ریاضیات مقدماتی
از تجربه تا تجرید

محمد سبحانیان

تابستان ۱۳۹۷

سرشناسه	:سبحانیان، محمد، ۱۳۶۲ -
عنوان و نام پدیدآور	:ریاضیات مقدماتی: از تجربه تا تجرید / مؤلف محمد سبحانیان.
مشخصات نشر	:رودهن: محمد سبحانیان، ۱۳۹۷.
مشخصات ظاهری	:۳۶۴ ص.: جدول و نمودار ؛ ۲۲ × ۲۹سم.
شابک	:۵-۰۳۱۷-۰۰-۶۲۲-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی	:فیپای مختصر
شماره کتابشناسی ملی	:۵۱۸۳۴۰۹

عنوان:	ریاضیات مقدماتی: از تجربه تا تجرید
مؤلف:	محمد سبحانیان
ویراستار علمی:	مجتبی آقایی فروشانی، زهرا کبوتری فریمانی
ناشر:	مؤلف
تعداد صفحات:	۳۶۴
قطع	رحلی
تیراژ:	۱۰۰۰
نوب چاپ:	اول
سال چاپ:	۱۳۹۷
شابک:	۵-۰۳۱۷-۰۰-۶۲۲-۹۷۸
طرح جلد:	روح‌الله زارعان
چاپ	چاپ و طرح امروز

تقدیم به پدر و مادرم

پیش‌گفتار

انگیزه اصلی نگارش این کتاب را دانشجویان و دانش‌آموزان باهوش و علاقه‌مندی ایجاد کردند که در ریاضیات چندان موفق نبودند. سالها ریشه این مشکل را در روش‌های تدریس و متدهای آموزش ریاضی دنبال می‌کردم و به دست‌آوردهای خویش خرسند بودم. تا اینکه با فلسفه‌علم، فلسفه ریاضی، تاریخ ریاضی و کمی علوم شناختی آشنا شدم.

با نگاهی بر تاریخ ریاضیات و فلسفه ریاضیات آموختم که ریاضیات و مفاهیم و استدلال‌های آن، مانند دیگر مفاهیم و استدلال‌های زندگی روزمره، در بستری اجتماعی شکل گرفته، اما چنان از آن دور شده که ارتباط گرفتن با آن برای بسیاری از دانشجویان و دانش‌آموزان دشوار است. البته با توجه به دیدگاه‌های فلسفی چون نمادگرایی و واقع‌گرایی که از از آغاز قرن بیستم بر کتاب‌های آموزشی ریاضی حکم‌فرما شده‌اند، انتظار دیگری نیز نمی‌توان داشت. بیشترین نفوذ در کتاب‌های آموزشی ریاضیات دانشگاهی از آن نمادگرایی است که در آن ریاضیات صرفا مجموعه‌ای از نمادهاست که قواعدی بر آن حاکم است. در این دیدگاه ریاضیات بیشتر به یک بازی بی‌معنا شباهت دارد و هیچ ارتباطی بین ریاضیات و زندگی روزمره وجود ندارد. به‌نظر نگارنده، برای مقابله با این مشکل باید کتاب‌های آموزشی ریاضی را با دیدگاه انسان‌گرا نوشت تا مشکلات اساسی بین تجربه و تجرید برطرف گردد و در این کتاب تلاش ما بر این امر بوده است.

به‌هرحال، در این کتاب مفاهیم ریاضی از درک شهودی و تجربیات روزمرّه دانشجویان و دانش‌آموزان دبیرستانی ساخته شده و به سمت ریاضیات مجرد پیش رفته است. علاوه‌بر ساختن مفاهیم، زبان نمادین ریاضی نیز به آرامی آموزش داده شده و کوشش نگارنده بر آن بوده تا مسیری هموار از تجربیات روزمرّهٔ دانشجویان و دانش‌آموزان دبیرستانی به سمت ریاضیات مجرد و انتزاعی امروزی فراهم آید. استدلال‌های ریاضی نیز از استدلال‌های روزمره استخراج شده‌اند و سعی نگارنده بر نزدیک کدن استدلال‌های ریاضی به استدلال‌های روزمرّه بوده است.

این کتاب به مباحث ریاضیات مقدماتی می‌پردازد و برای دانشجویان نیم‌سال اول، در رشته‌های فنی و مهندسی، حسابداری، مدیریت، علوم پایه و ... مناسب است. همچنین، برای دانش‌آموزان سالهای نهم و دهم که می‌خواهند با تقویت خود در ریاضیات پایه برای ورود به درس‌های حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال آماده شوند، کاملا مناسب است و توصیه می‌شود.

کتاب حاضر پس از پنج سال مطالعه و نگارش مداوم، بازنگری‌های پی‌درپی و با جمع‌آوری نظرات و پیشنهادات اساتیدی چون دکتر مجتبی آقایی فروشانی، جناب آقای پرویز حسن‌پور از پیش‌کسوتان عرصه آموزش ریاضیات، و دوستانی چون دکتر زهرا کبوتری فریمانی و دکتر جواد فرخی استاد امروز آماده چاپ به‌نظر می‌رسد. برای همیشه از این عزیزان سپاسگزارم که بر بنده منت گذاشته، زحمت بازبینی کتاب حاضر را متحمل شده و بنده را از نظرات و پیشنهادات سازنده خویش بهره‌مند ساخته‌اند.

ضمن تمام تلاشی که معطوف این اثر داشته‌ام، به ناتوانی‌های خویش معترفم و چشم امیدم به نظرات و پیشنهادات اساتید و همکاران گرامی است تا به لطف ایشان و ویرایش‌های پی‌درپی، به کتابی درخور دست یابیم.

ضمن تشکر از پدر و مادرم که در ایام تألیف این اثر پشتیبان من بوده‌اند و مریم خواهر عزیزم که همواره مشوقی پرتلاش بوده است از سرکارخانم نرگس قضاوت نیز تشکر می‌کنم که در سال اول از نگارش کتاب با تایپ بخش بزرگی از نسخه اولیه، بنده را یاری رساندند.

محمد سبحانیان

۲۲ مرداد ۱۳۹۷

مقدمه

کتاب حاضر با دیدگاه تجربه‌گرایی نوشته شده است و در واقع عبارت «از تجربه تا تجرید» در عنوان کتاب به دیدگاه تألیفی کتاب اشاره دارد. به‌هرحال بهتر است پیش از مطالعه این کتاب، کمی در مورد نگاه آن به ریاضیات مقدماتی و نحوه استفاده از آن بدانیم.

ریاضیات امروزی، ا تمام کاربردهایش در زندگی، صنعت و تجارت و ...، از مفاهیمی تشکیل شده که به‌قدری از تجربیات زندگی روزمره فاصله گرفته‌اند که درک ارتباط آنها با زندگی روزمره و تجربیات زندگی هرروزهٔ بشری بسیار سخت است. هرچند در بسیاری موارد نیز هیچ ارتباطی بین آنها وجود ندارد. اما آنچه با عنوان ریاضیات مقدماتی در این کتاب مورد بررسی قرار می‌گیرد، از تجربیات روزمره و عادی بشر در طول تاریخ ساخته شده و تحول یافته است. با شناخت این سیر تکاملی علاوه بر درک بهتر آن می‌توانیم برای درک مفاهیم انتزاعی‌تر و حتی مفاهیمی کاملا انتزاعی آماده شویم. منظور از مفاهیم، هر آن چیزی است که در ریاضیات اسمی بخصوص دارد. به‌طور مثال، عدد، عدد طبیعی، عدد کسری، عدد گویا، جمع، ضرب، خاصیت جابجایی، معادله، نامعادله، کوچک‌تری، بزرگ‌تری، مثلثات، سینوس، کسینوس، نمودار، شیب، معادلهٔ نمودار، پارامتر، متغیر، مجهول و... هر یک نامی است که بر یک مفهوم گذاشته شده است.

ریاضیات مقدماتی و در کل ریاضیات را می‌توان سبدی زیبا درنظر گرفت که با چهار نخ با رنگ‌های مختلف بافته می‌شود. یا به‌عبارتی می‌توان آن را نتیجه همکاری چهار عامل دانست که زمینه‌ساز رشد یکدیگرند. این چهار عامل عبارتند از:

۱ **مفاهیم ریاضی:** در آغاز، به‌صورت کاملا شهودی از تجربیات زندگی روزمره درک شده‌اند و معمولاً برای برطرف کردن نیازهای بشری ساخته شده‌اند. سپس با رشد مهارت‌های انسانی درکار با این مفاهیم و رشد استدلال‌های ایشان، برای تحولات بعدی آماده شده و رشد می‌کند.

۲ **استدلال‌های ریاضی:** استدلال کردن به‌معنای دلیل آوردن است. دلایل ما برمبنای شناخت ما از مفاهیم ارزیابی می‌شوند. فرض کنید شخصی در دادگاه، برای اثبات بی‌گناهی خود از اقدام به قتلی، دلیل می‌آورد که زمان قتل در جای دیگری بوده است. وی با مفاهیم زمان و مکان آشنایی دارد و درک کرده که در یک زمان، نمی‌توان در دو مکان متفاوت حضور داشت. بنابراین، می‌گوید من در زمان قتل در مکان قتل نبوده‌ام. البته این را نیز می‌تواند با روش‌های مختلفی اثبات کند. در ریاضیات نیز اوضاع همین‌طور است. در واقع استدلال کردن چیزی جز استفاده از مفاهیم ریاضی و ارتباط آنها با یکدیگر برای رسیدن به نتیجه‌ای خاص نیست.

در این کتاب، همان‌طور که مفاهیم ریاضی رشد کرده و پیچیده می‌شوند، استدلال‌های ارائه شده نیز رشد می‌کنند و پیچیده‌تر می‌شوند تا درک آنها برای خوانندگان ساده و راحت باشد.

۳ **زبان نمادین ریاضی:** رشد نمادگذاری در ریاضیات، همیشه به تحولاتی بزرگ اساسی انجامیده است. اولین بار زمانی است که انسان از چوب خط برای ثبت شمار اشیا استفاده

می‌کند. یکی دیگر از این تحولات در یونان باستان رخ داد که خط الفبایی را از مردم فینیقیه آموختند و برای اولین بار، رئوس چندضلعی‌ها را با استفاده از حروف الفبا نام‌گذاری کردند و این نام‌گذاری ساده منشأ تحولاتی عمیق در هندسه و حتی در فلسفهٔ جهان شد. استفاده از حروف الفبا و نام‌گذاری بر نقاط و اضلاع، به انتزاع مفاهیمی چون نقطه و خط انجامید؛ هرچند در همان دوران نیز این مفاهیم در طول چند قرن رشد کرده و تحول یافته‌اند. آخرین مرحله در رشد نمادگرایی ریاضی، از قرن پانزدهم آغاز شد و تا اوایل قرن بیستم ادامه یافت. البته، نمادگذاری ریاضیات، بیشترین رشد خود را در قرون شانزدهم و هفدهم تجربه کرد که آغازگر جهشی بزرگ و اساسی در ریاضیات شد. می‌توان گفت رشد ریاضیات تا پیش از این تحول که صدها هزار سال به‌طول انجامیده، در مقابل رشد ریاضیات در چند قرن پس از این تحول، کاملا ناچیز است. هرچند این تحولات برپایه آن تحولات بنیادین صورت گرفته است.

به‌هرحال امروزه زبان نمادین ریاضیات، ضمن ساده و دقیق کردن نحوهٔ بیان استدلال‌ها و روش‌های حل مسائل که به افزایش مهارت‌های استدلالی و حل مسئله می‌انجامد، موجب شکل‌گیری مفاهیم و مباحثی کاملا جدید در ریاضیات شده است که بدون ریاضیات نمادین قابل درک نیستند. به‌هرحال در این کتاب، سعی شده، استفاده از زبان نمادین ریاضیات نیز به روشی مناسب آموزش داده شود.

۴ **مهارت‌های ریاضی:** که شامل مهارت‌های مختلف در استفاده از عوامل فوق است. این مهارت‌ها ضمن پاسخ دادن به مثال‌ها و تمرینات حاصل می‌شوند. لازم به ذکر است که مطالعه اثبات‌ها نیز با رشد شیوه‌های استدلالی و درک بهتر مفاهیم ریاضی، نقش مهمی در بالابردن مهارت‌ها دارند.

یکی از مهارت‌های مهم، استفاده از خواص جبری و قضیه‌ها است که در این کتاب با سرعتی مناسب رشد کرده و به خوانندگان کمک می‌کند توانایی‌های لازم را کسب کنند.

در دیدگاه «از تجربه تا تجرید»، چهار عامل فوق از مراحل ابتدایی و به‌طور همزمان رشد کرده‌اند تا به رشد یکدیگر کمک کنند. علاوه‌براین، در سایت sobymath.ir تدریس بخش‌هایی از کتاب به‌همراه پاسخ برخی از مثال‌ها و تمرینات، به‌صورت ویدیویی در اختیار خوانندگان قرار می‌گیرد. در حاشیه صفحات کتاب نیز عباراتی برای دسته‌بندی مطالب و راهنمایی خوانندگان ارائه شده است.

تمام تلاش و توان خویش را به‌کار برده‌ام تا حس زیبا و لذت بخش یادگرفتن را به تمامی خوانندگان این کتاب هدیه کنم و مدرسان محترم را در تدریس یار و همکار باشم.

محمد سبحانیان

۲۲ مرداد ۱۳۹۷

فهرست مطالب

۱ **اعداد طبیعی** ۱

۱.۱ اعداد طبیعی ۱

۱.۱.۱ جمع اعداد طبیعی ۴

۲.۱.۱ پرانتزگذاری و عبارت‌های محاسباتی ۷

۲.۱ خواص جمع و ضرب ۱۰

۳.۱ ترتیب اعداد طبیعی ۱۴

۱.۳.۱ معادلات پایه ۱۷

۲.۳.۱ نامعادلات پایه ۱۹

۴.۱ تفریق و تقسیم ۲۱

۱.۴.۱ تفریق ۲۱

۲.۴.۱ تقسیم ۲۳

۳.۴.۱ پرانتزگذاری ۲۶

۴.۴.۱ تفریق و تقسیم در معادلات ۲۷

۵.۴.۱ تفریق و تقسیم در نامعادلات ۲۸

۵.۱ توان ۳۲

۱.۵.۱ معادلات و نامعادلات توانی ۳۷

۲ **حساب و نظریه اعداد** ۴۱

۱.۲ تاریخچه عددنویسی ۴۱

۱.۱.۲ گروه‌بندی ساده ۴۲

۲.۱.۲ دستگاه‌های شمار رمزی ۴۲

۳.۱.۲ دستگاه‌های گروه‌بندی ضربی ۴۴

۴.۱.۲ دستگاه‌های شمار موضعی ۴۴

۵.۱.۲ دستگاه شمار هندی ۴۵

۲.۲ مبنا ۴۷

۳.۲ نام‌گذاری و خواندن اعداد ۴۸

۴.۲ مقایسهٔ اعداد چند رقمی ۵۱

۵.۲ حساب ۵۳

۱.۵.۲ الگوریتم جمع ۵۳

۲.۵.۲ الگوریتم تفریق ۵۶

۳.۵.۲ الگوریتم ضرب ۵۸

۴.۵.۲ الگوریتم تقسیم ۶۱
۵.۵.۲ عددنویسی در مبناهای مختلف ۶۵
۶.۲ بخش‌پذیری و شمارش ۶۶
۱.۶.۲ اول بودن نسبت به هم ۶۹
۲.۶.۲ ک‌م‌م ۷۰
۷.۲ اعداد اول ۷۲

۳ نسبت و کسر ۷۷
۱.۳ نسبت ۷۷
۱.۱.۳ ساده کردن نسبت ۸۱
۲.۱.۳ نسبت و هندسه ۸۲
۳.۱.۳ جمع و ضرب نسبت‌ها ۸۴
۴.۱.۳ مقایسه نسبت‌ها ۸۶
۲.۳ کسر ۸۸
۱.۲.۳ کسر و ریاضیات نمادین ۱۰۱
۲.۲.۳ ترتیب اعداد کسری ۱۰۴
۳.۲.۳ معادلات کسری ۱۰۷
۴.۲.۳ تفریق و تقسیم اعداد کسری ۱۰۹

۴ اعداد صحیح و گویا ۱۱۱
۱.۴ حساب افزایش و کاهش ۱۱۱
۲.۴ اعداد صحیح ۱۱۳
۱.۲.۴ جمع و تفریق اعداد صحیح ۱۱۵
۲.۲.۴ ضرب و تقسیم اعداد صحیح ۱۱۹
۳.۲.۴ ترتیب در اعداد صحیح ۱۲۵
۳.۴ اعداد گویا ۱۳۰
۱.۳.۴ ترتیب اعداد گویا ۱۳۵

۵ توان، ریشه و لگاریتم ۱۳۷
۱.۵ توان با نمای طبیعی ۱۳۷
۲.۵ توان با نمای صحیح ۱۳۹
۳.۵ رادیکال و ریشه ۱۴۱
۱.۳.۵ ریشه و اعداد منفی ۱۴۳
۴.۵ توان با نمای کسری و گویا ۱۴۵
۱.۴.۵ ترتیب و توان با نمای گویا ۱۴۷
۲.۴.۵ اعداد گویا به توان اعداد کسری و گویا ۱۴۷
۵.۵ لگاریتم ۱۴۹

۶ اعشار و اعداد حقیقی ۱۵۳
۱.۶ نمایش اعشار متناهی ۱۵۳
۱.۱.۶ مقایسه و محاسبات اعشار متناهی ۱۵۶

۲.۶ اعشار متناوب ۱۶۰
۱.۲.۶ مقایسه اعشار متناوب ۱۶۳
۳.۶ اعشار نامتناهی و اعداد حقیقی ۱۶۶
۱.۳.۶ جمع و ضرب اعداد حقیقی ۱۷۱
۲.۳.۶ محور اعداد حقیقی ۱۷۴
۴.۶ قدر مطلق ۱۷۵
۱.۴.۶ معادلات قدر مطلقی ۱۷۶
۲.۴.۶ نامعادلات قدر مطلقی ۱۷۹
۵.۶ تابع علامت ۱۸۱
۶.۶ جزء صحیح ۱۸۲
۷.۶ توان، ریشه و لگاریتم در اعداد حقیقی ۱۸۴

۷ چندجمله‌ای‌ها و کاربردها ۱۸۷
۱.۷ چندجمله‌ای‌ها ۱۸۹
۱.۱.۷ خلاصه‌نویسی چندجمله‌ای‌ها ۱۹۲
۲.۱.۷ ساده کردن و تک‌جمله‌ای‌ها ۱۹۵
۲.۷ معادلات و نامعادلات چندجمله‌ای ۱۹۸
۱.۲.۷ تعیین علامت ۱۹۸
۲.۲.۷ تجزیه ۲۰۰
۳.۷ اتحادها ۲۰۲
۴.۷ تقسیم چندجمله‌ای‌ها ۲۰۶
۵.۷ بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک ۲۱۰
۶.۷ عبارات گویا ۲۱۵
۷.۷ عبارت‌های جبری ۲۲۰

۸ مجموعه‌ها ۲۲۳
۱.۸ مجموعه چیست؟ ۲۲۳
۱.۱.۸ مجموعه‌های بی‌پایان و باپایان: ۲۲۵
۲.۱.۸ زیرمجموعه و تساوی ۲۲۵
۳.۱.۸ نمودار وِن ۲۲۹
۴.۱.۸ مجموعهٔ مرجع ۲۳۰
۵.۱.۸ متمِّم ۲۳۰
۲.۸ جبر مجموعه‌ها ۲۳۳
۱.۲.۸ اجتماع مجموعه‌ها ۲۳۳
۲.۲.۸ اشتراک مجموعه‌ها ۲۳۵
۳.۲.۸ تفاضل و تفاضل متقارن ۲۳۷
۳.۸ اصل شمول و عدم شمول ۲۳۸
۴.۸ حاصل‌ضرب دکارتی ۲۴۱
۵.۸ رابطه ۲۴۵
۱.۵.۸ دامنه و بُرد ۲۴۸

۲.۵.۸ تحدید رابطه ۲۵۰
۳.۵.۸ نگاره ۲۵۱
۴.۵.۸ ترکیب رابطه‌ها: ۲۵۱
۵.۵.۸ معکوسِ رابطه ۲۵۳

۹ هندسه تحلیلی ۲۵۷
۱.۹ دستگاه مختصات دکارتی ۲۵۷
۱.۱.۹ نمودار رابطه ۲۵۹
۲.۹ تبدیلات ۲۶۲
۱.۲.۹ تقارن محوری و تقارن مرکزی ۲۶۳
۲.۲.۹ تقارن مرکزی ۲۶۶
۳.۲.۹ قدرمطلق ۲۶۶
۴.۲.۹ انتقال ۲۶۸
۵.۲.۹ ضریب ۲۶۹
۶.۲.۹ جزء صحیح ۲۷۰
۳.۹ معادلهٔ خط ۲۷۳
۴.۹ فاصله و دایره ۲۸۰
۵.۹ مقاطع مخروطی ۲۸۲
۱.۵.۹ بیضی ۲۸۳
۲.۵.۹ هذلولی ۲۸۷
۳.۵.۹ سهمی ۲۸۸
۴.۵.۹ خطِّ هادی و گریز از مرکز ۲۸۹

۱۰ توابع ۲۹۳
۱.۱۰ تولد تابع ۲۹۳
۱.۱.۱۰ دامنه و برد تابع ۲۹۶
۲.۱.۱۰ جبر توابع ۲۹۸
۳.۱.۱۰ ترکیب توابع ۲۹۹
۲.۱۰ رابطه و نمودار تابع ۳۰۱
۱.۲.۱۰ تحدید تابع ۳۰۲
۲.۲.۱۰ توابع چندضابطه‌ای ۳۰۴
۳.۱۰ توابع حقیقی ۳۰۶
۱.۳.۱۰ تساوی توابع ۳۰۹
۲.۳.۱۰ ترکیب توابع ۳۱۰
۳.۳.۱۰ جبر توابع ۳۱۲
۴.۱۰ تابع وارون ۳۱۳
۱.۴.۱۰ تابع همانی ۳۱۶
۵.۱۰ یکنوایی ۳۱۸
۶.۱۰ دوسویی و تناظر یک‌به‌یک ۳۲۱

۱۱ مثلثات ۳۲۵
۱.۱۱ درجه و رادیان ۳۲۵
۲.۱۱ سینوس و کسینوس ۳۲۷
۳.۱۱ نمودار توابع مثلثاتی ۳۳۲
۴.۱۱ نسبت‌های مثلثاتی دیگر ۳۳۴
۵.۱۱ اتحادهای مثلثاتی ۳۳۷
۶.۱۱ توابع معکوس مثلثاتی ۳۳۹
۷.۱۱ قانون کسینوس‌ها و نتایج آن ۳۴۱

آ مروری بر هندسه ۳۴۵
آ.۱ تولد هندسه ۳۴۵
آ.۲ مفاهیم پایه ۳۴۶
آ.۲.۱ شکل، خط و خطّ راست ۳۴۷
آ.۲.۲ مساحت ۳۴۹
آ.۲.۳ انطباق و هم‌نهشتی ۳۵۱
آ.۲.۴ ستاره و پرگار یونانی ۳۵۲
آ.۲.۵ زاویه ۳۵۵
آ.۳ زاویهٔ قائمه و اصل توازی ۳۵۷
آ.۴ تناسب ۳۵۹
آ.۵ تشابه ۳۶۰

فصل ۱

اعداد طبیعی

همهٔ ما کم و بیش با مطالب این فصل آشنا هستیم؛ اما در این فصل، همان مفاهیم را با نگاهی متفاوت نگریسته و ضمن آشنایی بهتر با مفاهیم ابتدایی و اولیهٔ ریاضی، با زبان نمادین ریاضی و استدلال‌های ریاضی آشنا شده و مهارت‌های اولیهٔ به‌کارگیریِ آنها را تمرین می‌کنیم.

۱.۱ اعداد طبیعی

صرفاً خواندنی ...
این توضیحات به‌ظاهر ساده، به سؤالاتی مهم، پایه‌ای و پیچیده نظیر «چیستی اعداد» پاسخ گفته‌اند.

زمانی بود که انسان‌ها اعداد را نمی‌شناختند و شمردن نمی‌دانستند. اما آنها نیز مانند برخی از حیوانات به‌صورت کاملاً چشمی و حسی و بدون هیچ شمارشی درک می‌کردند که «سه‌تا سیب» از «دوتا سیب» بیشتر است. مردم‌شناسان قبایلی را کشف کردند که کلماتی مانند «دو» یا «سه» نداشتند و برای هر یک از عبارات «دو سیب»، «دو درخت»، «دو انسان» و ... کلمه‌ای خاص به‌کار می‌بردند. جالب‌تر اینکه برخی از گروه‌های بدوی کلمه‌ای مانند «درخت» نداشته‌اند. آنها برای هر یک از عبارات «درخت آلبالو»، «درخت موز» و ... کلماتی متفاوت به‌کار می‌بردند.

کسانی که کلمه‌ای مانند «درخت» ندارند، هنوز شباهت همه درخت‌ها را درک نکرده‌اند تا آنها را در یک دسته قرار داده و با یک نام بخوانند. به‌طور مشابه، انسان‌ها زمانی که توانستند نوعی برابری بین «دو سیب» و «دو هندوانه» تشخیص دهند، کلمه‌ای مانند «دو» ساختند و مفهوم عدد متولد شد.

انسان‌ها با تشخیص شباهتی بین «دوتا سیب» و «دوتا پرتقال» برابری دو «تعداد» را درک کرده و عدد «دو» را به‌عنوان نامی بر این تعداد به‌وجود آوردند. نام‌گذاری بر اعداد، براساس نمونه‌ای خاص از آن تعداد بوده است. به‌طور مثال عدد پنج، از پنجه گرفته شده و به تعداد انگشتان پنجه اشاره دارد. در آغاز این دوران اعداد به‌صورت «یک، دو، سه» بوده‌اند و بیشتر از آن را خیلی می‌خوانده‌اند.

اولین شمارش‌ها با همین اعداد شکل گرفته و برای توسعه آن از ادبیاتی شبیه به ادبیات زیر استفاده شده است.

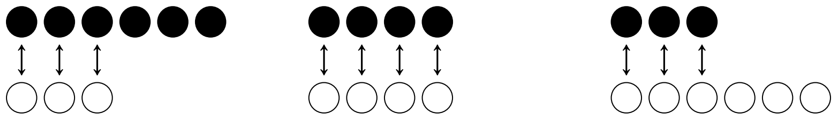
یک، دو، سه، یکی بیشتر، دوتا بیشتر، سه‌تا بیشتر، خیلی

که شباهت زیادی به اعداد زیر دارند.

یازده، دوازده، سیزده، چهارده، پانزده، شانزده، هفده، هجده، نوزده

کلمهٔ «هفت» پیش از آنکه به‌معنای امروزی به‌کار رود و یک عدد در نظر گرفته شود، به معنای «بسیار» و «غیر قابل شمارش» بوده است. عبارت‌هایی مانند «هفت کوه و هفت دریا و هفت جنگل» در ادبیات فارسی یادگار آن دوران است.

شکل زیر برابری، کمتری و بیشتری تعداد دایره‌های سیاه و دایره‌های سفید را نشان می‌دهد. به‌طور مثال، می‌گوییم در مورد (آ) از شکل زیر، دایره‌های سفید از دایره‌های سیاه بیشترند و در مورد (ب) دایره‌های سفید با دایره‌های سیاه برابرند. همچنین در مورد (ج) دایره سفید از دایره‌های سیاه کمترند.



(آ) (ب) (ج)

انسان‌ها که برابری را بدین ترتیب درک کرده‌بودند، در ابتدا از سنگ‌ریزه برای نگهداری شمار دام‌های خویش بهره بردند و سپس به‌ازای هر دام، علامتی (خطی) بر چوب، سنگ یا لوحی گلی حک کردند و بدین‌ترتیب، چوب‌خط به‌وجود آمد. چوب‌خط که وسیله‌ای برای شمارش اشیاء بود، امکان توسعهٔ نامگذاری بر شمار اشیا را نیز فراهم کرد. به طور مثال گروهی را درنظر بگیریم که بر هر چوب، دَه خط (علامت) می‌گذارند. در این‌صورت، می‌توانند از عبارات زیر برای شمارش اشیا استفاده کنند:

یک‌خط، دو خط، سه‌خط، ...، هشت‌خط، نُه‌خط، **چوب‌خط**،
یک‌خط بیشتر، دوخط بیشتر، سه‌خط بیشتر، ....، نُه‌خط بیشتر، دو چوب‌خط،
دوچوب و یک‌خط، دوچوب و دوخط، دوچوب و سه‌خط، .... و سه چوب‌خط

می‌توان با رسیدن به ۱۰ چوب، آنها را با طناب به هم بسته و عبارتی مانند «دو طناب و پنج چوب و هفت‌خط» را به‌معنای ۲۵۷ در ادبیات امروزی به‌کار برد. بدین‌ترتیب، اعداد که پیش از این نام‌هایی بر تعدادهای برابر بودند، به‌عنوان وسیله‌ای برای شمارش اشیاء به‌کار رفتند. به‌عبارت دقیق‌تر، از این دوران به بعد، اعداد کلماتی هستند که پشت‌سر هم می‌آیند و از آنها برای شمارش اشیا استفاده می‌شود.

تا قرن ششم میلادی عددی مانند «صفر» وجود نداشت و برای اولین بار هندیان از نمادی به‌عنوان جانگهدار در عددنویسی استفاده کردند که نشان می‌داد اینجا رقمی وجود ندارد و در ادامه با ترجمه کارهای هندیان به عربی، توسط ریاضیدانان ایرانی و مسلمان، برای اولین بار به‌عنوان عدد به‌کار رفت و بدین‌ترتیب، عدد «صفر» به‌وجود آمد. با ترجمهٔ آثار ریاضیدانان عربی‌نویس، صفر به‌عنوان یک عدد به اروپا رفته و همه‌گیر شد.

در ادبیات دبیرستانی معمولاً، کلماتی که یکی پس از دیگری آمده و برای شمارش اشیا استفاده می‌شوند، را اعداد طبیعی گفته و با اضافه نمودن صفر به آنها، «اعداد حسابی» را می‌سازند. اما در این کتاب، هماهنگ با کتاب‌های دانشگاهی، صفر را عددی طبیعی درنظر می‌گیریم.

بنابراین، اعداد طبیعی[۱] که با $\mathbb{N}$ نمایش داده می‌شوند، شامل صفر بوده و هر عدد طبیعی نیز عددی (کلمه‌ای) است که پس از عدد طبیعی دیگری می‌آید. بدین‌ترتیب، اعداد طبیعی که با نام‌گذاری بر تعدادهای برابر، وسیله‌ای برای بیان شمار اشیا می‌ساختند، تبدیل به کلماتی شدن که برای شمارش اشیا به‌کار می‌روند.

«شمارش» از تعداد اشیاء فراتر رفته و به کمیت‌سازی انجامیده است. اولین و ابتدایی‌ترین تلاش بشر برای شمارش‌پذیر ساختن یک طول را می‌توان در عباراتی مانند «سه‌وجب»، «چهار انگشت» و «دو قدم» مشاهده نمود. در عبارت «۳ وجب» طولی براساس طولی دیگر بیان می‌شود و آن را شمارش‌پذیر می‌سازد.

ویژگی‌های شمارش‌پذیر را «کمیت» گوییم.

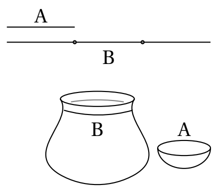
[۱] Natural Numbers

بنابراین طول یک کمیت است. «تعداد اشیا» شمارش‌پذیر است، درنتیجه «تعداد» یک کمیت است. عباراتی مانند «سه سطل آب»، «چهار کاسه گندم» و ... نشان می‌دهند گنجایش ظروف شمارش‌پذیرند و می‌توان گنجایش را به‌عنوان یک کمیت درنظر گرفت؛ این کمیت را «حجم» می‌نامیم. عباراتی مانند «سه کیلوگرم»، «پنج گرم» و «دو مثقال» نشان از شمارش‌پذیر بودن وزن اجسام براساس وزن اجسام دیگر دارد، پس وزن نیز یک کمیت است.

به تلاش و فرآیندی که به شمارش‌پذیر شدن یک ویژگی می‌انجامد، کمیت‌سازی گوییم. با شناخت بیشتر انسان‌ها از جهان پیرامونشان، توانایی ایشان در شمارش‌پذیر ساختن ویژگی‌ها و بیان آنها براساس اعداد افزایش یافت. بدین ترتیب در طول تاریخ، نخست کمیت‌های ساده‌ای مانند تعداد، طول، وزن، حجم و مساحت به‌وجود آمدند و سپس کمیت‌های پیچیده‌ای مانند زمان، دما، نیرو، بار الکتریکی، جرم، چگالی، سرعت، شتاب و ... ساخته شدند.

صرفاً جهت اطلاع. نکاتی از تاریخ ریاضیات.

امروزه ریاضیات را با نمادها و علائم می‌شناسند. اما زمانی هیچ اثری از این نمادها و علائم نبود و تمام ریاضیات را بدون علائم اختصاری یا نمادها، صرفاً به نثر می‌نوشتند. این مرحله از تاریخِ نمادگذاریِ ریاضی را ریاضیات **لفظی** (یا بیانی) می‌نامیم. مرحلهٔ دوم، ریاضیاتِ **تلخیصی** است که در آن فقط برای اَعمال و کمیت‌هایی که زیاد تکرار می‌شده‌اند، علائم اختصاری درنظر می‌گرفته‌اند. اولین نمونه از این نمادگذاری را می‌توان در پاپیروسِ «رایند[۱]» مربوط به مصریان باستان مشاهده نمود. اما پس از آن تا قرن پانزدهم میلادی اثری از نمادگذاری در ریاضیات دیده نمی‌شود. در نیمهٔ اول قرن شانزدهم خلاصه‌نویسی‌ها، استفاده از نمادهای جمع و تفریق و حتی تساوی رواج یافت و از نیمهٔ دوم قرن شانزدهم مرحلهٔ سوم در نمادگذاری ریاضی آغاز شد که آن را «**ریاضیات نمادین**» می‌نامیم و تا اوایل قرن هجدهم، رشد قابل ملاحظه‌ای یافت. در ادامه این روند، برخی از ریاضیدانان، در سال‌های ابتدایی قرن بیستم، ریاضیات را صرفاً بازی با نمادها، و منطق را قواعد این بازی می‌دانستند. در سال ۱۵۵۷ میلادی، «رابرت رکورد»[۲] دو پاره‌خط موازی را برای تساوی معرفی کرد (به شکلی که امروزه به کار می‌بریم) که از اولین گامهای مؤثر در ورود به ریاضیات نمادین است.



اگر A را نمادی برای سیب در نظر بگیریم، می‌توان عبارت ۱A را به‌معنای «یک سیب» و ۳A را به‌معنای «سه سیب» به کار برد. اگر A را به‌نماد طول پاره‌خط بالایی و B را به نماد طول پاره‌خط پایینی در شکل مقابل درنظر بگیریم، آنگاه داریم B = ۳A.

به‌طور مشابه اگر دیگی به‌اندازه ۷ کاسه گنجایش داشته باشد، می‌توان نمادهای A و B را به ترتیب برای «گنجایش کاسه» و «گنجایش دیگ» در نظر گرفت که دراین‌صورت داریم B = ۷A.

واضح است که اگر A نمادی برای گنجایش دیگ باشد و B نمادی برای قد یک نفر، عباراتی مانند B = A، B = ۳A و ... بی‌معنا هستند؛ چون مقادیر A و B از دو کمیت گنجایش و طول بوده و به مقادیری از یک کمیت اشاره ندارند.

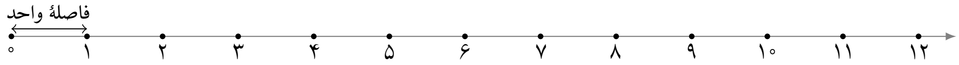
گزاره ۱.۱: اگر A و B دو مقدار از یک جنس (از یک کمیت) باشند، گوییم:
مقدار A، مقدار B را می‌شمارد اگر عددی طبیعی مانند n باشد که $B = nA$.

در دوران گذشته، روش‌هایی تجربی برای بیان طول‌ها وجود داشته است. به‌طور مثال فاصلهٔ دو شهر را با عباراتی مانند «دو روز راه است» بیان می‌کردند که به مسافتی اشاره دارد که با پای پیاده، در دو روز می‌توان طی کرد. بابلیان باستان که از اولین تمدنهای بشری هستند، واحدی برای بیان مسافت شهرها داشته‌اند که در روز ۱۲تا از آنها پیموده می‌شود و احتمالا بر تقسیم روز به ۱۲ ساعت

---
[۱] Rind
[۲] Robert Record (1510 - 1558; UK)

و درنتیجه تقسیم شبانه‌روز به ۲۴ ساعت تأثیر داشته است. در فصل‌های بعد خواهیم دید که علاوه‌بر تقسیم شبانه‌روز به ۲۴ ساعت، دقیقه، ثانیه و درجه نیز از بابلیان باستان به یادگار مانده‌اند.

از دوران باستان، برای بیان مسافت‌هایی مانند اضلاع زمین‌های زراعی، از قدم کردن استفاده می‌شد که امروزه نیز کاربرد دارد. با قدم زدن بر یک خط راست و شمارش گام‌ها، محور اعداد طبیعی به‌وجود می‌آید.

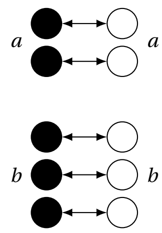


محور اعداد طبیعی، یک «نیم‌خط»[۱] است. عدد صفر را به نقطهٔ ابتدای محور اختصاص داده و فاصله‌ای به‌عنوان «فاصلهٔ واحد» (طول گام) در نظر می‌گیریم. نقطه‌ای که به فاصلهٔ واحد از صفر قرار دارد را نقطهٔ بعد از صفر گفته و عدد بعد از صفر، یعنی «یک» را به آن اختصاص می‌دهیم. با ادامهٔ این روند، نقاط دیگری بر این خط مشخص می‌شوند که فاصلهٔ هر یک از نقطهٔ قبلی‌اَش، به‌اندازهٔ «فاصلهٔ واحد» است. بنابراین، نقطه‌ای که عدد ۵ به آن نسبت داده شده، پنجمین نقطه بعد از صفر، و فاصلهٔ آن از مبدإِ نیز، پنج‌برابرِ فاصلهٔ واحد است.

۱.۱.۱ جمع اعداد طبیعی

مبتدی - ضروری

اگر به ۳ سیب، ۲ سیب اضافه کنیم، گوییم «۳ سیب بعلاوهٔ ۲ سیب شده است» که برابر است با ۵سیب. به‌طور مشابه ۳پرتقال بعلاوهٔ ۲پرتقال نیز برابر است با ۵پرتقال. در شکل مقابل می‌بینیم که برای هر دو چیزی مثل دایره‌های سیاه و سفید می‌توان تعداد کل دایره‌های سیاه را با افزودن دایره‌های سیاه بالایی به پایینی محاسبه نمود که برابر است با ۳دایرهٔ سیاه بعلاوهٔ ۲ دایرهٔ سیاه و به‌طور مشابه تعداد کل دایره‌های سفید نیز برابر است با ۳دایرهٔ سفید بعلاوهٔ ۲ دایرهٔ سفید. اما از آنجا که دایره‌های سفید بالایی و دایره‌های سیاه بالایی هم‌تعداد هستند، پس در تناظرند و همچنین دایره‌های سفید پایینی و دایره‌های سیاه پایینی نیز با هم در تناظرند و درنتیجه کل دایره‌های سیاه با کل دایره‌های سفید در تناظر است و درنتیجه تعداد برابر دارند.



به‌طور مشابه، برای هر چیز دیگری مانند درخت، انسان، اسب و ... نیز حاصل ۳چیز بعلاوهٔ ۲چیز با تعداد دایره‌های سیاه برابر است. بنابراین، چون تعداد دایره‌های سیاه برابر است با ۵، پس برای هر چیزی تعداد ۳چیز بعلاوهٔ ۲چیز برابر است با ۵ چیز. بنابراین، می‌توانیم به اختصار بگوییم ۳ بعلاوهٔ ۲ برابر است با ۵؛ یعنی برای هر چیزی، ۳تا از آن بعلاوهٔ ۲تا از آن برابر است با ۵تا از آن.

عبارت ۳ بعلاوهٔ ۲ را به‌صورت ۲ + ۳ می‌نویسیم. علامت + را اولین بار گیل‌فاندرهوکه [۲] در قرن شانزدهم به‌کار برد؛ هر چند پیش از وی، در قرن پانزدهم، اورسم علامتی شبیه به +، احتمالا از روی کلمهٔ et به‌معنای «وَ» ساخت که در عباراتی مانند «سه و چهار» برای بیان جمع به‌کار می‌رفت. البته پیش از اورسم، مصریان باستان نیز علامتی برای جمع داشته‌اند، اما پس از ایشان تا قرن پانزدهم، هیچ نمادی برای جمع وجود نداشت.

برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b، عبارت «a بعلاوهٔ b» را به‌صورت $a+b$ می‌نویسیم که به تعداد «aچیز بعلاوهٔ b چیز» اشاره دارد.

اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، $a+b$، تعداد اشیای حاصل از اضافه نمودن b شیء به a شیء است و به نماد +، «عملگر جمع» گفته می‌شود.

[۱] خطی که از یک طرف بسته و از طرف دیگر امتداد دارد. خطی که ابتدا دارد اما انتها ندارد.
[۲] Giel Vander Hoecke

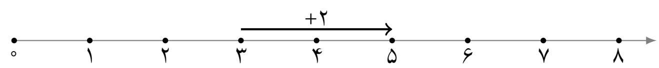
به‌طور مثال اگر a را به‌معنای ۶ و b را به‌معنای ۳ درنظر بگیریم، برای محاسبهٔ $a+b$ که به‌معنای ۳ + ۶ است، چون ۶سیب بعلاوهٔ ۳ سیب برابر است با ۹ سیب، پس ۹ = ۳ + ۶.

مثال ۱.۱: حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

آ. ۱ + ۵ ب. ۵ + ۱ ج. ۰ + ۵ د. ۵ + ۰

پاسخ: با توجه به تعریف و درک شهودی واضح است. ■

جمع اعداد طبیعی می‌تواند برای هر دو مقدار از هر کمیتی نیز مورد استفاده قرار گیرد. به‌طور مثال وزن دو سنگ یکی به‌اندازهٔ ۳ کیلوگرم و دیگری به‌اندازهٔ ۲ کیلوگرم با ۳ + ۲ کیلوگرم بیان می‌شود که برابر است ۵ کیلوگرم. همچنین اگر بر محور اعداد، از نقطهٔ ۳ که به‌اندازهٔ ۳ قدم از مبدأ فاصله دارد، ۲ قدم (۲برابر فاصلهٔ واحد) به جلو برویم، فاصلهٔ ما از مبدأ با ۲ + ۳ بیان می‌شود و به‌صورت زیر بر محور اعداد قابل نمایش است که با توجه به نمودار برابر است با ۵.



به‌طورِ مشابه، حاصل $a + b$ را به‌معنای نقطه‌ای در نظر می‌گیریم که با جلو رفتن از نقطهٔ a به اندازهٔ b واحد به آن می‌رسیم. نقطهٔ $a + b$ در واقع، b اُمین نقطهٔ بعد از a است.

پیشرفته - اختیاری
تا انتهای تعریف، صرفا جهت اطلاع...

البته دقیق‌تر این است که ۳تا را یکی‌یکی به ۶تا می‌افزاییم. برای اینکه به اعضای بستهٔ اول شامل ۶ شیء، اعضای بستهٔ دوم شامل ۳ شیء را بیافزاییم، یکی از بستهٔ اول برداشته و چون ۳ عدد بعد از ۲ است، اعضای بستهٔ دوم می‌شود ۲ و به بستهٔ اول می‌افزاییم و چون ۷ عدد بعد از ۶ است، اعضای بستهٔ اول می‌شود ۷. بنابراین، اگر برای هر عدد طبیعی مانند a، عدد بعد از a را با $a^\star$ نمایش دهیم، داریم $۳ = ۲^\star$ و $۷ = ۶^\star$. با این نمادگذاری، چون اعضای هر دو بسته روی هم برابر است با ۳ + ۶، پس داریم:

$$۶ + ۳ = ۶ + ۲^\star = ۶^\star + ۲ = ۷ + ۲$$

با ادامهٔ این روند، می‌توانیم بنویسیم:

$$۷ + ۲ = ۷ + ۱^\star = ۷^\star + ۱ = ۸ + ۱ = ۸ + ۰^\star = ۸^\star + ۰ = ۹ + ۰$$

و چون ۹ = ۰ + ۹ پس ۹ = ۳ + ۶.

با همین استدلال می‌توانیم بگوییم برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b نیز داریم:

$$a + b^\star = a^\star + b$$

که البته برای محاسبهٔ $a + ۰$ قابل استفاده نیست و باید تعریف کنیم $a + ۰ = a$. بنابراین، می‌توان جمع اعداد طبیعی را به‌صورت زیر تعریف کرد که خواص دیگر جمع را نیز به‌دست می‌دهد.

تعریف ۱.۱: **برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b داریم:**

$$\boldsymbol{a + b^\star = a^\star + b} \quad \text{و} \quad \boldsymbol{a + ۰ = a}$$

در تعریف فوق، اعداد به‌عنوان نمادهایی درنظر گرفته شده‌اند که یکی پس از دیگری می‌آیند و روشی مشخص برای محاسبهٔ حاصل‌جمع آنها ارائه می‌شود که هیچ ارتباطی با درک شهودی و تعابیر این نمادها نداشته و رویکردی نمادگرایانه به اعداد و جمعِ آنها دارد.

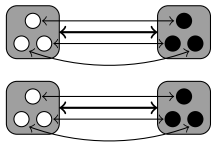
تعریف فوق برای محاسبهٔ ۷ + ۳ به محاسبهٔ ۶ + ۴ رجوع می‌کند که برای محاسبهٔ آن باید به همین تعریف بازگشت. به‌همین سبب این تعریف را «بازگشتی» (Recursive) می‌خوانیم.

مثال ۲.۱: حاصل عبارات زیر را با استفاده از تعریف فوق به‌دست آورید.

آ. $۵+۱$ ب. $۱+۵$ ج. $۵+۰$ د. $۰+۵$

پاسخ: آ. $۵+۱=۵+۰^{\star}=۵^{\star}+۰=۶+۰=۶$
موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

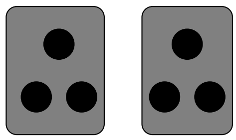
البته در این کتاب با درک شهودی جمع کار کرده و از کار با تعریف فوق، به‌علت پیچیدگی‌های تکنیکی زیاد آن، صرف نظر می‌کنیم.



ضرب: انسان‌ها فهمیدند که اگر aتا بسته bتایی سیب و aتا بسته bتایی پرتقال داشته باشند، تعداد سیب‌ها و پرتقال‌ها با هم برابر خواهد شد. کافی است تناظری یک‌به‌یک بین سیب‌ها و پرتقال‌ها برقرار کنیم. چون تعداد بسته‌های سیب با تعداد بسته‌های پرتقال برابر است، پس تناظری یک‌به‌یک بین آنها برقرار است. کافی است بین سیب‌های هر بسته با پرتقال‌های بستهٔ نظیر آن تناظری ایجاد کنیم که بنا به برابری تعداد سیب‌ها و پرتقال‌ها در هر بسته چنین تناظری وجود دارد. بنابراین بین سیب‌ها و پرتقال‌ها تناظری یک‌به‌یک برقرار کرده‌ایم. این استدلال را در شکل مجاور برای ۲ بسته ۳تایی دایره سیاه و ۲ بسته ۳تایی دایره سفید نشان داده‌ایم.

برای هر دو عدد طبیعی دلخواه a و b تعداد کل اشیاء موجود در a بستهٔ bتایی را با $a \times b$ نمایش می‌دهیم و علامت × را «عملگر ضرب» می‌خوانیم.

به‌طور مثال ۲×۳ یعنی تعداد اشیای موجود در ۲ بستهٔ ۳تایی و ۳×۲ به‌معنای تعداد اشیای موجود در ۳ بستهٔ ۲تایی است.



در شکل روبه‌رو، ۲ بسته داریم که در هر بسته ۳ دایره وجود دارد. پس در کل، ۲×۳ دایره داریم. تعداد کلِّ دایره‌ها، از اضافه کردن دایره‌های یک بسته به دیگری به‌دست می‌آید که برابر است با $۳+۳$. پس $۲ \times ۳ = ۳+۳ = ۶$.

با تولد صفر و ورود به ریاضیات نمادین، عبارت‌هایی مانند ۳×۰ و ۰×۳ نیز ایجاد شدند که معنا و مقدار آنها مهم بود که می‌توان آنها را به‌ترتیب برای تعداد اشیاء موجود در ۳بستهٔ خالی و هیچ بستهٔ ۳تایی درنظر گرفت که به‌وضوح برابرند با صفر.

برای هر عدد طبیعی مانند a، عبارت $a \times ۰$ به تعداد اشیاء موجود در aبستهٔ خالی اشاره دارد که برابر است با صفر. بنابراین، $a \times ۰ = ۰$. به‌طور مشابه، $۰ \times a$ به تعداد اشیاء موجود در هیچ بستهٔ aتایی اشاره دارد که برابر است با صفر. پس $۰ \times a = ۰$. پس اگر $a \neq ۰$ و $b \neq ۰$، آنگاه $ab \neq ۰$، چون تعدادی بستهٔ غیرخالی داریم، تعداد اشیاء موجود در آنها مخالف صفر است. این مطلب را تحت عنوان گزارهٔ زیر به‌طور رسمی بیان می‌کنیم.

گزاره ۲.۱: اگر $ab = ۰$ آنگاه $a = ۰$ یا $b = ۰$ و اگر $ab \neq ۰$ آنگاه $a \neq ۰$ و $b \neq ۰$.

پیشرفته - اختیاری
صرفا جهت اطلاع...

با ظهور نمادگرایی در ریاضیات، ریاضیدانان به تعاریف دقیق‌تر علاقه‌مند شدند که معمولا هیچ ارتباطی با درک شهودی ندارند. به‌طور مثال بر پایه تساوی‌های زیر که از درک شهودی نسبت به ضرب به‌دست می‌آیند، تعریفی بسیار دقیق از ضرب ارائه می‌دهند که هیچ ارتباطی با درک شهودی از ضرب

ندارد و در ادامه آمده است.

$$\begin{aligned}
۰ \times ۳ &= ۰ && = ۰ \\
۱ \times ۳ &= ۳ = ۰ + ۳ && = (۰ \times ۳) + ۳ \\
۲ \times ۳ &= ۳ + ۳ && = (۱ \times ۳) + ۳ \\
۳ \times ۳ &= ۳ + ۳ + ۳ && = (۲ \times ۳) + ۳ \\
۴ \times ۳ &= ۳ + ۳ + ۳ + ۳ && = (۳ \times ۳) + ۳ \\
۵ \times ۳ &= ۳ + ۳ + ۳ + ۳ + ۳ && = (۴ \times ۳) + ۳
\end{aligned}$$

بنابراین، می‌توانیم ضرب اعداد طبیعی را به صورت زیر تعریف کنیم.

تعریف ۲.۱: برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b داریم:

$$۰ \times b = ۰ \quad \text{و} \quad (a+۱)b = ab + b$$

مثال ۳.۱: حاصل‌ضرب‌های زیر را با استفاده از تعریف فوق به‌دست آورید.

آ. ۲×۰ ب. ۰×۲ ج. ۵×۲

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

از آنجا که $a+۱$ عدد بعد از a است و آن را با $a^\star$ نشان می‌دادیم، می‌توانیم در تعریف فوق، به‌جای $(a+۱)$ از $a^\star$ استفاده کرده و عبارت $(a+۱)b = ab+b$ را به‌صورت $a^\star b = ab + b$ نوشت.

این تعریف دستورالعملی بازگشتی برای محاسبهٔ حاصل‌ضرب، براساس جمع به‌دست می‌دهد که هرچند براساس مفاهیم جمع و ضرب ساخته شده است، اما بسیار کُند است و درگیر محاسبات طولانی می‌شود. در فصل بعد با استفاده از خواص جمع و ضرب که در ادامه می‌آیند، روش‌های محاسبهٔ سریع‌تری براساس شیوهٔ عددنویسی معمول به‌دست خواهیم آورد.

خواص جمع و ضرب را می‌توان از تعاریف فوق به‌دست آورد اما کار با این تعاریف پیچیدگی‌های تکنیکی زیادی دارد از حوصلهٔ این کتاب خارج است. لذا خواص جمع و ضرب را با استفاده از تناظر و هم‌عددی به‌دست خواهیم آورد که به درک شهودی از جمع و ضرب نیز نزدیک‌تر است.

۲.۱.۱ پرانتزگذاری و عبارت‌های محاسباتی

مبتدی – ضروری
یک‌بار خواندن، الزامی است.

پرانتز که به‌صورت «(...)» است را اولین بار شتیفل (۱۵۴۴م) و کاردانو (۱۵۴۵م) به‌کار بردند. به‌جای «سه نقطه» یک عبارت محاسباتی قرار می‌گیرد که حاصل آن قابل محاسبه بوده و در نهایت به یک عدد می‌انجامد. این عبارت را «عبارت درون پرانتز» یا به‌اختصار «درون پرانتز» می‌نامیم.

هر پرانتز، نمایندهٔ حاصل عبارت درون پرانتز است.

بنابراین، در عبارت‌های محاسباتی (قابل محاسبه)، هر پرانتز به یک عدد اشاره دارد و برای محاسبهٔ آن باید حاصل عبارت درون پرانتز را به‌جای پرانتز گذاشت. به‌طور مثال:

$$\begin{cases} (۳+۲) \times ۵ = ۵ \times ۵ = ۲۵ \\ ۳ + (۲ \times ۵) = ۳ + ۱۰ = ۱۳ \end{cases}$$

به‌طور مثال عبارت (۵ × ۲) + ۳ به‌معنای نتیجه افزودن (۵ × ۲) شیء به ۳ شیء است که ۵ × ۲ شیء نیز به‌معنای اشیاء موجود در ۲بستهٔ ۵تایی است. بنابراین، (۵ × ۲) + ۳ به‌معنای تعداد حاصل از اضافه نمودن ۲بستهٔ ۵تایی به ۳ شیء است.

اما عبارت ۵ × (۲ + ۳) به‌معنای تعداد اشیاء موجود در (۲ + ۳)بستهٔ ۵تایی است که (۲ + ۳)بسته نیز به‌معنای تعداد حاصل از افزودن ۲ بسته به ۳بسته است. بنابراین، ۵ × (۲ + ۳) به‌معنای تعداد اشیاء حاصل از اضافه نمود ۲بسته به ۳بسته است که هر کدام شامل ۵شیء هستند.

مثال فوق نشان می‌دهد که حاصل عبارت ۵ × ۲ + ۳ با پرانتزگذاری‌های متفاوت، متفاوت است که اهمیت پرانتزگذاری را نشان می‌دهد. می‌توان گفت: «با پرانتزگذاری مشخص می‌شود که اول کدام عملگر عمل می‌کند» و این عبارت را معمولاً به‌صورت زیر به‌کار می‌برند.

پرانتزگذاری، تقدم عملگرها را مشخص می‌کند.

یک عبارت محاسباتی زمانی معتبر است که هر **عملگر** بین دو عدد قرار گرفته باشد که آنها را **عملوند** می‌خوانیم. به‌طور مثال عباراتی مانند +۳ و × +۳، عبارت‌هایی قابل محاسبه نیستند، چون دو طرف عملگرها، عدد قرار ندارد. اما می‌توان از پرانتز، به‌عنوان یک عملوند استفاده کرد؛ چون نمایندهٔ حاصل عبارت محاسباتی درون پرانتز است. بنابراین، عباراتی مانند ۵ × (۲ + ۳) و (۵ × ۲) + ۳ را عبارت‌هایی محاسباتی می‌خوانیم. اما در این‌صورت عبارت ۵ × ۳ + ۲ بی‌معناست؛ ولی با پرانتزگذاری، از آن، دو عبارت متفاوت با دو حاصل متفاوت ساخته می‌شود. برای اینکه همگان، این عبارت را به یک شکل محاسبه کنند، قراردادی جهانی وجود دارد:

ضرب بر جمع مقدم است.

یعنی اول ضرب را انجام می‌دهیم و سپس جمع را. بنابراین برای محاسبهٔ ۵ × ۲ + ۳ اول باید ۵ × ۲ را محاسبه نمود و سپس (۵ × ۲) + ۳ را؛ که برابر است با ۱۰ + ۳.

در ادامه برای راحتی و وضوح بیشتر، در عبارتی مانند ۳ × (۴ + ۳) برای مشخص کردن یک عملگر، آن را درون دایره می‌گذاریم. به‌طور مثال برای مشخص کردن عملگر ×، آن را به صورت ⊗ نشان می‌دهیم و از ⊕ برای مشخص کردن عملگر + استفاده می‌کنیم.

مثال ۴.۱: در هر یک از موارد زیر، عملوندهای عملگرهای درونِ دایره را مشخص کنید.

آ. (۳ ⊕ ۴) × ۵ ب. (۳ + ۴) ⊗ ۵ ج. (۳ + ۴) ⊗ (۵ + ۶)

پاسخ: آ. ۳ و ۴ ب. (۳ + ۴) و ۵ ج. (۳ + ۴) و (۵ + ۶) ■

به تشابه‌ها و تفاوت‌ها توجه کنید.

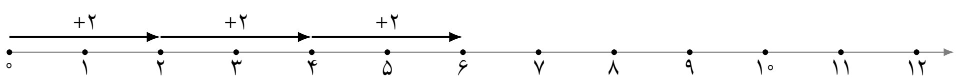
مثال ۵.۱: هریک از عبارات زیرا را با پرانتزگذاری مناسب محاسبه کنید.

آ. ۲ × ۳ + ۴ × ۵ ب. ۴ + ۲ × ۳ × ۵ ج. ۲ × ۴ + ۳ × ۵

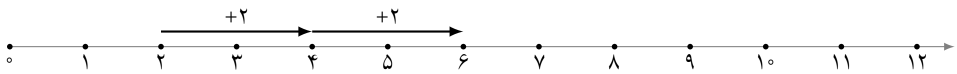
پاسخ: آ. (۲ × ۳) + (۴ × ۵) ب. ۴ + ((۲ × ۳) × ۵) ج. (۲ × ۴) + (۳ × ۵)

پیشنهاد: حاصل عبارت فوق را با تمام پرانتزگذاری‌ها ممکن محاسبه کنید و تفاوت‌ها را ببینید. ■

برای نمایش ۲ × ۳ بر محور اعداد، می‌توان ۲ × ۳ را به‌معنای ۳مرحله قدم برداشتن بر محور اعداد و هر کدام به‌اندازهٔ ۲گام درنظر گرفت و آن را به‌صورت زیر بر محور اعداد نمایش داد.



شخصی به ما خُرده می‌گیرد که نمایش فوق برای $۲+۲+۲+۰$ مناسب است و $۲+۲+۲$ که به‌صورت ۲×۳ بیان می‌شود دارای نمایش زیر است.



این شخص در مورد نمایش $۲+۲+۲$ و $۲+۲+۲+۰$ بر محور اعداد درست می‌گوید. اما بنا به ۱.۱.۱ داریم:

$$۳\times۲=۲\times۲+۲=۱\times۲+۲+۲=۰\times۲+۲+۲+۲=۰+۲+۲+۲$$

بدین‌ترتیب، نمودار اولی برای ۲×۳ مناسب‌تر است. از طرفی هم از آنجا که ۲×۳ در درک شهودی به‌معنای ۳تا ۲تایی است، نمودار اولی که بر آن ۳تا ۲تایی بهتر دیده می‌شود را ترجیح می‌دهیم.

مثال ۶.۱: هر یک از عبارات زیر را با نمایش بر محور اعداد محاسبه کنید.

آ. ۲×۴	ب. ۴×۳	ج. ۳×۱
د. ۱×۳	ه. ۳×۰	و. ۰×۳.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

با محاسبهٔ مقادیر داریم:

$$۳+(۱+۳)=۲+۵ \qquad \text{و} \qquad ۲+۴=۴+۲$$

هرچند محاسبهٔ عبارت‌های $\big(۳+(۱+۳)\big)+(۴+۲)$ و $(۲+۴)+(۵+۲)$ به دو اجرای کاملاً متفاوت از روش محاسبهٔ ۱.۱.۱ می‌انجامد، اما می‌توان قبل از هر محاسبه‌ای، با توجه به خاصیت زیر نتیجه گرفت حاصل آنها برابر است.

خاصیت ۱.۱: **برای هر چهار عدد طبیعی مانند a، b، c و d داریم:**
اگر $a=c$ و $b=d$، آنگاه $a+b=c+d$

این خاصیت را پیش از این در توجیه معنادار بودن جمع دو عدد نیز بیان کردیم. اقلیدس، ریاضیدان مشهور یونان باستان، این خاصیت را به‌صورت زیر بیان می‌کند:

اگر به چیزهای برابر، چیزهایی برابر افزوده شود، نتیجه‌ها برابرند.

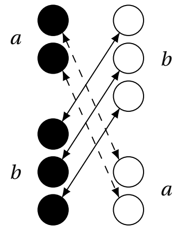
حتی برای محاسبهٔ عبارتی مانند $\big(۳+(۱+۳)\big)+(۴+۲)$ نیز از این خاصیت استفاده می‌کنیم؛ چون گوییم:

$$\left.\begin{array}{l}\overbrace{\big(۳+(۱+۳)\big)}^{a}=۳+۴=\overbrace{۷}^{c}\\ \overbrace{۲+۴}^{b}=\overbrace{۶}^{d}\end{array}\right\}\Longrightarrow\overbrace{\big(۳+(۱+۳)\big)}^{a}+\overbrace{(۲+۴)}^{b}=\overbrace{۷}^{c}+\overbrace{۶}^{d}=۱۳$$

برای ضرب نیز خاصیت خوش‌تعریفی را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم.

خاصیت ۲.۱: **برای هر چهار عدد طبیعی مانند a، b، c و d داریم:**
اگر $a=c$ و $b=d$، آن گاه $ab=cd$

۲.۱ خواص جمع و ضرب



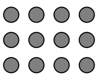
چون $۵ = ۳ + ۲$ و $۵ = ۲ + ۳$ پس $۲ + ۳ = ۳ + ۲$، اما برای رسیدن به این نتیجه، نیازی به محاسبهٔ حاصل عبارات نیست. $۳ + ۲$ به‌معنای تعداد حاصل از افزودن ۳ شیء به ۲ شیء است و $۲ + ۳$ به تعداد حاصل از افزودن ۲ شیء به ۳ شیء اشاره دارد که بنا به شکل مقابل، متناظر، و درنتیجه برابرند. به‌طور مشابه، برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b، با متناظر کردن a شیء از گروه اول با a شیء از گروه دوم، و متناظر کردن b شیء از گروه اول با b شیء از گروه دوم می بینیم که $a + b = b + a$.

خاصیت ۳.۱ (جابجایی جمع): **برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b داریم $a + b = b + a$.**

بنا به خاصیت جابجایی جمع، جابه‌جا کردن دو عملوندِ یک عملگرِ جمع، تغییری در حاصل جمع ایجاد نمی‌کند. در زیر چند تساوی که نمونه‌هایی از کاربرد خاصیت جابجایی هستند را نشان داده‌ایم و عملگری که عملوندهای آن جابه‌جا شده‌اند را به‌صورت $\oplus$ نشان داده‌ایم.

$$(۳ + ۴) \oplus ۵ = ۵ \oplus (۳ + ۴) \qquad ۳ \oplus ۴ = ۴ \oplus ۳$$
$$(۴ \oplus ۳) + ۵ = (۳ \oplus ۴) + ۵ \qquad (۳ + ۴) \oplus (۵ + ۶) = (۵ + ۶) \oplus (۳ + ۴)$$

توجه داریم که در تساوی $(۴ \oplus ۳) + ۵ = (۳ \oplus ۴) + ۵$ خاصیت جابجایی در مورد عبارت درون پرانتز به‌کار رفته است و تساوی دو عبارت از تساوی $۳ + ۴ = ۴ + ۳$ و خاصیت خوش‌تعریفی جمع نتیجه می‌شود. اما برای سادگی، جابه‌جایی عملوندهای هر عملگر جمع را یک نمونه از کاربرد خاصیت جابجایی جمع در نظر می‌گیریم. اما تساوی $۳ + (۴ + ۵) = ۴ + (۳ + ۵)$ یک نمونه از کاربرد خاصیت جابجایی نیست؛ چون دو عملوند هیچ یک از عملگرهای جمع جابه‌جا نشده‌اند.



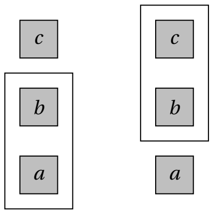
در مورد ضرب نیز می‌توان بدون شمارش اشیای ۴ بستهٔ ۳ تایی و اشیاء ۳ بستهٔ ۴تایی، از شکل مقابل نتیجه گرفت که $۳ \times ۴ = ۴ \times ۳$. درواقع شکل مقابل نشان می‌دهد تعداد اشیای موجود در ۳ سطر ۴ تایی برابر است با تعداد اشیای موجود در ۴ ستون ۳تایی. به‌طور مشابه برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b نیز می‌توان نشان داد تعداد اشیای موجود a سطر bتایی برابر است با تعداد اشیای موجود در b ستون aتایی و خاصیت زیر را از آن نتیجه گرفت.

خاصیت ۴.۱ (جابجایی ضرب): **برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b داریم $a \times b = b \times a$.**

درواقع، بنا به خاصیت جابجایی ضرب، جابه‌جا کردن دو عملوند هر عملگر ضرب، تغییری در حاصل‌ضرب ایجاد نمی‌کند و بنابراین، اگر در یک عبارت محاسباتی، عملوندهای هر عملگر ضربی را جابه‌جا کنیم، حاصل عبارت محاسباتی تغییر نمی‌کند.

واضح است که تساوی $۴ \times (۵ + ۳) = ۵ \times (۴ + ۳)$ یک نمونه از خاصیت جابجایی ضرب نیست، چون دو عددی که جابجا شده‌اند، ۴ و ۵ هستند که عملوندهای هیچ یک از عملگرهای موجود در این عبارت نیستند. البته توجه داریم که $۳۵ = ۵ \times ۷ = ۵ \times (۴ + ۳)$ و $۳۲ = ۴ \times ۸ = ۴ \times (۵ + ۳)$؛ بنابراین، تساوی مورد اشاره نیز نادرست است، در حالی که با استفاده درست از خاصیت جابجایی همیشه تساوی برقرار می‌ماند. به‌طور مشابه، تساوی $۴ + (۵ + ۳) = ۵ + (۴ + ۳)$ نیز یک کاربرد خاصیت جابجایی جمع نیست، چون ۴ و ۵ عملوندهای یک علامت جمع نیستند.

شخصی ادعا می‌کند برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و c داریم $a + (b + c) = (a + b) + c$؛ چون هر دو به حاصل اضافه نمودن سه دسته از اشیا با تعدادهای a، b و c شیء اشاره دارند. استدلال



$(a+b)+c = a+(b+c)$

این شخص غلط است، چون $a+(b+c)$ به‌معنای حاصل اضافه نمودن c شیء به b شیء در مرحله اول و اضافه نمودن کل این اشیا به a شیء در مرحلهٔ دوم است؛ در حالی که $(a+b)+c$ به‌معنای اضافه نمودن b شیء به a شیء در مرحله اول و اضافه نمودن c شیء به حاصل آنها در مرحلهٔ دوم است. هرچند استدلال این شخص با توجه به تعریف نادرست است، اما تساوی $a+(b+c) = (a+b)+c$ با متناظر کردن هر شیء در حالت اول، با خودش در حالت دوم واضح است. این تساوی را «خاصیت شرکت‌پذیری جمع» می‌نامیم.

خاصیت ۵.۱ (شرکت‌پذیری جمع): **برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و c داریم:**
$$\boldsymbol{a+(b+c) = (a+b)+c}$$

مبتدی – ضروری
با دقت بخوانید.

تساوی $۵ + (۴ + ۳) = (۵ + ۴) + ۳$ یک کاربردِ خاصیت شرکت‌پذیری است. درحالی که عبارت $۴ + (۵ + ۳) = (۵ + ۴) + ۳$ یک کاربردِ خاصیت شرکت‌پذیری نیست. زیرا جای ۴ و ۵ عوض شده ولی در خاصیت شرکت‌پذیری جای اعداد عوض نمی‌شود.

عبارت $((۶ + ۵) + ۴) + ۳ = (۶ + ۵) + (۴ + ۳)$ یک کاربردِ خاصیت شرکت‌پذیری است؛ زیرا:

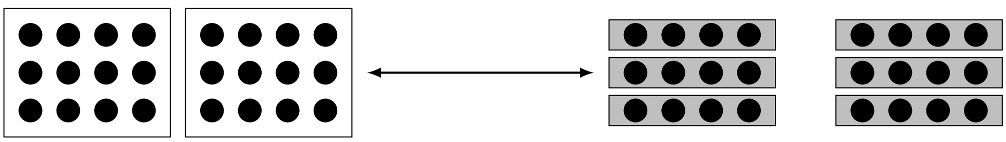
توجه! **توجه!**
به نحوهٔ استفاده از خواص دقت کنید.
به جایگذاری‌ها دقت کنید.

$$(\overbrace{۳}^{a} + \overbrace{۴}^{b}) + \overbrace{(۵+۶)}^{c} = \overbrace{۳}^{a} + (\overbrace{۴}^{b} + \overbrace{(۵+۶)}^{c})$$

تساویِ $۶+((۵+۴)+۳) = (۶+۵)+(۴+۳)$ یک کاربردِ خاصیت شرکت‌پذیری نیست؛ زیرا تخصیصِ a، b و c در عبارتِ $(۶ + ۵) + (۴ + ۳)$ به‌نحوی‌که یکی از طرفینِ تساویِ خاصیت شرکت‌پذیری را ایجاد کند به دو روش ممکن است که با استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری، تساوی‌های زیر را به‌دست می‌دهند که در هیچ‌کدام به $۶ + ((۵ + ۴) + ۳)$ نمی‌رسیم.

$$\begin{cases} (\overbrace{۳}^{a} + \overbrace{۴}^{b}) + \overbrace{(۵+۶)}^{c} = \overbrace{۳}^{a} + (\overbrace{۴}^{b} + \overbrace{(۵+۶)}^{c}) \\ \overbrace{(۳+۴)}^{a} + (\overbrace{۵}^{b} + \overbrace{۶}^{c}) = (\overbrace{(۳+۴)}^{a} + \overbrace{۵}^{b}) + \overbrace{۶}^{c} \end{cases}$$

فرض کنید a بسته داریم که هر کدام شامل b بستهٔ c تایی است. در این‌صورت می‌توانیم بگوییم $a.b$ بستهٔ c تایی داریم و تعداد تمامی اشیا را با $(a.b).c$ نمایش دهیم. از طرفی هم می‌توانیم بگوییم هر بستهٔ بزرگ شامل $b.c$ شیء است که در این‌صورت a بستهٔ $b.c$ تایی داریم و درنتیجه $a.(b.c)$ شیء داریم. شکل زیر، درک این استدلال را ساده‌تر می‌کند.


$۲ \times (۳ \times ۴)$ $(۲ \times ۳) \times ۴$

این مطلب را تحت عنوان خاصیت شرکت‌پذیری ضرب بیان می‌کنیم.

خاصیت ۶.۱ (شرکت‌پذیری ضرب): **برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و c داریم:**
$$\boldsymbol{a.(b.c) = (a.b).c}$$

برای آشنایی بیشتر با این خواص به مثال زیر توجه می‌کنیم.

مثال ۷.۱: در هر یک از موارد زیر کدام یک از خواص جمع یا ضرب به‌کاررفته است؟

آ. $۳ + (۴ + ۵) = (۴ + ۵) + ۳$

ب. $۳ + (۴ + ۵) = (۳ + ۴) + ۵$

ج. $۲ \times (۵ \times ۷) = (۵ \times ۷) \times ۲$

د. $۵ \times (۷ \times ۲) = (۵ \times ۷) \times ۲$

ه. $۲ \times (۳ + ۵) = (۳ + ۵) \times ۲$

و. $(۲ \times ۳) + ۵ = ۵ + (۲ \times ۳)$

ز. $(۲ + ۳) + (۴ + ۵) = ((۲ + ۳) + ۴) + ۵$

ح. $(۲ + ۳) + (۴ + ۵) = (۴ + ۵) + (۲ + ۳)$

ط. $(۲ \times ۳) + (۴ \times ۵) = (۳ \times ۲) + (۴ \times ۵)$

ی. $(۲ \times ۳) \times (۴ \times ۵) = ۲ \times (۳ \times (۴ \times ۵))$

پاسخ: آ. جابجایی جمع — ب. شرکت‌پذیری جمع — ج. جابجایی ضرب
د. شرکت‌پذیری ضرب — ه. جابجایی ضرب — و. جابجایی جمع
ز. شرکت‌پذیری جمع — ح. جابجایی جمع — ط. جابجایی ضرب
ی. شرکت‌پذیری ضرب ■

مثال ۸.۱: در هر مورد، درستی یا نادرستی استفاده از خاصیت مربوطه را مشخص کنید.

آ. $۲ + (۳ + ۵) = ۳ + (۲ + ۵)$ .... جابجایی جمع

ب. $(۲ \times ۳) \times (۴ \times ۵) = (۲ \times ۴) \times (۳ \times ۵)$ .... جابجایی ضرب

ج. $۲ \times (۳ \times ۴) = (۲ \times ۴) \times ۳$ .... شرکت‌پذیری ضرب

د. $(۲ + ۳) + (۴ + ۵) = (۲ + (۳ + ۴)) + ۵$ .... شرکت‌پذیری جمع

پاسخ: همه موارد نادرست هستند. کافی است به مطالب قبل مراجعه کنید. توجه: مورد (د) با دو بار استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری جمع به‌دست می‌آید، اما «یک مورد» استفاده از آن نیست. ■

مثال ۹.۱: با استفاده از خواص جمع، درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

آ. $۳ + (۴ + ۵) = (۳ + ۵) + ۴$ ب. $(۳ + ۴) + (۵ + ۶) = (۵ + ۳) + (۴ + ۶)$

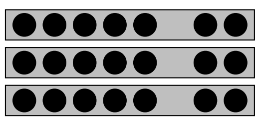
توجه! **توجه!**
در هر مرحله فقط از یک کاربرد خواص اعداد استفاده می‌شود.

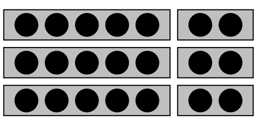
پاسخ: آ.
$۳ + (۴ + ۵) = (۴ + ۵) + ۳$ .... بنا به جابجایی
$= (۳ + ۵) + ۴$ .... شرکت‌پذیری

ب.
$(۳ + ۴) + (۵ + ۶) = ((۳ + ۴) + ۵) + ۶$ .... بنا به شرکت‌پذیری
$= (۳ + (۴ + ۵)) + ۶$ .... بنا به شرکت‌پذیری
$= (۳ + (۵ + ۴)) + ۶$ .... بنا به جابجایی
$= ((۳ + ۵) + ۴) + ۶$ .... بنا به شرکت‌پذیری
$= (۳ + ۵) + (۴ + ۶)$ .... بنا به شرکت‌پذیری
$= (۵ + ۳) + (۴ + ۶)$ .... بنا به جابجایی

■

در a بستهٔ bتایی و a بستهٔ cتایی، $(a \times b) + (a \times c)$ شیء داریم. می‌توانیم از آنها a بستهٔ $(b + c)$تایی بسازیم که تعداد آنها برابر است با $a(b + c)$. شکل زیر درک این موضوع را ساده‌تر خواهد کرد.


$۳ \times (۵ + ۲)$


$(۳ \times ۵) + (۳ \times ۲)$

خاصیت ۷.۱ (توزیع‌پذیری): **برای هر سه عدد طبیعی دلخواه مانند a، b و c داریم:**
$$\boldsymbol{a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)}$$

خاصیت ۸.۱ (همانی جمع)**: به‌ازای هر عدد طبیعی مانند a داریم:** $a+۰=۰+a=a$

عبارت فوق به این معناست که با جایگذاری هر عدد طبیعی دلخواه در تمام aها، تساوی‌های فوق برقرار هستند. این خاصیت به زبان ساده می‌گوید جمع عدد صفر با **هر عددی** می‌شود **همان** عدد.

خاصیت ۹.۱ (همانی ضرب)**: برای هر عدد طبیعی مانند a داریم:** $a\times۱=۱\times a=a$

به‌وضوح یک بستهٔ a تایی که تعداد اشیای آن با $a\times۱$ نمایش داده می‌شود، a شیء دارد.
$۱\times a$ به تعداد اشیاء موجود در a بسته اشاره دارد که هرکدام شامل یک شیء است و برای اثبات تساوی $a=۱\times a$ کافی است نشان دهیم تعداد اشیاء با تعداد بسته‌ها برابر است. برای این منظور کافی است هر بسته را به شیء درون آن متناظر کنیم.
عبارت $a\times۰$ به‌معنای تعداد اشیای موجود در a بستهٔ خالی است که برابر است با صفر و درنتیجه داریم $a\times۰=۰$ و از خاصیت جابجایی ضرب نتیجه می‌گیریم $۰\times a=۰$.

خاصیت ۱۰.۱ (ضرب در صفر)**: برای هر عدد طبیعی مانند a داریم:** $a\times۰=۰\times a=۰$

تمرین:

(۱) عملوندهای عملگرهایی که با دایره نشان‌گذاری شده‌اند را مشخص کنید.
آ. $(۳+(۴\times۵))\times(۶\oplus۷)$
ب. $(۳+(۴\otimes۵))\times(۶+۷)$
ج. $(۳\oplus(۴\times۵))\times(۶+۷)$
د. $(۳+(۴\times۵))\otimes(۶+۷)$

(۲) در اتاقی ۴ نفر حضور دارند. ۲ زن و سپس ۳ مرد وارد می‌شوند. **عبارت** مناسب برای محاسبهٔ افراد درون اتاق را بنویسید.

(۳) علی ۴ سیب، حسین ۲ سیب، رضا ۵ سیب و احمد ۶ سیب دارد. در مرحلهٔ اول حسین سیب‌های خود را به رضا، و علی سیب‌های خود را به احمد می‌دهد. در مرحلهٔ دوم احمد سیب‌های خود را به رضا می‌دهد. **عبارت** مناسب برای محاسبهٔ **تعداد** سیب‌های نزد رضا را بیابید.

