.0 as the first value here so that in our data there will always
25         ↪ be a point P(0 / 0)
26     # without having an overflow error as described above
27     for wavelength in wavelengths:
28         spectral_radiance_sun.append(plancks_law(wavelength, TEMPERATURE_SUN))
29         spectral_radiance_earth.append(plancks_law( wavelength,
30             ↪ TEMPERATURE_EARTH))
31
32     wavelengths = np.insert(wavelengths, 0, 0.0)
33     # we put 0.0 as the first value here so that in our data there will always
34         ↪ be a point P(0 / 0)
35     # without having an overflow error as described above
36
37     fig = plt.figure(figsize=(14, 10))
38
39     # Obere Plots (1 row, 2 columns für die oberen beiden)
40     ax1 = plt.subplot2grid((2, 2), (0, 0))
41     ax2 = plt.subplot2grid((2, 2), (0, 1))
42     # Unterer Plot (nimmt die ganze Breite ein)
43     ax3 = plt.subplot2grid((2, 2), (1, 0), colspan=2)
```