

SEMINARARBEIT

Rahmenthema des Wissenschaftspropädeutischen Seminars:

Klima

Leitfach: Physik

Thema der Arbeit:

Die Strahlungsphysik des CO₂-
Treibhauseffekts

Verfasser/in: Christopher Mehnert

Kursleiter/in: Ulrich Steiner

Abgabetermin:

11. November 2025

Bewertung	Note	Notenstufe in Worten	Punkte		Punkte
Schriftliche Arbeit				x 3	
Abschlusspräsentation				x 1	
Summe:					
Gesamtleistung nach § 29 (6) GSO = Summe : 2 (gerundet)					

Datum und Unterschrift der Kursleiterin oder des Kursleiters

Erklärung:

Ich versichere, dass ich die vorgelegte Seminararbeit persönlich und unverfälscht verfasst, sämtliche hierfür zu Hilfe genommene gedruckte sowie digitale Quellen im Literaturverzeichnis angegeben und die aus diesen Quellen stammenden Zitate oder Belegstellen für sinngemäß wiedergegebene Inhalte in meiner Seminararbeit als solche kenntlich gemacht habe.

Die Seminararbeit ist in dieser oder einer ähnlichen Form in keinem anderen Kurs des diesjährigen oder eines vorhergehenden Abiturjahrgangs vorgelegt worden.

Ort, Datum

Unterschrift des/der Oberstufenschülers/in

S E M I N A R A R B E I T

Rahmenthema des Wissenschaftspropädeutischen Seminars:

Klima

Leitfach: Physik

Thema der Arbeit:

Die Strahlungsphysik des CO₂-Treibhauseffekts

Verfasser/in: Christopher Mehnert

Kursleiter/in: Ulrich Steiner

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	3
2 Physikalische Grundlagen der Wärmestrahlung	4
2.1 Strahlungsgesetze	5
2.1.1 Das Plancksche Strahlungsgesetz	5
2.1.2 Das Stefan-Boltzmann Gesetz	5
2.1.3 Wiensches Verschiebungsgesetz	6
2.2 Strahlungsbilanz der Erde	8
3 Molekülphysik des CO₂	11
3.1 Grundlagen der molekularen Absorption	11
3.2 Molekülstruktur und Schwingungsmoden	12
3.3 Quantenmechanische Grundlagen der Absorption	14
3.3.1 Rotationsübergänge	14
3.3.2 Vibrationsübergänge	14
3.3.3 Kombinierte Übergänge	15
3.4 Das CO ₂ -Absorptionsspektrum	16
3.4.1 Das v_3 -Vibrationsband von CO ₂	17
3.4.2 Das v_2 -Vibrationsband von CO ₂	18
4 Der Treibhauseffekt	18
4.1 Strahlungsbilanz der Erde ohne Atmosphäre	18
5 Anhang	19
5.1 Literaturverzeichnis	19
5.2 Daten und Tabellen	A
5.3 Formeln und Herleitungen	A
5.3.1 Herleitung der 3 Übergangsformeln	A
5.4 Quellcode	B

1 Einleitung

Test

2 Physikalische Grundlagen der Wärmestrahlung

Wärmestrahlung bezeichnet die elektromagnetische Strahlung, die von Materie aufgrund ihrer thermischen Energie emittiert wird. Elektromagnetische Strahlung ist eine Form der Energieübertragung, die sich im Raum ausbreitet und entweder als elektromagnetische Wellen (wie von der elektromagnetischen Wellentheorie beschrieben; [11]) oder als masselose Energiequanten, sogenannte *Photonen* (wie von der Quantenmechanik beschrieben; [2]), aufgefasst werden kann. Keine der beiden Sichtweisen können alle beobachteten Strahlungsphänomene vollständig beschreiben, weshalb beide Konzepte komplementär verwendet werden. [12, S. 1–2]

Elektromagnetische Strahlung bewegt sich mit der *Lichtgeschwindigkeit* $c = c_0/n$ wobei $c_0 = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist und n der Brechungsindex des Mediums ist. Da die in dieser Arbeit betrachteten Strahlungsprozesse hauptsächlich im Vakuum ($n \equiv 1$) oder in Luft ($n \approx 1.0002$) stattfinden, wird im Folgenden die Näherung $n = 1$ und somit $c = c_0$ verwendet. [12, S. 3]

Elektromagnetische Wellen werden durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

Eigenschaft	Beschreibung und Einheit
Frequenz, ν	Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit, $[\text{Hz}] = [\text{s}^{-1}]$
Wellenlänge, λ	Abstand zwischen zwei Wellenmaxima, $[\mu\text{m}]$ oder $[\text{nm}]$
Wellenzahl, η	Anzahl der Wellen pro Längeneinheit, $[\text{cm}^{-1}]$

Tabelle 2.1: Charakteristische Eigenschaften elektromagnetischer Wellen [12, S. 4].

$$\nu = \frac{c_0}{\lambda} = c_0 \eta \quad [12, \text{S. 4}] \quad (2.1)$$

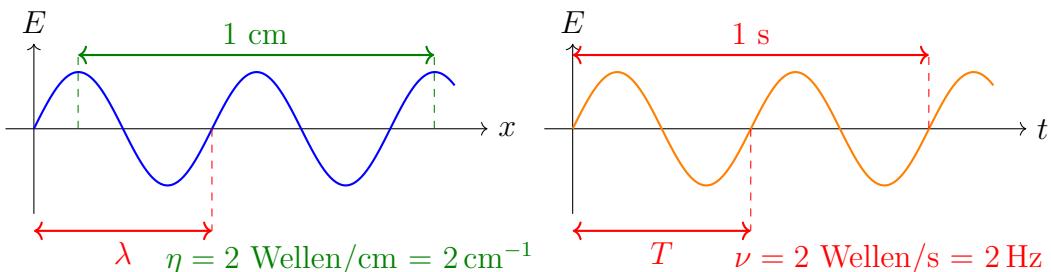


Abbildung 2.1: Visualisierung charakteristischer Eigenschaften elektromagnetischer Wellen. Links: Räumliche Darstellung zeigt die Wellenlänge λ und die Wellenzahl η . Rechts: Zeitliche Darstellung zeigt die Periode T und die Frequenz ν .

2.1 Strahlungsgesetze

Jedes Medium emittiert elektromagnetische Strahlung zufällig in alle Richtungen. Die Intensität dieser Emission hängt sowohl von der Temperatur als auch von den Materialeigenschaften des Mediums ab. Der von einer Oberfläche abgegebene Strahlungswärmestrom wird als *spezifische Ausstrahlung* bezeichnet.

Dabei wird zwischen der *gesamten spezifischen Ausstrahlung* E und der *spektralen spezifischen Ausstrahlung* E_ν unterschieden:

$E_\nu \equiv$ abgestrahlte Energie pro Zeit, Oberfläche und Frequenz.

$E \equiv$ abgestrahlte Energie pro Zeit und Oberfläche.

[12, S. 6–7]

2.1.1 Das Plancksche Strahlungsgesetz

Die spektrale spezifische Ausstrahlung eines ideal schwarzen Körpers $E_{b\nu}$ wird durch das Plancksche Strahlungsgesetz beschrieben. Es gibt an, wie viel Energie pro Zeit, Fläche und Frequenzintervall von einer ideal schwarzen Oberfläche bei einer bestimmten Temperatur T emittiert wird. Dieses Gesetz wurde 1900 von Max Planck [13] hergeleitet und ist heute als *Plancksches Strahlungsgesetz* bekannt. Für eine schwarze Oberfläche ergibt sich die spektrale spezifische Ausstrahlung[12, S. 7] zu:

$$E_{b\nu}(T, \nu) = \frac{2\pi h\nu^3}{c_0^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (2.2)$$

Das Plancksche Strahlungsgesetz lässt sich auch in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ formulieren:

$$E_{b\lambda}(T, \lambda) = \frac{2\pi hc_0^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc_0/\lambda kT} - 1} \quad (2.3)$$

Dabei bezeichnet $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s das Plancksche Wirkungsquantum, $c_0 = 2.998 \times 10^8$ m s⁻¹ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und $k = 1.381 \times 10^{-23}$ J K⁻¹ die Boltzmann-Konstante [17].

2.1.2 Das Stefan-Boltzmann Gesetz

Die Integration der spektralen spezifischen Ausstrahlung über das gesamte elektromagnetische Spektrum liefert die *Gesamtausstrahlung* E :

$$E = \int_0^\infty E_\nu d\nu \quad (2.4)$$

[1]

Für einen idealen schwarzen Körper setzen wir $E_{b\nu}$ aus Gleichung (2.2) in das Integral ein:

$$E_b(T) = \int_0^\infty \frac{2\pi h\nu^3}{c_0^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

Die Auswertung dieses Integrals erfordert komplexe Integrationstechniken und ist in Integraltabellen dokumentiert[12, S. 13]. Das Ergebnis ist das *Stefan-Boltzmann Gesetz*:

$$E_b(T) = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c_0^2 h^3} T^4 = \sigma T^4 \quad [1] \quad (2.5)$$

Dabei bezeichnet $\sigma = 5.670 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ die Stefan-Boltzmann Konstante [17].