(۴) حاصل جمع‌های زیر را با استفاده از محور اعداد محاسبه کنید.
آ. $۲+۳+۱$
ب. $۰+۳+۲$
ج. $۱+۱+۱+۱$
د. $۰+۱+۴$

(۵) هر تساوی یک نمونه از کدام خاصیت جمع یا ضرب است؟
آ. $۳\times۰=۰$
ب. $۳+۰=۰$
ج. $۳\times۱=۳$
د. $۰\times۱=۰$
ه. $(۳+۴)\times(۵\times۶)=(۵\times۶)\times(۳+۴)$
و. $(۳+۴)\times(۵\times۶)=(۴+۳)\times(۵\times۶)$
ز. $(۳+۴)\times(۵\times۶)=\big((۳+۴)\times۵\big)\times۶$
ح. $(۳+۴)\times(۵\times۶)=(۵\times۶)\times(۳+۴)$

(۶) درستی تساوی‌های زیر را بدون محاسبه و با خواص جمع و ضرب نشان دهید.
آ. $(۳+۴)+۵=۵+(۴+۳)$
ب. $(۳+۴)+۵=۳+(۵+۴)$
ج. $(۳\times۴)\times۵=(۳\times۵)\times۴$
د. $(۳\times۴)\times۵=(۵\times۳)\times۴$
ه. $(۳+۴)+(۵+۶)=۳+\big((۴+۵)+۶\big)$
و. $(۳+۴)+(۵+۶)=\big(۳+(۵+۴)\big)+۶$
ز. $\big(۶+(۵+۳)\big)+۴$
ح. $\big(۳+(۴+۵)\big)+۶=۵+\big(۴+(۶+۳)\big)$
ط. $(۳+۴)\times۵=(۳\times۵)+(۴\times۵)$
ی. $(۳+۴)\times۵=(۵\times۴)+(۵\times۳)$
ک. $(۳+۴)\times(۵+۶)=\big((۳+۴)\times۵\big)+\big((۳+۴)\times۶\big)$
ل. $(۳+۴)\times(۵+۶)=\big((۳\times۵)+(۳\times۶)\big)+\big((۴\times۵)+(۴\times۶)\big)$

(۷) نشان دهید برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و c عبارت $a+(b+c)$ با تمامی عبارت‌های زیر برابر است.

آ. $a+(c+b)$ ب. $(a+b)+c$ ج. $(b+c)+a$

د. $(a+c)+b$ ه. $c+(a+b)$ و. $(c+b)+a$

(۸) درهریک ازتساوی‌های زیر، کدام‌یک ازخواص ضرب دیده می‌شود؟

آ. $۶\times۸=۸\times۶$ ب. $c(a+b)=ca+cb$

ج. $ac+b=ca+b$ د. $(a+c)d+(a+c)e=(a+c)(d+e)$

(۹) درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید.

آ. $(۲\times۳)\times۴=(۴\times۲)\times۳$ ب. $(۶+۱)۵=(۱)(۵)+(۵)(۶)$

ج. $(۸+۲)۷=۷(۲+۸)$ د. $۳(۴+۷)=۴\times۳+۳\times۷$

جهت تسلط ذهنی خواننده.

(۱۰) جای خالی را چنان پرکنید که هر عبارت، مثالی از یکی از خواص اعداد گردد.

$.........=(۸)(۲)+......$ $.........=(۳)(۶)+......$

$...(۵+۲)=(۷)...+(۷)...$ $...(۶)=(۴)...+(۷)...$

(۱۱) عبارات محاسباتی زیر را، به‌صورت ذهنی محاسبه کنید.

آ. ۱۴×۲۱ ب. ۱۸×۱۱ ج. ۳۱×۳۳ د. ۲۱×۱۷

با خاصیت توزیع‌پذیری مقایسه کنید.

(۱۲) درستی یا نادرستی عبارت زیر را بررسی کنید.

$$a+(b.c)=(a+b)(a+c)$$

صورت تمرین مهم است.

(۱۳) نشان دهید برای هر سه عدد طبیعی a، b و c داریم:

آ. $a(b+c)=ca+ba$ ب. $(da)(bc)=(ca)(db)$

ج. $ad+de=(e+a)d$ د. $(a+b)(c+d)=ca+bd+ad+cb$

ه. $(a+b)(a+b)=a.a+۲a.b+b.b$

صورت تمرین مهم است.

(۱۴) پس از پرانتزگذاری مناسب با خواص جمع و ضرب، درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

آ. $۱۵+۴\times۵=۷\times۵$ ب. $۴\times۳+۳\times۵=۹\times۳$

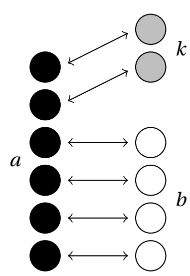
ج. $۳\times(۴+۵)+۱۲=۱۵+۸\times۳$ د. $a(b+c)+bc=(a+c)b+ac$

ه. $a(b+c)+bc=(a+b)c+ab$

۳.۱ ترتیب اعداد طبیعی

علاوه‌بر گونهٔ انسان امروزی، حتی گونه‌های انسانی اولیه که میلیون‌ها سال پیش بر زمین زندگی می‌کرده‌اند نیز مانند برخی از حیوانات توان درک کمتری و بیشتری بین دو مقدار از کمیت‌هایی مانند وزن، حجم، طول و تعداد را داشته‌اند. البته درک آنها کاملا حسی بوده و شبیه به درک ما از اندازهٔ روشنی یا تیرگی رنگ‌ها بوده است.

استفاده ازسنگ‌ریزه و چوب‌خط اولین نمونه‌هایی است که نشان می‌دهد انسان از درک حسی نسبت به این مفاهیم فراتر رفته است.



در شکل مجاور دایره‌های سفید از دایره‌های سیاه کمتر و دایره‌های سیاه از دایره‌های سفید بیشترند. چون اگر دایره‌های سیاه و سفید را یکی‌یکی با هم حذف کنیم، دایره‌های سفید تمام می‌شوند، درحالی‌که دایره‌های سیاه تمام نشده‌اند. اگر تعداد دایره‌های سیاه باقی‌مانده را k بنامیم و kتا دایرهٔ خاکستری به دایره‌های سفید اضافه کنیم، دایره‌های سیاه با دایره‌های سفید و خاکستری متناظر و درنتیجه هم‌تعداد می‌شوند. از طرفی تعداد دایره‌های خاکستری و سفید، برابر است با $b+k$ و درنتیجه $a=b+k$.

بنابراین، می‌توان گفت چون $۶ = ۲ + ۴$، پس داریم $۶ > ۴$. معمولاً می‌گوییم $۶ = ۲ + ۴$ درنتیجه $۶ > ۴$ و می‌نویسیم $۶ = ۲ + ۴ \Longrightarrow ۶ > ۴$. در این عبارت، نماد $\Longrightarrow$ را نماد استنتاج گوییم. این عبارت را به‌صورت«اگر $۶ = ۲ + ۴$ آن‌گاه $۶ > ۴$» نیز می‌خوانیم که دقیق‌تر است.

تعریف ۳.۱: برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b داریم $a < b$ اگر و تنها اگر عددی طبیعی و ناصفر مانند k وجود داشته باشد که $a + k = b$.

به‌عبارتی $a < b$ یک خلاصه‌نویسی برای «عدد طبیعی و ناصفرِ k وجود دارد که $a + k = b$». عبارت «اگر و تنها اگر» معمولاً با نماد $\Longleftrightarrow$ نمایش داده می‌شود و عبارتهایی که از تعویض آن با هر یک از نمادهای $\Longrightarrow$ و $\Longleftarrow$ به‌دست می‌آیند، درست هستند. یعنی از $a < b$ می‌توان نتیجه گرفت «برای عددی طبیعی مانند k داریم $a + k = b$» و از این عبارت نیز می‌توان نتیجه گرفت $a < b$.

مفهومی – اختیاری
درک شهودیِ کوچک‌تری با تعریف (۳.۱) یکسان است.

مثال ۱۰.۱: درستی نامساوی‌های زیر را بررسی کنید.

آ. $۳ < ۷$ ب. $۴ < ۴$ ج. $۶ < ۴$

پاسخ: آ. $۳ + ۴ = ۷ \Longrightarrow ۳ < ۷$ ب. $۴ + ۰ = ۴ \Longrightarrow ۴ \not< ۴$ ج. $۴ + ۲ = ۶ \Longrightarrow ۴ < ۶ \Longrightarrow ۶ \not< ۴$ ■

مثال ۱۱.۱: با فرضِ $x < ۳$ و $y < ۴$ و طبیعی بودنِ x و y، درستیِ عبارات زیر را ثابت کنید.

آ. $x + y < ۳ + ۴$ ب. $x.y < ۳ \times ۴$ ج. $۳y < ۱۲$ د. $۴x < ۱۲$
ه. $۳x < ۹$ و. $۳x < ۱۲$ ز. $x + ۳ < ۶$ ح. $x + ۳ < ۸$
ط. $y + ۳ < ۹$ ی. $x + ۳ < y + ۴$ ک. $۳x < ۴y$

(راهنمایی: فقط از تعریف (۳.۱) و خواص اعداد طبیعی استفاده کنید)

پیشرفته – اختیاری
صرفاً برای خواننده علاقه‌مند.

پاسخ: آ. چون $x < ۳$ پس عددی طبیعی و ناصفر مانند k وجود دارد که $x + k = ۳$. به‌همین طریق چون $y < ۴$ پس عددی طبیعی و ناصفر مانند k' وجود دارد که $y + k' = ۴$. اگر k و k' چنین اعدادی باشند داریم:

$$(x + k) + (y + k') = ۳ + ۴ \Rightarrow (x + y) + (k + k') = ۳ + ۴ \Rightarrow x + y < ۳ + ۴$$

ب. مشابه مورد (آ) گوییم اعدادی طبیعی و ناصفر مانند k و k' وجود دارند که $x + k = ۳$ و $y + k' = ۴$ و درنتیجه:

$$(x + k) \times (y + k') = ۳ \times ۴ \Rightarrow xy + (ky + xk' + kk') = ۳ \times ۴ \Rightarrow xy < ۳ \times ۴$$

موارد دیگر به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

با توجه به درک شهودی از مفاهیم کوچک‌تری و بزرگ‌تری واضح است که دو عدد یا مساوی‌اند یا یکی از آنها بزرگ‌تر است و دیگری کوچک‌تر و واضح است که همزمان نمی‌شود که هم مساوی باشند و هم یکی کوچک‌تر از دیگری؛ چون اگر دایره‌های سیاه و سفید را یکی‌یکی با هم حذف کنیم، یک و تنها یک حالت اتفاق می‌افتد. یا هر دو با هم تمام می‌شوند یا سیاه‌ها زودتر تمام می‌شوند و یا سفیدها.

خاصیت ۱۱.۱ (اصل تثلیث)**: برای هر دو طبیعی مانند a و b یک و تنها یکی از سه‌حالت $a < b$، $a = b$ و $a > b$ امکان‌پذیر است.**

قضیه ۱.۱: برای هر سه عدد طبیعی دلخواه مانند a، b و c داریم:

آ. اگر $a \neq 0$ آن‌گاه $a > 0$. **ب. اگر $a < b$ و $b < c$ آن‌گاه $a < c$.**

ج. اگر $a < b$، آن‌گاه $a + c < b + c$. **د. اگر $a + c < b + c$ آن‌گاه $a < b$.**

اثبات: آ. با قرار دادن $k = a$ داریم $a = k = k + 0$ و چون $k = a \neq 0$ پس $a > 0$.

ب. $a < b$ و $b < c$، پس اعدادی طبیعی و ناصفر مانند k و k' هستند که $a + k = b$ و $b + k' = c$ و درنتیجه با قرار دادن $a + k$ به‌جای b در $b + k' = c$ داریم $(a + k) + k' = c$ و درنتیجه $a + (k + k') = c$ و چون k و k' هر دو ناصفرند، $k + k'$ نیز ناصفر است و درنتیجه $a < c$.

ج. $a < b$ پس $(k \neq 0)$ $a + k = b;$. بنابراین $(a + k) + c = b + c$. پس $(a + c) + k = b + c$ و درنتیجه $a + c < b + c$.

د. بنا به اصل تثلیث یک و تنها یکی از سه حالت $a < b$، $a = b$ و $a > b$ امکان‌پذیر است.

$$\begin{cases} \boldsymbol{a < b} \Longrightarrow a + c < b + c & \text{............ بنا به مورد (ج)} \\ \boldsymbol{a = b} \Longrightarrow a + c = b + c & \text{............ خوش تعریفی جمع} \\ \qquad \Longrightarrow \boldsymbol{a + c \not< b + c} & \text{............ اصل تثلیث} \\ \boldsymbol{a > b} \Longrightarrow a + c > b + c & \text{............ بنا به مورد (ج)} \\ \qquad \Longrightarrow \boldsymbol{a + c \not< b + c} & \text{............ اصل تثلیث} \end{cases}$$

بنابراین، $a + c < b + c$ فقط زمانی ممکن است که $a < b$، پس می‌توان نتیجه گرفت $a < b$. ■

شخصی ادعا می‌کند اگر $a < b$ آن‌گاه $ac < bc$ و استدلال زیر را بیان می‌کند:

$$a < b \Longrightarrow a + k = b \Longrightarrow (a + k)c = bc \Longrightarrow ac + kc = bc \Longrightarrow ac < bc$$

اما داریم $3 > 2$ در حالی که $0 \times 3 \not< 0 \times 2$. بنابراین نتیجه‌گیری وی نادرست است. پس می‌توان استدلال را به‌نحوی اصلاح کرد که همیشه نتیجهٔ به‌دست آمده درست باشد؛ چون در غیر این‌صورت استدلال ما هیچ ارزشی ندارد.

این شخص از تساوی $ac + kc = bc$ نتیجه گرفته است که $ac < bc$؛ اما این استدلال زمانی درست است که $kc \neq 0$. اما $kc \neq 0$ زمانی درست است که $k \neq 0$ و $c \neq 0$. از آنجا که بنا به فرض داریم $k \neq 0$، پس استدلال فوق برای هر عدد طبیعی مانند c که $c \neq 0$ درست است.

قضیه ۲.۱: برای هر سه عدد طبیعی دلخواه مانند a، b و c داریم:

آ. اگر $a < b$ و $c \neq 0$ آن‌گاه $ac < bc$. **ب. اگر $ac < bc$ و $c \neq 0$ آن‌گاه $a < b$.**

اثبات: آ. به مطالب پیش از قضیه رجوع کنید.

ب. با استفاده از مورد (آ) و اصل تثلیث اثبات می‌شود. به اثبات مورد (د) از قضیه قبل رجوع کنید. ■

گزاره ۳.۱: عبارت $a \leq b$ به معنای $a = b$ یا $a < b$ در نظر گرفته می‌شود.

به‌طور مثال، $3 \not< 3$ اما $3 \leq 3$؛ چون $3 = 3$. همچنین $3 \leq 4$ چون $3 < 4$. اما $4 \not\leq 3$ چون هیچ‌یک از عبارات $3 < 4$ و $4 = 3$ درست نیستند.

مثال ۱۲.۱: نشان دهید برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b داریم:

$a \leq b$ اگر و تنها اگر عددی طبیعی مانند c وجود داشته باشد که $a + c = b$

پاسخ: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۱.۳.۱ معادلات پایه

در ادامه با مفاهیم تفریق و تقسیم آشنا خواهیم شد. تا گذشته‌هایی نه‌چندان دور، این مفاهیم به‌صورت مستقل بیان شده و ارتباط آنها با جمع و ضرب، پایهٔ حل معادلات و نامعادلات بود. اما در این کتاب معادلات و نامعادلات پایه را براساس قضایای فوق و قضیهٔ بعد بیان می‌کنیم تا مهارت‌های لازم برای مباحث پیچیده‌تر را در خلال این مفاهیم ساده کسب کنیم.

قضیه ۳.۱ (حذف جمع): **برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و c داریم؛**
اگر $a+c=b+c$ آن‌گاه $a=b$.

اثبات: کافی است نشان دهیم اگر $a+c \neq b+c$، آن‌گاه هر دو حالت $a<b$ و $a>b$ غیرممکن هستند، سپس از اصل تثلیث نتیجه بگیریم که تنها حالت ممکن $a=b$ است. پس اگر $a+c<b+c$ آن‌گاه $a<b$.
ادامه کار به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

فرض کنید بخواهیم عددی را بیابیم که حاصل‌جمع آن با ۳ مساوی ۷ باشد. اگر آن عدد را با نمادِ x نمایش دهیم می‌توانیم بگوییم:

مبتدی – ضروری
اساس حل کردن تمام معادلات و نامعادلات به‌همین سادگی است.

عددی طبیعی مانند x چنان بیابید که $x+۳=۷$.

عددی که مقدار آن را نمی‌دانیم، «مجهول» می‌گوییم که به‌معنای «نادانسته» است و «معادله» به‌معنای «تساوی»، و «حل کردن معادله» به‌معنای یافتن و معلوم کردنِ مجهول است. معمولاً از حروف آخر الفبای انگلیسی برای نمایش مجهول‌ها استفاده می‌کنیم. این رویه، را رنه دکارت در میان ریاضیدانان مرسوم کرد. به‌طورِ مثال، در معادلهٔ $x+۳=۷$، عددی که مقدار آن را نمی‌دانیم، با x نمایش داده شده و آن را مجهول می‌خوانیم. حل کردن این معادله به‌معنای یافتن عددی مانند x است که به‌ازای آن $x+۳=۷$.

به‌طور شهودی می‌دانیم با برداشتن ۳ شیء از ۷ شیء، ۴ شیء باقی می‌ماند ولی با استفاده از ۱.۱.۱ داریم:

$$x+۳=۷=۷+۰=۶+۱=۵+۲=۴+۳$$

با نوشتن ۷ به‌صورت ۳+۴ داریم $x+۳=۴+۳$. پس بنا به خاصیت حذف جمع داریم $x=۴$. این نتیجه‌گیری (استدلال) را می‌توانیم به‌صورت زیر خلاصه کنیم.

$$x+۳=۷ \Longrightarrow x+۳=۴+۳ \xRightarrow{\text{خاصیت حذف جمع}} x=۴$$

عبارت $x+۳=۷ \Longrightarrow x+۳=۴+۳$ را به‌صورت «$x+۳=۷$، درنتیجه $x+۳=۴+۳$» می‌خوانیم. البته در این عبارت استدلال خود را خلاصه کرده‌ایم. استدلال کامل به صورت زیر است:

داریم $x+۳=۷$ و $۴+۳=۷$، درنتیجه $x+۳=۴+۳$

عبارت «خاصیت حذف جمع» روی علامت استنتاج دوم تأکید دارد که این نتیجه‌گیری با استفاده از خاصیت حذف جمع صورت گرفته است.

برخی از معادلات جواب ندارند. به‌طور مثال معادلهٔ $x+۲=۱$ در اعداد طبیعی جواب ندارد. **برخی از معادلات نیز بی‌شمار جواب دارند.**

به‌طور مثال، معادلهٔ $x+۱=x+۱$ بی‌شمار جواب دارد. زیرا با جایگذاریِ هر عدد طبیعی در x، تساوی برقرار می‌ماند؛ پس هر عدد طبیعی می‌تواند یک جواب این معادله باشد.

مثال ۱۳.۱: معادلات زیر را حل کنید.

آ. $x+۴=۹$ ب. $x+۳=۲x+۱$ ج. $x+۱۰=x+۵$

پاسخ: آ. $x+۴=۹ \xRightarrow{\text{خوش‌تعریفی}} x+۴=۵+۴ \xRightarrow{\text{خاصیت حذف جمع}} x=۵$

ب. $x+۳=x+x+۱ \xRightarrow{\text{خاصیت حذف جمع}} ۳=x+۱ \xRightarrow{\text{خوش‌تعریفی}} ۲+۱=x+۱ \xRightarrow{\text{خاصیت حذف جمع}} ۲=x$

ج. $x+۱۰=x+۵ \Longrightarrow ۱۰=۵$. این نتیجه‌گیری نشان می‌دهد اگر به‌ازای عددی طبیعی مانند x تساویِ $x+۱۰=x+۵$ برقرار شود، آن‌گاه تساوی $۱۰=۵$ نیز برقرار می‌شود که غیرممکن است. بنابراین چنین عددی وجود ندارد و درنتیجه معادلهٔ فوق جواب ندارد. ■

تکنیکی – ضروری
نکته‌ای ظریف!
با دقت بخوانید.

برای حل معادلهٔ $۳x=۶$ عددی مانند x چنان می‌یابیم که حاصل‌ضرب آن در۳ مساوی ۶ باشد. چون $۲\times۳=۶$، پس مقدار x چنان است که $۳x=۳\times۲$ و از خاصیت حذفِ ضرب نتیجه می‌گیریم $x=۲$. اما آیا این استدلال درست است؟ آیا ضرب دارای خاصیت حذف است؟ اگر ضرب دارای خاصیت حذف است، پس چرا استدلال زیر غلط است؟ چرا به نتیجهٔ غلط رسیده است؟

$$۰=۰ \Longrightarrow ۲\times۰=۳\times۰ \xRightarrow{\text{خاصیت حذف ضرب}} ۲=۳$$

با توجه به خاصیت حذف ضرب که در زیر آمده، این شخص با حذف صفر از دو طرف تساوی، مرتکب اشتباه بزرگی شده است.

قضیه ۴.۱ (حذف ضرب)**: برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و c داریم:**
اگر $ac=bc$ و $c\neq ۰$ آن‌گاه $a=b$.

اثبات: کافی است ضمن توجه به شرط $c\neq۰$، شبیه به اثبات قضیه قبل عمل کنیم. ■

پایهٔ حل معادلات در همین استدلال‌های ساده است.

مثال ۱۴.۱: عدد طبیعی x را چنان بیابید که:

آ. $۳x=۱۲$ ب. $۳(x+۱)=۶$ ج. $۴x=۰$

د. $۲x+۴=۶$ ه. $۲x=x+۳$ و. $۳x+۵=۲x+۹$

درست اندیشیدن را بیاموزیم.

پاسخ: با استفاده از قواعد حذف جمع و ضرب به حل این موارد می‌پردازیم.

آ. $۳x=۱۲=۳\times۴ \Rightarrow x=۴$

ب. $۳(x+۱)=۶=۳\times۲ \xRightarrow{\text{حذف ضرب}} x+۱=۲=۱+۱ \xRightarrow{\text{حذف جمع}} x=۱$

ج. $۴x=۴\times۰ \xRightarrow{\text{حذف ضرب}} x=۰$

د. $۲x+۴=۶=۲+۴ \xRightarrow{\text{حذف جمع}} ۲x=۲=۲\times۱ \xRightarrow{\text{حذف ضرب}} x=۱$

ه. $۲x=x+۳ \Longrightarrow x+x=x+۳ \xRightarrow{\text{حذف جمع}} x=۳$

و. $۳x+۵=۲x+۹ \Longrightarrow ۲x+x+۵=۲x+۹ \xRightarrow{\text{حذف جمع}} x+۵=۹=۴+۵ \xRightarrow{\text{حذف جمع}} x=۴$ ■

یک راه مهم برای جلوگیری از اشتباه، بررسیِ درستیِ جواب است. کافی است جواب یا جواب‌های به‌دست آمده را در مجهول‌های معادله جایگذاری کنیم، اگر تساوی برقرار نشد، جواب به‌دست آمده اشتباه است. این عمل را امتحان کردن جواب گویند.

مبتدی – ضروری
اشتباهی رایج ...

مثال ۱۵.۱: شخصی معادلهٔ $۲x+۴=۱۰$ را به صورت زیر حل می‌کند:

$$۲x+۴=۱۰=۲\times۵ \xRightarrow{\text{حذف ضرب}} x+۴=۵=۱+۴ \xRightarrow{\text{حذف جمع}} x=۱$$

اما با قرار دادن $x=۱$ ، می‌بینیم که جواب اشتباه است. چرا؟

پاسخ: این شخص، نمادهای a، b و c را به شکل زیر در نظر گرفته‌است.

$$\overbrace{۲}^{c}\times\overbrace{x+۴}^{a}=\overbrace{۲}^{c}\times\overbrace{۵}^{b}\Longrightarrow\overbrace{x+۴}^{a}=\overbrace{۵}^{b}$$

اما توجه داریم که ۲ در x ضرب شده و نه در $x+۴$. بنابراین، $c\times a$ در سمت چپ تساوی تشکیل نمی‌شود. اما با درنظر گرفتن نمادهای a، b و c به شکل زیر می‌توان از خاصیت حذف جمع استفاده نمود.

$$\overbrace{۲x}^{a}+\overbrace{۴}^{c}=\overbrace{۶}^{b}+\overbrace{۴}^{c}\Longrightarrow\overbrace{۲x}^{a}=\overbrace{۶}^{b}$$

در ادامه، به صورت زیر از خاصیت حذف ضرب استفاده می‌کنیم:

$$\overbrace{۲}^{c}\times\overbrace{x}^{a}=\overbrace{۲}^{c}\times\overbrace{۳}^{b}\Longrightarrow\overbrace{x}^{a}=\overbrace{۳}^{b}$$ ■

۲.۳.۱ نامعادلات پایه

اولین نامعادلاتی که باید به آنها توجه کرد، نامعادلاتی به شکل $x<a$ می‌باشند؛ که در آن a عددی طبیعی است. برای حل کردن یک نامعادله، باید مشخص کرد با جایگذاریِ چه اعدادی در مجهول یا مجهول‌ها، نامساوی برقرار خواهد بود. با توجه به **محور اعداد**، به‌راحتی جواب یا جواب‌های نامعادلاتی به‌شکل $x<a$ به‌دست می‌آید.

مثال ۱۶.۱: نامعادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

آ. $x<۴$ ب. $x\le ۵$ ج. $x\le ۰$

د. $x<۰$ هـ. $x>۴$ و. $x\ge ۴$

ز. $۰<x<۶$ ح. $۳\le x<۷$ ط. $۴<x\le ۶$

پاسخ: این نامعادلات، با توجه به تعریف (۳.۱) به راحتی حل می‌شوند.

آ. $x=۰,۱,۲,۳$ ب. $x=۰,۱,۲,۳,۴,۵$ ج. $x=۰$

د. جواب ندارد هـ. $x=۵,۶,۷,۸,\ldots$ و. $x=۴,۵,۶,۷,۸,\ldots$

ز. $x=۱,۲,۳,۴,۵$ ح. $x=۳,۴,۵,۶$ ط. $x=۵,۶$ ■

برای نامعادلهٔ $x+۳<۵$، داریم: $x+۳<۲+۳\Longleftrightarrow x<۲$

بنابراین با جایگذاریِ اعداد ۱ و ۰ به‌جای x، نامساویِ $x<۲$ و درنتیجه نامساویِ $x+۳<۵$ برقرار خواهد بود.

برای نامعادلهٔ $۳x<۱۲$ داریم: $۳x<۱۲=۳\times۴\overset{۳\neq۰}{\Longleftrightarrow}x<۴$

بنابراین، مقادیر ۰، ۱، ۲ و ۳ جواب‌های این نامعادله هستند.

مثال ۱۷.۱: نامعادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

آ. $۲x<۶$ ب. $۳x<۱۵$ ج. $۲x+۵<۹$

د. $۵x+۷<۶$ هـ. $۳(x+۴)<۱۲$ و. $۳x+۴<۲x+۱۰$

پاسخ: آ. بنا به تعریف (۳.۱) داریم $۲x<۲\times۳\Longrightarrow x<۳$

ج. $۲x+۵<۴+۵$ پس $۲x<۴$ بنابراین $۲x<۲\times۲$ در نتیجه $x<۲$. بنابراین به ازای $x=۰$ و $x=۱$ نامساوی برقرار خواهد بود.

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

تمرین:

جهت خوانندگان مبتدی و برای آشنایی بیشتر با تعریف

(۱۵) با استفاده از تعریف «$<$» ثابت کنید:

آ. $۳ < ۴$ ب. $۷ < ۲۵$

(۱۶) معادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

آ. $x + y = ۰$ ب. $x + y = ۳۰$ ج. $x.y = ۱$

د. $x.y = ۲$ ه. $x.y = ۳$ و. $x.y = ۰$

صورت این تمرین از حل آن مهم‌تر است.

(۱۷) نشان دهید در اعداد طبیعی:

آ. اگر $۳ < x$ آن‌گاه $۵ < x$ ب. اگر $۳ < ۳x$ آن‌گاه $x \geq ۲$

ج. اگر $۳ < x$ آن‌گاه $۶ < ۲x$ د. اگر $۴ < x$ آن‌گاه $۵ < x + ۱$

ه. اگر $۳ < x$ آن‌گاه $۱۵ < ۴x$ و. اگر $۳ < x$ آن‌گاه $۹ < x.x$

ز. اگر $۶ < ۲x$ آن‌گاه $۳ < x$ ح. اگر $۷ < x + ۴$ آن‌گاه $۳ < x$

ط. اگر $۴ < x + ۱$ آن‌گاه $۸ \leq ۳x + ۲$ ی. اگر $۹ \leq ۳(x + ۲)$ آن‌گاه $۴ < x + ۴$

این تمرین چندان سخت نیست؛ اما شامل نکاتی بسیار اساسی است.
به تفاوت میان $<$ و $\leq$ توجه کنید.

(۱۸) درستی یا نادرستی عبارات زیر را در اعداد طبیعی بررسی کنید.

آ. اگر $a < b$ آن‌گاه $a \leq b$ ب. اگر $a < b$ و $b < c$ آن‌گاه $a < c$

ج. اگر $a < b$ و $b < c$ آن‌گاه $a \leq c$ د. اگر $a < b$ و $b \leq c$ آن‌گاه $a \leq c$

ه. اگر $a \leq b$ و $b \leq c$ آن‌گاه $a < c$ و. اگر $a \leq b$ و $b \leq c$ آن‌گاه $a \leq c$

ز. اگر $a \leq b$ آن‌گاه $a < b$ ح. اگر $a < b$ و $a \leq c$ آن‌گاه $c < b$

موارد مشابه جهت توجه خواننده به تفاوت میان $\leq$ و $<$ آورده شده است.

(۱۹) نامعادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

آ. $x < ۵$ ب. $x \leq ۵$ ج. $x > ۵$ د. $x \geq ۵$

ه. $x + ۳ < ۵$ و. $x + ۲ \leq ۶$ ز. $x + ۱ < x + ۲$ ح. $x + ۳ < x + ۲$

ط. $۲x < ۲$ ی. $۲x < ۱$ ک. $۳x < ۱۲$ ل. $۳x < ۱۴$

م. $۳x \leq ۱۲$ ن. $۳x \leq ۱۴$ س. $۳x + ۳ \leq ۱۵$ ع. $۴x + ۳ \leq ۱۵$

ف. $۲x \geq ۲$ ص. $۲x \geq ۱$ ق. $x + y \leq ۰$ ر. $x + y < ۰$

ش. $x + y \leq ۱$ ت. $x + y \leq ۲$ ث. $x.y \leq ۰$ خ. $x.y \leq ۱$

ذ. $x.y > ۰$ ض. $۰ < x.y \leq ۲$

(۲۰) با فرض اینکه x و y دو عدد طبیعی هستند که $۳ < x < ۵$ و $۲ \leq y \leq ۷$، درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را تعیین کنید.

این تمرین به ظاهر ساده، شامل نکاتی بسیار اساسی است.

آ. $x < ۵$ ب. $x \leq ۵$ ج. $y < ۷$

د. $y \leq ۷$ ه. $x > ۳$ و. $x \geq ۳$

ز. $y > ۲$ ح. $y \geq ۲$ ط. $۵ \leq x + y \leq ۱۲$

ی. $۵ \leq x + y < ۱۲$ ک. $۵ < x + y \leq ۱۲$ ل. $۵ < x + y < ۱۲$

م. $۶ \leq x.y \leq ۳۵$ ن. $۶ \leq x.y < ۳۵$ س. $۶ < x.y \leq ۳۵$

ع. $۶ < x.y < ۳۵$ ف. $۴ \times ۲ \leq x.y \leq ۷ \times ۴$ ص. $۳ \times ۳ \leq x.y \leq ۶ \times ۵$

ق. $۱۲ \leq x + x.y \leq ۳۲$

توجه! **توجه!**
برای پاسخ دادن به این تمرین وقت بگذارید و خوب فکر کنید.

(۲۱) درستی یا نادرستی استفاده از حذف ضرب را در هر یک از موارد زیر را مشخص کنید.

آ. $۳x + ۵ = ۳ \times ۹ \Longrightarrow x + ۵ = ۹$ ب. $۰ \times ۴ = ۰ \times ۴ \Longrightarrow ۴ = ۴۰$

ج. $x.y = x.۳ \Longrightarrow y = ۳$ د. $۳(x + ۱) = ۳ \times ۷ \Longrightarrow x + ۱ = ۷$

(۲۲) نشان دهید برای هر دو عدد طبیعی a و b، نامعادلهٔ $a + x = b$ در $\mathbb{N}$ جواب دارد، اگر و تنها اگر $a \leq b$

(۲۳) نشان دهید اگر $a \leq b$، معادلهٔ $a + x = b$ جواب منحصربه‌فرد دارد.

(۲۴) برای هر دو عدد طبیعی a و b، گوییم a مضرب b است اگر و تنها اگر عددی طبیعی مانند c وجود داشته باشد که $a = bc$. با این تعریف، به موارد زیر پاسخ دهید.
آ. به‌اعدادی که مضربی از ۲ هستند زوج گویند. اعداد طبیعیِ زوج را مشخص کنید.
ب. به‌اعدادی که مضربی از ۲ نیستند، فرد گویند. اعداد طبیعیِ فرد را مشخص کنید.
ج. نشان دهید صفر مضرب همهٔ اعداد طبیعی است.
د. نشان دهید تنها مضربِ صفر، صفر است.
ه. نشان دهید اگر a و b مضارب t باشند، $a + b$ نیز مضرب t است.
و. نشان دهید اگر a مضرب b باشد، ac نیز مضرب b است.
ز. اگر a مضرب b باشد، آن‌گاه یا $a = ۰$ یا $a \geq b$.

(۲۵) اعداد طبیعی a و b را چنان بیابید که معادلهٔ $ax = b$ بیش از یک جواب داشته باشد.

(۲۶) نشان دهید اگر $a \neq ۰$، جواب معادلهٔ $ax = b$ در صورت وجود یکتاست.

(۲۷) نشان دهید برای هر چهار عدد طبیعی مانند a، b، c و d که $a + b = c + d$، داریم:
$b > d$ اگر و تنها اگر $a < c$

(۲۸) درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را در $\mathbb{N}$ مشخص کنید.

با دقت و حوصله پاسخ دهید. نباید اشتباه کنید.

آ. اگر $ac < bc$، پس $c \neq ۰$
ب. اگر $ac < bc$، پس $a < b$
ج. اگر $ac \leq bc$، پس $a \leq b$

(۲۹) معادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

موارد مختلف و پاسخ آنها را با هم مقایسه کنید.

آ. $x + ۵ = ۹$
ب. $x + ۴ = ۴$
ج. $۵ + y = ۶$
د. $۴ + z = ۳$
ه. $۳ + t = ۱$
و. $۴x = ۱۶$
ز. $۸x = ۰$
ح. $۴x = ۵$
ط. $۰ \times x = ۳$
ی. $۰ \times x = ۰$
ک. $۴x + ۵ = ۹$
ل. $۳x + ۴ = ۱۹$
م. $۴x + ۸ = ۵x + ۳$
ن. $۳x + ۸ = ۶x + ۲$
س. $۳(x + ۳) = ۱۵$
ع. $(x + ۳) = ۳(x + ۱)$
ف. $۳(x + ۱) + ۲ = ۲(x + ۳) + ۱$
ص. $۲(۲(x + ۲) + ۱) + ۱ = ۳x + ۱۸$
ق. $۲(x + ۳) + ۴ = ۳(x + ۱) + ۶$
ر. $۳x + ۵ = ۵x + ۱$
ش. $۴x + ۱ = x + ۷$
ت. $۳(x + ۵) + ۳ = ۵(x + ۱) + ۲$

۴.۱ تفریق و تقسیم

با دقت بخوانید
به نحوهٔ تعریف تفریق و تقسیم بر اساس جمع و ضرب و استدلال براساس آن توجه کنید.
مفاهیم زیادی به طور مشابه با استفاده از مفاهیم دیگر ساخته می‌شوند.

۱.۴.۱ تفریق

در دبستان آموختیم که $a - b$، حاصل برداشتن b شئ از روی a شئ است. پس یک بستهٔ a تایی را به دو بستهٔ b تایی و $(a - b)$ تایی تبدیل کرده‌ایم که حاصل جمع این دو بسته a است. یعنی:

$a - b$ عدد منحصربه‌فردی است که حاصل‌جمع آن با b برابر است با a.

بنابراین، اگر مقدار $a - b$ را x بنامیم، داریم $x + b = a$. پس می‌توان $a - b$ را جواب معادلهٔ $x + b = a$ در نظر گرفت. با توجّه به تمرین (۲۳) اگر $a \geq b$، معادلهٔ $x + b = a$ دارای جواب

منحصربه‌فرد است و اگر $a \ngeq b$ معادلهٔ $x + b = a$ جواب ندارد. به‌طورِ مثال، تفریقِ ۴ − ۳ در $\mathbb{N}$ دارای جواب نیست و بی‌معنا است؛ زیرا ۴ $\ngeq$ ۳. برای محاسبهٔ تفریق ۲ − ۶ گوییم:

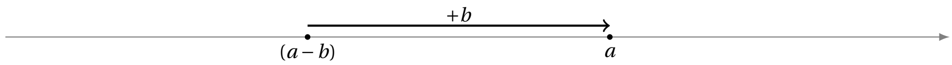
$$x = ۶ - ۲ \Longrightarrow ۶ = x + ۲ \Longrightarrow ۴ + ۲ = x + ۲ \xrightarrow{\text{حذف جمع}} x = ۴$$

بنابراین تفریق را به‌طورِ رسمی، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۴.۱: برای هر دو عدد طبیعیِ دلخواهِ a و b که $a \geq b$، حاصل تفریق b از a را با $a - b$ نشان می‌دهیم که عدد طبیعی منحصربه‌فردی است مانند x که $a = x + b$.

به چگونگی به‌دست آمدن نمایش تفریق از نمایش جمع بر محور اعداد توجه کنید.

تفریق را می‌توان روی محور اعداد نیز نشان داد. اگر $x = a - b$، بنا به تعریف (۴.۱) داریم $x + b = a$. یعنی پیکانی به‌طول b از $a - b$ آغاز می‌شود و انتهای آن بر a قرار می‌گیرد. بنابراین پیکانی به‌طول b (جهت آن به سمت راست) چنان می‌کشیم که انتهایِ آن بر a باشد، در این‌صورت ابتدای آن پیکان بر$a - b$ خواهد بود. (به شکل زیر توجه کنید .) در واقع، چون $x = a - b$ نگارش دیگری از $a = x + b$ است، پس بر محور اعداد نمایش یکسانی دارند.

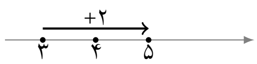


مثال ۱۸.۱: حاصل عبارات زیر را با استفاده از تعریف فوق محاسبه نموده وتفریق‌ها را روی محور اعداد نشان دهید .

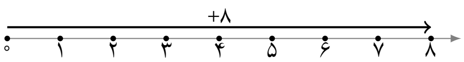
مثالی ساده با نتیجه‌ای مهم

آ . ۵ − ۲   ب . ۸ − ۸   ج . ۵ − ۸

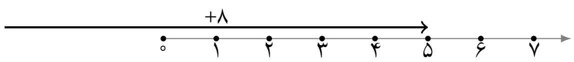
پاسخ: آ . چون ۳ + ۲ = ۵ پس ۲ − ۵ = ۳



ب . چون ۸ = ۸ + ۰ پس ۰ = ۸ − ۸



ج . ۸ $\ngeq$ ۵ پس معادلهٔ ۵ = x + ۸ در $\mathbb{N}$ جواب ندارد و درنتیجه جمع هیچ عددی از $\mathbb{N}$ با ۸ برابرِ ۵ نمی‌شود.



بنابراین ۸ − ۵ در $\mathbb{N}$ جواب نداشته و بی‌معناست. ■

در مورد (ج) از مثال فوق مشاهده کردیم که اگر $a < b$ آن‌گاه $a - b$ در $\mathbb{N}$ بی‌معناست. توجه داریم که اگر $a < b$ باشد، نمی‌توان از تعریف (۴.۱) برای محاسبهٔ $a - b$ استفاده کرد. به‌عبارتی اگر $a < b$، تعریف (۴.۱) عبارت $a - b$ را تعریف نمی‌کند. به‌همین سبب گاهی به‌جای اینکه بگوییم $a - b$ در $\mathbb{N}$ بی‌معناست، می‌گوییم $a - b$ در $\mathbb{N}$ تعریف نشده است.

گزاره ۴.۱: برای هر عدد طبیعی مانند a داریم: $a - a = ۰$

اثبات: صفر عنصر همانی جمع است پس $a + ۰ = a$ که ازتعریف تفریق نتیجه می‌شود $a - a = ۰$. ■

مثال ۱۹.۱: با فرض معنادار بودن تفریق‌ها در $\mathbb{N}$ ثابت کنید:

تساوی‌های ارائه شده را به‌خاطر بسپارید.

آ . $a + (b - c) = (a + b) - c$ ب . $a - (b + c) = (a - b) - c$

ج . $(a + b) - c = (a - c) + b$ د . $(a - b) - c = (a - c) - b$

پاسخ: آ. بنا به تعریف تفریق، $x = (a+b) - c$ اگر وتنها اگر $x + c = a + b$ پس برای اثبات تساوی، کافی است نشان دهیم $(a + (b - c)) + c = a + b$. (ادامه راه حل، با استفاده از شرکت‌پذیریِ جمع و تعریف تفریق، سَرراست است. اثبات را کامل کنید.)

ب. بنا به تعریف تفریق، $x = a - (b + c)$ اگر و تنها اگر $x + (b + c) = a$. پس کافی است نشان دهیم $((a - b) - c) + (b + c) = a$ (ادامهٔ راه سرراست است.)

ج. مشابه موارد (آ) و(ب) به سادگی انجام می‌شود.

د. با استفاده از مورد (ب) وخاصیت جابجایی جمع به سادگی اثبات می‌شود. ■

در مثال فوق، شرط معنادار بودن تفریق‌ها بسیار مهم است. زیرا ممکن است برخی از تفریق‌ها معنادار نباشند. برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲۰.۱: شخصی عبارت $۴ + (۳ - ۵)$ را چنین محاسبه می‌کند. می‌گوید بنا به مورد (آ) از مثال قبل داریم: $۴ + (۳ - ۵) = (۴ + ۳) - ۵ = ۷ - ۵ = ۲$

اما $۳ - ۵$ در اعداد طبیعی تعریف نشده و درنتیجه $۴ + (۳ - ۵)$ نیز در اعداد طبیعی تعریف نشده است. درحالی‌که $(۴ + ۳) - ۵$ در اعداد طبیعی تعریف شده است و جواب دارد. ■

قضیه ۵.۱ (تعمیم توزیع‌پذیری به تفریق): **برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و c داریم:**
$\boldsymbol{a(b-c) = (a.b) - (a.c)}$

اگر در درک اثبات مشکل دارید، پاسخ مثال (۱۹.۱) را دوباره بخوانید.

اثبات:
(۱) $(b - c) + c = b$ .... بنا به تعریف تفریق
(۲) $a((b - c) + c) = ab$ .... ضرب طرفین (۱) در a
(۳) $a(b - c) + ac = ab$ .... از (۲) و توزیع‌پذیری
(۴) $a(b - c) = ab - ac$ .... از (۳) و تعریف تفریق

(شماره گذاری تساوی‌ها جهت بیان واضح‌تر نتیجه‌گیری‌ها انجام شده است.) ■

۲.۴.۱ تقسیم

به خاطر داریم در دبستان اگر می‌خواستیم a را بر b تقسیم کنیم، a شیء را به b بستهٔ هم‌اندازه تقسیم می‌کردیم و تعداد اشیای موجود در هر بسته را حاصل تقسیم a بر b می‌خواندیم. اگر هر بسته دارای x شیء باشد، b بستهٔ x تایی داریم و درنتیجه $bx = a$. بر همین اساس می‌توان حاصل تقسیم a بر b را به‌عنوان جواب معادلهٔ $bx = a$ تعریف کرد. واضح است که این جواب هم باید وجود داشته باشد و هم باید منحصربه‌فرد باشد تا عبارت $a \div b$ عددی خاص را به‌عنوان حاصل تقسیم مشخص سازد.

حاصل تقسیم a بر b، عدد منحصربه‌فردی است که حاصل‌ضرب آن در b مساوی a است.

تمرین (۲۶) را نیز درنظر داشته باشید.

تقسیم a بر b، به شکل‌های $\frac{a}{b}$، $a \div b$ و a/b نشان داده می‌شود. a را «مقسوم [۱]» و b را «مقسومٌ علیه [۲]» می‌خوانیم. در نمایش $\frac{a}{b}$، a را «صورت» و b را «مخرج» می‌خوانیم. البته نمایش $\frac{a}{b}$ که به نمایش کسری معروف است، برای بیان اعداد کسری استفاده می‌شود؛ خواهیم دید کسر و تقسیم رابطهٔ نزدیکی به هم دارند و می‌توانند به‌جای هم به‌کار روند.

با دقت بخوانید.
یک اشتباه رایج این است که تقسیم بر صفر را «بی‌نهایت» می‌خوانند. در این قسمت می‌بینید که این افراد معنای تقسیم را نمی‌دانند و در مبحث حد (در جلد دوم) خواهید دید که این افراد معنای حد را نیز نمی‌دانند.

با توجه به تعریف فوق، برای محاسبهٔ $۶ \div ۳$ گوییم چون $۶ = ۲ \times ۳$ پس ۲ عددی است که با ضرب در ۳ می‌شود ۶. بنابراین $۲ = ۶ \div ۳$. اما در مواردی هم حاصل تقسیم در $\mathbb{N}$ وجود ندارد که در این‌صورت گوییم **آن تقسیم در $\mathbb{N}$ بی‌معناست.** به‌طور مثال $۳ \div ۲$ در $\mathbb{N}$ بی‌معناست. چون ۲ مضربِ ۳ نیست پس عددی در $\mathbb{N}$ وجود ندارد که حاصل‌ضرب آن در ۳ مساوی ۲ باشد.

---
[۱] مقسوم = آنچه تقسیم می‌شود.
[۲] مقسوم‌علیه = آنچه تقسیم بر آن صورت می‌گیرد.

توجه داریم که حاصل‌ضرب هر عددی در صفر برابر است با صفر. بنابراین به‌طور مثال برای ۳ داریم $۰ = ۰ \times ۳$ که با تعریف تقسیم نتیجه می‌دهد $۰ = ۳ \div ۰$ اما برای $(۰ \div ۰)$ چه می‌توان گفت؟ می‌گوییم چون حاصل‌ضرب هرعددی در صفر مساوی است با صفر، پس بنا به تعریف تقسیم داریم:

$$۰ \times ۳ = ۰ \Longrightarrow ۰ \div ۰ = ۳ \quad \text{و} \quad ۰ \times ۴ = ۰ \Longrightarrow ۰ \div ۰ = ۴$$

بنابراین $(۰ \div ۰)$ عدد **منحصربه‌فردی** را مشخص نمی‌سازد و درنتیجه این تقسیم بی‌معنا است. آیا $۴ \div ۰$ بامعنا است؟ چون حاصل‌ضرب هیچ عددی در صفر، ۴ نمی‌شود پس تقسیم ۴ بر صفر، هیچ عددی را در $\mathbb{N}$ مشخص نمی‌کند؛ به‌عبارتی معادلهٔ $۰ \times x = ۴$ در $\mathbb{N}$ جواب ندارد. پس $(۴ \div ۰)$ نیز بی‌معنا است.

گزاره ۵.۱: تقسیم بر صفر بی‌معنا است.

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

بدین‌ترتیب، $a \div b$ برای $b = ۰$ بی‌معنا بوده و برای $b \neq ۰$ در صورتی که بامعنا باشد، عددی منحصربه‌فرد را مشخص می‌سازد. به‌عبارتی معادلهٔ $bx = a$ برای $b \neq ۰$ حداکثر یک جواب دارد و می‌توان تعریف زیر را برای تقسیم ارائه کرد.

تعریف ۵.۱: برای هر سه عدد طبیعیِ a، b و x که $b \neq ۰$، گوییم: $x = a \div b$ اگر و تنها اگر $a = bx$.

با توجه به مطالب فوق، تمرین (۳۴) وشرط $b \neq ۰$ مقدار x که حاصل تقسیم است، در صورت وجود یکتا است.

با توجه به تعریف فوق، $۲ = ۶ \div ۳$، چون $x = ۲$ تنها جواب معادلهٔ $۳x = ۶$ است. همچنین $\frac{۰}{۰}$ و $\frac{۳}{۰}$ «تعریف نشده» هستند. (به شرط $b \neq ۰$ در تعریف توجه کنید.)

مثال ۲۱.۱: درستی یا نادرستی استفاده از تعاریف تفریق و تقسیم را بررسی کنید؟

ساده اما ضروری. وقت‌گیر نخواهد بود.

آ. $۲ = \frac{۶}{۳} \Longrightarrow ۳ \times ۲ = ۶$ .... **تعریف تقسیم**

ب. $۴ = ۷ - ۳ \Longrightarrow ۳ + ۴ = ۷$ .... **تعریف تفریق**

ج. $x + ۴ = ۸ \div ۲ \Longrightarrow (۲ \times x) + ۴ = ۸$ .... **تعریف تقسیم**

د. $((۳ \times x) + ۴) - (۲ \times x) = ۰ \Longrightarrow (۳ \times x) + ۴ = ۲ \times x$ .... **تعریف تفریق**

ه. $۵ \times x = (۲ \times x) + (۳ + ۷) \Longrightarrow (۵ \times x) - ۷ = (۲ \times x) + ۳$ .... **تعریف تفریق**

پاسخ: آ. درست ب. نادرست

ج. نادرست است. زیرا $x + ۴ = ۸ \div ۲ \Longleftrightarrow (x + ۴) \times ۲ = ۸$ در حالی که

$$(۲ \times x) + ۴ = ۸ \Longleftrightarrow ۲ \times x = ۸ - ۴ \Longleftrightarrow x = (۸ - ۴) \div ۲$$

د. درست است. ه. نادرست است. ■

مثال ۲۲.۱: شخصی ادعا می‌کند که $a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$ و اثبات زیر را ارائه می‌دهد:

توجه!

توجه! نکته‌ای بسیار ظریف: درک این مطلب به شما کمک خواهد کرد تا در خواندن ریاضیات دقت کافی داشته باشید.

$$x = a.\frac{b}{c} \xRightarrow{\text{خوش‌تعریفی ضرب}} x.c = \left(a.\tfrac{b}{c}\right).c \xRightarrow{\text{شرکت‌پذیری}} x.c = a.\left(\tfrac{b}{c}.c\right)$$
$$\xRightarrow{\text{تعریف تقسیم}} x.c = a.b \xRightarrow{\text{تعریف تقسیم}} x = \frac{a.b}{c}$$

اما استدلال وی غلط است. به‌طور مثال:

$$\frac{۴\times ۱۵}{۶} = \frac{۶۰}{۶} = ۱۰$$

پس $\frac{۴\times ۱۵}{۶}$ در $\mathbb{N}$ قرار دارد که بنا به استدلال فوق برابر است با $\frac{۱۵}{۶}\times ۴$. اما از آنجا که عبارت $۶ \div ۱۵$ در $\mathbb{N}$ جواب ندارد و در $\mathbb{N}$ بی‌معنا است پس $\frac{۱۵}{۶}\times ۴$ نیز در $\mathbb{N}$ بی‌معنا است.

نکته ظریفی در اینجا وجود دارد. اگر $\frac{b}{c}$ عددی در $\mathbb{N}$ باشد، پس b مضربی از c است و ab نیز مضربی از c است. پس $\frac{ab}{c}$ نیز در $\mathbb{N}$ جواب دارد و بامعنا است. اما اگر $\frac{ab}{c}$ در $\mathbb{N}$ بامعنا باشد، لزومی ندارد $\frac{b}{c}$ در $\mathbb{N}$ جواب داشته باشد. ■

آیا در مثال فوق، مجاز به استفاده از شرکت‌پذیری هستیم؟ توجه داریم که یک تقسیم در صورتی با معنا است که حاصل آن یک عدد طبیعی باشد و اعداد طبیعی دارای خواص جابجایی و شرکت‌پذیری هستند. بنابراین در مثال فوق، استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری با شرط معنادار بودنِ تقسیم قابل قبول است. پس اگر $\frac{b}{c}$ در $\mathbb{N}$ بامعنا باشد، مشابه مثال فوق داریم $a.(\frac{b}{c}) = \frac{a.b}{c}$

مثال ۲۳.۱: درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

آ. اگر $\frac{a}{b} = ۰$ آن‌گاه $a = ۰$ ب. اگر $a = ۰$ آن‌گاه $\frac{a}{b} = ۰$

با دقت بخوانید...
نکتهٔ ظریفی را به شما یادآور می‌شود.

پاسخ: آ. درست است. بنا به تعریف تقسیم واضح است.
ب. نادرست است. کافی است قرار دهیم $a = ۰$ و $b = ۰$. در این صورت حاصل تقسیم وجود ندارد، پس نمی‌تواند با صفر برابر باشد. ■

حاصل تقسیم‌های $۳ \div ۹$ و $۲ \div ۶$، هر دو برابر ۳ هستند زیرا:

$$۲\times ۳ = ۶ \Rightarrow \frac{۶}{۲} = ۳ \quad \text{و} \quad ۳\times ۳ = ۹ \Rightarrow \frac{۹}{۳} = ۳$$

پس $\frac{۶}{۲} = \frac{۹}{۳}$. اما دو تقسیم تحت چه شرایطی برابر هستند؟

صورت مثال مهم است.

مثال ۲۴.۱: نشان دهید با فرض معنادار بودن تقسیم‌ها در $\mathbb{N}$ داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ اگر و تنها اگر } ad = bc$$

با دقت بخوانید...
از خوانندگان انتظار داریم این‌گونه استدلال کنند.

پاسخ: در مرحلهٔ اول باید ثابت کنیم اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ در $\mathbb{N}$ با معنا باشند و $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ آن‌گاه $a.d = b.c$.
حاصل $\frac{a}{b}$ را x می‌نامیم، پس $x = \frac{a}{b}$ و چون $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ پس $x = \frac{c}{d}$. بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{a}{b} \Longrightarrow b.x = a \Longrightarrow (b.x).c = a.c \\ x = \dfrac{c}{d} \Longrightarrow d.x = c \Longrightarrow a.(d.x) = a.c \end{array}\right\} \Longrightarrow b.c.x = a.d.x$$

اما چون نمی‌دانیم $x = 0$ یا $x \neq 0$، نمی‌توانیم از قاعدهٔ حذف ضرب استفاده کنیم. از این رو مسئله را در دو حالت بررسی می‌کنیم.

$\boldsymbol{x \neq 0}$: در این‌صورت از قاعدهٔ حذف ضرب داریم $a.d = b.c$

$\boldsymbol{x = 0}$:در این صورت داریم $a = 0$ و $c = 0$، و درنتیجه $b.c = 0$ و $a.d = 0$ پس $a.d = b.c$

در مرحلهٔ دوم باید ثابت کنیم اگر $a.d = b.c$ و تقسیم‌های $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ بامعنا باشند، آنگاه $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

از بامعنا بودن تقسیم‌ها نتیجه می‌شود $b \neq 0$ و $d \neq 0$ بنابراین اگر $x = \frac{a}{b}$، آنگاه:

$$\begin{aligned} x = \frac{a}{b} &\Longrightarrow b.x = a \Longrightarrow (b.x).d = a.d \\ &\xRightarrow{a.d=b.c} b.d.x = bc \\ &\xRightarrow{b\neq 0} d.x = c \\ &\Longrightarrow x = \frac{c}{d} \end{aligned}$$

درنتیجه $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ و حکم اثبات شده است. ■

مثال ۲۵.۱: در صورتی که تقسیم‌ها در $\mathbb{N}$ بامعنا باشند، ثابت کنید :

آ. $\frac{a}{c}.\frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$ ب. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ ج. $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$

صورت مثال مهم است. هرچند انتظار می‌رود اکثر خوانندگان آن را بدانند. اما سعی در اثبات آن می‌تواند در یادگیری بهتر آن مفید باشد.

پاسخ: آ. بنا به تعریف تقسیم برای اثبات تساوی، کافی است ثابت کنیم: $\left(\frac{a}{c}.\frac{b}{d}\right)(cd) = ab$

ادامه اثبات سر راست است.

موارد دیگر، مشابه مورد (آ) ثابت می‌شوند. ■

۳.۴.۱ پرانتزگذاری

تا زمانی که با جمع و ضرب سروکار داشتیم برای محاسبه عبارت‌های $۴ + ۳ + ۲$ و $۴ \times ۳ \times ۲$ پرانتزگذاری را به هر شکلی که انجام می‌دادیم، حاصل تغییر نمی‌کرد. چون جمع و ضرب دارای خواص شرکت‌پذیری هستند. اما عبارات $۲ - ۴ - ۸$ و $۲ \div ۴ \div ۸$ را می‌توان به چند طریق پرانتزگذاری کرد که در هر روش نیز جوابی متفاوت به‌دست می‌دهد.

$$\begin{cases} ۸ \div ۴ \div ۲ \longrightarrow (۸ \div ۴) \div ۲ = ۲ \div ۲ = ۱ \\ ۸ \div ۴ \div ۲ \longrightarrow ۸ \div (۴ \div ۲) = ۸ \div ۲ = ۴ \end{cases} \qquad \begin{cases} ۸ - ۴ - ۳ \longrightarrow (۸ - ۴) - ۲ = ۴ - ۲ = ۲ \\ ۸ - ۴ - ۲ \longrightarrow ۸ - (۴ - ۲) = ۸ - ۲ = ۶ \end{cases}$$

برای محاسبه عباراتی از این دست که پرانتزگذاری نشده‌اند، دو قاعده داریم.

۱ ضرب و تقسیم بر جمع و تفریق مقدم هستند.

۲ محاسبه از چپ به راست صورت می‌گیرد.

توجه: قاعدهٔ اول بر قاعده دوم مقدم است. اول قاعدهٔ اول را اِعمال کرده و سپس قاعدهٔ دوم را اعمال می‌کنیم. بنابراین عبارات فوق باید از چپ به راست محاسبه شوند. یعنی پرانتزگذاری به‌صورت زیر انجام می‌شود.

$$۸ \div ۴ \div ۲ \longrightarrow (۸ \div ۴) \div ۲ = ۲ \div ۲ = ۱ \qquad ۸ - ۴ - ۲ \longrightarrow (۸ - ۴) - ۲ = ۴ - ۲ = ۲$$

مثال زیر در روشن شدن این مطلب به‌شما کمک خواهد کرد.

مثال ۲۶.۱: عبارات زیر را با پرانتزگذاری مناسب (براساس قواعد فوق) محاسبه نمایید.

آ . $۱۲ - ۱۰ - ۱$ ب . $۱۶ \div ۴ \div ۲$

ج . $۱۶ \div ۴ - ۲$ د . $۱۶ - ۴ \div ۲$

ه . $۸ \times ۴ \div ۲$ و . $۸ \div ۴ \times ۲$

پاسخ: آ . $(۱۲ - ۱۰) - ۱ = ۲ - ۱ = ۱$ د . $۱۶ - (۴ \div ۲) = ۱۶ - ۲ = ۱۴$

موارد دیگر، به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

۴.۴.۱ تفریق و تقسیم در معادلات

در معادلات می‌توان از تفریق نیز استفاده کرد و با استفاده از تعریف تفریق ، آن را به معادله‌ای جمعی تبدیل نمود و مانند قبل حل کرد. در مثال (۲۷.۱) با این‌گونه معادلات و در مثال (۲۸.۱) با اشتباه منطقی رایجی در حل آنها آشنا خواهید شد.

حل این معادلات برای اکثر خوانندگان کتاب ساده است. به دنبال راه اصولی حل این‌گونه معادلات هستیم تا در موارد پیچیده نیز کار ساده باشد. روش حل خود را با پاسخ مقایسه کنید.

مثال ۲۷.۱: معادلات زیر را حل کنید.

آ . $x - ۳ = ۴$ ب . $۴ - x = ۲$ ج . $(x - ۳) - ۲ = ۵$

د . $(۹ - ۳) - x = ۴$ ه . $(۸ - x) - ۲ = ۱$ و . $۸ - (۵ - x) = ۶$

پاسخ: روش حل این معادلات را به اختصار بیان می‌کنیم.

آ . $x - ۳ = ۴ \xRightarrow{\text{تعریف تفریق}} x = ۳ + ۴ \Longrightarrow x = ۷$

ب . $۴ - x = ۲ \xRightarrow{\text{تعریف تفریق}} ۴ = ۲ + x \Longrightarrow ۲ + ۲ = x + ۲ \Longrightarrow x = ۲$

ج . $(x - ۳) - ۲ = ۵ \xRightarrow{\text{تعریف تفریق}} x - ۳ = ۵ + ۲ \xRightarrow{\text{تعریف تفریق}} x = (۵ + ۲) + ۳ = ۱۰$

د . $(۹ - ۳) - x = ۴ \Longrightarrow ۶ - x = ۴ \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow x = ۲$

ه . $(۸ - x) - ۲ = ۱ \Longrightarrow ۸ - x = ۱ + ۲ \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow x = ۵$

و . $۸ - (۵ - x) = ۶ \Longrightarrow ۸ = ۶ + (۵ - x) \Longrightarrow ۶ + ۲ = ۶ + (۵ - x)$

$\Longrightarrow ۲ = ۵ - x \Longrightarrow ۵ = ۲ + x \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow x = ۳$

دقت کنید؛ هرچند برخی روش‌ها در حل معادلاتی که شامل تفریق هستند به جواب می‌رسند، اما قابل قبول نیستند. در مثال زیر یک نمونه از این روش‌ها را مشاهده می‌کنیم.

مثال ۲۸.۱: شخصی معادلهٔ $۷ - x = ۴$ را به صورت زیر حل می‌کند:

$$۷ - x = ۴ \Longrightarrow ۷ = ۴ + x \Longrightarrow x = ۷ - ۴$$

اما شخص دیگری به او خُرده می‌گیرد که $۷ - ۴$ به‌معنای جواب معادلهٔ $۴ + x = ۷$ است و تو برای بدست آوردن جواب معادله، از محاسبهٔ $۷ - ۴$ استفاده کرده‌ای. حال که می‌خواهی مقدار $۷ - ۴$ را حساب کنی، باید به همان معادله باز گردی. بنابراین، نمی‌توان یک عدد را به‌عنوان جواب این معادله و حاصل تفریق به‌دست آورد.

شخص دوم درست می‌گوید. شخص اول برای حل این معادله از محاسبه $۷ - ۴$ استفاده می‌کند چون مقدار آن را از قبل می‌داند؛ اما اگر مقدار $۷ - ۴$ را از قبل نداند نمی‌تواند از این روش استفاده کند. برای اعداد کوچک به‌همین روشی که دیدیم حاصل‌ها را محاسبه نموده و

به‌خاطر می‌سپاریم. اما برای اعداد بزرگ، روش‌های محاسبه‌ای را می‌سازیم که به «حساب» شهرت دارند. در فصل بعد با این روش‌ها اشنا خواهیم شد. ■

معادلاتی که شامل تقسیم هستند را می‌توان با استفاده از تعریف تقسیم، به معادلاتی ضربی تبدیل نمود و حل کرد. در مثال زیر به بیان چند نمونه از این معادلات می‌پردازیم.

مثال ۲۹.۱: معادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

آ. $\frac{x}{۳} = ۵$ ب. $\frac{x}{۳} = ۰$ ج. $\frac{۸}{x} = ۲$

د. $\frac{۳}{x} = ۰$ ه. $\frac{x+۵}{۴} = ۳$ و. $\frac{x+۴}{۳} = \frac{x+۱}{۲}$

پاسخ: آ. $\frac{x}{۳} = ۵ \xRightarrow{\text{تعریف تقسیم}} x = ۵ \times ۳ \Longrightarrow x = ۱۵$

ب. $\frac{x}{۳} = ۰ \xRightarrow{\text{تعریف تقسیم}} x = ۰ \times ۳ \Longrightarrow x = ۰$

ج. $\frac{۸}{x} = ۲ \xRightarrow{\text{تعریف تقسیم}} ۸ = ۲ \times x \Longrightarrow ۲ \times ۴ = ۲ \times x \Longrightarrow x = ۴$

د. $\frac{۳}{x} = ۰ \xRightarrow{\text{تعریف تقسیم}} ۳ = ۰ \times x \Longrightarrow$ این معادله جواب ندارد.

ه. $\frac{x+۵}{۴} = ۳ \xRightarrow{\text{تعریف تقسیم}} x + ۵ = ۳ \times ۴ = ۱۲ = ۷ + ۵ \Longrightarrow x = ۷$

و. $$\frac{x+۴}{۳} = \frac{x+۱}{۲} \xRightarrow{\text{تعریف تقسیم}} x + ۴ = \frac{x+۱}{۲} \times ۳ \Longrightarrow x + ۴ = \frac{۳ \times (x+۱)}{۲}$$
$$\xRightarrow{\text{تعریف تقسیم}} ۲(x+۴) = ۳(x+۱) \Longrightarrow \quad \dots \quad \Longrightarrow x = ۵$$

■

با دقت بخوانید
این نکتهٔ ظریف عدهٔ زیادی را به اشتباه می‌اندازد.

مثال ۳۰.۱: شخصی معادلهٔ $\frac{x}{x+۱} = \frac{x}{x+۲}$ را به صورت زیر حل می‌کند :

$$\frac{x}{x+۱} = \frac{x}{x+۲} \Longrightarrow x(x+۲) = x(x+۱) \xRightarrow{\text{حذف ضرب}} x + ۲ = x + ۱$$

و نتیجه می‌گیرد که این معادله جواب ندارد. اما با جایگذاریِ $x = ۰$ مشخص می‌شود $x = ۰$ یک جواب معادله است. اشتباه این شخص را بیابید.

پاسخ: برای استفاده از خاصیت حذف ضرب، شرط $x \neq ۰$ ضروری است. به‌همین جهت باید مسئله را حالت‌بندی کرد. حالت اول $x \neq ۰$ که بررسی شد و حالت دیگر $x = ۰$ که با قراردادن آن در معادله مشخص می‌شود $x = ۰$ یک جواب معادله است. ■

۵.۴.۱ تفریق و تقسیم در نامعادلات

دقت کنید!
نکته‌ای مهم که از اشتباهی بسیار رایج جلوگیری می‌کند.

با بیان یک مثال وارد این بحث می‌شویم. برای حل نامعادلهٔ $x - ۴ < ۳$، بنا به قضیه (۱.۱) مورد (د)، داریم $(x - ۴) + ۴ < ۳ + ۴$. از طرفی، بنابه تعریف تفریق داریم $x = ۴ + (x - ۴)$. بنابراین، $x < ۷$.

ما اظهار داشته‌ایم، اگر $x - ۴ < ۳$، آن‌گاه $x < ۷$. بنابراین می‌دانیم جواب‌های معادلهٔ $x - ۴ < ۳$ در میان جواب‌های $x < ۷$ قرار دارد. اما آیا همهٔ اعداد $x = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶$ جواب‌های نامعادلهٔ $x - ۴ < ۳$ هستند؟ به وضوح اگر $x \ngeq ۴$، تفریق $x - ۴$ بی‌معنا خواهد بود. بنابراین جواب‌های این نامعادله، $۴ \leq x < ۷$ می‌باشد. یعنی $x = ۴, ۵, ۶$.

مثال ۳۱.۱: نامعادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

آ. $۸ - x \le ۶$ ب. $x - ۷ \le ۳$ ج. $۶ - x \le x$

پاسخ: استدلال‌ها را به اختصار بیان می‌کنیم.

آ. $\left.\begin{array}{r} ۸ - x \le ۶ \Longrightarrow (۸ - x) + x \le ۶ + x \Longrightarrow ۸ \le ۶ + x \Longrightarrow ۲ \le x \\ ۸ - x \ge ۰ \Longrightarrow x \le ۸ \end{array}\right\} \Longrightarrow ۲ \le x \le ۸$

ب. $\left.\begin{array}{r} x - ۷ \le ۳ \Longrightarrow (x - ۷) + ۷ \le ۳ + ۷ \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow x \le ۱۰ \\ x - ۷ \ge ۰ \Longrightarrow x \ge ۷ \end{array}\right\} \Longrightarrow ۷ \le x \le ۱۰$

ج. $\left.\begin{array}{r} ۶ - x \le x \Longrightarrow (۶ - x) + x \le x + x \Longrightarrow ۲ \times ۳ \le ۲x \Longrightarrow x \ge ۳ \\ ۶ - x \ge ۰ \Longrightarrow x \le ۶ \end{array}\right\} \Longrightarrow ۳ \le x \le ۶$

■

برای حل نامعادلهٔ $x \div ۴ \ge ۳$ که شامل تقسیم است، کافی است استدلال کنیم:

$$\frac{x}{۴} \ge ۳ \Longrightarrow (\frac{x}{۴}) \times ۴ \ge ۳ \times ۴ \Longrightarrow x \ge ۱۲$$

اما از طرفی هم باید تقسیم $x \div ۴$ در $\mathbb{N}$ بامعنا باشد، پس باید x مضرب ۴ باشد. بنابراین جواب‌های معادله، مضارب ۴ هستند که بزگتر یا مساوی ۱۲ باشند. یعنی $x = ۱۲, ۱۶, ۲۰, \ldots$.

مثال ۳۲.۱: نامعادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

آ. $۸ \div x \ge ۲$ ب. $۸ \div x \le ۸$

توجه!..........توجه! فریب ظاهر سادهٔ این مثال را نخورید. اگر به‌نظرتان بیش از حد ساده است، پاسخ را ببینید.

با دقت بخوانید...

پاسخ: آ. اولاً با توجه به تعریف تقسیم، داریم $x \ne ۰$ و در ادامه نیز می‌توانیم از تعریف تقسیم و خواص ضرب اعداد طبیعی استفاده کرده و به‌صورت زیر استدلال کرد:

$$\frac{۸}{x} \ge ۲ \Longrightarrow ۸ \ge ۲ \times x \Longrightarrow \frac{۸}{۲} \ge x \Longrightarrow x \le ۴$$

پس جواب‌های معادله در میان $x = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$ است. اما باید $\frac{۸}{x}$ نیز در $\mathbb{N}$ بامعنا باشد. بنابراین $x = ۱, ۲, ۴$ جواب‌های این معادله هستند.

ب. مشابه مورد قبل می‌توانیم نتیجه بگیریم $x \ne ۰$ و

$$\frac{۸}{x} \le ۸ \Longrightarrow ۸ \le ۸ \times x \Longrightarrow \frac{۸}{۸} \le x \Longrightarrow x \ge ۱$$

اما از طرفی هم باید تقسیم $x \div ۸$ در اعداد طبیعی بامعنا باشد. درنتیجه باید ۸ مضربی از x باشد، پس $x \le ۸$ پس برای یافتن جواب‌های نامساوی، باید میان xهایی که $۱ \le x \le ۸$ به دنبال اعدادی باشیم که ۸ مضرب طبیعی آنهاست. بنابراین، هر یک از اعداد $x = ۱, ۲, ۴, ۸$ جوابی برای این نامساوی است. ■

تمرین:

(۳۰) حاصل تفریق‌های زیر را با استفاده از تعریف (۴.۱) و با استفاده از محور اعداد محاسبه کنید.

صرفاً برای خواننده مبتدی...

آ. $۲ - ۳$ ب. $۱ - ۴$ ج. $۶ - ۶$

د. $۸ - ۸$ ه. $۴ - ۳$ و. $۵ - ۲$

(۳۱) عبارات زیر را کامل کنید.

اگر فهمیده باشید، چند ثانیه بیشتر زمان نمی‌برد.

آ. $\ldots = (۲ \div ۱۰)$ زیرا $۱۰ = \ldots \times \ldots$ ب. $\ldots = \frac{۰}{۷} \div ۰$ زیرا $\ldots \times \ldots = ۰$

ج. $۴ = \left(\frac{\ldots}{۳}\right)$ زیرا $\ldots \times ۳ = \ldots$ د. $۳ = \frac{۱۸}{\ldots}$ زیرا $\ldots \times \ldots = \ldots$

(۳۲) حاصل عبارات زیر را با استفاده از قاعدهٔ توزیع‌پذیری به‌دست آورید.
هدف محاسبات ذهنی با تکیه بر خواص اعداد است.

آ. $۱۶ \times ۴۷ + ۱۶ \times ۲۳ =$ ب. $۱۲ \times ۱۴ + ۱۳ \times ۱۴ =$

ج. $۳۷ \times ۴۹۷ - ۳۷ \times ۴۹۶ =$ د. $۲۴۷ \times ۲۵ - ۱۴۷ \times ۲۵ =$

(۳۳) نشان دهید اگر $a-b$ و c اعدادی طبیعی باشند، آنگاه $(a+c)-b$ نیز عددی طبیعی است.

(۳۴) نشان دهید اگر $(a-b)-c$ عددی طبیعی باشد، آنگاه $(a-c)-b$ نیز عددی طبیعی است.

(۳۵) درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. اگر $a+(b-c)$ عددی طبیعی باشد، آنگاه $(a+b)-c$ نیز عددی طبیعی است.
ب. اگر $(a+b)-c$ عددی طبیعی باشد، آنگاه $a+(b-c)$ نیز عددی طبیعی است.

(۳۶) درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. $۷-(۴-۲)=(۷-۴)-۲$ ب. $a-(b-c)=(a-b)-c$

ج. عمل تفریق در اعداد طبیعی دارای شرکت‌پذیری است.

(۳۷) درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید. (با استفاده از تعریف شهودی و محور اعداد)

آ. $۴-۳=۳-۴$ ب. $a-b=b-a$

ج. عمل تفریق دارای خاصیت جابجایی است.

(۳۸) اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، از تساوی $a-b=b-a$ کدام عبارات زیر نتیجه می‌شوند؟

آ. $a=۰$ ب. $b=۰$ ج. $a=b$ د. $a=b=۰$

(۳۹) $a+b$ و a مضارب ۴ هستند. نشان دهید b نیزمضرب ۴است.

(۴۰) اگرx مضرب ۳ باشد، نشان دهید $(۳+۱)(x+۲)+۱$ نیزمضرب ۳ است.

(۴۱) هر یک از عبارات زیر را پس از پرانتزگذاری، محاسبه کنید.
جهت خوانندگان مبتدی...

آ. $۳+۲\times۵$ ب. $۹-۶\div۳$ ج. $۸\div۴\div۲$ د. $۶\div۳\times۲$

(۴۲) در هر یک از موارد زیر تعیین کنید از کدام تعریف یا قضیه استفاده شده است.
کار با تعریف را تمرین کنید. اگر فهمیده باشید هر مورد فقط چندثانیه زمان می‌برد.

آ. $۳+۴=۷ \Longrightarrow ۳=۷-۴$

ب. $۳\times(۸\div۲)=(۳\times۸)\div۲$

ج. $۳\times۴=۱۲ \Longrightarrow ۴=۱۲\div۳$

د. $۸\div۴=۶\div۳ \Longrightarrow ۸\times۳=۶\times۴$
از نگارش تقسیم به‌صورت کسری کمک بگیرید.

ه. $۳x=۱۸ \Longrightarrow x=۱۸\div۳$

و. $(۱۲\div۴)\times(۱۰\div۵)=(۱۲\times۱۰)\div(۴\times۵)$

ز. $(۱۶\div۴)+(۱۲\div۴)=(۱۶+۱۲)\div۴$

ح. $(۱۶\div۴)+(۱۲\div۳)=(۱۶\times۳+۱۲\times۴)\div(۴\times۳)$

ط. $(۱۵\div۳)\times(۱۲\div۴)=(۱۵\times۱۲)\div(۳\times۴)$

(۴۳) درستی تساوی‌های زیر در اعداد طبیعی را نشان دهید.
به بامعنا بودن عبارات در اعداد طبیعی توجه کنید. از نگارش تقسیم به‌صورت کسری کمک بگیرید.

آ. $(۲۰\div۵)-(۱۵\div۵)=(۲۰-۱۵)\div۵$

ب. $۱۲\div۴-۸\div۴=(۱۲-۸)\div۴$

ج. $(۲۰\div۴)-(۱۵\div۳)=(۲۰\times۳-۱۵\times۴)\div(۴\times۳)$

د. $۱۵\div۳-۱۶\div۸=(۱۵\times۸-۱۶\times۳)\div(۳\times۸)$

ه. $(۱۲\div۲)\div(۶\div۳)=(۱۲\times۳)\div(۶\times۲)$

با تکیه بر تمرینات قبل و مثال‌های متن کتاب ساده خواهند بود.

(۴۴) چرا تساوی‌های زیر در اعداد طبیعی نادرست هستند؟

آ. $(۱۲ \div ۳) \times (۱۵ \div ۴) = (۱۲ \times ۱۵) \div (۳ \times ۴)$

ب. $۴ \div ۲۰ = (۴ \div ۵) + (۱۵/۴)$

ج. $۱۲/۵ \div ۱۵/۴ = (۱۲ \times ۱۵)/(۵ \times ۴)$

بسیار پایه‌ای!

(۴۵) در خوش تعریفی ضرب دیدیم که در اعداد طبیعی از $a = b$ می‌توان نتیجه گرفت $ac = bc$.

آ. آیا می‌توان از $a.c = b.c$ نتیجه گرفت $a = b$؟

ب. آیا تقسیم خوش‌تعریف است؟

اگر فهمیده باشید هر مورد فقط چند ثانیه زمان می برد. موارد مختلف را با هم مقایسه کنید.

(۴۶) درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ در $\mathbb{N}$ با معنا باشند، $\frac{ac}{bd}$ نیز در $\mathbb{N}$ با معنا است.

ب. آیا عکس مورد (آ) نیز درست است؟ (یعنی اگر $\frac{ac}{bd}$ با معنا باشد آن‌گاه $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ نیز با معنا خواهند بود؟)

ج. اگر $\frac{a}{c}$ و a اعدادی طبیعی باشند، آن‌گاه $\frac{ab}{c}$ نیز در $\mathbb{N}$ بامعنا است.

د. آیا عکس مورد (ج) نیز درست است؟

ه. اگر $(a \div b)$ و $(a \div c)$ در $\mathbb{N}$ بامعنا باشد، آن‌گاه $a \div (b+c)$ نیز در $\mathbb{N}$ بامعنا است.

و. اگر $a \div c$ و $b \div c$ در $\mathbb{N}$ بامعنا باشند، آن‌گاه $(a+b) \div c$ نیز در $\mathbb{N}$ بامعنا است.

ز. اگر $a \div c$ و $b \div c$ اعدادی طبیعی باشند، آن‌گاه $(b-a) \div c$ نیز عددی طبیعی است.

ح. اگر $a \div c$، $b \div c$ و $b-c$ اعدادی طبیعی باشند، $(a-b) \div c$ نیز عددی طبیعی است.

ط. اگر $a \div c$، $b \div c$ و $b-c$ اعدادی طبیعی باشند، آن‌گاه

$$(a \div c) - (b \div c) = (a-b) \div c$$

صورت تمرینات مهم هستند.

(۴۷) درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ در $\mathbb{N}$ با معنا باشند آن‌گاه $\frac{bc+ad}{bd}$ نیز در $\mathbb{N}$ با معنا است.

ب. اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ در $\mathbb{N}$ با معنا باشند، $\frac{ad-bc}{bd}$ نیز در $\mathbb{N}$ با معنا است.

ج. اگر $\frac{bc+ad}{bd}$ در $\mathbb{N}$ با معنا باشد، $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ نیز در $\mathbb{N}$ با معنا هستند.

بسیار مهم و اساسی! پاسخ خود را با پاسخ‌نامه مقایسه کنید.