2.1.3 Wiensches Verschiebungsgesetz

Die Wellenlänge λ_{max} bei welcher die spektrale spezifische Ausstrahlung eines schwarzen idealen Körpers $E_{b\lambda}$ mit der Temperatur T ein Maximum erreicht, erhält man, indem man die Gleichung (2.3) nach λ ableitet und diese Gleichung gleich Null setzt. Die folgende mathematische Herleitung folgt Kraus [8, S. 101].

$$\frac{\partial E_{b\lambda}(T, \lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

Die Ableitung nach λ ergibt mit der Produktregel:

$$\begin{aligned} & -10 \frac{hc_0^2}{\lambda^6} \cdot \frac{1}{e^{hc_0/k\lambda T} - 1} - 2 \frac{hc_0^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{(e^{hc_0/k\lambda T} - 1)^2} \cdot e^{hc_0/k\lambda T} \cdot \left(-\frac{hc_0}{k\lambda^2 T} \right) = 0 \\ & \frac{5}{\lambda} = \frac{1}{e^{hc_0/k\lambda T} - 1} \cdot e^{hc_0/k\lambda T} \cdot \frac{hc_0}{k\lambda^2 T} \end{aligned}$$

Mit der Substitution $x = \frac{hc_0}{k\lambda T}$ ergibt sich die transzendente Gleichung:

$$5 = \frac{x \cdot e^x}{e^x - 1}$$

Die numerische Lösung dieser Gleichung liefert $x \approx 4.9651$. Rücksubstitution in $x_{max} = \frac{hc_0}{k\lambda_{max} T}$ ergibt das *Wiensche Verschiebungsgesetz*:

$$\begin{aligned}\lambda_{max} &= \frac{hc_0}{kx_{max}T} \\ \lambda_{max}T &= \frac{hc_0}{kx_{max}} \\ &= \frac{6.626\,12 \times 10^{-34} \text{ J s} \cdot 2.997\,92 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{1.380\,65 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \cdot 4.9651} \\ &= 2.8978 \times 10^{-3} \text{ m K}\end{aligned}$$

Das Wiensche Verschiebungsgesetz besagt, dass sich das Maximum der spektralen Ausstrahlung mit steigender Temperatur zu kürzeren Wellenlängen verschiebt[8, S. 101]. Die Konstante $b = 2.8978 \times 10^{-3} \text{ m K}$ wird als *Wiensche Verschiebungskonstante* bezeichnet[17, S. 49]. Umgestellt nach der Wellenlänge des Maximums ergibt sich:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} \quad (2.6)$$

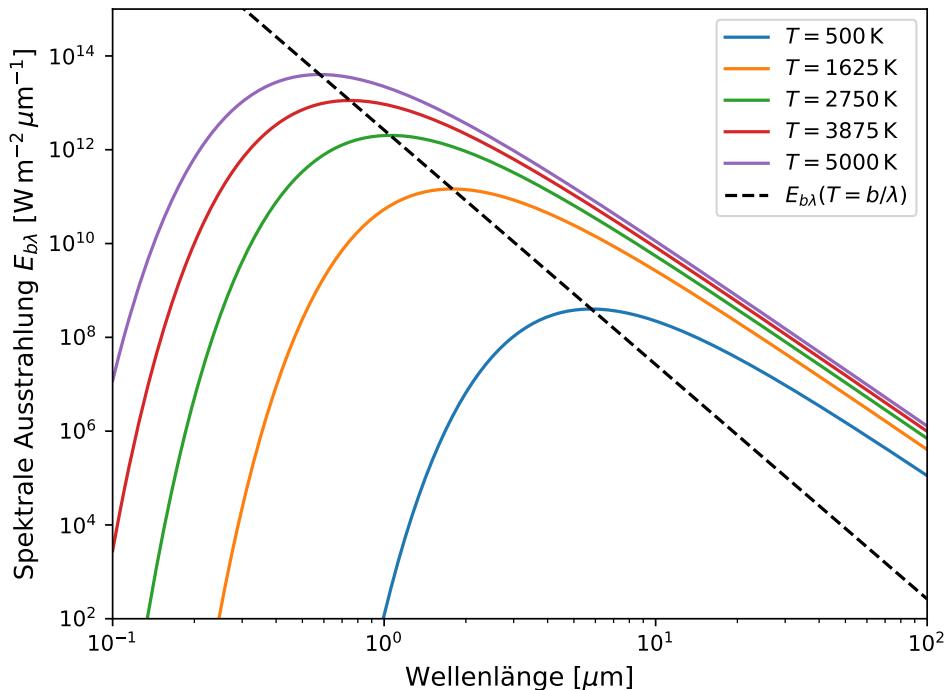


Abbildung 2.2: Spektrale spezifische Ausstrahlung $E_{b\lambda}$ eines schwarzen Körpers nach dem Planckschen Strahlungsgesetz für verschiedene Temperaturen. Die gestrichelte Linie verbindet die Maxima der Planck-Kurven und verdeutlicht das Wiensche Verschiebungsgesetz. Grafik wurde mithilfe von [14] erstellt, der Code ist im Anhang 5.3 dokumentiert.

2.2 Strahlungsbilanz der Erde

Die Erde bezieht nahezu ihre gesamte Energie von der Sonne. Um ein thermisches Gleichgewicht aufrechtzuerhalten, muss sie Energie mit derselben Rate wieder abstrahlen, mit der sie diese empfängt[10, S. 9]:

$$P_{\text{in}} = P_{\text{out}} \quad (2.7)$$

Die einfallende solare Bestrahlungsstärke am oberen Rand der Atmosphäre, die sogenannte *Solarkonstante*, beträgt $S_0 = 1361 \text{ W m}^{-2}$ [7, S. 5–6]. Da die Querschnittsfläche der Erde, welche die solare Strahlung abfängt, πr^2 beträgt[10, S. 11], wobei $r = 6.371 \times 10^6 \text{ m}$ [15, S. 56] der Erdradius ist, ergibt sich für die einfallende Strahlungsleistung:

$$\begin{aligned} P_{\text{solar}} &= S_0 \pi r^2 \\ &= 1.735 \times 10^{17} \text{ W} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Jedoch wird nicht die gesamte Strahlung von der Erde absorbiert, da ein Teil reflektiert wird. Der Anteil der reflektierten Strahlung wird als *Albedo* α bezeichnet. Abbildung 2.3 zeigt, dass α von der reflektierenden Oberfläche abhängt (detaillierte Werte für verschiedene Oberflächen siehe Anhang Tabelle 5.1). Im globalen Mittel wird ein Anteil von $\alpha_p \simeq 0,30$ der eingehenden Strahlung reflektiert. Diese Größe wird als *planetare Albedo* bezeichnet[10, S. 11].

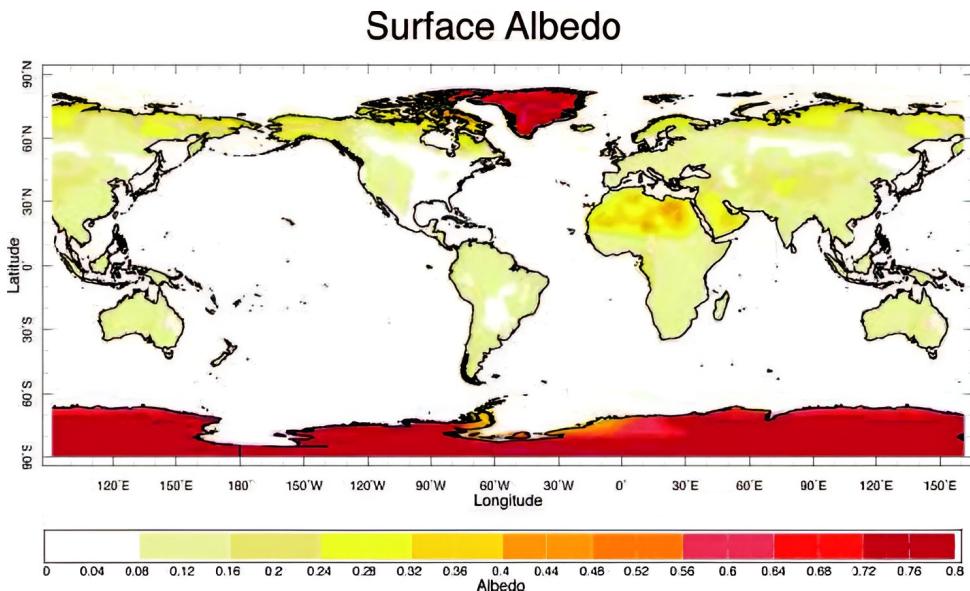


Abbildung 2.3: Räumliche Verteilung der Albedo an der Erdoberfläche[10, S. 12].

Daraus folgt für die von der Erde absorbierte Strahlungsleistung:

$$\begin{aligned} P_{\text{in}} &= (1 - \alpha_p) S_0 \pi r^2 \\ &= 1.215 \times 10^{17} \text{ W} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Wegen des Energiegleichgewichts muss die von der Erde emittierte Strahlung die absorbierte Strahlung kompensieren. Dazu kann man annehmen, dass sich die Erde wie ein idealer schwarzer Körper mit gleichmäßiger Temperatur T_e verhält (bekannt als *effektive planetare Temperatur*) und dass das *Stefan-Boltzmann-Gesetz* wie in Unterunterabschnitt 2.1.2 anwendbar ist.

Gleichung 2.5 gibt die Gesamtausstrahlung $E_b(T)$ an, welche die ausgestrahlte Leistung pro Einheit der Oberfläche beschreibt: $E_b = \frac{P}{A}[1]$. Die Erde strahlt über ihre gesamte Oberfläche $A = 4\pi r^2$ ab. Umgestellt nach der Strahlungsleistung ergibt sich[10, S. 11]:

$$P_{\text{out}} = \sigma \cdot 4\pi r^2 \cdot T_e^4 \quad (2.10)$$

Durch Einsetzen von Gleichung 2.9 und Gleichung 2.10 in Gleichung 2.7 und Umstellen nach T_e erhält man:

$$T_e = \left(\frac{S_0(1 - \alpha_p)}{4\sigma} \right)^{1/4} \quad (2.11)$$

Mit den Werten $S_0 = 1361 \text{ W m}^{-2}$, $\alpha_p = 0,30$ und $\sigma = 5.670 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} T_e &= \left(\frac{1361 \text{ W m}^{-2} \cdot (1 - 0,30)}{4 \cdot 5.670 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}} \right)^{1/4} \\ &= 254,6 \text{ K} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Diese Temperatur von etwa -18°C liegt deutlich unter der gemessenen globalen Mitteltemperatur der Erdoberfläche von circa 288 K[10, S. 11]. Die Differenz von etwa 33 K wird durch den natürlichen Treibhauseffekt der Atmosphäre verursacht. Lacis et al. (2010) schlussfolgern: „In round numbers, water vapor accounts for about 50% of Earth’s greenhouse effect, with clouds contributing 25%, CO₂ 20%, and the minor GHGs and aerosols accounting for the remaining 5%.“[9], was zunächst vermuten lässt, dass CO₂ nicht die bedeutendste Rolle im Treibhauseffekt spielt. Jedoch bilden die nicht kondensierenden Treibhausgase CO₂, O₃, N₂O und CH₄ die Grundlage des Treibhauseffekts, da sie im Gegensatz zu Wasserdampf nicht durch Niederschlag aus der Atmosphäre entfernt werden. Wasserdampf und Wolken (zusammen 75%) wirken als schnelle Rückkopplungsmechanismen, deren Konzentration von der Temperatur und damit von den nicht kondensierenden

Treibhausgasen abhängt[9].

Die Anwendung des Wienschen Verschiebungsgesetzes (Gleichung 2.6) auf Sonne ($T_{\text{Sonne}} = 5772 \text{ K}$ [7, S. 6]) und Erde ($T_{\text{Erde}} = 288 \text{ K}$ [10, S. 11]) verdeutlicht die fundamentale spektrale Asymmetrie zwischen solarer und terrestrischer Strahlung. Während die solare Strahlung ihr Maximum bei $\lambda_{\text{Sonne},\text{max}} = 0.50 \mu\text{m}$ hat, liegt das Maximum der terrestrischen Strahlung bei $\lambda_{\text{Erde},\text{max}} = 10.06 \mu\text{m}$ (visualisiert in Abbildung 2.4).

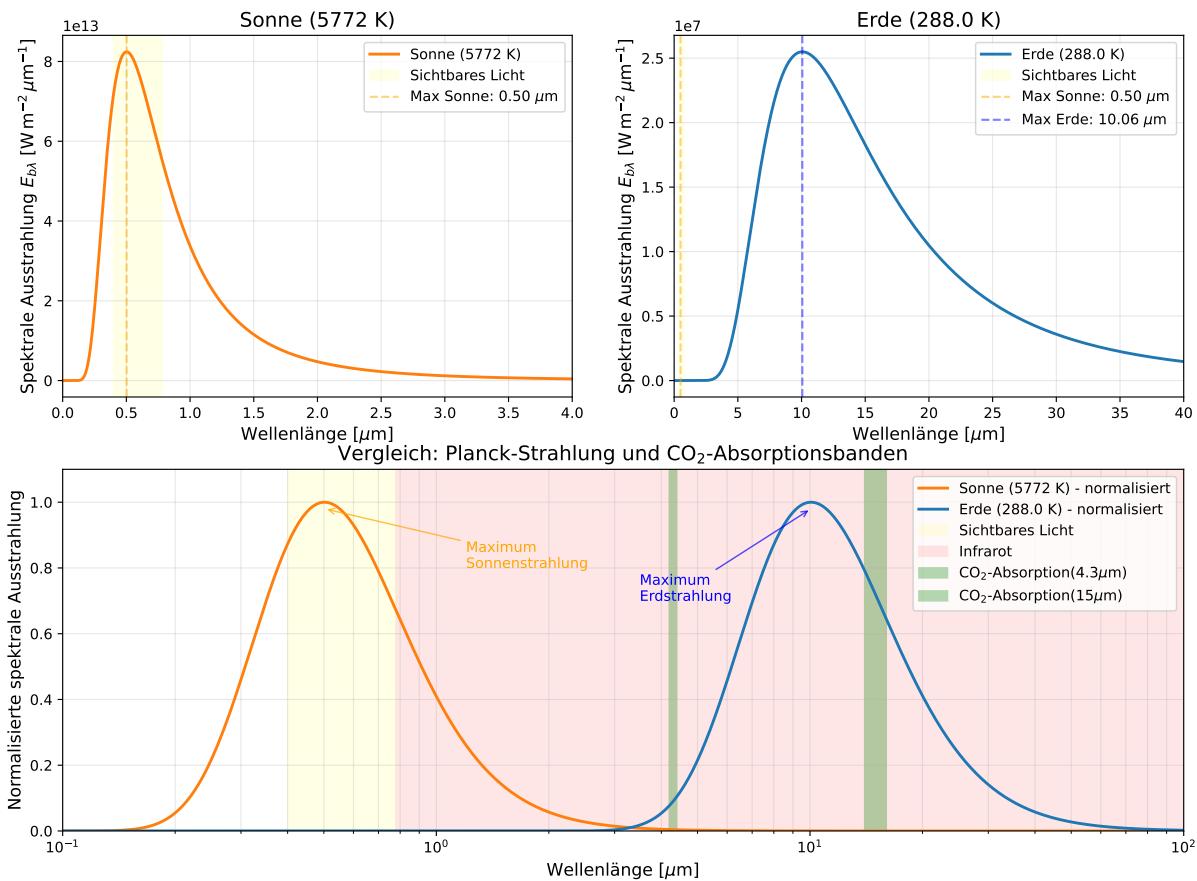


Abbildung 2.4: Vergleich der spektralen spezifischen Ausstrahlung von Sonne und Erde nach dem Planckschen Strahlungsgesetz mit den Absorptionsbanden von CO₂. Grafik erstellt mit [14], Code dokumentiert in Anhang 5.4.

Die spektrale Lage der CO₂-Absorptionsbanden erklärt, warum CO₂ als Treibhausgas wirkt: Es ist weitgehend transparent für die kurzwellige Sonnenstrahlung, absorbiert jedoch die langwellige Strahlung, die von der Erde emittiert wird. Die fundamentale Frage, die sich daraus ergibt, ist: *Warum absorbiert CO₂ gerade bei diesen Wellenlängen?* Im folgenden Kapitel wird die molekulophysikalische Grundlage dieser Absorption detailliert untersucht.

3 Molekülphysik des CO₂

Die Wechselwirkung elektromagnetischer Strahlung mit atmosphärischen Molekülen ist ein quantenmechanisches Phänomen von erheblicher Komplexität. Im Rahmen dieser Arbeit liegt der Fokus auf den durch CO₂ bedingten Aspekten des Treibhauseffekts, ohne die vollständige molekülphysikalische Theorie zu behandeln.

Für praktische Berechnungen atmosphärischer Strahlungstransfers stehen umfassende spektroskopische Datenbanken zur Verfügung. Die HITRAN-Datenbank [3][6] enthält hochaufgelöste Absorptionslinien für über 50 atmosphärische Moleküle und bildet den Standard für quantitative Analysen. Die folgenden Abschnitte erläutern die physikalischen Grundlagen dieser Absorptionsprozesse, ohne die vollständige quantenmechanische Behandlung zu vertiefen.

3.1 Grundlagen der molekularen Absorption

Ein Photon, das auf ein Gasmolekül trifft, kann entweder absorbiert oder gestreut werden. Die Streuung ändert die Ausbreitungsrichtung und gegebenenfalls die Energie des Photons. Dieser Effekt ist für unsere Betrachtung jedoch von untergeordneter Bedeutung, weshalb der Fokus auf der Absorption liegt. Wird ein Photon absorbiert, führt dies dazu, dass das Energieniveau des Moleküls angehoben wird. Umgekehrt kann ein Molekül sein Energieniveau senken, indem es ein Photon emittiert.

Moleküle besitzen eine Gesamtenergie, die sich aus verschiedenen Beiträgen zusammensetzt: der elektronischen Energie, die durch die Verteilung der Elektronen in den Molekülorbitalen bestimmt wird, der Rotationsenergie, die aus der Drehbewegung des gesamten Moleküls um seine Trägheitsachsen resultiert, sowie der Schwingungsenergie, die durch die periodischen Relativbewegungen der Atomkerne gegeneinander entsteht.

Für die Wechselwirkung eines Moleküls mit elektromagnetischer Strahlung ist ein zeitlich veränderliches Dipolmoment fundamental. Dies bedeutet, dass sich die Ladungsverteilung im Molekül während der Rotation oder Schwingung periodisch ändern muss, wodurch ein oszillierendes elektrisches Dipolmoment entsteht.

Nach den Grundsätzen der Quantenmechanik können die Energieniveaus für molekulare Elektronenorbitale, ebenso wie die Energieniveaus für molekulare Rotation und Vibration, nur bestimmte diskrete Werte annehmen. Ein Photon kann nur dann absorbiert werden, wenn seine Energie $E = h\nu$ exakt der Energiedifferenz zwischen zwei erlaubten Zuständen entspricht (Resonanzbedingung). Daher können nur Photonen mit ganz bestimmten Frequenzen absorbiert oder emittiert werden, was zu charakteristischen Spektrallinien führt.

3.2 Molekülstruktur und Schwingungsmoden

Wir haben bereits die drei möglichen Arten der Energieniveaus eines Moleküls kennengelernt. Jedoch ist die Energie, welche nötig ist, um elektronische Übergänge zu bewirken, so groß, dass man elektromagnetische Strahlung mit sehr niedriger Wellenlänge benötigt (zwischen 0.01 µm und 1.5 µm)[12, S. 287]. Da sich diese Arbeit auf CO₂ konzentriert und dieses keine für uns relevanten Absorptionsbanden im Bereich unter 1.5 µm besitzt (siehe Abbildung 3.1), werden wir diese Energieänderungen vernachlässigen.

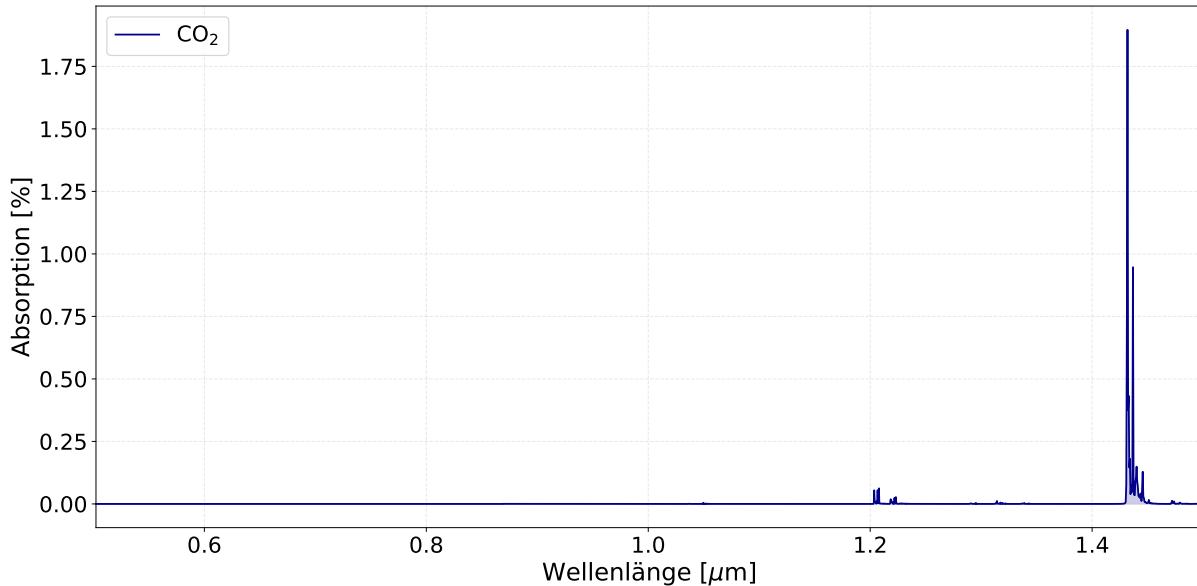


Abbildung 3.1: Absorptionsspektrum von CO₂ unter 1.5 µm. Das einzige erkennbare Absorptionsband bei circa 1.435 µm ist nur knapp über 2% Absorption. Daten kommen von der HITRAN Datenbank [6], Grafik wurde mithilfe von [14] erstellt, der Code ist im Anhang 5.6 dokumentiert.