(۴۸) درستی یا نادرستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

آ. $۳(۵-۲) = ۱۵-۶$ ب. $۲(\frac{۱۲}{۴} - \frac{۱۶}{۸}) = \frac{۲ \times ۱۲}{۴} - \frac{۲ \times ۱۶}{۸}$

ج. $\frac{۱۲}{۳} \times (۵-۳) = \frac{۱۲ \times ۵}{۳} - \frac{۱۲ \times ۳}{۳}$ د. $(۱۵ \div ۵)(۴-۶) = (۱۵ \times ۴ - ۱۵ \times ۶) \div ۵$

توجه! به بامعنا بودن عبارت توجه کنید.

(۴۹) معادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

آ. $x + ۴ = ۷$ ب. $۵x = ۰$ ج. $x - ۴ = ۵$

د. $۴x = ۱۶$ ه. $۵x + ۴ = ۱۹$ و. $۳x + ۲x = ۳۰$

ز. $۵x - ۳x = ۸$ ح. $x + ۵ = ۲x$ ط. $۲x - ۴ = x$

ی. $۳x + ۵ = ۲x + ۸$ ک. $۳(x-۴) = ۲(x-۳)$ ل. $۴(x+۳) = ۶(x-۲)$

م. $۲x(x-۱) = x(۲x-۱)$ ن. $\frac{۴(x+۳)}{۵x-۱} = ۶$ س. $\frac{(۲x-۱)}{x} = \frac{۲x}{x}$

ع. $\frac{۲x-۱}{x} = ۲$ ف. $\frac{۲x-۱}{x} = ۲$ ص. $\frac{x+۳}{x-۲} = \frac{۶}{۴}$

مثال (۳۱.۱) را به یاد آورید...

(۵۰) نامعادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

آ. $x-۳<۷$ ب. $x-۵>۴$ ج. $x-۳\geq ۲$ د. $x-۲\leq ۷$

ه. $۵-x<۱$ و. $۵-x\leq ۴$ ز. $۹-x\geq ۳$ ح. $۵-x\geq ۴$

ط. $۴-x\geq ۴$ ی. $۶-x>۶$

بسیار مهم!
از تعاریف استفاده کنید.

(۵۱) نشادن دهید در اعداد طبیعی در صورت با معنا بودن تفریق‌ها و تقسیم‌ها داریم:

آ. $a<b$ اگر و تنها اگر $a-c<b-c$ ب. $a<b$ اگر و تنها اگر $c-a>c-b$

ج. $a<b$ اگر و تنها اگر $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ د. $a<b$ اگر و تنها اگر $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$

۵.۱ توان

صرفاً جهت یادآوری
اگر با توان آشنایی دارید می‌توانید از خواندن این مطالب صرف نظر کنید. تا تعریف (۱.۵)

در ابتدا برای خلاصه‌نویسی عبارتی مانند $۳\times۳\times۳\times۳$ که به حاصل‌ضرب ۴تا ۳ اشاره دارد، از عبارت $۳^۴$ استفاده می‌کنیم و می‌خوانیم «۳ به‌توانِ ۴». در این عبارت، ۳ را «پایه» و ۴ را «نما» گوییم. به‌طور مشابه برای هر عدد طبیعی مانند a می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} a^۲ &= a\times a\\ a^۳ &= a\times a\times a\\ a^۴ &= a\times a\times a\times a\\ &\vdots \end{aligned}$$

توجه داریم که در این تعبیر، a° و $a^۱$ بی‌معنا هستند؛ چون ضرب ۱ عدد a و ضرب صفر عدد a در خودش بی‌معناست. بنابراین، با این تعبیر، a^n فقط برای $n\geq ۲$ بامعناست و هنوز معنایی برای a° و $a^۱$ درنظر گرفته نشده است.

مثال ۳۳.۱: مقادیر زیر را به‌دست آورید.

آ. $\circ^۲$ ب. $\circ^۳$ ج. $\circ^۴$

د. $۱^۲$ ه. $۱^۳$ و. $۱^۴$

ز. $۲^۲$ ح. $۲^۳$ ط. $۲^۴$

ی. $۳^۲$ ک. $۳^۳$ ل. $۳^۴$

م. $۴^۲$ ن. $۴^۳$ س. $۴^۴$

پاسخ: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۳۴.۱: نشان دهید برای هر عدد طبیعی مانند a داریم:

آ. $a^۴\times a^۳=a^۷$ ب. $a^۳\times b^۳=(ab)^۳$ ج. $(a^۲)^۳=a^{۳\times۲}$

پاسخ: آ. $a^۴\times a^۳=\underbrace{\overbrace{(a\times a\times a\times a)}^{a\text{تا}۴}\times\overbrace{(a\times a\times a)}^{a\text{تا}۳}}_{a\text{تا}(۴+۳)}=a^{(۴+۳)}=a^۷$

ب. $a^۳\times b^۳=\overbrace{(a\times a\times a)}^{a\text{ تا }۳}\times\overbrace{(b\times b\times b)}^{b\text{ تا }۳}=\overbrace{(ab)\times(ab)\times(ab)}^{(ab)\text{ تا }۳}=(ab)^۳$

ج. $(a^۲)^۳=\overbrace{a^۲\times a^۲\times a^۲}^{a^۲\text{ تا }۳}=\underbrace{\overbrace{(a\times a)}^{a\text{ تا }۲}\times\overbrace{(a\times a)}^{a\text{ تا }۲}\times\overbrace{(a\times a)}^{a\text{ تا }۲}}_{a\text{ تا }(۳\times۲)}=a^{۳\times۲}=a^۶$ ■

مثال ۱.۳۵: نشان دهید برای هر چهار عدد طبیعی مانند a، b، m و n که $m,n \geq ۲$ داریم:
آ. $a^n \times a^m = a^{m+n}$ ب. $a^n \times b^n = (ab)^n$ ج. $(a^m)^n = a^{m\times n}$

پاسخ: آ. $a^m \times a^n = \underbrace{(\overbrace{a\times\cdots\times a}^{a \text{ تا } m}) \times (\overbrace{a\times\cdot\times a}^{a \text{ تا } n})}_{a \text{ تا } (m+n)} = a^{m+n}$

ب. $a^n \times b^n = (\overbrace{a\times\cdots\times a}^{a \text{ تا } n}) \times (\overbrace{a\times\cdots\times a}^{\text{تا}}) = \overbrace{(ab)\times\cdots\times(ab)}^{a \text{ تا } n} = (ab)^n$

ج. $(a^m)^n = \overbrace{a^m\times\cdots\times a^m}^{a^m \text{ تا } n} = \underbrace{(\overbrace{a\times\cdots\times a}^{a \text{ تا } m}) \times\cdots\times (\overbrace{a\times\cdots\times a}^{a \text{ تا } m})}_{a \text{ تا } n\times m} = a^{n\times m} = a^{m\times n}$ ■

ترجیح می‌دهیم $a^۱$ چنان باشد که قواعد ارائه شده در مثال فوق برای $m,n \geq ۱$ برقرار باشند. یعنی داشته باشیم $a^m \times a^۱ = a^{m+۱}$ و $a^۱ \times a^n = a^{۱+n}$. اما از طرفی هم داریم:

$$a^m \times a = \underbrace{(\overbrace{a\times\cdots\times a}^{a \text{ تا } m}) \times a}_{a \text{ تا } (m+۱)} = a^{m+۱} \qquad \text{و} \qquad a \times a^n = \underbrace{a \times (\overbrace{a\times\cdots\times a}^{a \text{ تا } n})}_{a \text{ تا } (۱+n)}) = a^{۱+n}$$

پس قرار می‌دهیم $a^۱ = a$. واضح است که برای $a^۱ \times a^۱$ نیز با این قرارداد داریم
$a^۱ \times a^۱ = a \times a = a^۲ = a^{۱+۱}$
همچنین، می‌توان نشان داد، این قرارداد با موارد (ب) و (ج) از مثال فوق نیز همخوانی دارد. زیرا:

$$ab = a^۱ b^۱ = (ab)^۱ = ab$$
$$a^n = (a^n)^۱ = a^{n\times ۱} = a^n$$
$$a^n = (a^۱)^n = a^{۱\times n} = a^n$$

آیا می‌توان $a^۰$ را نیز چنان تعریف کرد که با قواعد فوق همخوانی داشته باشد؟ برای این منظور باید برای هر دو عدد طبیعی مانند a و n داشته باشیم:

$$a^n \times a^۰ = a^{n+۰} = a^n$$

و درنتیجه $a^۰$ باید عنصر همانی ضرب باشد. بنابراین، قرار می‌دهیم $a^۰ = ۱$ (برای هر عدد دلخواهی مانند a). تساوی‌های زیر نشان می‌دهند که این قرارداد با قواعد مثال فوق همخوانی دارند.

$$۱ = ۱ \times ۱ = a^۰ \times b^۰ = (ab)^۰ = ۱$$
$$۱ = ۱^n = (a^۰)^n = a^{۰\times n} = a^۰ = ۱$$
$$۱ = a^۰ = a^{n\times ۰} = (a^n)^۰ = ۱$$

شخصی به ما خرده می‌گیرد که بنا به قرارداد برای هر عددی مانند a داریم $a^۰ = ۱$ پس $۰^۰ = ۱$. اما از طرفی هم برای هر $n > ۰$ داریم $۰^n = ۰$. بنابراین، $۰^۰ = ۰$.

این شخص درست می‌گوید. خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند بررسی کنند که هر دو قرارداد $۰^۰ = ۰$ و $۰^۰ = ۱$ با قواعد ارائه شده در مثال قبل همخوانی دارند. در برخی از کتاب‌های ریاضی $۰^۰$ را تعریف نکرده و آن را تعریف نشده می‌خوانند. در برخی کتاب‌های ریاضی نیز یکی از دو قرارداد را می‌پذیرند. اما در این کتاب، به دلایلی که خارج از حوصله این کتاب است، قرارداد $۰^۰ = ۱$ را می‌پذیریم.

در ادامه، شخصی به ما خُرده می‌گیرد که ضرب بین دو عدد بامعناست و ضرب بیش از دو عدد یا ضرب یک عدد یا ضرب هیچ عدد بی‌معناست؛ به‌عبارت بهتر، دقیق نیست. این شخص نیز درست می‌گوید. برای یافتن راهکاری برای حل این مشکل، از تساوی‌های زیر ایده می‌گیریم.

$$\begin{aligned}
a^0 &= 1 \\
a^1 &= a = 1 \times a &&= a^0 \times a \\
a^2 &= a \times a &&= a^1 \times a \\
a^3 &= a \times a \times a &&= a^2 \times a \\
&\vdots &&\vdots
\end{aligned}$$

با ایده گرفتن از تساوی‌های فوق، تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

با دقت بخوانید... این مطالب مهم هستند؛ در یادگیری آنها کوشا باشید.

تعریف ۶.۱: برای هر دو عدد طبیعی مانند a و n تعریف می‌کنیم:

آ. $a^0 = 1$ **ب. $a^{n+1} = a^n \times a$**

بدین ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}
a^0 &= 1 &&= 1 \\
a^1 &= a^0 \times a = 1 \times a &&= a \\
a^2 &= a^1 \times a &&= a \times a \\
a^3 &= a^2 \times a &&= (a \times a) \times a \\
a^4 &= a^3 \times a &&= \big((a \times a) \times a\big) \times a \\
&\vdots &&\vdots
\end{aligned}$$

در تعریف فوق که مانند تعاریف جمع و شرب، یک تعریف بازگشتی است، روش محاسبه‌ای مطرح می‌شود که در آن برای محاسبهٔ a^{n+1} باید به محاسبهٔ a^n رجوع کرده و به همین تعریف بازگردیم.

مثال ۳۶.۱: مقادیر زیر را به‌دست آورید.

آ. 5^0 ب. 3^1 ج. 7^3 د. 0^3

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۳۷.۱: با استفاده ازتعریف نشان دهید:

آ. $a^n \times a^0 = a^{n+0}$ ب. $a^n \times a^1 = a^{n+1}$

ج. $a^n \times a^2 = a^{n+2}$ د. $a^n \times a^3 = a^{n+3}$

پاسخ: آ. $a^n \times a^0 = a^n \times 1 = a^n = a^{n+0}$

ب. $a^n \times a^1 = a^n \times a = a^{n+1}$

ج. بنا به مورد (ب)؛ $a^n \times a^2 = a^n \times (a^1 \times a) = \big(a^n \times a^1\big) \times a = a^{n+1} \times a = a^{n+2}$

د. بنا به مورد (ج)؛ $a^n \times a^3 = a^n \times (a^2 \times a) = (a^n \times a^2) \times a = a^{n+2} \times a = a^{n+3}$ ■

مثال فوق این ایده را مطرح می‌کند که به همین روش می‌توان از $a^n \times a^3 = a^{n+3}$ نتیجه گرفت $a^n \times a^4 = a^{n+4}$ و سپس از این تساوی اخیر نتیجه گرفت $a^n \times a^5 = a^{n+5}$.

$$\begin{array}{ll} P(۰): & a^n \times a^۰ = a^{n+۰} \\ P(۱): & a^n \times a^۱ = a^{n+۱} \\ P(۲): & a^n \times a^۲ = a^{n+۲} \\ P(۳): & a^n \times a^۳ = a^{n+۳} \\ \vdots & \vdots \\ P(k): & a^n \times a^k = a^{n+k} \end{array}$$

در واقع، اگر جملهٔ $a^n \times a^۰ = a^{n+۰}$ را با $P(۰)$ نمایش دهیم و از $P(۱)$ برای نشان دادن $a^n \times a^۱ = a^{n+۱}$ استفاده کنیم، می‌بینیم که می‌توان از $P(۰)$، درستی $P(۱)$ را نتیجه گرفت. به‌طور مشابه می‌توان از $P(۱)$ نتیجه گرفت $a^n \times a^۲ = a^{n+۲}$ که آن را با $P(۲)$ نمایش می‌دهیم. به‌طور کلی اگر برای هر عدد طبیعی مانند k، جملهٔ $a^n \times a^k = a^{n+k}$ را با $P(k)$ نمایش دهیم، می‌بینیم که با استدلال زیر می‌توان از $P(k)$ نتیجه گرفت که $P(k+۱)$ نیز درست است.

$$a^n \times a^{k+۱} = a^n \times (a^k \times a) = (a^n \times a^k) \times a$$

که بنا به درستی $P(k)$ داریم:

$$(a^n \times a^k) \times a = a^{n+k} \times a = a^{(n+k)+۱} = a^{n+(k+۱)}$$

بنابراین، عبارت $a^n \times a^{k+۱} = a^{n+(k+۱)}$ درست است که با $P(k+۱)$ نمایش داده می‌شود. بدین‌ترتیب، با قرار دادن $k = ۰$، می‌توان از $P(۰)$، جملهٔ $P(۱)$ را نتیجه گرفت و همچنین می‌توان با قرار دادن $k = ۱$ نیز از $P(۱)$ نتیجه گرفت $P(۲)$ درست است. با ادامه همین روند داریم:

$$P(۰) \xRightarrow{k=۰} P(۱) \xRightarrow{k=۱} P(۲) \xRightarrow{k=۲} P(۳) \xRightarrow{k=۳} P(۴) \Longrightarrow \dots$$

واضح است که برای هر عدد طبیعی مانند m می‌توان این روند را آن‌قدر ادامه داد تا به m برسیم. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت چون $P(۰)$ درست است پس برای هر عدد طبیعی مانند m نیز $P(m)$ درست است. این نوع استدلال را «استقرای ریاضی» گوییم. در استقرای ریاضی برای اینکه نشان دهیم جملهٔ $P(m)$ برای هر عدد طبیعی دلخواهی مانند m درست است، نشان می‌دهیم $P(۰)$ درست است و برای هر عدد طبیعی مانند k، می‌توان از $P(k)$ نتیجه گرفت که $P(k+۱)$ نیز درست است.

با دقت بخوانید...
صورت قضیه و اثبات آن، هر دو مهم هستند.

قضیه ۶.۱: برای هر اعداد طبیعیِ a، b، m و n داریم:

آ. $\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}}$ ب. $\boldsymbol{a^n \times b^n = (ab)^n}$ ج. $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$
د. $\boldsymbol{a^n \div a^m = a^{n-m}; (n \geq m)}$ ه. $\boldsymbol{a^n \div b^n = (a \div b)^n}$

با اثبات موارد دیگر، استقرای ریاضی را تمرین کنید.

اثبات: آ. با توجه به توضیحات قبل به استقرای ریاضی اثبات می شود.

ب. جملهٔ$P(k)$ را به‌معنای $a^k b^k = (ab)^k$ در نظر می‌گیریم. به‌ضوح $P(۰)$ درست است چون $P(۰)$ به‌معنای $a^۰ b^۰ = (ab)^۰$ می‌باشد که هر دو طرف برابر ۱ هستند.
کافی است نشان دهیم برای هر عدد طبیعی مانند k، اگر $P(k)$ درست باشد، $P(k+۱)$ نیز درست است که با استدلال زیر انجام می‌شود.
فرض می‌کنیم $P(k)$ درست است. یعنی $a^k b^k = (ab)^k$ و نشان می‌دهیم $a^{k+۱} b^{k+۱} = (ab)^{k+۱}$.

$$a^{k+۱} b^{k+۱} = (a^k a)(b^k b) = (a^k b^k)(ab) = (ab)^k (ab) = (ab)^{k+۱}$$

ج. جملهٔ $P(k)$ را به‌معنای «برای هر عدد طبیعی مانند m داریم $(a^m)^k = a^{mk}$» در نظر می‌گیریم. واضح است که $P(۰)$ درست است. استدلال زیر نشان می‌دهد اگر $P(k)$ درست باشد، $P(k+۱)$ نیز درست است و به استقرای ریاضی نتیجه می‌گیریم برای هر عددی مانند n داریم «برای هر عدد طبیعی مانند m، $(a^m)^n = a^{mn}$» که همان عبارت فوق است.

$$(a^m)^{k+۱} = (a^m)^k a^m = a^{mk} a^m = a^{mk+m} = a^{m(k+۱)}$$

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

قضیه فوق به ما کمک می‌کند برخی عبارت‌های توان‌دار را به صورت a^n بنویسیم که آن را ساده‌کردن گوییم. به‌طورِ مثال، عبارت $۷^{۹} \times ۷^{۵}$ را می‌توان به صورت $۷^{۱۴}$ نوشت و ساده کرد؛ چون $۷^{۵+۹} = ۷^{۱۴}$.

مثال ۳۸.۱: عبارت‌های زیر را ساده کنید.

آ. $۲^{۲۱} \times ۲^{۱۹}$ ب. $۲^{۷۳} \times ۳^{۷۳}$ ج. $(۲^{۳})^{۵}$

د. $۹^{۵} \times ۳^{۷}$ ه. $۸^{۲} \times ۲^{۸}$ و. $۸^{۴} \times ۴^{۵}$

ز. $۷^{۱۵} \div ۷^{۸}$ ح. $۷^{۲۳} \div ۴۹^{۱۱}$ ط. $۸^{۵} \times ۴^{۷} \div ۱۶^{۷}$

پاسخ: آ. $۲^{۱۹} \times ۲^{۲۱} = ۲^{۱۹+۲۱} = ۲^{۴۰}$ ب. $۲^{۷۳} \times ۳^{۷۳} = (۲ \times ۳)^{۷۳} = ۶^{۷۳}$ ج. $(۲^{۳})^{۵} = ۲^{۳\times۵} = ۲^{۱۵}$

د. $۹^{۵} \times ۳^{۷} = (۳^{۲})^{۵} \times ۳^{۷} = ۳^{۲\times۵} \times ۳^{۷} = ۳^{۱۰} \times ۳^{۷} = ۳^{۱۷}$

ه. $۸^{۲} \times ۲^{۸} = (۲^{۳})^{۲} \times ۲^{۸} = ۲^{۲\times۳} \times ۲^{۸} = ۲^{۶} \times ۲^{۸} = ۲^{۶+۸} = ۲^{۱۴}$

و. $۸^{۴} \times ۴^{۵} = (۲^{۳})^{۴} \times (۲^{۲})^{۵} = ۲^{۱۲} \times ۲^{۱۰} = ۲^{۲۲}$

ز. $۷^{۱۵} \div ۷^{۸} = ۷^{۱۵-۸} = ۷^{۷}$

ح. $۷^{۲۳} \div ۴۹^{۱۱} = ۷^{۲۳} - (۷^{۲})^{۱۱} = ۷^{۲۳} \times ۷^{۲۲} = ۷^{۲۳-۲۲} = ۷^{۱} = ۷$

ط. $۸^{۵} \times ۴^{۷} \div ۱۶^{۷} = (۸^{۵} \times ۴^{۷}) \div ۱۶^{۷} = (۲^{۳\times۵} \times ۲^{۲\times۷}) \div ۲^{۴\times۷} = ۲^{۱۵+۱۴} \div ۲^{۲۸} = ۲^{۲۹-۲۸}$ ■

نکته‌ای ظریف...
دامی برای آنان که فکر می‌کنند ریاضی می‌دانند...

مثال ۳۹.۱: شخصی ادعا می‌کند $۰^{۰}$ بی‌معناست؛ چون اگر خاصیت (د) از قضیهٔ فوق درست باشد، داریم:

$$۰^{۰} = ۰^{۱-۱} = \frac{۰^{۱}}{۰^{۱}} = \frac{۰}{۰}$$

تقسیم بر صفر بی‌معنا است پس $۰^{۰}$ نیز بی‌معنا است. آیا استدلال این شخص درست است؟

پاسخ: استدلال این شخص نادرست است. چون برای استفاده از مورد (د) از قضیهٔ فوق، باید به شرط $a \neq ۰$ نیز توجه کرد که در این صورت استدلال فوق قابل اجرا نیست. ■

با دقت بخوانید.
این قسمت حاوی نکات مهمی است.

نکته ۱.۱: یک اشتباه رایج آن است که بین + و × تفاوت قائل نشویم.

به‌طور مثال ممکن است شخصی بنویسد $۳^{۷} = ۳^{۴} + ۳^{۳}$ اما نادرستی این تساوی با محاسبه مقادیر دیده می‌شود.

$$۳^{۳} = ۲۷ \,,\ ۳^{۴} = ۸۱ \,,\ ۳^{۷} = ۲۱۸۷$$

$$۳^{۳} + ۳^{۴} = ۲۷ + ۸۱ = ۱۰۸ \neq ۲۱۸۷ = ۳^{۷}$$

اما برای محاسبهٔ عبارت فوق می‌توان از $۳^{۳}$ فاکتور گرفت. در این صورت داریم:

$$۳^{۳} + ۳^{۴} = ۳^{۳} + (۳ \times ۳^{۳}) = (۱ + ۳)۳^{۳} = ۴ \times ۳^{۳}$$

بنابراین، تساویِ $۳^{۳} \times ۴ = ۳^{۴} + ۳^{۳}$ درست است.

برای جمع و تفریق عبارات توان‌دار قاعدهٔ خاصی وجود ندارد. فقط وقتی پایه‌ها برابر باشند، از پایه‌ها با توان کوچک‌تر فاکتور گرفته سپس حاصل را ساده می‌کنیم.

دقت کنید...
این مثال به‌ظاهر ساده، شما را در حل کردن مسائلی بسیار پیچیده یاری خواهد کرد.

مثال ۴۰.۱: درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید. (از خواص توان استفاده کنید)

آ. $۴^{۵} = ۲^{۱۰}$ ب. $۴^{۵} + ۴^{۵} = ۴^{۱۰}$ ج. $۴^{۵} + ۴^{۵} = ۸^{۵}$

د. $۲^{۵} + ۲^{۵} = ۲^{۶}$ ه. $۹^{x} = ۳^{۲x}$ و. $۴^{۳} - ۲^{۵} = ۲^{۵}$

پاسخ: آ. درست — ب. نادرست — ج. نادرست
د. درست — ه. درست — و. درست

■

مثال ۴۱.۱: نشان دهید برای هر عدد طبیعی مانند x داریم $۷^{۲x+۲} + ۴۹^x - ۷^{۲x} - ۴۹^{x+۱} = ۰$.

توجه داریم که $۷^۲ = ۴۹$ این مثال به‌ظاهر پیچیده، به سادگی حل می‌شود.

پاسخ: با ساده کردن عبارت فوق داریم:

$$۷^{۲x+۲} + ۴۹^x - ۷^{۲x} - ۴۹^{x+۱} = ۰ = ۷^{۲x} \times ۷^۲ + ۷^{۲x} - ۷^{۲x} - ۷^{۲x} \times ۷^۲$$

که با فاکتور گیری از $۷^{۲x}$ داریم:

$$= ۷^{۲x}(۷^۲ + ۱ - ۱ - ۷^۲) = ۷^{۲x} \times ۰ = ۰$$ ■

توجه!..........توجه! همیشه راهی برای ساده‌کردن وجود **ندارد**.

توجه داریم که در مواردی مانند $۴^۳ + ۳^۳$ یا $۴^۵ + ۳^۳$ هیچ کار خاصی نمی‌توان انجام داد. یا در حالاتی مانند $۴^۵ \times ۳^۳$ نیز کار خاصی برای ساده کردن نمی‌توانیم انجام دهیم. این عبارت از این ساده‌تر نمی‌شود و تنها راه این است که مقادیر $۳^۳$ و $۴^۳$ را محاسبه نموده و جمع مذکور را انجام دهیم.

۱.۵.۱ معادلات و نامعادلات توانی

پیش از این با معادلات و نامعادلات آشنا شده‌ایم. اما معادلات و نامعادلات توانی نکات ظریفی دارند که در مثال زیر مورد توجه قرار گرفته‌اند.

با دقت بخوانید... این مثال شامل نکات ظریفی است که بی‌دقتی شما را از بین می‌برد.

مثال ۴۲.۱: درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. برای هر سه عدد طبیعی مانند a، m و n داریم: $a^m = a^n \Longleftrightarrow m = n$

ب. برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و n داریم: $a^n = b^n \Longleftrightarrow a = b$

ج. برای هر سه عدد طبیعی مانند a، m و n داریم: $a^m < a^n \Longleftrightarrow m < n$

د. برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و n داریم: $a^n < b^n \Longleftrightarrow a < b$

پاسخ: آ. نادرست است؛ چون $۱^۵ = ۱^۳$ اما $۵ \neq ۳$. ب. نادرست است؛ چون $۵^۰ = ۴^۰$ اما $۵ \neq ۴$.
ج. نادرست است؛ چون $۰^۴ > ۰^۰$ اما $۴ \ngtr ۰$. د. نادرست است؛ چون $۴ > ۳$ اما $۴^۰ \ngtr ۳^۰$. ■

مثال فوق هرچند نکات مهمی را بیان می‌کند، اما راه حلی برای معادلات و نامعادلاتی مانند $۲^x > ۸$ و $۲^x = ۸$ ارائه نمی‌کند. مثال زیر راه را برای بیان قضیه‌ای مهم هموار می‌کند که می‌توان از آن برای حل معادلات و نامعادلات استفاده کرد.

با دقت بخوانید ... درک این مثال بدون پاسخ دادن به آن دشوار خواهد بود.

مثال ۴۳.۱: نشان دهید برای هر چهار عدد طبیعی مانند a، b، m و n داریم:

آ. اگر $a > ۱$ و $n \geq ۱$ آن‌گاه $a^n > ۱$

ب. برای $a > ۱$ داریم اگر $n < m$ آن‌گاه $a^n < a^m$.

ج. برای $a > ۰$ داریم اگر $n \leq m$ آن‌گاه $a^n \leq a^m$.

د. عبارتِ «اگر $n \leq m$ آن‌گاه $a^n \leq a^m$» درست نیست.

ه. برای $n > ۰$ داریم اگر $a < b$ آن‌گاه $a^n < b^n$.

و. عبارت «اگر $a \leq b$ آن‌گاه $a^۰ < b^۰$» نادرست است.

ز. برای $a \geq ۱$ داریم اگر $a^n < a^m$، آن‌گاه $n < m$.

ح. عبارت «اگر $a^n \leq a^m$ آن‌گاه $n \leq m$» برای $a \geq ۱$ نادرست است.
ط. برای $a > ۱$ داریم اگر $a^n \leq a^m$ آن‌گاه $n \leq m$.

پاسخ: آ. به استقرا روی n اثبات می‌شود. قرار می‌دهیم $\mathrm{P}(n): a^n > ۱$. $\mathrm{P}(۱)$ به‌وضوح درست است. اگر $\mathrm{P}(k)$ درست باشد، آن‌گاه $\mathrm{P}(k+۱)$ نیز درست است؛ چون $a^{n+۱} = a^n \times a > a^n \times ۱ > ۱ \times ۱ = ۱$. بنابراین، برای هر عدد طبیعی مانند $n \geq ۱$ داریم $a^n > ۱$.
ب. چون $n < m$، پس عددی طبیعی و ناصفر مانند k وجود دارد که $n + k = m$. بنابراین، $a^m = a^n \times a^k$. پس کافی است نشان دهیم $a^k > ۱$. ادامهٔ کار به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.
موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

مثال فوق امکان حل معادلات و نامعادلات را برای ما فراهم می‌آورد. اما برای یادآوری بهتر آن، حالت $a, n \geq ۱$ را به‌صورت یک قضیه بیان می‌کنیم و حالت‌هایی که مقدار a یا n صفر است را جداگانه بررسی می‌کنیم.

قضیه ۷.۱: برای اعدادی طبیعی و ناصفر مانند a، b، m و n داریم:
آ. $a^n < b^n \Longrightarrow a < b$
ب. $a^m < a^n \overset{a>۱}{\Longrightarrow} m < n$
ج. $a^n = b^n \Longleftrightarrow a = b$
د. $a^m = a^n \overset{a>۱}{\Longleftrightarrow} m = n$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۴۴.۱: معادلات و نامعادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.
آ. $۲^x < ۸$
ب. $۴^x \geq ۱۶$
ج. $۲^{x+۱} < ۱۶$
د. $۲^{x-۱} < ۱۶$
ه. $۲^{۲x} \leq ۱۶$
و. $۲^{۳x} \leq ۱۶$
ز. $۴^x = ۱۶$
ح. $۹^x \times ۳ = ۳^۷$
ط. $۹^x \times ۳ = ۹^۳$

پاسخ: آ. $۲^x < ۲^۳ \Longrightarrow x < ۳ \Longrightarrow x = ۰, ۱, ۲$؛ بنا به مورد (ب) از قضیهٔ فوق.
ب. $۲^۴ \leq ۲^{۲x} \Longrightarrow ۲x \geq ۴ \Longrightarrow x \geq ۲$؛ بنا به موارد (ب) و (ج) از قضیهٔ فوق.
ج. $۲^{x+۱} < ۲^۴ \Longrightarrow x + ۱ < ۴ \Longrightarrow x < ۳$؛ بنا به مورد (ب) از قضیهٔ فوق.
د. $۲^{x-۱} < ۲^۴ \Longrightarrow x - ۱ < ۴ \Longrightarrow x < ۴$.
اما از طرفی هم باید $x - ۱$ در اعداد طبیعی بامعنا باشد و درنتیجه باید داشته باشیم $x \geq ۱$. بنابراین، $x = ۱, ۲, ۳$ جواب‌های این نامعادله‌اند و $x = ۰$ جواب این نامعادله نیست.
ه. $۲^{۲x} < ۲^۴ \Longrightarrow ۲x < ۴ \Longrightarrow x < ۲$.
و. $۲^{۳x} \leq ۲^۴$ پس $۳x \leq ۴$ و درنتیجه $x \leq ۱$. توجه داریم که جواب نامعادلهٔ $۳x \leq ۴$ در اعداد طبیعی $x \leq ۱$، یعنی $x = ۰, ۱$ است.
ز. $۲^{۲x} = ۲^۴ \Longrightarrow ۲x = ۴ \Longrightarrow x = ۲$.
ح. $۳^{۲x+۱} = ۳^۷ \Longrightarrow ۲x + ۱ = ۷ \Longrightarrow x = ۲$.
ط. $۳^{۲x+۱} = ۳^۶$ پس $۲x + ۱ = ۶$. اما این معادله در اعداد طبیعی جواب ندارد و درنتیجه معادلهٔ $۹^x \times ۳ = ۹^۳$ نیز در اعداد طبیعی جواب ندارد. ■

تمرین:

(۵۲) بدون محاسبه، حاصل عبارات زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید. ساده اما مهم. جهت خوانندگان مبتدی
آ. $۲۹۸^{۵۴۵} \times ۲۹۸^{۴۲۶}$
ب. $۱۵۶^{۴۵} \times ۲^{۴۵}$
ج. $۱۲^۷ \times ۵^۷$
د. $(۴۷^۳)^{۱۵}$
ه. $(۴^۷ \times ۴^۸)^۵$
و. $(۳^۶ \times ۴^۶)^۷$
ز. $(۳^۸ \times ۳^۵)^۹$
ح. $(\frac{۲^۴}{۲^۵})^۶$
ط. $(\frac{۳^۶}{۳^۵})^۷$

دقت کنید!

(۵۳) درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. $۳^۴ + ۳^۵ = ۳^۹$ ب. $۲^۶ + ۲^۷ = ۲^{۱۳}$ ج. $۳^{۹۵} \times ۳^۵ = ۳^{۱۰۰}$

د. $۲^۷ \times ۳^۷ = ۶^۷$ ه. $۲^۶ + ۳^۶ = ۵^۶$

مهم!
قدرت حل مسئله‌تان را افزایش دهید.

(۵۴) درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید.

آ. $۳^۴ + ۳^۵ = ۴ \times ۳^۴$ ب. $۴^۶ + ۴^۵ = ۵ \times ۴^۵$ ج. $۲^۳ + ۲^۵ = ۵ \times ۲^۳$

جهت خوانندگان مبتدی

(۵۵) عبارت‌های زیر را ساده کنید.

آ. $\frac{۳^۴ + ۳^۵}{۴}$ ب. $\frac{۴^۳ \times ۴^۸}{۴^۵}$ ج. $\frac{۵^۷ \times ۵^۹}{۵^{۱۲}}$

مهم استفادهٔ شما از قضایا و تعاریف است.
قدرت حل مسئله خود را افزایش دهید.

(۵۶) درستی عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. $۳^۷ < ۴^۷$ ب. $۳^۵ < ۳^۶$

ج. $۳^۶ < ۴^۷$ د. $۳^۵ + ۴^۷ > ۲^۴ + ۳^۶$

ه. $۴ \times ۳^۵ + ۵ \times ۴^۷ > ۳^۶ + ۴^۸$

فقط به پاسخ نیاندیشید.
به دنبال تکنیک‌های حل مسئله و روش‌های جدید استدلال باشید.

(۵۷) عدد طبیعی x را چنان بیابید که:

آ. $x + ۶ = ۵ + ۶$ ب. $x^۳ = ۵^۳$ ج. $۳^x = ۳^۵$

د. $۵^{۲x} = ۵^{۱۲}$ ه. $۲۵^x = ۵^{۱۸}$ (توجه: $۵^۲ = ۲۵$)

و. $۲^۷ \times ۲^{۴x+۴} = ۸^{x+۳}$ (توجه: $۸ = ۲^۳$)

ز. $۱۶^{x+۳} = ۸^{x+۵} \times ۴$ (توجه: $۱۶ = ۲^۴$)

ساده اما پایه‌ای.

(۵۸) نامعادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

آ. $x^۳ < ۵^۳$ ب. $x^۴ \le ۱$ ج. $x^{۱۰} \le ۱$ د. $x^{۱۲} \le ۲^{۱۲}$

(۵۹) درستی یا نادرستی نتیجه‌گیری‌های زیر را با فرض اینکه a عددی طبیعی است بررسی کنید.

آ. $(x + ۳) \times ۳ = ۳^۲ \Longrightarrow x = ۰$ ب. $(x + a)a = a^۲ \Longrightarrow x = ۰$

نتایجی شگفت‌انگیز از استقرای ریاضی

(۶۰) عبارات زیر را با استقرا ثابت کنید.

آ. $۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$

ب. $۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n - ۱) = n^۲$

ج. $۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

د. $n^۲ - (n-۱)^۲ + (n-۲)^۲ - \cdots \pm ۱^۲ = \frac{n(n+۱)}{۲}$

ه. $۱ \times ۲ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۴ + \cdots + n(n+۱) = \frac{n(n+۱)(n+۲)}{۳}$

و. $۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + n^۲ = \frac{n(۴n^۲ - ۱)}{۳}$

ز. $۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \cdots + \left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲$

کافی است جملات زیر را بررسی کنید.

$$\begin{array}{ccc} P(۰) & \Longrightarrow & P(۱) \\ P(۱) & \Longrightarrow & P(۲) \\ P(۲) & \Longrightarrow & P(۳) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

(۶۱) شخصی ادعا می‌کند «همه اعداد طبیعی با هم برابرند» و می‌گوید:

اگر جملهٔ «همهٔ اعداد طبیعی از صفر تا n برابرند» را با $P(n)$ نشان دهیم. در این صورت $P(۰)$ واضح است و با فرض $P(n)$ داریم:

$$۰ = ۱ = \cdots = n \Longrightarrow ۰ + ۱ = ۱ + ۱ = \cdots = n + ۱ \Longrightarrow ۱ = ۲ = \cdots = n + ۱$$

و از تساوی $۰ = ۱ = \cdots = n$ که همان $P(n)$ است نتیجه می‌گیرد

$$۰ = ۱ = ۲ = \cdots = n = n + ۱$$

که همان $P(n + ۱)$ است. پس بنا به استقرا، همه اعداد طبیعی با هم برابرند.

اِشکال استدلال این شخص را بیابید.

(۶۲) برای هر عدد طبیعی مانند n تعریف می‌کنیم: $\circ! = ۱$ و $(n+۱)! = (n+۱)n!$
و $n!$ را «n فاکتوریل» می‌خوانیم. نشان دهید:

آ. $۱ = \circ!$ ب. $۱ = ۱!$ ج. $۲ \times ۱ = ۲!$
د. $۳ \times ۲ \times ۱ = ۳!$ هـ. $۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۴!$ و. $۹ \times \cdots \times ۲ \times ۱ = ۹!$

(۶۳) نشان دهید:

آ. $\frac{۵!}{۳!} = ۵ \times ۴$ ب. $\frac{۷!}{۴!} = ۷ \times ۶ \times ۵$ ج. $\frac{۱\circ!}{۶!} = ۱\circ \times \cdots \times (۶+۱)$

د. برای هر دو عدد طبیعی مانند m و n که $m < n$ داریم: $\frac{n!}{m!} = n \times (n-۱) \times \cdots \times (m+۱)$

(۶۴) درستی یا نادرستی عبارات زیرا را بررسی کنید.

آ. $(mn)! = (m!)(n!)$ ب. $(m+n)! = m! + n!$

(۶۵) با استفاده از استقرای ریاضی نشان دهید:

آ. $n \geq ۴ \Longrightarrow n! \geq n^۲$ ب. $n \geq ۶ \Longrightarrow n! \geq n^۳$

ج. $۱(۱!) + ۲(۲!) + ۳(۳!) + \cdots + n(n!) = (n+۱)! - ۱$

د. $۲ \times ۶ \times ۱\circ \times (۴n-۲) = \frac{(۲n)!}{n!}$

هـ. $۲^n(n!)^۲ \leq (۲n)!$

(۶۶) برای هر دو عدد طبیعی m و n که $m \leq n$ قرار می دهیم: $\mathrm{C}(m,n) = \frac{n!}{m! \times (n-m)!}$
مقادیر زیر را محاسبه کنید.

آ. $\mathrm{C}(\circ,\circ)$ ب. $\mathrm{C}(۱,\circ)$ ج. $\mathrm{C}(۱,۱)$ د. $\mathrm{C}(۲,\circ)$
هـ. $\mathrm{C}(۲,۱)$ و. $\mathrm{C}(۲,۲)$ ز. $\mathrm{C}(۳,\circ)$ ح. $\mathrm{C}(۳,۱)$
ط. $\mathrm{C}(۳,۲)$ ی. $\mathrm{C}(۳,۳)$ ک. $\mathrm{C}(۴,\circ)$ ل. $\mathrm{C}(۴,۱)$
م. $\mathrm{C}(۴,۲)$ ن. $\mathrm{C}(۴,۳)$ س. $\mathrm{C}(۴,۴)$

(۶۷) نشان دهید برای هر دو عدد طبیعی مانند m و n که $m < n$ داریم:

آ. $\mathrm{C}(n,\circ) = ۱$ ب. $\mathrm{C}(n,n) = ۱$ ج. $\mathrm{C}(n,۱) = n$
د. $\mathrm{C}(n,n-۱) = n$ هـ. $\mathrm{C}(n,۲) = \frac{n(n-۱)}{۲}$ و. $\mathrm{C}(n,۲) = \mathrm{C}(n,n-۲)$

(۶۸) نشان دهید برای هر عدد طبیعی مانند n داریم:

آ. $\mathrm{C}(n,k) = \frac{n(n-۱)\cdots(n-k+۱)}{k!}$

ب. $\mathrm{C}(n,k) = \frac{n(n-۱)\cdots(k+۱)}{(n-k)!}$

(۶۹) نشان دهید برای هر دو عدد طبیعی مانند n و k که $۱ < k < n$ داریم:
$\mathrm{C}(n-۱,k-۱) + \mathrm{C}(n-۱,k) = \mathrm{C}(n,k)$

(۷۰) نشان دهید برای هر دو عدد طبیعی مانند k و n داریم:

آ. $\mathrm{C}(n,k) = \mathrm{C}(n-۱,k-۱) + \mathrm{C}(n-۱,k-۱) + \cdots + \mathrm{C}(k-۱,k-۱) + \mathrm{C}(n-k-۱,\circ)$

ب. $\mathrm{C}(k,k) + \mathrm{C}(k+۱,k) + \cdots + \mathrm{C}(n,k) = \mathrm{C}(n+۱,k+۱)$

(۷۱) نشان دهید برای اعداد طبیعی مانند n، k و r داریم:

آ. $\mathrm{C}(n,k)\mathrm{C}(k,r) = \mathrm{C}(n,r)\mathrm{C}(n-r,k-r)$

ب. $\mathrm{C}(n,k) = \mathrm{C}(n-۲,k-۲) + ۲\mathrm{C}(n-۲,k-۱) + \mathrm{C}(n-۲,k)$

ج. $\mathrm{C}(n,\circ) + \mathrm{C}(n,۱) + \cdots + \mathrm{C}(n,n) = ۲^n$

د. $\mathrm{C}(n,۱) + ۲\mathrm{C}(n,۲) + ۳\mathrm{C}(n,۳) + \cdots + n\mathrm{C}(n,n) = n۲^{n-۱}$

فصل ۲

حساب و نظریه اعداد

با رشد عدد نویسی و افزایش توان انسان در ابداع اعداد، روش‌های محاسبه اهمیت یافت که آن را حساب می‌خوانیم. روش‌های محاسبه از هزاران سال پیش و شاید همزمان با پیشرفت عددنویسی از دغدغه‌های انسان بوده است. اما بحث‌های نظری بر اعداد از قبیل بحث بر بخش‌پذیری اعداد یا ساختن مفهومی مانند «اعداد اول» را برای اولین بار در یونان باستان می‌بینیم. بحث‌های نظری بر اعداد تا به امروز پیشرفت‌های شگفت‌انگیزی داشته و شاخهٔ مهمی از ریاضیات با نام «نظریهٔ اعداد» را تشکیل داده است. در همین فصل با اولین بحث‌های نظری بر اعداد از قبیل بخش‌پذیری و اعداد اول آشنا خواهیم شد.

۱.۲ تاریخچه عددنویسی

صرفاً جهت اطلاع ... می‌توانید از مطالب این قسمت تا «دستگاه شمار هندی» صرف نظر کنید.

نه‌تنها انسان، که حتی برخی از حیوانات نیز توانایی مقایسهٔ دو طول یا دو وزن را به صورت کاملا حسی و شهودی دارند. حتی توانایی درک تعدادهای برابر را نیز دارند. به طور مثال، میمون‌ها می‌توانند درک کنند که ۲ عدد موز از ۳ عدد موز کمتر است. انسان دورهٔ پارینه سنگی که با ابداع کلمه و اسم‌گذاری بر اشیا بر دیگر گونه‌های جانوری پیشی گرفته بود، اعداد شفاهی را به‌وجود آورد. گزارش‌های متنوعی از شمارش‌های اولیه در میان اقوام مختلف در دست است. اما غالب آنها از یک الگو پیروی می‌کنند. به‌طور مثال اولین شمارش‌ها چیزی شبیه به این بوده است:

یک، دو، سه، خیلی

که در آن به هر تعدادی بیشتر از سه، «خیلی» گفته می‌شود. این شمارش با افزایش نیازهای بشر به‌صورت زیر درآمده است.

یک، دو، سه، یکی بیشتر، دوتا بیشتر، سه‌تا بیشتر، خیلی

که در آن به هر تعدادی بیشتر از شِش، «خیلی» گفته می‌شود. مسلماً با افزایش نیازهای بشر به شمارش، اعداد شفاهی ناکارآمدی خود را نشان داده و انسان مجبور به ابداع روشی برای غلبه بر مشکلات و نیازهای خویش شده است. به‌طور مثال با ورود انسان از دورهٔ شکارگری و گردآوری به دوره دامداری، نیاز به درک اینکه آیا گوسفندی از گلّه‌ای بزرگ کم شده یا خیر، انسان را بر آن داشت تا از سنگریزه استفاده کند. آنان برای هر گوسفند یک سنگ درون کیسه اندخته و گوسفندان را با سنگ‌ها برابر می‌دانستند. در این دوره چوب‌خط جای سنگریزه‌ها را گرفته و برای اقوامی که تا دَه

می‌توانسته‌اند بشمارند، با کشیدن حداکثر دَه خط بر هر چوب، عباراتی شبیه به عبارات زیر، به‌وجود آمده است.

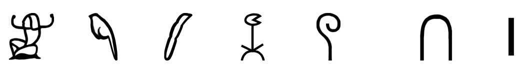
یک، دو، سه، چهار، پنج، شش، هفت، هشت، نُه، چوب
یکی بیشتر، دوتا بیشتر، سه‌تا بیشتر، چهارتا بیشتر، ....، نُه‌تا بیشتر، دوچوب،
دو چوب و یکی، دو چوب و دوتا، دو چوب و سه‌تا، ....، دو چوب و نُه‌تا، سه‌چوب

این روش نام‌گذاری بر اعداد به‌سادگی تا عبارتی شبیه به «نُه چوب و نُه‌تا» ادامه یافت و پس از آن، می‌توانستند دَه چوب را با یک طناب به هم بسته و عبارتی مانند «یک طناب» را برای بیان «دَه چوب» به‌کار برند و عبارتی مانند «یک طناب و دو چوب و سه‌خط» یک عدد را بیان کند. این اعداد نهایتاً تا هزار رشد می‌کردند و زمانی «هزار» به‌معنای بسیار زیاد و غیر قابل شمارش بوده‌است.

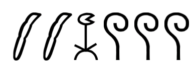
۱.۱.۲ گروه‌بندی ساده

در زمان اختراع خط، انسان‌ها با همین تکنیک ساده، بر تعدادهای برابر نام‌گذاری کرده گذاشته بودند. در اولین نوشته‌ها، نوشتن به‌معنای نقاشی کردن بود. سپس نقاشی‌ها کمی نمادین گشت و در این دوره، از نمادهایی به‌جای چوب‌خط، طناب و ... که به‌معنای بسته‌های «دَه‌تایی، صَدتایی، هزارتایی و ...» هستند استفاده شد. به‌طور مثال، مصریان هر شیء را با نماد «|» نشان می‌دادند. یعنی عدد پنج را به‌صورت «|||||» می‌نوشتند. اما زمانی که به ۱۰ می‌رسند، به‌جای استفاده از ۱۰ تا نماد «|» در کنار هم، از نماد «∩» استفاده می‌کردند و عددی مانند ۳۲، به صورت ||∩∩∩ می‌نوشتند. به‌طور مشابه، برای اعدادی معادل صد، هزار، ده‌هزار، صدهزار و میلیون نیز نمادهایی داشتند.

$۱۰^۶$ $۱۰^۵$ $۱۰^۴$ $۱۰^۳$ $۱۰^۲$ ۱۰ ۱



نمادهای روبه‌رو، یک عدد در دستگاه عددنویسی مصری را نشان می‌دهند که با توجه به عددنویسی مصری برابر است با:



$$۱۰^۴ + ۱۰^۴ + ۱۰^۳ + ۱۰^۲ + ۱۰^۲ + ۱۰^۲ = ۲ \times ۱۰^۴ + ۱۰^۳ + ۳ \times ۱۰^۲$$

۲.۱.۲ دستگاه‌های شمار رمزی

با گذشت زمان، انسان‌ها در عددنویسی به فکر خلاصه کردن نمادگذاری افتادند. اولین نمونه از این روش را در میان یونانیان می‌بینیم که برای این منظور، از حروف الفبا استفاده کردند و نمادهای جدیدی را نساختند. در جدول زیر نمادهای این دستگاه عددنویسی را به همراه اعدادی که نمایش دهنده آن بوده‌اند، مشاهده می‌کنیم.

۱	α	آلفا	۲	β	بتا
۳	γ	گاما	۴	δ	دلتا
۵	ϵ	اپسیلون	۶		دیگما (منسوخ شده)
۷	ζ	زِتا	۶	η	اِتا

۹	θ	تِتا	۱۰	ι	یُوتا
۲۰	κ	کاپا	۳۰	λ	لامبدا
۴۰	μ	مو	۵۰	ν	نو
۶۰	ξ	کِسی	۷۰	o	اومیکرون
۸۰	π	پی	۹۰		کوپا (منسوخ شده)
۱۰۰	ρ	رو	۲۰۰	σ	سیگما
۳۰۰	τ	تَاو	۴۰۰	υ	اوپسیلون
۵۰۰	ϕ	فی	۶۰۰	χ	خی
۷۰۰	ψ	پِسی	۸۰۰	ω	اُمگا
۹۰۰		سامپی (منسوخ شده)			

به‌طور مثال عدد ۲۳۵ را در این دستگاه می‌توان به‌صورت‌های زیر نوشت.

$$۲۳۵ = \sigma\lambda\epsilon = \epsilon\lambda\sigma = \sigma\epsilon\lambda$$

در این روش، محل قرار گرفتن نمادها اهمیتی ندارد. دستگاه شمار فوق بسیار قدیمی است و می‌دانیم در سال‌های ۴۵۰ پیش از میلاد مسیح وجود داشته‌است؛ اما نمی‌دانیم چه زمانی به وجود آمده است. در سدهٔ اول هجری، مسلمانان دستگاه عددنویسی مشابهی ساختند که حروف اَبْجَد یادگار آن است. اما با ترجمه آثار هندیان توسط ریاضیدانان مسلمان و بخصوص ایرانیان، این دستگاه عددنویسی در ریاضیات کمتر مورد استفاده قرار گرفت. آنها به هر حرف یک عدد نسبت می‌دادند و برای نسبت دادن یک عدد به یک کلمه، اعداد مربوط به حروفش را با هم جمع می‌کردند.

۱	الف	۲	ب	۳	ج	۴	د	۵	ه
۶	و	۷	ز	۸	ح	۹	ط	۱۰	ی
۲۰	ک	۳۰	ل	۴۰	م	۵۰	ن	۶۰	س
۷۰	ع	۸۰	ف	۹۰	ص	۱۰۰	ق	۲۰۰	ر
۳۰۰	ش	۴۰۰	ت	۵۰۰	ث	۶۰۰	خ	۷۰۰	ذ
۸۰۰	ض	۹۰۰	ظ	۱۰۰۰	غ				

معمولاً برای اینکه ترتیب این حروف را حفظ کنند، از کلمات زیر که بی‌معنا بوده ولی در آن حروف الفبای عربی، به ترتیب اعداد مربوط به آنها آمده است، استفاده می‌کرده‌اند.

اَبْجَدْ هَوَّزْ حُطّی کَلِمَنْ سعْفَصْ قَرِشَتْ ثَخَّذْ ضِظَغْ

با توجه به جدول فوق عدد ۳۴۶ با حروف «ش»، «م» و «و» نوشته می‌شود. با این حروف می‌توان کلمات «موش» و «شوم» را نوشت. شاعر شهیر ایرانی، حافظ، سال کشته شدن ابواسحاق را به‌صورت زیر بیان می‌کند.

بلبل و سرو و سمن، یاسمن و لاله و گل   هست تاریخ وفات شه مشکین کاکل

که با حساب ابجد به دست می‌آید:

گل = ۵۰   لاله = ۶۶   سمن = ۱۵۰   یاسمن = ۱۶۱   سرو = ۲۶۶   بلبل = ۶۴

و مجموع این اعداد ۷۵۷، سال کشته شدن ابو اسحاق است. (چون عربی حرف «گ» ندارد، حرف «گ» را «ک» در نظر گرفته‌ایم.) با این دستگاه کارهایی رمزگونه بین عبارات متنی و اعداد انجام

می‌شده‌است و به‌همین سبب آن را «دستگاه شمار رمزی» می‌خوانند. پیشگویان و جادوگران به این دو دستگاه شمار علاقه خاصی داشتند و در این علوم که به «علوم خفیه» معروف است، از این دستگاه‌های شمار استفاده می‌کرده‌اند. به‌طور مثال شتیفل، یکی از ریاضیدانان قرن شانزدهم، با تحلیل نوشته‌های کتاب مقدس، آخر دنیا را ۳ اکتبر ۱۵۳۳ پیش‌بینی کرد. عدهٔ زیادی از دهقانان معتقد، کار و مایملک خویش را رها کردند تا با او به بهشت بروند. بدین‌ترتیب زندگی آنها را خراب کرده و از ترس ایشان، مجبور شد به زندانی پناه ببرد. شتیفل همچنین اعلام کرد کمهٔ «جانور» در کتاب مکاشفات به پاپ لوئی دهم اشاره دارد. اما چند سال بعد جان نپر آن را به پاپ روم تعبیر کرد. پدر بونگوس آن را نشانگر مارتین‌لوتر دانست. در جنگ جهانی اول به قیصر ویلهلم و سپس به هیتلر نیز تعبیر شد. اما کتاب مکاشفات در اصل به زبان آرامی بوده و با نمادهای آن، «نرون» را تهجی می‌کند.

۳.۱.۲ دستگاه‌های گروه‌بندی ضربی

انسان‌ها به سمت استفاده از خواص اعداد برای عددنویسی قدم برمی‌دارند.

با گذشت زمان، انسان‌ها فهمیدند می‌توانند با کمتر کردن نمادها، عددنویسی را ساده‌تر کنند. نمادهایی برای اعداد ۱ تا ۹ ساختند (برای سادگی، از ارقام ۱ تا ۹ استفاده می‌کنیم) و اعدادی مانند ||||| ∩∩∩∩ را به‌صورت «۴∩۵» نوشتند که به معنای ۴ تا «∩» و ۵ تا «|» است. دستگاه شمار چینی، نمونه‌ای قدیمی از این دستگاه شمار است. چینی‌ها برای هر یک از اعداد ۱ تا ۹ نمادهایی ساختند. علاوه‌براین، برای توان‌هایی از ۱۰ مانند ۱۰، ۱۰۰ و ۱۰۰۰ نیز نمادهای دیگری ایجاد کردند. در زیر نمادهای عددنویسی چینی را مشاهده می‌کنیم.

۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
九	八	七	六	五	四	三	二	一

۱۰,۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۰
↕	↕	↕	↕
万	千	百	十

در این دستگاه شمار، با قرار دادن نماد یکی از اعداد ۱ تا ۹ قبل از نماد یکی از توان‌های ۱۰، ضرب آنها را نشان می‌دادند. چینی‌ها همه چیز را به‌صورت عمودی و از بالا به پایین می‌نویسند. در جدول زیر چند نمونه از اعدادی که با این دستگاه اعداد نوشته شده‌اند، آمده است.

		二
九		百
万	三	七
三	千	十
十	九	四
$9 \times 10000 + 3 \times 10$	$3 \times 1000 + 9$	$2 \times 100 + 7 \times 10 + 4$

۴.۱.۲ دستگاه‌های شمار موضعی

دستگاه عددنویسی بابلیان تلفیقی از دستگاه عددنویسی مصری و ژاپنی است.
بابلیان ابتکار بزرگی داشتند و آن استفاده از محل قرار گرفتن اعداد برای ارزش‌دهی به آنها بود.

در روش‌هایی که تاکنون مشاهده کردیم، محل قرار گرفتن نمادها، اهمیتی نداشت. معنا بخشیدن به مکان و موضع یک نماد در عددنویسی، اولین بار در بابلیان قدیم دیده می‌شود. بابلیان اعداد ۱ تا ۶۰ را مانند مصریان به روش گروه‌بندی ساده می‌نوشتند. بابلیان سه نماد برای نوشتن اعداد داشتند. آنها از نماد𒁹 برای عدد ۱، از نماد𒌋 برای عدد ۱۰ و از نماد𒑊 برای عمل تفریق استفاده می‌کردند. بابلیان،

از عمل تفریق نیز برای خلاصه کردن نمادگذاری خود سود می‌بردند. رومیان نیز دستگاه عددنویسی مشابهی داشتند که هنوز هم در مواردی مانند صفحات اولیهٔ کتاب‌ها و ساعت‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. تنها تفاوت دستگاه شمار بابلیان برای اعداد ۱ تا ۶۰، با دستگاه شمار مصری، شکل نمادهایی بود که استفاده می‌کردند. به‌طور مثال چند عدد، با نمایش بابلی نمایش داده شده‌اند.

۳۹ = ۴۰ − ۱   ۲۷ = ۳۰ − ۳   ۲۳

اما برای اعداد بزرگ‌تر از ۶۰ از روش دیگری استفاده می‌کردند. آنها عددی مانند ۷۶۲ را به صورت ۴۲ + ۶۰ × ۱۲ = ۷۶۲ در نظر می‌گرفتند و به صورت  می‌نوشتند. همچنین عدد ۲۱ + ۶۰ × ۱۲ + $۶۰^{۲}$ × ۱۱ را به‌صورت  نمایش می‌دادند.

۵.۱.۲ دستگاه شمار هندی

راحت‌ترین و بی‌محدودیت‌ترین روش عددنویسی را هندیان ایجاد کردند.

شاید هندیان دستگاه اعداد ضربی را از چینی‌ها آموخته‌اند و آن را ارتقا داده‌اند. فرض کنید هندیان دستگاه شمار ضربی را از همسایگان شرقی خود آموخته باشند. آنها برای نوشتن اعداد، همواره از راست به چپ، ضرایب ۱، ۱۰، ۱۰۰ و ۱۰۰۰ را می‌نوشتند. واضح است که پس از مدتی کار کردن با این دستگاه، این فکر به ذهن آنان رسیده است که می‌توان نمادهایی که برای اعداد ۱، ۱۰، ۱۰۰ و ۱۰۰۰ استفاده می‌شوند را حذف کرد و اولین نمادی که نشانگر یکی از اعداد ۱ تا ۹ است را به‌عنوان ضریب ۱، دومین نماد را به عنوان ضریب ۱۰، سومین نماد را به عنوان ضریب ۱۰۰ و چهارمین نماد را به عنوان ضریب ۱۰۰۰ در نظر گرفت. اما مشکلی که با آن مواجه شدند، این بود که برای نوشتن اعدادی مانند ۴ + ۱۰۰۰ × ۳ که هیچ ضریبی از ۱۰ و ۱۰۰ در آن وجود نداشت، باید به طریقی نشان می‌دادند که این عدد شامل ضریبی از ۱۰ و ۱۰۰ نیست. بنابراین نمادی را برای این منظور ساختند که به معنای هیچ تعداد است. پیدایش رقم صفر و به‌دنبال آن عدد صفر، نتیجهٔ این ابتکار هندیان بود. در ابتدا از نمادی به عنوان جانگهدار استفاده می‌کردند. اما به مرور فهمیدند که می‌توان آن را به معنای عدد جدیدی درنظر گرفت.

با دقت بخوانید: در این مطالب ساده با نگاه و بیانی آشنا می‌شوید که برای ادامهٔ مطالعات ضروری است.

در دستگاه شمار هندی به نمادهایی که برای اعداد صفر تا ۹ به‌کار می‌رود، «رقم» گفته می‌شود. امروزه دستگاه شمار هندی در سرتاسر جهان رواج دارد و همهٔ انسان‌ها با این دستگاه عددنویسی کار می‌کنند (هرچند ممکن است از نمادهایی متفاوت برای ارقام استفاده کنند). بنابراین عدد ۳۷۲ شامل سه نماد (رقم) است که پشت سر هم نوشته شده‌اند و هر کدام عددی را مشخص می‌کند. با توجه به محل قرار گرفتن نمادها گوییم: $372 = 3 \times 10^{2} + 7 \times 10^{1} + 2$

عددی مانند ۴۷ را یک عدد دو رقمی گوییم چون با دو رقمِ ۴ و ۷ نوشته شده‌است. به‌طور کلی:

مهم! a_iها نیز مانند a، b، c و ... نمادهایی برای نمایش اعدادی هستند که مقدار آنها را نمی‌دانیم. درواقع آنها را با اعداد طبیعی برچسب زده‌ایم و برچسب آنها را در زیرشان نوشته‌ایم. این برچسب‌ها را **اندیس** می‌گوییم.

تعریف ۱.۲: عدد x در دستگاه عددنویسی هندی، دارای نمایش $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$ است که a_0، a_1، ⋯ ، a_n رقم هستند (یعنی نمادهایی برای اعداد صفر تا ۹)، در این صورت:
$$x = a_n \times 10^{n} + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$$

به‌طور مثال نمایش عدد ۲۳۴۱ در تعریف فوق به‌صورت $\overline{a_3 a_2 a_1 a_0}$ است که در آن $a_0 = 1$، $a_1 = 4$، $a_2 = 3$ و $a_3 = 2$. در تعریف فوق، برای هر i داریم $0 \leq a_i \leq 9$. درضمن، خطی که روی a_i ها گذاشته‌ایم، برای تأکید بر این است که a_iها رقم هستند و این یک نگارش رقمی است تا با ضرب a_iها اشتباه نشود.

اگر داشته باشیم $x = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$ و $a_n \neq 0$، گوییم x عددی $(n+1)$ رقمی است. زیرا

با $(n+۱)$ رقم نوشته شده‌است. بنابراین ۱۰۰۰ عددی ۴ رقمی است و ۰۰۱۰۲ عددی است ۳ رقمی؛ زیرا نگارشی که در آن رقم سمت راست ناصفر باشد ۱۰۲ است. اما عدد صفر چند رقمی است؟ صفر هیچ نگارشی ندارد که در آن رقم سمت چپ ناصفر باشد. پس بنا به قرارداد، عدد صفر را «صفر رقمی» درنظر می‌گیریم.

اگر در درک این نمادگذاری مشکل دارید، در تلاش برای پاسخ دادن به این مثال آن را برطرف کنید.

مثال ۱.۲: برای هر $x=\overline{a_n a_{n-۱}\cdots a_۱ a_۰}$ داریم :

آ. $\overline{a_n a_{n-۱}\cdots a_۱ a_۰} = a_n \times ۱۰^n + (\overline{a_{n-۱}\cdots a_۱ a_۰})$

ب. $\overline{a_n a_{n-۱}\cdots a_۱ a_۰} = (\overline{a_n a_{n-۱}\cdots a_۱}) \times ۱۰ + a_۰$

پاسخ: با توجه به خاصیت توزیع‌پذیری اعداد طبیعی و تعریف (۱.۲) واضح است. ■

این قضیه حالت کلی‌ترِ مثال قبل است.

قضیه ۱.۲: برای هر دو عدد طبیعی k و n که $۰ \le k < n$ داریم:

$$\overline{a_n\cdots a_{k+۱} a_k \cdots a_۱ a_۰} = \overline{a_n \cdots a_{k+۱}} \times ۱۰^{k+۱} + \overline{a_k \cdots a_۰}$$

اثبات این قضیه فقط به حوصله و دقت نیاز دارد؛ وقت بگذارید تا نمادگذاری ریاضی برایتان ساده شود.

اثبات: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

در این مثال ساده روش صحیح استدلال کردن را تمرین کنید تا مسائل پیچیده ساده شوند.

مثال ۲.۲: با استفاده از خواص اعداد طبیعی و تعریف (۱.۲) نشان دهید:

آ. $۱۰^۲ = ۱۰۰$ ب. $۱۰^۶ = ۱,۰۰۰,۰۰۰$

ج. $۹۹ = ۱۰^۲ - ۱$ د. $۹۹۹ = ۱۰^۳ - ۱$

ه. $۹۹۹ = ۱۰^۴ - ۱$

به چگونگی استفاده از تعریف توجه کنید.

پاسخ: آ. $۱۰^۲ = ۱ \times ۱۰^۲ + ۰ \times ۱۰ + ۰ = ۱۰۰$

ج. $۱۰^۶ = ۱ \times ۱۰^۶ + ۰ \times ۱۰^۵ + ۰ \times ۱۰^۴ + \cdots + ۰ \times ۱۰ + ۰ = ۱,۰۰۰,۰۰۰$

د. $۹۹ = ۹(۱۰) + ۹ = ۹(۱۰) + ۱۰ - ۱ = ۱۰(۱۰) - ۱ = ۱۰۰ - ۱$

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

توجه! حق نداریم به عددنویسی و جمع و تفریق اعداد استناد کنیم. زیرا قواعد عددنویسی و روش‌های جمع و تفریق با توجه به همین مطالب به‌دست می‌آیند.

مثال ۳.۲: نشان دهید:

آ. برای هر عدد یک رقمی مانند $\overline{a_۰}$ داریم: $۰ \le a_۰ \le ۱۰ - ۱$

ب. برای هر عدد دو رقمی مانند $\overline{ab}$ داریم: $۱۰ \le \overline{ab} \le ۱۰^۲ - ۱$

ج. برای هر عدد سه رقمی مانند $\overline{abc}$ داریم: $۱۰^۲ \le \overline{abc} \le ۱۰^۳ - ۱$

د. برای هر عدد چهار رقمی مانند $\overline{xywz}$ داریم: $۱۰^۳ \le \overline{xywz} \le ۱۰^۴ - ۱$

پاسخ: از مثال قبل، تعریف (۱.۲) و قواعد نامساوی‌ها استفاده می‌کنیم:

ب. چون داریم $۰ \le b \le ۹$ و $۱ \le a \le ۹$ پس: $۱ \le a \le ۹ \Longrightarrow ۱ \times ۱۰ \le a \times ۱۰ \le ۹ \times ۱۰$

و چون $۰ \le b \le ۹$ داریم: $۱ \times ۱۰ + ۰ \le a \times ۱۰ + b \le ۹ \times ۱۰ + ۹ \Longrightarrow ۱۰ \le \overline{ab} \le ۹۹ = ۱۰^۲ - ۱$

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

قضیه ۲.۲: برای هر عدد طبیعی مانند $x = \overline{a_n \cdots a_۱ a_۰}$ که در آن $a_n \neq ۰$ داریم:

$$۱۰^n \le \overline{a_n \cdots a_۱ a_۰} \le ۱۰^{n+۱} - ۱$$

اثبات: با توجه به مثال قبل واضح است. ■

۲.۲ مبنا

توجه! **توجه!**
در صورتی‌که مدرس محترم از بیان مبناها صرف نظر نماید، می‌توانید از خواندن تمامی مطالبی‌که مربوط به مبناهای مختلف است صرف نظر کنید.

به خوانندگان علاقه‌مند پیشنهاد می‌شود این مطالب را از دست ندهند. به کمک تمرینات مربوط به آن، درک عمیقی از روش‌های محاسبه به‌دست خواهند آورد.

مشاهده کردیم که انسان‌ها در شمارش خود گروه‌بندی را با گروه‌های ۱۰ تایی آغاز کردند. البته شواهدی در دست است که برخی از انسان‌ها گروه‌بندی‌های متفاوتی داشته‌اند. به‌طور مثال قوم مایا، گروه‌بندی خود را بر مبنای ۵ قرار داده بود. یعنی ۵ تا شیء را در یک گروه و با یک نماد نشان می‌دادند. با ۵ تا گروه ۵ تایی نیز گروه جدیدی می‌ساختند و الی آخر. اما اگر گروه‌بندی k تایی باشد، برای نوشتن اعداد در یک دستگاه عددنویسی شبیه به دستگاه هندیان، به k رقم نیاز داریم. در این صورت k نماد به عنوان رقم معرفی می‌کنیم. به‌طور مثال فرض کنید بخواهیم اعداد را با ۴ رقم ۰، ۱، ۲ و ۳ بنویسیم. در این صورت عددی مانند ۱۳۲ در مبنای ۴ به معنای $(۱ \times ۴^۲) + (۳ \times ۴^۱) + (۱ \times ۲)$ است. برای اینکه معلوم باشد نمادگذاری در چه مبنایی انجام شده‌است، معمولاً نمادگذاری را درون یک پرانتز قرار داده و مبنای آن را در گوشهٔ سمت راستِ پایین پرانتز می‌نویسیم. به‌طور مثال:

$$(۱۰۲)_۳ = ۱ \times ۳^۲ + ۰ \times ۳ + ۲ = (۱۱)_{۱۰}$$

بنابراین، $(۱۰۲)_۳$ نمایش دیگری از عددی است که ما آن را در مبنای دَه با ۱۱ نمایش می‌دهیم.

به تشابه موارد مختلف توجه کنید. از خواص اعداد غافل نشوید.

مثال ۴.۲: هر یک از اعداد زیر را در مبنای ۱۰ بنویسید.

آ. $(۲۱۰۳)_۷$ ب. $(۲۱۰۳)_۴$ ج. $(۲۱۰۳)_{۱۳}$

د. $(۱۰۲)_۵$ هـ. $(۱۰)_۴$ و. $(۱۰۰)_۷$

ز. $(۱۲۳)_۵$ ح. $(۱۲۳)_{۱۳}$ ط. $(۱۰۱)_۸$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

عددنویسی در مبنای دلخواهی مانند k را به شکل زیر تعریف می کنیم:

تعریف ۲.۲: هر عدد در مبنای k که $k \geq ۲$ عددی است به صورت $x = \overline{a_n \cdots a_۱ a_۰}$ که در آن، به ازای هر i، a_i نمادی است برای یکی از اعداد صفر تا $k-۱$ و مقدار x برابر است با:
$x = a_n \times k^n + a_{k-۱} \times k^{n-۱} + \cdots + a_۱ \times k + a_۰$

به‌طور مثال مقدار $(۳۰۲)_۵$ با قرار دادن $k = ۵$ (که مبنای عددنویسی است) و $a_۰ = ۲$، $a_۱ = ۰$ و $a_۲ = ۳$ در نمادگذاری فوق به‌دست می‌آید. هر یک از نمادهای a_i که برای عددنویسی در مبنای k استفاده شده‌اند را یک «رقم» می‌خوانیم. می‌توانیم از هر نماد دلخواهی به عنوان رقم استفاده کنیم.اما معمولاً شکل ارقام را تغییر نمی‌دهیم و از همان ارقامی که در مبنای ۱۰ استفاده می‌کردیم، برای مبنای دلخواه k نیز استفاده می‌کنیم؛ فقط برای ارقامی که اعدادی بزرگ‌تر از ۹ را نشان می‌دهند، از نمادهای دیگری استفاده می کنیم و مرسوم است که از حروف بزرگ انگلیسی استفاده شود. معمولاً در مبناهای بزرگ‌تر از ۱۰ از A به عنوان رقمی برای عدد ۱۰ استفاده می‌شود و از B برای ۱۱ و از C برای ۱۲ و برای اعداد بزرگ‌تر نیز همین روند را ادامه می‌دهیم تا ارقام مورد نیاز تأمین شوند. توجه داریم که این قرارداد صرفاً برای هماهنگی جهانی در عددنویسی در مبناهای مختلف صورت می‌گیرد. در صورتی که حروف انگلیسی ارقام مورد نظر را تأمین نکنند، می‌توان از نمادهای دیگری استفاده کرد که کار با آنها ساده باشد. مانند حروف الفبای یونانی، فارسی یا هر زبان و خط دیگری.

مثال ۵.۲: هر یک از اعداد زیر را در مبنای دَه بازنویسی کنید.

آ. $(A)_{۱۴}$ ب. $(1A)_{۱۶}$ ج. $(3F)_{۱۶}$

پاسخ: آ. ۱۰ ب. ۲۶ = ۱۰ + ۱۶ ج. ۶۳ = ۱۵ + ۱۶ × ۳ ■

مشابه آنچه در پایهٔ دَه دیدیم، می‌توانیم قضایایی را برای اعداد در مبنای عدد طبیعی دلخواه k (که $k \geq ۲$) به‌دست آوریم که به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. علاوه براین می‌توانیم براساس هر یک از این مبناها، اعداد را نام‌گذاری کنیم.

۳.۲ نام‌گذاری و خواندن اعداد

صرفاً جهت اطلاع!
در این بخش هیچ مطلب جدیدی آموزش داده نمی‌شود! مطالب این بخش صرفاً جهت اطلاع و ارائه‌ی نگاهی درست به اعداد و نام‌گذاری آنها بیان شده است.

نام‌گذاری اعداد بر اساس دستگاه عددنویسی انجام می‌شود. انسان‌ها برای نام‌گذاری اعداد نخست بر هر رقم نامی نهاده‌اند. معمولاً این نام در هر زبانی، قبل از آشنایی صاحبان آن زبان با دستگاه عددنویسی‌شان وجود داشته است. از آنجا که امروزه از دستگاه عددنویسی هندی (در مبنای ۱۰) در تمام جهان استفاده می‌شود، ما نیز به تشریح همین ساختار می‌پردازیم. در جدول زیر نام اعدادی که ارقام دستگاه عددنویسی هندی، نمادهایی برای آنها هستند را به زبان‌های فارسی و انگلیسی مورد توجه قرار می‌دهیم تا نام‌گذاری اعداد را بیاموزیم. در ادامه، برای نام‌گذاری و خواندنِ اعدادی که برای نوشتن آنها به بیش از یک رقم نیاز داشتند، نخست اعداد دو رقمی را نام‌گذاری کردند.

رقم	نام فارسی	نام انگلیسی	عدد	نام فارسی	نام انگلیسی
۰	صفر	Zero	۱۰	دَه	Ten
۱	یک	One	۱۱	یازده	Eleven
۲	دو	Two	۱۲	دوازده	Twelve
۳	سه	Three	۱۳	سیزده	Thirteen
۴	چهار	Four	۱۴	چهارده	Fourteen
۵	پنج	Five	۱۵	پانزده	Fifteen
۶	شش	Six	۱۶	شانزده	Sixteen
۷	هفت	Seven	۱۷	هفده	Seventeen
۸	هشت	Eight	۱۸	هجده	Eighteen
۹	نُه	Nine	۱۹	نوزده	Nineteen

مشاهده می‌کنیم که در اکثر موارد، ارتباط نزدیکی بین نامِ اعداد دو رقمیِ فوق و نام رقم سمت راست آنها وجود دارد. با این اعداد نیاز انسان‌ها به شمارش برطرف نشد و لازم شد اعداد بزرگ‌تری را نیز نام‌گذاری کنند. برای این منظور اعداد دو رقمی را نام‌گذاری کردند و به شیوه‌ای که در ادامه می‌بینید اعداد را به صورت جمع دو عدد بیان کردند. بدین ترتیب، برای خواندنِ عددی که به‌طورِ مثال به‌صورت ۴۵ نوشته می‌شود، آن را به‌صورت ۵ + ۴۰ در نظر گرفتند و به‌صورت «چهل و پنج» خواندند که به‌معنای «چهل به‌علاوهٔ پنج» است. در زبان انگلیسی نیز همین کار را کردند. یعنی ۴۵ را به‌صورت «Forty five» خواندند که به‌معنای «Forty به‌علاوهٔ Five» است.

عدد	نام فارسی	نام انگلیسی
۲۰	بیست	Twenty
۳۰	سی	Thirty
۴۰	چهل	Forty
۵۰	پنجاه	Fifty
۶۰	شصت	Sixty
۷۰	هفتاد	Seventy
۸۰	هشتاد	Eighty
۹۰	نَود	Ninety

مثال ۶.۲: اعداد زیر را به فارسی و انگلیسی بخوانید.

آ. ۳۵ ب. ۲۴ ج. ۴۷ د. ۸۵ ه. ۹۳

پاسخ: به‌عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود. ■

مثال ۷.۲: اعداد زیر را به رقَم، در دستگاه عددنویسی هندی بنویسید.

آ . پنجاه و سه   ب . سی و چهار   ج . Forty eight   د . Sixty nine

پاسخ: به‌عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود. ■

با پیشرفت انسان‌ها، نیاز آنها به شمارش نیز افزایش یافت و زمانی رسید که دیگر این اعداد پاسخگوی نیازهای انسان نبودند. برای این منظور اعداد زیر را نام‌گذاری کردند. مشاهده می‌کنید که آنها عدد صد (Hundred) را ساخته‌اند و ۶۰۰ را به‌صورت ۱۰۰×۶ یعنی به صورت «ششصد» (Six hundred) خوانده‌اند. البته ما از توضیح تغییرات نام‌گذاری این اعداد در طول تاریخ و به‌طور مثال تبدیل «پنج‌صد» به «پانصد» صرف نظر کرده‌ایم.

عدد	نام فارسی	نام انگلیسی
۱۰۰	صَد	Hundred
۲۰۰	دویست	Two Hundred
۳۰۰	سیصد	Three Hundred
۴۰۰	چهارصد	Four Hundred
۵۰۰	پانصد	Five Hundred
۶۰۰	ششصد	Six Hundred
۷۰۰	هفتصد	Seven Hundred
۸۰۰	هشتصد	Eight Hundred
۹۰۰	نهصد	Nine Hundred

مثال ۸.۲: اعداد زیر را به فارسی و انگلیسی بخوانید.

آ . ۲۳۷   ب . ۵۶۹   ج . ۶۲۳   د . ۷۶۸   هـ . ۱۰۴

و . ۳۰۵   ز . ۴۵۰   ح . ۳۲۰   ط . ۲۱۲   ی . ۱۱۱

پاسخ: به‌عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود. ■

اگر انسان‌ها می‌خواستند در ادامهٔ نام‌گذاریِ اعداد، برای هر صفر که جلوی یک رقم اضافه می‌شود ۱۰ نام جدید بگذارند، کار شمردن دشوار می‌شد. از این جهت راه دیگری را ابداع کردند. آنها ارقام یک عدد را از سمت راست، به دسته‌های سه‌تایی تقسیم کردند. سه‌تای اول را یکان گفتند و این اعدادی که به این طریق نوشته می‌شدند را به روش فوق نام‌گذاری کردند. دستهٔ سه‌رقمیِ دوم را مانند دسته قبل نام‌گذاری کردند و در انتهای آن کلمهٔ «هزار» (در انگلیسی Thousand) اضافه نمودند تا نشان دهند این نام‌گذاری، برای دومین سه‌رقم بوده‌است. به‌طورِ مثال عدد ۱۲۰۰۰ را به صورت «دوازده‌هزار» (و در انگلیسی به صورت Twelve thousands) خواندند. همچنین عدد ۵۴۱۲۳ را به‌صورت «پنجاه و چهار هزار و صد و بیست و سه» (و در انگلیسی به‌صورت fifty four thousands one hundred twenty three) خواندند. برای نام‌گذاری اعداد بزرگ‌تر، فقط نام جدیدی بر دسته‌های سه‌رقمی بعدی گذاشتند.

سه رقم اول	سه رقم دوم	سه رقم سوم	سه رقم چهارم	سه رقم پنجم	سه رقم ششم
یکان	هزار	میلیون	میلیارد	تریلیون	تریلیارد

مثال ۹.۲: اعداد زیر را در دستگاه هندی، با استفاده از ارقام بنویسید.

آ . ده میلیارد و پانصد هزار و سه   ب . سه‌تریلیون و چهل و سه هزار

ج . چهارصد و سه میلیون و شصت   د . بیست هزار و سیصد و چهار

پاسخ: به‌عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود. ■

تمرین:

تمرینات (۱) تا (۸) ساده و اختیاری است. جهت درک بهتر مطالب گفته شده.

(۱) اعداد زیر را به روش مصری بازنویسی کنید.

آ. ۳۵۴ ب. ۲۷۸ ج. ۲۰۰۱۳

(۲) اعداد زیر که به روش مصری نوشته شده‌اند را به روش هندی بازنویسی کنید.

آ. ∩∩∩∩IIII ب. 𓁨𓁨𓆼𓍢 ج. 𓍢𓍢𓂭𓂭𓂭𓂭

(۳) هر یک از اعداد زیر که به روش رمزی و با حروف لاتین نوشته شده‌اند را در دستگاه عددنویسی هندی بازنویسی کنید.

آ. $\phi\lambda\beta$ ب. $\omega\nu\epsilon$ ج. $\psi\xi\lambda$

(۴) عدد مربوط به هر یک از کلمات زیر را براساس دستگاه عددنویسی رمزی مسلمانان بنویسید.

آ. علی ب. سبزه ج. گرگ

د. شیر ه. مزاحم و. گدا

(۵) اعداد زیر را در دستگاه شمار موضعی بابلیان بازنویسی کنید.

آ. ۳۱ ب. ۴۹ ج. ۸۴

د. ۷۷۳ ه. ۲ و. ۶۱

(۶) .اعداد زیر را به فارسی بخوانید

آ. ۳,۶۵۴ ب. ۲۶,۵۴۷,۲۳۸ ج. ۳۴,۲۰۰,۰۰۴,۰۰۰,۰۲۱

(۷) اعداد زیر را در دستگاه عددنویسی هندیان بازنویسی کنید.

آ. دوهزار و هفت ب. سه میلیارد و چهل هزار و هشتاد

ج. یک تریلیارد و هفتاد میلیارد و پانصد میلیون و سی و چهار هزار و بیست ونه

تمرینات (۹) تا (۱۳) مربوط به مبناها است. در درک مطالبی که پیش رو دارید به شما کمک خواهند کرد.

(۸) اعداد زیر را در مبنای ۱۰ بازنویسی کنید.

آ. $(۱۰۱)_۲$ ب. $(۱۰۱)_۳$ ج. $(۱۰۱)_۵$

د. $(۲۱۰)_۵$ ه. $(۲۱۰)_۸$ و. $(۲۱۰)_۳$

(۹) اعداد ۴ و ۵ را در مبنای ۱ بازنویسی کنید. توضیح دهید چرا از مبنای ۱ استفاده نمی‌شود؟

مهم! موارد (آ) تا (ه) بسیار ساده‌اند؛ اما شما را در پاسخ دادن به موارد دیگر یاری خواهند داد.

(۱۰) به سؤالات زیر پاسخ دهید.

آ. کوچکترین عدد ۳ رقمی در مبنای ۵ چند است؟

ب. کوچکترین عدد ۷ رقمی در مبنای ۳ چند است؟

ج. بزرگ‌ترین عدد ۱۰ رقمی درمبنای ۱۳ چند است؟

د. کوچکترین عدد ۱۵ رقمی در مبنای ۲۳ چند است؟

ه. بزرگ‌ترین عدد n رقمی در مبنای k که $k \geq ۲$، را بیابید؟

و. آیا با قراردادن $k = ۱$ در مورد (ه) بزرگ‌ترین عدد n رقمی در مبنای ۱ به‌دست می‌آید؟

ز. کوچکترین عدد n رقمی در مبنای k که $k \geq ۲$ را بیابید؟

ح. آیا با قراردادن $k = ۱$ در مورد (ز) کوچکترین عدد n رقمی در مبنای ۱ به‌دست می‌آید؟

ط. کوچکترین عدد ۱ رقمی در مبنای k که $k \geq ۲$ را با استفاده از مورد (ز) به دست آورید.

ی. کوچکترین و بزرگ‌ترین اعداد صفر رقمی در مبنای k که $k \geq ۲$ را با قرار دادن $n = ۰$ در موارد (ه) و (ز) به‌دست آورید.

(۱۱) توضیح دهید چرا عدد صفر را نمی‌توان یک رقمی درنظر گرفت؟

برای پاسخ دادن به این تمرین می‌توانید از اثبات قضایای ارائه شده کمک بگیرید.

(۱۲) نشان دهید

آ. $(\overline{a_n a_{n-۱} \cdots a_۱ a_۰})_k = \overline{a_n}.k^n + (\overline{a_{n-۱} \cdots a_۱ a_۰})_k$

ب . $(\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0})_k = (\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1})_k \times k + a_0$

ج . اگر $0 \le m < n$ آن‌گاه $(\overline{a_n\cdots a_1 a_0})_k = (\overline{a_n\cdots a_{m+1}})_k \times k^{m+1}) + (\overline{a_m\cdots a_0})_k$

(۱۳) روشی برای نام‌گذاری اعداد، با استفاده از عددنویسی در مبنای ۳ ابداع کنید.

(۱۴) روشی برای نام‌گذاری اعداد با استفاده از عددنویسی در مبنای ۱۶ ابداع کنید.

(۱۵) برای نام‌گذاری اعداد در مبنای ۱۰ روش دیگری بیابید. از روش خود دفاع کنید.

اختیاری!
از پاسخ دادن به تمرینات (۱۳) تا (۱۵) صرفاً لذت ببرید.

۴.۲ مقایسهٔ اعداد چند رقمی

توجه! **توجه!**
صورت قضایا و مثال‌ها برای بیشتر خوانندگان واضح‌اند. اثبات‌ها و پاسخ‌ها را از دست ندهید.

در فصل اول برای مقایسه دو عدد از تناظر یک به یک استفاده کردیم. در آن روش هر عدد، شمار تعدادی از اشیا بود. بنابراین برای مقایسهٔ دو عدد ۶ و ۸ باید دو دسته از اشیا، یکی به تعداد ۶ شیء و دیگری به تعداد ۸ شیء در نظر گرفت و در هر مرحله از هر کدام یک شیء برداریم تا یکی خالی شود. این روش برای مقایسهٔ دو عدد کوچک قابل اجرا است ولی برای مقایسهٔ اعداد بزرگی مانند ۲۳۴۲۱۴۲ و ۳۷۶۸۷۲۶ مناسب نیست. بنابراین، سعی می‌کنیم روشی برای مقایسه دو عدد براساس نوشتار آنها در دستگاه عددنویسی بیابیم. نخست به اعداد تک رقمی توجه می‌کنیم. هر رقم نماینده یک عدد است. پس می‌توانیم آنها را با هم مقایسه کنیم. در مقایسه ارقام داریم:

$$۰ < ۱ < ۲ < ۳ < ۴ < ۵ < ۶ < ۷ < ۸ < ۹$$

برای مقایسهٔ ارقام از همان روش تناظر یک‌به‌یک و تعریف ترتیب روی اعداد طبیعی استفاده می‌کنیم. امروزه اکثر ما ترتیب اعداد یک رقمی را به‌طور ذهنی می‌دانیم و به استفاده از این روش نیازی نداریم. اما این روش تضمین کننده درستی چیزی است که ما در حافظه خود ذخیره کرده‌ایم. در ادامه، از خواص اعداد استفاده کرده و مقایسهٔ اعداد را راحت‌تر انجام می‌دهیم. فرض کنید بخواهیم دو عدد ۲۰۰۰ و ۳۰۰۰ را با هم مقایسه کنیم. به سادگی می‌گوییم:

$۳۰۰۰ = ۳ \times ۱۰^۳$ و $۲۰۰۰ = ۲ \times ۱۰^۳$

و نتیجه می‌گیریم: $۲ < ۳ \Longrightarrow ۲ \times ۱۰^۳ < ۳ \times ۱۰^۳ \Longrightarrow ۲۰۰۰ < ۳۰۰۰$

مبتدی – ضروری
دقیق نوشتن و دقیق استدلال کردن را تمرین کنید؛ زیرا تضمین کنندهٔ درستی استدلال و نتیجه شماست.

مثال ۱۰.۲: فرض کنید $۱ \le b_1 < a_1 < ۱۰$ و نشان دهید $\overline{b_1 b_0} < \overline{a_1 a_0}$

پاسخ: چون $b_0 < ۱۰$ پس داریم: $\overline{b_1 b_0} = b_1 \times ۱۰ + b_0 < b_1 \times ۱۰ + ۱۰ = (b_1 + ۱) \times ۱۰$
از طرفی هم $b_1 < a_1$ و درنتیجه $b_1 + ۱ \le a_1$ پس داریم $(b_1 + ۱) \times ۱۰ \le a_1 \times ۱۰$. بنابراین
$$\overline{b_1 b_0} < (b_1 + ۱) \times ۱۰ \le a_1 \times ۱۰ \le a_1 \times ۱۰ + a_0 = \overline{a_1 a_0}$$
و درنتیجه $\overline{b_1 b_0} < \overline{a_1 a_0}$ ■

سعی کنید خودتان این قضیه را اثبات کنید.

قضیه ۳.۲: اگر $a_n < b_n$ آن‌گاه $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} < \overline{b_n b_{n-1}\cdots b_1 b_0}$

اثبات: بنا به قضیه (۲.۲) داریم $\overline{a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \le ۱۰^n - ۱ < ۱۰^n$ پس:

$$\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} = a_n \times ۱۰^n + \overline{a_{n-1}\cdots a_1 a_0} < a_n \times ۱۰^n + ۱۰^n = (a_n + ۱) \times ۱۰^n$$

و چون $a_n + ۱ \le b_n$ پس: $(a_n + ۱) \times ۱۰^n \le b_n \times ۱۰^n \le b_n \times ۱۰^n + \overline{b_{n-1}\cdots b_1 b_0}$
بنابراین داریم: $\overline{a_n\cdots a_1 a_0} < \overline{b_n\cdots b_1 b_0}$ ■

با استفاده از قضیهٔ فوق و قضیه (۲.۲) برای مقایسهٔ ۳۲۴ و ۳۹۴ گوییم:

$۳۹۴ = ۳ \times ۱۰^۲ + ۹۴$ و $۳۲۴ = ۳ \times ۱۰^۲ + ۲۴$

از مثال (۱۰.۲) داریم $۹۴ > ۲۴$ پس $۳ \times ۱۰^۲ + ۹۴ > ۳ \times ۱۰^۲ + ۲۴$ و درنتیجه $۳۹۴ > ۳۲۴$

برای مقایسه ۳۴۵ و ۴۳۶ از قضیه (۳.۲) استفاده کرده و گوییم چون $۴ > ۳$ پس $۴۳۶ > ۳۴۵$.

مثال ۱۱.۲: اعداد زیر را مقایسه کنید.

آ. ۲۴۳۵۶۷ و ۲۴۳۷۵۶ ب. ۶۷۶۸ و ۶۷۶۷ ج. ۷۶۷۵۲۸ و ۷۶۷۸۲۸

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

قضیه ۴.۲: **اگر x عددی n رقمی و y عددی m رقمی باشد داریم:**
اگر $n < m$ آن‌گاه $x < y$

اثبات: فرض کنید $x = \overline{a_n \cdots a_2 a_1}$ و $y = \overline{b_m \cdots b_2 b_1}$ است که در آنها $a_n \neq ۰$ و $b_m \neq ۰$. پس بنا به قضیه (۲.۲) داریم: $x \leq ۱۰^{n+1} - ۱ < ۱۰^{n+1} \leq ۱۰^m \leq y \Longrightarrow x < y$ ■

به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت اگر $x = \overline{a_n \cdots a_1}$ و $y = \overline{b_n \cdots b_1}$ دو عدد n رقمی باشند (یعنی $a_n \neq ۰$ و $b_n \neq ۰$) و $a_n < b_n$ آن‌گاه $x < y$ و همچنین اگر $a_n = b_n$ و داشته باشیم $\overline{a_{n-1} \cdots a_1} < \overline{b_{n-1} \cdots b_1}$ آن‌گاه $x < y$. اما اگر بدانیم $x < y$، در مورد ارقام این دو عدد n رقمی چه می‌توان گفت؟ در قضیهٔ زیر این مسئله را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۵.۲: **اگر $\overline{a_n \cdots a_1} \leq \overline{b_n \cdots b_1}$ آن‌گاه:**

آ. برای هر k که $۰ \leq k \leq n$ داریم $\overline{a_n \cdots a_k} \leq \overline{b_n \cdots b_k}$

ب. اگر $\overline{a_k \cdots a_0} > \overline{b_k \cdots b_0}$ آن‌گاه $\overline{a_n \cdots a_{k+1}} < \overline{b_n \cdots b_{k+1}}$

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

قضیه ۶.۲: **$\overline{a_n \cdots a_1 a_0} = \overline{b_n \cdots b_1 b_0}$ اگر و تنها اگر برای هر $۰ \leq i \leq n$ داشته باشیم: $a_i = b_i$**

اثبات: اثبات را در سه مرحله انجام می‌دهیم:

آ. می‌دانیم اگر $a_n < b_n$ آن‌گاه $\overline{a_n \cdots a_0} < \overline{b_n \cdots b_0}$ درنتیجه، چون $\overline{a_n \cdots a_0} \not< \overline{b_n \cdots b_0}$ پس $a_n \not< b_n$ و درنتیجه $a_n \geq b_n$. به‌طور مشابه از $\overline{a_n \cdots a_0} \not> \overline{b_n \cdots b_0}$ نتیجه می‌شود $a_n \leq b_n$ و درنتیجه $a_n = b_n$.
بنابراین اگر $\overline{a_n \cdots a_0} = \overline{b_n \cdots b_0}$ آن‌گاه $a_n = b_n$.

ب. داریم $\overline{a_n \cdots a_0} = \overline{b_n \cdots b_0}$ پس $\overline{a_n \cdots a_0} \leq \overline{b_n \cdots b_0}$ و از قضیه (۳.۲) داریم:
اگر $\overline{a_{n-1} \cdots a_0} > \overline{b_{n-1} \cdots b_0}$ آن‌گاه $a_n < b_n$ و چون $a_n \not< b_n$ پس $\overline{a_{n-1} \cdots a_0} \not> \overline{b_{n-1} \cdots b_0}$ و درنتیجه $\overline{a_{n-1} \cdots a_0} \leq \overline{b_{n-1} \cdots b_0}$.
به‌طور مشابه می‌توان نشان داد $\overline{a_{n-1} \cdots a_0} \geq \overline{b_{n-1} \cdots b_0}$. بنابراین اگر $\overline{a_n \cdots a_0} = \overline{b_n \cdots b_0}$ آن‌گاه $\overline{a_{n-1} \cdots a_0} = \overline{b_{n-1} \cdots b_0}$.

ج. بنا به مراحل قبل می‌توانیم از $\overline{a_{n-1} \cdots a_0} = \overline{b_{n-1} \cdots b_0}$ نتیجه بگیریم $a_{n-1} = b_{n-1}$ پس $\overline{a_{n-2} \cdots a_0} = \overline{b_{n-2} \cdots b_0}$ و به‌همین طریق داریم $a_{n-2} = b_{n-2}$ و $a_{n-3} = b_{n-3}$. با ادامهٔ این روند، ثابت می‌شود برای هر i که $۰ \leq i \leq n$ داریم $a_i = b_i$. ■

هر عدد طبیعی نامی است که بر تعدادی نهاده شده است و بنا بر این قضیه، هر عدد به نگارش منحصربه‌فردی اشاره دارد و هر نگارش از این دست نیز عددی منحصربه‌فرد را مشخص می‌سازد. اما

از آنجا که از جایی به‌بعد نام‌گذاری بر اعداد براساس عددنویسی توسعه یافته، برخی از افراد اعداد را با نگارش آنها یکسان درنظر می‌گیرند.

قضایا و مثال‌های فوق باعث می‌شوند برای مقایسه دو عدد از نوشتار آنها استفاده کنیم و فقط به مقایسه ارقام آنها نیاز داشته باشیم. برای استفاده از این روش نیازی نیست اعداد حتما در مبنای دَه نوشته شده باشند. در هر مبنای دلخواه نیز می‌توان این روش را به‌کار برد. قضایای مربوط به مقایسه با استفاده از نمایش اعداد در مبناهای دلخواه را در تمرینات همین بخش مشاهده خواهیم کرد.

۵.۲ حساب

در فصل اول، اعداد را به عنوان شمارِ اشیا شناختیم. با مفاهیم جمع، ضرب، تفریق، تقسیم و همچنین با مفاهیم کوچک‌تری و بزرگ‌تری آشنا شدیم. براساس مفهوم جمع، برای محاسبهٔ حاصل‌جمع $۳ + ۴$ مانند کودکان اول دبستان، ۴ عدد بعد از ۳ را می‌شماریم و چون به ۷ می‌رسیم، نتیجه می‌گیریم $۳ + ۴ = ۷$. براساس تعریف برای محاسبهٔ $۳ + ۴$ می‌نویسیم:

$۳ + ۴ = ۴ + ۳ = ۵ + ۲ = ۶ + ۱ = ۷ + ۰ = ۷$

این روش برای محاسبهٔ حاصل‌جمع اعداد بزرگی مانند $۱۸۷۳۶۲۵۳۸ + ۱۴۵۲۳۶۴$ طولانی، زمان‌بر و البته نشدنی است. در ادامه روش دیگری ارائه می‌دهیم که بسیار سریع‌تر و کم زحمت‌تر است. این روش چندان هم جدید نیست. در دوران دبستان، بدون تحلیل علمی با این روش آشنا شده‌ایم. همچنین با روش تفریق و تقسیم نیز آشنا شده‌ایم. اما دیگر یک کودک دبستانی نیستیم که همه چیز را با تقلید و مشاهده بیاموزیم. لازم است که تحلیل علمی این روش‌ها را نیز فرابگیریم و بدانیم که چه می‌کنیم. با تحلیل علمیِ مقایسهٔ دو عدد پیش از این آشنا شدیم. اکنون سعی می‌کنیم با استفاده از روش عددنویسی و خواص اعداد که پیش از این آموخته‌ایم، راه‌هایی برای جمع، ضرب، تفریق و تقسیم اعداد بزرگ بیابیم که از درستی نتیجه آن نیز مطمئن باشیم. در این روش‌ها سعی می‌کنیم از نمایش دو عدد به نمایش حاصل‌جمع، نمایش حاصل‌ضرب، نمایش حاصل تفریق و نمایش حاصل تقسیم آن اعداد دست یابیم. در ادامه این روش‌ها را به مبناهای دیگر نیز توسعه می‌دهیم.

۱.۵.۲ الگوریتم جمع

واژهٔ «الگوریتم» به‌معنای فن محاسبه به هر شیوهٔ خاص است و از نام خوارزمی، ریاضیدان ایرانی (افغانی) قرن نهم میلادی گرفته شده است. وی کتابی در باب استفاده از ارقام هندی نوشت. در نیمهٔ قرن نوزدهم ترجمه‌ای از این کتاب کشف که چنین شروع می‌شود: بخوانید و لذت ببرید.

«روایت است از الگوریتمی که ...»

که در آن «الخوارزمی» به «الگوریتمی» تبدیل شده است. در قرن دوازدهم کتاب حساب خوارزمی که به عربی نوشته شده بود، به لاتین ترجمه شد. بدین‌ترتیب، حساب خوارزمی که مبتنی بر ارقام هندی و عربی بود و در آن از صفر استفاده می‌شد، الگوریسم (Algorithm) نام گرفت و بعدها در ترجمه آثار انگلیسی به فارسی به «الگوریتم» تبدیل شد. این واژه اسباب گرفتاری بسیاری از نویسندگانی بود که از اواسط قرون سیزدهم تا اواسط قرن پانزدهم به لاتین می‌نوشتند. آنها داستان‌هایی خیالی برای ریشهٔ این کلمه ساختند. در نهایت ریشهٔ آن در اواسط قرن نوزدهم به وسیله یک خاور شناس فرانسوی کشف شد. به احتمال زیاد مترجمان قرن دوازدهم می‌دانستند که این کلمه از نام ریاضیدانی

عربی‌نویس می‌آید اما یک قرن بعد، خوارزمی به کلی به فراموشی سپرده شده بود. از آن پس این واژه برای هر کتابی در زمینهٔ محاسبه با ارقام هندی به‌کار می‌رفت.

حاصل‌جمع دو عدد را می‌توان با شمارش به‌دست آورد؛ اما این روش، برای محاسبهٔ حاصل‌جمع اعداد طبیعی کوچک، مانند اعداد تک‌رقمی، ساده و مناسب است. البته امروزه همهٔ ما حاصل‌جمع اعداد تک‌رقمی را به‌خاطر داشته و نیازی به محاسبهٔ آن نداریم. برای محاسبهٔ حاصل‌جمع اعداد بزرگ که به‌صورت چندرقمی نوشته می‌شوند می‌توان از عددنویسی هندی و خواص جمع و ضرب اعداد طبیعی استفاده کرد. به‌طور مثال برای محاسبهٔ ۳۰۰۰ + ۲۰۰۰ نیازی نیست ۳۰۰۰ شیء را به ۲۰۰۰ شیء افزوده و تعداد آنها را بشماریم. زیرا با استفاده از تعریف (۱.۲) و قضایای فصل اول داریم:

این مطالب به شما در محاسبهٔ ذهنی حاصل‌جمع‌ها کمک خواهد کرد.

$$۲۰۰۰ + ۳۰۰۰ = ۲ \times ۱۰^{۳} + ۳ \times ۱۰^{۳} = (۲+۳) \times ۱۰^{۳} = ۵ \times ۱۰^{۳} = ۵۰۰۰$$

همچنین برای محاسبهٔ حاصل‌جمع ۱۰۰۴ + ۲۰۰۵ گوییم:

$$\begin{aligned} ۱۰۰۴ + ۲۰۰۵ &= (۱۰۰۰ + ۴) + (۲۰۰۰ + ۵) = (۱۰۰۰ + ۲۰۰۰) + (۴ + ۵) \\ &= ۳۰۰۰ + ۹ = ۳۰۰۹ \end{aligned}$$

تساوی $(۴ + ۱۰۰۰) + (۵ + ۲۰۰۰) = (۲۰۰۰ + ۱۰۰۰) + (۵ + ۴)$ نمونه‌ای از تساوی زیر است که با استفاده از خواص جابجایی و شرکت‌پذیری جمع به‌سادگی قابل اثبات است.

$$(x+y)+(w+z) = (x+w)+(y+z)$$

مثال زیر، نحوهٔ استفاده از تساوی فوق را برای محاسبه حاصل‌جمع، نشان می‌دهد.

مثال ۱۲.۲: عبارات زیر را محاسبه کنید.

آ. ۳۰۰۴ + ۳۰۰۳	ب. ۳۴ + ۳۳	ج. ۳۰۰۷ + ۲۰۰۵	د. ۳۷ + ۲۵
ه. ۴۵ + ۳۲۰۰	و. ۲۰ + ۱۰۳	ز. ۲۳۱ + ۱۳۷	ح. ۶۷۸ + ۴۵۶

با دقت بخوانید...
به نحوهٔ استفاده از قضایا و تعاریف توجه کنید.

پاسخ: آ.
$$\begin{aligned} ۳۰۰۳ + ۳۰۰۴ &= (۳۰۰۰ + ۳) + (۳۰۰۰ + ۴) = (۳۰۰۰ + ۳۰۰۰) + (۳ + ۴) \\ &= (۳ + ۳)(۱۰۰۰) + (۳ + ۴) = ۶(۱۰۰۰) + ۷ = ۶۰۰۷ \end{aligned}$$

ب.
$$۳۳ + ۳۴ = (۳۰ + ۳) + (۳۰ + ۴) = (۳۰ + ۳۰) + (۳ + ۴) = ۶۰ + ۷ = ۶۷$$

ج.
$$\begin{aligned} ۲۰۰۵ + ۳۰۰۷ &= (۲۰۰۰ + ۵) + (۳۰۰۰ + ۷) = (۲۰۰۰ + ۳۰۰۰) + (۵ + ۷) \\ &= ۵۰۰۰ + ۱۲ = ۵۰۱۲ \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} ۲۵ + ۳۷ &= (۲۰ + ۵) + (۳۰ + ۷) = (۲۰ + ۳۰) + (۵ + ۷) \\ &= ۵۰ + ۱۲ = ۵۰ + (۱۰ + ۲) = (۵۰ + ۱۰) + ۲ \\ &= (۶۰ + ۲) = ۶۲ \end{aligned}$$

ه.
$$۳۲۰۰ + ۴۵ = ۳(۱۰^{۳}) + ۲(۱۰^{۲}) + ۴(۱۰) + ۵ = ۳۲۴۵$$

و. به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

ز.
$$\begin{aligned} ۱۳۷ + ۲۳۱ &= (۱۳۰ + ۷) + (۲۳۰ + ۱) = (۱۳ + ۲۳)(۱۰) + (۷ + ۱) \\ &= ۳۶(۱۰) + ۸ = ۳۶۸ \end{aligned}$$

ح.
$$\begin{aligned} ۴۵۶ + ۶۷۸ &= (۴۵۰ + ۶) + (۶۷۰ + ۸) = (۴۵۰ + ۶۷۰) + (۶ + ۸) \\ &= (۴۵ + ۶۷)(۱۰) + ۱۴ = (۴۵ + ۶۷)(۱۰) + ۱۰ + ۴ \\ &= (۴۰ + ۶۰)(۱۰) + (۵ + ۷ + ۱)(۱۰) + ۴ = (۶ + ۴)(۱۰۰) + ۱۳(۱۰) + ۴ \\ &= (۶ + ۴)(۱۰۰) + (۱۰ + ۳)(۱۰) + ۴ = (۶ + ۴)(۱۰۰) + ۱۰۰ + ۳۰ + ۴ \\ &= (۶ + ۴ + ۱)(۱۰۰) + ۳۰ + ۴ = ۱۱۰۰ + ۳۴ = ۱۱۳۴ \end{aligned}$$

(مورد آخر را با دقت بیشتری بخوانید.) ■

پیشرفته–اختیاری
با الگوریتم و طریقهٔ به‌دست آوردن آن آشنا شوید.

روش‌هایی را که تاکنون برای جمع دو عدد به‌کار بردیم، در حالت کلی بیان می‌کنیم. در مرحله نخست به حاصل‌جمع دو عدد با تعداد ارقام برابر توجه می‌کنیم و خواهیم دید که برای به‌دست آوردن حاصل‌جمع دو عدد با تعداد ارقام نابرابر نیز می‌توان از همین روش استفاده کرد. فرض کنید $a = \overline{a_n \cdots a_{۱} a_{۰}}$

و $b = \overline{b_n \cdots b_1 b_0}$. چون $a_0, b_0 \leq 9$ پس $a_0 + b_0 \leq 18$ و درنتیجه $a_0 + b_0$ حداکثر دورقمی است. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم:

$$a_0 + b_0 = \overline{d_0 c_0} = d_0 \times 10 + c_0$$

که در آن $0 \leq d_0 \leq 1$. پس:

$$\begin{aligned} a + b = \overline{a_n \cdots a_1 a_0} + \overline{b_n \cdots b_1 b_0} &= (\overline{a_n \cdots a_1} \times 10 + a_0) + (\overline{b_n \cdots b_1} \times 10 + b_0) \\ &= (\overline{a_n \cdots a_1} + \overline{b_n \cdots b_1}) \times 10 + (a_0 + b_0) \\ &= (\overline{a_n \cdots a_1} + \overline{b_n \cdots b_1}) \times 10 + \overline{d_0 c_0} \\ &= (\overline{a_n \cdots a_1} + \overline{b_n \cdots b_1}) \times 10 + d_0 \times 10 + c_0 \\ &= (\overline{a_n \cdots a_1} + \overline{b_n \cdots b_1} + d_0) \times 10 + c_0 \end{aligned}$$

بنابراین، رقم یکان $a + b$ برابر است با c_0. به‌همین طریق رقم دهگان $a + b$ را با محاسبهٔ رقم یکان $\overline{a_n \cdots a_1} + \overline{b_n \cdots b_1} + d_0$ به‌دست می‌آوریم.

$$\overline{a_n \cdots a_1} + \overline{b_n \cdots b_1} + d_0 = (\overline{a_n \cdots a_2} + \overline{b_n \cdots b_2}) \times 10 + (a_1 + b_1 + d_0)$$

بنابراین با فرض $a_1 + b_1 + d_0 = \overline{d_1 c_1}$ داریم:

$$\overline{a_n \cdots a_1} + \overline{b_n \cdots b_1} + d_0 = (\overline{a_n \cdots a_2} + \overline{b_n \cdots b_2} + d_1) \times 10 + c_1$$

پس

$$a + b = (\overline{a_n \cdots a_2} + \overline{b_n \cdots b_2} + d_1) \times 10^2 + \overline{c_1 c_0}$$

با ادامه دادن همین روش مقادیر c_2، c_3، ... و c_n به دست می‌آید. در مرحله آخر داریم:

$$a + b = (a_n + b_n + d_{n-1}) \times 10^n + \overline{c_{n-1} \cdots c_1 c_0}$$

که با فرض $a_n + b_n + d_{n-1} = \overline{d_n c_n}$ داریم:

$$a + b = d_n 10^{n+1} + c_n 10^n + \overline{c_{n-1} \cdots c_1 c_0} = \overline{d_n c_n \cdots c_1 c_0}$$

الگوریتم جمع
جهت خوانندگان علاقه‌مند

روش فوق را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد. هدف، محاسبهٔ c_iها است.

$$\begin{aligned} \overline{d_0 c_0} &= a_0 + b_0 \\ \overline{d_1 c_1} &= a_1 + b_1 + d_0 \\ \overline{d_2 c_2} &= a_2 + b_2 + d_1 \\ &\vdots \\ \overline{d_n c_n} &= a_n + b_n + d_{n-1} \\ \overline{c_{n+1}} &= d_n \end{aligned}$$

با روش فوق می‌توانیم بگوییم:

$$a+b=\overline{c_{n+1}c_n\cdots c_1c_0}$$

چون جمع اعداد تک‌رقمی را می‌دانیم پس می‌توانیم c_iها را به‌دست آوریم. این روش دقیقاً همان روش دبستانی است که در زیر یادآوری می‌شود.

$$\begin{array}{r}۲۴\\+\quad ۱۳\\\hline ۳۷\end{array}\qquad\begin{array}{r}۱۷\\+\quad ۲۸\\\hline ۴۵\end{array}\qquad\begin{array}{r}۱۴۵۶۷\\+\quad ۷۳۲۳۷\\\hline ۸۷۸۰۴\end{array}\qquad\begin{array}{r}۱۴۵۲۶\\+\quad ۴۸۶۹۷\\\hline ۶۳۲۲۳\end{array}$$

می‌توان با روشی مشابه، الگوریتم جمع را به مبناهای مختلف توسعه داد.

تمام موارد در مبنای ۷ هستند تا محاسبهٔ آنها ساده‌تر و سریع‌تر گردد.

مثال ۱۳.۲: حاصل‌جمع‌های زیر را به‌دست آورید.

آ. $(۳)_۷+(۲)_۷$ ب. $(۴)_۷+(۵)_۷$ ج. $(۳۰)_۷+(۲۰)_۷$

د. $(۴۰)_۷+(۵۰)_۷$ ه. $(۴۰)_۷+(۳)_۷$ و. $(۳۰)_۷+(۲۳)_۷$

ز. $(۳۱)_۷+(۲۳)_۷$ ح. $(۳۴)_۷+(۲۵)_۷$ ط. $(۶۴)_۷+(۲۵)_۷$

ی. $(۱۰۱)_۷+(۲۴)_۷$ ک. $(۳۴۲)_۷+(۲۶۵)_۷$ ل. $(۶۵۴)_۷+(۴۳۵)_۷$

پاسخ: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۲.۵.۲ الگوریتم تفریق

در فصل اول $a-b$ را جواب معادلهٔ $x+a=b$ درنظر گرفتیم. بدین‌ترتیب $x\le a$. بنابراین، می‌توانیم اعداد صفر تا a را در x قرار داده، جواب معادله را به‌دست آوریم. به‌طور مثال برای محاسبهٔ ۴ − ۷ با جایگذاری اعداد صفر تا ۷ در x می‌بینیم $x=$ ۳ جواب معادلهٔ $x+$ ۴ = ۷ است و درنتیجه ۳ = ۴ − ۷.

برای محاسبه ۷ − ۱۶، بنا به حاصل‌جمع اعداد تک‌رقمی داریم ۱۶ = ۹ + ۷ پس ۹ = ۷ − ۱۶.

مثال ۱۴.۲: حاصل تفریق‌های زیر را به‌دست آورید

آ. ۹ − ۱۸ ب. ۶ − ۱۴ ج. ۸ − ۱۲

د. ۶ − ۱۳ ه. ۹ − ۱۷ و. ۵ − ۱۱

پاسخ: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

این روش برای تفریق‌هایی مانند ۳۵۷۴−۲۳۵۷۴ مناسب نیست؛ درحالی‌که با توجه به عددنویسی هندی - عربی داریم ۲۰۰۰۰ + ۳۵۷۴ = ۲۳۵۷۴ پس
۲۰۰۰۰ = ۳۵۷۴ − ۲۳۵۷۴ و ۳۵۷۴ = ۲۰۰۰۰ − ۲۳۵۷۴.

همچنین، برای محاسبهٔ ۹۰۰۰ − ۱۲۰۰۰ می‌توان با کمک گرفتن از تعمیم توزیع‌پذیری به تفریق یا با استفاده ازبسته‌های هزارتایی نوشت:

$$۱۲۰۰۰-۹۰۰۰=۱۲(۱۰۰۰)-۹(۱۰۰۰)=(۱۲-۹)(۱۰۰۰)=۳(۱۰۰۰)=۳۰۰۰$$

برای محاسبهٔ ۵ − ۶۸، از آنجا که ۶۸ شامل ۶بستهٔ ۱۰تایی و ۸شیء است، می‌توان ۵شیء را از ۸شیء برداشت و چون ۳ = ۵ − ۸، پس ۶بستهٔ ۱۰تایی و ۳ شیء باقی می‌ماند که تعداد آن با ۶۳ نمایش

داده می‌شود. این محاسبه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$۶۸-۵=(۶۰+۸)-۵=۶۰+(۸-۵)=۶۰+۳=۶۳$$

در استدلال فوق از تساوی زیر استفاده کرده‌ایم که برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و c که $b \geq c$ درست است و $۸ \geq ۵$.

$$(a+b)-c=a+(b-c)$$

مثال ۱۵.۲: حاصل تفریق‌های زیر را به‌صورت ذهنی به‌دست آورید.

آ. $۱۲۹۷-۹۷$	ب. $۱۲۹۷=۱۲۰۰$	ج. $۶۵۸-۴$	د. $۶۱۸-۷$
ه. $۴۸-۹$	و. $۱۴۸-۹$	ز. $۳۶-۲۲$	ح. $۳۶-۱۹$
ط. $۲۴۵-۱۹$	ی. $۲۴۵-۵۴$	ک. $۲۴۵-۵۹$	ل. $۱۲۳۵-۳۹۷$

پاسخ: ب. $۴۱-۱۹=(۴۰+۸)-(۱۰+۹)=(۳۰+۱۸)-(۱۰+۹)=(۳۰-۱۰)+(۱۸-۹)=۲۰+۹=۲۹$
به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

انجام تفریق‌هایی ماند $۳۶-۲۲$ با توجه به عددنویسی و بسته‌های ۱۰تایی و یکی ساده است؛ اما انجام آن با استفاده از خواص اعداد به تساوی زیر نیاز دارد:

$$(a+b)-(c+d)=(a-c)+(b-d); \quad a \geq c \text{ و } b \geq d$$

بدین‌ترتیب داریم:

$$۳۶-۲۲=(۳۰+۶)-(۲۰+۲)=(۳۰-۲۰)+(۶-۲)=۱۰+۴=۱۴$$

مثال ۱۶.۲: حاصل تفریق‌های زیر را به‌دست آورید.

آ. $۴۸-۱۵$	ب. $۴۸-۱۹$	ج. $۱۴۸-۸۹$	د. $۳۴۸-۲۹۹$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

برای محاسبهٔ $a-b$ که در آن $a=\overline{a_n\cdots a_۱a_۰} \geq b=\overline{b_n\cdots b_۱b_۰}$ با ایده گرفتن از پاسخ مثال فوق، به تفریقی از اعداد کوچک‌تر از ۲۰ و تفریقی با حداکثر n رقم می‌رسیم، در حالی که $a-b$ تفریق اعدادی با حداکثر $n+۱$ رقم است و در هر مرحله یکی از ارقام حاصل تفریق را نیز به‌دست می‌آوریم. به‌طور مثال، برای محاسبه حاصل تفریق $۸۴۵۷-۳۲۹۳$ گوییم:

$$\begin{aligned} ۸۴۵۷-۳۲۹۳ &= (۸۴۵۰+۷)-(۳۲۹۰+۳) \\ &= (۸۴۵۰-۳۲۹۰)+(۷-۳) \\ &= (۸۴۵-۳۲۹)\times ۱۰+(۷-۳) \end{aligned}$$

که در آن $۷-۳$ تفرق دو عدد کوچک‌تر از ۲۰ است و $۸۴۵-۳۲۹$ تفریق دو عدد ۳ رقمی در حالی که $۸۴۵۷-۳۲۹۳$ تفریق دو عدد ۴ رقمی بود. در ادامه به محاسبه $۸۴۵-۳۲۹$ می‌پردازیم.

$$۸۴۵-۳۲۹=(۸۴۰+۵)-(۳۲۰+۹)$$

اما این تساوی برای ما مناسب نیست. چون $۹ \ngeq ۵$ بنابراین به شکل زیر عمل می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
۸۴۵ - ۳۲۹ &= (۸۳۰ + ۱۵) - (۳۲۰ + ۹)\\
&= (۸۳۰ - ۳۲۰) + (۱۵ - ۹)\\
&= (۸۳ - ۳۲)(۱۰) + (۱۵ - ۹)\\
&= ((۸۰ + ۳) - (۳۰ + ۲))(۱۰) + (۱۵ - ۹)\\
&= (۸ - ۳)(۱۰۰) + (۳ - ۲)(۱۰) + (۱۵ - ۹)\\
&= ۵(۱۰۰) + ۱(۱۰) + ۶\\
&= ۵۱۶
\end{aligned}
$$

در عبارت فوق، تفریقی ۴رقمی را به تفریقی ۳رقمی تبدیل کرده‌ایم و با ادامه این روند و کاهش ارقام به تفریق اعدادی دورقمی و سپس تک‌رقمی می‌رسیم که به‌صورت ذهنی قابل انجام هستند. بدین‌ترتیب در تفریق فوق داریم:

$$
\begin{aligned}
۸۴۵۷ - ۳۲۹۳ &= (۸۴۵ - ۳۲۹)(۱۰) + (۷ - ۳)\\
&= ۵۱۶(۱۰) + ۴\\
&= ۵۱۶۴
\end{aligned}
$$

پیشرفته - اختیاری
یکبار خواندن آن به تمامی خوانندگان پیشنهاد می‌شود.

فرض کنید $\overline{a_n\cdots a_i} \geq \overline{b_n\cdots b_i}$ برای محاسبهٔ $\overline{a_n\cdots a_i} - \overline{b_n\cdots b_i}$ گوییم:

۱ اگر $a_i \geq b_i$ آن‌گاه

$$
\begin{aligned}
\overline{a_n\cdots a_i} - \overline{b_n\cdots b_i} &= (\overline{a_n\cdots a_{i+۱}} \times ۱۰ + a_i) - (\overline{b_n\cdots b_{i+۱}} \times ۱۰ + b_i)\\
&= (\overline{a_n\cdots a_{i+۱}} - \overline{b_n\cdots b_{i+۱}}) \times ۱۰ + (a_i - b_i)
\end{aligned}
$$

۲ اگر $a_i < b_i$ پس $\overline{a_n\cdots a_{i+۱}} > \overline{b_n\cdots b_{i+۱}}$ و درنتیجه $\overline{a_n\cdots a_{i+۱}} - ۱ \geq \overline{b_n\cdots b_{i+۱}}$ بنابراین قرار می‌دهیم:

$$\overline{a_n\cdots a_i} - \overline{b_n\cdots b_i} = \left((\overline{a_n\cdots a_{i+۱}} - ۱) - \overline{b_n\cdots b_{i+۱}}\right) \times ۱۰ + \left((۱۰ + a_i) - b_i\right)$$

و چون $a_i < b_i$ پس $(۱۰ + a_i) - b_i < ۱۰$. با همین روند می‌توان حاصل عبارات زیر را محاسبه کرد.

$$\overline{a_n\cdots a_{i+۱}} - \overline{b_n\cdots b_{i+۱}} \qquad \text{و} \qquad \left(\overline{a_n\cdots a_{i+۱}} - ۱\right) - \overline{b_n\cdots b_{i+۱}}$$

روش فوق، دقیقاً همان روش دبستانی است و به شکل زیر خلاصه نویسی می‌شود.

$$
\begin{array}{r} ۹۵\\ -\ \ ۴۱\\ \hline ۵۴ \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} ۴۵۸۷۶\\ -\ \ ۲۴۱۳۴\\ \hline ۲۱۷۴۲ \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} ۴۵\\ -\ \ ۲۹\\ \hline ۱۶ \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} ۳۴۵\\ -\ \ ۲۹۸\\ \hline ۰۴۷ \end{array}
$$

۳.۵.۲ الگوریتم ضرب

برای محاسبه ۴ × ۳ باید تعداد اشیاء موجود در ۳ بستهٔ ۴تایی را بشماریم که برابر است با ۴+۴+۴. این روش برای محاسبه حاصل‌ضرب اعداد کوچک (تک‌رقمی) مناسب است اما برای محاسبهٔ ۶ × ۱۰۰ چندان مناسب به نظر نمی رسد. درحالی که با استفاده از خواص ضرب اعداد طبیعی داریم:

$$۱۰۰ \times ۶ = ۶ \times ۱۰۰ = ۶(۱۰۰) = ۶۰۰$$

به‌طور مشابه برای ۱۰۰×۲۹۴ از قضیه (۲.۲) داریم $۲۹۴(۱۰۰)=۲۹۴۰۰$
همچنین، برای محاسبهٔ ۴×۳۵ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}۴\times ۳۵ &= ۴(۳۰+۵)\\ &=(۴\times ۳۰)+(۴\times ۵)\\ &=۱۲۰+۲۰\\ &=۱۴۰\end{aligned}$$

مثال ۱۷.۲: حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

آ. ۴۰×۱۰۰ ب. ۲۰×۳۰۰ ج. ۲×۳۱
د. ۳×۳۲۰ ه. ۵×۴۵ و. ۵۰۰×۳۸۰

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

همچنین، برای محاسبهٔ ۲۷×۳۴ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}۳۴\times ۲۷ &= (۳۰+۴)\times ۲۷\\ &=(۳۰\times ۲۷)+(۴\times ۲۷)\\ &=۸۱۰+۱۰۸\\ &=۹۱۸\end{aligned}$$

به‌طور مشابه برای محاسبهٔ $a+b$ که در آن $a=\overline{a_n\cdots a_۱a_۰}$ و $b=\overline{b_m\cdots b_۱b_۰}$، کافی است حاصل‌ضرب اعداد $\overline{a_n\cdots a_۰}$ را در هر یک از ارقام عدد$\overline{b_m\cdots b_۱b_۰}$ محاسبه کنیم. سپس می‌توانیم با محاسبهٔ حاصل‌جمع $ab_i۱۰^i$ها، حاصل ab را محاسبه می‌کنیم. پس فقط به جستجوی راهی برای محاسبه حاصل‌ضرب اعداد چند رقمی در اعداد تک رقمی می‌پردازیم.

پیشرفته-اختیاری

برای محاسبهٔ $\overline{a_n\cdots a_۱a_۰}\times b_۰$ داریم:

$$\begin{aligned}\overline{a_n\cdots a_۱a_۰}\times b_۰ &= (\overline{a_n\cdots a_۱}\times ۱۰+a_۰)b_۰\\ &=(\overline{a_n\cdots a_۱}\times b_۰)\times ۱۰+(a_۰\times b_۰)\end{aligned}$$

اما از آنجا که $۰\le a_۰,b_۰\le ۹$ پس$۰\le a_۰\times b_۰\le ۸۱$ بنابراین $a_۰\times b_۰$ عددی حداکثر دو رقمی است و می‌توان فرض کرد $a_۰\times b_۰=\overline{d_۰c_۰}$. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}(\overline{a_n\cdots a_۱}\times b_۰)\times ۱۰+(a_۰\times b_۰) &= (\overline{a_n\cdots a_۱}\times b_۰)\times ۱۰+\overline{d_۰a_۰}\\ &=(\overline{a_n\cdots a_۱}\times b_۰)\times ۱۰+d_۰۱۰+c_۰\end{aligned}$$

به‌طور مشابه برای محاسبهٔ $\overline{a_n\cdots a_۱}\times b_۰$ داریم:

$$\overline{a_n\cdots a_۲a_۱}\times b_۰=(\overline{a_n\cdots a_۲}\times b_۰)۱۰+(a_۱\times b_۰)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\overline{a_n\cdots a_۱a_۰}\times b_۰ &= ((\overline{a_n\cdots a_۲}\times b_۰)۱۰+(a_۱\times b_۰))\times ۱۰+d_۰۱۰+c_۰\\ &=(\overline{a_n\cdots a_۲}\times b_۰)۱۰^۲+(a_۱\times b_۰+d_۰)۱۰+c_۰\end{aligned}$$

چون $a_۱\times b_۰\le ۸۱$ و $d_۰\le ۹$ پس $a_۱\times b_۰+d_۰\le ۹۰$ بنابراین می‌توانیم فرض کنیم

$a_1 \times b_0 + d_0$ دارای نگارشی به صورت $\overline{d_1 c_1}$ است. اما در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}(\overline{a_n \cdots a_2} \times b_0)10^2 + (a_1 \times b_0 + d_0)10 + c_0 &= (\overline{a_n \cdots a_2} \times b_0)10^2 + \overline{d_1 c_1} \times 10 + c_0 \\ &= (\overline{a_n \cdots a_2} \times b_0)10^2 + d_1 10^2 + c_1 10 + c_0 \\ &= (\overline{a_n \cdots a_2} \times b_0)10^2 + d_1 10^2 + \overline{c_1 c_0} \\ &= (\overline{a_n \cdots a_2} \times b_0 + d_1)10^2 + \overline{c_1 c_0}\end{aligned}$$

ارقام c_0 و c_1، دقیقاً ارقام حاصل‌ضرب می‌باشند، بنابراین می‌توانیم با ادامه این روند، ارقام دیگر حاصل‌ضرب را نیز به‌دست آوریم. این راه را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\overline{d_0 c_0} &= a_0 \times b_0 \\ \overline{d_1 c_1} &= (a_1 \times b_0) + d_0 \\ \overline{d_2 c_2} &= (a_2 \times b_0) + d_1 \\ &= \vdots \\ \overline{d_n c_n} &= (a_n \times b_0) + d_{n-1} \\ c_{n+1} &= d_n\end{aligned}$$

در روش فوق فرض شده $(a_i \times b_0) + d_{i-1}$ برای $i \geq 1$ دارای نگارشی به صورت $\overline{d_i c_i}$ است. همچنین حاصل $a_0 \times b_0$ را با نگارش $\overline{d_0 c_0}$ فرض کرده‌ایم. در آخر نیز قرار داده‌ایم $d_n = c_{n+1}$. دراین‌صورت بنا به استدلال قبل، داریم: $\overline{a_n \cdots a_1 a_0} \times b_0 = \overline{c_{n+1} c_n \cdots c_1 c_0}$

مبتدی-ضروری

البته باید توجه داشت که d_iها و همچنین c_{n+1} ممکن است صفر باشند.
روند فوق برای محاسبهٔ حاصل‌ضرب ۷ × ۴۷۵۳۶۹ را به شکلی ساده، در جدول زیر بیان می‌کنیم.

۹	۶	۳	۵	۷	۴	
۶۳	۴۲	۲۱	۳۵	۴۹	۲۸	×۷
۶۳	۴۲ + **۶** = **۴۸**	۲۱ + **۴** = **۲۵**	۳۵ + **۲** = **۳۷**	۴۹ + **۳** = **۵۲**	۲۸ + **۵** = **۳۳**	(دهگان ستون سمت راست)+
۳	۸	۵	۷	۲	۳۳	یکان عدد بالایی

این روش به‌سادگی برای محاسبهٔ حاصل‌ضرب هر عدد چندرقمی در یک عدد تک‌رقمی قابل استفاده است. این روش را در دوران دبستان نیز آموخته‌ایم که آن را به شکل زیر می‌نوشتیم:

$$\begin{array}{r} ۲۱ \\ \times \quad ۳ \\ \hline ۶۳ \end{array} \qquad \begin{array}{r} ۳۷ \\ \times \quad ۴ \\ \hline ۱۴۸ \end{array} \qquad \begin{array}{r} ۴۷۵۳۶۹ \\ \times \quad ۷ \\ \hline ۳۳۲۷۵۸۳ \end{array}$$

به‌راحتی می‌توان ضرب دو عدد چند رقمی را به حاصل‌جمع چند حاصل‌ضرب عددی چندرقمی در اعدادی تک‌رقمی تبدیل کرد. به‌طور مثال برای محاسبهٔ ۳۴۷۵ × ۲۹۸۳ از تعریف (۱.۲) و خاصیت

توزیع‌پذیری استفاده کرده و می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}۳۴۷۵ \times ۲۹۸۳ &= ۳۴۷۵ \times (۲ \times ۱۰^۳ + ۹ \times ۱۰^۲ + ۸ \times ۱۰ + ۳)\\ &= (۳۴۷۵ \times ۲) \times ۱۰^۳ + (۳۴۷۵ \times ۹) \times ۱۰^۲ + (۳۴۷۵ \times ۸) \times ۱۰ + (۳۴۷۵ \times ۳)\\ &= ۶۹۵۰ \times ۱۰^۳ + ۳۱۲۷۵ \times ۱۰^۲ + ۲۷۸۰۰ \times ۱۰ + ۱۰۴۲۵\\ &= ۶۹۵۰۰۰۰ + ۳۱۲۷۵۰۰ + ۲۷۸۰۰۰ + ۱۰۴۲۵\\ &= ۱۰۳۶۵۹۲۵\end{aligned}$$

این روش را در دوران دبستان به صورت زیر می‌نوشتیم و از آن استفاده می‌کردیم:

$$\begin{array}{r} ۳۴۷۵\\ \times \quad ۲۹۸۳\\ \hline ۱۰۴۲۵\\ ۲۷۸۰۰\\ ۳۱۲۷۵\\ ۹۹۵۰\\ \hline ۱۰۳۶۵۹۲۵\end{array}$$

به‌طور مشابه، می‌توان برای محاسبهٔ حاصل‌ضرب اعداد در هر مبنای دلخواه نیز، روشی مشابه به دست آورد. با ضرب اعداد در مبناهای مختلف در تمرینات آشنا خواهید شد.

۴.۵.۲ الگوریتم تقسیم

مبتدی–ضروری
محاسبهٔ ذهنی حاصل تقسیم را تمرین کنید.

حاصل $a \div b$ جواب معادلهٔ $xb = a$ است و با استفاده از ضرب اعداد تک‌رقمی می‌توانیم بگوییم $۶ = ۸ \div ۴۸$، چون $۴۸ = ۸ \times ۶$.

همچنین، از $۱۴۰۰ = ۷ \times ۲۰۰$ می‌توان نتیجه گرفت $۲۰۰ = ۷ \div ۱۴۰۰$. همچنین، می‌توان با استفاده از تساوی $(ab) \div c = a(b \div c)$ که با شرط معنادار بودن $b \div c$ درست است و بنویسیم:

$$۱۴۰۰ \div ۷ = (۱۰۰ \times ۱۴) \div ۷ = ۱۰۰(۱۴ \div ۷) = ۱۰۰ \times ۲ = ۲۰۰$$

علاوه براین، می‌توانیم از $۱۴۰۰ = ۷ \times ۲۰۰$ نتیجه بگیریم $۷ = ۲۰۰ \div ۱۴۰۰$. در این مورد نیز با استفاده از تساوی $(ac) \div (bc) = a \div b$ که برای $c \neq ۰$ درست است، می‌نویسیم:

$$۱۴۰۰ \div ۲۰۰ = (۱۴ \times ۱۰۰) \div (۲ \times ۱۰۰) = ۱۴ \div ۲ = ۷$$

مثال ۱۸.۲: حاصل تقسیم‌های زیر را به‌صورت ذهنی به‌دست آورید.

آ. $۴۵ \div ۹$	ب. $۷۲ \div ۸$	ج. $۴۰ \div ۸$
د. $۲۷۰ \div ۳۰$	ه. $۵۶۰۰ \div ۷۰۰$	و. $۶۴۰۰۰ \div ۸۰$
ز. $۲۵۰۰۰ \div ۵$	ح. $۳۶۰۰۰۰ \div ۶۰$	ط. $۴۸۰۰ \div ۶۰۰$

پاسخ: و.
$$\begin{aligned}۶۴۰۰۰ \div ۸۰ &= (۶۴ \times ۱۰^۳) \div (۸ \times ۱۰) = (۶۴ \times ۱۰^۲) \div ۸\\ &= (۶۴ \div ۸) \times ۱۰^۲ = ۸ \times ۱۰^۲ = ۸۰۰\end{aligned}$$

دیگر موارد به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ∎

برای محاسبهٔ $۱۴۵ \div ۵$ گوییم چون $۳۰ \times ۵ = ۱۵۰$ و $۱۵۰ - ۵ = ۱۴۵$ پس:

$$۱۴۵ = ۱۵۰ - ۵ = ۳۰ \times ۵ - ۵ = (۳۰ - ۱) \times ۵ = ۲۹ \times ۵$$

و درنتیجه $۱۴۵ \div ۵ = ۲۹$ یا برای محاسبهٔ $۲۱۷ \div ۷$ چون $۳۰ \times ۷ = ۲۱۰$ پس:

$$۲۱۷ = ۲۱۰ + ۷ = ۳۰ \times ۷ + ۷ = ۳۱ \times ۷$$

بنابراین $۲۱۷ \div ۷ = ۳۱$. در مواردی مانند $۳۹۶ \div ۳$ گوییم:

$$\begin{aligned} ۳۹۶ \div ۳ &= (۳۰۰ + ۹۰ + ۶) \div ۳ \\ &= (۳۰۰ \div ۳) + (۹۰ \div ۳) + (۶ \div ۳) = ۱۰۰ + ۳۰ + ۲ = ۱۳۲ \end{aligned}$$

یا به عبارتی با تقسیم کردن هر یک از ارقام بر ۳، جواب به‌دست آمده است. این روش‌ها برای محاسبات ذهنی نیز کاربرد دارند.

مثال ۱۹.۲: حاصل تقسیم‌های زیر را به صورت ذهنی بیابید.

آ. $۲۷۳ \div ۷$	ب. $۲۴۵ \div ۵$	ج. $۵۴ \div ۳$
د. $۸۷ \div ۳$	ه. $۹۶ \div ۳$	و. $۸۴ \div ۴$
ز. $۱۶۸ \div ۴$	ح. $۴۸۶ \div ۲$	ط. $۲۲۴ \div ۷$
ی. $۱۵۴ \div ۱۴$	ک. $۲۵۳ \div ۲۳$	ل. $۲۷۳ \div ۱۳$

پاسخ: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

اگر در درک روش تقسیم مشکل دارید، این قسمت را با دقت بخوانید.

اما این راه‌ها برای محاسبه حاصل تقسیم اعداد بزرگ چندان جالب نیستند؛ چون بیشتر بر پایه حدس و گمان بوده و ممکن است در برخی موارد حدس زدن سخت باشد. اکنون به بیان روشی می‌پردازیم که نیازی به حدس زدن ندارد. به‌طور مثال برای محاسبهٔ $۸۱ \div ۲۷$، با کم کردن مکرر ۲۷ از ۸۱ داریم:

$$۸۱ - ۲۷ = ۵۴$$
$$۵۴ - ۲۷ = ۲۷$$
$$۲۷ - ۲۷ = ۰$$

بنابراین:

$$۸۱ = ۵۴ + ۲۷ = (۲۷ + ۲۷) + ۲۷ = ۳ \times ۲۷$$

و درنتیجه $۸۱ \div ۲۷ = ۳$. معمولاً آن را به صورت ستونی می‌نویسیم.

$۸۱ \div ۲۷$

۸۱	۲۷
۵۴	۲۷
۲۷	۲۷
۰	

$۵۹۰ \div ۲۹۵$

۵۹۰	۲۹۵
۲۹۵	۲۹۵
۰	

$۲۴۸۱ \div ۸۲۷$

۱۶۵۴	۸۲۷
۸۲۷	۸۲۷
۰	

$۱۰۷۹۲ \div ۳۵۹۷$

۱۰۷۹۱	۳۵۹۷
۷۱۹۴	۳۵۹۷
۳۵۹۷	۳۵۹۷
۰	

اما در روش فوق ممکن است نتیجه این تفریق کردن‌های متوالی به صفر ختم نشود. به‌طور مثال برای محاسبه تقسیم $۸ \div ۵$ این روش را بررسی می‌کنیم. $۸ - ۵ = ۳$ اما $۳ - ۵$ در اعداد طبیعی بی‌معناست چون $۳ < ۵$. یا برای $۳۰ \div ۷$ داریم:

$$۳۰ - ۷ = ۲۳$$
$$۲۳ - ۷ = ۱۶$$
$$۱۶ - ۷ = ۹$$
$$۹ - ۷ = ۲$$

اما $۲ < ۷$ و درنتیجه $۲ - ۷$ در اعداد طبیعی بی‌معناست. اما داریم $۳۰ = (۴ \times ۷) + ۲$ که در آن ۴ را خارج‌قسمت (آنچه از تقسیم خارج شده و «حاصل تقسیم» است) و ۲ را «باقی‌مانده تقسیم» می‌خوانیم. خارج‌قسمت و باقی‌مانده را می‌توانیم به صورت زیر تعریف کنیم:

تعریف ۳.۲: **اگر $a = q.b + r$ که در آن $۰ \le r < b$، آن‌گاه q را خارج‌قسمت و r را باقی‌مانده تقسیمِ $a \div b$ می‌خوانیم.**

مثال ۲۰.۲: باقی‌مانده و خارج‌قسمت هریک از تقسیم‌های زیر را بیابید.

آ. $۱۶ \div ۵$ ب. $۳۱ \div ۳$ ج. $۲۱۲ \div ۷$
د. $۳۴ \div ۸$ ه. $۶۰۰۲ \div ۶$ و. $۵۲۰ \div ۵۱$

پاسخ: (راهنمایی: از خواص اعداد استفاده کنید). ■

اگر خارج‌قسمت عدد بزرگی باشد، استفاده از روش تفریق متوالی چندان جالب نیست. اما با یک تکنیک ساده می‌توانیم این مشکل را برطرف کنیم.

۱۳۴۵	−۵۷۰
۷۷۵	−۵۷۰
۲۰۵	−۵۷
۱۴۸	−۵۷
۹۱	−۵۷
۳۴	

برای محاسبه حاصل $a \div b$ می‌توانیم به‌جای کم کردن مکررِ b از a به کم کردن مکرر $۱۰^n b$ از a بپردازیم. به‌طور مثال برای محاسبهٔ $۱۳۵۴ \div ۵۷$ می‌توانیم به شکل مقابل عمل کنیم. چون $۱۰ \times ۵۷ = ۵۷۰ < ۱۳۴۵$ و $۱۳۴۵ < ۵۷۰۰ = ۵۷ \times ۱۰^۲$ پس ۱۳۴۵ را منهای ۵۷۰ می‌کنیم تا به ۲۰۵ می‌رسیم. اما چون $۲۰۵ < ۵۷۰$ پس $۲۰۵ - ۵۷۰$ در اعداد طبیعی بی‌معناست. بنابراین از این پس ۲۰۵ را منهای $۵۷ = ۱۰^۱ \times ۵۷$ می‌کنیم و به ۳۴ می‌رسیم. چون $۳۴ < ۵۷$ پس دیگر نمی‌توان تفریق را ادامه داد و این روش متوقف می‌شود. بنابراین داریم:

$$
\begin{aligned}
۱۳۴۵ &= ۵۷۰ + ۵۷۰ + ۵۷ + ۵۷ + ۵۷ + ۳۴ \\
&= (۲ \times ۵۷ \times ۱۰) + (۳ \times ۵۷) + ۳۴ \\
&= (۲۰ + ۳) \times ۵۷ + ۳۴ \\
&= ۲۳ \times ۵۷ + ۳۴
\end{aligned}
$$

پس خارج‌قسمت این تقسیم ۲۳ و باقیماندهٔ آن ۳۴ است.

۴۷۴۳	۷۵
۴۵۶۰	۸۰
۱۸۳	
۱۷۱	۳
۲۱	۸۳

می‌توان از ضرب اعداد تک‌رقمی استفاده کرده و روشی سریع‌تر به‌دست آورد. به‌طور مثال برای تقسیم $۴۷۴۳ \div ۵۷$ چون $۵۷۰ = ۱۰^۱ \times ۵۷ < ۴۷۴۳$ و $۴۷۴۳ < ۵۷۰۰ = ۱۰^۲ \times ۵۷$ پس کافی است بزرگ‌ترین عدد طبیعی a را بیابیم که $a \times ۵۷۰ \le ۴۷۴۳$ و با حدس‌هایی مناسب $a = ۸$ به دست می‌آید. $(۸ \times ۵۷۰) - ۴۷۴۳$ را محاسبه می‌کنیم: $۴۷۴۳ - (۸ \times ۵۷۰) = ۴۷۴۳ - ۴۵۶۰ = ۱۸۳$ در ادامه بزرگ‌ترین عدد a را چنان می‌یابیم که $(۵۷ \times ۱۰^۰) \times a \le ۱۸۳$ با اندکی تأمل مقدار $a = ۳$ به‌دست می‌آید. پس تفریق زیر را انجام می‌دهیم: $۱۸۳ - (۳ \times ۵۷) = ۱۸۳ - ۱۷۱ = ۲۱$
بنابراین داریم:

$$۴۷۴۳ = (۸ \times ۱۰ \times ۵۷) + (۳ \times ۵۷) + ۲۱ = (۸۰ + ۳) \times ۵۷ + ۲۱ = ۸۳ \times ۵۷ + ۲۱$$

۲۷۶	۱۲
۲۴۰	۲۰
۰۳۶	۳
۳۶	
۰۰	۲۳

یعنی $۴۷۴۳ = ۸۳ \times ۵۷ + ۲۱$ و چون $۱۲ < ۵۷$، پس خارج‌قسمت تقسیم ۲۳ و باقیماندهٔ آن ۱۲ می‌باشد. این روش را می‌توان به صورت جدول روبه‌رو خلاصه کرد و انجام آن را ساده‌تر نمود. به‌طور مشابه می‌توان حاصل $۲۷۶ \div ۱۲$ را نیز به همین روش، با جدول مجاور به‌دست آورد.

برای تقسیم $a = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}$ بر عددی $k+1$رقمی مانند $b = \overline{b_k \cdots b_1 b_0}$، با قرار دادن $t_{n-k} = \overline{a_n \cdots a_{n-k}}$ به تعداد ارقام b از سمت چپ از ارقام a جدا می‌کنیم. با توجه به تعداد ارقام، $t_{n-k} < 10b$ و درنتیجه اگر q_{n-k} و r_{n-k} به‌ترتیب خارج قسمت و باقی‌مانده تقسیم t_{n-k} بر b باشند، آن‌گاه $0 \le q_{n-k} \le 9$ و $0 \le r_{n-k} \le b-1$.

به‌طور مشابه برای هر عدد طبیعی مانند i که $0 \le i \le n-k$ قرار می‌دهیم $t_i = \overline{a_n \cdots a_i}$. بدین‌ترتیب اگر r_i و q_i، به ترتیب باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم t_i بر b باشند داریم:

$$\begin{aligned} t_{i-1} &= 10\,t_i + a_i = 10(q_i b + r_i) + a_{i-1} \\ &= 10\,q_i b + (10\,r_i + a_{i-1}) \end{aligned}$$

بدین‌ترتیب، اگر خارج قسمت و باقی‌مانده تقسیم $10r_i + ai - 1$ بر b را به‌ترتیب با s_{i-1} و r_{i-1} نمایش دهیم، داریم:

$$t_{i-1} = 10\,q_i b + s_{i-1} b + r_{i-1} = (10\,q_i + s_{i-1})b + r_{i-1}$$

بنابراین، $q_{i-1} = 10\,q_i + s_{i-1}$ و درنتیجه

$$\begin{aligned} q_0 &= 10\,q_1 + s_0 \\ &= 10(10\,q_2 + s_1) + s_0 = 10^2 q_2 + 10\,s_1 + s_0 \\ &= 10^2(10\,q_3 + s_2) + 10\,s_1 + s_0 = 10^3 q_3 + 10^2 s_2 + 10^1 s_1 + 10^0 s_0 \\ &\vdots \\ &= 10^{n-k} q_{n-k} + 10^{n-k-1} s_{n-k-1} + \cdots + 10\,\mathrm{S}_1 + s_0 \\ &= \overline{q_{n-k} s_{n-k-1} \cdots s_1 s_0} \end{aligned}$$

۲	۷	۰	۸	۲	۹	۱	۰	۷	
۲	۱	۴				۲			
۰	۵	۶	۸				۵		
	۵	۳	۵						
	۰	۳	۳	۲				۳	
		۳	۲	۱					
		۰	۱	۱	۹				۱
			۱	۰	۷				
			۰	۱	۲				

روش فوق دقیقاً همان روش دبستانی است. در تقسیم روبه‌رو، خارج‌قسمت ۲۵۳۱ و باقی‌مانده نیز ۱۲ است. البته در روش دبستانی معمولاً همهٔ اعداد سمت راست (که زیر ۱۰۷ نوشته شده‌اند) را در کنار هم می‌نوشتیم. اما در این جدول برای اینکه ارتباط آن با مطالب قبل خود را بیشتر نشان دهد از این روش استفاده کرده‌ایم.

مثال ۲.۲۱: فرض کنید q خارج‌قسمت تقسیم a بر b است که $b \neq 0$. نشان دهید:

آ. نامعادلهٔ $xb \le a$ یک جواب دارد.

ب. اگر y جواب نامعادلهٔ $xb \le a$ نباشد، هیچ عددی بزرگ‌تر از y نیز جواب آن نیست.

ج. q جواب $xb \le a$ است.

د. q بزرگ‌ترین جواب نامعادلهٔ $xb \le a$ است.

پاسخ: **د**. اگر $x \not\le q$، پس $q < x$ و درنتیجه $q + 1 \le x$. بنابراین$bq + b = b(q+1) \le bx \le a$ و درنتیجه $b \le a - bq = r$ که غیرممکن است، چون $r < b$.

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

قضیه ۷.۲: باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم منحصربه‌فرد هستند.

اثبات: با توجه به مثال فوق، در تقسیم a بر b خارج‌قسمت یکتاست پس باقی‌مانده نیز منحصربه‌فرد است. برای $b = ۰$ نیز عذذی مانند r وجود ندارد که $۰ \leq r < b$ و البته تقسیم بر صفر نیز بی‌معناست. ■

۵.۵.۲ عددنویسی در مبناهای مختلف

در قضیه (۱.۲) دیدیم که اگر x در مبنای k دارای نگارشی چون $x = (\overline{b_m \cdots b_۱ b_۰})_k$ باشد، داریم:

$$x = (\overline{b_m \cdots b_۱})_k \times k + b_۰$$

بنابراین $b_۰$ برابر است با باقی‌مانده تقسیم x بر k و $(\overline{b_m \cdots b_۱})_k$ نیز برابر است با خارج‌قسمت تقسیم x بر k. به‌طور مشابه، می‌توان گفت $b_۱$ نیز برابر است با باقی‌مانده تقسیم $(\overline{b_m \cdots b_۱})_k$ بر k که خارج‌قسمت این تقسیم خواهد شد $(\overline{b_m \cdots b_۲})_k$. مثال زیر در درک این مطلب به شما کمک خواهد کرد.

مثال ۲۲.۲: اعداد زیر که در مبنای ۱۰ نوشته شده‌اند را در مبنای داده شده بنویسید.

آ. ۱۳ را در مبنای ۳ بنویسید. ب. ۲۳۴ را در مبنای ۷ بنویسید.

ج. ۲۵ را در مبنای ۲ بنویسید. د. ۱۲۵ را در مبنای ۵ بنویسید.

پاسخ: فقط مورد (آ) را به تفصیل توضیح می‌دهیم و دیگر موارد را به خواننده واگذار می‌کنیم.

آ. فرض کنیم ۱۳ در مبنای ۳ به صورت $(\overline{a_n \cdots a_۱ a_۰})_۳$ نوشته شود. در این صورت $a_۰$ برابر است با باقی‌مانده تقسیم ۱۳ بر ۳ که برابر است با ۱ و خارج‌قسمت آن برابر است با ۴ بنابر این

$$۱۳ = ۴ \times ۳ + ۱ = (۱ \times ۳ + ۱) \times ۳ + ۱ = ۱ \times ۳^۲ + ۱ \times ۳ + ۱ = (۱۱۱)_۳$$ ■

توجه! توجه!
تمرینات این بخش بسیار ساده‌اند. پاسخ‌دادن به این تمرینات الزامی نیست.

تمرین:

(۱۶) اعداد زیر را با هم مقایسه کنید.

آ. ۲۵۷و ۵۸ ب. ۱۹۶ و ۴۲۵ ج. ۲۳۴,۹۴۹,۲۲۲ و ۸۹,۷۳۲,۱۲۳

(۱۷) اعداد زیر را بدون انتقال به مبنای ۱۰ با هم مقایسه کنید.

آ. $(۲۳۱)_۴$ و $(۳۲۳)_۴$ ب. $(۳۱۴)_۷$ و $(۳۵)_۷$ ج. $(۴۱۵)_۸$ و $(۱۴۰)_۸$

د. $(۱۲۳)_۴$ و $(۱۲۳)_۵$ ه. $(۲۰۰۱)_۸$ و $(۵۵۵۵)_۶$ و. $(۳۰)_۹$ و $(۳۰۰)_۴$

(۱۸) x و y به ترتیب اعدادی ۴ و ۵ رقمی در مبنای ۷ هستند. کدامیک بزرگ‌تر است؟

(۱۹) عددی ۳ رقمی در مبنای ۵ مانند x و عددی ۴ رقمی در مبنای ۴ مانند y چنان مثال بزنید که داشته باشیم $x>y$.

(۲۰) قضیه (۲.۲) را به مبنای k تعمیم دهید. (k می‌تواند هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ باشد.)

(۲۱) قضیه (۵.۲) را به مبنای k توسعه دهید.

(۲۲) قضیه (۶.۲) را به مبنای k توسعه دهید.

(۲۳) اعداد زیر را با هم جمع کنید

آ. ۲۴ + ۳۵ ب. ۸۷ + ۳۹ ج. ۲۴۵ + ۶۸

(۲۴) اعداد زیر را با هم جمع کنید (بدون انتقال به مبنای ۱۰).

آ. $(۳۲۱)_{۴} + (۲۲۳)_{۴}$ ب. $(۵۴۷۶)_{۹} + (۱۳۵۲)_{۹}$

(۲۵) حاصل تفریق‌های زیر را محاسبه کنید

آ. $۵۴ - ۱۳$ ب. $۶۳ - ۳۷$ ج. $۱۴۶ - ۹۸$

د. $۲۸۴ - ۲۷۳$ ه. $۱۵۶ - ۶۷$ و. $۳۴۲۵ - ۱۶۳۶$

(۲۶) حاصل تفریق‌های زیر را محاسبه کنید (بدون انتقال به مبنای ۱۰).

آ. $(۴۲۱)_{۵} - (۳۴۳)_{۵}$ ب. $(۴۷۳۲)_{۸} - (۱۵۷۳)_{۸}$

ج. $(۳۲)_{۷} + (۴۲)_{۷}$ د. $(۵۵)_{۶} - (۳۲)_{۶}$

ه. $(۴۵۲۱)_{۸} + (۳۷۴۲)_{۸}$

(۲۷) حاصل ضرب‌های زیر را به‌دست آورید.

آ. ۲۵×۷ ب. ۳۸×۹۸ ج. ۱۴۷×۲۹۸

د. ۴۵۶×۱۹۵ ه. ۳۵×۴۷۵ و. ۲۶×۳۲

(۲۸) حاصل ضرب‌های زیر را به‌دست آورید (بدون انتقال به مبنای ۱۰).

آ. $(۳)_{۵} \times (۴)_{۵}$ ب. $(۲)_{۳} \times (۲)_{۳}$ ج. $(۲۳)_{۴} \times (۳)_{۴}$

د. $(۲۵)_{۷} \times (۴)_{۷}$ ه. $(۱۰۱)_{۲} \times (۱۱)_{۲}$ و. $(۱۰۱)_{۳} \times (۱۱)_{۳}$

ز. $(۲۱۳)_{۴} \times (۳۲)_{۴}$ ح. $(۲۱۳)_{۷} \times (۳۲)_{۷}$ ط. $(۴۲۱)_{۵} \times (۴۳۱)_{۵}$

(۲۹) خارج‌قسمت و باقیماندهٔ تقسیم‌های زیر را به‌دست آورید.

آ. $۲۳ \div ۲۵$ ب. $۱۴ \div ۸$ ج. $۱۲۳ \div ۳$

د. $۴۵۹۳ \div ۶۷۸$ ه. $۸۷۸۷۸۷۸ \div ۳۶۳۶۳$ و. $۴۹۴۹۴۹۴ \div ۵$

(۳۰) اعداد زیر را در مبنای خواسته شده بازنویسی کنید.

آ. ۳۴ در مبنای ۵ ب. ۱۲ در مبنای ۱۶ ج. ۹۰۸ در مبنای ۷

د. ۳۸۱ در مبنای ۱۶ ه. ۸۰ در مبنای ۸ و. ۶۴ در مبنای ۴

(۳۱) خارج‌قسمت و باقیماندهٔ تقسیم‌های زیر را به‌دست آورید.

آ. $(۲۳)_{۷} \div (۱۰)_{۷}$ ب. $(۱۳)_{۷} \div (۵)_{۷}$ ج. $(۴۳)_{۷} \div (۳۴)_{۷}$

د. $(۱۰۰۱)_{۲} \div (۱۰۰)_{۲}$ ه. $(۵۴۶۳)_{۸} \div (۱۵)_{۸}$ و. $(۱۹۹۲)_{۱۶} \div (A۳)_{۱۶}$

پیشرفته–اختیاری
تمرینات(۳۵) تا (۳۹) صرفا برای خوانندگان علاقه‌مند ارائه شده‌اند.

(۳۲) روشی برای محاسبهٔ $(\overline{a_n \cdots a_۱ a_۰})_k + (\overline{b_n \cdots b_۱ b_۰})_k$ بیابید. (بدون انتقال به مبنای ۱۰)

(۳۳) روشی برای محاسبهٔ $(\overline{a_n \cdots a_۱ a_۰})_k - (\overline{b_m \cdots b_۱ b_۰})_k$ بیابید. (بدون انتقال به مبنای ۱۰)

(۳۴) روشی برای محاسبهٔ $(\overline{a_n \cdots a_۱ a_۰})_k \times (b_۰)_k$ بیابید. (بدون انتقال به مبنای ۱۰)

(۳۵) روشی برای محاسبهٔ $(\overline{a_n \cdots a_۱ a_۰})_k \times (\overline{b_m \cdots b_۱ b_۰})_k$ بیابید. (بدون انتقال به مبنای ۱۰)

(۳۶) روشی برای محاسبهٔ $(\overline{a_n \cdots a_۱ a_۰})_k \div (\overline{b_m \cdots b_۱ b_۰})_k$ بیابید. (بدون انتقال به مبنای ۱۰)

۶.۲ بخش‌پذیری و شمارش

سه مفهوم «مضرب»، «بخش‌پذیری» و «شمارش»، با تعاریف متفاوت بیان شده، اما معمولاً یکسان درنظر گرفته می‌شوند.

۱ a مضرب (حاصل‌ضربی از) b است اگر عددی طبیعی مانند q باشد که $bq = a$.

۲ a بر b بخش‌پذیر است اگر باقی‌مانده تقسیم a بر b، صفر باشد.

۳ مقدار a مقدار b را می شمارد اگر عددی طبیعی و منحصربه‌فرد مانند q باشد که $a = q(b)$.

مثال زیر به درک بهتر این مفاهیم کمک می‌کند.

مثال ۲.۲۳: درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. صفر مضربی از صفر است. ب. صفر مضربی از ۳ است.
ج. صفر بر صفر بخش‌پذیر است. د. صفر بر ۳ بخش‌پذیر است.
ه. صفر، صفر را می‌شمارد. و. ۳ صفر را می‌شمارد.

پاسخ: موارد (آ) و (ب) درست هستند؛ چون $0 = 3 \times 0$ پس صفر هم مضرب صفر و هم مضرب ۳ است.
ج. نادرست است؛ چون تقسیم بر صفر بی‌معناست.
د. درست است؛ چون $0 + 3 \times 0 = 0$.
ه. نادرست است؛ چون برای هر عدد طبیعی مانند q داریم $q \times 0 = 0$، پس q منحصربه‌فرد نیست.
و. برای $q = 0$ داریم $q \times 0 = 0$ پس ۳، صفر را می‌شمارد. ■

واضح است که جملات زیر برای هر دو عدد طبیعی و ناصفر مانند a و b معادلند.

- a بر b بخش‌پذیر است یا b مقسومٌ‌علیه a است.
- a مضربی از b است.
- b می‌شمارد a را یا b عاد می‌کند a را.

البته امروزه در تمامی کتاب‌های ریاضی، هر سه عبارت فوق به‌معنای «a مضرب b است» به‌کار می‌رود و به‌صورت $b \mid a$ نمایش داده شده و معمولاً به‌صورت «b عاد می‌کند a را» یا «b، a را می‌شمارد» خوانده می‌شود.

این مفاهیم در زمان یونان باستان به‌وجود آمده‌اند؛ یعنی قرن‌ها پیش از پیدایش صفر. در آن زمان معادل بوده‌اند و بعدها نیز بدون توجه به صفر، معادل درنظر گرفته شده‌اند. اما باید توجه کرد امروزه عباراتی مانند «a بر b بخش‌پذیر است» و «b مقسومٌ‌علیه a است» نیز به‌معنای «a مضرب b است» به‌کار می‌رود.

تعریف ۲.۴: **برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b که عددی طبیعی مانند c وجود داشته باشد که $a = bc$، می‌نویسیم $b \mid a$ و آن را با هر یک از عبارات زیر می‌خوانیم:**
a بر b بخش‌پذیر است. b مقسومٌ‌علیه a است. b عاد می‌کند a را.
b می‌شمارد a را. a مضربی از b است.

با دقت بخوانید...
صورت مثال از پاسخ آن مهم‌تر است. پاسخ‌دادن به این مثال، به ماندگاری آن در ذهن کمک می‌کند.