Vibrationsübergänge erfordern deutlich weniger Energie, weshalb die zugehörigen Spektrallinien zwischen 1.5 µm und 10 µm auftreten. Rotationsübergänge benötigen die geringste Energie und erscheinen daher bei Wellenlängen oberhalb von 10 µm. Für unseren Fokus auf CO₂ spielen reine Rotationsübergänge jedoch keine Rolle, da CO₂ aufgrund seiner symmetrischen linearen Struktur kein permanentes Dipolmoment besitzt, welches für reine Rotationsübergänge erforderlich wäre. In der Praxis werden Vibrationsübergänge jedoch fast immer von simultanen Rotationsübergängen begleitet. Daraus resultieren eng benachbarte Spektrallinien, die teilweise überlappen und die sogenannten *Vibrations-Rotations-Bänder* im Infrarotspektrum formen, die im Fokus dieser Arbeit stehen. Diese entstehen durch die *Freiheitsgrade* eines Moleküls. Jedes Molekül bewegt sich im dreidimensionalen Raum, weshalb jedes Molekül drei translatorische Freiheitsgrade für die x-, y- und z-Richtung besitzt. Da jedes Atom eines Moleküls sich theoretisch im dreidimensionalen Raum bewegen kann, beträgt die Gesamtzahl der Freiheitsgrade eines Moleküls

mit N Atomen $3N$. Da die Atome im Molekül miteinander verbunden sind, können sie sich nicht unabhängig voneinander bewegen, sondern nur relativ zueinander. Diese Bewegungen entsprechen den Vibrations- und Rotations-Freiheitsgraden. Die Anzahl dieser inneren Freiheitsgrade beträgt $3N - 3$, also die Gesamtzahl der Freiheitsgrade minus die drei translatorischen Freiheitsgrade. Je nachdem, ob das Molekül linear oder nichtlinear ist, werden diese inneren Freiheitsgrade unterschiedlich auf Rotations- und Vibrations-Freiheitsgrade aufgeteilt. Für lineare Moleküle gibt es zwei Rotations-Freiheitsgrade. Für CO₂ ergeben sich daher $3 \cdot 3 - 3 - 2 = 4$ Vibrations-Freiheitsgrade.

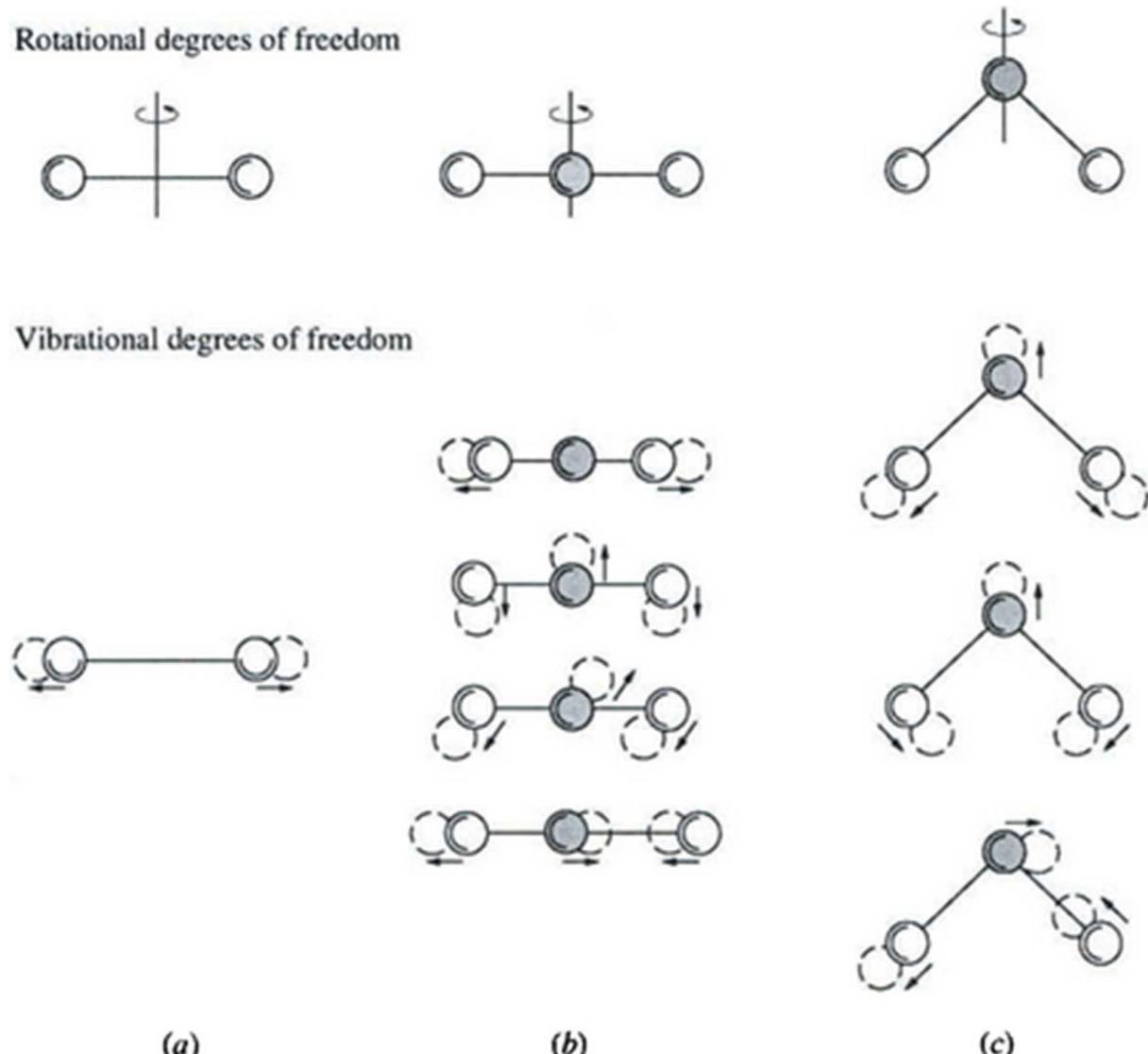


Abbildung 3.2: Rotations- und Vibrations-Freiheitsgrade für (a) zweiatomige, (b) linear dreiatomige und (c) nichtlineare dreiatomige Moleküle. [12, S. 293]

3.3 Quantenmechanische Grundlagen der Absorption

3.3.1 Rotationsübergänge

Zur Vereinfachung wird angenommen, dass ein Molekül aus Punktmassen besteht, die durch starre, masselose Stäbe verbunden sind, das sogenannte Modell des starren Rotators (rigid rotator model). Mit diesem Modell lassen sich die erlaubten Rotationsenergieniveaus mittels der Schrödinger-Gleichung berechnen. Die Lösung dieser Gleichung für lineare Moleküle besagt, dass die möglichen Energieniveaus wie folgt gegeben sind [12, S. 293][5, S. 66]:

$$E_j = \frac{\hbar^2}{2I} j(j+1) = hc_0 B j(j+1), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad [12, \text{S. 293}][5, \text{S. 68--71}] \quad (3.1)$$

Dabei ist I das Trägheitsmoment des Moleküls und \hbar die reduzierte Planck-Konstante. Zur Vereinfachung wurde B eingeführt, das die *Rotationskonstante* beschreibt. Die Rotationsquantenzahl j beschreibt den Rotationszustand des Moleküls. Für den Grundzustand gilt $j = 0$, bei dem das Molekül nicht rotiert. Je höher j ist, desto schneller ist die Rotationsgeschwindigkeit des Moleküls [12, S. 294].

Die für die Absorption bei einem Rotationsübergang erforderliche Energie lässt sich mit $\Delta E = E_{j+1} - E_j$ berechnen, wodurch auch die entsprechende Frequenz bestimmt werden kann ($E = h\nu$). Eine notwendige Bedingung für die Beobachtung solcher Übergänge ist jedoch, dass das Molekül ein permanentes elektrisches Dipolmoment besitzt. Da CO₂ aufgrund seiner symmetrischen linearen Struktur kein permanentes Dipolmoment aufweist, können reine Rotationsübergänge nicht beobachtet werden [12, S. 294]. Warum Rotationsübergänge trotzdem für CO₂ von Bedeutung sind, wird in Unterunterabschnitt 3.3.3 erläutert.

3.3.2 Vibrationsübergänge

Zur Vereinfachung wird angenommen, dass zwei Punktmassen durch eine perfekt elastische masselose Feder verbunden sind. Dieses Modell wird als harmonische Oszillator bezeichnet. Bei diesem Modell lassen sich die möglichen Energieniveaus ebenfalls mit einer Lösung der Schrödinger-Gleichung berechnen [12, S. 294–259][5, S. 73–74]:

$$E_v = h\nu_e \left(v + \frac{1}{2} \right), \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad [12, \text{S. 259}][5, \text{S. 76}] \quad (3.2)$$

Dabei ist ν_e die Eigenfrequenz der harmonischen Schwingung und v ist die Vibrationsquantenzahl, die ähnlich wie die Rotationsquantenzahl den Vibrationszustand beschreibt. Dieses Modell lässt nur die Auswahlregel $\Delta v = \pm 1$ zu, sodass die Vibrationszustände nur um 1 erhöht oder gesenkt werden können. Dies würde zu einer einzigen Spektrallinie bei

der Eigenfrequenz führen [12, S. 295]:

$$\Delta E = E_{v+1} - E_v = h\nu_e \left(\left(v + \frac{3}{2} \right) - \left(v + \frac{1}{2} \right) \right) = h\nu_e = \text{const} \quad (3.3)$$

Allerdings ist das Modell eines harmonischen Oszillators deutlich ungenauer als das des starren Rotators. Dies lässt sich dadurch erklären, dass bei einer perfekt elastischen Feder die Kraft linear mit der Auslenkung zunimmt, wohingegen die Kraft bei Atomen, die sich relativ zueinander bewegen, nichtlinear zunimmt. Wird daher eine komplexere Federkonstante in die Analyse einbezogen, führt dies zu weiteren Termen in Gleichung 3.2, wodurch sich die Auswahlregel zu $\Delta v = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ändert. Dies resultiert in mehreren ungefähr gleichmäßig voneinander entfernten Spektrallinien. Der Übergang mit $\Delta v = \pm 1$ wird als *Fundamentalübergang* bezeichnet und ist normalerweise bei weitem der stärkste, während die weiteren Übergänge mit $\Delta v = \pm 2, \Delta v = \pm 3, \dots$ als Obertöne bezeichnet werden. Der Vibrationszustand eines Moleküls wird mithilfe der Vibrationsquantenzahlen beschrieben, bei CO₂ beispielsweise durch (v_1, v_2, v_3). Obwohl CO₂ vier Vibrations-Freiheitsgrade besitzt (siehe Unterabschnitt 3.2), werden nur drei Quantenzahlen benötigt. Der Grund hierfür ist, dass die zweite Vibrationsmode v_2 zweifach entartet ist: Es handelt sich um dieselbe Schwingung, die in zwei senkrecht zueinander stehenden Ebenen stattfindet [12, S. 295–297].