مثال ۲.۲۴: نشان دهید برای هر عدد طبیعی مانند a داریم :

آ. $a \mid 0$، $1 \mid a$ و $a \mid a$
ب. $0 \mid a$ اگر و تنها اگر $a = 0$
ج. اگر $a \mid b$ و $b \mid c$ آن‌گاه $a \mid c$.
د. اگر $a \mid c$ و $a \mid b$ آن‌گاه $a \mid b + c$.
ه. اگر $a \mid b$ و $a \mid c$ و $b \geq c$، آن‌گاه $a \mid b - c$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

گزاره ۲.۱: **d مقسومٌ‌علیه a است اگر $d \mid a$، و d مقسومٌ‌علیه مشترک a و b است اگر $d \mid a$ و $d \mid b$**

مثال ۲.۲۵: تمام مقسومٌ‌علیه‌های مشترک جفت اعداد زیر را بیابید.

آ. ۱۲ و ۶ ب. ۱۲ و ۱۸ ج. ۶ و صفر د. ۱۲ و ۸

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۲.۲۶: نشان دهید هر مقسومٌ‌علیه مشترک a و b که $b \neq ۰$، مقسومٌ‌علیه باقی‌مانده تقسیم a بر b است.

پاسخ: فرض کنید $d \mid a$ و $d \mid b$، و همچنین q و r چنان است که $a = qb + r$. در این صورت $r = a - qb$ و چون $d \mid a$ و $d \mid qb$، پس $d \mid r$؛ (بنا به مثال‌های قبل) ■

اجازه دهید قرار دهیم $r_۰ = a$ و $r_۱ = b$، و برای هر عدد طبیعی مانند i ، باقی‌مانده تقسیم r_i بر $r_{i+۱}$ را $r_{i+۲}$ بنامیم. به‌طور مثال برای $a = ۱۸$ و $b = ۱۲$ قرار می‌دهیم:

$$r_۰ = ۱۸$$
$$r_۱ = ۱۲$$
$$r_۲ = ۱۸ - ۱ \times ۱۲ = ۶$$
$$r_۳ = ۱۲ - ۲ \times ۶ = ۰$$

با توجه به مثال فوق، هر مقسوم علیه مشترک ۱۸ و ۱۲، مقسوم‌علیه ۶ است و چون ۶ نیز مقسوم‌علیه مشترک ۱۲ و ۱۸ است، پس ۶ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک ۱۲ و ۱۸ است.

مثال فوق این ایده را مطرح می‌کند که بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک را به صورت زیر تعریف کرده و با تقسیم‌های متوالیِ بر باقی‌مانده تقسیم قبلی، آن را به‌دست آوریم.

تعریف ۲.۵: برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b که هر دو صفر نباشند، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b را به اختصار «ب‌م‌م a و b» خوانده و به‌صورت (a,b) نمایش می‌دهیم و آن را عددی طبیعی مانند d درنظر می‌گیریم که:

آ. $d \mid a$ و $d \mid b$ ب. برای هر x که $x \mid a$ و $x \mid b$، داریم $x \mid d$.

مثال ۲.۲۷: مقادیر زیر را به‌دست آورید.

آ. $(۱۴, ۲۱)$ ب. $(۳۶, ۷۵)$ ج. $(۶۷۵, ۵۲۵)$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۲.۲۸: نشان دهید برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b که هر دو صفر نباشند داریم:

آ. $(a, b) = (a, b + a)$ ب. $(a, b) = (a, na + b)$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود. ■

مثال ۲.۲۹: نشان دهید برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b که هر دو صفر نباشند، اعدادی طبیعی مانند m و n وجود دارند که: $(a, b) = ma - nb$ یا $(a, b) = mb - na$

پاسخ: فرض کنید هر یک از اعداد x و y به یکی از دو شکل $ma-nb$ یا $mb-na$ قابل بیان هستند. کافی است نشان دهیم:

آ . باقی‌مانده تقسیم x بر y نیز به یکی از این دو شکل قابل بیان است.

ب . اگر x عددی از این دست و D کوچک‌ترین عدد از این دست باشد، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم x بر d برابر است با صفر؛ چون در غیر این‌صورت باقی‌مانده عددی است از این دست که کوچک‌تر از D است و این غیرممکن است.

ج . $a \mid \mathrm{D}$ و $b \mid \mathrm{D}$ و همچنین اگر $d \mid a$ و $d \mid b$، آن‌گاه $d \mid \mathrm{D}$.

بدین‌ترتیب، (a,b) عددی است که به یکی از این دو روش قابل بیان است. ■

۱.۶.۲ اول بودن نسبت به هم

اول بودن را به زبان ساده به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

دو عدد a و b را نسبت به هم اول گوییم اگر مقسم‌علیه مشترک نداشته باشند.

اما می‌دانیم که به ازای هر دو عدد طبیعی مانند a و b، داریم $a \mid ۱$ و $b \mid ۱$. بنابراین، با تعریف فوق، هیچ دو عددی نسبت به هم اول نیستند. برای رفع این مشکل، عبارت زیر را پیشنهاد می‌کنیم.

a و b نسبت به هم اول هستند اگر تنها مقسوم علیه مشترک آنها ۱ باشد.

این پیشنهاد مناسب به نظر می‌رسد؛ اما می‌توان آن را با عبارتی ساده‌تر نیز نشان داد.

تعریف ۶.۲: دو عدد a و b را نسبت به هم اول گویند اگر $(a,b)=۱$

قضیهٔ زیر و کاربردهای آن، اهمیت تعریف فوق را نشان می‌دهد.

قضیه ۸.۲: اگر $(a,b)=۱$ و $k \mid a$ آن‌گاه $(k,b)=۱$

اثبات: اگر $(k,b)=d$ پس $d \mid k$ چون $k \mid a$ پس $d \mid a$.
بنابراین $d \mid a$ و $d \mid b$ و درنتیجه $d \mid (a,b)=۱$. پس $d=۱$. ■

با توجه به مثال (۲۹.۲)، فرض کنید $(a,b)=ma-nb=۱$. در این صورت $c=c۱=c(ma-nb)=cma-nbc$ و چون $a \mid mac$، پس اگر $a \mid bc$ آن‌گاه $a \mid c$.

قضیه ۹.۲: اگر $(a,b)=۱$ و $a \mid b.c$ آن‌گاه $a \mid c$

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذر می‌شود. ■

قضیه ۱۰.۲: هرگاه b و c نسبت به a اول باشند، bc نیز نسبت به a اول است.

اثبات: فرض کنید $(a,bc)=k$ در این صورت $k \mid a$ و $k \mid bc$.
چون $k \mid a$ و $(a,b)=۱$، از مثال قبل داریم $(k,b)=۱$.
همچنین، چون $k \mid bc$ و $(k,b)=۱$، بنا به قضیهٔ قبل داریم $k \mid c$.
بنابراین، چون $k \mid a$ و $k \mid c$، پس $k \mid (a,c)=۱$ و درنتیجه $k=۱$. ■

مثال ۳۰.۲: نشان دهید برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b که هر دو صفر نباشند داریم:
$$\left(\frac{a}{(a,b)},\frac{b}{(a,b)}\right)=۱$$

پاسخ: برای $d = \left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}\right)$ داریم $d(a,b) \mid a$ و $d(a,b) \mid b$ پس $d(a,b) \mid (a,b)$ و $d = 1$. ■

۲.۶.۲ ک‌م‌م

«ک‌م‌م» مخفف «کوچک‌ترین مضرب مشترک» است. کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد طبیعی مانند a و b را «ک‌م‌م a و b» خوانده و به‌صورت $[a,b]$ نمایش می‌دهیم.

اگر k چنان باشد که $a \mid k$ و $b \mid k$، آنگاه k مضرب مشترکی از a و b است. در این‌صورت اگر قرار دهیم $a' = a \div (a,b)$ و $b' = b \div (a,b)$، داریم:

$$b\Big|k \Longrightarrow b'(a,b)\Big|\frac{k}{a}a'(a,b) \Longrightarrow b'\Big|\frac{k}{a}a' \xrightarrow{(b',a')=1} b'\Big|\frac{k}{a} \Longrightarrow b'a\Big|k \Longrightarrow b'a'(a,b)\Big|k$$

بدین‌ترتیب، هر مضرب مشترک a و b، بر $a'b'(a,b)$ بخش‌پذیر است و از طرفی $a\big|a'b'(a,b)$ و $b\big|a'b'(a,b)$. بنابراین، به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت $[a,b] = a'b'(a,b) = \frac{ab}{(a,b)}$.

نتایج فوق، تعریف ک‌م‌م را نیز تحت تأثیر قرار داده و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۷.۲: برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b، ک‌م‌م آنها را با $[a,b]$ نمایش داده و آن را عددی درنظر می‌گیریم مانند D که:

آ. $a \mid \mathrm{D}$ و $b \mid \mathrm{D}$

ب. برای هر عدد طبیعی مانند x که $a \mid x$ و $b \mid x$ داشته باشیم $\mathrm{D} \mid x$.

مطالبی که پیش از تعریف ارائه شد نشان می‌دهد برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b، که هر دو صفر نباشند، $[a,b]$ وجود داشته و داریم $[a,b] = \frac{ab}{(a,b)}$.

مثال ۳۱.۲: مقادیر زیر را بیابید.

آ. $[۴,۹]$ ب. $[۱۲,۱۸]$ ج. $[۰,۱۲]$ د. $[۰,۰]$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

تمرین:

(۳۷) تمام مقسوم‌علیه‌های هر یک از اعداد زیر را بیابید.

آ. ۳۴ ب. ۱۲۴ ج. ۳۳۳ د. ۲۲۳

(۳۸) ب‌م‌م جفت اعداد زیر را بیابید.

آ. ۱۲۰ و ۲۰۵ ب. ۹۰۹و ۹۹ ج. ۲۵۸ و ۲۴۳

(۳۹) نشان دهید برای هر عدد طبیعی مانند $x = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}$ داریم:

آ. باقی‌مانده تقسیم x بر ۴ برابر است با باقی‌مانده تقسیم $\overline{a_1 a_0}$ بر ۴.

ب. باقی‌مانده تقسیم x بر ۳ برابر است با باقی‌مانده تقسیم $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ بر ۳.

ج. باقی‌مانده تقسیم x بر ۹ برابر است با باقی‌مانده تقسمی $a_0 a_1 + \cdots + a_n$ بر ۹.

(۴۰) برای $x = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}$، باقی‌مانده تقسیم a_n بر ۷ را t_n نامیده و برای هر i که $0 \le i < n$، باقی‌مانده تقسیم $3t_{i+1} + a_i$ را t_i می‌نامیم.

آ. برای $x = ۹۸۷۶۷۱$، مقادیر t_iها را بیابید.

ب . نشان دهید باقی‌مانده تقسیم $\overline{a_n \cdots a_i}$ بر ۷ برابر است با t_i.
ج . نشان دهید باقی‌مانده تقسیم x بر ۷ برابر است با $t_۰$.

(۴۱) دو عدد a و b را هم‌نهشت به پیمانهٔ n خوانده و می‌نویسیم $a \overset{n}{\equiv} b$ اگر باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر n برابر باشد.نشان دهید.

آ . $۷ \overset{۳}{\equiv} ۱$ ب . $۱۲ \overset{۷}{\equiv} ۳۰$ ج . $۱۵ \overset{۴}{\equiv} -۳۰$

(۴۲) نشان دهید اگر $a \overset{n}{\equiv} b$ و $c \overset{n}{\equiv} d$ آن‌گاه:

آ . $a + c \overset{n}{\equiv} b + c$ ب . $a + c \overset{n}{\equiv} b + d$
ج . $ac \overset{n}{\equiv} bc$ د . $ac \overset{n}{\equiv} bd$

(۴۳) الگوریتم ارائه شده برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم بر ۷ را با استفاده از هم‌نهشتی اثبات کنید.

(۴۴) نشان دهید برای هر عدد طبیعی مانند n داریم $n^۲ \overset{۳}{\not\equiv} ۲$.

(۴۵) نشان دهید $x = \overline{a_n \cdots a_۱ a_۰}$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر:
$a_۰ + a_۲ + a_۴ + \cdots = a_۱ + a_۳ + a_۵ + \cdots$

(۴۶) نشان دهید اگر $۱۱|۲a - ۳b$ آن‌گاه $۱۱|۷a - ۵b$.

راهنمایی: به عبارات $۱۱(a - b) - ۲(۲a - ۳b)$ توجه کنید.

این تمرینات از کتاب «نظریه اعداد؛ مریم میرزاخانی؛ انتشارات فاطمی» اقتباس شده‌اند. خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند این مطالب را در آن کتاب دنبال کنند.

(۴۷) ثابت کنید:

آ . مربع (توانِ ۲) هر عدد فرد به شکل $۸k + ۱$ است.
ب . هیچ عددی به شکل ۱۱...۱ مربع کامل نیست.

عددی مانند a را مربع یا مربع کامل گوییم اگر عددی طبیعی مانند x وجود داشته باشد که $x^۲ = a$.

(۴۸) نشان دهید برای هر عدد طبیعی مانند n داریم $(n, n + ۱) = ۱$.

(۴۹) در بین n عدد صحیح متمایز که هیچ‌کدام بر n بخش‌پذیر نیستند، دست کم دو عدد وجود دارد که تفاضلشان بر n بخشپذیر است.

راهنمایی: قرار دهید $a_i = nq_i + r_i$ و $۱ \leqslant r_۱ < r_۲ < \cdots < r_n \leqslant n - ۱$ و به تناقض برسید.

(۵۰) نشان دهید یکان هر مربع کامل، یکی از اعداد صفر، ۱، ۴، ۵، ۶ یا ۹ است.

(۵۱) باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۰ برابر است با ۷. نشان دهید a مربع نیست.

(۵۲) نشان دهید اگر $a - c|ab + cd$ آن‌گاه

آ . $a - c|ad - cd$ ب . $a - c|ab - bc$ ج . $a - c|ad + bc$

(۵۳) نشان دهید داریم $(a|x \text{ و } b|x \Longleftrightarrow ab|x)$ اگر و تنها اگر $(a, b) = ۱$

(۵۴) نشان دهید:

آ . حاصل‌ضرب هر n عدد صحیح متوالی بر n بخش‌پذیر است.
ب . حاصل‌ضرب هر سه عدد صحیح متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.
ج . حاصل‌ضرب n عدد صحیح متوالی بر $n! = ۱ \times ۲ \times \ldots n$ بخش‌پذیر است.

(۵۵) نشان دهید برای هر عدد طبیعی مانند n داریم $(۲۱n + ۴, ۱۴n + ۳) = ۱$.

(۵۶) نشان دهید برای هر عدد طبیعیِ فرد مانند n داریم $۴|۳^n + ۱$.

(۵۷) نشان دهید $(a, bc) = ۱$ اگر و تنها اگر $(a, b) = (a, c) = ۱$

(۵۸) نشان دهید برای هر دو عدد طبیعی مانند x و y داریم $۴x + ۶y \neq ۲۳۸۴۳$.

(۵۹) بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب‌م‌م) اعداد $a_۱$، $a_۲$، ...و a_n را به‌صورت $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ نمایش می‌دهیم. نشان دهید برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و c داریم:

$(a,b,c) = \big(a,(b,c)\big) = \big((a,b),(a,c)\big)$

(۶۰) کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک‌م‌م) اعداد a_1، a_2،...و a_n را به‌صورت $[a_1,a_2,\dots,a_n]$ نشان داده و برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و c داریم:

$[a,b,c] = \big[a,[b,c]\big] = \big[[a,b],[a,c]\big]$

(۶۱) a و b اعدادی فرد هستند و $(m,n)=1$. درستی $(m,n)=(m+n,m-n)$ را در موارد زیر بررسی کنید.

آ. $m=3$ و $n=4$ ب. $m=14$ و $n=21$ ج. $m=n$

د. $m=a$ و $n=b$ ه. $m=2a$ و $n=2b$ و. $m=2^5a$ و $y=2^5b$

ز. $m=2a$ و $n=b$ ح. $m=2^5a$ و $n=2^3b$ ط. $m=2^9a$ و $n=2^{11}b$

(۶۲) نشان دهید اگر $(m,n)=1$ و $ad-bc=1$، آنگاه $(m,n)=(am+bn,am+dn)$

(۶۳) $(m,n)=1$. نشان دهید $\left(a^{2^m}+1,a^{2^n}\right)=1$، اگر a زوج باشد و $\left(a^{2^m}+1,a^{2^n}\right)=2$ اگر a فرد باشد.

۷.۲ اعداد اول

اعداد اول به اعدادی می‌گویند که تجزیه‌ناپذیرند. یعنی نمی‌توان آنها را به‌صورت حاصل‌ضرب اعدادی کوچک‌تر نوشت. به‌طور مثال ۶ عددی تجزیه‌پذیر (مرکّب) است چون می‌توان آن را به‌صورت 3×2 نوشت. اما ۲ و ۳ تجزیه‌ناپذیر (اول) هستند. به‌طور مثال، عدد ۶ را مرکب خوانده و اعداد ۲ و ۳ را «عوامل تشکیل دهنده»، یا به اختصار «عوامل» یا «فاکتورها»ی آن گوییم. در واقع اعداد اول را به‌عنوان مواد اولیه‌ای می‌نگریم که بقیهٔ اعداد (اعداد مرکب) را می‌سازند. به‌سادگی می‌توان از اول بودن اعداد زیر مطمئن شد.

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,\dots$$

واضح است که هر عدد مرکب بر عواملش (فاکتورهایش) بخش‌پذیر است. برهمین اساس، شخصی در تعریف اعداد اول می‌گوید:

توصیف غلط ...

اعدادی که بر هیچ عددی بخش‌پذیر نیستند را اول گوییم.

اما واضح است که هر عددی، از جمله اعداد اول، برخودشان و ۱ بخش‌پذیرند. به‌عبارتی برای هر عددی، خودش و ۱ مقسوم‌علیه‌های بدیهیِ[1] آن هستند. بنابراین، می‌توان اعداد اول را به‌صورت زیر تعریف کرد.

توصیف نادقیق ...

اعدادی که مقسوم‌علیه نابدیهی ندارند، اول هستند.

اما در این صورت عدد ۱ نیز اول است. درحالی‌که نمی‌توان آن را به‌صورت حاصل‌ضربی از اعداد کوچک‌تر از ۱ نوشت. علاوه‌براین، در تجزیهٔ اعداد مرکب، نیازی به عدد ۱ به‌عنوان یکی از عوامل آن نداریم. بنابراین، ۱ را عددی اول نمی‌دانیم؛ هرچند مرکب هم نیست. همچنین کلمات «بدیهی» و «نابدیهی» در عبارت فوق، چندان واضح نیستند. با توجه به این مطالب، شخصی تعریف زیر را پیشنهاد می‌کند:

توصیف ناکارآمد ...

عددی که دقیقاً دو مقسوم‌علیه داشته باشد، اول است.

[1] بدیهی= واضح، آشکار، آنچه خودبه‌خود واضح و روشن است و نیاز به تفکر و بررسی ندارد.

این تعریف کاملا درست است و نمی‌توان اشکالی از آن گرفت، اما فقط اعداد اول را مشخص کرده و استفاده از آن برای به‌دست آوردن قضایا و نتایج بعدی، دشوار است. از طرفی، برای هر عدد اول مانند p و هر عدد طبیعی مانند n دقیقاً یکی از دو حالت $(p,n)=۱$ و $(p,n)=p$ درست است. زیرا اگر $(p,n)=d$، آنگاه $d \mid p$ و چون p اول است، پس $d=۱$ یا $d=p$. همچنین اگر $(p,n)=p$، آنگاه $p \mid n$. بنابراین، می‌توانیم تعریف زیر را ارائه دهیم.

تعریف ۸.۲: عدد طبیعیِ p را اول گوییم اگر $p>۱$ و برای هر عدد طبیعی مانند n داشته باشیم $(p,n)=۱$ یا $p \mid n$.

اعداد مرکب را نیز می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد.

عددی طبیعی مانند n را مرکب گوییم اگر اعدادی طبیعی مانند p و q وجود داشته باشند که $n=pq$ و $p,q>۱$.

بدین‌ترتیب گزارهٔ زیر واضح به‌نظر می‌رسد.

گزاره ۲.۲: برای هر عدد طبیعی مانند n که $n>۱$ داریم:

آ. n مرکب است اگر و تنها اگر n اول نباشد.

ب. n اول است اگر و تنها اگر n مرکب نباشد.

اثبات: آ. اگر n مرکب باشد پس $n=pq$ که $p,q>۱$ و درنتیجه $(n,p)=p>۱$، بنابراین n اول نیست.
اگر n اول نباشد، پس عددی مانند m هست که $n \nmid m$ و $۱<(n,m)>۱$. برای $p=(n,m)$ داریم $۱<p<n$ و $p \mid n$ و برای $q=n \div p$ داریم $q>۱$ و $n=pq$. بنابراین، n مرکب است.
ب. این مورد با مورد قبل معادلند. چون اگر n اول نباشد، پس مرکب نیست؛ چون در غیر این‌صورت بنا به مورد قبل، n اول نیست.
اگر n مرکب نباشد، پس اول است؛ چون در غیر این‌صورت بنا به مورد قبل مرکب نیست. ■

در ادامه گزاره‌ای را ثابت می‌کنیم که به‌ظاهر نیازی به اثبات ندارد.

گزاره ۳.۲: برای هر عدد طبیعی مانند n که $n>۱$ عددی اول مانند p هست که $p \mid n$.

اثبات: اگر n بر هیچ عدد اولی بخش‌پذیر نباشد، آنگاه n اول نیست؛ چون $n \mid n$. بنابراین n مرکب است. پس $n=p_۱q_۱$ که $p_۱,q_۱>۱$. پس $p_۱$ اول نیست و $p_۱=\mathrm{P}_۲q_۲$ که $\mathrm{P}_۲,q_q>۱$ و ... بنابراین داریم

$$۱<cdots<p_۲<p_۱<n$$

که غیرممکن است. پس n بر عددی اول بخش‌پذیر است. ■

بنا به گزارهٔ فوق، برای هر عدد طبیعی مانند n که $n>۱$، عددی اول مانند $p_۱$ هست که $p_۱ \mid n$ و برای $n_۱=n \div p_۱$ یا $n_۱=۱$ و $n=p_۱$ یا عددی اول مانند $p_۲$ هست که $p_۲ \mid n_۱$. برای $n_۲=n_۱ \div p_۲$ یا $n_۲=۱$ و $n=p_۱p_۲$ یا $n_۲>۱$ و ...

مسلماً این روند متوقف می‌شود و برای عددی طبیعی مانند k داریم $n_k=۱$ که دراین‌صورت، $n=p_۱p_۲\cdots p_k$.

نوشتن عددی مانند ۲۸ به‌صورت حاصل‌ضربی از اعداد اول را تجزیه کردن ۲۸ به عوامل اول یا به‌اختصار تجزیه کردن ۲۸ گوییم. برای تجزیهٔ ۲۸، آن را نوشته و سمت راست آن یک خط مطابق

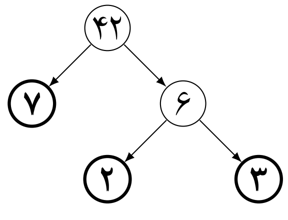
۲	۲۸
۲	۱۴
۷	۷
	۱

شکل می‌کشیم. سپس، کوچک‌ترین عدد اولی که ۲۸ برآن بخش‌پذیر است، یعنی ۲ را در سمت چپ (جلوی۲۸) می‌نویسیم وخارج‌قسمت تقسیم عدد سمت راست بر عدد سمت چپ را زیر ۲۸ می‌نویسیم و همین فرآیند را ادامه می‌دهیم تا درسمت راست عدد ۱ ظاهر شود. در نتیجه $۲۸ = ۲ \times ۲ \times ۷ = ۲^{۲} \times ۷$

مثال ۳۲.۲: اعداد زیر را به روش فوق، به عوامل اول تجزیه کنید.

آ. ۳۶ ب. ۴۸ ج. ۹۶ د. ۲۷

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■



همچنین، برای تجزیهٔ ۴۲ به عوامل اول، آن را درون یک دایره نوشته، سپس آن را به‌صورت حاصل‌ضرب دو عدد می‌نویسیم. چون $۶ \times ۷ = ۴۲$ دو دایره زیرش رسم کرده و اعداد ۷ و ۶ را در آنها می‌نویسیم. همین کار را برای ۶ انجام داده، آن را به‌صورت $۳ \times ۲ = ۶$ نوشته و اعداد ۲ و ۳ را در دایره‌هایی زیر آن می‌نویسیم. اما اعداد ۲، ۳ و ۷ اول هستند و نمی‌توان آنها را به‌صورت حاصل‌ضربی از اعداد کوچک‌تر نوشت. بدین‌ترتیب شکل مقابل حاصل شده و داریم $۳ \times ۲ \times ۷ = (۳ \times ۲) \times ۷ = ۶ \times ۷ = ۴۸$.

گزاره ۴.۲: برای هر عدد اول مانند p و هر دو عدد طبیعی مانند m و n داریم:
اگر $p \mid mn$ آن‌گاه $p \mid m$ یا $p \mid n$.

اثبات: برای هر عدد اولی مانند p و هر عددی مانند m داریم $(p,m) = ۱$ یا $p \mid m$. پس اگر $p \nmid m$ آن‌گاه $(p,m) = ۱$، و چون $p \mid mn$، بنا به قضیه (۹.۲) داریم $p \mid n$. ■

مثال ۳۳.۲: نشان دهید برای هر دو عدد اول مانند p و q داریم $p = q$ یا $(p,q) = ۱$.

پاسخ: اگر $(p,q) = ۱$ که حکم ثابت شده است. اگر $(p,q) \neq ۱$، چون q اول است پس $q \mid p$ و چون p اول است پس $p \mid q$ و درنتیجه $p = q$. ■

گزاره ۵.۲: هرگاه p عددی اول باشد و $p \mid a_۱a_۲\ldots a_n$ که در آن برای هر $۱ \leqslant i \leqslant n$ داریم $a_i > ۱$، آن‌گاه وجود دارد i به‌نحوی‌که $p \mid a_i$.

اثبات: روی n استقرا می‌بندیم. برای $n = ۱$ درستی قضیه واضح است؛ اگر $p \mid a_۱$ آن‌گاه $p \mid a_۱$. کافی است نشان دهیم اگر قضیه برای $n = k$ درست باشد، برای $n = k + ۱$ نیز درست است.

فرض کنید $p \mid a_۱a_۲\ldots a_ka_{k+۱}$ با قرار دادن $b = a_۱a_۲\ldots a_k$ داریم $p \mid ba_{k+۱}$ و از لم قبل نتیجه می‌گیریم $p \mid a_{k+۱}$ یا $p \mid b$. اگر $p \mid a_{k+۱}$ که درستی قضیه برای $n = k + ۱$ واضح است. اما اگر $p \mid b$ بنا به فرض استقرا داریم:

$$p \mid a_۱a_۲\ldots a_k \Longrightarrow \exists i(۱ \leqslant i \leqslant k \text{ و } p \mid a_i)$$

بنابراین حداقل یکی از اعداد $a_۱$، $a_۲$، … ، a_k و $a_{k+۱}$ بر p بخش‌پذیر است. ■

اکنون آماده شده‌ایم تا قضیهٔ مهمی که به قضیهٔ یکتایی تجزیه معروف است را بیان کنیم.

قضیه ۱۱.۲: به‌ازای هر عدد صحیح $n > 1$ یک و تنها یک راه برای نوشتن n به‌شکل زیر وجود دارد که در آن $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ و p_iها همه اول باشند و α_i ها همه مثبت.

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

اثبات: به‌وضوح هر عدد n که $n > 1$ را می‌توان به‌صورت فوق نوشت. فقط باید نشان دهیم این نگارش یکتا است. فرض کنید بتوان n را به شکل زیر نوشت

$$n = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots q_l^{\beta_l}$$

که در آن $q_1 < q_2 < \cdots < q_l$ و q_iها همه اعدادی اول هستند و β_iها ناصفرند.
در این صورت $p_1 | n$ پس $p_1 | q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots q_l^{\beta_l}$. بنابراین وجود دارد i که $p_1 | q_i$ چون q_i نسبت به $n \div q_i^{\beta_i}$ اول است، پس $p_1 = q_i$ و چون برای دیگر p_iها نیز چنین است پس به‌ازای هر i داریم: $p_i = q_i$ و $\alpha_i = \beta_i$ و به‌وضوح تعداد این اعداد نیز برابر است. برخواننده است که اثبات را به‌صورت دقیق، بازنویسی کند. ■

تمرین:

(۶۴) اول بودن اعداد زیر را بررسی کنید.

آ. ۲۳   ب. ۴۱   ج. ۱۳۱   د. ۳۱۳

(۶۵) مقادیر زیر را بیابید.

آ. $(2^3, 3^2)$ ب. $(2^5 \times 3^6, 4^2 \times 9^4)$ ج. $(6^6, 21^5)$

د. $[2^3, 3^2]$ ه. $[2^5 \times 3^6, 4^2 \times 9^4]$ و. $[6^6, 21^5]$

(۶۶) نشان دهید:

آ. اگر $(a, 8) = 2$، آنگاه $a \div 2$ فرد است.

ب. اگر $(a, 4) = (b, 4) + 2$، آنگاه $(a + b, 4) = 4$

(۶۷) مقادیر زیر را با فرض $(a, 72) = 6$ به‌دست آورید.

آ. $(a, 64)$ ب. $(a, 81)$ ج. $(a, 24)$

(۶۸) برای عدد اول p و عدد صحیح a که $1 \leq a < p$ داریم $C(p, a)$ بر p بخش‌پذیر است.

(۶۹) نشان دهید:

آ. حاصل جمع دو عدد متوالی فرد است.

ب. حاصل جمع سه عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

(۷۰) نشان دهید توان‌های ۲ حاصل‌جمعی از اعداد طبیعیِ متوالی نیستند.

راهنمایی: $a + (a+1) + \cdots + (a+k) = (k+1)a + \frac{k(k+1)}{2}$

(۷۱) دنبالهٔ F_n را که در آن $f_0 = f_1 = 1$ برای هر n داریم $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ را دنبالهٔ فیبوناتچی خوانیم. مقادیر زیر را بیابید.

آ. F_2 ب. F_3 ج. F_4

د. F_5 ه. F_6 و. F_7

(۷۲) اگر F_n دنبالهٔ فیبوناتچی باشد، نشان دهید:

آ. هر و جملهٔ متوالی نسبت به هم اولند.

ب. $F_n = C(n, 0) + C(n-1, 1) + C(n-2, 2) + \cdots$

(۷۳) نشان دهید برای هر عددی مانند n، می‌توان n عدد متوالی یافت که هیچکدام اول نباشند.

راهنمایی: از $(n+1)! + k$ کمک بگیرید.

(۷۴) نشان دهید اگر $n > ۱$ عددی غیر اول باشد، آن‌گاه عدد اولی مانند p هست که $p^{۲} \leq n$.

(۷۵) نشان دهید برای عدد a که $۲۰ \leq a \leq ۴۰۰$ اول است اگر و تنها اگر a بر هیچ‌یک از اعداد اول کوچک‌تر از ۲۰ بخش‌پذیر نباشد.

فصل ۳

نسبت و کسر

مفاهیم نسبت و کسر، دو مفهوم مجزا با دو خواستگاه متفاوت هستند که البته شباهت زیادی به هم دارند. نسبت، اعداد نسبتی (Rational Numbers) را به‌وجود آورده و کسر، به پیدایش اعداد کسری (Fractional numbers) انجامیده است. در ادامه خواهیم دید که اعداد نسبتی و اعداد کسری معمولاً یکسان درنظر گرفته می‌شوند.

۱.۳ نسبت

اگر عجله دارید ...
به خواندن مطالب مهم (گزاره‌ها، تعاریف و ...) اکتفا کنید.

تاریخ زمانی را به‌یاد دارد که هنوز پولی اختراع نشده بود و انسان‌ها مبادلات خود را به‌صورت کالابه‌کالا (پایاپای) انجام می‌دادند. شهری کهن را درنظر بگیرید که در آن هر کاسه گندم با ۳ کاسه جو مبادله می‌شده است. بنابراین ۴ کاسه گندم با ۱۲ کاسه جو مباله می‌شود. پس اگر دیگی به اندازهٔ ۴ کاسه گنجایش داشته باشد، هر دیگ گندم با ۳ دیگ جو مباله می‌شود. بدین‌ترتیب، می‌توان گفت «هر ظرف گندم با ۳ ظرف جو مبادله می‌شود» و با اهمیت ندادن به اندازه ظرف، هر مبادله گندم و جو را با دو عدد ۱ و ۳ بیان کرد. رابطهٔ بین مقادیر کالاهای مبادله شده در یک مبادله را «نسبت» نامیم.

برای هر مقداری از یک کمیت مانند A مانند گنجایش ظرفی خاص یا وزن جسمی مشخص، مبادله $m\mathrm{A}$ از یک کالا با $n\mathrm{A}$ از کالایی دیگر را نسبت m به n خوانده و با $(m:n)$ نمایش می‌دهیم. به‌عبارتی نسبت $m\mathrm{A}$ به $n\mathrm{A}$ را با $(m\mathrm{A}:n\mathrm{A})$ نمایش داده و داریم $(m\mathrm{A}:n\mathrm{A})=(m:n)$. بنابراین:

برای هر دو مقدار A و B از هر کمیت دلخواه، نسبت A به B را با $(\mathrm{A}:\mathrm{B})$ نشان می‌دهیم و عبارت $(\mathrm{A}:\mathrm{B})=(m:n)$ نگارشی است برای عبارت زیر:

مقداری مانند C وجود دارد که $\mathrm{A}=m\mathrm{C}$ و $\mathrm{B}=n\mathrm{C}$

چون در این صورت داریم $\quad(\mathrm{A}:\mathrm{B})=(m\mathrm{C}:n\mathrm{C})=(m:n)$

بنابراین نسبت از راهکاری برای بیان ساده‌تر نحوهٔ مبادلات کالابه‌کالا، به رابطه‌ای بین دو مقدار از یک کمیت تبدیل شده است که به‌وسیلهٔ دو عدد طبیعی قابل بیان است.

مثال ۱.۳: در یک کفه ترازویی کهن، یک هندوانه و در کفهٔ دیگر ۱۰ عدد سیب قرار داده‌ایم و ترازو وزن آن‌ها را برابر نشان می‌دهد. هر یک از نسبت‌های زیر را بیابید.

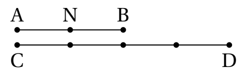
آ . (وزن هندوانه : وزن سیب‌ها)   ب . (تعداد هندوانه : تعداد سیب‌ها)

با دقت بخوانید ...
مورد (ب) را با دقت بیشتری بخوانید.

پاسخ: آ. اگر قرار دهیم «C=وزن ۱۰ سیب» آن گاه داریم «C=وزن ۱ هندوانه» و درنتیجه:
(۱ : ۱) = (۱C : ۱C) = (وزن هندوانه‌ها : وزن سیب‌ها)

ب. اگر قرار دهیم «C = ۱عدد سیب» نمی‌توانیم با C تعداد هندوانه‌ها را بشماریم. از طرفی C باید مقداری از یک کمیت باشد، نه مقداری از یک شیء. لذا قرار می‌دهیم «C = ۱عدد» که در این صورت:
(۱ : ۱۰) = (۱۰C : ۱C) = (تعداد هندوانه : تعداد سیب‌ها) ■

مثال ۲.۳: با توجه به شکل مقابل نشان دهید:



آ. (۲ : ۴) = (|AB| : |CD|) ب. (۱ : ۲) = (|AB| : |CD|) ج. (۳ : ۶) = (|AB| : |CD|)

پاسخ: آ. (۲ : ۴) = (۲|AN| : ۴|AN|) = (|AB| : |CD|) ب. (۱ : ۲) = (۱|AB| : ۲|AB|) = (|AB| : |CD|)
ج. اگر نقطهٔ M را چنان درنظر بگیریم که |AB| = ۳|AM|، آن‌گاه داریم:
(۳ : ۶) = (۳|AM| : ۶|AM|) = (۱(۳|AM|) : ۲(۳|AM|)) = (۱|AB| : ۲|AB|) = (|AB| : |CD|) ■

در مثال فوق می‌بینیم که نسبت (|AB| : |CD|) با هر یک از عبارات (۱ : ۲)، (۲ : ۴) و (۳ : ۶) قابل بیان است. این نسبت‌ها را برابر گوییم چون همه نسبتِ (|AB| : |CD|) را بیان می‌کنند.

مثال ۳.۳: نشان دهید برای هر چهار عدد طبیعی و ناصفر مانند a، b، c و d و هر دو پاره‌خطّ AB و CD داریم:

آ. $(|AB| : |CD|) = (a : b)$ اگر و تنها اگر $(|AB| : |CD|) = (ca : cb)$.

ب. اگر $(|AB| : |CD|) = (a : b)$ آن‌گاه «$(|AB| : |CD|) = (c : d)$ اگر و تنها اگر $ad = bc$»

پاسخ: آ. اگر $(|AB| : |CD|) = (a : b)$ پس پاره خطی مانند MN هست که $|AB| = a|MN|$ و $|CD| = b|MN|$.
اگر PQ چنان درنظر بگیریم که $|MN| = n|PQ|$ آن‌گاه
$(|AB| : |CD|) = (a|MN| : b|MN|) = (na|PQ| : nb|PQ|) = (na : nb)$
اگر $(|AB| : |CD|) = (na : nb)$ پس پاره‌خطی مانند PQ هست که $|AB| = na|PQ|$ و $|CD| = nb|PQ|$.
کافی است MN را پاره‌خطّی درنظر بگیریم که $|MN| = n|PQ|$. دراین‌صورت داریم:
$(|AB| : |CD|) = (na|PQ| : nb|PQ|) = (a|MN| : b|MN|) = (a : b)$

ب. راهنمایی: با توجه به مورد قبل داریم

$$\begin{cases} (|AB| : |CD|) = (a : b) \Longleftrightarrow (|AB| : |CD|) = (ad : bd) \\ (|AB| : |CD|) = (c : d) \Longleftrightarrow (|AB| : |CD|) = (bc : bd) \end{cases}$$

پس $(|AB| : |CD|) = (ad : bd)$ و پاره‌خطّی مانند MN هست که $|AB| = bc|MN|$ و $|CD| = bd|MN|$ و به‌طور مشابه چون $(|AB| : |CD|) = (bc : bd)$ پس پاره‌خطّی مانند PQ هست که $|AB| = ad|PQ|$ و $|CD| = bd|PQ|$. پس $bd|PQ| = bd|MN|$ و درنتیجه $|MN| = |PQ|$ و چون $ad|PQ| = bc|MN| = bc|PQ|$، پس $ad = bc$.
ادامه کار به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

توجه: وقتی از مقداری مانند A صحبت می‌کنیم، این مقادیر وجود دارند و هیچ‌گاه برای مقداری مانند B نداریم A = ۰B. به‌همین سبب نسبت‌هایی مانند (۰ : ۱)، (۱ : ۰) یا (۰ : ۰) ظاهر نمی‌شوند.

شخصی به ما خُرده گرفته و می‌گوید اگر A = ۳ و B = ۵ دو مقدار از کمیت تعداد و عدد طبیعی باشند، (۳ : ۵) = (A : B). کافی است قرار دهیم C = ۱. اما در این‌صورت بنا به ادعای فوق داریم (۶ : ۱۰) = (۲ × ۳ : ۲ × ۵) = (A : B) در حالی که عددی طبیعی (مقداری) مانند C وجود ندارد که A = ۶C و B = ۱۰C.

نسبت برای بیان نحوهٔ مبادلات کالا به کالا ساخته شد و سپس از آن برای رابطهٔ بین دو مقدار از یک کمیت استفاده شد. این مشکل در مبادلات کالابه‌کالا وجود ندارد. به‌طور مثال اگر در شهری، هر ۳ کاسه گندم با ۵ کاسه جو مباله شود، هر ۶ کاسه گندم نیز با ۱۰ کاسه جو مبادله خواهد شد و همچنین اگر ۶ کاسه گندم با ۱۰ کاسه جو مبادله شود، هر ۳ کاسه گندم با ۵ کاسه جو مبادله خواهد شد. بنابراین، تعریف ارائه شده با درک شهودی (مبادلات کالابه‌کالا) همخوانی ندارد و باید تغییر کند. مثال زیر امکان بازتعریف نسبت را فراهم می‌کند.

مثال ۴.۳: نشان دهید برای هر دو مقدار دلخواه مانند A و B از یک کمیت و هر دو عدد طبیعی مانند m و n داریم: $(\mathrm{A}:\mathrm{B})=(m:n)$ اگرو تنها اگر $n\mathrm{A}=m\mathrm{B}$

پاسخ: اگر $(\mathrm{A}:\mathrm{B})=(m:n)$، پس مقداری مانند C وجود دارد که $\mathrm{A}=m\mathrm{C}$ و $\mathrm{B}=n\mathrm{C}$. بنابراین:
$n\mathrm{A}=n(m\mathrm{C})=(nm)\mathrm{C}=(mn)\mathrm{C}=m(n\mathrm{C})=m\mathrm{B}$
فرض کنید $n\mathrm{A}=m\mathrm{B}$ و C چنان باشد که $\mathrm{B}=n\mathrm{C}$. دراین‌صورت داریم:
$n\mathrm{A}=m\mathrm{B}=m(n\mathrm{C})=mn\mathrm{C}=n(m\mathrm{C})$
پس $n\mathrm{A}=n(m\mathrm{C})$ و درنتیجه $\mathrm{A}=m\mathrm{C}$. بنابراین $(\mathrm{A}:\mathrm{B})=(m\mathrm{C}:n\mathrm{C})=(m:n)$. ■

بنابراین، می‌توانیم با بازتعریف نسبت به صورت زیر مشکل فوق را برطرف کنیم.

تعریف ۱.۳: برای هر دو مقدار دلخواه A و B از یک کمیت و هر دو عدد طبیعی مانند m و n که هر دو صفر نیستند گوییم:
$(\mathrm{A}:\mathrm{B})=(m:n)$ اگر و تنها اگر $n\mathrm{A}=m\mathrm{B}$.

مثال ۵.۳: نشان دهید هرگاه $(\mathrm{A}:\mathrm{B})=(a:b)$ و $(\mathrm{A}:\mathrm{B})=(c:d)$ آن‌گاه $ad=bc$.

پاسخ: آ. $\left.\begin{array}{l}(\mathrm{A}:\mathrm{B})=(a:b)\Longrightarrow b\mathrm{A}=a\mathrm{B}\xRightarrow{\times d} bd\mathrm{A}=ad\mathrm{B}\\(\mathrm{A}:\mathrm{B})=(c:d)\Longrightarrow d\mathrm{A}=c\mathrm{B}\xRightarrow{\times b} bd\mathrm{A}=bc\mathrm{B}\end{array}\right\}\Longrightarrow ad\mathrm{B}=bc\mathrm{B}\Longrightarrow ad=bc$ با دقت بخوانید...

اما استدلال فوق برای $b,d\neq 0$ قابل قبول است. به‌عبارتی در صورتی که $(\mathrm{A}:\mathrm{B})=(a:0)$ که $a\neq 0$ قابل اجرا نیست چون در این صورت داریم $a\mathrm{B}=0\mathrm{A}$ و درنتیجه B به هیچ مقداری اشاره نداشته و نمی‌توان از $ad\mathrm{B}=bc\mathrm{B}$ نتیجه گرفت $ad=bc$. استدلال برای تساوی $(\mathrm{A}:\mathrm{B})=(a:0)$ و $(\mathrm{A}:\mathrm{B})=(c:0)$ را به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

در مثال فوق نسبت‌های عددی $(a:b)$ و $(c:d)$، هر دو به $(\mathrm{A}:\mathrm{B})$ اشاره دارند که نسبت (رابطهٔ) بین دو مقدار A و B است؛ لذا آنها را برابر درنظر گرفته و می‌نویسیم $(a:b)=(c:d)$. به بیان دقیق‌تر:

> برای اعدادی طبیعی مانند a، b، c و d گوییم $(a:b)=(c:d)$ اگر و تنها اگر برای هر دو مقداری مانند A و B از کمیتی دلخواه داشته باشیم:
>
> $(\mathrm{A}:\mathrm{B})=(a:b)\Longleftrightarrow(\mathrm{A}:\mathrm{B})=(c:d)$

در واقع، در مثال فوق نشان داده‌ایم اگر $(a:b)=(c:d)$ آن‌گاه $ad=bc$. مثال زیر این امکان را فراهم می‌کند که تساوی نسبت‌ها را بدون توجه به مقادیری مانند A و B تعریف کنیم.

مثال ۶.۳: نشان دهید برای اعدادی طبیعی و ناصفر مانند a، b، c و d داریم:
$(a:b)=(c:d)\Longleftrightarrow ad=bc$

پاسخ: با توجه به مثال قبل و توضیحات فوق، کافی است نشان دهیم اگر $ad = bc$، آن‌گاه برای هر دو مقداری مانند A و B از هر کمیتی داریم:

$(\mathrm{A}:\mathrm{B}) = (a:b) \Longleftrightarrow (\mathrm{A}:\mathrm{B}) = (c:d)$

که با استدلال زیر قابل انجام است.

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}:\mathrm{B}) = (a:b) &\Longleftrightarrow b\mathrm{A} = a\mathrm{B}\\ &\overset{d\neq ۰}{\Longleftrightarrow} bd\mathrm{A} = ad\mathrm{B}\\ &\overset{ad=bc}{\Longleftrightarrow} bd\mathrm{A} = bc\mathrm{B}\\ &\overset{b\neq ۰}{\Longleftrightarrow} (\mathrm{A}:\mathrm{B}) = (c:d)\end{aligned}$$

توجه داریم که در نسبت به‌معنای رابطهٔ بین مقادیر، صفر ظاهر نمی‌شود. ■

جالب و خواندنی
حرکت از ریاضیات شهودی به سمت ریاضیات مجرد

نسبتِ $(a:b)$ به‌عنوان روشی برای مبادلات کالابه‌کالا به‌وجود آمد و سپس به وسیله‌ای برای بیان رابطهٔ بین دو مقدار از یک کمیت تبدیل شد. تساوی نسبت‌ها نیز برهمین اساس معنا یافت. اما مثال فوق نشان می‌دهد می‌توان تساوی نسبت‌های عددی مانند $(a:b)$ و $(c:d)$ را بدون نیاز به مقادیری مانند A و B نیز تعریف کرد. بدین‌ترتیب، مفهوم «نسبت» را از مشاهدات روزمره جدا شده و به‌صورت مفهومی کاملا مجرد تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۳: **برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b که هر دو صفر نیستند، نسبت a به b را به‌صورت $(a:b)$ نمایش می‌دهیم.**

همان‌طورکه مشاهده می‌کنید در عبارت فوق هیچ توضیحی در مورد تعبیر نسبت داده نشده است. در واقع نسبت به یک عبارت بیانی و ساختار زبانی تبدیل شده است. با توجه به مطالب فوق، تساوی دو نسبت را نیز به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم تا با درک شهودی از نسبت نیز همخوانی داشته باشد.

تعریف ۳.۳: **برای هر دو نسبت مانند $(a:b)$ و $(c:d)$ قرار می‌دهیم:**
$(a:b) = (c:d)$ اگر و تنها اگر $ad = bc$

مبتدی – ضروری

مثال ۷.۳: عدد طبیعی m را چنان بیابید که:

آ. $(۲:۳) = (۲:m)$ ب. $(۲:۳) = (m:۳)$ ج. $(۲:۳) = (۴:m)$

د. $(۴:۶) = (m:۹)$ ه. $(۱:۵) = (۷:m)$ و. $(۲:۳) = (۳:m)$

پاسخ: با استفاده از تعریف فوق به‌سادگی داریم:

آ. $(۲:۳) = (۲:m) \Longleftrightarrow ۲\times ۳ = ۲m \Longleftrightarrow m = ۳$

ب. $(۲:۳) = (m:۳) \Longleftrightarrow ۲\times ۳ = m\times ۳ \overset{۳\neq ۰}{\Longleftrightarrow} m = ۲$

ج. $(۲:۳) = (۴:m) \Longleftrightarrow ۲\times m = ۳\times ۴ \Longleftrightarrow m = ۱۲\div ۲ = ۶$

د. $(۴:۶) = (m:۹) \Longrightarrow ۴\times ۹ = ۶m \Longleftrightarrow m = ۳۶\div ۶ = ۶$

ه. $(۱:۵) = (۷:m) \Longleftrightarrow ۱m = ۵\times ۷ \Longleftrightarrow m = ۳۵$

و. $(۲:۳) = (۳:m)$ اگر $۲\times m = ۳\times ۳ = ۹$، اما این معادله در اعداد طبیعی جواب ندارد. ■

پیش از این $(a:b)$ به رابطهٔ بین دو مقدار اشاره داشت و ظهور عباراتی مانند $(۰:۱)$ و $(۰:۰)$ ممکن نبود. اما با نمادین شدن نسبت و نگاهی نمادین به آن، هیچ مانعی برای نوشتن عباراتی مانند $(۰:۱)$ و $(۱:۰)$ وجود ندارد. در ادامه با علت استثنا کردن $(۰:۰)$ در تعریف آشنا خواهیم شد و خواهیم دید که $(۰:۰)$ نمی‌تواند به یک نسبت اشاره کند.

از آنجا که باید تمام نتایج از تعریف به‌دست آیند، قضیه زیر را به‌عنوان اولین نتایجِ حاصل از تعریف، بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۳: برای نسبت‌های $(a:b)$، $(c:d)$ و $(m:n)$ و هر عدد طبیعی مانند k داریم: مبتدی - ضروری

آ . $(a:b)=(a:b)$ ب . اگر $(a:b)=(c:d)$ آن‌گاه $(c:d)=(a:b)$.

ج . اگر $(a:b)=(c:d)$ و $(c:d)=(m:n)$ آن‌گاه $(a:b)=(m:n)$

د . $(ka:a)=(kb:b)$ ه . $(ka:kb)=(a:b)$

و . $(n:۰)=(۱:۰)$ ز . $(۰:n)=(۰:۱)$

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

جالب و خواندنی چرا $(۰:۰)$ بی‌معناست.

در بحث همخوانی تعریف با درک شهودی اگر $(\mathrm{A}:\mathrm{B})=(۰:۱)$ پس $۰\mathrm{A}=۱\mathrm{B}$ و درنتیجه مقدار A شامل هیچ مقداری نیست. یا به‌عبارتی به مقدار هیچ از آن کمیت اشاره دارد. مانند عدد صفر که به مقدار هیچ در کمیت تعداد اشاره دارد. بنابراین، می‌توان عباراتی مانند $(۰:a)$ و $(a:۰)$ را بامعنا دانست.

اما برای $(۰:۰)$ داریم $(a:b)=(a(۰\mathrm{A}):b(۰\mathrm{A}))=(۰\mathrm{A}:۰\mathrm{A})=(۰:۰)$. بنابراین، اگر نسبت $(۰:۰)$ بامعنا باشد، برای هر نسبتی مانند $(a:b)$ داریم $(a:b)=(۰:۰)$. همچنین بنا به تعریف نیز داریم:

$$(۰:۰)=(a:b)\Longleftrightarrow ۰\times a=۰\times b$$

بنابراین، $(۰:۰)$ را نمی‌توان بامعنا دانست.

۱.۱.۳ ساده کردن نسبت

با دقت بخوانید...

نگارش $(na:nb)$ به‌صورت $(a:b)$ که با اعدادی کوچک‌تر نوشته شده است و ساده‌تر کردن نسبت خوانده می‌شود.

مثال ۸.۳: هر یک از نسبت‌های زیر را ساده‌تر کنید.

آ . $(۳\times۲:۵\times۳\times۲)$ ب . $(۵:۲)$ ج . $(۱۸:۲۰)$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۹.۳: نشان دهید برای هر دو عدد طبیعی a و b با قرار دادن $d=(a,b)$ داریم:

آ . $(a:b)=\left(a\div d:b\div d\right)$ ب . $\left(a\div d,b\div d\right)=۱$

ج . اگر $(a,b)=۱$ آن‌گاه نسبت $(a:b)$ را نمی‌توان ساده کرد.

پاسخ: آ . اگر قرار دهیم $d=(a,b)$، آن‌گاه $a=d(a\div d)$ و $b=d(b\div d)$ بنابراین:
$(a:b)=\left(d(a\div d):d(b\div d)\right)=\left(a\div d:b\div d\right)$

ب . برای $k=\left(a\div d,b\div d\right)$ داریم $k\mid a\div d$ س $kd\mid a$ و به‌طور مشابه $kd\mid b$. بنابراین، بنا به تعریف ب‌م‌م، $d=(a,b)\mid kd$ و از طرفی هم $d\mid kd$. درنتیجه $k=۱$.

ج . برای اینکه $(a:b)$ ساده شدنی باشد، باید بتوان آن را به صورت $(na':nb')$ نوشت که در این صورت $a=na'$ و $b=nb'$. بنابراین $n\mid(a,b)$. به‌وضوح اگر $(a,b)=۱$ آن‌گاه $n=۱$ و درنتیجه نسبت ساده نمی‌شود. (چون با ساده کردن ۱ نگارش جدیدی از نسبت به‌دست نمی‌آید.) ■

مثال فوق، با ایجادِ مفهوم «تحویل‌ناپذیری»، مفهوم «ساده کردن» را تغییر می‌دهد.

گزاره ۱.۳: نسبت $(a:b)$ را تحویل‌ناپذیر (ساده نشدنی) گوییم اگر $(a,b)=۱$. تغییر نگارش نسبت به‌صورتی تحویل‌ناپذیر را ساده‌کردن نسبت گوییم.

مثال ۱۰.۳: نسبت‌های زیر را ساده کنید. (به‌صورت تحویل‌ناپذیر بنویسید.)

آ. $(۴:۶)$ ب. $(۲^۳:۲^۴)$ ج. $(۴^۳:۸)$

د. $(۲^۴\times ۳^۵ : ۳^۴\times ۵^۴)$ ه. $\left((۲^۷\times ۳^۵)^۴ : (۲^۹\times ۹^۳)^۳\right)$ و. $(۲^{۱۳۶۵}:۴^{۶۷۰})$

ز. $\left((۲^{۳۷})^{۲۳} : (۸^{۲۴۵})^۲\right)$ ح. $(۱۲^۴:۸^۳)$ ط. $(۷۲^{۱۳}:۵۴^{۱۵})$

ی. $(۲^{۴۲}\times ۵^{۲۴} : ۳^{۴۲}\times ۷^{۲۴})$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

بنابراین دیدیم که هر نسبت دارای نگارشی تحویل‌ناپذیر است. در قضیه زیر نشان می‌دهیم نگارش مذکور منحصربه‌فرد است.

قضیه ۲.۳: هر نسبت دارای نمایش تحویل‌ناپذیرِ منحصربه‌فردی است.

اثبات: برای $d=(a,b)$، نسبتِ $(a\div d : b\div d)$ تحویل‌ناپذیر است. پس همیشه نگارشی تحویل‌ناپذیر وجود دارد. اگر $(a:b)=(m:n)$ هر دو تحویل‌ناپذیر باشند، آنگاه:

$$(a:b)=(m:n)\Longrightarrow an=bm\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a\mid bm \xRightarrow{(a,b)=۱} a\mid m\\ m\mid an \xRightarrow{(m,n)=۱} m\mid a\end{array}\right\}\Longrightarrow a=m$$

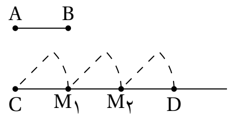
و به‌طور مشابه داریم $b=n$. بنابراین، دو نگارش تحویل‌ناپذیر از یک نسبت، دقیقا یکسان هستند. ■

۲.۱.۳ نسبت و هندسه

با دقت بخوانید!
مفاهیم پیچیده‌ای را ساده می‌کند.

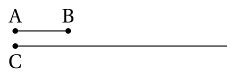
یونانیان که در هندسه توانمند شده بودند، به‌سادگی توانستند به‌ازای هر پاره‌خط داده شده مانند AB، پاره‌خط CD را چنان رسم کنند که $|CD| = n|AB|$. لازم به ذکر است که ایشان برای ترسیمات خویش فقط از خطکش (چوبی راست و بدون علامت که صرفاً برای ترسیم خطی راست است) و پرگار (وسیله‌ای برای ترسیم دایره) استفاده می‌کرده‌اند.

برای تعیین نقطهٔ D بر نیم‌خط داده شده به‌نحوی‌که $|CD| = ۳|AB|$؛ دهانه پرگار را به‌اندازه پاره‌خط AB باز کرده و مطابق شکل، با زدن کمان‌های پیاپی، نقاط $M_۱$، $M_۲$ و D را بر نیم‌خط داده شده چنان مشخص می‌کنیم که: $|AB| = |CM_۱| = |M_۱M_۲| = |M_۲D|$



بنابراین داریم: $|CD| = |CM_۱| + |M_۱M_۲| + |M_۲D| = |AB| + |AB| + |AB| = ۳|AB|$

مثال ۱۱.۳: با توجه به شکل، نقطهٔ D را بر نیم‌خط داده شده چنان بیابید که:



آ. $(|CD|:|AB|) = (۵:۱)$ ب. $(|CD|:|AB|) = (۱۲:۳)$

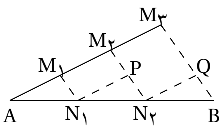
پاسخ: آ. مطابق مطالب قبل کافی است D را چنان مشخص کنیم که $|CD| = ۵|AB|$

ب. چون $(۱۲:۳) = (۴:۱)$ کافی است D را چنان مشخص کنیم که $|CD| = ۴|AB|$. ■

یونانیان باستان برای تقسیم پاره‌خطی به n قسمت برابر، از توانایی فوق و مثال زیر استفاده می‌کردند.

صورت مثال از پاسخ مهم‌تر است.

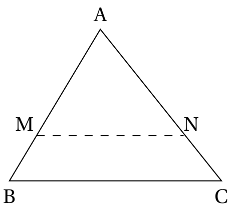
مثال ۱۲.۳: مطابق شکل $|AM_1| = |M_1M_2| = |M_2M_3|$. از نقاط M_1 و M_2 خطوطی موازی M_3B رسم کرده و نقاط برخورد آنها با AB را به‌ترتیب N_1 و N_2 می‌نامیم. نشان دهید:
$|AN_1| = |N_1N_2| = N_2B|$



مبتدی – اختیاری
برای درک پاسخ از پیوست استفاده کنید.

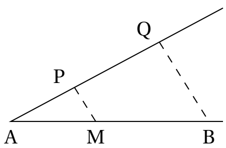
پاسخ: مطابق شکل، از نقاط N_1 و N_2 خطوطی موازی AM_3 رسم کرده تا نقاط P و Q به‌دست آیند. بدین ترتیب چهارضلعی $N_1M_1M_2P$ یک متوازی الاضلاع است. در نتیجه $|N_1P| = |M_1M_2|$. از طرفی چون $N_1P \parallel AM_1$[1] پس $\widehat{N_1AM_1} = \widehat{N_2N_1P}$. چون $M_1N_1 \parallel PN_2$ پس $\widehat{PN_2N_1} = \widehat{M_1N_1A}$. از دو تساوی اخیر داریم $\widehat{aM_1N_1} = \widehat{N_1PN_2}$. بنابراین با استفاده از برابری دو زاویه و ضلع بین‌شان در دو مثلث، داریم $\triangle AM_1N_1 = \triangle N_1PN_2$ و درنتیجه $|AN_1| = |N_1N_2|$. ■

طالس (Thales) اولین ریاضیدان و فیلسوف یونانی در ۶۴۰ سال پیش از میلاد مسیح به‌دنیا آمد. در جوانی بازرگان، در میانسالی دولت‌مرد و در پیری فیلسوف بود. ور در دوران جوانی به‌عنوان بازرگان به مصر و بابل سفر کرد و با ریاضیات مصر و بابل نیز آشنا شد.



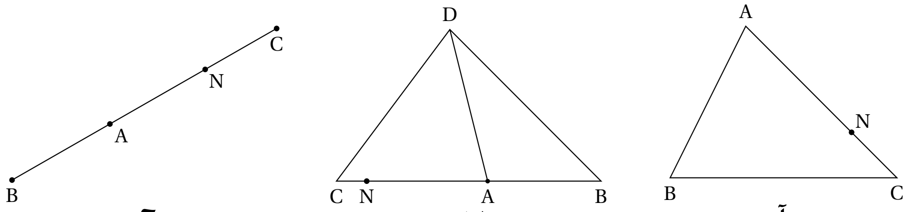
وی قضیهٔ مهم اثبات کرد که به «قضیهٔ طالس» مشهور است. وی نشان داد:

> اگر در مثلث $\triangle ABC$ نقاط M و N به‌ترتیب بر اضلاع AB و AC چنان باشند که $MN \parallel BC$، آن‌گاه $(|AM| : |AB|) = (|NA| : |AC|)$.[2]



بنابرین، اگر بخواهیم نقطهٔ M را بر AB یا امتداد آن چنان بیابیم که $(|AM| : |AB|) = (|AP| : |AQ|)$ کافی است از نقطهٔ P خطی موازی با QB رسم کنیم تا پاره‌خطّ AB را در نقطه‌ای مانند M قطع کند.

مثال ۱۳.۳: در هر یک از موارد زیر، نقطهٔ M را چنان بیابید که
$(|AM| : |AB|) = (|AN| : |AC|)$



ج. ب. آ.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

با توجه به مطالب فوق می‌توان گزارهٔ زیر را نتیجه گرفت.

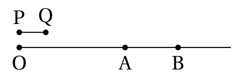
گزاره ۲.۳: برای هر دو عدد طبیعی m و n و هر پاره‌خط AB می‌توان پاره‌خط CD را چنان رسم کرد که $(|AB| : |CD|) = (m : n)$.

در ادامه از نمادگذاری خاصی استفاده می‌کنیم که البته کمی هم الهام‌بخش خواهد بود.

عبارت «پاره‌خطِ PQ، پاره‌خطِ AB را می‌شمارد» را به‌صورت $PQ \mid AB$ نمایش می‌دهیم. و به‌معنای وجود عددی طبیعی و منحصربه‌فرد مانند n است که $|AB| = n|PQ|$.

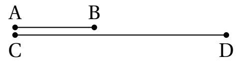
---
[1] نماد $\parallel$ به‌معنای «موازی بودن» است.
[2] اثبات این قضیه در پیوست ارائه شده است.

مثال‌های زیر راهِ یافتنِ نسبت طولِ دو پاره‌خط را به ما نشان می‌دهند.

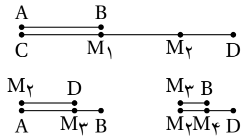


مثال ۱۴.۳: فرض کنید PQ | OA نشان دهید PQ | OB اگر و تنها اگر PQ | AB.

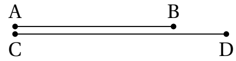
پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■



مثال ۱۵.۳: پاره‌خط PQ را چنان بیابید که PQ | AB و PQ | CD.



پاسخ: فرض کنید PQ چنان باشد که PQ | AB و PQ | CD. چون $|AB| = |M_{۱}M_{۲}| = |CM_{۱}|$ پس $PQ \mid M_{۲}D$. همچنین چون $PQ \mid M_{۲}D$ و PQ | AB پس $PQ \mid M_{۳}B$ در ادامه چون $|M_{۳}B| = |M_{۴}D| = |M_{۲}M_{۴}|$ پس با قرار دادن $PQ = M_{۴}D$ داریم: $PQ \mid M_{۲}D$ و $PQ \mid M_{۳}B$. بنابراین PQ | AB و درنتیجه PQ | CD. ■



مثال ۱۶.۳: با توجه به شکل، اعداد طبیعی m و n را چنان بیابید که $n|AB| = m|CD|$.

پاسخ: اگر $n|AB| = m|CD|$ پس $(|AB| : |CD|) = (m : n)$ پس باید پاره‌خطی مانند PQ بیابیم که PQ | AB و PQ | CD. بنابراین می‌توانیم از پاسخ مثال قبل کمک گرفته و مقادیر m و n را بیابیم که نتیجه خواهد داد $m = ۳$ و $n = ۴$ ■

تأمل‌برانگیز
با دقت بخوانید...

یونانیان باستان که توانایی‌های فوق را به‌دست آورده بودند، از مثال‌های فوق نتیجه گرفتند:

برای هر دو پاره‌خط AB و CD، می‌توان دو عدد m و n را چنان یافت که

$$(|AB| : |CD|) = (m : n)$$

به‌عبارتی نتیجه گرفتند که برای هر دو پاره‌خط AB و CD، می‌توان پاره‌خطی مانند MN یافت که هر دو را بشمارد. آیا شما هم نظر یونانیان باستان را تأیید می‌کنید؟

اگر بتوانیم پاره‌خط‌های AB و CD را چنان مثال بزنیم که **هیچ پاره‌خطی، هر دو را نشمارد،** معنای «نسبت |AB| به |CD|» چه خواهد بود؟ اگر چنین پاره‌خط‌هایی وجود داشته باشند، چگونه می‌توان از وجود آن‌ها آگاه شد؟ اگر وجود نداشته باشند، چطور مطمئن شویم که وجود ندارند؟ این سؤال به ظاهر ساده تحولات بزرگی در ریاضیات و فلسفه به دنبال داشته است.

۳.۱.۳ جمع و ضرب نسبت‌ها

در شکل مقابل داریم $a = ۳U$، $b = ۵U$ و $l = ۷U$. نسبت $(a+b : l)$ را به‌صورت $(a : l)+(b : l)$ می‌نویسیم و درنتیجه داریم:

$$(۳ : ۷) + (۵ : ۷) = (a : l) + (b : l) = (a + b : l) = (۸ : ۷)$$

مثال ۱۷.۳: برای مقادیر A، B و C از یک کمیت، $(A + B : C)$ را به‌صورت $(A : C) + (B : C)$ می‌نویسیم. نشان دهید:

اگر $(A : C) = (a : n)$ و $(B : C) = (b : n)$، آنگاه $(A : C) + (B : C) = (a + b : n)$.

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l}(A : C) = (a : n) \Longrightarrow nA = aC \\ (B : C) = (b : n) \Longrightarrow nB = bC\end{array}\right\} \Longrightarrow n(A + B) = (a + b)C$$
$$\Longrightarrow (A + B : C) = (a + b : n)$$
$$\Longrightarrow (A : C) + (B : C) = (a + b : n)$$

توجه داریم $(A : C) + (B : C)$ نگارش دیگری از $(A + B : C)$ است. ■

گوییم $(a : b) + (c : d) = (x : y)$ اگر برای هر سه مقدار A، B و C که $(\mathrm{A} : \mathrm{C}) = (a : b)$ و $(\mathrm{B} : \mathrm{C}) = (c : d)$، داشته باشیم $(\mathrm{A} + \mathrm{B} : \mathrm{C}) = (x : y)$. باتوجه به مثال فوق واضح است $(a : n) + (b : n) = (a + b : n)$.

مثال ۱۸.۳: نشان دهید.

آ. $(۱ : ۲) + (۲ : ۶) = (۵ : ۶)$ ب. $(a : n) + (b : mn) = \big((am + b) : mn\big)$

ج. $(۱ : ۳) + (۲ : ۵) = (۱۱ : ۱۵)$ د. $(a : n) + (b : m) = \big((am + bn) : mn\big)$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۱۹.۳: نحوهٔ مبادلهٔ گندم و برنج در هر یک از موارد زیر چگونه است؟

آ. $(۵ : ۲)$ = (جو : گندم) و $(۱ : ۵)$ = (برنج : جو)

ب. $(۵ : ۲)$ = (جو : گندم) و $(۱ : ۶)$ = (برنج : جو)

ج. $(۱۰ : ۳)$ = (جو : گندم) و $(۳ : ۱۳)$ = (برنج : جو)

پاسخ: آ. می‌توان مبادلات را به صورت زیر نشان داد.

(۱ کاسه برنج) $\longleftrightarrow$ (۵ کاسه جو) $\longleftrightarrow$ (۲ کاسه گندم)

بنابراین انتظار داریم هر ۲ کاسه گندم با ۱ کاسه برنج مبادله شود. به‌عبارتی $(۱ : ۲)$ = (برنج : گندم)

ب. $(۱۲ : ۳۰) = (۲ : ۵)$ = (جو : گندم) و $(۵ : ۳۰) = (۱ : ۶)$ = (برنج : جو) بنابراین:

(۵ کاسه برنج) $\longleftrightarrow$ (۳۰ کاسه جو) $\longleftrightarrow$ (۱۲ کاسه گندم)

بنابراین «(۵ کاسه برنج) $\longleftrightarrow$ (۱۲ کاسه گندم)». پس $(۵ : ۱۲)$ = (برنج : گندم).

ج. $(۳۰ : ۳۹)$ = (برنج : گندم) ■

مثال ۲۰.۳: نشان دهید اگر $(\mathrm{A} : \mathrm{B}) = (a : b)$ و $(\mathrm{B} : \mathrm{C}) = (b : c)$ و B مقداری غیر تهی و ناصفر باشد، آن‌گاه $(\mathrm{A} : \mathrm{C}) = (a : c)$.

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} (\mathrm{A}:\mathrm{B}) = (a:b) \Longrightarrow a\mathrm{B} = b\mathrm{A} \overset{\times c}{\Longrightarrow} bc\mathrm{A} = ac\mathrm{B} \\ (\mathrm{B}:\mathrm{C}) = (b:c) \Longrightarrow c\mathrm{B} = b\mathrm{C} \overset{\times a}{\Longrightarrow} ac\mathrm{B} = ab\mathrm{C} \end{array}\right\} \Longrightarrow bc\mathrm{A} = ab\mathrm{C} \overset{b \neq ۰}{\Longrightarrow} c\mathrm{A} = a\mathrm{C} \Longrightarrow (\mathrm{A}:\mathrm{C}) = (a:c)$$

استدلال فوق برای $b \neq ۰$ درست است.اما برای $b = ۰$ داریم $(a : c) = (a : ۰) \times (۰ : c)$ درحالی‌که برای هر دو عدد طبیعی مانند a و c داریم $(a : ۰) = (۱ : ۰)$ و $(۰ : c) = (۰ : ۱)$ و $۱ = (۱ : ۰) \times (۰ : ۱)$.
بنابراین، برای $b = ۰$، حاصل‌ضرب نسبت‌های برابر، برابر نیست. به‌عبارتی برای $b = ۰$، ضرب نسبت‌ها خوش‌تعریف نیست. ■

نکته‌ای ظریف...
نمونه‌ای از $\boxed{\text{عدم خوش‌تعریفی}}$ که در جمع و ضرب اعداد طبیعی مورد بررسی قرار گرفت.

برای هر سه مقدار A، B، و C از کمیتی دلخواه، تعریف می‌کنیم $(\mathrm{A} : \mathrm{B}) \times (\mathrm{B} : \mathrm{C}) = (\mathrm{A} : \mathrm{C})$.

هم‌چنین برای نسبت‌های عددی مانند $(a : b)$، $(c : d)$ و $(x : y)$ گوییم $(a : b) \times (c : d) = (x : y)$ اگر برای هر سه مقداری مانند A، B و C از هر کمیتی که $(\mathrm{A} : \mathrm{B}) = (a : b)$ و $(\mathrm{B} : \mathrm{C}) = (c : d)$ داشته باشیم $(\mathrm{A} : \mathrm{C}) = (x : y)$.

مثال ۲۱.۳: نشان دهید.

آ. $(۲ : ۵) = (۲ : ۳) \times (۳ : ۵)$ ب. $(a : n) \times (n : b) = (a : b)$

ج. $(۴ : ۵) = (۲ : ۳) \times (۶ : ۵)$ د. $(a : n) \times (mn : b) = (am : b)$

ه. $(۵ : ۱۴) = (۵ : ۶) \times (۳ : ۷)$ و. $(a : mn) \times (n : b) = (a : mb)$

ز. $(۱۵ : ۱۴) = (۳ : ۲) \times (۵ : ۷)$ ح. $(a : b) \times (c : d) = (ac : bd)$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۲۲.۳: در شهری کهن مبادلات با نسبتی مطابق جدول زیر مبادله می‌شوند. شخصی ادعا می‌کند اگر جو بدهد و گندم بگیرد، سپس گندم‌ها را بدهد و برنج بگیرد و بعد از آن برنج‌ها را با جو مبادله کند، جوهایش بیشتر می‌شوند. در حالی که بنا به مثال فوق انتظار داریم چنین نباشد. آیا این شخص اشتباه می‌گوید؟

۲ کاسه گندم	۱ کاسه برنج
۸ کاسه جو	۵ کاسه گندم
۱ کاسه برنج	۳ کاسه جو

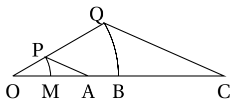
پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۲۳.۳: فرض کنید سه نقطهٔ A، B و M مطابق شکل بر نیم خط داده شده‌اند. نقطه‌ای مانند C بیابید که $(|OC| : |OM|) = (|OA| : |OM|) \times (|OB| : |OM|)$.

با دقت بخوانید...

پاسخ: برای این منظور کافی است نقاط P و Q بر خطی گذرنده از O چنان باشند که $|OM| = |OP|$ و $|OQ| = |OB|$، کافی است از نقطهٔ Q خطی موازی PA رسم کنیم تا OA یا امتداد آن را در نقطه‌ای مانند C قطع کند. دراین‌صورت بنا به قضیهٔ تالس چون $PA \parallel QC$ پس $(|OA| : |OC|) = (|OP| : |OQ|)$ و درنتیجه داریم:

$$\begin{cases} (|OA| : |OM|) = (|OA| : |OP|) = (|OC| : |OQ|) \\ (|OB| : |OM|) = (|OQ| : |OM|) \end{cases}$$



بنابراین: $(|OA| : |OM|) \times (|OB| : |OM|) = (|OC| : |OQ|) \times (|OQ| : |OM|) = (|OC| : |OM|)$ ■

۴.۱.۳ مقایسه نسبت‌ها

برای مقایسه نسبت‌ها بنا به درک شهودی، اگر مقادیر A، B و C چنان باشند که $A < B$ گوییم $(A : C) < (B : C)$. به‌طور مشابه برای هر مقداری مانند U از کمیتی دلخواه، و هر دو عدد طبیعی مانند m و n که $n < m$ داریم $nU < mU$. بنابراین، برای هر عددی مانند $k \neq ۰$ داریم

$(nU : kU) < (mU : kU)$

بنابراین، بدون توجه به مقادیری مانند U، گوییم $(n : k) < (m : k)$ اگر و تنها اگر $n < k$. پیش از این دیدم که برای $k = ۰$، داریم $(n : ۰) = (m : ۰)$؛ برای هر دو عدد طبیعی مانند m و n.

مثال ۲۴.۳: نشان دهید برای هر دو نسبت $(a : b)$ و $(c : d)$ داریم

$(a : b) < (c : d)$ اگر و تنها اگر $ad < bc$

پاسخ: $(a : b) < (c : d)$، یعنی برای هر سه مقدار A، B و C که $(A : C) = (a : b)$ و $(B : C) = (c : d)$ داریم $A < B$. بنابراین به‌صورت زیر استدلال می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} (A : C) = (a : b) \Longrightarrow bA = aC \overset{\times c}{\Longrightarrow} bcA = acC \\ (B : C) = (c : d) \Longrightarrow dB = cC \overset{\times a}{\Longrightarrow} adB = acC \end{array}\right\} \Longrightarrow bcA = adB$$

درنتیجه $A < B$ اگر و تنها اگر $ad < bc$. بنابراین $(a : b) < (c : d)$ اگر و تنها اگر $ad < bc$. ■

مثال ۲۵.۳: نشان دهید برای هر دو پاره‌خط AB و CD و هر دو عدد طبیعی مانند a و b داریم:

$(|AB| : |CD|) < (a : b)$ اگر و تنها اگر $b|AB| < a|CD|$

پاسخ: فرض کنید برای پاره‌خطی مانند MN داشته باشیم $(a:b) = (|\mathrm{CD}|:|\mathrm{MN}|)$. پس $b|\mathrm{MN}| = a|\mathrm{CD}|$. دراین‌صورت داریم:

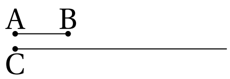
$$\begin{aligned}(|\mathrm{AB}|:|\mathrm{CD}|) < (a:b) &\iff (|\mathrm{AB}|:|\mathrm{CD}|) < (|\mathrm{MN}| < |\mathrm{CD}|)\\ &\iff |\mathrm{AB}| < |\mathrm{CD}|\\ &\iff b|\mathrm{AB}| < b|\mathrm{MN}| = a|\mathrm{CD}|\end{aligned}$$

بنابراین، $(|\mathrm{AB}|:|\mathrm{CD}|) < (a:b)$ اگر و تنها اگر $b|\mathrm{AB}| < a|\mathrm{CD}|$. ■

تمرین:

(۱) درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.
آ. هر عدد نامی است بر تعدادهای برابر.
ب. هر عدد کسری، نامی است بر تعدادهای برابر.
ج. عدد کسری سیله است برای بیان مقداری از یک کمیت براساس مقداری دیگر از آن.
د. عدد وسیله‌ای است برای بیان مقداری از یک کمیت براساس مقداری دیگر از آن.
ه. هر عدد کسری یک عدد طبیعی است.
و. هر عدد طبیعی یک عدد کسری است.

(۲) در یک گروه گردشگری ۲۵ زن و ۱۵ مرد حضور دارند. از این میان ۵ زن جوان و ۱۵ زن سالمند هستند. همچنین از میان مردان ۳ نفر جوان و ۷ نفر میانسال هستند. نسبت‌های زیر را بیابید.
آ. (تعداد مردان: تعداد زنان) ب. (تعداد زنان جوان: تعداد کلِّ زنان)
ج. (تعداد زنان سالمند: تعداد زنان میانسال) د. (تعداد مردان میانسال: تعداد مردان جوان)
ه. (تعداد مردان سالمند: تعداد زنان میانسال) و. (مردان جوان: تعداد زنان جوان)



(۳) نقطهٔ D را بر نیم‌خط داده شده چنان بیابید که:
آ. $|\mathrm{CD}| = ۳|\mathrm{AB}|$ ب. $|\mathrm{AB}| = ۵|\mathrm{CD}|$
ج. $(|\mathrm{CD}|:|\mathrm{AB}|) = (۴:۱)$ د. $(|\mathrm{AB}|:|\mathrm{CD}|) = (۴:۱)$
ه. $(|\mathrm{AB}|:|\mathrm{CD}|) = (۲:۳)$ و. $(|\mathrm{AB}|:|\mathrm{CD}|) = (۵:۳)$

(۴) در شهری کهن با ۹ سکه نقره می‌توان ۲ گوسفند و با ۵ سکه برنز می‌توان ۳ مرغ خرید. همچنین هر ۷ سکه نقره با ۱۱ سکه برنز مبادله می‌شود. هر یک از نسبت‌های زیر را بیابید.
آ. نسبت تعداد سکه‌های نقره به تعداد گوسفندان در یک مبادله
ب. نسبت تعداد سکه‌های برنز به تعداد مرغ‌ها در یک مبادله.
ج. نسبت تعداد سکه‌های برنز به تعداد سکه‌های نقره در یک مبادله
د. نسبت تعداد سکه‌های نقره به تعداد مرغ‌ها در یک مبادله.
ه. نسبت تعداد سکه های برنز به تعداد گوسفندان در یک مبادله.
و. نسبت تعداد گوسفندان به تعداد مرغ‌ها در یک مبادله.

(۵) فرض کنید نسبت گنجایش ظرف A به گنجایش ظرف B برابر است با (۳ : ۵) اگر نسبت گنجایش ظرف C به گنجایش طرف B برابر است با (۷ : ۱۳). نسبت گنجایش ظرف A به C را بیابید.

(۶) درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را برای هر $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ بررسی کنید.
آ. اگر $n \in \mathbb{N}$ چنان باشد که $a = nb$ و $c = nd$ آن‌گاه $(a:b) = (c:d)$.
ب. اگر $b \in \mathbb{N}$ چنان باشد که $a = nc$ و $c = nd$ آن‌گاه $(a:b) = (c:d)$.

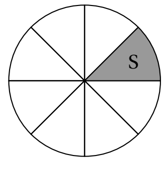
ج. اگر $(a:b)=(c:d)$ آن‌گاه وجود دارد $n\in\mathbb{N}$ به‌نحوی که $a=nb$ و $c=nd$.
د. اگر $(a:b)=(c:d)$ آن‌گاه وجود دارد $n\in\mathbb{N}$ به‌نحوی که $a=nc$ و $b=nd$

(۷) درمبادلات شهری کهن، نسبت حجم گندم به جو (۳ : ۸) و ذرت به جو (۵ : ۱۳) است.
آ. در این شهر، گندم با ارزش‌تر است یا ذرت؟
ب. در این شهر، با ۴۰ کیسه گندم، چند کیسه ذرت می‌توان خرید؟
ج. مردم این شهر هر کیسه گندم را با یک کیسه جو مبادله می‌کنند. آیا می‌توانید روشی بسازید که بدون هیچ کار و تلاشی، و صرفا از داشتن مغازه‌ای که ذرت، گندم و جو را بدون گرفتن هیچ سودی مبادله می‌کند، سود ببرد و سرمایه‌اش زیاد شود؟

۲.۳ کسر

اگر عجله دارید ...
به‌خواندن مطالب مهم (گزاره‌ها، تعاریف و ...) اکتفا کنید.

مقادیر غیر قابل شمارش را می‌توان برحسب مقادیر دیگری از **همان جنس** شمارش کرد. معمولاً مقداری را به‌عنوان معیار مشخص کرده و همهٔ مقادیر را برحسبِ آن بیان می‌کنیم. چون مقدار معیار برحسب خودش با ۱ شمرده می‌شود، آن را «**واحد**» می‌نامیم.[۱] در عباراتی مانند «نصف دایره» و «نصف سیب» می‌توان نمونه‌هایی از بیان مقادیر کوچک‌تر از واحد را برحسب واحد مشاهده کرد. نصف دایره به قسمتی از دایره گفته می‌شود که ۲ برابر آن یک دایرهٔ کامل است. این راهکار ساده، ایدهٔ ابداع کسر را در خود داشته است.



مطابق شکل مقابل، یک دایره را به ۸ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. اگر مساحت دایره را با C و مساحت قسمت طوسی را با S نشان دهیم، داریم $C=۸S$ که به‌صورت «C مساوی است با ۸تا S» یا «C هشت برابرِ S است» خوانده می‌شود. برای بیان S برحسب C می‌نویسیم $S=\frac{۱}{۸}C$ و آن را به‌صورت «S برابر است با یک‌هشتمِ C» می‌خوانیم. در این نگارش C را به عنوان واحد شمارش درنظر گرفته و S را برحسب C بیان کرده‌ایم. به‌عبارتی:

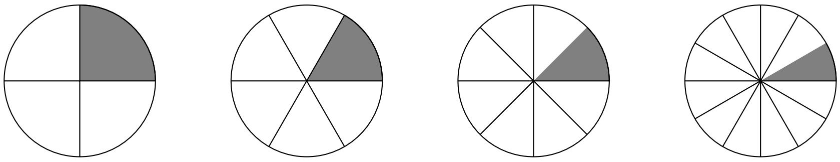
برای هر مقداری مانند A از کمیتی دلخواه و هر عدد طبیعی مانند n،
عبارت $\frac{۱}{n}A$ به‌معنای مقداری مانند B از همان کمیت است که $A=nB$.

بنابراین، عبارت $\frac{۱}{۰}A$ به‌معنای مقداری مانند B است که $A=۰B$. این عبارت تنها زمانی درست است که A هیچ مقداری را شامل نشود و در این صورت B می‌تواند هر مقداری باشد. بنابراین عبارت $\frac{۱}{۰}A$ به هیچ مقدار مشخصی اشاره نمی‌کند؛ لذا آن را بی‌معنا دانسته و تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

برای هر دو مقدارِ A و B از کمیتی دلخواه و هر عدد طبیعیِ ناصفر مانند n داریم:
$B=\frac{۱}{n}A$ اگر و تنها اگر $A=nB$

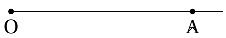
مثال ۲۶.۳: در هر یک از موارد زیر چه مقداری از مساحت دایره رنگ شده است.

[۱] کلمهٔ «واحد» به معنای «یک» است.



د.   ج.   ب.   آ.

پاسخ: آ. ب. $\frac{۱}{۴}$ ج. $\frac{۱}{۶}$ د. $\frac{۱}{۸}$ ه. $\frac{۱}{۱۲}$ ■



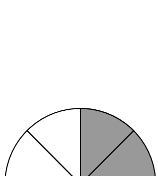
مثال ۲۷.۳: در هر یک از موارد زیر، نقطه B را بر نیم‌خط داده شده چنان بیابید که:
آ. $|OB| = \frac{۱}{۳}|OA|$ ب. $|OB| = \frac{۱}{۵}|OA|$ ج. $|OB| = \frac{۱}{۱}|OA|$

پاسخ: آ. کافی است نقطه B را چنان بیابیم که $|OA| = ۱|OA| = ۳|OB|$ یا به عبارتی $(۱ : ۳) = (|OA| : |OB|)$.
بنابراین کافی است پاره‌خط OA را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کنیم.
موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

در محور اعداد طبیعی دیدیم که به هر عدد طبیعی مانند ۲، نقطه‌ای مانند A بر محور اعداد اختصاص دارد و $|OA| = ۲|OU|$ که در آن $|OU|$ طول واحد است و عدد ۱ به نقطهٔ U اختصاص می‌یابد؛ چون $|OU| = ۱|OU|$. به‌طور مشابه، به هر کسری مانند $\frac{۱}{۳}$ نیز نقطه‌ای مانند B اختصاص می‌دهیم که $|OB| = \frac{۱}{۳}|OU|$؛ یا به‌عبارتی $|OU| = ۳|OB|$.

عبارت $\frac{۱}{۱}A$ به‌معنای مقداری مانند B است که $A = ۱B$. بنابراین $\frac{۱}{۱}A = A$ و چون $A = ۱A$ پس می‌توان گفت $\frac{۱}{۱} = ۱$. بر محور اعداد نیز $\frac{۱}{۱}$ به همان نقطه‌ای اختصاص می‌یابد که عدد ۱ به آن اختصاص دارد.

البته به جای این نمادگذاری می توانستیم از هر نماد گذاری دیگری نیز استفاده کنیم. به طور مثال مصریان باستان، کسرهایی به شکل $\frac{۱}{n}$ را به صورت $\overline{n}$ نشان می‌دادند. در شکل مقابل ۲تا $\frac{۱}{۸}$ رنگ شده است و گوییم «دو هشتم از مساحت شکل رنگ شده است». «دو هشتم» را به‌صورت $\frac{۲}{۸}$ نمایش می‌دهیم. به‌طور مشابه، برای هر دو عدد طبیعی مانند m و n که $n \neq ۰$، mتا $\frac{۱}{n}$ را «m، nاُم» خوانده و به‌صورت $\frac{m}{n}$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دقیق‌تر، $A = \frac{m}{n}B$ خلاصه نویسی‌ای از عبارت $A = m\left(\frac{۱}{n}B\right)$ است. یعنی، اگر مقدار S چنان باشد که $S = \frac{۱}{n}B$ آن‌گاه $A = mS$.

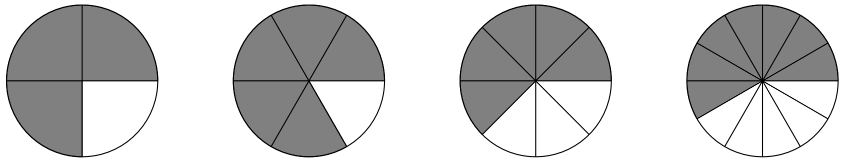


$\frac{۲}{۸}$ دایره رنگ شده است.

عبارت $\frac{m}{n}A$ را به‌معنای $m\left(\frac{۱}{n}A\right)$ و نوعی خلاصه‌نویسی برای آن درنظر می‌گیریم.

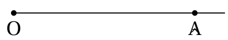
واضح است که عبارت $\frac{m}{n}A$ برای هر دو عدد طبیعی مانند m و n که $n \neq ۰$ و هر مقداری مانند A از هر کمیت دلخواه بامعناست.

مثال ۲۸.۳: در هر یک از موارد زیر چه مقداری از مساحت دایره رنگ شده است.



آ.   ب.   ج.   د.

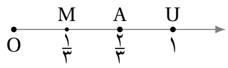
پاسخ: آ. $\frac{۳}{۴}$ ب. $\frac{۵}{۶}$ ج. $\frac{۵}{۸}$ د. $\frac{۷}{۱۲}$ ■



مثال ۲۹.۳: در هر یک از موارد زیر نقطه B را بر نیم‌خط داده شده چنان بیابید که:

آ. $|OB| = \frac{۲}{۳}|OA|$ ب. $|OB| = \frac{۵}{۳}|OA|$ ج. $|OB| = \frac{۶}{۳}|OA|$

پاسخ: آ. $|OB| = \frac{۲}{۳}|OA| = ۲\left(\frac{۱}{۳}|OA|\right)$ بنابراین کافی است M را چنان بیابیم که $|OM| = \frac{۱}{۳}|OA|$ و سپس نقطه B را چنان بیابیم که $|OB| = ۲|OM|$.
موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■



برای نمایش $\frac{۲}{۳}$ بر محور اعداد، باید نقطه‌ای مانند A بیابیم که $|OA| = \frac{۲}{۳}|OU| = ۲\left(\frac{۱}{۳}|OU|\right)$. بنابراین، اگر نقطهٔ M را چنان بیابیم که $|OM| = \frac{۱}{۳}|OU|$، برای نقطهٔ A داریم $|OA| = ۲|OM|$.

مثال ۳۰.۳: کسرهای زیر را بر محور اعداد نمایش دهید.

آ. $\frac{۳}{۴}$ ب. $\frac{۳}{۵}$ ج. $\frac{۷}{۴}$ د. $\frac{۷}{۳}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۳۱.۳: هر یک از مقادیر زیر را مشخص کنید:

آ. $\frac{۳}{۴}(\text{۸ نفر})$ ب. $\frac{۵}{۲}(\text{۱۰ سیب})$

پاسخ: آ. اگر ۸ نفر را به ۴ گروه تقسیم کنیم، هر گروه شامل۲ نفر خواهد بود. پس $\frac{۱}{۴}(\text{۸ نفر}) = (\text{۲ نفر})$.
بدین ترتیب $\frac{۳}{۴}(\text{۸ نفر}) = ۳\left(\frac{۱}{۴}(\text{۸ نفر})\right) = ۳(\text{۲ نفر}) = (\text{۶ نفر})$
ب. $\frac{۵}{۲}(\text{۱۰ سیب}) = ۵\left(\frac{۱}{۲}(\text{۱۰ سیب})\right) = ۵(\text{۵ سیب}) = (\text{۲۵ سیب})$ ■

در گزارهٔ فوق نمادهای A و B می‌توانند به مقادیری از هر کمیتی از جمله کمیت تعداد اشاره کنند که مقادیر آن اعداد طبیعی هستند. به‌طور مثال با قرار دادن $A = ۶$ و $B = ۲$ داریم $۳B = A$ پس $B = \frac{۱}{۳}A$ و درنتیجه $\frac{۱}{۳}(۶) = ۲$.

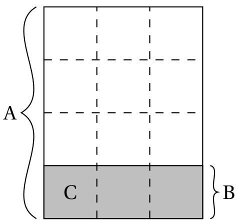
مثال ۳۲.۳: هر یک از مقادیر زیر را در اعداد طبیعی بیابید.

آ. $\frac{۱}{۳}(۱۵)$ ب. $\frac{۱}{۳}(۰)$ ج. $\frac{۱}{۳}(۵)$

پاسخ: آ. عددی طبیعی مانند x چنان است که $x = \frac{۱}{۳}(۱۵)$، اگر $۳x = ۱۵$. پس $x = ۵$.
ب. عددی طبیعی مانند x چنان است که $x = \frac{۱}{۳}(۰)$، اگر $۳x = ۰$. پس $x = ۰$.

ج . عددی طبیعی مانند x چنان است که $x = \frac{۱}{۳}(۵)$، اگر $۳x = ۵$. این معادله در $\mathbb{N}$ جواب ندارد، پس $\frac{۱}{۳}(۵)$ به‌عنوان یک تعداد (عدد طبیعی) بی‌معناست. ■

در شکل مقابل، مساحت کل شکل را با A، مساحت هر سطر را با B و مساحت هر مربع کوچک را با C نمایش می‌دهیم. بنابراین، $\mathrm{B} = ۳\mathrm{C}$، $\mathrm{A} = ۴\mathrm{B} = ۴(۳\mathrm{C}) = (۴ \times ۳)\mathrm{C} = ۱۲\mathrm{C}$ و درنتیجه



$\mathrm{B} = ۳\mathrm{C}$
$\mathrm{A} = ۴\mathrm{B} = ۱۲\mathrm{C}$

$$\begin{cases} \mathrm{C} = \frac{۱}{۱۲}\mathrm{A} \\ \mathrm{B} = \frac{۱}{۴}\mathrm{A} \\ \mathrm{B} = ۳\mathrm{C} = ۳\left(\frac{۱}{۱۲}\mathrm{A}\right) = \frac{۳}{۱۲}\mathrm{A} \end{cases}$$

بدین‌ترتیب، $\frac{۱}{۴}\mathrm{A} = \frac{۳}{۱۲}\mathrm{A}$.

به‌طور مشابه نشان می‌دهیم برای هر مقداری مانند A از هر کمیت دلخواه داریم $\frac{۱}{۴}\mathrm{A} = \frac{۳}{۱۲}\mathrm{A}$. کافی است قرار دهیم $\mathrm{C} = \frac{۱}{۱۲}\mathrm{A}$ و $\mathrm{B} = ۳\mathrm{C}$. در این صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{B} = ۳\mathrm{C} = ۳\left(\frac{۱}{۱۲}\mathrm{A}\right) = \frac{۳}{۱۲}\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B} = \frac{۳}{۱۲}\mathrm{A} \\ \mathrm{A} = ۱۲\mathrm{C} = ۴(۳\mathrm{C}) = ۴\mathrm{B} \Longrightarrow \mathrm{B} = \frac{۱}{۴}\mathrm{A} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{۳}{۱۲}\mathrm{A} = \frac{۱}{۴}\mathrm{A}$$

بنابراین، برای هر مقداری مانند A از هر کمیت دلخواه داریم $\frac{۱}{۴}\mathrm{A} = \frac{۱}{۱۲}\mathrm{A}$ و می‌نویسیم $\frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۱۲}$.

پیش از این در اعداد طبیعی دیدیم که برای هر دو عد طبیعی و ناصفر مانند m و n و هر مقداری مانند A، داریم $m\mathrm{A} = n\mathrm{A}$ اگر و تنها اگر $m = n$.

در اینجا اعداد طبیعی نیز برای بیان مقداری از یک کمیت بر حسب مقدار دیگری از همان جنس استفاده می‌شوند. بنابراین، با ابتکاری ساده، هر کسر را نمایشی برای یک عدد درنظر می‌گیریم که آن را «عدد کسری» می‌خوانیم. بنابراین، برای هر دو عدد کسری مانند x و y، تساوی $x = y$ را به‌معنای $x\mathrm{A} = y\mathrm{A}$، برای هر مقداری مانند A از هر کمیت دلخواه درنظر می‌گیریم.

هر عدد کسری، مقداری از یک کمیت را بر حسب مقدار دیگری از همان جنس بیان می‌کند و کسرها نیز وسیله‌ای برای بیان اعداد کسری هستند.

دو کسر را برابر گوییم اگر هر دو نمایشی برای یک عدد کسری باشند. به‌عبارت دیگر:

دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ یک عدد کسری را نمایش داده و می‌نویسیم $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ اگر برای هر مقداری مانند A از هر کمیتی داشته باشیم $\frac{a}{b}\mathrm{A} = \frac{c}{d}\mathrm{A}$.

برای هر عدد طبیعی مانند n داریم $n\mathrm{A} = n\left(\frac{۱}{۱}\mathrm{A}\right) = \frac{n}{۱}\mathrm{A}$. از آنجا که در عباراتی مانند ۳A، اعداد طبیعی، مقداری از یک کمیت را برحسب مقدار دیگری از همان جنس بیان می‌کنند و در نقش اعداد کسری ظاهر می‌شوند. پس هر عدد طبیعی را یک عدد کسری درنظر می‌گیریم.

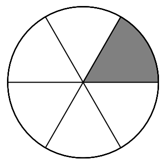
هر عدد طبیعی مانند n، عددی کسری است که با کسر $\frac{n}{۱}$ نمایش داده می‌شود.

برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b و هر مقداری مانند A از هر کمیت دلخواه اگر $a=b$، آن‌گاه $a\text{A}=b\text{A}$. به‌طور مشابه گوییم $\frac{a}{n}=\frac{b}{n}$ اگر و تنها اگر برای هر مقداری مانند A از هر کمیت دلخواه داشته باشیم $\frac{a}{n}\text{A}=\frac{b}{n}\text{A}$. از طرفی، با قرار دادنِ $\text{B}\frac{۱}{n}\text{A}$ داریم:

$$\frac{a}{n}\text{A}=\frac{b}{n}\text{A}\Longleftrightarrow a\left(\frac{۱}{n}\text{A}\right)=b\left(\frac{۱}{n}\text{A}\right)\Longleftrightarrow a\text{B}=b\text{B}\Longleftrightarrow a=b$$

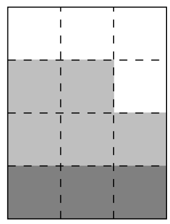
بنابراین:

$$\frac{a}{n}=\frac{b}{n}\Longleftrightarrow a=b \qquad (۱.۳)$$



در شکل مجاور، مساحت کل دایره را A و مساحت قطعهٔ رنگ شده را S می‌نامیم. از آنجا که $\text{A}=۶\text{S}$ پس $\text{S}=\frac{۱}{۶}\text{A}$ و درنتیجه $\frac{۶}{۶}\text{A}=۶\left(\frac{۱}{۶}\text{A}\right)=۶\text{S}=\text{A}$. به‌طور مشابه، چون برای هر عدد طبیعی و ناصفر مانند n و هر مقداری مانند A از هر کمیت دلخواه داریم $\frac{n}{n}\text{A}=\text{A}$، پس می‌نویسیم

$$\frac{n}{n}=۱ \qquad (۲.۳)$$



$\left(\frac{۳}{۱۲}+\frac{۵}{۱۲}\right)\text{A}=\frac{۳+۵}{۱۲}\text{A}$

اگر A به مساحت کل شکل مقابل اشاره کند، مساحت قسمتی که روشن‌تر رنگ شده با $\frac{۳}{۱۲}\text{A}$ و مساحت قسمتی که تیره‌تر رنگ شده با $\frac{۵}{۱۲}\text{A}$ نشان داده می‌شود. در این صورت، $\frac{۳}{۱۲}\text{A}+\frac{۵}{۱۲}\text{A}$ به مساحت کل قسمت رنگ شده اشاره دارد که برابر است با $\frac{۳+۵}{۱۲}\text{A}$. همان‌طور که ۳ سیب بعلاوهٔ ۲ سیب را $(۳+۲)$ سیب می‌خوانیم، $\frac{۳}{۱۲}\text{A}+\frac{۵}{۱۲}\text{A}$ را هم به‌صورت $\left(\frac{۳}{۱۲}+\frac{۵}{۱۲}\right)\text{A}$ نمایش می‌دهیم.

بدون استفاده از شکل و صرفاً با استفاده از تساوی‌های قبل، با قرار دادن $\text{B}=\frac{۱}{n}\text{A}$ داریم:

$$\frac{a}{n}\text{A}+\frac{b}{n}\text{A}=a\left(\frac{۱}{n}\text{A}\right)+b\left(\frac{۱}{n}\text{A}\right)=a\text{B}+b\text{B}=(a+b)\text{B}=(a+b)\left(\frac{۱}{n}\text{A}\right)=\frac{a+b}{n}\text{A}$$

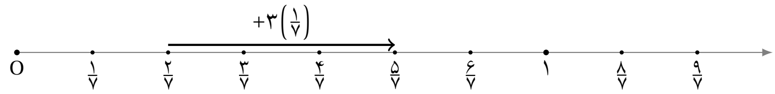
بنابراین، اگر $\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\right)\text{A}$ را به‌معنای $\frac{a}{n}\text{A}+\frac{b}{n}\text{A}$ درنظر بگیریم، برای هر مقداری مانند A از هر کمیت دلخواه و هر سه عدد طبیعی مانند a، b و n که $n\neq ۰$ داریم:

$$\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\right)\text{A}=\frac{a}{n}\text{A}+\frac{b}{n}\text{A}=\frac{a+b}{n}\text{A}$$

که آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \qquad (۳.۳)$$

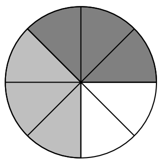
برای نمایش $\frac{a}{n}+\frac{b}{n}$ بر محور اعداد، چون $\frac{a}{n}=a\left(\frac{۱}{n}\right)$ و $\frac{b}{n}=b\left(\frac{۱}{n}\right)$، از نقطهٔ متناظر با $\frac{a}{n}$ به‌اندازهٔ b تا $\frac{۱}{n}$ جلو می‌رویم. به‌طور مثال برای نمایش $\frac{۳}{۷}+\frac{۲}{۷}$، از نقطهٔ $\frac{۲}{۷}$، به‌اندازهٔ ۳ تا $\frac{۱}{۷}$ به جلو می‌رویم.



مثال ۳۳.۳: جمع‌های زیر را بر محور اعداد نشان دهید.

آ. $\frac{۳}{۵}+\frac{۴}{۵}$ ب. $\frac{۲}{۹}+\frac{۵}{۹}$ ج. $۲+\frac{۳}{۴}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■



اگر مساحت دایره را با A، مساحت قسمت تیره‌تر را با B و مساحت هر قطعه را با C نمایش دهیم داریم $B=۳C=۳\left(\frac{۱}{۸}A\right)=\frac{۳}{۸}A$ و مساحت کل قسمت رنگ شده برابر است با

$$۲B=۲(۳C)=(۲\times۳)C=(۲\times۳)\left(\frac{۱}{۸}A\right)=\frac{۲\times۳}{۸}A$$

اما از طرفی هم داریم $۲B=۲\left(\frac{۳}{۸}A\right)$. بنابراین، $۲\left(\frac{۳}{۸}A\right)=\frac{۲\times۳}{۸}A$.

به‌طور مشابه برای هر سه عدد طبیعی مانند k، m و n که $n\neq ۰$ و هر مقدار دلخواه مانند A از هر کمیت دلخواهی داریم $k\left(\frac{m}{n}A\right)=\frac{km}{n}A$. بنابراین گوییم kتا $\frac{m}{n}$ برابر است با $\frac{km}{n}$ و آن را به‌صورت $k\times\frac{m}{n}$ نمایش داده و می‌نویسیم:

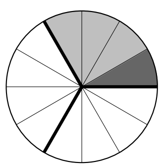
$$k\times\frac{m}{n}=\frac{km}{n} \qquad (۴.۳)$$

واضح است که عبارت $k\times\frac{m}{n}$ را می‌توان به‌صورت $\overbrace{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\cdots+\frac{m}{n}}^{k\text{ بار}}$ درنظر گرفت که در این صورت داریم:

$$k\times\frac{m}{n}=\overbrace{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\cdots+\frac{m}{n}}^{k\text{ بار}}=\frac{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{k\text{ بار}}}{n}=\frac{k\times m}{n}$$

مثال ۳۴.۳: اگر گنجایش کاسه را با A و گنجایش دیگ را با B نمایش دهیم، داریم $۳A=\frac{۶}{۷}B$. کسر $\frac{a}{b}$ را چنان بیابید که $A=\frac{a}{b}B$.

پاسخ: اگر $A=\frac{a}{b}B$ پس $۳A=۳\left(\frac{a}{b}B\right)=\left(۳\times\frac{a}{b}\right)B=\frac{۳a}{b}B=\frac{۶}{۷}B$ و درنتیجه $\frac{a}{b}=\frac{۲}{۷}$. ■



در شکل مقابل $\frac{۱}{۳}$ از دایره رنگ شده است که آن را با B و مساحت کل دایره را با A نمایش می‌دهیم. پس $\frac{۱}{۴}B$ تیره‌تر رنگ شده است و گوییم «یک‌چهارمِ یک‌سومِ A تیره‌تر است» و می‌نویسیم «$\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۳}A\right)$ تیره‌تر است». به‌سادگی می‌توان دید که $\frac{۱}{۳\times۴}A$ تیره‌تر رنگ شده است. بنابراین

$$\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۳}A\right)=\frac{۱}{۳\times۴}A$$

به‌طور مشابه، برای هر دو عدد طبیعی مانند m و n که $n \neq ۰$ و هر مقدار دلخواه مانند A از هر کمیتی، داریم $\frac{۱}{m}\left(\frac{۱}{n}\mathrm{A}\right) = \frac{۱}{m \times n}\mathrm{A}$. بنابراین، تعریف می‌کنیم

$$\frac{۱}{m} \times \frac{۱}{n} = \frac{۱}{m \times n} \qquad (۵.۳)$$

مثال ۳۵.۳: در دانشگاه تبریز، یک سوم دانشجویان ترک زبان هستند و نصف دانشجویان ترک زبان دانشگاه، اهل آذربایجان شرقی‌اند. چه کسری از دانشجویان دانشگاه، اهل آذربایجان شرقی هستند؟ (توجه: تمامی اهالی آذربایجان شرقی ترک زبان هستند)

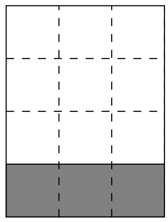
پاسخ: کافی است تعداد دانشجویان دانشگاه را با A، تعداد دانشجویان ترک زبان را با B و تعداد دانشجویان اهل آذربایجان شرقی را با C نمایش دهیم. در این‌صورت داریم $\mathrm{B} = \frac{۱}{۳}\mathrm{A}$ و

$$\mathrm{C} = \frac{۱}{۲}\mathrm{B} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۳}\mathrm{A}\right) = \left(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳}\right)\mathrm{A} = \frac{۱}{۶}\mathrm{A}$$

درنتیجه $\mathrm{C} = \frac{۱}{۶}\mathrm{A}$. ■

مثال ۳۶.۳: گنجایش ۳ کاسه برابر است با نصف گنجایش دیگ. گنجایش کاسه را برحسب گنجایش دیگ بیان کنید.

پاسخ: اگر گنجایش کاسه را با A و گنجایش دیگ را با B نمایش دهیم، داریم $۳\mathrm{A} = \frac{۱}{۲}\mathrm{B}$. بنابراین، $\mathrm{A} = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۲}\mathrm{B}\right) = \left(\frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲}\right)\mathrm{B} = \frac{۱}{۶}\mathrm{B}$. پس $\mathrm{A} = \frac{۱}{۶}\mathrm{B}$. ■



$\frac{۳}{۳ \times ۴}\mathrm{A} = \frac{۱}{۴}\mathrm{A}$

در شکل مقابل مساحت کل شکل را A خوانده که از ۴×۳ مربع کوچک‌تر تشکیل شده که ۳ مربع آن رنگ شده است. درنتیجه مساحت قسمت رنگ شده برابر است با $\frac{۳}{۳ \times ۴}\mathrm{A}$. از طرفی هم ۱ سطر از ۴ سطر ، یعنی $\frac{۱}{۴}\mathrm{A}$ رنگ شده است.

به‌طور مشابه برای هر دو عدد طبیعی مانند m و n که $n \neq ۰$ و هر مقداری مانند A داریم:

$$\frac{m}{mn}\mathrm{A} = m\left(\frac{۱}{mn}\mathrm{A}\right) = m\left(\frac{۱}{m}\left(\frac{۱}{n}\mathrm{A}\right)\right) = \frac{m}{m}\left(\frac{۱}{n}\mathrm{A}\right) = \frac{۱}{n}\mathrm{A}$$

بنابراین داریم $\frac{m}{mn}\mathrm{A} = \frac{۱}{n}\mathrm{A}$ و درنتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{m}{mn} = \frac{۱}{n} \qquad (۶.۳)$$

و به‌طور مشابه داریم:

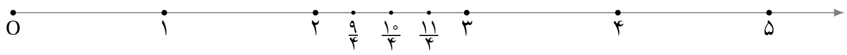
$$\frac{mn}{n}\mathrm{A} = mn\left(\frac{۱}{n}\mathrm{A}\right) = m\left(n\left(\frac{۱}{n}\mathrm{A}\right)\right) = m\left(\frac{n}{n}\mathrm{A}\right) = m\mathrm{A}$$

پس برای هر مقداری مانند A از هر کمیت دلخواه نیز داریم $\frac{mn}{n}\mathrm{A} = m\mathrm{A}$ که آن را به‌صورت زیر

خلاصه‌نویسی می‌کنیم.

$$\frac{mn}{n} = m \tag{۷.۳}$$

برای نمایش کسری مانند $\frac{۱۱}{۴}$ بر محور اعداد، آن را به صورت $\frac{۸+۳}{۴}$ نوشته و چون
$\frac{۸+۳}{۴} = \frac{۸}{۴} + \frac{۳}{۴} = ۲ + \frac{۳}{۴}$
از نمایش حاصلِ $۲ + \frac{۳}{۴}$ به‌جای نمایش $\frac{۱۱}{۴}$ استفاده کنیم.

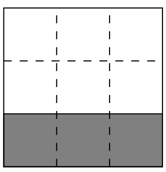


برای ساده کردن کسری مانند $\frac{۲۰}{۳}$، با تقسیم ۲۰ بر ۳ داریم $۲۰ = ۶ \times ۳ + ۲$ و درنتیجه:
$\frac{۲۰}{۳} = \frac{(۶\times۳)+۲}{۳} = \frac{۶\times۳}{۳} + \frac{۲}{۳} = ۶ + \frac{۲}{۳}$
معمولاً عبارت $۶ + \frac{۲}{۳}$ را به‌صورت $۶\frac{۲}{۳}$ نوشته و آن را کسر مخلوط می‌خوانیم که مخلوطی از کسر و عدد طبیعی است. به‌طور کلی عبارتی مانند $n\frac{a}{b}$ را کسر مخلوط خوانده و آن را به‌معنای $n + \frac{a}{b}$ درنظر می‌گیریم که برابر است با $\frac{nb+a}{b}$.

مثال ۳۷.۳: کسرهای زیر را به صورت کسر مخلوط بنویسید.

آ. $\frac{۲۵}{۴}$ ب. $\frac{۱۳۵}{۱۳}$ ج. $\frac{۲۵۳۴}{۱۵۳}$ د. $\frac{۲۴۳۱}{۴۳۱}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■


$\frac{۱}{۳}(۳A) = A$

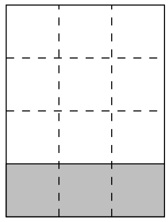
در شکل مقابل اگر مساحت هر ستون را با A نمایش دهیم، مساحت کل شکل برابر است با ۳A و درنتیجه $\frac{۱}{۳}(۳A)$ رنگ شده است که برابر است با A. همچنین، بنا به تعریف اگر $B = nA$، آن‌گاه $A = \frac{۱}{n}B$ و درنتیجه برای هر عدد طبیعی مانند n و هر مقداری مانند A از کمیتی دلخواه داریم $\frac{۱}{n}(nA) = \frac{۱}{n}B = A$ که به‌صورت زیر خلاصه‌نویسی می‌شود:

$$\frac{۱}{n}(n) = ۱ \tag{۸.۳}$$

و همچنین داریم: $n\left(\frac{m}{n}A\right) = n\left(m\left(\frac{۱}{n}A\right)\right) = mn\left(\frac{۱}{n}A\right) = m\left(n\left(\frac{۱}{n}A\right)\right) = mA$
و در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$n\left(\frac{m}{n}\right) = m \tag{۹.۳}$$

نکته‌ای ظریف ... تساوی $\frac{۱}{n}(m) = \frac{m}{n}$ بدین معناست که برای هر دو عدد طبیعی مانند m و n که $n \neq ۰$ و هر مقداری مانند A از هر کمیتی داریم $\frac{۱}{n}(mA) = m\left(\frac{۱}{n}A\right)$.


$\frac{۱}{۴}(۳A) = ۳\left(\frac{۱}{۴}A\right)$

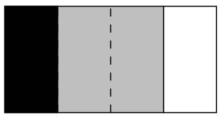
اگر A به مساحت یک ستون در شکل مقابل اشاره کند، مساحت کل شکل برابر است با ۳A و مساحت قسمت رنگ شده با $\frac{۱}{۴}(۳A)$ نمایش داده می‌شود. از طرفی چون مساحت هر مربع برابر است با $\frac{۱}{۴}A$ پس مساحت قسمت رنگ شده برابر است با $۳\left(\frac{۱}{۴}A\right)$ که آن را به‌صورت $\frac{۳}{۴}A$ می‌نویسیم. بنابراین، $\frac{۱}{۴}(۳A) = ۳\left(\frac{۱}{۴}A\right)$.

البته بدون استفاده از درک شهودی و صرفاً به کمک تساوی‌های قبل داریم:

$$\frac{۱}{n}(mA) = \frac{۱}{n}\left(m\left(\frac{n}{n}A\right)\right) = \frac{۱}{n}\left(\frac{mn}{n}A\right) = \frac{۱}{n}\left(n\left(\frac{m}{n}A\right)\right) = \frac{m}{n}A$$

بنابراین، برای هر دو عدد طبیعی مانند m و n که $n \neq ۰$ و برای هر مقداری مانند A از کمیتی دلخواه داریم $\frac{۱}{n}(mA) = \frac{m}{n}A$. پس می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{n}(m) = \frac{m}{n} = m\left(\frac{۱}{n}\right) \qquad (۱۰.۳)$$


$\frac{۱}{۳}\left(\frac{۳}{۴}A\right) = \frac{۱}{۴}A$

در شکل مقابل، اگر مساحت کل شکل را با A نمایش دهیم، مساحت قسمت رنگ شده برابر است با $\frac{۳}{۴}A$ و اگر مساحت قسمت رنگ شده را با B نمایش دهیم، $\frac{۱}{۳}B$ سیاه است. به‌عبارتی $\frac{۱}{۳}\left(\frac{۳}{۴}A\right)$ سیاه است. چون $\frac{۱}{۴}A$ سیاه است، پس $\frac{۱}{۳}\left(\frac{۳}{۴}A\right) = \frac{۱}{۴}A$. همچنین، برای هر مقداری مانند A از هر کمیتی و هر دو عدد طبیعی مانند m و n اگر قرار دهیم $B = \frac{۱}{n}A$ داریم

$$\frac{۱}{m}\left(\frac{m}{n}A\right) = \frac{۱}{m}(mB) = B = \frac{۱}{n}A$$

و درنتیجه $\frac{۱}{m}\left(\frac{m}{n}A\right) = \frac{۱}{n}A$ و می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{m} \times \frac{m}{n} = \frac{۱}{n} \qquad (۱۱.۳)$$

به‌طور مشابه برای هر سه عدد طبیعی مانند k، m و n و هر مقداری مانند A از هر کمیتی داریم:

$$\frac{k}{m}\left(\frac{m}{n}A\right) = k\left(\frac{۱}{m}\left(\frac{m}{n}A\right)\right) = k\left(\frac{۱}{n}A\right) = \frac{k}{n}A$$

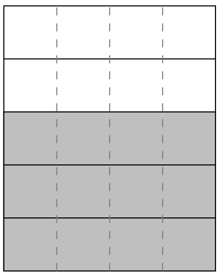
و درنتیجه $\frac{k}{m}\left(\frac{m}{n}A\right) = \frac{k}{n}A$ که به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{k}{m} \times \frac{m}{n} = \frac{k}{n} \qquad (۱۲.۳)$$

با توجه به تساویهای فوق داریم:

$$\begin{aligned}\frac{m}{n}\mathrm{A} &= m\left(\frac{۱}{n}\mathrm{A}\right)\\ &= m\left(\frac{k}{kn}\mathrm{A}\right)\\ &= m\left(k\left(\frac{۱}{kn}\mathrm{A}\right)\right)\\ &= mk\left(\frac{۱}{kn}\mathrm{A}\right)\\ &= \frac{km}{kn}\mathrm{A}\end{aligned}$$

بنابراین برای هر مقداری مانند A از هر کمیتی و هر سه عدد طبیعی مانند m، n و k داریم
$\frac{m}{n}\mathrm{A} = \frac{km}{kn}\mathrm{A}$
که خلاصه‌نویسی زیر را برای آن ارائه می‌دهیم.



$$\frac{m}{n} = \frac{km}{kn} \qquad (۱۳.۳)$$

برای درک شهودی تساوی فوق، در شکل مقابل، با توجه به سطرها، $\frac{۳}{۵}\mathrm{A}$ رنگ شده و با توجه به مربع‌ها $\frac{۴ \times ۳}{۴ \times ۵}\mathrm{A}$ رنگ شده است. بنابراین، $\frac{۳}{۵}\mathrm{A} = \frac{۴ \times ۳}{۴ \times ۵}\mathrm{A}$.

با توجه به تساوی فوق، می‌توان کسری مانند $\frac{۶}{۱۰}$ را به‌صورت زیر نوشت.

$$\frac{۶}{۱۰} = \frac{۲ \times ۳}{۲ \times ۵} = \frac{۳}{۵}$$

که در آن با حذف ۲ از صورت و مخرج، نمایش کسری دیگری برای عددی که با کسر $\frac{۶}{۱۰}$ نوشته شده بود یافتیم که صورت و مخرج آن کوچک‌تر شده است. این عمل را ساده‌تر کردن کسر گوییم. واضح است هرگاه صورت و مخرج، مقسوم‌علیه مشترک داشته باشند، می‌توان آن را ساده‌تر کرد و در صورتی که نسبت به هم اول باشند، آن نگارش ساده‌نشدنی است. نگارش ساده‌نشدنی را «تحویل‌ناپذیر» خوانیم.

کسر $\frac{a}{b}$ را تحویل‌ناپذیر خوانیم اگر $(a,b) = ۱$.

نوشتن یک کسر به‌صورت تحویل‌ناپذیر را «ساده کردنِ کسر» گوییم.

مثال ۳۸.۳: نشان دهید برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b که $b \neq ۰$ و $d = (a,b)$ داریم:

آ. $\frac{a}{b} = \frac{a \div d}{b \div d}$ ب. $\frac{a \div d}{b \div d}$ تحویل‌ناپذیر است.

پاسخ: آ. با قرار دادن $m = a \div d$ و $n = b \div d$ داریم $a = md$ و $b = nd$ و درنتیجه
$\frac{a}{b} = \frac{md}{nd} = \frac{m}{n} = \frac{a \div d}{b \div d}$

ب. با توجه به مطالب فصل قبل، $a \div d$ و $b \div d$ نسبت به هم اولند و درنتیجه $\frac{a \div d}{b \div d}$ تحویل‌ناپذیر است. ■

با توجه به مثال فوق، برای ساده کردن یک کسر، صورت و مخرج کسر را بر ب‌م‌م آنها تقسیم می‌کنیم.

مثال ۳۹.۳: کسرهای زیر را ساده کنید.

آ. $\frac{۲۸}{۷۲}$ ب. $\frac{۳۶}{۱۲}$ ج. $\frac{۰}{۵۳}$

به مورد (ج) دقت کنید.

پاسخ: آ. $(۲۸,۷۲) = ۴$ پس $\frac{۲۸}{۷۲} = \frac{۲۸ \div ۴}{۷۲ \div ۴} = \frac{۷}{۱۸}$ که $\frac{۷}{۱۸}$ تحویل‌ناپذیر است، چون $(۷,۱۸) = ۱$.

ب. $(۳۶,۱۲) = ۱۲$ و $\frac{۳۶}{۱۲} = \frac{۳۶ \div ۱۲}{۱۲ \div ۱۲} = \frac{۳}{۱}$

ج. $۵۳ \mid ۰$ پس $(۰,۵۳) = ۵۳$ و درنتیجه $\frac{۰}{۵۳} = \frac{۰ \div ۵۳}{۵۳ \div ۵۳} = \frac{۰}{۱}$ ■

مثال ۴۰.۳: درستی یا نادرستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

آ. $\frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۶}$ ب. $\frac{۲}{۳} = \frac{۶}{۹}$ ج. $\frac{۴}{۶} = \frac{۶}{۹}$

د. $\frac{۶}{۱۰} = \frac{۹۰}{۱۵۰}$ ه. $\frac{۹}{۱۵} = \frac{۹۰}{۱۵۰}$ و. $\frac{۶}{۱۰} = \frac{۹}{۱۵}$

پاسخ: موارد (آ) و (ب) با توجه به تساوی $\frac{m}{n} = \frac{km}{kn}$ درست هستند. تساوی $\frac{۶}{۹} = \frac{۴}{۶}$ نیز با توجه به موارد (آ) و (ب) درست است.

موارد (د) و (ه) به‌وضوح درستند و مورد (و) نیز بنا به موارد (د) و (ه) درست است. ■

برای بررسی تساوی دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xLeftrightarrow{\text{تساوی ۱۳.۳}} \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \xLeftrightarrow[bd\neq ۰]{\text{تساوی ۱.۳}} ad = bc$$

بنابراین، می‌نویسیم:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xLeftrightarrow[d\neq ۰]{b\neq ۰} ad = bc \qquad (۱۴.۳)$$

به روش فوق که در آن کسرها را با مخرج‌های برابر نوشته‌ایم، مخرج مشترک‌گیری گوییم و علاوه‌بر تعیین تساوی کسرها، در محاسبهٔ حاصل‌جمع کسرها نیز کاربرد دارد.

مثال ۴۱.۳: نشان دهید:

آ. $\frac{۴}{۶} = \frac{۲۰}{۳۰}$ ب. $\frac{۱۵}{۳۵} = \frac{۱۲}{۲۸}$ ج. $\frac{۰}{۵} = \frac{۰}{۱}$

پاسخ: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۴۲.۳: نشان دهید برای هر دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$، اگر m چنان باشد که $b \mid m$ و $d \mid m$، آن‌گاه اعدادی مانند a' و c' وجود دارند که $\frac{a}{b} = \frac{a'}{m}$ و $\frac{c}{d} = \frac{c'}{m}$

پاسخ: برای $b' = m \div b$ و $d' = m \div d$ داریم $\frac{a}{b} = \frac{ab'}{bb'} = \frac{ab'}{m}$ و $\frac{c}{d} = \frac{cd'}{dd'} = \frac{cd'}{m}$. بنابراین، برای $a' = ab'$ و $c' = cd'$ داریم $\frac{a}{b} = \frac{a'}{m}$ و $\frac{c}{d} = \frac{c'}{m}$ ■

در مثال فوق نشان می‌دهد هر مضرب مشترک b و d مانند m که مخرج‌های $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ هستند، نگارش‌های $\frac{a'}{m}$ و $\frac{b'}{m}$ با مخرج‌های برابر وجود دارند. نگارش دو عدد کسری با کسرهایی با مخرج‌های یکسان را «مخرج‌مشترک‌گیری» خوانیم.

مثال ۴۳.۳: آیا کوچک‌ترین مخرج مشترک دو کسر برابر است با ک‌م‌م مخرج‌ها؟

پاسخ: خیر. هرچند با توجه به مثال فوق ک‌م‌م مخرج‌ها می‌تواند مخرج مشترک باشد؛ اما برای کسرهای $\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۱۲}$ و $\frac{۳}{۴}=\frac{۱۵}{۲۰}$ کوچک‌ترین مخرج مشترک، ۴ است. ■

مثال‌های فوق نشان می‌دهد برای به‌دست آوردن کوچک‌ترین مخرج مشترک، در گام اول باید کسرها را به‌صورت تحویل‌ناپذیر نوشته، سپس ک‌م‌م مخرج کسرهای تحویل‌ناپذیر، کوچک‌ترین مخرج مشترک نیز خواهد بود.

گزاره ۳.۳: **اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ تحویل‌ناپذیر باشند، $[b,d]$، کوچک‌ترین مخرج مشترک آنهاست.**

اثبات: فرض کنید m مخرج مشترک باشد و $\frac{a}{b}=\frac{a'}{m}$ و $\frac{c}{d}=\frac{c'}{m}$. اگر k چنان باشد که $k\mid m$، $k\mid a'$ و $k\mid c'$، آن‌گاه داریم $\frac{a'}{m}=\frac{a'\div k}{m\div k}$ و $\frac{c'}{m}=\frac{c'\div k}{m\div k}$.
بنابراین، m کوچک‌ترین مخرج مشترک است اگر و تنها اگر $k=۱$.
اثبات ناقص است و تکمیل آن به خواننده واگذار می‌شود. ■

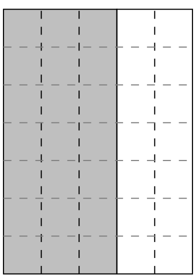
مثال ۴۴.۳: نشان دهید برای هر دو کسر تحویل‌ناپذیر مانند $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ داریم $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ اگر و تنها اگر $a=c$ و $b=d$.

پاسخ: اگر $a=c$ و $b=d$، به‌وضوح داریم $ad=bc$ و درنتیجه $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.
اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، آن‌گاه $ad=bc$ و چون $b\mid bc$ پس $b\mid ad$ و چون $(a,b)=۱$ پس $b\mid d$. به طور مشابه می‌توان نشان داد $d\mid b$ و درنتیجه $b=d$. به‌همین طریق می‌توان نشان داد $a=c$. ■

مثال ۴۵.۳: حاصل جمع‌های زیر را به‌دست آورید.

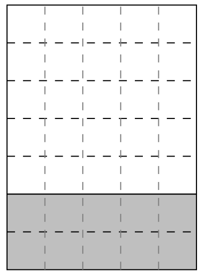
آ. $\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۵}$ ب. $\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۵}$ ج. $\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۶}$

پاسخ: آ. $\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۵}=\frac{۱۰}{۱۵}+\frac{۳}{۱۵}=\frac{۱۳}{۱۵}$.
موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذر می‌شود. ■



در شکل بالایی $\frac{۳}{۷}A$ و در شکل پایینی $\frac{۲}{۵}A$ رنگ شده‌اند. بنابراین، مجموع مساحت این دو قسمت را به‌صورت $A\left(\frac{۳}{۷}+\frac{۲}{۵}\right)$ می‌نویسیم که به‌معنای $\frac{۳}{۷}A+\frac{۲}{۵}A$ است. از طرفی، $\frac{۲}{۵}A=\frac{۲\times۷}{۵\times۷}A$ و $\frac{۳}{۷}A=\frac{۵\times۲}{۵\times۷}A$ و درنتیجه مجموع مساحت قسمت‌های رنگ شده برابر است با:

$$\left(\frac{۲}{۵}+\frac{۳}{۷}\right)A=\frac{۲}{۵}A+\frac{۳}{۷}A=\frac{۱۴}{۳۵}A+\frac{۱۵}{۳۵}A=\frac{۱۴+۱۵}{۳۵}A=\frac{۲۹}{۳۵}A$$



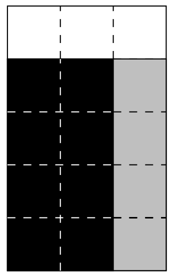
بنابراین، $\frac{۲۹}{۳۵} = \frac{۳}{۷} + \frac{۲}{۵}$. به‌طور مشابه، برای هر دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ هر مقدار دلخواه مانند A از هر کمیت دلخواه داریم:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\mathrm{A} = \frac{a}{b}\mathrm{A}+\frac{c}{d}\mathrm{A} = \frac{ad}{bd}\mathrm{A}+\frac{bc}{bd}\mathrm{A} = \frac{ad+bc}{bd}\mathrm{A}$$

بنابراین، $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\mathrm{A} = \frac{ad+bc}{bd}\mathrm{A}$ که آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

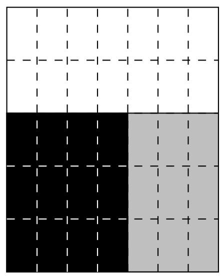
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad (۱۵.۳)$$

در واقع باز هم از $\frac{a+b}{n} = \frac{a}{n}+\frac{b}{n}$ و مخرج مشترک گیری استفاده کرده‌ایم.



$\frac{۲}{۳}\left(\frac{۴}{۵}\mathrm{A}\right) = \frac{۲\times۴}{۳\times۵}\mathrm{A} = \frac{۸}{۱۵}\mathrm{A}$

در شکل مقابل، $\frac{۴}{۵}$ از مساحت کل شکل رنگ شده که $\frac{۲}{۳}$ از قسمت رنگ‌شده، سیاه است. بنابراین می‌گوییم «دو سوم از چهار پنجمِ مساحت کل شکل، سیاه است» و می‌نویسیم $\frac{۲}{۳}\left(\frac{۴}{۵}\mathrm{A}\right)$ سیاه است» که در آن، A به مساحت کل شکل اشاره دارد. به‌سادگی می‌بینیم که شکل به ۵×۳ قسمت تقسیم شده و ۴×۲ قسمت از آن سیاه است. بنابراین، $\frac{۲\times۴}{۳\times۵}\mathrm{A}$ سیاه است.



$\frac{۴}{۷}\left(\frac{۳}{۵}\mathrm{A}\right) = \frac{۴\times۳}{۷\times۵}\mathrm{A}$

به‌طور مشابه، برای محاسبهٔ $\frac{۳}{۵}\times\frac{۴}{۷}$، عبارت $\left(\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۵}\right)\mathrm{A}$ را به‌معنای $\frac{۴}{۷}\left(\frac{۳}{۵}\mathrm{A}\right)$ درنظر می‌گیریم و با توجه به شکل مقابل که در آن، سه پنجمِ شکل رنگ شده و چهار هفتمِ قسمت رنگ شده، سیاه است، می‌بینیم که با توجه به خانه‌های کوچک، کل شکل به ۵×۷ خانه تقسیم شده که از آنها ۳×۴تا سیاه هستند. بنابراین، $\frac{۴\times۳}{۷\times۵}\mathrm{A}$ سیاه است که در آن A به مساحت کل شکل اشاره دارد. بنابراین

$$\left(\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۵}\right)\mathrm{A} = \frac{۴}{۷}\left(\frac{۳}{۵}\mathrm{A}\right) = \frac{۴\times۳}{۷\times۵}\mathrm{A}$$

البته بدون استفاده از درک شهودی و صرفاً با استفاده از تساوی‌های قبل نیز می‌توان به همین نتیجه رسید. زیرا برای هر مقداری مانند A از هر کمیت دلخواه، داریم:

$$\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)\mathrm{A} = \frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\mathrm{A}\right) = \frac{ac}{\boldsymbol{bc}}\left(\frac{\boldsymbol{bc}}{bd}\mathrm{A}\right) = \frac{ac}{bd}\mathrm{A}$$

که آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad (۱۶.۳)$$

مثال ۴۶.۳: اگر وزن گوسفند را با A، وزن گوساله را با B و وزن گاو را با C نمایش دهیم داریم $\mathrm{A} = \frac{۳}{۱۳}\mathrm{C}$ و $\mathrm{C} = \frac{۵}{۸}\mathrm{B}$. کسر $\frac{a}{b}$ را چنان بیابید که $\mathrm{A} = \frac{a}{b}\mathrm{B}$.

پاسخ: $\mathrm{A} = \frac{۳}{۱۳}\mathrm{C} = \frac{۳}{۱۳}\left(\frac{۵}{۸}\mathrm{B}\right) = \left(\frac{۳}{۱۳}\times\frac{۵}{۸}\right)\mathrm{B} = \frac{۳\times۵}{۱۳\times۸}\mathrm{B} = \frac{۱۵}{۱۰۴}\mathrm{B}$. پس $\mathrm{A} = \frac{۱۵}{۱۰۴}\mathrm{B}$. ■

تمرین:

(۸) نشان دهید برای هر پاره‌خطی مانند l داریم:

آ. $\frac{n}{n}l = l$ ب. $\frac{a}{n}l+\frac{b}{n}l = \frac{a+b}{n}l$ ج. $\frac{a}{n}\left(\frac{n}{b}l\right) = \frac{a}{b}l$

(۹) مقادیر زیر را بر محور اعداد نشان دهید.

آ. $\frac{۳۰}{۵}$ ب. $\frac{۱۷}{۳}$ ج. $\frac{۱۲}{۷}$

(۱۰) کسرهای زیر را به‌صورت کسر مخلوط بنویسید.

آ. $\frac{۳۵}{۱۳}$ ب. $\frac{۳۱۳}{۱۳۱}$ ج. $\frac{۹۱۱}{۱۹۹}$

(۱۱) عدد طبیعیِ x را چنان بیابید که:

آ. $\frac{x}{۳} = ۵$ ب. $\frac{۱۲}{x} = \frac{۱۵}{۳۵}$ ج. $\frac{x+۱}{x-۱} = \frac{۴}{۳}$

د. $\frac{۲x+۳}{۳x-۵} = ۱$ هـ. $\frac{x+۳}{۴} = \frac{x+۵}{۵}$ و. $\frac{۲x-۳}{۵} = \frac{x+۳}{۴}$

(۱۲) حاصل‌عبارات زیرا به‌دست آورید.

آ. $\frac{۳}{۲} + \frac{۷}{۳}$ ب. $\frac{۳۱}{۲۳} + \frac{۱۷}{۱۹}$ ج. $\frac{۲}{۱۹} + \frac{۳}{۷}$

د. $\frac{۵}{۳۱} \times \frac{۳۱}{۱۷}$ هـ. $\frac{۲}{۷} \times \frac{۷}{۱۱}$ و. $\frac{۱}{۱۷} \times \frac{۱۳}{۲۳}$

(۱۳) نشان دهید اگر $n_۱ + n_۲ + \cdots + n_k = n$، آن‌گاه $\frac{n!}{n_۱!n_۲!\cdots n_k!}$ عددی طبیعی است.

(۱۴) نشان دهید برای هیچ عددی مانند n، حاصل $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n}$ عددی طبیعی نیست.

۱.۲.۳ کسر و ریاضیات نمادین

با رشد ریاضیات نمادین، معمولاً کسرها را نمادهایی درنظر می‌گیریم به‌صورت $\frac{a}{b}$ که در آن a و b اعدادی طبیعی بوده و $b \neq ۰$. بدون توجه و توضیحی در مورد اینکه کسرها به چه چیزی اشاره دارند، هر کسر را صرفاً یک عبارت درنظر می‌گیریم. به‌عبارت بهتر، کسر یک نمادگذاری است و توجهی به تعبیر شهودی و کاربردهای آن نداریم.

تعریف ۴.۳: برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b که $b \neq ۰$، عبارت $\frac{a}{b}$ را یک کسر خوانیم.

هرچند کسرها صرفاً نگارش‌هایی متشکل از دو عدد طبیعی درنظر گرفته می‌شوند، اما تساوی، جمع و ضرب آنها را بگونه‌ای تعریف می‌کنیم که با درک شهودی همخوانی داشته باشد.

تعریف ۵.۳: برای هر دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ قرار می‌دهیم:

آ. $\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xLeftrightarrow[d\neq ۰]{b\neq ۰} ad = bc}$ ب. $\boldsymbol{\frac{a}{۱} = a}$

ج. $\boldsymbol{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}}$ د. $\boldsymbol{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}}$

مثال ۴۷.۳: با استفاده از تعریف فوق نشان دهید:

آ. $m \times \frac{۱}{n} = \frac{m}{n}$
ب. $\frac{۱}{n} \times m = \frac{m}{n}$
ج. $\frac{a}{n} = \frac{b}{n} \Longleftrightarrow a = b$
د. $a \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{d}$
ه. $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b};\ (m \neq ۰)$
و. $\frac{na}{a} = n;\ (a \neq ۰)$
ز. $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}$
ح. $\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال فوق نشان می‌دهد، در این دیدگاه به همان نتایجی می‌رسیم که با درک شهودی به آنها رسیده‌ایم، اما منشأ آنها متفاوت است. پیش از این بر اساس درک شهودی به این نتایج رسیده بودیم، اما اینجا از تعاریفی به‌دست می‌آیند که در ظاهر هیچ ارتباطی با درک شهودی ندارند.

قضیه ۳.۳: برای هر سه عدد کسری مانند x، y و z داریم:
آ. $\boldsymbol{x + y = y + x}$
ب. $\boldsymbol{xy = yx}$
ج. $\boldsymbol{x + (y + z) = (x + y) + z}$
د. $\boldsymbol{x(yz) = (xy)z}$
ه. $\boldsymbol{x + ۰ = ۰ + x = x}$
و. $\boldsymbol{۱x = x۱ = x}$
ز. $\boldsymbol{x(y + z) = xy + xz}$
ح. $\boldsymbol{x \times ۰ = ۰ \times x = ۰}$

اثبات: برای اثبات این قضیه کافی است به نگارش کسری هر کسر توجه کنیم. بنابراین قرار می‌دهیم $x = \frac{x_۱}{x_۲}$، $y = \frac{y_۱}{y_۲}$، $w = \frac{w_۱}{w_۲}$ و $z = \frac{z_۱}{z_۲}$. بنابراین داریم:

آ. $x + y = \frac{x_۱}{x_۲} + \frac{y_۱}{y_۲} = \frac{x_۱ y_۲ + x_۲ y_۱}{x_۲ y_۲} = \frac{y_۱ x_۲ + y_۲ x_۱}{y_۲ x_۲} = \frac{y_۱}{y_۲} + \frac{x_۱}{x_۲} = y + x$

ب. $xy = \frac{x_۱}{x_۲} \times \frac{y_۱}{y_۲} = \frac{x_۱ y_۱}{x_۲ y_۲} = \frac{y_۱ x_۱}{y_۲ x_۲} = \frac{y_۱}{y_۲} \times \frac{x_۱}{x_۲} = yx$

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

تا پیش از ورود به ریاضیات نمادین، تساوی، جمع و ضرب کسرها با درک شهودی پشتیبانی می‌شدند و اگر حاصل‌جمع با درک شهودی همخوانی نداشت، آن روش را غلط دانسته و همه‌چیز تغییر می‌کرد. اما با ورود به ریاضیات نمادین و تعاریفی از قبیل تعاریف فوق که هیچ ارتباطی بین آنها و درک شهودی وجود نداشت، این سؤال مطرح شد که آیا تعاریف فوق پذیرفتنی هستند؟ به‌عبارت بهتر آیا می‌توان مطمئن بود با تعاریف فوق، تساوی دارای شرایط یک تساوی است یا خیر؟ در مثال زیر به این مهم می‌پردازیم.

مثال ۴۸.۳: نشان دهید برای هر سه کسر $\frac{a}{b}$، $\frac{c}{d}$ و $\frac{m}{n}$ داریم:
آ. $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$
ب. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$
ج. اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ و $\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$ آن‌گاه $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال فوق نشان می‌دهد آنچه به‌عنوان تساوی بین دو کسر تعریف شده است، شرایط تساوی را دارد. در مثال زیر نشان می‌دهیم با توجه به تساوی کسرها، جمع و ضرب کسرها نیز معتبر است.

مثال ۴۹.۳: نشان دهید برای هر چهار کسر مانند x، y، z و w داریم:

آ. اگر $y = z$ آن‌گاه $x + y = x + z$ ب. اگر $x = y$ و $w = z$ آن‌گاه $x + w = y + z$

ج. اگر $y = z$ آن‌گاه $xy = xz$ د. اگر $x = y$ و $w = z$ آن‌گاه $xw = yz$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های اعداد کسری، خاصیت عنصر معکوس است و اعداد طبیعی دارای این ویژگی نیستند. در ادامه با این خاصیت آشنا شده و خواهیم دید که خاصیت حذف ضرب نیز از این خاصیت نتیجه می‌شود. همچنین خواهیم دید که در اعداد کسری، برای حل معادلات، معمولاً به‌جای استفاده از خاصیت حذف ضرب، از خاصیت عنصر معکوس استفاده می‌شود.

مثال ۵۰.۳: عدد کسری x را چنان بیابید که:

آ. $x \times \frac{۲}{۳} = ۱$ ب. $x \times ۳ = ۱$ ج. $x \times \frac{۱}{۷} = ۱$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

گزاره ۴.۳: برای هر عدد کسریِ ناصفر مانند x، عدد کسری منحصربه‌فردی مانند y وجود دارد که $xy = yx = ۱$.

اثبات: برای هر عدد کسری مانند $x = \frac{a}{b}$ کافی است قرار دهیم $y = \frac{b}{a}$. در این صورت $xy = yx = ۱$.
البته باید توجه داشت که اگر $a = ۰$، کسر $y = \frac{b}{a}$ بی‌معناست، اما چون $x \neq ۰$، پس $a \neq ۰$. بنابراین، کسری مانند $y = \frac{b}{a}$ وجود دارد که $xy = yx = ۱$.
برای اثبات منحصربه‌فردی y، کافی است فرض کنیم y و y' چنانند که $xy = yx = ۱$ و $xy' = y'x = ۱$ در این صورت داریم:

$$y = y۱ = y(xy') = (yx)y' = ۱ = y'$$

بنابراین، $y = y'$ که نشان می‌دهد y منحصربه‌فرد است. ■

برای هر عدد کسری ناصفر مانند x، یک و تنها یک عدد کسری مانند y وجود دارد که $xy = yx = ۱$، بنابراین، y را برحسب x بیان کرده و آن را «معکوس x» می‌خوانیم. معکوس x را می‌توان به صورت $x^\star$، x' یا هر نماد دیگری نمایش داد؛ اما براساس یک قرارداد جهانی، معکوس x را به صورت $x^{-۱}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۳: به‌ازای هر عدد کسریِ ناصفر مانند x، معکوس x که با $x^{-۱}$ نمایش داده می‌شود عدد کسری منحصربه فردی است که $xx^{-۱} = x^{-۱}x = ۱$.

حال که با عنصر معکوس آشنا شده‌ایم، زمان آن رسیده که یکی از مهم‌ترین خواص اعداد کسری را بیان کنیم.

خاصیت ۱.۳ (عنصر معکوس)**: هر عدد کسریِ ناصفر عنصر معکوس منحصربه‌فردی دارد.**

مثال ۵۱.۳: معکوس هر یک از اعداد زیر را بیابید.

آ. $\frac{۳}{۴}$ ب. $\frac{۷}{۳}$ ج. $\frac{۳}{۱}$

د. ۴ ه. ۱ و. ۰

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

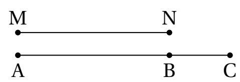
مثال ۵۲.۳: نشان دهید برای هر دو عدد کسریِ ناصفر مانند x و y داریم $(xy)^{-۱} = x^{-۱}y^{-۱}$.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۲.۲.۳ ترتیب اعداد کسری

کسرها را به‌عنوان وسیله‌ای برای بیان مقداری از یک کمیت برحسب مقدار دیگری از همان جنس ساختیم. حتی جمع و ضرب اعداد کسری نیز با نگاه به کاربرد کسرها در کار با مقادیر مختلف از کمیت‌های مختلف ساخته شدند. در ادامه، ترتیب اعداد کسری را نیز براساس مقایسه دو مقدار از یک کمیت می‌سازیم.

اگر بخواهیم قد دو نفر را با هم مقایسه کنیم، از آنها می‌خواهیم کنار هم بایستند. این روش ابتدایی و ساده، مبنای مقایسهٔ دو طول است. به‌طور مثال، در شکل مقابل داریم:



$|MN| = |AB|$: چون می‌توان دو پاره‌خطّ AB و MN را بر هم منطبق کرد.

$|AC| > |AB|$: چون $|AC| = |AB| + |BC|$.

به‌همین طریق، برای هر دو مقداری مانند A و B از یک کمیت دلخواه، گوییم $A > B$ اگر مقداری مانند C از همان جنس وجود داشته باشد که $A = B + C$.

از طرفی در اعداد طبیعی دیدیم که برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b داریم $a < b$ اگر عدد طبیعی و ناصفر مانند k وجود داشته باشد که $a + k = b$. بنابراین، بری هر مقداری مانند A از هر کمیت دلخواه داریم:

$$a < b \Longrightarrow a + k = b \Longrightarrow (a + k)\mathrm{A} = b\mathrm{A} \Longrightarrow a\mathrm{A} + k\mathrm{A} = b\mathrm{A} \Longrightarrow a\mathrm{A} < b\mathrm{A}$$

همچنین اگر برای مقداری مانند A از کمیتی داشته باشیم $a\mathrm{A} < b\mathrm{A}$، آن‌گاه $a < b$، چون، اگر $a = b$، آن‌گاه $a\mathrm{A} = b\mathrm{A}$ و اگر $a > b$، آن‌گاه $a\mathrm{A} > b\mathrm{A}$. بنابراین، داریم:

$$a < b \Longleftrightarrow a\mathrm{A} > b\mathrm{A}$$

بدین‌ترتیب، با قرار دادن $\mathrm{B} = \frac{۱}{n}\mathrm{A}$ داریم:

$$a > b \Longleftrightarrow a\mathrm{B} > b\mathrm{B} \Longleftrightarrow a\left(\frac{۱}{n}\mathrm{A}\right) > b\left(\frac{۱}{n}\mathrm{A}\right) \Longleftrightarrow \frac{a}{n}\mathrm{A} > \frac{b}{n}\mathrm{A}$$

به‌طور مشابه $\frac{a}{n} < \frac{b}{n}$ یعنی برای هر مقداری مانند A از هر کمیتی داریم $a\left(\frac{۱}{n}\mathrm{A}\right) < b\left(\frac{۱}{n}\mathrm{A}\right)$. پس:

$$\frac{a}{n} < \frac{b}{n} \Longleftrightarrow a < b \qquad (۱۷.۳)$$

از آنجا که برای هر دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ داریم $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$ و $\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{ad}{bd} > \frac{bc}{bd} \Longleftrightarrow ad > bc \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \Longleftrightarrow ad = bc \\ \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{ad}{bd} < \frac{bc}{bd} \Longleftrightarrow ad < bc \end{cases} \tag{۱۸.۳}$$

عبارت فوق را به‌صورت زیر خلاصه می‌کنیم.

این نمادگذاری را به خاطر بسپارید.

گزاره ۵.۳: برای هر دو عدد کسری مانند $x=\frac{a}{b}$ و $y=\frac{c}{d}$ داریم: $x \gtreqless y \Longleftrightarrow ad \gtreqless bc$

اثبات: $x \gtreqless y \Longleftrightarrow \frac{a}{b} \gtreqless \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{ad}{bd} \gtreqless \frac{bc}{bd} \Longleftrightarrow ad \gtreqless bc$ ■

مثال ۵۳.۳: جفت اعداد زیر را با هم مقایسه کنید.

آ. $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۵}{۷}$ ب. $\frac{۳۱}{۶۰}$ و $\frac{۴۱}{۸۰}$ ج. $\frac{۲۳}{۲۵}$ و $\frac{۱۱}{۱۲}$

د. $۳\frac{۲}{۷}$ و $۱\frac{۶}{۷}$ ه. $۴\frac{۳}{۵}$ و $۵\frac{۸}{۱۵}$ و. $۵\frac{۱۲}{۱۳}$ و $۶\frac{۱}{۱۵}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۵۴.۳: نشان دهید برای هر کسری مانند $\frac{a}{b}$ داریم:

آ. $\frac{a}{b} > ۰ \Longleftrightarrow a \neq ۰$ ب. $\frac{a}{b} = ۰ \Longleftrightarrow a = ۰$

ج. $\frac{a}{b} > ۱ \Longleftrightarrow a > b$ د. $\frac{a}{b} < ۱ \Longleftrightarrow a < b$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

برای هر مقداری مانند A از هر کمیتی داریم $\frac{۱}{۲}\text{A} > \frac{۱}{۳}\text{A}$، چون $۳ > ۲$. چون اگر قرار دهیم $\text{B} = \frac{۱}{۲}\text{A}$ و $\text{C} = \frac{۱}{۳}\text{A}$، داریم $۲\text{B} = ۳\text{C}$. در این صورت $\text{B} > \text{C}$، چون در غیر این‌صورت، اگر $\text{B} = \text{C}$، آنگاه $۲\text{B} < ۳\text{C}$ و اگر $\text{B} < \text{C}$، آنگاه $۳\text{C} > ۲\text{C} > ۲\text{B}$. به زبان ساده، اگر چیزی را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کنیم، قطعات آن کوچک‌تر از زمانی می‌شود که همان چیز را به ۲ قسمت مساوی تقسیم کنیم.

به‌طور مشابه، برای هر دو عدد طبیعی و ناصفر مانند m و n اگر $m < n$، آنگاه برای هر مقداری مانند A از هر کمیتی داریم $\frac{۱}{m}\text{A} > \frac{۱}{n}\text{A}$ و درنتیجه $\frac{۱}{m} > \frac{۱}{n}$. بنابراین داریم:

$$m < n \Longleftrightarrow \frac{۱}{m} > \frac{۱}{n} \tag{۱۹.۳}$$

به جهت نامساوی‌ها توجه کنید.

پس برای هر عددی مانند a و هر دو عدد طبیعی و ناصفری مانند m و n و هر مقداری مانند

A از هر کمیت دلخواه داریم:

$$m < n \Longleftrightarrow \frac{۱}{m}\mathrm{A} > \frac{۱}{n}\mathrm{A} \Longleftrightarrow a\left(\frac{۱}{m}\mathrm{A}\right) > a\left(\frac{۱}{n}\mathrm{A}\right) \Longleftrightarrow \frac{a}{m}\mathrm{A} > \frac{a}{n}\mathrm{A}$$

درنتیجه، برای هر مقداری مانند A از هر کمیتی داریم $\frac{a}{m}\mathrm{A} > \frac{a}{n}\mathrm{A}$ اگر و تنها اگر $m < n$ و می‌نویسیم:

$$\frac{a}{m} > \frac{a}{n} \overset{a\neq ۰}{\Longleftrightarrow} m < n \qquad (۲۰.۳)$$

البته تساوی فوق را می‌توان بدون درک شهودی و صرفا براساس تساوی‌های به‌دست آمده نیز به‌دست آورد. چون به‌وضوح داریم:

$$\frac{a}{m} > \frac{a}{n} \underset{n\neq ۰}{\overset{m\neq ۰}{\Longleftrightarrow}} an > am \xLeftrightarrow[a\neq ۰]{\text{حذف جمع در اعداد طبیعی}} n > m$$

مثال ۵۵.۳: جفت کسرهای زیر را با هم مقایسه کنید.

آ. $\frac{۳}{۱۳}$ و $\frac{۷}{۱۳}$ ب. $\frac{۷}{۱۳}$ و $\frac{۷}{۱۱}$ ج. $\frac{۳}{۱۳}$ و $\frac{۷}{۱۱}$ د. $\frac{۵}{۱۳}$ و $\frac{۴}{۱۱}$

پاسخ: آ. $۷ > ۳$ پس بنا به تساوی ۱۷.۳ داریم $\frac{۷}{۱۳} > \frac{۳}{۱۳}$ ب. $۱۳ > ۱۱$ پس بنا به تساوی ۲۰.۳ داریم $\frac{۷}{۱۱} > \frac{۷}{۱۳}$

ج. با توجه به موارد (آ) و (ب) داریم $\frac{۷}{۱۱} > \frac{۷}{۱۳} > \frac{۳}{۱۳}$. بنابراین $\frac{۷}{۱۱} > \frac{۳}{۱۳}$

د. $۵۲ = ۱۳ \times ۴ > ۱۱ \times ۵ = ۵۵$. درنتیجه $\frac{۴}{۱۱} > \frac{۵}{۱۳}$. ■

مثال ۵۶.۳: نشان دهید برای هر سه عدد کسری مانند $x = \frac{a}{n}$، $y = \frac{b}{n}$ و $z = \frac{c}{n}$ داریم:

$x + z < y + z$ اگر و تنها اگر $z < y$.

پاسخ: با توجه به تساوی‌های قبل داریم:

$$\begin{aligned} x < y &\Longleftrightarrow \frac{a}{n} < \frac{b}{n} \Longleftrightarrow a < b \Longleftrightarrow a+c < b+c \\ &\Longleftrightarrow \frac{a+c}{n} < \frac{b+c}{n} \Longleftrightarrow \frac{a}{n} + \frac{c}{n} < \frac{b}{n} + \frac{c}{n} \\ &\Longleftrightarrow x+z < y+z \end{aligned}$$

البته در استدلال فوق از قضایای ترتیب اعداد طبیعی نیز استفاده کرده‌ایم. ■

گزاره ۶.۳: برای هر سه عدد کسری مانند x، y و z داریم:

آ. $x < y \Longleftrightarrow x+z < y+z$ ب. $x < y \overset{z\neq ۰}{\Longleftrightarrow} xz < yz$

اثبات: آ. با مخرج مشترک گیری و مثال فوق واضح است.

ب. چون $z\neq ۰$ پس برای $z=\frac{c}{c'}$ داریم $c,c'>۰$. بنابراین، برای $x=\frac{a}{a'}$ و $y=\frac{b}{b'}$ داریم:

$$\begin{aligned} xz<yz &\iff \frac{ac}{a'c'}<\frac{bc}{b'c'}\\ &\iff acb'c'<a'c'bc\\ &\overset{cc'\neq ۰}{\iff} ab'<a'b\\ &\iff \frac{a}{a'}<\frac{b}{b'}\\ &\iff x<y \end{aligned}$$

که در آن از خواص ترتیب اعداد طبیعی نیز استفاده کرده‌ایم. ■

مثال ۵۷.۳: نشان دهید برای هر عدد کسری مانند x، اگر $x\neq ۰$، آن‌گاه $x>۰$ و $x^{-۱}>۰$.

پاسخ: فرض کنید عدد کسریِ x دارای نمایش $x=\frac{a}{b}$ باشد. چون $\frac{a}{b}$ یک عدد کسری را نشان می‌دهد پس $b\neq ۰$. از طرفی $x\neq ۰$، پس $a\neq ۰$، چون اگر $a=۰$، آن‌گاه $x=\frac{a}{b}=\frac{۰}{۱}=۰$.

به‌طور مشابه، $x^{-۱}=\frac{b}{a}\neq ۰$، چون $b\neq ۰$. ■

قضیه ۴.۳: **برای هر دو عدد کسری مانند x و y داریم:**
$۰<x<y$ اگر و تنها اگر $۰<y^{-۱}<x^{-۱}$.

اثبات: فرض کنید $x=\frac{a}{b}$ و $y=\frac{c}{d}$. در این صورت $x^{-۱}=\frac{b}{a}$ و $y^{-۱}=\frac{d}{c}$. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x<y \iff \frac{a}{b}<\frac{c}{d}\iff ad<bc\\ x^{-۱}>y^{-۱}\iff \frac{b}{a}>\frac{d}{c}\iff bc>ad \end{cases}$$

بنابراین، $x<y \underset{b\neq ۰}{\overset{d\neq ۰}{\iff}} ad<bc \underset{a\neq ۰}{\overset{c\neq ۰}{\iff}} x^{-۱}>y^{-۱}$. پس $x>۰$.

در نتیجه، با توجه به مثال فوق داریم: $۰<x<y\iff ۰<y^{-۱}<x^{-۱}$. پس $x^{-۱}>۰$. ■

۳.۲.۳ معادلات کسری

همان‌طور که در فصل اعداد طبیعی دیدیم، اساس حل معادلات بر خاصیت حذف جمع است. در ادامه به اثبات خاصیت حذف جمع برای اعداد کسری پرداخته و از آن برای حل معادلات استفاده می‌کنیم.

مثال ۵۸.۳: نشان دهید برای هر سه عدد کسری مانند $x=\frac{a}{n}$، $y=\frac{b}{n}$ و $z=\frac{c}{n}$ داریم:
$x+z=y+z\iff x=y$

پاسخ:

$$\begin{aligned} x+z=y+z &\iff \frac{a}{n}+\frac{c}{n}=\frac{b}{n}+\frac{c}{n}\iff \frac{a+c}{n}=\frac{b+c}{n}\iff a+c=b+c\\ &\xLeftrightarrow{\text{حذف جمع در اعداد طبیعی}} a=b\iff \frac{a}{n}=\frac{b}{n}\iff x=y \end{aligned}$$

■

با استفاده از مثال فوق و مخرج‌مشترک‌گیری، می‌توانیم به سادگی قضیهٔ زیر را ثابت کنیم.

قضیه ۵.۳: **برای هر سه عدد کسری مانند x، y و z داریم $x+z=y+z$ اگر و تنها اگر $x=y$.**

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود (از پاسخ مثال قبل و مخرج مشترک گیری استفاده کنید). ■

خاصیت حذف ضرب واضح است چون برای هر سه عددی کسری مانند x، y و z که $z \neq 0$ داریم:

$$xz = yz \overset{z\neq 0}{\Longleftrightarrow} (xz)z^{-1} = (yz)z^{-1} \Longleftrightarrow x(zz^{-1}) = y(zz^{-1}) \Longrightarrow x1 = y1 \Longrightarrow x = y$$

بنابراین، می‌توانیم خاصیت زیر را بیان کنیم.

خاصیت ۲.۳ (حذف ضرب): **برای هر سه عدد کسری مانند x، y و z که $z \neq 0$ داریم:**
$xz = yz$ اگر و تنها اگر $x = y$

با استفاده از خواص حذف ضرب و حذف جمع به‌راحتی می‌توان معادلات کسری (معادلاتی شامل اعداد کسری) را حل کرد. به‌طور مثال برای حل کردن معادلهٔ $x + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$، با توجه به‌اینکه $\frac{5}{7} = \frac{2}{7} + \frac{3}{7}$، داریم:

$$x + \frac{2}{7} = \frac{3}{7} + \frac{2}{7} \overset{\text{حذف جمع}}{\Longleftrightarrow} x = \frac{3}{7}$$

البته یک روش دیگر، استفاده از حذف جمع در اعداد طبیعی است. برای این منظور، فرض می‌کنیم x دارای نگارشی به صورت $x = \frac{a}{7}$ است و در این صورت داریم

$$x + \frac{2}{7} = \frac{a}{7} + \frac{2}{7} = \frac{a+2}{7} = \frac{5}{7}$$

بنابراین، $x + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ اگر و تنها اگر $\frac{a+2}{7} = \frac{5}{7}$ اگر و تنها اگر $a + 2 = 5$ اگر و تنها اگر $a = 3$.
درنتیجه $x = \frac{3}{7}$.

مثال ۵۹.۳: معادلات زیر را حل کنید.

آ. $x + \frac{2}{9} = \frac{3}{9}$

ب. $x + \frac{2}{5} = 1$

ج. $x + \frac{2}{5} = \frac{3}{2}$

د. $x + \frac{3}{4} = \frac{5}{7}$

ه. $x + 3^{-1} = 2^{-1}$

و. $x + 7^{-1} = 3 \times 11^{-1}$

ز. $x + 3\frac{3}{5} = 5\frac{4}{5}$

ح. $x + 8\frac{12}{31} = 11 + 7 \times 13^{-1}$

پاسخ: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

برای حل کردن معادلاتی نظیر $x \times \frac{3}{5} = \frac{2}{7}$، بدون استفاده از خاصیت حذف ضرب، می‌توانیم طرفین تساوی را در $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$ ضرب کرده و نوشت:

$$\begin{aligned} x \times \frac{3}{5} = \frac{2}{7} &\Longleftrightarrow \left(x \times \frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \frac{2}{7}\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} \\ &\Longleftrightarrow x \times \left(\frac{3}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\right) = \frac{2}{7} \times \frac{5}{3} \Longleftrightarrow x \times 1 = \frac{2 \times 5}{7 \times 3} \Longleftrightarrow x = \frac{10}{21} \end{aligned}$$

مثال ۶۰.۳: معادلات زیر را حل کنید.