3.3.3 Kombinierte Übergänge

Wären für CO₂ nur Vibrationsübergänge möglich, gäbe es im Absorptionsspektrum nur sehr schmale Spektrallinien. Dies ist jedoch nicht der Fall (siehe Abbildung 3.3), da Vibrationsübergänge und Rotationsübergänge oft gleichzeitig stattfinden und zu den oben genannten *Vibrations-Rotations-Bändern* führen, welche aus vielen nah aneinanderliegenden Spektrallinien bestehen. Für Fundamentalübergänge liegt der Mittelpunkt dieser Linien wie beim Modell des harmonischen Oszillators bei der Eigenfrequenz des Vibrationsübergangs ν_e . Dieser Punkt wird als Bandmitte $\eta_0 = \nu_e/c_0$ bezeichnet [12, S. 298].

Für das einfachste Modell eines starren Rotators (Gleichung 3.1) kombiniert mit einem harmonischen Oszillator (Gleichung 3.2) ergibt sich die Gesamtenergie eines Molekülzustands als Summe der Vibrationsenergie und der Rotationsenergie:

$$E_{vj} = h\nu_e \left(v + \frac{1}{2} \right) + hc_0 B_v j(j+1), \quad v, j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Im Gegensatz zum idealisierten starren Rotator ist die Rotationskonstante in realen Molekülen vom Vibrationszustand abhängig, weshalb hier B_v verwendet wird. Durch die gleichzeitige Änderung von Rotations- und Vibrationszustand entstehen bei einem Fundamentalübergang ($\Delta v = \pm 1$) drei charakteristische Zweige: der *P*-Zweig ($\Delta j = -1$),

der *Q*-Zweig ($\Delta j = 0$) und der *R*-Zweig ($\Delta j = +1$) [12, S. 298]. Die Wellenzahlen der Spektrallinien in diesen Zweigen sind gegeben durch:

$$\eta_P(j) = \eta_0 + j^2(B_{v+1} - B_v) - j(B_{v+1} + B_v) \quad (3.5a)$$

$$\eta_Q(j) = \eta_0 + j(j+1)(B_{v+1} - B_v) \quad (3.5b)$$

$$\eta_R(j) = \eta_0 + j^2(B_{v+1} - B_v) + j(3B_{v+1} - B_v) + 2B_{v+1} \quad (3.5c)$$

wobei η_0 die Bandmitte bezeichnet. Die detaillierte Herleitung dieser Formeln findet sich in Unterunterabschnitt 5.3.1. Bei linearen Molekülen wie CO₂ gibt es oft keinen *Q*-Zweig. Mehr dazu in Unterabschnitt 3.4.

3.4 Das CO₂-Absorptionsspektrum

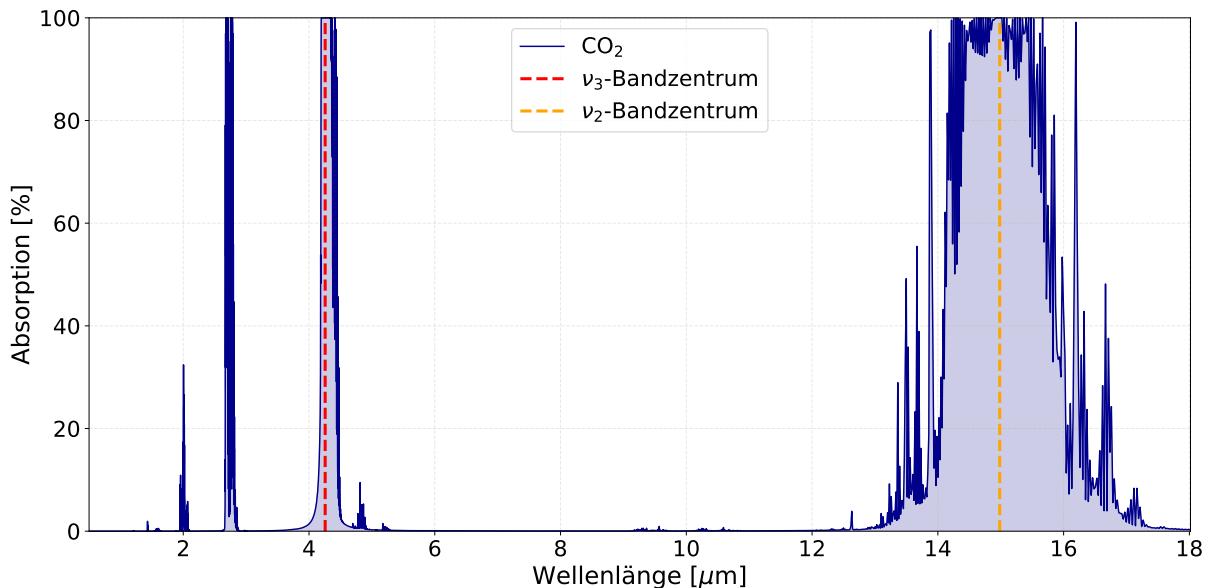


Abbildung 3.3: Absorptionsspektrum von CO₂. Daten stammen aus der HITRAN-Datenbank [6], Grafik wurde mithilfe von [14] erstellt, der Code ist im Anhang 5.6 dokumentiert.

Abbildung 3.3 zeigt die charakteristischen Absorptionsbanden von CO₂. Die beiden Hauptabsorptionsbanden sind die zweifach entartete Biegeschwingung v_2 bei $\approx 667 \text{ cm}^{-1}$ ($\approx 15.0 \mu\text{m}$) und die asymmetrische Strettschwingung v_3 bei $\approx 2349 \text{ cm}^{-1}$ ($\approx 4.26 \mu\text{m}$). Die in Abbildung 3.2 dargestellte symmetrische Strettschwingung v_1 bei $\approx 1388 \text{ cm}^{-1}$ ($\approx 7.20 \mu\text{m}$) erscheint nicht im Spektrum, da diese Schwingungsmodus keine Änderung des Dipolmoments bewirkt und somit infrarot-inaktiv ist [16, S. 39].

Das Absorptionsband bei $\approx 2.7 \mu\text{m}$ resultiert aus Kombinationsschwingungen: Die Über-

lagerung von $v_1 + v_3$ ergibt $\approx 3737 \text{ cm}^{-1}$ ($\approx 2.68 \mu\text{m}$), während die Kombination $2v_2 + v_3$ zu $\approx 3683 \text{ cm}^{-1}$ ($\approx 2.72 \mu\text{m}$) führt [4, S. 274]. Bei kritischer Beobachtung fällt auf das die symmetrische Strettschwingung v_1 eigentlich infrarot-inaktiv ist, jedoch wird die Kombination infrarot-aktiv, da die gleichzeitige Anregung mit v_3 zu einer Dipolmomentänderung führt.

3.4.1 Das v_3 -Vibrationsband von CO₂

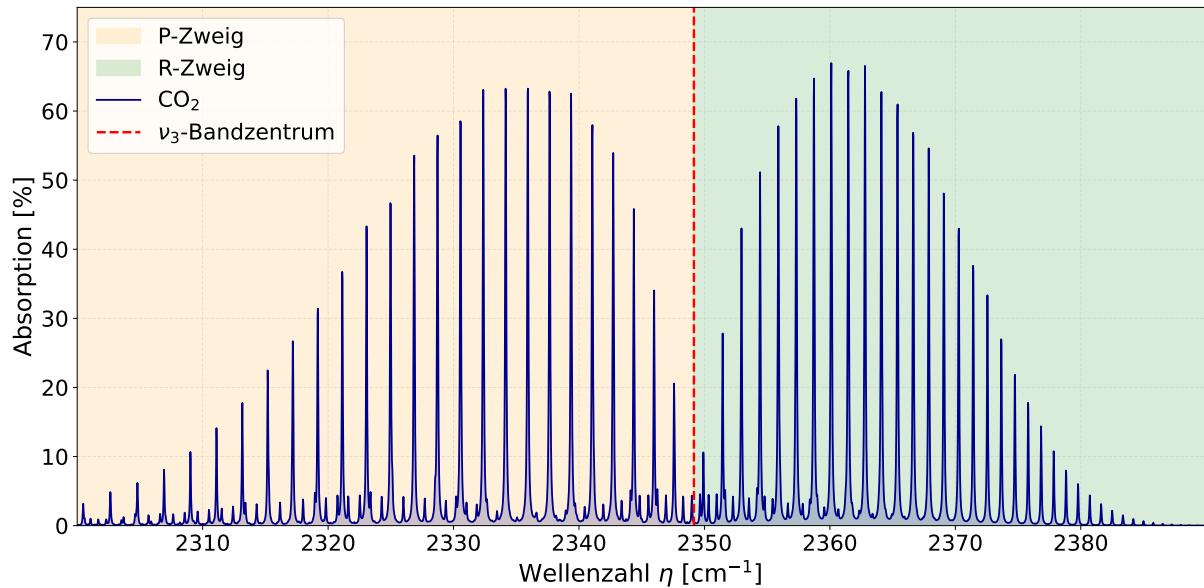


Abbildung 3.4: Absorptionsspektrum des v_3 -Vibrationsbandes von CO₂. Daten kommen von der HITRAN Datenbank [6] und von [16, S. 39], Grafik wurde mithilfe von [14] erstellt, der Code ist im Anhang 5.7 dokumentiert.

Bei genauerer Betrachtung des v_3 -Vibrationsbandes in Abbildung 3.4 zeigt sich, dass kein Q-Zweig gebildet wird. Das lässt sich durch den Drehimpuls eines Photons erklären, jedes Photon trägt einen Drehimpuls von \hbar , welcher bei Absorption auf das Molekül übertragen werden muss. Deswegen muss es einen kombinierten Rotationsübergang ($\Delta v = +1$, $\Delta j = \pm 1$) geben. Da unsere Auswahlregel $\Delta j = 0$ nicht zulässt, ist der Q-Zweig verboten. Die P - und R -Zweige sind gut sichtbar.