آ. $\frac{۳}{۲}x = \frac{۱}{۵}$ ب. $۲x = \frac{۳}{۵}$ ج. $۳x = ۴$

د. $\frac{۲}{۳}\left(x+\frac{۱}{۵}\right) = \frac{۶}{۵}$ ه. $\frac{۲}{۳}x+\frac{۱}{۵} = \frac{۶}{۵}$ و. $۵(x+۱) = ۷$

پاسخ: آ. با ضرب طرفین تساوی در $\left(\frac{۳}{۲}\right)^{-۱}$ داریم: $\left(\frac{۳}{۲}\right)^{-۱}\frac{۳}{۲}x = \left(\frac{۲}{۳}\right)^{-۱}\frac{۱}{۵}$ و درنتیجه $x = \frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۵} = \frac{۲}{۱۵}$

ب. با ضرب طرفین تساوی در $۲^{-۱}$ داریم $۲^{-۱}\times ۲\times x = ۲^{-۱} = ۲^{-۱}\times\frac{۳}{۵}$ و درنتیجه $x = \frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۵} = \frac{۳}{۱۰}$.

ج. $۳x = ۴ \Longrightarrow ۳^{-۱}\times ۳x = ۳^{-۱}\times ۴ \Longrightarrow x = \frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۱} = \frac{۴}{۳}$

د. $\frac{۲}{۳}\left(x+\frac{۱}{۵}\right) = \frac{۶}{۵} \Longrightarrow \left(\frac{۲}{۳}\right)^{-۱}\frac{۲}{۳}\left(x+\frac{۱}{۵}\right) = \left(\frac{۲}{۳}\right)^{-۱}\frac{۶}{۵} \Longrightarrow x+\frac{۱}{۵} = \frac{۲}{۵} \Longrightarrow x = \frac{۱}{۵}$

ه. برای $y = \frac{۲}{۳}x$ داریم $y+\frac{۱}{۵} = \frac{۶}{۵}$ و درنتیجه $y = \frac{۵}{۵} = ۱$. بنابراین، $\frac{۲}{۳}x = ۱$، پس $x = \left(\frac{۲}{۳}\right)^{-۱} = \frac{۳}{۲}$.

و. $۵(x+۱) = ۷$ پس $۵x+۵ = ۷$ و درنتیجه $۵x = ۲$ پس $x = ۲\times ۵^{-۱} = ۲\times\frac{۱}{۵} = \frac{۲}{۵}$ ■

۴.۲.۳ تفریق و تقسیم اعداد کسری

در درک شهودی، برای هر دو عدد کسری مانند x و y و هر مقداری مانند A از هر کمیت دلخواه، نتیجه برداشتن yA از xA که با $x\mathrm{A}-y\mathrm{A}$ نمایش داده می‌شود را به‌صورت $(x-y)\mathrm{A}$ نمایش می‌دهیم. واضح است که برای هر دو عدد کسری مانند $\frac{a}{n}$ و $\frac{b}{n}$ که $a>b$، و هر مقداری مانند A از هر کمیت دلخواه، داریم $\frac{a}{n}\mathrm{A}-\frac{b}{n}\mathrm{A} = \frac{a-b}{n}\mathrm{A}$ و درنتیجه برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و n که $n\neq ۰$ و $a\geq b$ داریم:

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n} = \frac{a-b}{n} \qquad (۲۱.۳)$$

بدین‌ترتیب می‌توان حاصل‌تفریق اعداد کسری را با استفاده از تفریق اعداد طبیعی محاسبه نمود.

مثال ۶۱.۳: حاصل تفریق‌های زیر را به‌دست آورید.

آ. $\frac{۳}{۵}-\frac{۲}{۳}$ ب. $\frac{۴}{۵}-\frac{۵}{۷}$ ج. $۳-\frac{۹}{۵}$

پاسخ: ب. $\frac{۴}{۵}-\frac{۵}{۷} = \frac{۴\times ۷}{۵\times ۷}-\frac{۵\times ۵}{۵\times ۷} = \frac{۲۸}{۳۵}-\frac{۲۵}{۳۵} = \frac{۲۸-۲۵}{۳۵} = \frac{۳}{۲۵}$

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

واضح است که می توان $a-b$ را به صورت زیر تعریف کرد.

جواب منحصربه‌فرد معادلهٔ $x+b=a$ را با $a-b$ نشان می‌دهیم.

عبارت $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$ در درک شهودی تعبیر خاصی ندارد. اما می‌توان آن را به‌صورت زیر تعریف نمود.

جواب منحصربه‌فرد معادلهٔ $xb=a$ را با $a\div b$ نمایش می‌دهیم.

بنابراین، برای هر دو عدد کسری مانند x و y که $y\neq ۰$ داریم $x\div y = xy^{-۱}$. چون $y = x$ $(xy^{-۱})$.
بنابراین، اگر $x = \frac{a}{b}$ و $y = \frac{c}{d}$، آنگاه $x\div y = \frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\times\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

مثال ۶۲.۳: حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

آ. $\frac{۳}{۴} \div \frac{۱}{۵}$ ب. $\frac{۲}{۹} \div ۳$ ج. $۳ \div \frac{۳}{۷}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

تمرین:

(۱۵) حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

آ. $\frac{۳۱}{۱۳} - \frac{۱۳}{۳۱}$ ب. $\frac{۱۲}{۷} - \frac{۷}{۵}$ ج. $\frac{۷}{۹} - \frac{۹}{۱۷}$

د. $\frac{۱۳}{۱۱} \div \frac{۳}{۵}$ ه. $\frac{۳}{۷} \div ۵$ و. $۷ \div \frac{۱۱}{۸}$

(۱۶) معادلات زیر را در اعداد کسری حل کنید.

آ. $x\frac{۱}{۳} = \frac{۵۱}{۲۴۱}$ ب. $x + \frac{۳۱}{۴۱} = \frac{۵۱}{۵۲}$ ج. $x۳^{-۱} = ۴^{-۱}$

د. $\frac{۲x + ۳}{۷} = \frac{۱۵}{۲۱}$ ه. $\frac{x + \frac{۲}{۳}}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۷}{۵}$ و. $\frac{۳}{۲ + \frac{۳}{۷}} = \frac{۱ - \frac{۳}{۴}}{x + \frac{۲}{۷}}$

ز. $x - \frac{۳}{۷} = \frac{۱۳}{۱۱}$ ح. $\frac{۳}{۱۱} - x = \frac{۲}{۱۳}$

(۱۷) نامعادلات زیر را در اعداد کسری حل کنید.

آ. $x \div \frac{۳}{۵} < \frac{۲}{۳}$ ب. $\frac{x + \frac{۱}{۳}}{۳} \div \frac{۴}{۵} > \frac{۲}{۷}$ ج. $\frac{x + ۱}{۳} > \frac{۴}{۷}$

د. $\frac{۲}{x} > \frac{۳}{۷}$ ه. $\frac{۳}{x + ۱} + \frac{۲}{۳} > \frac{۷}{۵}$ و. $\frac{x - ۱}{x + ۱} \div \frac{۳}{۴} > \frac{۵}{۷}$

فصل ۴

اعداد صحیح و گویا

۱.۴ حساب افزایش و کاهش

مبتدی–ضروری
اگر در به‌کارگیری اعداد مثبت و منفی مشکل دارید این بخش را با دقت بخوانید.

مفهوم عددهای منفی را هندی‌ها در سدهٔ اول پس از میلاد پدید آوردند. هندی‌ها سرچشمهٔ مقدارهای مثبت و منفی را در «دارایی» و «قرض» یافتند و بدون اینکه مطلب را از نظر علمی تجزیه و تحلیل کرده باشند، عمل روی عددهای منفی را آغاز کردند. برخی ریاضیدانان ایرانی هم از این اصطلاح برای بیان اعداد منفی استفاده می‌کردند. ولی به‌طور کلی، ریاضیدانان ایرانی تنها به جواب مثبت معادله توجه داشتند. حتی ریاضیدانان اروپاییِ سده‌های شانزدهم و هفدهم نیز اغلب به جواب منفی معادله‌ها بی‌توجه بودند و به آنها اهمیت نمی‌دادند و آنها را جواب‌های «دروغ» و «بی‌معنا» می‌دانستند. هرچند در قرن شانزدهم، کاردانو برای اولین بار اعداد منفی را به‌رسمیت شناخت، اما اعداد منفی را اعدادی خیالی درنظر می‌گرفت.[1]

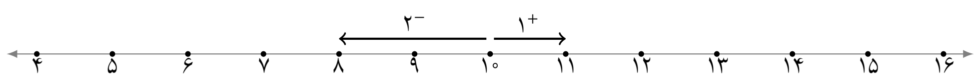
در این کتاب، تعبیر «افزایش و کاهش» را بر تعبیر «دارایی و قرض» ترجیح می‌دهیم. برای فرق گذاشتن بین «افزایش» و «کاهش»، «a شیء افزایش» را با a^+ نمایش می‌دهیم و a^- را به‌معنای «a شیء کاهش» به‌کار می‌بریم.

به‌ازای هر عدد طبیعی مانند a، a^+ را عددی مثبت و a^- را عددی منفی خوانده و اعداد مثبت، منفی و صفر را اعداد صحیح گوییم.

در این صورت a می‌تواند هر عدد طبیعی دلخواهی باشد و «صفر» به‌معنای نداشتن هیچ تعداد افزایش یا کاهش می‌باشد. پس:

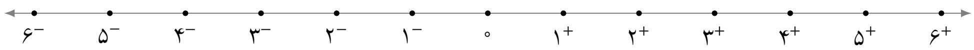
گزاره ۱.۴: عدد صفر نه مثبت است و نه منفی.

برای تشکیل محور اعداد صحیح از محور اعداد طبیعی و تعبیر خود از اعداد صحیح استفاده می‌کنیم. فرض کنید کیسه‌ای شامل ۱۰ عدد گلابی باشد. با ۱ عدد افزایش، تعداد گلابی‌ها از ۱۰ به ۱۱ می‌رسد. بنابراین ۱^+ به‌معنای ۱ عدد افزایش، ۱۰ را به ۱۱ می‌بَرد. همچنین ۲^- به‌معنای ۲ عدد کاهش ۱۰ را به ۸ می‌بَرد. بنابراین می‌توان آنها را به‌صورت زیر بر محور اعداد نشان داد.



[1] پرویز شهریاری، تاریخ ریاضیات، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۵

بنابراین پیکان a^+ پیکانی است به طول a به سمت راست و پیکان a^-، پیکانی است به طول a و به سمت چپ. حال اگر تعداد گلابی‌های درون کیسه را ندانیم، می‌توانیم به‌سادگی مقدار آنها را با صفر، به معنای نداشتن هیچ مقدار افزایش یا کاهش نشان دهیم. نتیجهٔ a عدد افزایش را با a^+ و نتیجهٔ a عدد کاهش را با a^- نمایش دهیم. بدین ترتیب، محور اعداد صحیح به شکل زیر حاصل می‌شود.



عبارت $a^+ + b^+$ را به‌معنای نتیجهٔ a شیء افزایش در مرحله اول و b شیء افزایش در مرحلهٔ دوم در نظر می‌گیریم. درنتیجه $a^+ + b^+ = (a+b)^+$ که در آن $(a+b)^+$ به‌معنای $(a+b)$ شیء افزایش است. همچنین $a^- + b^-$ به‌معنای نتیجهٔ a شیء کاهش در مرحلهٔ اول و b شیء کاهش در مرحلهٔ دوم است. پس $a^- + b^- = (a+b)^-$.

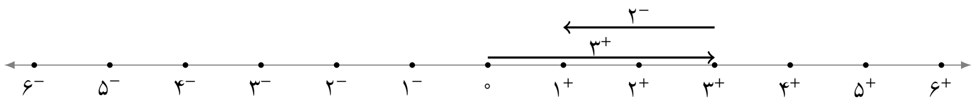
$a^+ + b^-$ به‌معنای a شیء افزایش در مرحلهٔ اول و b شیء کاهش در مرحلهٔ دوم است. پس:

- اگر $a = b$ آنگاه $a^+ + b^- = ۰$.
- اگر $a > b$ آنگاه $a^+ + b^- = (a-b)^+$ که به‌معنای $(a-b)$ شیء افزایش است.
- اگر $a < b$ آنگاه $a^+ + b^- = (b-a)^-$ که به‌معنای $(b-a)$ شیء کاهش است.

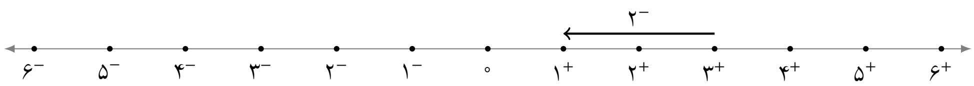
درنتیجه:

$$a^+ + b^- = \begin{cases} (a-b)^+ & ; \quad a > b \text{اگر} \\ ۰ & ; \quad a = b \text{اگر} \\ (b-a)^- & ; \quad a < b \text{اگر} \end{cases}$$

برای نمایش $۳^+ + ۲^-$ از صفر پیکان ۳^+ (۳ واحد افزایش) را رسم کرده و پیکان ۲^- (۲ واحد کاهش) را چنان رسم می‌کنیم که ابتدای آن بر انتهای پیکان ۳^+ واقع شود. (مطابق شکل زیر)



چون انتهای پیکان ۲^- روی ۱^+ قرار گرفته است، پس $۳^+ + ۲^- = ۱^+$. البته، چون برای هر عدد طبیعی مانند a، اگر پیکان a^+ از مبدأ (صفر) شروع شود، انتهای آن روی a^+ قرار می‌گیرد، پس می‌توانیم برای نمایش $a^+ + b^+$ یا $a^+ + b^-$ از رسم پیکان a^+ صرف نظر کرده و پیکان b^+ یا b^- را از نقطهٔ a^+ آغاز کنیم. به‌طور مشابه، برای نمایش $a^- + b^+$ یا $a^- + b^-$ نیز می‌توانیم از رسم پیکان a^- صرف نظر کرده و پیکان b^+ یا b^- را از نقطهٔ a^- شروع کنیم. بنابراین می‌توانیم از شکل زیر برای نمایش $۳^+ + ۲^-$ استفاده کنیم.



مثال ۱.۴: عبارت‌های زیر را با استفاده از محور اعداد محاسبه کنید.

آ. $۱^+ + ۳^-$ ب. $۱^- + ۲^-$ ج. $۳^- + ۵^+$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

بنابراین می‌توان جمع اعداد مثبت و منفی را به شکل زیر تعریف کرد:

گزاره ۲.۴: برای هر دو عدد طبیعی دلخواه a و b تعریف می‌کنیم:

آ. $a^+ + b^+ = (a+b)^+$

ب. $\circ + a^- = a^- + \circ = a^-$ و $\circ + a^+ = a^+ + \circ = a^+$ و $\circ + \circ = \circ$

ج. $a^+ + a^- = a^- + a^+ = \circ$

د. اگر $a > b$ آن‌گاه، $a^+ + b^- = b^- + a^+ = (a-b)^+$

ه. اگر $a < b$ آن‌گاه، $a^+ + b^- = b^- + a^+ = (b-a)^-$

مثال ۲.۴: مقادیر زیر را محاسبه کنید.

آ. $۳^+ + ۵^+$ ب. $۵^- + ۷^+$ ج. $۳^+ + ۷^-$

د. $۵^- + ۵^+$ ه. $۶^+ + ۱^+$ و. $۴^- + ۳^-$

پاسخ: آ. ۸^+ ب. ۲^+ ج. ۴^- د. $\circ$ ه. ۷^+ و. ۷^- ■

۲.۴ اعداد صحیح

یکی از مهم‌ترین ویژگی‌هایی که در این فصل با آن آشنا می‌شویم، شناخت عنصر قرینه و خاصیت عنصر قرینه است. اما پیش از معرفی آن لازم است تجربیات مناسبی کسب کنیم.

مهم! **مهم!** برای یک تغییر دیدگاه مهم آماده شوید.

مثال ۳.۴: مقدار x را چنان بیابید که:

آ. $۲^+ + x = \circ$ ب. $۳^- + x = \circ$ ج. $\circ + x = \circ$

پاسخ: کافی است بر محور اعداد صحیح پیکانی بیابیم که از ۲^+ شروع شده و به صفر ختم می‌شود. این پیکان ۲ واحد کاهش را نشان می‌دهد که با ۲^- نمایش داده می‌شود. پس $x = ۲^-$. ■

گزاره ۳.۴: برای هر عدد صحیح مانند x عدد صحیح منحصربه‌فردی مانند y وجود دارد که: $x + y = y + x = \circ$

اثبات: بنا به تعریف، x عددی صحیح است اگر و تنها اگر $x = \circ$ یا اینکه عددی طبیعی مانند a وجود داشته باشد که $x = a^+$ یا $x = a^-$ و داریم:

$$\begin{cases} x = \circ \Longleftrightarrow y = \circ \\ x = a^+ \Longleftrightarrow y = a^- \\ x = a^- \Longleftrightarrow y = a^+ \end{cases}$$

بدین‌ترتیب، وجود و یکتایی y واضح است. ■

بنا به گزارهٔ فوق، برای هر عدد صحیح مانند x، یک و تنها یک عدد صحیح مانند y هست که $x + y = y + x = \circ$. پس می‌توان y را برحسب x بیان کرده و قرینهٔ x نامیده و به‌صورت x'، $x^\star$ یا با هر نمادگذاری دیگری نشان داد که ارتباط آن با x را نمایش دهد. امروزه در تمام جهان، قرینهٔ x را با $(-x)$ نمایش می‌دهند. این نمادگذاری ریشه‌ای تاریخی دارد که در ادامه با آن آشنا خواهیم شد.

تعریف ۱.۴: برای هر عدد صحیح مانند x، قرینهٔ x که با $(-x)$ نشان داده می‌شود، عدد صحیح منحصربه‌فردی است که $x + (-x) = (-x) + x = \circ$

مثال ۴.۴: هر یک از مقادیر زیر را بیابید.

آ. -۲^+ ب. -۳^- ج. -۰

د. $-(-۲^+)$ ه. $-(-۳^+)$ و. $-(-۰)$

پاسخ: آ. $۲^+ + ۲^- = ۰ \Longrightarrow -۲^+ = ۲^-$ ب. $۳^- + ۳^+ = ۰ \Longrightarrow -۳^- = ۳^+$

ج. $۰ + ۰ = ۰ \Longrightarrow -۰ = ۰$ د. $-(-۲^+) = -۲^- = ۲^+$

ه. $-(-۳^+) = -۳^- = ۳^+$ و. $-(-۰) = -۰ = ۰$ ■

بدین‌ترتیب می‌توان خاصیت زیر را برای اعداد صحیح (حساب کاهش و افزایش) بیان کرد.

خاصیت ۱.۴: هر عدد صحیح قرینه‌ای در اعداد صحیح دارد.

به‌جای a^+ و a^- می‌توان از هر نمادگذاری دلخواهی استفاده کرد. کافی است آن نمادگذاری، مشخص کند که منظور از عدد طبیعی به‌کار رفته در یک عبارت، تعداد کاهش است یا افزایش. بنابراین، می‌توان به‌جای a^+ از a و به‌جای a^- از $(-a)$ استفاده کرد.

هرچند ریاضیدانان هندی و مسلمان از قرن ششم میلادی در حساب دارایی و قرض به اعداد منفی و مثبت توجه داشته‌اند اما اولین بار، نابغهٔ بی‌مثالِ قرن شانزدهم، جیرولامو کاردانو، ریاضیدان شرور و فریبکار ایتالیایی اعداد منفی را در کتاب آرس‌مگنا (فن کبیر) به رسمیت شناخت. کاردانو علاقه‌مند بود از نمادهای a^+ و a^- استفاده کند، اما محدودیت‌های صنعت چاپ که در آن دوران نوپا بود، باعث شد از نمادهای $a+$ و $a-$ استفاده شود.

اما این دیدگاه یک مشکل اساسی دارد. همان‌طور که «۳ عدد سیب» با عدد «۳» یکسان نیست، ۳ عدد افزایش نیز با عدد ۳ یکسان نیست. این مشکل زمانی خود را بهتر نشان می‌دهد که به ضرب اعداد توجه کنیم. به‌طور مثال $۴^+ \times ۳^+$ به‌معنای حاصل‌ضرب ۳ عدد افزایش در ۴ عدد افزایش بی‌معنا است و نمی‌توان تعبیر مناسبی برای آن ارائه کرد. درحالی‌که $۴^+ \times ۳$ به‌معنای سه مرحله افزایش ۴ تایی قابل تعبیر است؛ اما در این حالت نمی‌توان عدد ۳ را به‌معنای ۳^+ (۳ تا افزایش) در نظر گرفت.

توجه! برای درک بهتر این مطلب به بامعنا بودن (۴سیب) × ۳ و بی‌معنا بودن (۴سیب) × (۳سیب) توجه کنید.

مثال ۵.۴: حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

آ. $۳ \times ۵^+$ ب. $۲ \times ۳^-$ ج. $۰ \times ۴^+$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

برای رفع این مشکل، اعداد طبیعی را شمار اشیاء و اعداد منفی را قرینهٔ اعداد طبیعی درنظر می‌گیریم. بنابراین هرگاه اعداد طبیعی شمار افزایش (تعداد اشیاء اضافه شده) را نشان دهد، اعداد منفی، شمار کاهش (تعداد اشیاء کَم شده) را نشان می‌دهد؛ چون نتیجه a عدد کاهش و a عدد افزایش، نداشتن هیچ تعداد کاهش یا افزایش است که با صفر نشان داده می‌شود و به‌عبارتی a عدد افزایش و a عدد کاهش قرینهٔ یکدیگرند. همچنین اگر اعداد طبیعی شمار «سود» را نشان دهند، اعداد منفی شمار «زیان» را نشان خواهند داد؛ چون اگر a تعدادِ سکه‌های سودِ شخصی را نشان دهد، a سکه زیان کردن آن شخص را می‌توان با $-a$ نشان داد؛ چون a سکه سود در مرحله اول و a سکه زیان در مرحله دوم به‌معنای نداشتن هیچ سود و زیانی (در کُل) می‌باشد. بنابراین، در این تعبیر جدید، اعداد صحیح شامل اعداد طبیعی بوده و علاوه‌بر آن برای تعابیری مانند «کاهش و افزایش» یا «سود و زیان» نیز قابل تعبیر و استفاده است.

مثال ۶.۴: در هر مورد، بنا به تعبیر ارائه شده برای اعداد مثبت، اعداد منفی را تعبیر کنید.
آ . تعداد افرادی که وارد سالن می‌شوند. ب . گامهای حرکت به سمت چپ
ج . ساعاتی که از اذان ظهر امروز گذشته . د . میزان سود
ه. پول گرفته شده و . پول داده شده
ز . تعداد افرادی که از سالن خارج می‌شوند. ح . ساعاتی که تا اذان ظهر امروز مانده

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

تعریف ۲.۴: به‌ازای هر عدد طبیعی و ناصفر مانند a عدد جدید و منحصربه‌فردی درنظر می‌گیریم که آن را با $(-a)$ نمایش می‌دهیم و آن را «منفیِ a» می‌خوانیم.
همچنین، اعداد طبیعی و اعداد منفی را اعداد صحیح خوانده و با $\mathbb{Z}$ نمایش می‌دهیم.

در تعریف فوق، اعداد صحیح را صرفاً نمادهایی درنظر می‌گیریم که شامل اعداد طبیعی و منفیِ آنهاست. از آنجا که قرینهٔ هر عدد طبیعی، منفیِ آن عدد است، از نمادهایی مشابه برای هر دو استفاده می‌شود. اما توجه داریم که منفیِ منفیِ ۳ بی‌معناست، در حالی که «قرینهٔ منفیِ ۳» و «قرینهٔ قرینهٔ ۳» هر دو بامعنا بوده و برابرند با ۳؛ زیرا ۳ و «منفیِ ۳» قرینهٔ یکدیگرند.
علاوه‌بر اینکه که اعداد صحیح را نماد می‌دانیم، اعداد طبیعی را نیز می‌توان نمادهایی درنظر گرفت که از صفر شروع شده و یکی پس از دیگری می‌آیند. بدین‌ترتیب، اعداد صحیح از درک شهودی فاصله گرفته و به‌عنوان مجموعه‌ای از نمادها درنظر گرفته می‌شود. بنابراین، عبارات زیر که در دیدگاه کاهش و افزایش واضح می‌نمودند، اکنون واضح نمی‌نمایند و باید به‌عنوان فرض و قرارداد ذکر شوند.

برای هر دو عدد طبیعی و ناصفر مانند a و b داریم:
$a\neq(-b)$ $\quad$ $a\neq 0$ $\quad$ $(-a)\neq 0$ $\quad$ $(-a)=(-b)$ **اگر و تنها اگر** $a=b$

مثال ۷.۴: عدد صحیحِ x را چنان بیابید که $x=-x$.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۱.۲.۴ جمع و تفریق اعداد صحیح

می‌خواهیم جمع و ضرب اعداد صحیح چنان باشد که با **همهٔ** تعابیر اعداد صحیح از جمله تعبیر کاهش و افزایش یا سود و زیان همخوانی داشته باشد.
با توجه به تعریف جمع برای تعبیر کاهش و افزایش می‌توانیم جمع اعداد صحیح را با جایگذاری a به‌جای a^+ و $(-a)$ به‌جای a^- به‌صورت زیر تعریف کنیم.

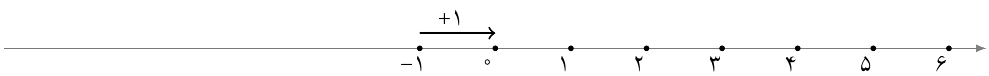
تعریف ۳.۴: برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b تعریف می‌کنیم:
آ . $a+b$ از تعریف جمع اعداد طبیعی محاسبه می‌شود.
ب . $(-a)+(-b)=(-b)+(-a)=-(a+b)$
ج . $a+(-a)=(-a)+a=0$
د . اگر $a>b$ آن‌گاه $a+(-b)=(-b)+a=a-b$
ه. اگر $a<b$ آن‌گاه $a+(-b)=(-b)+a=-(b-a)$

در تعریف فوق جمع اعداد صحیح را با استفاده از جمع و تفریق اعداد طبیعی بیان کرده‌ایم. به‌طور مثال در مورد (ب)، عبارت $(-a) + (-b)$ جمعِ دو عدد صحیح را نشان می‌دهد و $-(a + b)$ به منفی حاصل‌جمع دو عدد طبیعی اشاره دارد. در مورد (د) نیز $a + (-b)$ جمعِ دو عدد صحیح است و $a - b$ تفریقِ دو عدد طبیعی را نشان می‌دهد. حتی در مورد (آ) نیز، حاصل‌جمع $a + b$ به‌عنوان دو عدد صحیح، براساس حاصل‌جمع آنها به‌عنوان دو عدد طبیعی محاسبه می‌شود.

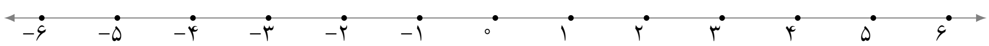
باتوجه به اینکه اعداد طبیعی نیز اعدادی صحیح هستند، محور اعداد طبیعی را به محور اعداد صحیح توسعه داده و جمع و ضرب را روی آن تعبیر می‌کنیم.

برای نشان دادن (-1) بر محور اعداد از اینکه -1 عددی است که $(-1) + 1 = 0$ استفاده می‌کنیم. پیکانی به طول ۱ و به سمت راست چنان می‌کشیم که انتهای آن بر صفر باشد. به عبارتی $(0 - 1)$ را بر نمودار نشان می‌دهیم. یعنی عددی را می‌یابیم که حاصل جمع آن با ۱ مساوی صفر باشد و در نتیجه نقطهٔ (-1) مطابق شکل زیر بر محور مشخص می‌شود.

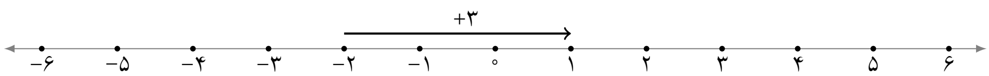
با دقت بخوانید...
با تمام سادگی، نکاتی ظریف و پایه‌ای در خود دارند.



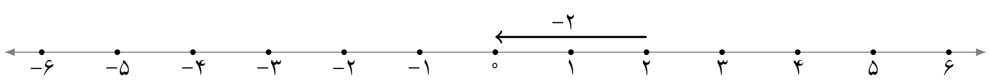
قرینهٔ بقیهٔ اعداد طبیعی نیز به‌همین طریق روی محور اعداد مشخص می‌شود و می‌توان محور زیر را برای اعداد صحیح درنظر گرفت.



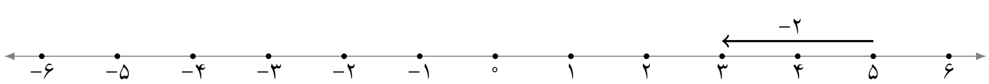
برای نشان دادن $a + b$ ابتدا پیکانی به طول b که ابتدای آن بر a قرار دارد، رسم می‌کنیم. انتهای کمان بر $a + b$ خواهد بود. بنابراین $(-2) + 3$ بر محور اعداد صحیح به شکل زیر است.



چون $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$ برای نمایش $2 + (-2)$ باید پیکان (-2) چنان رسم شود که ابتدای آن بر ۲ و انتهای آن بر صفر باشد. درنتیجه مطابق نمودار زیر پیکان (-2)، پیکانی است به طول ۲ واحد و به سمت چپ (مطابق با پیکان $^{-}2$ در دیدگاه کاهش و افزایش).



به‌طورِ مشابه، با توجه به نمایش زیر داریم $5 + (-2) = 3$.



ساده اما مهم ...

بنابراین برای نمایش $x + y$ که در آن x و y اعدادی صحیح هستند، پیکان y را از نقطهٔ x شروع کرده، انتهای پیکان x بر $x + y$ قرار می‌گیرد. اگر x عددی طبیعی باشد، یعنی اگر عددی طبیعی مانند b وجود داشته باشد که $x = b$ آن‌گاه پیکان x پیکانی است به‌طول b و به سمت راست (مطابق با b^{+}) و اگر $x = -b$ آن‌گاه پیکان x، پیکانی است به‌طول b و به سمت چپ (مطابق با b^{-}).

مثال ۸.۴: حاصل‌جمع‌های زیر را با استفاده از محور اعداد به‌دست آورید.

آ. ۳ + ۲   ب. ۴ + (۳−)   ج. (۱−) + ۳   د. (۱−) + (۱−)

پاسخ: با توجه به مطالبی که پیش از مثال آمده‌اند، واضح است. ■

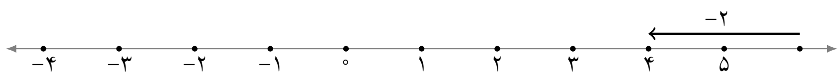
به‌همین طریق می‌توانیم تفریق را نیز محاسبه کنیم. چون برای هر دو عدد صحیح مانند a و b، حاصل $a-b$، جواب معادلهٔ $x+b=a$ است. بنابراین برای یافتن x کافی است پیکان b را چنان رسم کنیم که انتهای آن بر a باشد. در این صورت ابتدای آن بر x خواهد بود. چون این نقطه، عددی را نشان می‌دهد که حاصل جمع آن با b مساوی است با a.

مثال ۹.۴: حاصل عبارات زیر را به کمک محور اعداد صحیح به‌دست آورید.

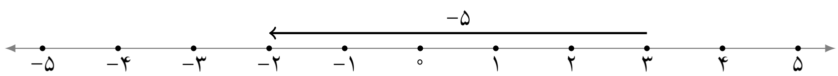
آ. ۰ − ۴   ب. ۲ − ۵   ج. (۲−) − ۳

د. (۲−) − ۴   ه. (۵−) − (۲−)

پاسخ: د.



ه.



موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

در اعداد صحیح، خواص جابجایی و همانی جمع از تعریف آن واضح‌اند. برای بررسی خاصیت شرکت‌پذیری جمع، کافی است آن را در هشت حالت زیر بررسی کنیم.

آ. $x, y, x \geq ۰$

ب. $x, y \geq ۰$ و $z < ۰$ ج. $x, z \geq ۰$ و $y < ۰$ د. $y, z \geq ۰$ و $x < ۰$

ه. $x \geq ۰$ و $y, z < ۰$ و. $y \geq ۰$ و $x, z < ۰$ ز. $z \geq ۰$ و $x, y < ۰$

ح. $x, y, z < ۰$

خاصیت ۲.۴ (جابجایی جمع): **برای هر دو عدد صحیح x و y داریم:** $x+y=y+x$

خاصیت ۳.۴ (همانی جمع): **برای هر عدد صحیح x داریم:** $x+۰=۰+x=x$

خاصیت ۴.۴ (شرکت‌پذیری جمع): **برای هر سه عدد صحیح x، y و z داریم:**
$x+(y+z)=(x+y)+z$

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود (از راهنمایی فوق استفاده کنید). ■

به سادگی می‌توان از تعریف (۳.۴) نتیجه گرفت:

توجه!..........توجه! معنای «اعداد صحیح» در این گزاره و گزاره (۳.۴) متفاوت است.

گزاره ۴.۴: **برای هر عدد صحیح مانند x عدد صحیحی مانند y وجود دارد که:**
$x+y=y+x=۰$

مهم! مهم! مهم‌ترین ویژگی اعداد صحیح...

قضیه ۱.۴ (عنصر قرینه جمع): **برای هر عدد صحیح مانند x عدد صحیح منحصربه‌فردی مانند y وجود دارد که** $x+y=y+x=۰$

اثبات: عدد صحیح xرا به دلخواه در نظر بگیرید. کافی است نشان دهیم اگر y و z دو عدد صحیح باشند که: $x+y=y+x=\circ$ و $x+z=z+x=\circ$ آن‌گاه $y=z$. برای این امر به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y=y+\circ=y+(x+z)=(y+x)+z=\circ+z=z$$ ■

نکته‌ای ظریف
با دقت بخوانید.

اجازه دهید بار دیگر آنچه تا کنون گفته‌ایم، با دقت مرور کنیم. به ازای هر عدد طبیعی مانند a، عدد جدیدی ساختیم و آن را با $(-a)$ نشان دادیم و از نماد $(-a)$ به‌معنای قرینهٔ a نیز استفاده کردیم. اگر نماد منها را صرفاً به‌معنای علامتِ منفی در نظر بگیریم، عبارتی مانند $-(-۳)$ بی‌معنا بوده و عبارت $-a$ فقط زمانی بامعناست که a عددی طبیعی باشد. برای جلوگیری از این ابهام، $(-a)$ را به‌معنای قرینهٔ a درنظر می‌گیریم که برای هر عدد طبیعی مانند a به منفیِ a اشاره دارد.

خاصیت ۵.۴ (حذف جمع)**: برای هر سه عدد صحیح x، y و z داریم:**
اگر $x+z=y+z$ آن‌گاه $x=y$

اثبات: (شِمای اثبات) $x+z=y+z\Longrightarrow x+z+(-z)=y+z+(-z)\Longrightarrow x=y$
بیان دقیق آن به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

قضیه ۲.۴: برای هر عدد صحیح مانند x داریم $-(-x)=x$.

اثبات:
$$\left.\begin{array}{l} x+(-x)=\circ \\ (-(-x))+(-x)=\circ \end{array}\right\}\Longrightarrow x+(-x)=(-(-x))+(-x)\Longrightarrow x=-(-x)$$

به بیان ساده‌تر، چون x و $-(-x)$ هر دو قرینهٔ $-x$ هستند و قرینهٔ $-x$ یکتاست، پس $x=-(-x)$. ■

مثال ۱۰.۴: معادلات زیر را حل کنید.

آ. $x+۷=۴$ ب. $x+(-۲)=۴$ ج. $x+(-۳)=(-۲)$

پاسخ: آ. $x+۷=۴\Longrightarrow x+۷+(-۷)=۴+(-۷)=-(۷-۴)=-۳\xrightarrow{۷+(-۷)=\circ}x=-۳$

ب. $x+(-۲)=۴\Longrightarrow x+(-۲)+۲=۴+۲=۶\Longrightarrow x=۶$

ج. $x+(-۳)=(-۲)\Longrightarrow x+(-۳)+۳=(-۲)+۳=۳-۲=۱\Longrightarrow x=۱$ ■

قضیه ۳.۴: برای هر دو عدد صحیح a و b معادلهٔ $x+b=a$ دارای جوابی یکتا است.

اثبات: $x+b=a\Longrightarrow (x+b)+(-b)=a+(-b)\Longrightarrow x=a+(-b)$
پس این معادله جواب دارد و اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های این معادله باشند، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x_۱+b=a \\ x_۲+b=a \end{array}\right\}\Longrightarrow x_۱+b=x_۲+b\xrightarrow{\text{حذف جمع}}x_۱=x_۲$$

بنابراین، جواب معادله یکتاست. ■

حال می‌توانیم تفریق را در اعداد صحیح، بدون داشتن هیچ شرطی روی a و b تعریف کنیم:

تعریف ۴.۴ (تفریق اعداد صحیح)**: برای هر دو عددصحیح مانند a و b داریم:**
$x=a-b$ اگر و تنها اگر $x+b=a$

بنابراین، عبارت $a-b$ در اعداد صحیح، برای هر دو عدد صحیحی مانند a و b بامعناست؛ در حالی‌که در اعداد طبیعی با شرط $a\geq b$ بامعناست.

قضیه ۴.۴: برای هر دو عدد صحیح a و b داریم $a-b=a+(-b)$

اثبات: $a-b$ به‌معنای جواب معادلهٔ $x+b=a$ است. بنابراین داریم:

تعریف تفریق	$x=a-b \Longleftrightarrow x+b=a$
خوش‌تعریفی جمع اعداد صحیح	$\Longleftrightarrow (x+b)+(-b)=a+(-b)$
شرکت‌پذیری جمع اعداد صحیح	$\Longleftrightarrow x+\big(b+(-b)\big)=a+(-b)$
خاصیت عنصر قرینه	$\Longleftrightarrow x+\circ=a+(-b)$
همانی جمع	$\Longleftrightarrow x=a+(-b)$ ■

گاهی در اعداد صحیح تفریق را با استفاده از عبارت فوق تعریف می‌کنند و $a-b$ را یک خلاصه‌نویسی برای عبارت $a+(-b)$ در نظر می‌گیرند.

مثال ۱۱.۴: حاصل هر یک از عبارات زیر را محاسبه کنید:

آ. $۲-(-۵)$ ب. $۵-(-۲)$ ج. $۲-(-۵)$ د. $(-۲)-(-۵)$

ه. $۵-۲$ و. $(-۵)-۲$ ز. $۵-(-۲)$ ح. $(-۵)-۲-$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۱۲.۴: نشان دهید برای هر سه عدد صحیح دلخواه a، b و c داریم:

آ. $-(a+b)=(-a)+(-b)$ ب. $-(a-b)=b-a$

ج. $(a-b)+c=(a+c)-b$ د. $(a-b)-c=a-(b+c)$

ه. $a-(-b)=a+b$ و. $a-b=-(b-a)$

بسیار مهم و پرکاربرد...
با دقت پاسخ دهید.
صورت مثال نیز بسیار مهم و پرکاربرد است.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده وگذار می‌شود. ■

مثال ۱۳.۴: معادلات زیر را حل کنید.

آ. $x-۳=۵$ ب. $۳-x=۴$ ج. $(-۳)-x=(-۵)$

پاسخ: آ. $x-۳=۵ \Longrightarrow x+(-۳)=۵ \Longrightarrow x+(-۳)+۳=۵+۳=۸ \Longrightarrow x=۸$

ب. $۳-x=۴ \Longrightarrow ۳+(-x)=۴ \Longrightarrow ۳+(-x)+(-۳)=۴+(-۳) \Longrightarrow (-x)=۱ \Longrightarrow x=-(-x)=-۱$

ج. به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود (جواب: $x=۲$) ■

۲.۲.۴ ضرب و تقسیم اعداد صحیح

عباراتی مانند a^+b^+، a^+b^-، a^-b^+ و a^-b^- به‌عنوان حاصل‌ضرب دو عدد صحیح در دیدگاه کاهش و افزایش بی‌معنا هستند؛ زیرا نمی‌توانیم تعابیر مناسبی برای ضرب a عدد افزایش در b عدد کاهش بیابیم. اما عبارت ab^+ که در آن a عددی طبیعی و b^+ به‌معنای b عدد افزایش است، به‌صورت «a مرحله افزایش b تایی» قابل تعبیر است.

مثال ۱۴.۴: نشان دهید برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b داریم:

آ. $ab^+=(ab)^+$ ب. $ab^-=(ab)^-$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۱۵.۴: هر یک از عبارات زیر را بر محور اعداد نمایش دهید.

آ. $۲ \times ۳^{+}$ ب. $۳ \times ۲^{-}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

در تعبیر اعداد صحیح به‌عنوان اعداد طبیعی و قرینهٔ آنها، عبارات ab^{+} و $(ab)^{+}$ هر دو به‌صورت ab نوشته می‌شوند. بنابراین ضربِ دو عدد طبیعی به‌عنوان دو عدد صحیح با ضرب آنها به‌عنوان دو عدد طبیعی نگارش یکسان دارند. یعنی اگر ضرب اعداد طبیعی و ضرب اعداد صحیح را به‌ترتیب با $\times_{\mathbb{N}}$ و $\times_{\mathbb{Z}}$ نشان دهیم، بنا به مورد (آ) از مثال (۱۴.۴) داریم:

$$a \times_{\mathbb{Z}} b = a \times_{\mathbb{N}} b$$

به‌طور مشابه برای $ab^{-} = (ab)^{-}$ نیز داریم: با گزاره (۲.۴) مقایسه شود.

$$a \times_{\mathbb{Z}} (-b) = -(a \times_{\mathbb{N}} b)$$

درواقع ضرب اعداد صحیح را با استفاده از ضرب اعداد طبیعی بیان کرده‌ایم.

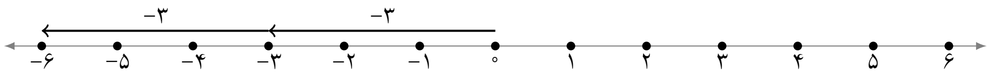
مثال ۱۶.۴: هر یک از عبارات زیر را در اعداد صحیح محاسبه کنید.

آ. ۲×۳ ب. $۳ \times (-۵)$

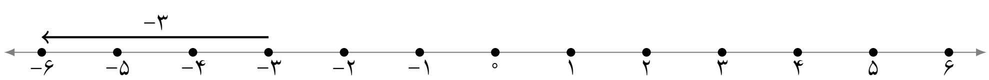
ج. $۲۴۷ \times (-۲۵۷)$ د. $۴۵۶ \times (-۲۹۵)$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

می‌توان $(-۳) \times ۲$ که به‌معنای $(-۳) + (-۳)$ است را به‌صورت زیر بر محور اعداد نشان داد:



اما شخصی به ما خُرده گرفته و می‌گوید نمودار فوق مربوط به عبارت $(-۳) + (-۳) + ۰$ است و نمودار $(-۳) + (-۳)$ به‌شکل زیر است.



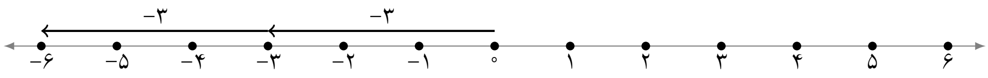
نمودار زیر برای $(-۳) \times ۲$ مناسب است، زیرا از طرفی نمودار فوق برای ساده‌سازیِ نمودار زیر رسم می‌شود و از طرف دیگر، اگر بخواهیم ضرب عددی طبیعی مانند a در عددی صحیح مانند x را مطابق با تعریف ضرب اعداد طبیعی تعریف کنیم، داریم:

$$(a + ۱)x = ax + x \qquad ۰ \times x = ۰$$

بدین‌ترتیب، برای $(-۳) \times ۲$ داریم

$$۲(-۳) = ۱(-۳) + (-۳) = ۰(-۳) + (-۳) + (-۳) = ۰ + (-۳) + (-۳)$$

بنابراین، نمودار زیر برای $(-۳) \times ۲$ مناسب است . علاوه‌بر این، نمودار زیر ۲ مرحله کاهش ۳تایی را بهتر نمایش می‌دهد و باز هم بر نمودار فوق ترجیح دارد.

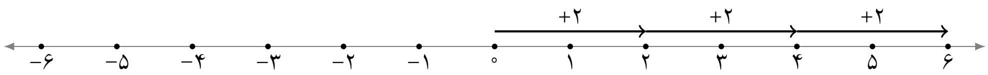


مثال ۱۷.۴: حاصل هر یک از عبارات زیر را با استفاده از محور اعداد صحیح محاسبه نمایید.

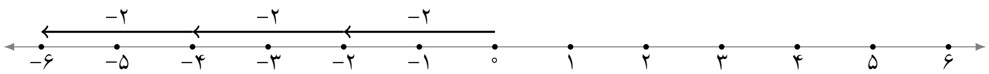
آ. (۵−) × ۴ ب. (۳−) × ۰ ج. (۴−) × ۱ د. (۱−) × ۷

پاسخ: آ. (۲۰−) ب. صفر ج. (۴−) د. (۷−) ■

دیدیم که برای نمایش ۲ × ۳ و (۲−) × ۳ می‌توانیم از نمودارهای زیر استفاده کنیم.



نمودار ۲ × ۳



نمودار (۲−) × ۳

جالب و خواندنی... نمونه‌ای از ساخته شدن یک تعریف کاملا مجرد

عبارت ۲ × ‾۳ در دیدگاه کاهش و افزایش بی‌معناست که به‌صورت ۲ × (۳−) نوشته می‌شود. چون ضرب اعداد طبیعی دارای خاصیت جابجایی است، علاقه‌مندیم که ضرب اعداد صحیح نیز دارای خاصیت جابجایی باشد. لذا فرض می‌کنیم برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b داریم $(-a)b = b(-a)$. در این‌صورت می‌توانیم برای هر دو عدد طبیعی a و b تعریف کنیم:

$$(-a)b = b(-a) = -(ba)$$

و از جابجایی ضرب اعداد طبیعی نتیجه می‌گیریم $-(ba) = -(ab)$. پس

$$(-a)b = b(-a) = -(ba) = -(ab)$$
$$(-b)a = a(-b) = -(ab) = -(ba)$$

و درنتیجه $(-a)b = a(-b)$. بدین‌ترتیب، می‌توانیم تعریف زیر را ارائه کنیم:

برای هر دو عدد طبیعی a و b تعریف می‌کنیم: $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

اما در این صورت برای محاسبهٔ $(-a)(-b)$ دچار مشکل می‌شویم و می‌توانیم برای رفعِ آن بگوییم:

برای هر دو عدد صحیح a و b تعریف می‌کنیم: $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

در این صورت برای محاسبه $(-a)(-b)$ داریم:

$$(-a)(-b) = -\big(a(-b)\big) = -\big(-(ab)\big) = ab$$

بنابراین می توانیم ضرب اعداد صحیح را به صورت زیر تعریف کنیم:

برای هر دو عدد صحیح a و b داریم:

ه. اگر a و b اعدادی طبیعی باشند، ab از ضرب اعداد طبیعی به‌دست می‌آید.

و. $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

مثال ۱۸.۴: عبارات زیر را با استفاده از تعریف فوق محاسبه کنید.

آ. ۳×۵	ب. $۳(-۵)$	ج. $۵(-۳)$
د. $-(۳(-۵))$	ه. $(-۳)(-۵)$	و. $(-۵)(-۳)$
ز. ۴×۰	ح. $۰ \times (-۴)$	ط. $(-۴) \times ۰$
ی. $۳(-۰)$	ک. $۰(-(-۳))$	ل. $(-۰)(-(-۳))$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۱۹.۴: نشان دهید برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b داریم:

آ. $a \times ۰ = ۰ \times a = (-a) \times ۰ = ۰ \times (-a) = ۰$

ب. $(-a)(-b) = ab$ ج. $۰ \times ۰ = ۰$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

جالب و خواندنی... صرفاً جهت اطلاع...

شخصی به ما خُرده می‌گیرد که در تعریف فوق، هر عبارت را می‌توان به روش‌های مختلفی محاسبه نمود. چه تضمینی وجود دارد که محاسبه یک عبارت با همه این روش‌ها حاصل یکسانی داشته باشد؟ به‌طور مثال ۳×۰ را می‌توان به هر یک از صورت‌های زیر نوشت:

$$(-۰) \times ۳ \qquad ۰ \times (-(-۳)) \qquad (-۰) \times (-(-۳))$$

به‌عبارتی اگر $a = x$ و $b = y$ اعدادی صحیح باشند، آیا می‌توان تضمین نمود و مطمئن بود که $ab = xy$؟ این مسئله به «خوش‌تعریفی» معروف است برای اثبات آن با مشکلات جدی روبرو هستیم. برای مقابله با این مشکل ترجیح می‌دهیم به‌جای اثبات خوش‌تعریفی، تعریفی ارائه دهیم که اثبات خوش‌تعریفی آن به راحتی قابل اثبات باشد. لذا با استفاده از مثال قبل می‌توانیم تعریف زیر را ارائه دهیم که در آن حاصل هر دو عدد صحیح فقط و فقط به یک روش محاسبه می‌شود و مشکلات تعریف قبل را ندارد.

با تعریف (۳.۴) مقایسه شود.

تعریف ۵.۴: برای هر دو عدد طبیعی و ناصفر مانند a و b تعریف می‌کنیم:

آ. ab از تعریف ضرب اعداد طبیعی به‌دست می‌آید.

ب. $۰ \times ۰ = ۰a = a۰ = (-a)۰ = ۰(-a) = ۰$

ج. $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

د. $(-a)(-b) = ab$

با استفاده از این تعریف به‌سادگی می‌توانیم به مثال زیر پاسخ دهیم که نشان می‌دهد از این تعریف می‌توان به تعریف قبلی رسید و تمام نتایج تعریف قبلی برقرارند.

مثال ۲۰.۴: نشان دهید برای هر دو عدد صحیح مانند a و b، از تعریف فوق داریم:

آ. $a(-b) = (-a)b = -(ab)$ ب. $(-a)(-b) = ab$

پاسخ: برای هر عدد صحیح مانند a، سه حالت مثبت، منفی و صفر را درنظر گرفته و درستی تساوی‌ها را در هر سه حالت بررسی می‌کنیم. ■

بدین‌ترتیب به‌سادگی می‌توان قضیهٔ زیر را اثبات کرد.

قضیه ۵.۴: برای هر سه عدد صحیح مانند a، b و c داریم:

آ. $ab = ba$ ب. $a(bc) = (ab)c$

ج. $a \times ۱ = ۱ \times a = a$ د. $a \times ۰ = ۰ \times a = ۰$

ه. $a(b+c) = (ab + (ac)$ و. $a(-۱) = (-۱)a = (-a)$

اثبات: با استفاده از مثال قبل و خواص اعداد طبیعی ساده است. ■

در اعداد صحیح همانند اعداد طبیعی، $a \div b$ را جواب منحصربه‌فردِ معادلهٔ $bx = a$ درنظر می‌گیریم.. به‌طور مثال، چون (۳−) تنها عددی است که ۶− =(۳−)×۲ پس ۳− = ۲÷(۶−) . (یکتایی (۳−) از قاعدهٔ حذف ضرب نتیجه می‌شود که در ادامه می‌آید.)

البته، مطابق با آنچه در فصل قبل دیدیم، گاهی $a \div b$ را به‌صورت $\frac{a}{b}$ نمایش می‌دهیم. البته در بخش بعد، پس از آشنایی با اعداد گویا خواهیم دید، استفاده از این نمادگذاری برای بیان تقسیم اعداد صحیح قابل قبول است و با اعداد گویا همخوانی دارد.

مثال ۲۱.۴: عبارات زیر را محاسبه نمایید.

آ. $\frac{-۶}{۳}$ ب. $\frac{-۴}{-۲}$ ج. $\frac{۸}{-۴}$

پاسخ: آ. ۲− ب. ۲ ج. ۲− ■

مثال ۲۲.۴: نشان دهید برای هر دو عدد صحیح مانند a و b داریم:

آ. $(-a) \div b = -(a \div b)$ ب. $a \div (-b) = -(a \div b)$ ج. $(-a) \div (-b) = a \div b$

پاسخ: آ.

$$x = (-a) \div b \iff xb = -a \iff -(xb) = a$$
$$\iff (-x)b = a \iff (-x) = a \div b \iff x = -(a \div b)$$

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۲۳.۴: معادلات زیر را در اعداد صحیح حل کنید.

آ. $(-۲)x = -۴$ ب. $(-۲)x = ۶$ ج. $۲x = -۶$

پاسخ: آ. $(-۲)x = -۴ \Longrightarrow -(۲x) = -۴ \Longrightarrow ۲x = ۴ \Longrightarrow x = ۴ \div ۲ = ۲$

ب. $(-۲)x = ۶ \Longrightarrow -(۲x) = ۶ \Longrightarrow ۲x = -۶ \Longrightarrow x = (-۶) \div ۲ = -(۶ \div ۲) = -۳$

ج. به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

تمرین:

تمرین (۱) صرفاً جهت خوانندگان مبتدی و برای آشنایی با کاربردهای اعداد صحیح ارائه شده است.

(۱) برای هر یک از موارد زیر، عبارت محاسباتی مناسب را بنویسید:

آ. دمای هوای شهرکرد دیشب ۸ درجه زیر صفر بوده است. امروز نسبت به دیشب ۴ درجه افزایش یافته است. دمای امروز شهرکرد چقدر است؟

ب. دمای هوای شهرکرد دیشب ۸ درجه زیر صفر بوده است و امروز ۴ درجه زیر صفر. دمای هوای شهرکرد چند درجه افزایش یافته است؟

ج. دمای هوای شهرکرد دیروز ۴ درجه بالای صفر بوده است. اگر امشب دمای هوا ۳ درجه سردتر شود، دمای هوای شهر کرد امشب چقدر است؟

د. دمای هوای شهر کرد امشب بعد از ۸ درجه کاهش شده است ۵ درجه زیر صفر. دمای هوای شهر کرد امروز چقدر بوده است؟

(۲) حاصل هر یک از عبارات زیر را با استفاده از محور اعدادصحیح محاسبه کنید.

آ. $۴+۵$ ب. $۵-۳$ ج. $۴-۶$

د. $(-۱)+۳$ ه. $(-۲)-۳$ و. $۳+(-۲)$

ز. $۳+(-۵)$ ح. $۳-(-۲)$ ط. $(-۲)-(-۴)$

ی. ۳×۴ ک. $۳\times(-۴)$ ل. $۲\times(-۵)$

م. $(-۲)\times۲$ ن. $(-۳)\times۵$ س. $(-۲)\times(-۵)$

توجه!
در تمرینات (۲) تا (۹) فقط از تعریف، گزاره‌های بخش ۲.۴ و خواص اعداد طبیعی استفاده کنید

(۳) بدون محاسبه و با استفاده از تعریف نشان دهید:

آ. $(-۳)+۴=۴+(-۳)$ ب. $(-۳)+(-۴)=(-۴)+(-۳)$

ج. $۴+(۳+(-۲))=(۴+۳)+(-۲)$ د. $۴+((-۳)+۲)=(۴+(-۳))+۲$

ه. $۴+(۲+(-۷))=(۴+۲)+(-۷)$ و. $۰\times۷=۷\times۰$

ز. $۴+((-۲)+۳)=(۴+(-۲))+۳$ ح. $۷\times(-۴)=(-۴)\times۷$

ط. $(-۵)\times(-۷)=(-۷)\times(-۵)$

(۴) فرض کنید a، b، و c اعدادی طبیعی باشند. نشان دهید:

آ. $a+(-b)=(-b)+a$ ب. $a\times(-b)=(-b)\times a$

ج. $(-a)+(-b)=(-b)+(-a)$ د. $(-a)\times(-b)=(-b)\times(-a)$

ه. $(-a)(b.c)=((-a).b)c$ و. $(-a)(b.(-c))=((-a).b)(-c)$

ز. $(-a)((-b).c)=((-a)(-b))c$ ح. $a(b.(-c))=(a.b)(-c)$

ط. $(-a)((-b)(-c))=((-a)(-b))(-c)$

در تمرینات (۴) تا (۹) صورت تمرینات از حل آنها مهم‌تر است.

(۵) a و b دو عدد صحیح هستند. نشان دهید:

آ. اگر a و b هر دو مثبت باشند، آنگاه $a+b=b+a$

ب. اگر a مثبت و b منفی باشد، آنگاه $a+b=b+a$

ج. اگر a و b هر دو منفی باشند، آنگاه $a+b=b+a$

د. جمع روی اعداد صحیح دارای خاصیت جابجایی است.

(۶) a و b دو عدد صحیح هستند. نشان دهید:

آ. اگر a و b هر دو مثبت باشند، آنگاه $a.b=b.a$

ب. اگر a مثبت و b منفی باشد، آنگاه $a.b=b.a$

ج. اگر a و b هر دو منفی باشند، آنگاه $a.b=b.a$

د. ضرب روی اعداد صحیح دارای خاصیت جابجایی است.

(۷) a، b و c سه عدد صحیح هستند. نشان دهید:

آ. اگر هر سه مثبت باشند آنگاه $a(b.c)=(a.b)c$

ب. اگر یکی از آنها منفی باشد، آنگاه $a.(b.c)=(a.b).c$

ج. اگر دو تا از آنها منفی باشد، آنگاه $a.(b.c)=(a.b).c$

د. اگر هر سه منفی باشند آنگاه $a.(b.c)=(a.b).c$

ه. ضرب روی اعداد صحیح دارای خاصیت شرکت‌پذیری است.

(۸) نشان دهید ضرب روی اعداد صحیح دارای خاصیت همانی است.

(۹) نشان دهید جمع روی اعداد صحیح دارای خاصیت شرکت‌پذیری است.

(۱۰) با استدلال زیر نشان می‌دهیم $۳\times(۵+(-۲))=(۳\times۵)+(۳\times(-۲))$. مشخص کنید هر مرحله از این اثبات را بر چه اساسی استدلال کرده‌ایم.

$$۳\times(۵+(-۲))=۳\times(۵-۲)=۳\times۵-۳\times۲=۳\times۵+(-(۳\times۲))=۳\times۵+۳\times(-۲)$$

(۱۱) با استدلالی مشابه استدلال تمرین قبل نشان دهید:

آ . $(-۵) \times ۳ + (۳ \times ۲) = ۳ \times (۲ + (-۵))$

ب . $(۳ \times (-۵)) + (۳ \times (-۲)) = ۳ \times ((-۲) + (-۵))$

ج . $(-۳) \times ۵ + (-۳) \times ۲ = (-۳) \times (۲ + ۵)$

د . $(-۲) \times (-۳) + ۵ \times (-۳) = (-۳) \times (۵ + (-۲))$

ه . $(-۵) \times (-۳) + ۲ \times (-۳) = (-۳) \times (۲ + (-۵))$

و . $(-۵) \times (-۳) + (-۲) \times (-۳) = (-۳) \times ((-۲) + (-۵))$

در تمرینات (۱۳) تا (۱۷) صورت تمرینات از حل آنها مهم‌تر است.

(۱۲) تمرینات (۱۱) و (۱۲) را پس از گذاشتن a بجای ۳، b بجای ۲ و c بجای ۵ ثابت کنید. یعنی با فرض $b < c$ نشان دهید عبارات حاصل از جایگذاری، همیشه درست هستند.

(۱۳) با استفاده از تمرین (۱۳) نشان دهید در اعداد صحیح ضرب نسبت به جمع دارای خاصیت توزیع‌پذیری است.

(۱۴) نشان دهید حاصل‌جمع هر دو عدد صحیح یک عدد صحیح است.

(۱۵) نشان دهید حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیح یک عدد صحیح است.

(۱۶) نشان دهید حاصلِ تفریق هر دو عدد صحیح یک عدد صحیح است.

(۱۷) نشان دهید برخی تقسیم‌ها در اعداد صحیح بامعنا نیستند.

۳.۲.۴ ترتیب در اعداد صحیح

برای درک ترتیب اعداد صحیح در دیدگاه کاهش و افزایش، به سادگی می‌بینیم که $۰ < ۳^+ < ۵^+$، چون به‌طور مثال سیب‌های یک کامیون پس از ۵ عدد افزایش بیشتر از تعداد آنها پس از ۳ عدد افزایش است و هر دو از تعداد سیب‌های کامیون قبل از هر افزایشی بیشتر هستند که با صفر نشان داده می‌شوند. به‌طور مشابه برای هر دو عدد طبیعی و ناصفر مانند a و b داریم $۰ < a^+ < b^+$ اگر و تنها اگر $۰ < a < b$.

همچنین واضح است که برای هر دو عدد طبیعی و ناصفر مانند a و b داریم $a^- < ۰ < b^+$؛ چون a^- به تعداد سیب‌های درون کامیون پس از a عدد کاهش اشاره دارد و b^+ تعداد سیب‌های درون کامیون پس از b عدد افزایش را نشان می‌دهد.

با این تفاسیر واضح است که برای هر دو عدد طبیعی و ناصفر مانند a و b داریم $۰ < a < b$ اگر و تنها اگر $b^- < a^- < ۰$؛ چون تعداد سیب‌های دورن کامیون پس از b عدد کاهش که کمتر از تعداد سیب‌های کامیون پس از a عدد کاهش است که هر دو از تعداد اولیهٔ سیب‌ها کمترند که با صفر نمایش داده می‌شود.

این دیدگاه را می‌توان بر محور اعداد نیز دنبال کرد. اگر a^+ به‌معنای جلو رفتن به‌اندازهٔ a واحد به سمت مثبت (سمت راست) باشد و b^- عقب رفتن به‌اندازهٔ b واحد به سمت منفی محور (سمت چپ) را نشان دهد، به‌سادگی می‌بینیم که اگر $a < b$، آن‌گاه a^+ قبل از (سمتِ چپِ) b^+ قرار می‌گیرد و درنتیجه $a^+ < b^+$. بنابراین، به‌سادگی براساس محور اعداد می‌توان نشان داد برای هر دو عدد طبیعی و ناصفر مانند a و b داریم:

- $۰ < a < b$ اگر و تنها اگر $۰ < a^+ < b^+$
- $a^- < ۰ < b^+$
- $۰ < a < b$ اگر و تنها اگر $b^- < a^- < ۰$

مثال ۲۴.۴: اعداد زیر را با هم مقایسه کنید.

آ. $^{+}$۳ و صفر ب. $^{-}$۳ و صفر ج. $^{+}$۶ و $^{+}$۹

د. $^{+}$۲ و $^{-}$۹ ه. $^{-}$۲ و $^{-}$۹

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

در ادامه با تغییر دیدگاه، a^{+} را با a و a^{-} را با $(-a)$ نمایش دادیم. بنابراین:

برای هر دو عدد طبیعی و ناصفر مانند a و b داریم:

- **در اعداد صحیح داریم $a < b$ ∘ > اگر و تنها اگر در اعداد طبیعی داشته باشیم $\circ < a < b$**
- **$-a < b$**
- **$\circ < a < b \Longleftrightarrow \circ > -a > -b$**

مثال ۲۵.۴: جفت اعداد زیر را با هم مقایسه کنید.

آ. ۳ و صفر ب. ۳− و صفر ج. ۳ و ۷

د. ۵− و ۱۳− ه. ۸− و ۱۷ و. ۸ و ۱۷−

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

باتوجه به نمایش این اعداد بر محور اعداد صحیح داریم:

> برای هر دو عدد صحیح a و b داریم $a < b$ اگر و تنها اگر روی محور اعداد صحیح، b سمت راستِ a باشد.

مطابق با شکل زیر، هرگاه $a < b$، پس پیکانی مثبت (در جهت مثبت محور) مانند $+k$ وجود دارد که از a شروع شده و به b ختم می‌شود. در این‌صورت $a + k = b$. پس می‌توان تعریف زیر را ارائه کرد.

تعریف ۶.۴: برای هر دو عدد صحیح a و b، گوییم $a < b$ اگر و تنها اگر عددی طبیعی و ناصفر مانند k وجود داشته باشد که $a + k = b$.

توجه داریم که ترتیب در اعداد طبیعی را به اعداد صحیح نیز توسعه داده‌ایم و به‌طور مشابه $\leq$ را نیز به اعدادصحیح تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۷.۴: برای هر دو عدد صحیح a و b گوییم $a \leq b$ اگر و تنها اگر عددی طبیعی مانند k وجود داشته باشد که $a + k = b$.

گزاره ۵.۴ (اصل تثلیث)**: برای هر دو عدد صحیح a و b یکی و تنها یکی از عبارات زیر درست است:** آ. $a < b$ ب. $a = b$ ج. $a > b$

اثبات: راهنمایی: چون معادلهٔ $a + x = b$ در اعداد صحیح جواب منحصربه‌فرد دارد، برای x یک و تنها یکی از سه حالت $x > \circ$، $x = \circ$ و $x < \circ$ رخ می‌دهد. ■

با نگاهی بر محور اعداد و همچنین در دیدگاه کاهش و افزایش قضیهٔ زیر چنان واضح می‌نماید که نیازی به بیان و اثبات آن نیست؛ اما با ورود به ریاضیات نمادین وضوح آن از بین رفته و بیان و اثبات براساس تعاریف ضروری می‌نماید.

قضیه ۶.۴: برای هر عدد طبیعی a داریم $a > ۰$ و $(-a) < ۰$.

اثبات: اگر a عددی طبیعی باشد، چون $a = a + ۰$ پس $a > ۰$ و چون $(-a) + a = ۰$ پس $(-a) < ۰$. ■

قضیه ۷.۴: برای اعداد صحیح دلخواه a، b، c و d داریم:

آ. اگر $b < c$ و $a < b$ آن‌گاه $a < c$

ب. اگر $a < b$ آن‌گاه $a + c < b + c$

ج. اگر $a + c < b + c$، آن‌گاه $a < b$

د. $a < b$ و $c < d$ آن‌گاه $a + c < b + d$

اثبات: از اثبات قضیهٔ مشابهی در اعداد طبیعی کمک بگیرید. ■

مثال ۲۶.۴: نامعادلات زیر را حل کنید.

آ. $x < ۰$	ب. $x > ۰$	ج. $x \leq ۰$	د. $x \geq ۰$
ه. $x \leq -۳$	و. $x + ۱ < ۳$	ز. $x + ۱ \leq ۳$	ح. $x - ۳ > ۲$
ط. $x + ۷ > ۲$	ی. $x - ۳ > -۲$	ک. $x - ۳ \geq -۲$	ل. $x + ۳ \geq -۲$

پاسخ: آ. بنا به قضیه (۷.۴) مقادیر $x = -۱, -۲, -۳, \cdots$ جواب‌های نامعادله هستند.

ب. بنا به قضیه (۷.۴) مقادیر $x = ۱, ۲, ۳, ۴, \cdots$ جواب‌های نامعادله هستند.

ح. چون $x - ۳ = x + (-۳)$ پس داریم:

$$x - ۳ > ۲ \Longrightarrow x + (-۳) > ۲ \Longrightarrow (x + (-۳)) + ۳ > ۲ + ۳ \Longrightarrow x > ۵ \Longrightarrow x = ۶, ۷, ۸, \cdots$$

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

از آنجا که تعاریف روابط «کوچک‌تر بودن» و «کوچک‌تر یا مساوی بودن» تغییر نکرده است، انتظار داریم قواعد ترتیب در اعداد طبیعی، در اعداد صحیح نیز برقرار باشد. اما آیا همه این قواعد ترتیب برقرار خواهند ماند؟ در مثال زیر قواعد ترتیب را با مقایسهٔ موردی بررسی می‌کنیم.

مثال ۲۷.۴: جفت عبارات زیر را مقایسه کنید

آ. -۲ و ۳	ب. -۳ و -۲
ج. $۳ \times (-۱)$ و $۲ \times (-۱)$	د. $(-۳) \times ۵$ و $(-۲) \times ۵$
ه. $(-۳) \times ۵$ و ۲×۵	و. $(-۳) \times (-۲)$ و $۲ \times (-۲)$

پاسخ: به‌سادگی با محاسبه و با استفاده از تعریف (۶.۴) و تعریف (۷.۴) داریم:

آ. $(-۲) < ۰ < ۳ \Longrightarrow -۲ < ۳$

ب. $(-۳) + ۱ = -۲ \Longrightarrow -۳ < -۲$

ج. $-۳ = ۳(-۱)$ و $-۲ = ۲(-۱)$ و چون $-۳ < -۲$ پس $۳ \times (-۱) < ۲ \times (-۱)$

د. $-۱۵ = (-۳)۵$ و $-۱۰ = (-۲)۵$ و چون $-۱۵ < -۱۰$ پس $(-۳) \times ۵ < (-۲) \times ۵$

ه. $-۱۵ = (-۳)۵$ و $۱۰ = ۲ \times ۵$ و چون $-۱۵ < ۱۰$ پس $(-۳) \times ۵ < ۲ \times ۵$

و. $۶ = (-۳)(-۲)$ و $-۴ = ۲(-۲)$ و چون $-۴ < ۶$ پس $(-۳) \times (-۲) < ۲ \times (-۲)$

■

آیا می‌توان گفت «اگر $a<b$ آنگاه برای هر عدد صحیح مانند c داریم $ac<bc$»؟ یا اینکه «اگر $a \leq b$ آنگاه برای هر عدد صحیح مانند c داریم $ac \leq bc$»؟ در مثال فوق می‌بینیم که هیچ یک از این دو عبارت «همواره درست» نیست.

با مثال زیر برای قضیه مهمی آماده می‌شویم که یکی از مهم‌ترین قضایایی است که باید در مورد اعداد مثبت و منفی همیشه به خاطر داشته باشیم و بی‌توجهی به آن عامل بسیاری از اشتباهات محاسباتی و همچنین اشتباه در حل معادلات و نامعادلات است.

مثال ۲۸.۴: درستی هر یک از عبارات زیر را با استفاده از قضایا و تعاریف ثابت کنید.

آ. اگر $c < \circ$ آنگاه، $-c > \circ$ ‏ ‏ ‏ ب. اگر $c > \circ$ آنگاه $(-c) < \circ$

ج. اگر $a > \circ$ و $b > \circ$ آنگاه $ab > \circ$ ‏ ‏ ‏ د. اگر $a > \circ$ و $b < \circ$ آنگاه $ab < \circ$

ه. اگر $a < \circ$ و $b < \circ$ آنگاه $ab > \circ$

پاسخ: آ. اگر $c < \circ$ باشد، پس عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $c + n = \circ$ پس $c = (-n)$ و در نتیجه $-c = -(-n) = n$. بنابراین $-c$ برابر است با n که عددی است طبیعی.

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

بسیار مهم...

قضیه ۸.۴: برای اعداد صحیح دلخواه a، b و c که $a < b$ داریم:

آ. اگر $c > \circ$ آنگاه $ac < bc$ ‏ ‏ ‏ ب. اگر $c < \circ$ آنگاه $ac > bc$

قضیهٔ فوق را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

- **ضرب طرفین نامساوی در عددی $\boxed{\text{مثبت}}$ جهت نامساوی را $\boxed{\text{حفظ}}$ می‌کند.**
- **ضرب طرفین نامساوی در عددی $\boxed{\text{منفی}}$، جهت نامساوی را $\boxed{\text{عکس}}$ می‌کند.**

اثبات: آ. $a < b$ پس برای عددی طبیعی مانند n داریم $a + n = b$ و درنتیجه $bc = (a+n)c = ac + nc$ و چون c و n هر دو طبیعی هستند پس nc نیز عددی طبیعی است و در نتیجه $ac < bc$.

ب. به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۲۹.۴: نامعادلات زیر را حل کنید.

آ. $-x < \circ$ ‏ ‏ ‏ ب. $-x > \circ$

پاسخ: با ضرب طرفین نامساوی در (-۱)، و با استفاده از قضیهٔ فوق به‌سادگی حل می‌شوند. ■

مهم! مهم!
با اعداد طبیعی مقایسه شود.

مثال ۳۰.۴: نشان دهید:

آ. اگر $a.c < b.c$ و $c > \circ$ آنگاه $a < b$ ‏ ‏ ‏ ب. اگر $a.c < b.c$ و $c < \circ$ آنگاه $a > b$

با برهان خلف مقایسه شود.

پاسخ: آ. اگر $a \not< b$ پس $a = b$ یا $a > b$.

- اگر $a = b$ پس $a.c = b.c$ (بنا به خوش تعریفی ضرب) درنتیجه $ac \not< bc$
- اگر $a > b$ پس $a.c > b.c$ (چون $c > \circ$) درنتیجه $ac \not< bc$

بنابراین امکان ندارد که $a.c < b.c$ و $c > \circ$ اما $a \not< b$. پس $a < b$.

ب. به‌عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود. ■

قضیه ۹.۴: برای هر سه عدد صحیح a، b و c که $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{c}$ در $\mathbb{Z}$ تعریف شده باشند داریم:

آ. اگر $a<b$ و $c>0$ آنگاه $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ **ب. اگر $a<b$ و $c<0$ آنگاه $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$**

اثبات: به‌عنوان تمرین به عهده خواننده گذاشته می‌شود. ■

مثال ۳۱.۴: نامعادلات زیر را حل کنید.

آ. $2x>4$ ب. $-3x<0$ ج. $4x<-8$

د. $1-2x>1$ هـ. $3x-2>2x-5$

پاسخ: آ. $2x>4 \Longrightarrow \frac{2x}{2}>\frac{4}{2} \Longrightarrow x>2 \Longrightarrow x=3,4,5,6,\cdots$

ب. $-3x<0 \Longrightarrow \frac{-3x}{-3}>\frac{0}{-3} \Longrightarrow x>0$

ج. $x<-2$ د. $x<0$ هـ. $x>-3$ ■

تمرین:

مهم! مهم!
در تمرینات(۲۶) تا (۳۳) صورت و پاسخ، و تأمل بر آنها از پاسخ دادن به آنها مهمتر است.

(۱۸) جفت مقادیر زیر را با هم مقایسه کنید.

آ. -3 و 0 ب. 4 و 0

ج. (-3) و 2 د. -2 و -5

هـ. $2\times(-3)$ و $5\times(-3)$ و. $(-2)\times(-3)$ و $(-5)\times(-3)$

ز. $2\times(-3)$ و $2\times(-5)$ ح. $(-2)\times(-3)$ و $(-2)\times(-5)$

ط. $4\div 12$ و $4\div 8$ ی. $4\div(-12)$ و $4\div(-8)$

ک. $(-4)\div 12$ و $(-4)\div 8$ ل. $(-4)\div(-12)$ و $(-4)\div(-8)$

م. $4\div 12$ و $3\div 12$ ن. $4\div(-12)$ و $3\div(-12)$

س. $(-4)\div 12$ و $(-3)\div 12$ ع. $(-4)\div(-12)$ و $(-3)\div(-12)$

ف. $(-3)\div(-12)$ و $2\div(-8)$ ص. $(-3)\div 12$ و $4\div(-8)$

(۱۹) نشان دهید برای هر چهار عدد صحیح مانند a، b، c و d داریم:

آ. اگر $a\le b$ و $b\le c$ آنگاه $a\le c$ ب. اگر $a\le b$ آنگاه $a+c\le b+c$

ج. اگر $a+c\le b+c$ آنگاه $a\le b$ د. اگر $a<b$ آنگاه $a\le b$

(۲۰) درستی یا نادرستی عبارات زیر را در اعداد صحیح بررسی کنید.

با اعداد طبیعی مقایسه شود.

آ. اگر $a<b$ و $c\ge 0$ آنگاه $ac<bc$ ب. اگر $a<b$ و $c\ge 0$ آنگاه $ac\le bc$

ج. اگر $a<b$ و $c\le 0$ آنگاه $ac>bc$ د. اگر $a<b$ و $c\le 0$ آنگاه $ac\ge bc$

هـ. اگر $a<b$ و $c>0$ آنگاه $ac<bc$ و. اگر $a<b$ و $c<0$ آنگاه $ac>bc$

ز. اگر $a\le b$ و $c>0$ آنگاه $ac<bc$ ح. اگر $a\le b$ و $c<0$ آنگاه $ac>bc$

(۲۱) a، b و c اعدادی صحیح هستند. نشان دهید:

با اعداد طبیعی مقایسه شود.

آ. اگر $a\le b$ و $c\ge 0$ آنگاه $ac\le bc$ ب. اگر $a\le b$ و $c\le 0$ آنگاه $ac\ge bc$

(۲۲) درستی یا نادرستی عبارات زیر را در اعداد صحیح بررسی کنید.

آ. اگر $ac\le bc$ و $c>0$ آنگاه $a\le b$ ب. اگر $ac\le bc$ و $c\ge 0$ آنگاه $a<b$

ج. اگر $ac<bc$ و $c\ge 0$ آنگاه $a\le b$ د. اگر $a<b$ آنگاه $a^2<b^2$

هـ. اگر $a^2<b^2$ آنگاه $a<b$

(۲۳) نشان دهید اگر $ac<bc$ آنگاه $c\neq 0$.

(۲۴) x و y دو عدد صحیح هستند که $x < ۳$ و $y < ۴$. درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر مشخص کنید.

به تفاوت میان اعداد صحیح و اعداد طبیعی دقت کنید.

آ. $x + y < ۳ + ۴$	ب. $x + ۳ < ۶$	ج. $x + ۵ < ۱۰$
د. $۴x < ۱۲$	ه. $x \leq ۲$	و. $۳x \leq ۶$
ز. $۳x < ۷$	ح. $x.y < ۱۲$	ط. $x.y \leq ۶$

(۲۵) با فرض معنادار بودن تقسیم‌ها در اعداد صحیح و با فرض صحیح بودن اعداد a، b، c و d درستی عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. اگر $a \leq b$ و $c > ۰$ آن‌گاه $a \div c \leq b \div c$

ب. اگر $a \leq b$ و $c > ۰$ آن‌گاه $c \div a \geq c \div b$

ج. اگر $a < b$ و $c < d$ آن‌گاه $c \div b \leq d \div a$

(۲۶) نامعادلات زیر را در اعداد صحیح حل کنید.

آ. $x \div ۵ < ۳$	ب. $x \div (-۲) < ۳$	ج. $۴ \div x \leq ۱$
د. $(-۳) \div x \leq ۰$	ه. $x \div (-۲) < ۰$	و. $x \div (x - ۵) < ۰$

(۲۷) نشان دهید ضرب روی اعداد صحیح دارای خاصیت حذف است. یعنی برای هر سه عدد صحیح مانند a، b و c داریم:

$$\text{اگر } a.c = b.c \text{ و } c \neq ۰ \text{ آن‌گاه } a = b$$

۳.۴ اعداد گویا

براساس دیدگاه کاهش و افزایش که به ساخته شدن اعداد صحیح انجامید، می‌توانیم برای هر عدد کسری مانند x و هر مقداری مانند A از کمیتی دلخواه، xA افزایش را با $(x\text{A})^+$ نمایش دهیم و از $(x\text{A})^-$ برای اشاره به xA کاهش استفاده کنیم. البته در نگارشی دیگر می‌توان $(x^+)\text{A}$ و $(x^-)\text{A}$ را به‌ترتیب، به‌جای $(x\text{A})^+$ و $(x\text{A})^-$ به‌کار برد.