3.4.2 Das v_2 -Vibrationsband von CO₂

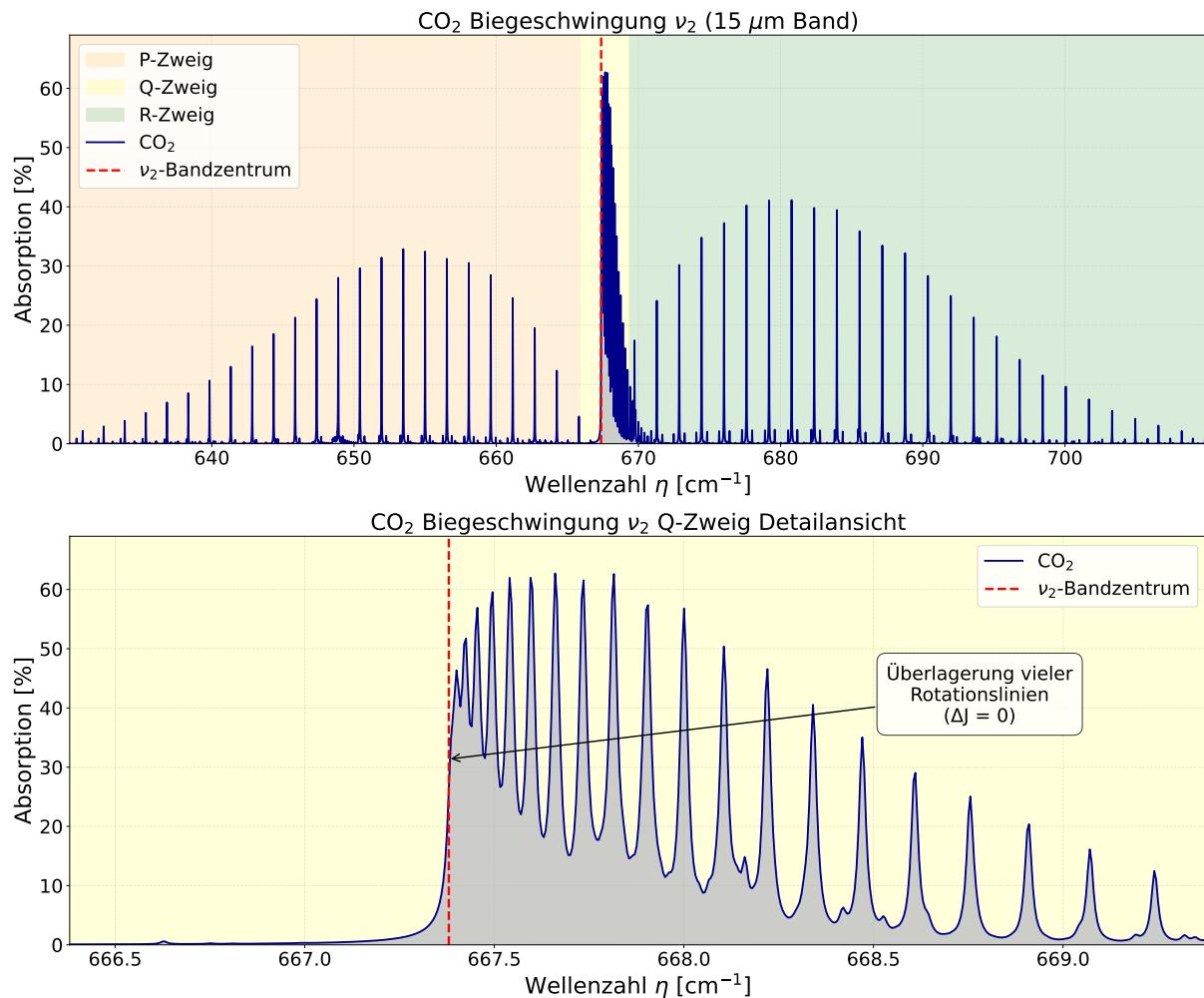


Abbildung 3.5: Absorptionsspektrum des v_2 -Vibrationsbandes von CO₂. Daten kommen von der HITRAN Datenbank [6] und von [16, S. 39], Grafik wurde mithilfe von [14] erstellt, der Code ist im Anhang 5.7 dokumentiert.

Im Gegensatz zu Abbildung 3.4 zeigt das v_2 -Vibrationsband eine deutlich komplexere Struktur. Neben den deutlich sichtbaren P - und R -Zweigen sieht man einen stark ausgeprägten Q -Zweig.

4 Der Treibhauseffekt

4.1 Strahlungsbilanz der Erde ohne Atmosphäre

5 Anhang

5.1 Literaturverzeichnis

- [1] Physics Department. *STEFAN - BOLTZMANN'S LAW OF RADIATION*. URL: https://laboratoriofisica.uc3m.es/guiones_ingles/qp/Stefan-Boltzmann_guide_english.pdf (besucht am 31.10.2025).
- [2] P. A. M. Dirac. *The principles of quantum mechanics*. und. 1962.
- [3] I.E. Gordon u. a. „The HITRAN2020 molecular spectroscopic database“. In: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 277 (2022), S. 107949. ISSN: 0022-4073. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2021.107949>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022407321004416>.
- [4] Gerhard Herzberg. *Infrared and Raman spectra of polyatomic molecules*. D. Van Nostrand Company Inc., 1945.
- [5] Gerhard Herzberg. *Molecular Spectra and Molecular Structure Vol. I. Spectra of Diatomic Molecules*. 2nd ed. D. Van Nostrand Company Inc., 1950.
- [6] HITRAN. *HITRAN2020 molecular spectroscopic database*. 2020. URL: <https://hitran.org> (besucht am 04.11.2025).
- [7] Greg Kopp. „Solar irradiance measurements“. In: *Living Reviews in Solar Physics* 22 (Juli 2025). DOI: [10.1007/s41116-025-00040-5](https://doi.org/10.1007/s41116-025-00040-5).
- [8] H. Kraus. *Die Atmosphäre der Erde: Eine Einführung in die Meteorologie*. Springer Berlin Heidelberg, 2007. ISBN: 9783540350170. URL: <https://books.google.de/books?id=2RI1BgAAQBAJ>.
- [9] Andrew Lacis u. a. „Atmospheric CO₂: Principal Control Knob Governing Earth's Temperature“. In: *Science (New York, N.Y.)* 330 (Okt. 2010), S. 356–9. DOI: [10.1126/science.1190653](https://doi.org/10.1126/science.1190653).
- [10] J. Marshall und R.A. Plumb. *Atmosphere, Ocean and Climate Dynamics: An Introductory Text*. International Geophysics. Academic Press, 2007. ISBN: 9780080556703. URL: <https://books.google.de/books?id=KvJfvYBHiegC>.
- [11] James Clerk Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism*. eng. Oxford: Clarendon Press.
- [12] M. F. Modest. *Radiative heat transfer*. eng. 2nd ed. Amsterdam ; Academic Press, 2003. ISBN: 1-281-11929-6.
- [13] Max Planck. „Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum“. In: *Annalen der Physik* 309.3 (1901), S. 553–563. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19013090310>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.19013090310>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19013090310>.
- [14] Python Software Foundation. *Python Programming Language*. Version 3.13. 2024. URL: <https://www.python.org>.

- [15] Westermann Schulbuchverlag. *Mathematisch-Naturwissenschaftliche Formelsammlung IQB - Für die Abiturprüfung*. Braunschweig, Deutschland: Westermann Bildungsmedien Verlag GmbH, 2024, S. 72. ISBN: 978-3-14-127795-1.
- [16] T. Shimanouchi. *Tables of Molecular Vibrational Frequencies Consolidated Volume I*. NSRDS-NBS 39. National Bureau of Standards, 1972, S. 1–160.
- [17] Eite Tiesinga u. a. „CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2018“. In: *Rev. Mod. Phys.* 93 (2 Juni 2021), S. 025010. DOI: [10.1103/RevModPhys.93.025010](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.93.025010). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.93.025010>.

5.2 Daten und Tabellen

Art der Oberfläche	Albedo (%)
Ozean	2-10
Wald	6-18
Städte	14-18
Grass	7-25
Acker	10-20
Natürliche Graslandökosysteme	16-20
Wüste(Sand)	35-45
Eis	20-70
Wolken (dünn)	30
Wolken (dick)	60-70
Schnee (alt)	40-60
Schnee (frisch)	75-95

Tabelle 5.1: Albedos für Unterschiedliche Oberflächen[10, S.11].

5.3 Formeln und Herleitungen

5.3.1 Herleitung der 3 Übergangsformeln

Die in Unterunterabschnitt 3.3.3 beschriebenen 3 Gleichungen für die verschiedenen Zweige eines Vibrations-Rotations-Bands kommen wie folgt zustande:

Als Grundlage wird Gleichung 3.4 genommen und da wir ja einen Übergang der Energieniveaus brauchen, gehen wir erstmal von einem anfänglichen v'', j'' und finalen v', j' Zustand aus:

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= E_{j'v'} - E_{j''v''} \\
 &= h\nu_e \left(v' + \frac{1}{2} \right) + hc_0 B_{v'} j' (j' + 1) \\
 &\quad - \left[h\nu_e \left(v'' + \frac{1}{2} \right) + hc_0 B_{v''} j'' (j'' + 1) \right] \\
 &= h\nu_e (v' - v'') + hc_0 [B_{v'} j' (j' + 1) - B_{v''} j'' (j'' + 1)]
 \end{aligned}$$

Wir betrachten hier nur den Fundamentalübergang einer Absorption, deswegen gilt $\Delta v = +1$ was zu $v' = v'' + 1$ führt. Die Notation für beide Zustände wird jetzt zu $v'' = v$ und

$v' = v + 1$ vereinfacht. In die Formel eingesetzt:

$$\begin{aligned}\Delta E &= h\nu_e(v + 1 - v) + hc_0 [B_{v+1}j'(j' + 1) - B_v j''(j'' + 1)] \\ &= h\nu_e + hc_0 [B_{v+1}j'(j' + 1) - B_v j''(j'' + 1)]\end{aligned}$$

Umgerechnet in Wellenzahl ergibt sich:

$$\Delta\eta = \frac{\Delta E}{hc_0} = \frac{\nu_e}{c_0} + B_{v+1}j'(j' + 1) - B_v j''(j'' + 1)$$

Da $\eta_0 = \nu_e/c_0$:

$$\Delta\eta = \eta_0 + B_{v+1}j'(j' + 1) - B_v j''(j'' + 1) \quad (5.1)$$

Ähnlich wie bei einem vorherigen Schritt führen wir wieder die Vereinfachung $j'' = j$ ein, j' kann auch wieder vereinfacht werden, je nach Zweig zu $j' = j + 1$, $j' = j$ oder $j' = j - 1$. Für den P Zweig ($j' = j - 1$) ergibt das:

$$\begin{aligned}j'(j' + 1) &= (j - 1)(j - 1 + 1) \\ &= (j - 1) \cdot j \\ &= j^2 - j\end{aligned}$$

Eingesetzt in Gleichung 5.1:

$$\begin{aligned}\eta_P &= \eta_0 + B_{v+1}(j^2 - j) - B_v j(j + 1) \\ &= \eta_0 + B_{v+1}j^2 - B_{v+1}j - B_v j^2 - B_v j \\ &= \eta_0 + j^2(B_{v+1} - B_v) - j(B_{v+1} + B_v)\end{aligned}$$

5.4 Quellcode

Liste aller Quellcodes

5.1	Verschiedene implementierungen für physikalische Gesetze.	D
5.2	Verschiedene Hilfs-Funktionen	E
5.3	Planck Funktion für verschiedene Temperaturen mit Wienschem Verschiebungsgesetz.	F
5.4	Planck Funktion für Sonne & Erde mit CO ₂ Absorptionsbändern.	H
5.5	Visualisierung des CO ₂ -Absorptionsspektrums	J
5.6	Visualisierung des CO ₂ -Absorptionsspektrums unter 1.5 micrometern	K

5.7 Visualisierung des CO₂-Absorptionsspektrums des ν_3 -Vibrationsbandes . . M

```
1  from scipy import constants
2  import numpy as np
3
4  def plancks_law(wavelength: float, temperature: float, *, refractive_index: float = 1.0) -> float:
5      """Planck's radiation law
6
7          Returns spectral radiance in W/(m^3)
8          """
9
10     first = (2 * constants.pi * constants.h * (constants.c ** 2)) / ((refractive_index**2) * (wavelength
11         ** 5))
12     second = 1 / (np.exp((constants.h * constants.c) / (wavelength * constants.k * temperature)) - 1)
13     return first * second
14
15
16  def wiens_displacement_law(temperature: float, *, refractive_index: float = 1.0) -> float:
17      """Wien's displacement law
18
19          Returns the peak wavelength of a body's radiation
20          """
21
22  def wiens_displacement_law_temperature(wavelength: float) -> float:
23      """Wien's displacement law temperature
24
25          Returns the peak temperature of a body's radiation
26          """
27
28  b_wien = constants.value("Wien wavelength displacement law constant")
29  return b_wien / wavelength
```

Listing 5.1: Verschiedene implementierungen für physikalische Gesetze welche von anderen Quellcodes benutzt werden.

```

1 import numpy as np
2 import pandas as pd
3
4
5 def read_hitran_par(filename: str) -> pd.DataFrame:
6     """
7         Liest HITRAN .par Format ein
8     """
9     data = []
10
11    with open(filename, 'r') as f:
12        for line in f:
13            molecule_id = int(line[0:2])
14            isotopologue = int(line[2:3])
15            wavenumber = float(line[3:15])
16            intensity = float(line[15:25])
17
18            data.append({
19                'molecule': molecule_id,
20                'isotopologue': isotopologue,
21                'wavenumber': wavenumber,
22                'intensity': intensity
23            })
24
25    return pd.DataFrame(data)
26
27
28 def create_absorption_spectrum(wavenumbers, intensities, wn_grid,
29                                path_length=1.0, concentration=400e-6, pressure=1.0, temperature=296,
30                                ↳ gamma=0.1):
31    number_density = 2.69e19 * (pressure * 1.0) * (273.15 / temperature) * concentration
32
33    optical_depth = np.zeros_like(wn_grid)
34
35    gamma_L = gamma * pressure
36
37    path_length_cm = path_length * 100
38
39    for wn, intensity in zip(wavenumbers, intensities):
40        lorentz = (gamma_L / np.pi) / ((wn_grid - wn) ** 2 + gamma_L ** 2)
41        alpha = intensity * number_density * lorentz
42        optical_depth += alpha * path_length_cm
43
44
45    transmission = np.exp(-optical_depth)
46
47    absorbance = 1 - transmission
48
49    return absorbance, optical_depth

```

Listing 5.2: Verschiedene Funktionen die in mehreren anderen Quellcodes benötigt werden.

```

1 import numpy as np
2 from simulationen.formeln import plancks_law, wiens_displacement_law_temperature
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from simulationen import ROOT_DIR
5
6
7 def main():
8     wavelengths = np.linspace(1e-7, 100e-6, 20000)
9     temperature_range = np.linspace(500, 5000, 5)
10
11    spectral_radiances = [plancks_law(wavelengths, T) for T in temperature_range]
12
13    radiances = plancks_law(wavelengths, wiens_displacement_law_temperature(wavelengths))
14
15    fig, ax = plt.subplots()
16
17    for i, s in enumerate(spectral_radiances):
18        ax.loglog(wavelengths * 1e6, s, label=fr"$T={temperature_range[i]:.0f}\text{K}$")
19
20    ax.plot(wavelengths * 1e6, radiances, 'k--', label=r"$E_b(\lambda)(T = b/\lambda)$")
21
22    ax.set_xlabel(r'Wellenlänge [ $\mu\text{m}$ ]', fontsize=12)
23    ax.set_ylabel(r"Spektrale Ausstrahlung  $E_b(\lambda)$  [ $\text{W}/\text{m}^2\text{nm}^{-2}$ ]", fontsize=12)
24
25    ax.set_yscale('log')
26    ax.set_xscale('log')
27    ax.legend(loc='upper right')
28    plt.tight_layout()
29    plt.savefig(ROOT_DIR / "seminararbeit" / "assets" / "wien_plot.pdf", bbox_inches='tight')
30    plt.show()
31
32
33 if __name__ == "__main__":
34     main()

```

Listing 5.3: Planck Funktion für verschiedene Temperaturen mit Wienschem Verschiebungsgesetz. Benutzt Formeln aus 5.1.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 from simulationen import ROOT_DIR
5 from simulationen.formeln import plancks_law, wiens_displacement_law
6
7
8
9 TEMPERATURE_EARTH = 288.0 # Kelvin
10 TEMPERATURE_SUN = 5772 # Kelvin
11
12 def main():
13
14     max_wavelength_sun = wiens_displacement_law(TEMPERATURE_SUN) # in Metern
15     max_wavelength_earth = wiens_displacement_law(TEMPERATURE_EARTH) # in Metern
16     print(max_wavelength_sun, max_wavelength_earth)
17
18     wavelengths = np.linspace(1e-7, 100e-6, 20000)
19     # anything under 1e-7 will just be shown as 0 because its to small and causes an overflow error.
20
21     spectral_radiance_earth, spectral_radiance_sun = [0.0], [0.0]
22     # we put 0.0 as the first value here so that in our data there will always be a point P(0 / 0)
23     # without having an overflow error as described above
24     for wavelength in wavelengths:
25         spectral_radiance_sun.append(plancks_law(wavelength, TEMPERATURE_SUN))
26         spectral_radiance_earth.append(plancks_law(wavelength, TEMPERATURE_EARTH))
27
28     wavelengths = np.insert(wavelengths, 0, 0.0)
29     # we put 0.0 as the first value here so that in our data there will always be a point P(0 / 0)
30     # without having an overflow error as described above
31
32
33     plt.figure(figsize=(14, 10))
34
35     ax1 = plt.subplot2grid((2, 2), (0, 0))
36     ax2 = plt.subplot2grid((2, 2), (0, 1))
37     ax3 = plt.subplot2grid((2, 2), (1, 0), colspan=2)
38
39     ax1.plot(wavelengths * 1e6, spectral_radiance_sun, linewidth=2.0, color='tab:orange', label=f'Sonne
40     ({TEMPERATURE_SUN} K)')
41     ax1.set_xlabel(r'Wellenlänge [$\mu\text{m}$]', fontsize=12)
42     ax1.set_ylabel(r"Spektrale Ausstrahlung $E_{\lambda}$"
43     r" [$\text{W}/\text{m}^{-2}\text{\AA}^{-1}$]", fontsize=12)
44     ax1.set_title(f'Sonne ({TEMPERATURE_SUN} K)', fontsize=14)
45     ax1.grid(True, alpha=0.3)
46     ax1.set_xlim(0, 4)
47     ax1.axvspan(0.4, 0.78, alpha=0.1, color='yellow', label='Sichtbares Licht')
48     ax1.axvline(x=max_wavelength_sun*1e6, color='orange', linestyle='--', alpha=0.5,
49                 label=f'Max Sonne: {max_wavelength_sun*1e6:.2f} + r'$\mu\text{m}$')
50     ax1.legend(loc='upper right')
51
52     ax2.plot(wavelengths * 1e6, spectral_radiance_earth, linewidth=2.0, color='tab:blue', label=f'Erde
53     ({TEMPERATURE_EARTH} K)')
54     ax2.set_xlabel(r'Wellenlänge [$\mu\text{m}$]', fontsize=12)
55     ax2.set_ylabel(r"Spektrale Ausstrahlung $E_{\lambda}$"
56     r" [$\text{W}/\text{m}^{-2}\text{\AA}^{-1}$]", fontsize=12)
57     ax2.set_title(f'Erde ({TEMPERATURE_EARTH} K)', fontsize=14)
58     ax2.grid(True, alpha=0.3)
59     ax2.set_xlim(0, 40)

```

```

56     ax2.axvspan(0.4, 0.78, alpha=0.1, color='yellow', label='Sichtbares Licht')
57     ax2.axvline(x=max_wavelength_sun*1e6, color='orange', linestyle='--', alpha=0.5,
58                 label=f'Max Sonne: {max_wavelength_sun*1e6:.2f} ' + r'$\mu\text{m}$')
59     ax2.axvline(x=max_wavelength_earth*1e6, color='blue', linestyle='--', alpha=0.5,
60                 label=f'Max Erde: {max_wavelength_earth*1e6:.2f} ' + r'$\mu\text{m}$')
61     ax2.legend(loc='upper right')

62
63     # Normalisierte Werte für bessere Vergleichbarkeit
64     spectral_radiance_sun_norm = np.array(spectral_radiance_sun) / np.max(spectral_radiance_sun)
65     spectral_radiance_earth_norm = np.array(spectral_radiance_earth) / np.max(spectral_radiance_earth)

66
67     ax3.semilogx(wavelengths * 1e6, spectral_radiance_sun_norm,
68                   linewidth=2.0, color='tab:orange', label=f'Sonne ({TEMPERATURE_SUN} K) - normalisiert')
69     ax3.semilogx(wavelengths * 1e6, spectral_radiance_earth_norm,
70                   linewidth=2.0, color='tab:blue', label=f'Erde ({TEMPERATURE_EARTH} K) - normalisiert')

71
72
73     ax3.axvspan(0.4, 0.78, alpha=0.1, color='yellow', label='Sichtbares Licht')
74     ax3.axvspan(0.78, 100, alpha=0.1, color='red', label='Infrarot')

75
76     ax3.axvspan(4.2, 4.4, alpha=0.3, color='green', label=r'$\mathrm{CO}_2$-Absorption (4.3
77     ↪ $\mu\text{m}$)')
77     ax3.axvspan(14, 16, alpha=0.3, color='green', label=r'$\mathrm{CO}_2$-Absorption (15
78     ↪ $\mu\text{m}$)')

79
80     ax3.set_xlabel(r'Wellenlänge [$\mu\text{m}$]', fontsize=12)
81     ax3.set_ylabel('Normalisierte spektrale Ausstrahlung', fontsize=12)
82     ax3.set_title(r'Vergleich: Planck-Strahlung und $\mathrm{CO}_2$-Absorptionsbanden', fontsize=14)
83     ax3.grid(True, alpha=0.3, which="both")
84     ax3.set_xlim(0.1, 100)
85     ax3.set_ylim(0, 1.1)
86     ax3.legend(loc='upper right')

87
88     ax3.annotate('Maximum\nSonnenstrahlung', xy=(max_wavelength_sun*1e6, 0.98), xytext=(1.2, 0.8),
89                  arrowprops=dict(arrowstyle='->', color='orange', alpha=0.7),
90                  fontsize=10, color='orange')
91     ax3.annotate('Maximum\nErdstrahlung', xy=(max_wavelength_earth*1e6, 0.98), xytext=(3.5, 0.7),
92                  arrowprops=dict(arrowstyle='->', color='blue', alpha=0.7),
93                  fontsize=10, color='blue')

94
95
96     plt.savefig(ROOT_DIR / "seminararbeit" / "assets" / "planck_plot.pdf", bbox_inches='tight')
97     plt.tight_layout()
98     plt.show()

99
100
101 if __name__ == "__main__":
102     main()

```

Listing 5.4: Planck Funktion für Sonne & Erde mit CO₂ Absorptionsbändern. Benutzt Formeln aus 5.1.

```
1 import numpy as np
2 from matplotlib import pyplot as plt
3
4 from simulationen import ROOT_DIR
5 from simulationen.utils import read_hitran_par, create_absorption_spectrum
6
7 FILENAME = ROOT_DIR / "data" / "hitran_co2_2025-11-04.par"
8
9
10 V3_CENTER = 2349.16
11 V2_CENTER = 667.38
12
13 df = read_hitran_par(FILENAME)
14
15 wn_min_filter = 555
16 wn_max_filter = 100000
17
18 df_filtered = df[(df['wavenumber'] >= wn_min_filter) &
19                  (df['wavenumber'] <= wn_max_filter)].copy()
20
21 wn_min = df_filtered['wavenumber'].min()
22 wn_max = df_filtered['wavenumber'].max()
23
24 gamma = 0.1
25 points_per_linewidth = 0.12
26 delta_wn = gamma / points_per_linewidth
27 n_points = int((wn_max - wn_min) / delta_wn)
28
29 print(n_points)
30 wn_grid = np.linspace(wn_min, wn_max, n_points)
31
32 absorbance, optical_depth = create_absorption_spectrum(
33     df_filtered['wavenumber'].values,
34     df_filtered['intensity'].values,
35     wn_grid,
36     path_length=100.0,
37     pressure=1.0,
38     temperature=296,
39     concentration=400e-6,
40     gamma=gamma
41 )
42
43 wl_grid = 10000.0 / wn_grid
44 V2_CENTER = 10000.0 / V2_CENTER
45 V3_CENTER = 10000.0 / V3_CENTER
46
47
48 fig, ax1 = plt.subplots(figsize=(14, 7))
49
50
51 ax1.plot(wl_grid, absorbance * 100, color='darkblue', linewidth=1.2, label=r"$\mathbf{\mathit{CO}_2}$")
52 ax1.set_xlabel(r'Wellenlänge [$\mu\text{m}$]', fontsize=20)
53 ax1.set_ylabel('Absorption [%]', fontsize=20)
54 #ax1.set_title('CO2 Absorptionsspektrum', fontsize=14)
55 ax1.grid(True, alpha=0.3, linestyle='--')
56 ax1.set_xlim(0, 100)
57 ax1.set_ylim(wl_grid.min(),wl_grid.max())
58
59
```

```
60 ax1.fill_between(wl_grid, 0, absorbance * 100, color='darkblue', alpha=0.2)
61
62 ax1.axvline(V3_CENTER, color='red', linestyle='--', linewidth=2.5,
63             label=r'$\nu_3$-Bandzentrum')
64
65 ax1.axvline(V2_CENTER, color='orange', linestyle='--', linewidth=2.5,
66             label=r'$\nu_2$-Bandzentrum')
67
68 ax1.tick_params(axis='both', labelsize=18)
69 ax1.legend(loc='upper center', fontsize=18)
70
71 plt.tight_layout()
72 plt.savefig(ROOT_DIR / "seminararbeit" / "assets" / "co2_absorption.pdf", bbox_inches='tight')
73
74 plt.show()
```

Listing 5.5: Visualisierung des CO₂-Absorptionsspektrums mithilfe von HITRAN Daten [6]. Benutzt Funktionen aus 5.2.

```

1 import numpy as np
2 from matplotlib import pyplot as plt
3
4 from simulationen import ROOT_DIR
5 from simulationen.utils import read_hitran_par, create_absorption_spectrum
6
7 FILENAME = ROOT_DIR / "data" / "hitran_co2_2025-11-04.par"
8
9 df = read_hitran_par(FILENAME)
10
11 wn_min_filter = 6666
12 wn_max_filter = 1000000
13
14 df_filtered = df[(df['wavenumber'] >= wn_min_filter) &
15                   (df['wavenumber'] <= wn_max_filter)].copy()
16
17 wn_min = df_filtered['wavenumber'].min()
18 wn_max = df_filtered['wavenumber'].max()
19 wn_grid = np.linspace(wn_min, wn_max, 5000)
20
21 absorbance, optical_depth = create_absorption_spectrum(
22     df_filtered['wavenumber'].values,
23     df_filtered['intensity'].values,
24     wn_grid,
25     path_length=100.0,
26     pressure=1.0,
27     temperature=296,
28     concentration=400e-6,
29     gamma=0.1
30 )
31
32 wl_grid = 10000.0 / wn_grid
33
34
35 fig, ax1 = plt.subplots(figsize=(14, 7))
36
37 absorbance_percent = absorbance * 100
38
39 ax1.plot(wl_grid, absorbance_percent, color='darkblue', linewidth=1.5, label=r"$\mathbf{\text{CO}_2}$")
40 ax1.set_xlabel(r'Wellenlänge [$\mu\text{m}$]', fontsize=20)
41 ax1.set_ylabel('Absorption [%]', fontsize=20)
42 ax1.grid(True, alpha=0.3, linestyle='--')
43 ax1.set_xlim(wl_grid.min(),wl_grid.max())
44
45 ax1.fill_between(wl_grid, 0, absorbance_percent, color='darkblue', alpha=0.2)
46
47 ax1.tick_params(axis='both', labelsize=18)
48 ax1.legend(loc='upper left', fontsize=18)
49
50 plt.tight_layout()
51 plt.savefig(ROOT_DIR / "seminararbeit" / "assets" / "co2_absorption_under_1_5.pdf", bbox_inches='tight')
52
53 plt.show()

```

Listing 5.6: Visualisierung des CO₂-Absorptionsspektrums unterhalb von 1.5 µm mithilfe von HITRAN Daten [6]. Benutzt Funktionen aus 5.2.

```

1 import numpy as np
2 from matplotlib import pyplot as plt
3
4 from simulationen import ROOT_DIR
5 from simulationen.utils import read_hitran_par, create_absorption_spectrum
6
7 FILENAME = ROOT_DIR / "data" / "hitran_co2_2025-11-04.par"
8
9 df = read_hitran_par(FILENAME)
10
11 wn_min_filter = 2300
12 wn_max_filter = 2390
13
14 df_filtered = df[(df['wavenumber'] >= wn_min_filter) &
15                   (df['wavenumber'] <= wn_max_filter)].copy()
16
17 wn_min = df_filtered['wavenumber'].min()
18 wn_max = df_filtered['wavenumber'].max()
19
20 gamma = 0.4
21 points_per_linewidth = 20
22 delta_wn = gamma / points_per_linewidth
23 n_points = int((wn_max - wn_min) / delta_wn)
24
25 wn_grid = np.linspace(wn_min, wn_max, n_points)
26
27 absorbance, optical_depth = create_absorption_spectrum(
28     df_filtered['wavenumber'].values,
29     df_filtered['intensity'].values,
30     wn_grid,
31     path_length=0.4,
32     pressure=0.1,
33     temperature=296,
34     concentration=400e-6,
35     gamma=gamma
36 )
37
38
39 fig, ax1 = plt.subplots(figsize=(14, 7))
40
41 absorbance_percent = absorbance * 100
42
43 V3_CENTER = 2349.16
44
45 ax1.axvspan(wn_grid.min(), V3_CENTER, alpha=0.15, color='orange', label='P-Zweig')
46 ax1.axvspan(V3_CENTER, wn_grid.max(), alpha=0.15, color='green', label='R-Zweig')
47
48 ax1.plot(wn_grid, absorbance_percent, color='darkblue', linewidth=1.5, label=r"$\mathbf{CO}_2$")
49 ax1.fill_between(wn_grid, 0, absorbance_percent, color='darkblue', alpha=0.2)
50
51 ax1.axvline(V3_CENTER, color='red', linestyle='--', linewidth=2,
52              label=r'$\nu_3$-Bandzentrum')
53
54 ax1.set_xlabel(r'Wellenzahl $\eta$ [$\mathbf{cm}^{-1}$]', fontsize=20)
55 ax1.set_ylabel('Absorption [%]', fontsize=20)
56 ax1.grid(True, alpha=0.3, linestyle='--')
57 ax1.set_xlim(wn_grid.min(), wn_grid.max())
58 ax1.set_ylim(0, 75)
59

```

```
60 ax1.tick_params(axis='both', labelsize=18)
61 ax1.legend(loc='upper left', fontsize=18)
62
63 plt.tight_layout()
64 plt.savefig(ROOT_DIR / "seminararbeit" / "assets" / "co2_absorption_v3_band.pdf", bbox_inches='tight')
65 plt.show()
```

Listing 5.7: Visualisierung des CO₂-Absorptionsspektrums des ν_3 -Vibrationsbandes mithilfe von HITRAN Daten [6], Daten des Bandzentrums kommen aus [16, S. 39]. Benutzt Funktionen aus 5.2.