با درنظر گرفتن مقداری مانند U به‌عنوان واحد، می‌توان از عبارات x^+ و x^- به‌جای $(x^+)\text{U}$ و $(x^-)\text{U}$ استفاده کرد.

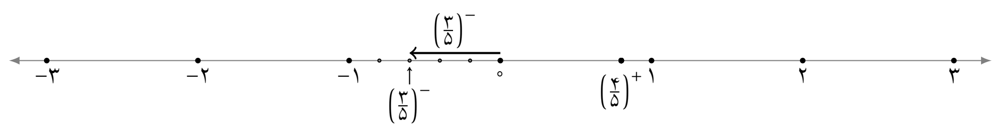
به‌ازای هر عدد کسری مانند x، نمادهای x^+ و x^- را اعداد $\boxed{\text{گویا}}$ می‌خوانیم.

مثال ۳۲.۴: یک استخر آب را درنظر گرفته و گنجایش یک سطل را با U نشان داده و به‌عنوان واحد درنظر می‌گیریم. هر یک از موارد زیر را با یک عدد گویا مشخص کنید.

آ. برداشتن $\frac{۳}{۴}$U آب از استخر. ب. افزودن $\frac{۳}{۵}$U آب به استخر.

پاسخ: آ. $\left(\frac{۳}{۴}\right)^-$ ب. $\left(\frac{۳}{۵}\right)^+$ ■

همچنین با درنظر گرفتن طولی مانند U به‌عنوان واحد، می‌توان برای هر عدد کسری مانند x، عدد گویای x^+ را به‌معنای xU جلو رفتن به در جهت مثبت محور و x^- را به‌معنای xU عقب رفتن در جهت منفی محور درنظر گرفت. بدین‌ترتیب به هر عدد گویا نقطه‌ای بر محور اعداد اختصاص می‌یابد.

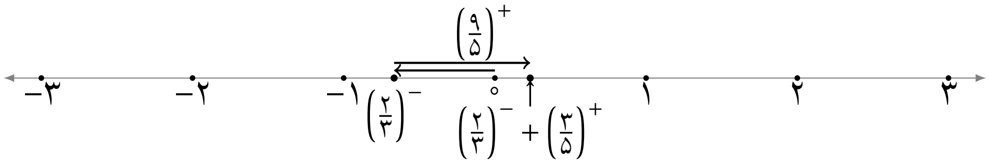


بنابراین، هر عدد گویا به مقداری افزایش یا مقداری کاهش اشاره دارد. بدین‌ترتیب:

برای هر دو عدد کسری مانند x و y، تعریف می‌کنیم:

- **$x^- + y^+$ به‌معنای xU کاهش در مرحلهٔ اول و yU افزایش در مرحلهٔ دوم است.**
- **$x^+ + y^+$ به‌معنای xU افزایش در مرحلهٔ اول و yU افزایش در مرحلهٔ دوم است.**
- **$x^- + y^-$ به‌معنای xU کاهش در مرحلهٔ اول و yU کاهش در مرحلهٔ دوم است.**

بنابراین، می‌توانیم $\left(\frac{۹}{۵}\right)^+ + \left(\frac{۲}{۳}\right)^-$ را به‌صورت زیر بر محور اعداد نمایش دهیم.



گزاره ۶.۴: برای هر دو عدد کسری مانند x و y داریم:

آ. $x^+ + x^- = x^- + x^+ = ۰$

ب. $x^+ + y^+ = (x+y)^+$ و $x^- + y^- = (x+y)^-$

ج. اگر $x > y$ آن‌گاه $x^+ + y^- = y^- + x^+ = (x-y)^+$.

د. اگر $x < y$ آن‌گاه $x^+ + y^- = y^- + x^+ = (y-x)^-$

x^+ و x^- قرینهٔ یکدیگرند؛ چون $x^+ + x^- = x^- + x^+ = ۰$. یعنی $x^- = -x^+$ و $x^+ = -x^-$. حال اگر مقدار افزیش را با عددی کسری مانند x نشان دهیم، می‌توانیم میزان کاهش را با $-x$ و به‌معنای قرینهٔ x نمایش دهیم. بدین‌ترتیب می‌توانیم اعداد گویا را به صورت زیر تعریف کنیم.

تعریف ۸.۴: برای هر عدد کسری ناصفر مانند x، عدد جدیدی ساخته، آن را منفیِ x خوانده و با $(-x)$ نمایش می‌دهیم.
به اعدادکسری و منفی اعداد کسری ناصفر، اعداد گویا گفته و با $\mathbb{Q}$ نشان می‌دهیم.

از آنجا که $۱ = \frac{n}{n}$ پس می‌توان $\left(\frac{n}{n}\right)^+$ را به‌معنای ۱^+ و $\left(\frac{n}{n}\right)^-$ را به‌معنای ۱^- درنظر گرفته و به‌صورت ۱ و ۱− نشان داد. به‌طور مشابه برای هر عدد طبیعی مانند n داریم $\frac{n}{۱} = n$ که نمایشی برای n^+ است. همچنین $-\frac{n}{۱} = -n$ نمایشی برای $\left(\frac{n}{۱}\right)^- = n^-$ است. بنابراین

اعداد گویا شامل اعداد طبیعی، اعداد صحیح و اعداد کسری هستند.

باتوجه به دیدگاه کاهش و افزایش، به وضوح برای هر دو عدد کسری مانند x و y داریم $x^+ \neq y^-$ و درنتیجه $x \neq -y$. بنابراین، برای هر عدد کسری مانند x داریم $x = ۰$ یا عددی کسری و ناصفر مانند a وجود دارد که $x = a$ یا $x = -a$. بدین‌ترتیب، برای هر دو عدد گویای x و y داریم $x = y$ اگر و تنها اگر یکی از سه حالت زیر رخ دهد:

آ. هر دو صفر باشند.................. $x = y = ۰$

ب. هر دو، یک عدد کسری باشند..........عددی کسری مانند a باشد که $a = y$.

ج. هر دو قرینهٔ یک عدد کسری باشند......عددی کسری مانند a باشد که $x = -a = y$

توجه داریم که مقدار $۵+۳$ را چه به‌عنوان حاصل‌جمع دو عدد طبیعی، چه به‌عنوان حاصل‌جمع دو عدد کسری، چه به‌عنوان حاصل‌جمع دو عدد صحیح و چه به‌عنوان حاصل‌جمع دو عدد گویا، برابر است با ۸. به‌عبارتی اگر جمع اعداد طبیعی، صحیح، کسری و گویا را به‌ترتیب با $+_{\mathbb{N}}$، $+_{\mathbb{Z}}$، $+_{\mathbb{F}}$ و $+_{\mathbb{Q}}$ نمایش دهیم، داریم $۸ = ۳ +_{\mathbb{N}} ۵ = ۳ +_{\mathbb{Z}} ۸ = ۳ +_{\mathbb{F}} ۸ = ۳ +_{\mathbb{Q}} ۸$ و گوییم:

جمع اعداد طبیعی با جمع اعداد صحیح، کسری و گویا **همخوانی** دارد.

به‌وضوح، جمع اعداد گویا با جمع اعداد صحیح و جمع اعداد کسری همخوانی دارد. حال می‌خواهیم ضرب اعداد گویا را چنان بسازیم که با ضرب اعداد صحیح و ضرب اعداد کسری همخوانی داشته باشد؛ چون هم شامل اعداد کسری و هم شامل اعداد صحیح است. پس با ایده‌گرفتن از تعریف ضرب اعداد صحیح، ضرب اعداد گویا را به‌صورت زیر می‌سازیم.

برای هر دو عدد کسری مانند x و y تعریف می‌کنیم:

آ. $x.y$ از ضرب اعداد کسری محاسبه می‌شود.

ب. $\boldsymbol{(-x).y = x.(-y) = -(x.y)}$ که در آن $(-x).y$ و $x.(-y)$ ضرب دو عدد گویاست و $x.y$ در عبارت $-(x.y)$ ضرب دو عدد کسری است.

ج. $\boldsymbol{(-x)(-y) = xy}$ که در آن $(-x)(-y)$ ضرب دو عدد گویاست و $x.y$ در سمت راست تساوی، ضرب دو عدد کسری است.

در تعریف فوق، ضرب اعداد گویا را بدون تعبیر شهودی و بدون توجه به دیدگاه کاهش و افزایش ساخته‌ایم. در واقع، اعداد گویا را نمادهایی درنظر می‌گیریم که با استفاده از اعداد کسری ساخته شده و ضرب آنها را بگونه‌ای تعریف کرده‌ایم که با ضرب در اعداد کسری و صحیح همخوانی داشته باشد.

مثال ۳۳.۴: حاصل‌ضرب‌های زیر را بیابید.

آ. $\frac{۳}{۴} \times \left(-\frac{۲}{۵}\right)$ ب. $\left(-\frac{۵}{۷}\right) \times \left(-\frac{۴}{۳}\right)$ ج. $\left(-\frac{۲}{۷}\right) \times \frac{۵}{۳}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۳۴.۴: نشان دهید برای هر سه عدد گویا مانند x، y و z داریم:

آ. اگر $x = y$ آن‌گاه $x.z = y.z$

ب. اگر $x = y$ آن‌گاه $x + z = y + z$

ج. $x + y = y + x$

د. $x.y = y.x$

هـ. $x + (y + z) = (x + y) + z$

و. $x(yz) = (xy)z$

ز. $x + ۰ = ۰ + x = x$

ح. $x.۱ = ۱.x = x$

ط. $x.۰ = ۰.x = ۰$

ی. $x(y + z) = xy + xz$

پاسخ: (راهنمایی: از خواص جمع و ضرب اعداد کسری و اثبات خواص اعداد صحیح استفاده کنید.) ■

قضیه ۱۰.۴: جمع و ضرب اعداد گویا دارای خاصیت عنصر همانی هستند. یعنی:

آ. برای هر عدد گویا مانند x، عدد گویای منحصربه‌فردی مانند e وجود دارد که

$$\boldsymbol{x + e = e + x = x}$$

و آن را عنصر همانی جمع خوانده و با ۰ نمایش می‌دهیم.

ب. برای هر عدد گویای ناصفر مانند x، عدد گویای منحصربه‌فردی مانند y وجود دارد که

$$\boldsymbol{xy = yx = x}$$

و آن را عنصر همانی ضرب خوانده و با ۱ نمایش می‌دهیم.

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. (از اثبات قضایای مشابه کمک بگیرید) ■

گزاره ۷.۴: برای هر سه عدد گویای x، y و z داریم:
آ. اگر $x = y$ آن‌گاه $x + z = y + z$. ب. اگر $x = y$ آن‌گاه $xz = yz$.

اثبات: (راهنمایی: از اثبات خوش‌تعریفی ضرب اعداد صحیح ایده بگیرید.) ■

دیدیم که اعداد صحیح دارای خاصیت عنصر قرینه‌اند. یعنی هر عدد صحیح دارای یک عنصر قرینه می‌باشد. همچنین دیدیم که اعداد کسری دارای خاصیت عنصر معکوس هستند. یعنی هر عدد کسری ناصفر دارای عنصر معکوس منحصربه‌فرد است. حال می‌خواهیم نشان دهیم اعداد گویا نیز دارای خواص عنصر قرینه و عنصر معکوس هستند.

قضیه ۱۱.۴: برای هر عدد گویایی مانند x داریم:
آ. عدد گویای منحصربه‌فردی مانند y وجود دارد که $x + y = y + x = ۰$
و این y را قرینهٔ x خوانده و با $-x$ نشان می‌دهیم.
ب. اگر $x \neq ۰$ آن‌گاه، عدد گویای منحصربه‌فردی مانند y وجود دارد که $xy = yx = ۱$
و این y را عنصر معکوس x خوانده و با $x^{-۱}$ نمایش می‌دهیم.

اثبات: راهنمایی: از اثبات قضایای مشابه در اعداد کسری و اعداد صحیح کمک بگیرید. ■

برای هر دو عدد گویای a و b که $b \neq ۰$، حاصل $a \div b$، جواب یکتای معادلهٔ $xb = a$، برابر است با $x = ab^{-۱}$ که با نگارش آن به‌صورت $\frac{a}{b}$ داریم:

$$\frac{۲/۵}{۳/۷} = \frac{۲}{۵} \times \left(\frac{۳}{۷}\right)^{-۱} = \frac{۲}{۵} \times \frac{۷}{۳} = \frac{۲ \times ۷}{۵ \times ۳} = \frac{۱۴}{۱۵} \qquad \frac{۱}{b} = ۱ \times b^{-۱} = b^{-۱}$$

$$\frac{۲}{-۳} = ۲ \times (-۳)^{-۱} \qquad \frac{-۲}{۳} = (-۲) \times ۳^{-۱}$$

مثال ۳۵.۴: نشان دهید برای هر دو عدد گویای x و y که $y \neq ۰$ داریم:
آ. $(-y)^{-۱} = -\left(y^{-۱}\right)$ ب. $\frac{-x}{y} = -\left(\frac{x}{y}\right)$ ج. $\frac{x}{-y} = -\left(\frac{x}{y}\right)$ د. $\frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}$

پاسخ: آ. $z = (-y)^{-۱} \iff z(-y) = (-y)z = ۱$. بنابراین، کافی است نشان دهیم $(-y)\left(-(y^{-۱})\right) = ۱$.
ب. $\frac{-x}{y} = (-x)y^{-۱} = -\left(xy^{-۱}\right) = -\left(\frac{x}{y}\right)$.
موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

از آنجا که هر عدد طبیعی نیز عددی گویاست، پس با توجه به مثال فوق، برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b که $b \neq ۰$ داریم:

$$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad \text{و} \quad \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} \quad \text{و} \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

بنابراین، هر عدد گویا را می‌توان با کسری با صورت و مخرج صحیح نمایش داد که به‌معنای تقسیم صورت بر مخرج، به‌مثابه تقسیم دو عدد گویاست.

گزاره ۸.۴: برای هر عدد گویای x، اعدادِ صحیحِ a و $b \neq ۰$ وجود دارند که $x = \dfrac{a}{b}$

اثبات: راهنمایی: به پاسخ مثال (۳۵.۴) نگاه کنید. ■

گزاره ۹.۴: برای هر دو عدد گویای $x = \dfrac{a}{b}$ و $y = \dfrac{c}{d}$ داریم:

آ. $x^{-۱}y^{-۱} = (xy)^{-۱}$

ب. $x = y \Longleftrightarrow ad = bc$

ج. $x + y = \dfrac{ad + bc}{bd}$

د. $xy = \dfrac{ac}{bd}$

اثبات: آ. کافی است نشان دهیم $(xy)(x^{-۱}y^{-۱}) = ۱$.
موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

شخصی پیشنهاد می‌کند اعداد گویا را حاصل تقسیم اعداد صحیح بدانیم. به‌عبارتی برای هر دو عدد صحیح مانند a و b که $b \neq ۰$، جواب معادلهٔ $xb = a$ را یک عدد گویا در نظر بگیریم. زمانی که اعداد گویا، و جمع و ضرب آنها را می‌شناسیم، می‌توانیم نتیجه بگیریم که هر عدد گویایی که با کسری مانند $\dfrac{a}{b}$ نمایش داده می‌شود، جوابی برای این معادله در اعداد گویاست. اما زمانی که اعداد گویا و جمع و ضرب آنها تعریف نشده است، عبارتی مانند xb که در آن x عددی گویاست، بی‌معنا است. از اعداد کسری ایده گرفته و همان‌طور که اعداد کسری را چیزهایی می‌دانیم که با کسرهای متعارفی نمایش داده می‌شوند، اعداد گویا را چیزهایی درنظر می‌گیریم که با کسرهای صحیح (کسرهایی که صورت و مخرجشان اعدادی صحیح هستند) نمایش داده می‌شوند. در این دیدگاه، اعداد گویا براساس نمایش آنها بیان می‌شود و به چیستیِ اعداد گویا توجهی نمی شود. دیوید هیلبرت، ریاضیدان بزرگی که در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم می‌زیست، با بیان دیدگاه نمادگرایی به ریاضیات، این دیدگاه را به‌طور دقیق بیان کرد و به‌طور کلی، تمام ریاضیات را به‌عنوان مجموعه‌ای از نمادها معرفی نمود که قواعدی بر آنها حاکم است. در همین دوران، ریاضیدان و فلیسوف بزرگی چون فرگه ظهور کرد که دیدگاهی کاملا خلاف هیلبرت داشت. وی مفاهیم ریاضی را دارای ماهیتی مشخص می‌دانست و به‌هیچ وجه مانند هیلبرت نمی اندیشید. البته امروزه دیدگاه دیگری بر ریاضیات حاکم است که آن را نتیجه ساخت و تفکر بشر می‌داند. ما معتقدیم مفاهیم ریاضی در گذر زمان به شکل‌های مختلفی درک شده‌اند. این دیدگاه به دیدگاه انسان‌گرای ریاضی شهرت دارد.[۱]

مثال ۳۶.۴: نشان دهید برای هر سه عدد گویا مانند x، y و z داریم:

آ. $x = y \Longleftrightarrow x + z = y + z$

ب. اگر $z \neq ۰$ آن‌گاه $x = y \Longleftrightarrow xz = yz$

ج. $x = y \Longleftrightarrow x - z = y - z$

د. $x = y \Longleftrightarrow x \div z = y \div z;\quad (z \neq ۰)$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

در مثال فوق $a \div b$ را جواب معادلهٔ $xb = a$ درنظر گرفته‌ایم که در آن a و b اعدادی گویا هستند و $b \neq ۰$ و دیدم که $x = ab^{-۱}$. معمولا در اعداد گویا، $a \div b$ را یک خلاصه‌نویسی برای $ab^{-۱}$ درنظر

[۱] خوانندگان علاقه‌مند، برای آشنایی با این دیدگاه‌ها، می‌توانند به کتاب «فلسفه ریاضی: کلاسیک، مدرن و پست مدرن» اثر محمد صال مصلحیان مراجعه کنند.

می‌گیرند. همچنین $a-b$ را یک خلاصه‌نویسی برای $a+(-b)$؛ چرا که $a+(-b)$ یک جواب معادلهٔ $b+x=a$ است که آن را به $a-b$ می‌شناسیم. ما نیز از رسم معمول تبعیت کرده و تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۹.۴: برای هر دو عدد گویا مانند a و b داریم:
آ. $a-b$ نگارش دیگری از $a+(-b)$ است.
ب. $a\div b$ نگارش دیگری از $ab^{-۱}$ است که $b\neq ۰$.

واضح است که a/b و $\frac{a}{b}$ نیز نگارش‌های دیگری از $ab^{-۱}$ هستند.

مثال ۳۷.۴: معادلات زیر را حل کنید.

آ. $\frac{x}{-۴}-\frac{۲}{۳}=\frac{-۵}{-۷}$ ب. $\frac{x-۵/۴}{۳}-\frac{۲}{۳}=\frac{۳}{۵}$ ج. $\frac{۳x-۱}{۵}-۴=x$

د. $۳x+۴=-۲$ هـ. $۲+(-۳)x=-۴$ و. $۲x+۳=-۲$

ز. $(-۳)(x+۱)=(-۲)(۳+(-x))$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۱.۳.۴ ترتیب اعداد گویا

در دیدگاه کاهش و افزایش برای هر عدد کسری مانند x، نماد x^{+} به‌معنای $x\mathrm{U}$ افزایش و نماد x^{-} به‌معنای $x\mathrm{U}$ کاهش است که آنها را به‌ترتیب با $(x\mathrm{U})^{+}$ و $(x\mathrm{U})^{-}$ نمایش می‌دهیم و U مقداری از کمیتی دلخواه است که واحد خوانده می‌شود. بنابراین، داریم:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x^{+}>y^{+}} \Longleftrightarrow (x\mathrm{U})^{+}>(y\mathrm{U})^{+} \Longleftrightarrow x\mathrm{U}>y\mathrm{U} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x>y} \\ \boldsymbol{x^{-}<y^{-}} \Longleftrightarrow (x\mathrm{U})^{-}<(y\mathrm{U})^{-} \Longleftrightarrow x\mathrm{U}>y\mathrm{U} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x>y} \end{cases}$$

چون برای هر دو عدد کسری ناصفر مانند x و y داریم $(x\mathrm{U})^{-}<۰<(y\mathrm{U})^{+}$ پس $x^{-}<۰<y^{+}$.

مثال ۳۸.۴: نشان دهید برای هر دو عدد گویا مانند x و y داریم:
$x<y$ اگر و تنها اگر عدد گویای مثبتی مانند z باشد که $x+z=y$.

پاسخ: با توجه به توضیحات فوق واضح است. ■

برای معنادار بودن ضرب اعداد گویا، از دیدگاه کاهش و افزایش به دیدگاه عنصر قرینه رفتیم و هر عدد کسریِ ناصفر را به‌عنوان یک عدد گویای مثبت، و قرینهٔ آن را به‌عنوان یک عدد گویای منفی درنظر گرفتیم. با ایده گرفتن از مثال فوق، تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۴: برای هر دو عدد گویا مانند x و y داریم:
$x<y$ اگر و تنها اگر عدد گویای مثبتی مانند z وجود داشته باشد که $x+z=y$.

مثال ۳۹.۴: نشان دهید برای هر عدد گویا مانند x داریم:
$x > \circ$ اگر و تنها اگر x عددی گویا و مثبت باشد.

پاسخ: برای هر عدد گویای مثبت مانند x داریم $x = x + \circ$ پس $x > \circ$.
حال اگر x چنان باشد که $x > \circ$، پس عدد گویای مثبتی مانند z هست که $x = z + \circ$ و چون $z = z + \circ$ پس $x = z$ و درنتیجه x نیز عدد گویای مثبتی است. ■

مثال ۴۰.۴: نشان دهید برای هر دو عدد گوایای x و y که $x < y$ و هر دو عدد طبیعی مانند m و n، داریم $x < \frac{mx+ny}{m+n} < y$.

پاسخ: $x = \frac{mx+nx}{m+n} < \frac{mx+ny}{m+n} < \frac{my+ny}{m+n} = y$ ■

خاصیت ۶.۴ (خاصیت ارشمیدسی)**: برای هر دو عدد گویای مثبت مانند x و y، عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $nx > y$.**

اثبات: برای $x = \frac{a}{b}$ و $y = \frac{c}{d}$ قرار دهید $n = bdc$. ادامه کار به‌عنوان تمرین به خوانده واگذار می‌شود. ■

تمرین:

(۲۸) اعداد گویای زیر را با یکدیگر مقایسه کنید.

آ. $\frac{-۳}{۴}$ و $\circ$ ب. $\frac{-۳}{۴}$ و $\frac{-۱}{۴}$ ج. $\frac{-۳}{۴}$ و $\frac{۴}{-۵}$

(۲۹) برای هر دو عدد صحیح a و b که $b \neq \circ$ و عدد گویای $x = \frac{a}{b}$ داریم:

آ. $x < \circ \iff ab < \circ$ ب. $x > \circ \iff ab > \circ$

(۳۰) نشان دهید برای هر سه عدد گویای دلخواه مانند x، y و z داریم:

آ. $xz < yz \overset{z>\circ}{\iff} x < y$ ب. $x + z < y + z \iff x = y$

ج. $xz < yz \overset{z<\circ}{\iff} x > y$

(۳۱) نامعادلات زیر را حل کنید.

آ. $x + (-۳) < ۴$ ب. $x + (-۳) > ۴$ ج. $x + (-۳) < (-۴)$

د. $۳x + ۴ < -۲$ ه. $(-۳)x + ۴ < -۲$ و. $(-x) + ۴ < ۳$

(۳۲) نشان دهید در اعداد گویا داریم:

آ. $a(b-c) = ab - ac$ ب. $(a-b) - c = a - (b+c)$

ج. $a - (b-c) = (a+c) - b$ د. $(a-b) - (c-d) = (a+d) - (b+c)$

ه. $(a-b) - c = (a-c) - b$ و. $(a-b) + (c-d) = (a+c) - (b+d)$

ز. $\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{bc}; \quad (b, c \neq \circ)$ ح. $\frac{a \div c}{b} = \frac{a}{bc}; \quad (b, c \neq \circ)$

ط. $\frac{a}{b \div c} = \frac{ac}{b}; \quad (b, c \neq \circ)$ ی. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}; \quad (b, c, d \neq \circ)$

فصل ۵

توان، ریشه و لگاریتم

در فصل اول با مفهوم توان آشنا شدیم. اما در آن فصل فقط اعداد طبیعی را به توان اعداد طبیعی رسانیدم. در این فصل نخست پایه‌ها را به اعداد گویا توسعه می‌دهیم که شامل اعداد صحیح و کسری است. سپس نما را به اعداد کسری، صحیح و گویا توسعه می‌دهیم.

ضمن توسعه توان به نمای کسری و گویا با رادیکال و ریشه آشنا می‌شویم. در انتها، براساس توان، لگاریتم را تعریف کرده و به حل کردن مسائل لگاریتم می‌پردازیم. البته در این فصل لگاریتم را بدون توجه به کاربردهای آن و مفاهیم تجربی که در پس آن نهفته است، صرفاً به‌عنوان جواب یک معادلهٔ توانی تعریف می‌کنیم؛ همان‌طور که تفریق و تقسیم را براساس جمع و ضرب تعریف کردیم.

۱.۵ توان با نمای طبیعی

در فصل اول، اعداد طبیعی به توان اعداد طبیعی را بیان کردیم. یعنی عبارت‌هایی توانی که در آن هم پایه و هم نما اعدادی طبیعی بودند. به سادگی می‌توانیم توان را چنان بسازیم که برای هر عدد گویا مانند a داشته باشیم:

$$\begin{aligned} a^{۰} &= ۱ \\ a^{۱} &= a = ۱ \times a &&= a^{۰} \times a \\ a^{۲} &= a \times a &&= a^{۱} \times a \\ a^{۳} &= a \times a \times a &&= a^{۲} \times a \\ &\vdots &&\vdots \end{aligned}$$

با ایده گرفتن از تساوی‌های فوق، تعریف زیر را، مطابق با تعریف توان در فصل اول، ارائه می‌دهیم.

با دقت بخوانید...
این مطالب مهم هستند؛ در یادگیری آنها کوشا باشید.

تعریف ۱.۵: برای هر عدد طبیعی مانند n و هر عددی مانند a تعریف می‌کنیم:

آ. $\boldsymbol{a^{۰} = ۱}$ ب. $\boldsymbol{a^{n+۱} = a^{n} \times a}$

بدین ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}
a^{\circ} &= ۱ && = ۱\\
a^{۱} &= a^{\circ} \times a = ۱ \times a && = a\\
a^{۲} &= a^{۱} \times a && = a \times a\\
a^{۳} &= a^{۲} \times a && = (a \times a) \times a\\
a^{۴} &= a^{۳} \times a && = \big((a \times a) \times a\big) \times a\\
&\vdots && \vdots
\end{aligned}$$

مثال ۱.۵: مقادیر زیر را به‌دست آورید.

آ. $(-۱)^{۲}$ ب. $(-۱)^{۳}$ ج. $(-۱)^{۴}$

د. $(-۲)^{۲}$ ه. $(-۲)^{۳}$ و. $(-۲)^{۴}$

ز. $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}$ ح. $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}$ ط. $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴}$

ی. $\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}$ ک. $\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۳}$ ل. $\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۴}$

م. $\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲}$ ن. $\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۳}$ س. $\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۴}$

ع. $\left(\frac{-۳}{۵}\right)^{۲}$ ف. $\left(\frac{-۳}{۵}\right)^{۳}$ ص. $\left(\frac{-۳}{۵}\right)^{۴}$

پاسخ: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۲.۵: با استفاده ازتعریف نشان دهید:

آ. $a^{n} \times a^{\circ} = a^{n+\circ}$ ب. $a^{n} \times a^{۱} = a^{n+۱}$

ج. $a^{n} \times a^{۲} = a^{n+۲}$ د. $a^{n} \times a^{۳} = a^{n+۳}$

پاسخ: آ. $a^{n} \times a^{\circ} = a^{n} \times ۱ = a^{n} = a^{n+\circ}$

ب. $a^{n} \times a^{۱} = a^{n} \times a = a^{n+۱}$

ج. $a^{n} \times a^{۲} = a^{n} \times (a^{۱} \times a) = \left(a^{n} \times a^{۱}\right) \times a = a^{n+۱} \times a = a^{n+۲}$

د. $a^{n} \times a^{۳} = a^{n} \times (a^{۲} \times a) = (a^{n} \times a^{۲}) \times a = a^{n+۲} \times a = a^{n+۳}$ ■

با دقت بخوانید...
صورت قضیه از اثبات آن مهمتر است.

قضیه ۱.۵: **برای هر دو عدد طبیعی مانند m و n و هر دو عدد گویا مانند a و b داریم:**

آ. $a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$ ب. $a^{n} \times b^{n} = (ab)^{n}$ ج. $(a^{m})^{n} = a^{mn}$

د. $a^{n} \div a^{m} = a^{n} - m; (n \geq m)$ ه. $a^{n} \div b^{n} = (a \div b)^{n}$

اثبات: از اثبات همین قضیه در اعداد حقیقی کمک بگیرید. ■

با دقت بخوانید...
صورت قضیه از اثبات آن مهمتر است.

قضیه ۲.۵: **برای هر دو عدد گویای a و b، و هر دو عدد طبیعی مانند m و n داریم:**

آ. اگر $\circ < a < b$ و $۱ < n$، آنگاه $\circ < a^{n} < b^{n}$.

ب. اگر $\circ < a < ۱$ و $\circ < m < n$، آنگاه $\circ < a^{n} < a^{m} < ۱$.

ج. اگر $a > ۱$ و $\circ < m < n$، آنگاه $۱ < a^{m} < a^{n}$.

اثبات: آ. فرض می‌کنیم $\circ < a < b$. به‌وضوح داریم $\circ < a^{۱} < b^{۱}$. کافی نشان دهیم اگر $\circ < a^{k} < b^{k}$ آنگاه

$0 < a^{k+1} < b^{k+1}$ که بنا به تساوی زیر واضح است.
$$0 < a^{k+1} = a^k a < a^k b < b^k b = b^{k+1}$$
موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

قضیه ۳.۵: برای هر دو عدد گویای مثبتِ a و b و هر عدد طبیعی و ناصفرِ n داریم:
$a = b$ اگر و تنها اگر $a^n = b^n$

اثبات: $a = b \Longrightarrow a^n = b^n$ به استقرای ریاضی اثبات می‌شود.
برای اثبات $a^n = b^n \Longrightarrow a = b$ از $a = b \Longrightarrow a^n = b^n$، مورد (آ) از قضیهٔ قبل و اصل تثلیث استفاده کرده، نشان می‌دهیم $a < b$ و $a > b$ با $a^n = b^n$ ناسازگارند؛ یعنی به‌طور همزمان امکان‌پذیر نیستند.
ادامهٔ کار به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۳.۵: درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را برای هر دو عدد طبیعی دلخواه مانند m و n و هر دو عدد گویا مانند a و b بررسی کنید.

موارد این مثال با قضیه (۲.۵) مقایسه شود.

آ. اگر $a > 0$ و $m < n$ آن‌گاه $a^m < a^n$. ب. اگر $0 < a < b$ آن‌گاه $a^n > b^n$
ج. اگر $0 < a < b$ آن‌گاه $a^n < b^n$ د. اگر $a < -1$ آن‌گاه $a^n < (-1)^n$.

پاسخ: آ. نادرست است؛ کافی است قرار دهیم $a = \frac{1}{2}$.
ب. نادرست است؛ کافی است قرار دهیم $n = 1$.
ج. برای $n = 0$ نادرست است، اما برای $n \neq 0$ درست است. (ادامه کار به خواننده واگذار می‌شود)
د. نادرست است؛ کافی است قرار دهیم $a = -2$ و $n = 2$. ■

۲.۵ توان با نمای صحیح

تا کنون عباراتی مانند a^0، a^1، a^2 و .... تعریف شده‌اند. اما عباراتی مانند 3^{-2}، 3^{-4} و ... هنوز تعریف نشده‌اند. اگر بخواهیم a^{-n} را چنان تعریف کنیم که قواعد توان از جمله $a^n a^m = a^{n+m}$ برای هر دو عدد صحیح m و n نیز برقرار باشند، آن‌گاه باید داشته باشیم $a^{-n}a^n = a^{(-n)+n} = a^0 = 1$. بنابراین، a^{-n} را معکوس a^n درنظر می‌گیریم و می‌نویسیم $a^{-n} = (a^n)^{-1}$.

تعریف ۲.۵: برای هر عدد گویایی مانند a و هر عدد طبیعی مانند n قرار می‌دهیم:
آ. $\boldsymbol{a^0 = 1}$ ب. $\boldsymbol{a^{n+1} = a^n.a}$ ج. $\boldsymbol{a^{-n} = (a^n)^{-1}}$

نکته‌ای ظریف...

البته باید توجه داشت که با توجه به عبارت فوق a^{-n} زمانی بامعناست که $(a^n)^{-1}$ نیز به‌معنا باشد. یعنی زمانی که $a^n \neq 0$. از آنجا که $a^n = 0$ اگر و تنها اگر $a = 0$ و $n \neq 0$، پس a^{-n} برای $n \neq 0$، فقط زمانی بامعناست که $a \neq 0$.

مثال ۴.۵: مقادیر زیر را به‌دست آورید.
آ. 3^{-2} ب. 2^{-2} ج. 5^{-2}

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

گزاره ۱.۵: برای هر دو عدد گویای a و b و هر دو عدد صحیحِ m و n داریم:

آ. $a^{-n} = (a^{-1})^n; (a \neq 0)$ ب. $(a^{-n})^{-1} = a^n; (a \neq 0)$

ج. $a^m a^n = a^{m+n}$ د. $a^m b^m = (ab)^m$

ه. $(a^m)^n = a^{mn}$ و. $a^0 = 1$ و $0^n = 0; (n \neq 0)$

اثبات: آ. برای اثبات $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$ کافی است نشان دهیم $(a^{-1})^n \times a^n = 1$. از قواعد توان با نمای طبیعی استفاده کرده داریم $(a^{-1})^n \times a^n = (a^{-1} \times a)^n = 1^n = 1$.

ب. بنا به تعریف داریم $(a^{-n})^{-1} = \left((a^n)^{-1}\right)^{-1}$. پس کافی است نشان دهیم $x = (x^{-1})^{-1}$؛ برای هر عدد گویای ناصفر مانند x.

ج. کافی است نشان دهیم برای هر دو عدد طبیعی مانند t و s داریم $a^t a^{-s} = a^{t+(-s)}$ و $a^{-t}a^{-s} = a^{(-t)+(-s)}$.

د. کافی است نشان دهیم برای هر عدد طبیعی مانند n داریم $a^{-n}b^{-n} = (ab)^{-n}$.

تکمیل موارد فوق و اثبات موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

گزاره ۲.۵: برای هر عدد گویای a و هر دو عدد طبیعی مانند m و n که $0 < m < n$ داریم:

آ. اگر $a > 1$ آن‌گاه $0 < a^{-n} < a^{-m} < 1 < a^m < a^n$.

ب. اگر $0 < a < 1$، آن‌گاه $0 < a^n < a^m < 1 < a^{-m} < a^{-n}$

اثبات: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

گزاره ۳.۵: برای هر دو عدد گویای مثبتِ a و b و هر دو عدد طبیعی و ناصفرِ n داریم:

آ. $a < b$ اگر و تنها اگر $a^n < b^n$. **ب. $a < b$ اگر و تنها اگر $a^{-n} > b^{-n}$.**

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

قضیه ۴.۵: برای هر دو عدد گویای مثبت a و b و هر عدد صحیح و ناصفرِ n داریم:
$a = b$ اگر و تنها اگر $a^n = b^n$

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

تمرین:

(۱) مقادیر زیر را به‌دست آورید.

آ. $(-2)^0$ ب. $(-2)^1$ ج. $(2)^2$ د. $(-2)^3$ ه. $(-2)^4$

و. $(-1)^0$ ز. $(-1)^1$ ح. $(-1)^2$ ط. $(-1)^3$ ی. $(-1)^4$

ک. $(-1)^{-2}$ ل. $(-1)^{-3}$ م. $(-2)^{-2}$ ن. $(-2)^{-3}$ س. 0^{-2}

(۲) نشان دهید برای هر عدد صحیح مانند n داریم:

آ. $(-1)^{2n} = 1$ ب. $(-1)^{2n+1} = -1$ ج. $(-2)^{2n} = 2^{2n}$ د. $(-2)^{2n+1} = -\left(2^{2n}\right)$

(۳) نشان دهید برای هر دو عدد گویای منفیِ a و b و هر عدد طبیعیِ n داریم
$a = b$ اگر و تنها اگر $a^n = b^n$.

(۴) نشان دهید برای هر دو عدد گویای ناصفرِ a و x و هر عدد طبیعیِ n داریم
$x^n = a^n$ اگر و تنها اگر $x = a$ یا $x = -a$

(۵) نشان دهید برای هر عدد گویای a و هر عدد طبیعیِ n، معادلهٔ $x^{2n+1} = a^{2n+1}$ در اعداد گویا

دقیقا یک جواب دارد.

(۶) نشان دهید برای هر عدد گویای $a > ۱$ و هر دو عدد طبیعی و ناصفرِ m و n داریم
$a^m < a^n$ اگر و تنها اگر $m < n$

(۷) نشان دهید برای هرعدد گویای a که $۰ < a < ۱$ و هر دو عدد طبیعیِ m و n داریم
$a^m < a^n$ اگر و تنها اگر $m > n$

(۸) نشان دهید برای هر عدد گویای $a > ۱$ و هر دو عدد طبیعی و ناصفرِ m و n داریم
$a^{-m} < a^{-n}$ اگر و تنها اگر $-m < -n$

(۹) نشان دهید برای هرعدد گویای a که $۰ < a < ۱$ و هر دو عدد طبیعی m و n داریم
$a^{-m} < a^{-n}$ اگر و تنها اگر $-m > -n$

(۱۰) معادلات زیر را حل کنید.

آ. $x^۳ = ۲^۳$ ب. $x^۳ = (-۲)^۳$ ج. $x^۲ = (-۲)^۲$

د. $x^۲ = ۲^۲$ ه. $x^۴ = ۱$ و. $x^۴ = -۱$

ز. $۳^x = ۳^۵$ ح. $۳^x = ۹^۴$ ط. $۳^x = ۱/۳$

ی. $۳^{۲x+۱} = ۱/۳$ ک. $۳^{۲x+۳} = ۹^{-۶}$ ل. $(-۳)^{۲x+۳} = -(۹^{-۶})$

(۱۱) نامعادلات زیر را در اعداد گویا حل کنید.

آ. $x^۳ < ۱$ ب. $x^۳ > -۱$ ج. $(۲x+۱)^۳ > ۱$

د. $(۲x-۳)^۳ < ۸$ ه. $(۳x+۲)^۳ < -۲^۳$ و. $x^۳ < ۱/۸$

ز. $\left(\frac{۳x-۴}{۵}\right)^۳ > \frac{۸}{۲۷}$ ح. $x^{-۳} < ۲^{-۳}$ ط. $\left(\frac{x+۱}{۲}\right)^{-۳} < -۸$

(۱۲) نشان دهید برای هر عدد گویای x داریم:

آ. $x^۲ < ۱$ اگر و تنها اگر $-۱ < x < ۱$ ب. $x^۲ > ۱$ اگر و تنها اگر $x > ۱$ یا $x < -۱$.

ج. $x^۲ < ۵^۲$ اگر و تنها اگر $-۵ < x < ۵$ د. $x^۴ > ۱۶$ اگر و تنها اگر $x > ۲$ یا $x < -۲$.

(۱۳) نشان دهید برای هر عدد گویای مثبتِ a و هر عدد طبیعی و ناصفرِ k داریم:

آ. $x^{۲k} < a^{۲k}$ اگر و تنها اگر $-a < x < a$.

ب. $x^{۲k} > a^{۲k}$ اگر و تنها اگر $x > a$ یا $x < -a$.

(۱۴) نشان دهید برای هر عدد گویای a و هر عدد طبیعی و ناصفرِ k، معادلهٔ $x^{۲k} = a^{۲k}$ دقیقاً دارای دو جواب $x = a$ و $x = -a$ است.

۳.۵ رادیکال و ریشه

می‌دانیم $(-۱)^۲ = ۱$ و $۱^۲ = ۱$؛ بنابراین، معادلهٔ $x^۲ = ۱$ دارای دو جواب $x = ۱$ و $x = -۱$ است که آن را به‌صورت $x = \pm ۱$ نشان می‌دهیم. اما در دنیای باستان (پیش از میلاد مسیح) هیچ اثری از اعداد منفی نبود؛ تا اینکه در قرن شانزدهم با کتاب «ارس‌مگنا» به‌معنای «فن‌کبیر» اثر جیرلامو کاردانو[1]، به‌طور رسمی هویت یافتند و به‌عنوان عدد پذیرفته شدند؛ درحالی‌که در دنیای باستان به معادلاتی مانند $x^۲ = a$ توجه می‌شده است. جواب این معادله، را «جذرِ a» می‌خوانیم و به‌صورت $\sqrt{a}$ نشان می‌دهیم. نماد $\sqrt{}$ را رادیکال خوانده و به‌همین سبب گاهی $\sqrt{a}$ را رادیکالِ a نیز می‌خوانند. بنابراین، در دنیای قدیم معادلهٔ $x^۲ = ۱$ فقط یک جواب داشته و آن هم $x = ۱$. به‌همین سبب

[1] Cardano Gerolamo (۱۵۰۱ ـ ۱۵۷۶)؛ Italy)

بدون هیچ ابهامی، به راحتی از جذر یک عدد سخن می‌گفته‌اند. ما نیز خود را به جواب‌های نامنفیِ معادلهٔ $x^۲ = a$ محدود کرده و آن را با $\sqrt{a}$ نمایش می‌دهیم؛ تا به زودی به اعداد منفی بازگردیم.

مثال ۵.۵: هر یک از مقادیر زیر را به‌دست آورید.

آ. $\sqrt{۰}$ ب. $\sqrt{۱}$ ج. $\sqrt{-۱}$

د. $\sqrt{۴}$ ه. $\sqrt{۹}$ و. $\sqrt{۱۶}$

ز. $\sqrt{\frac{۱}{۴}}$ ح. $\sqrt{\frac{۴}{۲۵}}$ ط. $\sqrt{\frac{۲۵}{۹}}$

پاسخ: آ. $۰ = ۰^۲$ پس $\sqrt{۰} = ۰$ ب. $۱ = ۱^۲$ پس $\sqrt{۱} = ۱$

ج. $x^۲ = -۱$ جواب ندارد پس $\sqrt{-۱}$ بی‌معناست.

د. $\sqrt{۴} = ۲$ ه. $\sqrt{۹} = ۳$ و. $\sqrt{۱۶} = ۴$

ز. $\sqrt{۱/۴} = ۱/۲$ ح. $\sqrt{۴/۲۵} = ۲/۵$ ط. $\sqrt{۲۵/۹} = ۵/۳$ ■

جواب معادلهٔ $x^۳ = a$ را ریشهٔ سوم a خوانده و به‌صورت $\sqrt[۳]{a}$ نمایش می‌دهیم. همچنین، جواب معادلهٔ $x^n = a$ را ریشهٔ nاُمِ a خوانده و به صورت $\sqrt[n]{a}$ نمایش می‌دهیم. مورد (ج) از مثال فوق نشان می‌دهد اعداد منفی پیچیدگی‌های زیادی دارند. لذا همچون مردمان باستان، ریشه‌های nاُم را فقط در اعداد کسری بررسی می‌کنیم و در ادامه به اعداد منفی باز می‌گردیم.

گزاره ۴.۵: **برای هر عدد طبیعی مانند n و هر دو عدد کسری مانند a و x داریم:**
$x = \sqrt[n]{a}$ اگر و تنها اگر $x^n = a$

به‌ازای هر عدد مثبتی مانند a، معادلهٔ $x^n = a$ در اعداد مثبت، دقیقاً یک جواب دارد. بنابراین، عبارت $\sqrt[n]{a}$ دقیقاً یک عدد را مشخص می‌سازد و می‌توان آن را با همین نگارش نشان داد.

مثال ۶.۵: مقادیر زیر را به‌دست آورید.

آ. $\sqrt[۳]{۱}$ ب. $\sqrt[۴]{۱}$ ج. $\sqrt[۱۵]{۱}$

د. $\sqrt[۳]{۰}$ ه. $\sqrt[۷]{۰}$ و. $\sqrt[۸]{۰}$

ز. $\sqrt[۳]{۸}$ ح. $\sqrt[۳]{۲۷}$ ط. $\sqrt[۵]{۳۲}$

ی. $\sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}}$ ک. $\sqrt[۴]{\frac{۱}{۱۶}}$ ل. $\sqrt[۳]{\frac{۶۴}{۲۷}}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود. ■

واضح است که می‌توان $\sqrt[۱]{a}$ را به‌معنای a در نظر گرفت چون $a^۱ = a$. اما برای $\sqrt[۰]{a}$ هیچ مقداری را نمی‌توان مشخص کرد؛ چون برای هر عددی مانند x داریم $x^۰ = ۱$. پس این معادله بی‌شمار جواب داشته و درنتیجه نماد $\sqrt[۰]{a}$ هیچ مقداری را مشخص نمی‌کند.

قضیه ۵.۵: برای هر دو عدد کسریِ a و b و هر دو عدد طبیعیِ $m \geq ۱$ و $n \geq ۱$ داریم:

آ. $\sqrt[n]{a^n} = a$ ب. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

ج. $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ د. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

ه. $\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m$ و. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn} = a^m$

ز. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

اثبات: آ. $x = \sqrt[n]{a^n}$ اگر و تنها اگر $x^n = a^n$ اگر و تنها اگر $x = a$ پس $x = \sqrt[n]{a^n} = a$.

ب. $x = \sqrt[n]{a}$ اگر و تنها اگر $x^n = a$ پس $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = x^n = a$.

ج. $x = \sqrt[n]{a} \iff x^n = a$ و $y = \sqrt[n]{b} \iff y^n = b$. بنابراین داریم $(xy)^n = x^n y^n = ab$ و درنتیجه $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = xy = \sqrt[n]{ab}$.

د. $x = \sqrt[m]{a} \iff x^m = a$ و $y = \sqrt[n]{x} \iff y^n = x$. درنتیجه $a = x^m = \left(y^n\right)^m = y^{mn}$ و $y = \sqrt[mn]{a}$

ه. $\sqrt[n]{a^{mn}} = \sqrt[n]{(a^m)^n} = a^m$ و. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^m = a^m$ ■

گزاره ۵.۵: برای هر دو عدد کسری مانند a و b و هر عدد طبیعی مانند n که $n \geq ۲$ داریم:
اگر $a < b$ آن‌گاه $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

اثبات: قرار می‌دهیم $x = \sqrt[n]{a}$ و $y = \sqrt[n]{b}$ و نشان می‌دهیم با توجه به اینکه $a < b$، هر دو حالت $x = y$ و $x > y$ غیرممکن هستند. بنابراین، چون بنا به اصل تثلیث یک و تنها یکی از سه حالت $x < y$، $x = y$ یا $x > y$ درست است، پس حتماً $x < y$. چون در این نتیجه‌گیری‌ها از فرض $a < b$ استفاده شده است، پس گوییم اگر $a < b$ آن‌گاه $x < y$، یا به عبارت دیگر اگر $a < b$، آن‌گاه $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

$$\begin{cases} \circ \leq x = y \Longrightarrow \circ \leq x^n = y^n \Longrightarrow \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \Longrightarrow a = b \Longrightarrow \text{غیرممکن است.} \\ \circ \leq y < x \Longrightarrow \circ \leq y^n < x^n \Longrightarrow \left(\sqrt[n]{b}\right)^n < \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \Longrightarrow a > b \Longrightarrow \text{غیرممکن است.} \end{cases}$$ ■

مثال ۷.۵: نشان دهید:

آ. $۱ < \sqrt{۲} < ۲$ ب. $۱ < \sqrt[۳]{۷} < ۲$ ج. $\sqrt{۲} < \sqrt{۳}$

پاسخ: آ. $۱ < ۲ < ۴ \Longrightarrow ۱^۲ < \left(\sqrt{۲}\right)^۲ < ۲^۲ \Longrightarrow ۱ < \sqrt{۲} < ۲$
به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۱.۳.۵ ریشه و اعداد منفی

تا کنون خود را به ریشه‌های نامنفیِ اعداد نامنفی محدود کرده بودیم. اما معادلهٔ $x^۳ = a$ برای هر عدد گویا، چه مثبت و چه منفی، دارای جوابی منحصربه‌فرد است که می‌توان آن را با $\sqrt[۳]{a}$ نمایش داد. به طور مثال $\sqrt[۳]{-۸} = -۲$، چون معادلهٔ $x^۳ = -۸$ فقط یک جواب دارد.

با درنظر گرفتن ریشه‌های منفی، می‌بینیم که $\sqrt{۹}$ چندان هم واضح نیست؛ چون معادلهٔ $x^۲ = ۹$ دارای دو جواب $x = ۳$ و $x = -۳$ است. صرفاً برای اینکه عبارت $\sqrt{۹}$ دقیقاً یک عدد را مشخص کند، از بین $x = ۳$ و $x = -۳$، جواب نامنفی را به‌عنوان مقدار $\sqrt{۹}$ انتخاب می‌کنیم.

مثال ۸.۵: نشان دهید برای هر عدد گویا مانند x که $x < -۱$ داریم:

آ. $x^۲ > (-۱)^۲$ ب. $x^۳ < (-۱)^۳$ ج. $x^۴ > (-۱)^۴$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

با دقت بخوانید... صورت مثال از پاسخ آن مهمتر است.

مثال ۹.۵: نشان دهید برای هر عدد گویا مانند x و هر عدد طبیعی مانند n که $n \geq ۱$ داریم:

آ. اگر $x < -۱$ و n فرد باشد، آن‌گاه $x^n < -۱$.

ب. اگر $x < -۱$ و $n > ۲$ و فرد باشد، آن‌گاه $x^n < -x^{n-۱}$.

ج. اگر $-۱ < x < ۰$ و n فرد باشد، آن‌گاه $-۱ < x^n < ۰$.

د. اگر $-۱ < x < ۰$ و $n > ۲$ عددی فرد باشد آن‌گاه $-۱ < -x^{n-۱} < x^n < ۰$.

ه. اگر $x < -۱$ و n زوج باشد، آن‌گاه $x^n > -x^{n-۱} > ۱$.

و. اگر $-۱ < x < ۰$ و n زوج باشد، آن‌گاه $۰ < x^n < -x^{n-۱} < ۱$

پاسخ: (راهنمایی: هر عدد زوج به صورت $۲k$ و هر عدد فرد به‌صورت $۲k+۱$ است و برای هر عدد گویای ناصفر مانند a داریم $a^{۲k} > ۰$.) ■

بدین‌ترتیب، $\sqrt[n]{a}$ را برای هر عدد گویایی مانند a به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

گزاره ۶.۵: برای هر عدد گویایی مانند a، و هر عدد طبیعی مانند n که $n > ۱$، عبارت $\sqrt[n]{a}$ را ریشهٔ nاُم خوانده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

آ. اگر $a \geq ۰$، آن‌گاه $\sqrt[n]{a}$ جواب نامنفی معادلهٔ $x^n = a$ است.

ب. اگر $a < ۰$ و n عددی فرد باشد، $\sqrt[n]{a}$ تنها جواب معادلهٔ $x^n = a$ است.

ج. اگر $a < ۰$ و n عددی زوج باشد، $\sqrt[n]{a}$ را بی‌معنا می‌دانیم؛

چون در این صورت معادلهٔ $x^n = a$ جواب ندارد.

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۱۰.۵: درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. $\sqrt{-۱}\sqrt{-۴} = \sqrt{۴}$ ب. $\sqrt{(-۲)^۲} = -۲$ ج. $\left(\sqrt{-۲}\right)^۲ = -۲$

د. برای هر دو عدد گویا مانند a و b و هر عدد طبیعی مانند n داریم $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

ه. برای هر عدد گویا مانند a و هر عدد طبیعی مانند n داریم $\sqrt[n]{a^n} = a$.

و. برای هر عدد گویا مانند a و هر عدد طبیعی مانند n داریم $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

پاسخ: تمامی موارد نادرست هستند؛ به اعداد منفی و معنادار یا بی‌معنا بودن عبارات توجه کنید. ■

قضیه ۶.۵: برای هر دو عدد گویا مانند a و b و هر عدد طبیعی مانند n که $n \geq ۲$ داریم:

آ. اگر $۰ \leq a < b$ آن‌گاه $۰ \leq \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

ب. اگر $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ بامعنا باشند داریم: $a < b$ اگر و تنها اگر $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

ج. اگر $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ بامعنا باشند داریم: $a = b$ اگر و تنها اگر $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$

اثبات: آ. اگر قرار دهیم $x = \sqrt[n]{a}$ و $y = \sqrt[n]{b}$ داریم $x^n = a$ و $y^n = b$. کافی است این عبارت را به‌صورت «اگر $۰ < x^n < y^n$ آن گاه $x < y$» بنویسیم. (پیش از این اثبات شده است)
موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

تمرین:

(۱۵) نشان دهید.

آ. $\sqrt[۴]{۲^۶} = \sqrt[۲]{۳}$ ب. $\sqrt{۲^۵} = ۴\sqrt{۲}$ ج. $\sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$

(۱۶) معادلات زیر را حل کنید.

آ. $\sqrt{x} = ۲/۳$ ب. $\sqrt[۳]{x} = ۲/۳$ ج. $\sqrt[۴]{x} = \sqrt{۵}$
د. $\sqrt{x-۱} = \sqrt{۵}$ ه. $\sqrt{۵-\sqrt{x-۱}} = ۱$ و. $\sqrt{۱-x} = \sqrt{x-۱}$
ز. $\sqrt{x-۳} = \sqrt{۱-x}$ ح. $\sqrt{x} \div \sqrt{۱-x} = \sqrt{x}$ ط. $\sqrt{x} \div \sqrt{x-۱} = \sqrt{x}$

(۱۷) نشان دهید:

آ. $۲ < \sqrt{۶} < ۳$ ب. $۱۲/۵ < \sqrt{۶} < ۵/۲$ ج. $۹۷/۴۰ < \sqrt{۶} < ۹۸/۴۰$
د. $\sqrt{۲} < \sqrt[۳]{۳}$ ه. $\sqrt[۳]{۳} > \sqrt[۴]{۴}$ و. $\sqrt[۴]{۴} > \sqrt[۵]{۵}$
ز. $\sqrt[۳]{۵} < \sqrt[۵]{۱۵}$ ح. $\sqrt[۴]{۱۳+\sqrt{۸}} < ۲$

(۱۸) نامعادلات زیر را حل کنید.

آ. $\sqrt{x} < ۱$ ب. $\sqrt[۳]{x} < ۱$ ج. $\sqrt[۳]{x^۲} < \sqrt[۶]{۱۶}$
د. $\sqrt{x-۱} < ۲$ ه. $\sqrt{x-۱} < \sqrt{۱-x}$

۴.۵ توان با نمای کسری و گویا

پیش از این، توان با نمای طبیعی را به‌توان با نمای صحیح توسعه دادیم. حال به‌طور مشابه، نمای توان را به اعداد کسری و گویا چنان توسعه می‌دهیم که قواعد توان برای آنها نیز برقرار باشد. همچنین برای هر عدد طبیعی مانند n عبارت a^n به‌عنوان توانی با نمای طبیعی و به‌عنوان توانی با نمای گویا، یک مقدار را نشان دهد. بدین‌ترتیب، انتظار داریم برای هر دو عدد طبیعی مانند k و n داشته باشیم

$$a^{\frac{n}{۱}} = a^n \qquad a^{\frac{kn}{k}} = a^n \qquad a^{\frac{n}{n}} = a^۱ = a \qquad a^{\frac{۰}{n}} = a^۰ = ۱$$

فرض کنید بتوانیم توان با نمای کسری و گویا را چنان تعریف کنیم که برای هر دو عدد گویای t و s و هر عدد گویایی مانند a داشته باشیم، $(a^t)^s = a^{ts}$. در این صورت برای هر عدد طبیعی مانند n، که یک عدد گویا نیز می‌باشد، داریم:

$$\left(a^n\right)^{\frac{۱}{n}} = a^{\frac{n}{n}} = a^۱ = a \quad \text{و} \quad \left(a^{\frac{۱}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^۱ = a$$

بنابراین، برای هر دو عدد کسری x و a داریم $x = a^{\frac{۱}{n}}$ اگر و تنها اگر $x^n = a$. پس $x = \sqrt[n]{a}$. با فرض $\left(a^t\right)^s = a^{ts}$ برای هر دو عدد گویا مانند t و s داریم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{۱}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad \text{و} \quad a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

چون ریشهٔ اعداد منفی از پیچیدگی‌های زیادی برخوردار است، خود را به‌اعداد گویای نامنفی (اعداد کسری) محدود می‌کنیم. بنا بر مطالب فوق، برای هر عدد کسری مانند a داریم $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$، پس $a^{m/n}$ از هر دو روش فوق، یک جواب را مشخص می‌کند.

برای توسعه نمای توان از اعداد کسری به اعداد گویا از توان با نمای منفی ایده گرفته، برای هر عدد کسری مانند t قرار می‌دهیم $a^{-t} = \dfrac{۱}{a^t}$ و با قرار دادنِ $\sqrt[۱]{a} = a$، برای هر عدد طبیعی و ناصفر مانند m داریم $a^{m/۱} = \sqrt[۱]{a^m} = a^m = \left(\sqrt[۱]{a}\right)^m$.

بدین‌ترتیب، برای هر دو عدد طبیعی مانند m و $n \neq ۰$، و هر عدد کسری مانند a داریم:

$$a^{\frac{-m}{n}} = a^{\frac{m}{-n}} = a^{-\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{-۱} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right)^{-۱} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{-m}$$

و از طرفی هم داریم:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{-۱} = \frac{۱}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{۱}{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{\frac{۱}{a^m}} = \sqrt[n]{a^{-m}}$$

بنابراین، می‌توان تعریف زیر را برای توان با پایهٔ کسری و نمای گویا بیان کنیم.

گزاره ۷.۵: برای هر دو عدد کسری مانند a و b و هر عدد طبیعی مانند n و هر عدد صحیح مانند m قرار می‌دهیم:

$$\boldsymbol{a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$$

مثال ۱۱.۵: m و m' اعدادی صحیح و n و n' اعدادی طبیعی و ناصفر هستند. نشان دهید:

آ. $a^{\left(\frac{m}{n}\right)} = \sqrt[nn']{a^{mn'}}$ ب. $a^{\left(\frac{m'}{n'}\right)} = \sqrt[nn']{a^{nm'}}$

ج. اگر $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$، آن‌گاه $\sqrt[nn']{a^{mn'}} = \sqrt[nn']{a^{nm'}}$

د. اگر $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$ آن گاه $a^{\left(\frac{m}{n}\right)} = a^{\left(\frac{m'}{n'}\right)}$

پاسخ: آ. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n']{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{n'}} = \sqrt[n']{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n'}} = \sqrt[n']{\sqrt[n]{(a^m)^{n'}}} = \sqrt[n'n]{a^{mn'}}$ ■

مورد (د) از مثال فوق را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد.

گزاره ۸.۵: برای هر عدد کسریِ a و هر دو عدد گویایِ t و s داریم اگر $t = s$ آن‌گاه $a^t = a^s$.

گزارهٔ فوق، به‌معنای خوش‌تعریفی توان با نمای گویا برای پایه‌های کسری است.

گزاره ۹.۵: برای اعداد کسریِ a، b و اعداد گویایِ t و s داریم:

آ. $\boldsymbol{a^t a^s = a^{t+s}}$ ب. $\boldsymbol{a^t b^t = (ab)^t}$ ج. $\boldsymbol{(a^t)^s = a^{ts}}$ د. $\boldsymbol{\dfrac{a^t}{b^t} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^t}$

اثبات: قرار می‌دهیم $t = \dfrac{m}{n}$ و $s = \dfrac{n}{n'}$ که در آن m، m'، n و n' اعدادی صحیح هستند و $n, n' > ۰$. در این صورت می‌توانیم بگوییم:

آ. $a^t a^s = a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{m'}{n'}} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[n']{a^{m'}} = \sqrt[nn']{a^{mn'}}\sqrt[nn']{a^{m'n}} = \sqrt[nn']{a^{mn'+m'n}} = a^{\frac{mn'+m'n}{nn'}} = a^{t+s}$

ب. $a^t b^t = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{(ab)^m} = (ab)^{\frac{m}{n}} = (ab)^t$

ج.
$$\begin{aligned}(a^t)^s &= \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{m'}{n'}} = \sqrt[n']{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{m'}} = \sqrt[n']{\sqrt[n]{(a^m)^{m'}}} = \sqrt[n']{\sqrt[n]{a^{mm'}}} \\ &= \sqrt[nn']{a^{mm'}} = a^{\frac{mm'}{nn'}} = a^{ts}\end{aligned}$$

د. $\dfrac{a^t}{b^t} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \sqrt[n]{\dfrac{a^m}{b^m}} = \sqrt[n]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^t$ ■

۱.۴.۵ ترتیب و توان با نمای گویا

هر عدد گویا را می‌توان به صورت m/n نمایش داد که در آن m عددی صحیح و n عددی طبیعی و ناصفر است. در این صورت، برای هر عدد کسری مانند a داریم $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$. بنابراین، می‌توانیم از ترتیب توان با نمای صحیح و مقایسهٔ ریشه‌ها برای مقایسهٔ اعدادی که به‌صورت عبارت‌های توانی، با پایهٔ کسری و نمای گویا نوشته شده‌اند بهره برد.

بنا به گزاره (۲.۵)، برای هر عدد صحیح و مثبت m و هر عدد کسریِ a داریم:

$$a > ۱ \iff a^m > ۱$$

و بنا به گزاره (۵.۵)، برای هر عدد صحیح و مثبت n و هر عدد کسریِ a داریم:

$$a > ۱ \iff \sqrt[n]{a} > ۱$$

و چون برای هر عدد گویای t، عدد صحیحِ m و عدد طبیعی و ناصفرِ n هستند که $t = \dfrac{m}{n}$، پس:

قضیه ۷.۵: برای هر عدد کسری مانند a و هر عدد گویای t داریم:

آ. $a^t > ۱ \overset{t>۰}{\iff} a > ۱$

ب. $۰ < a^t < ۱ \overset{t>۰}{\iff} ۰ < a < ۱$

ج. $a^t > ۱ \overset{t<۰}{\iff} ۰ < a < ۱$

د. $۰ < a^t < ۱ \overset{t<۰}{\iff} a > ۱$

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

قضیه ۸.۵: برای هر عدد کسری مانند a و هر دو عدد گویای t و s داریم:

آ. اگر $a > ۱$، آن‌گاه $a^t \gtreqless a^s \iff t \gtreqless s$

ب. اگر $۰ < a < ۱$، آن‌گاه $a^t \gtreqless a^s \iff s \gtreqless t$

توجه به تغییر $\gtreqless$ به $\lesseqgtr$ در مورد (ب) از قضیه فوق ضروری است.

اثبات: با توجه به اینکه $t < s$ اگر و تنها اگر عددی گویا و مثبت مانند r باشد که $t + r = s$ و با استفاده از قضیهٔ قبل واضح است. ادامه کار به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

گزاره ۱۰.۵: برای هر دو عدد کسری مانند a و b و هر عدد گویایِ t داریم:

آ. اگر $t > ۰$ آن‌گاه: $a^t \gtreqless b^t$ اگر و تنها اگر $a \gtreqless b$.

ب. اگر $t < ۰$ آن‌گاه: $a^t \gtreqless b^t$ اگر و تنها اگر $a \lesseqgtr b$.

اثبات: با توجه به اینکه $a < b$ اگر و تنها اگر $c > ۰$ وجود داشته باشد که $a + c = b$ و با استفاده از قضایای قبل واضح است. ادامه کار به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۲.۴.۵ اعداد گویا به توان اعداد کسری و گویا

تا کنون اعداد کسری به توان اعداد کسری و گویا را بدون مشکل بررسی و تعریف کردیم و خواص آن را مشاهده نمودیم. حال می‌خواهیم اعداد گویا (که شامل اعداد منفی هستند) را نیز به توان اعداد کسری و گویا برسانیم.

پیش از این عبارتی مانند $\left(\frac{۴}{۹}\right)^{\frac{۳}{۲}}$ را بدون هیچ مشکلی به‌صورت زیر تعریف کردیم.

$$\left(\frac{۴}{۹}\right)^{\frac{۳}{۲}}=\sqrt{\left(\frac{۴}{۹}\right)^{۳}}=\sqrt{\left(\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲}\right)^{۳}}=\sqrt{\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۶}}=\sqrt{\left(\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۳}\right)^{۲}}=\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۳}=\frac{۸}{۲۷}$$

اما برای عبارتی مانند $\left(-\frac{۴}{۹}\right)^{\frac{۳}{۲}}$ داریم:

$$\left(-\frac{۴}{۹}\right)^{\frac{۳}{۲}}=\sqrt{\left(-\frac{۴}{۹}\right)^{۳}}=\sqrt{-\left(\frac{۴}{۹}\right)^{۳}}$$

و $\sqrt{-\left(\frac{۴}{۹}\right)^{۳}}$ بی‌معناست، چون $\frac{۴}{۹}>۰$ و درنتیجه $\left(\frac{۴}{۹}\right)^{۳}>۰$، پس $-\left(\frac{۴}{۹}\right)^{۳}<۰$. اما از طرفی هم $\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$ و درنتیجه داریم:

$$\left(-\frac{۴}{۹}\right)^{\frac{۳}{۲}}=\left(-\frac{۴}{۹}\right)^{\frac{۶}{۴}}=\sqrt[۴]{\left(-\frac{۴}{۹}\right)^{۶}}=\sqrt[۴]{\left(\left(-\frac{۲}{۳}\right)^{۳}\right)^{۴}}=\sqrt[۴]{\left(\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۳}\right)^{۴}}=\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۳}=\frac{۸}{۲۷}$$

این مشکل برای هر عدد منفی به توان هر عدد کسری یا گویا مانند $\frac{۳}{۲}$ با مخرج زوج وجود دارد. به نظر می‌رسد این مشکل برای عبارتی مانند $\left(-\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۳}}$ وجود نداشته باشد؛ که در آن عددی منفی به توان عددی کسری یا گویا مانند $\frac{۱}{۳}$ با مخرج فرد رسیده است. زیرا در این‌صورت می‌توان نوشت:

$$\left(-\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{-\frac{۱}{۸}}=\sqrt[۳]{\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۳}}=-\frac{۱}{۲}$$

اما $\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$ که نمایشی از همان عدد کسری یا گویا با مخرج زوج است و با این نگارش داریم:

$$\left(-\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۳}}=\left(-\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۲}{۶}}=\sqrt[۶]{\left(-\frac{۱}{۸}\right)^{۲}}=\sqrt[۶]{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۶}}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین، برای $\left(-\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۳}}$ دو مقدار $\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید؛ درحالی‌که انتظار داریم توان به‌گونه‌ای تعریف شود که حداکثر یک مقدار را مشخص سازد.

دو راه برای مقابله با این مشکل پیشنهاد می‌شود. در راه اول که مورد استفاده بسیاری از کتاب‌های ریاضی است، اعداد منفی به توان اعداد کسری را با استفاده از نمایشی خاص تعریف می‌کنند. نمایشی که در آن کسر تحویل‌ناپذیر است. اگر آن عبارت توانی تعریف شد که مقدار آن را می‌پذیرند و در غیر این صورت می‌گویند این عبارت بی‌معناست.

در روش دوم به طور کامل از رساندن اعداد منفی به توان اعداد کسری و گویا صرف نظر می‌شود. یعنی هر عبارتی مانند a^t که در آن t عددی کسری یا گویا باشد و $a < ۰$ را تعریف نشده می‌خوانند. البته این روش نیز مشکل بزرگ‌تری را به‌دنبال دارد. زیرا در این صورت، عبارتی مانند $(-۱)^۳$ که در توان با نمای صحیح و توان با نمای طبیعی با معنا شمرده می‌شدند، تعریف نشده در نظر گرفته می‌شوند؛ چون ۳ علاوه‌بر اینکه عددی طبیعی یا صحیح است، عدد کسری و گویا نیز می‌باشد. در پاسخ به این سؤال نیز دو جواب و دیدگاه وجود دارد. اول اینکه توان به نمای طبیعی و توان به نمای صحیح، با توان به نمای کسری یا گویا، مفاهیمی کاملا متفاوت هستند و بامعنا بودن یا نبودن آن به این بستگی دارد که از کدام تعریف استفاده می‌کنیم. از طرفی هم فرگه از ریاضیدانان واقع‌گرا ادعا کرد اعداد گویا شامل اعداد صحیح نیستند. در واقع بستگی دارد که ۳ در عبارت $(-۱)^۳$ را عددی صحیح درنظر بگیریم یا عددی گویا. یعنی اگر ۳ را عددی صحیح درنظر بگیریم، $(-۱)^۳$ بامعناست و داریم $(-۱)^۳ = -۱$ ولی اگر ۳ را عددی گویا درنظر بگیریم، $(-۱)^۳$ بی‌معنا خواهد بود.

قرارداد: به‌هر حال در این کتاب، وقتی از توان با نمای کسری یا گویا سخن می‌گوییم، پایهٔ توان را به اعداد نامنفی محدود کرده و از پرداختن به موارد مشکل‌ساز صرف‌نظر می‌کنیم.

تمرین:

(۱۹) معادلات زیر را حل کنید.

آ. $x^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ب. $۲^x = \frac{\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۴]{۸}}$ ج. $۹^x = \frac{\sqrt{۲۷}}{\sqrt[۴]{۳}}$

د. $۸^x = \frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۵]{۱۶}}$ هـ. $۳^{۳x-۴} = \frac{۱}{\sqrt{۲\sqrt{۲}}}$ و. $x^{\frac{-۳}{۴}} = \sqrt{\frac{۳}{\sqrt[۳]{۹}}}$

(۲۰) نامعادلات زیر را حل کنید.

آ. $۲^x < \frac{۱}{\sqrt[۳]{۲۵}}$ ب. $۱۶^x < \frac{\sqrt[۵]{۴}}{۲۷}$ ج. $۲^x\sqrt{۶} < ۳^{-x}$

(۲۱) نشان دهید $۱ < \frac{\sqrt[۲]{۳}}{\sqrt[۳]{۵}} < \sqrt[۱۱]{\frac{۷}{۶}}$.

(۲۲) نشان دهید برای هر دو عدد گویای مثبت مانند a و b معادلهٔ $b^x = a$ جوابی منحصربه‌فرد دارد اگر $b \neq ۰$ و $b \neq ۱$.

۵.۵ لگاریتم

پیش از این با تعاریف تفریق، تقسیم و ریشهٔ n اُم، به‌عنوان جواب منحصربه‌فرد معادلاتی خاص آشنا شدیم. به‌طور مشابه، لگاریتم را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۵: جواب منحصربه‌فرد معادلهٔ $b^x = a$ را لگاریتم a در پایهٔ b خوانده و به صورت $\log_b a$ نمایش می‌دهیم.

بنابراین، $x = \log_b a$ اگر و تنها اگر $b^x = a$. به‌طور مثال $\log_۲ ۳۲ = ۵$، چون $۳۲ = ۲^۵$. به‌طور مشابه $\log_۲ \frac{۱}{۲} = -۱$ چون $\frac{۱}{۲} = ۲^{-۱}$.

مثال ۱۲.۵: مقادیر زیر را محاسبه کنید.

آ. $\log_{۲} ۱$	ب. $\log_{۲} ۲$	ج. $\log_{۲} ۴$	د. $\log_{۲} ۸$
ه. $\log_{۲} \frac{۱}{۴}$	و. $\log_{۲} \frac{۱}{۸}$	ز. $\log_{۳} ۱$	ح. $\log_{۴} ۱$
ط. $\log_{۱۳۷} ۱$	ی. $\log_{۵} ۵$	ک. $\log_{۲۳۷} ۲۳۷$	ل. $\log_{۳} \frac{۱}{۳}$
م. $\log_{۱۰} ۱۰۰۰$	ن. $\log_{۱۰} \frac{۱}{۱۰۰۰}$	س. $\log_{\frac{۱}{۲}} ۲$	ع. $\log_{۴} ۲$
ف. $\log_{\frac{۱}{۲}} ۲$	ص. $\log_{\frac{۱}{۸}} ۲$	ق. $\log_{۸} \frac{۱}{۲}$	ر. $\log_{\frac{۲}{۳}} \frac{۹}{۴}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

با دقت بخوانید...

توجه داریم که لگاریتم نیز مانند رادیکال و ریشهٔ n اُم، محدودیت‌های زیادی دارد. به‌طور مثال، $\log_{۱} ۲$ بی‌معنا است. زیرا برای هر عدد گویا مانند t داریم $۱^t = ۱$، بنابراین معادلهٔ $۱^x = ۲$ جواب ندارد. در نتیجه $\log_{۱} ۲$ بی‌معناست.

نکاتی ظریف ...
صورت مثال مهم است و پاسخ دادن به آن، به درک بهتر و ماندگاری آن در ذهن کمک می‌کند.

مثال ۱۳.۵: نشان دهید برای هر عدد گویای مثبت مانند a داریم:

آ. $\log_{۱} a$ بی‌معناست. ب. $\log_{۰} a$ بی‌معناست. ج. $\log_{a} ۰$ بی‌معناست.
د. $\log_{-۲} -a$ بی‌معناست. ه. $\log_{-۲} a$ بی‌معناست. و. $\log_{۲} -a$ بی‌معناست.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

با توجه به تعریف، عبارت $\log_b a$ فقط زمانی بامعناست که عدد خاصی را مشخص کند و مثال فوق نشان می‌دهد که $\log_b a$ فقط زمانی بامعناست که a و b اعدادی مثبت باشند و $b \neq ۱$.

قضیه ۹.۵: نشان دهید برای هر دو عدد گویای مثبت مانند a و b که $b \neq ۱$ داریم:

آ. $\log_b b = ۱$ ب. $\log_b ۱ = ۰$ ج. $\log_b b^a = a$ د. $b^{\log_b a} = a$

اثبات: آ. $b^{۱} = b \Longrightarrow \log_b b = ۱$ ب. $b^{۰} = ۱ \Longrightarrow \log_b ۱ = ۰$

ج. $x = \log_b b^a \Longrightarrow b^x = b^a \Longrightarrow x = a$

د. $x = \log_b a \Longrightarrow b^x = a \xRightarrow{x=\log_b a} b^{\log_b b^a} = a$ ■

قضیه ۱۰.۵: در صورتی که همه عبارت‌ها بامعنا باشند، داریم:

آ. $\log_c a^b = b\log_c a$ ب. $\log_{c^d} a = \frac{۱}{d}\log_c a$ ج. $\log_c a + \log_c b = \log_c ab$

د. $\log_c b \log_b a = \log_c a$ ه. $\dfrac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$ و. $\log_c a = \dfrac{۱}{\log_a c}$

اثبات: در اثبات این موارد از قضیهٔ قبل مورد (د) و اینکه $a^x = a^y \overset{a>۰}{\Longleftrightarrow} x = y$ استفاده می‌کنیم.

آ. $c^{\log_c a^b} = a^b = \left(a^{\log_c a}\right)^b = a^{b\log_c a}$ بنابراین، $c^{\log_c a^b} = c^{b\log_c a}$ و درنتیجه $\log_c a^b = b\log_c a$.

ب. $c^{\log_c a} = a = \left(c^d\right)^{\log_{c^d} a} = c^{d\log_{c^d} a} \Longrightarrow \log_c a = d\log_{c^d} a \Longleftarrow \frac{۱}{d}\log_c a = \log_{c^d} a$

ج. $c^{\log_c a + \log_c b} = \left(c^{\log_c a}\right) \times \left(c^{\log_c b}\right) = ab = c^{\log_c ab} \Longrightarrow \log_c a + \log_c b = \log_c ab$

د. $c^{\log_c b \log_b a} = \left(\log_c b\right)^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a = c^{\log_c a} \Longrightarrow \log_c b \log_b a = \log_c a$

ه. با توجه به مورد قبل واضح است.

و. بنا به مورد قبل داریم $\log_c a = \dfrac{\log_a a}{\log_a c} = \dfrac{۱}{\log_a c}$ ■

حتماً پاسخ دهید
پاسخ دادن به این مثال، به درک بهتر قضایای قبلی و ماندگاری آنها در ذهن کمک می‌کند.

مثال ۱۴.۵: مقادیر زیر را برحسب $\log_۲ ۳ = ۱/۵۸$ و $\log_۳ ۵ = ۱/۴۶$ به‌دست آورید.

آ. $\log_۲ ۹$ ب. $\log_۳ ۲۵$ ج. $\log_۲ \sqrt{۳}$ د. $\log_۳ \sqrt[۳]{۲۵}$

هـ. $\log_۹ ۵$ و. $\log_{۱۶} ۳$ ز. $\log_۸ ۹$ ح. $\log_{\sqrt{۲}} ۳$

ط. $\log_۳ ۲$ ی. $\log_۵ ۳$ ک. $\log_۵ ۲$ ل. $\log_۲ ۵$

م. $\log_۵ ۶$ ن. $\log_۲ ۶$ س. $\log_۳ ۱۰$ ع. $\log_۳ ۱۵$

ف. $\log_{۱۰} ۱۵$ ص. $\log_{۱۵} ۱۰$ ق. $\log_{\sqrt[۳]{۱۵}} \sqrt[۴]{۲۴}$ ر. $\log_{\sqrt[۶]{۲۴}} \sqrt[۳]{۱۵^۴}$

پاسخ: تمامی موارد با استفاده از قضیهٔ قبل و ایده گرفتن از موارد پیشین، با کمی تلاش قابل حل هستند. ■

قضیه ۱۱.۵: در صورتی که همهٔ عبارت‌ها بامعنا باشند داریم:

آ. $\log_c a = \log_c b \Longleftrightarrow a = b$ ب. $\log_c a = \log_b a \overset{a\neq ۱}{\Longleftrightarrow} b = c$

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۱۵.۵: معادلات زیر را حل کنید.

آ. $\log_۳ x = \log_۳ ۵$ ب. $۲\log_۷ x = \log_۷ ۲۵$ ج. $\log_۳ \frac{۱}{x+۱} = \log_{۱/۳} ۵$

پاسخ: آ. $\log_۳ x = \log_۳ ۵ \Longrightarrow x = ۵$

ب. $۲\log_۷ x = \log_۷ x^۲$ و $\log_۷ ۲۵ = \log_۷ ۵^۲$، بنابراین داریم:

$$۲\log_۷ x = \log_۷ ۲۵ \Longrightarrow \log_۷ x^۲ = \log_۷ ۵^۲ \Longrightarrow x^۲ = ۵^۲ \Longrightarrow x = \pm ۵$$

ج. $\log_{۱/۳} ۵ = \log_{۳^{-۱}} ۵ = \frac{۱}{-۱}\log_۳ ۵$ و $\log_۳ \frac{۱}{x+۱} = \log_۳ (x+۱)^{-۱} = (-۱)\log_۳ x + ۱$ بنابراین داریم:

$$\log_{۱/۳} ۵ = \log_۳\left(\frac{۱}{x+۱}\right) \Longrightarrow -\log_۳ ۵ = -\log_۳(x+۱) \Longrightarrow x+۱ = ۵ \Longrightarrow x = ۴$$ ■

مثال ۱۶.۵: داریم $\log_۳ ۷ = ۱/۷۷$ و $\log_۵ ۷ = ۱/۲۱$. مقادیر زیر را به‌دست آورید.

آ. $\log_۷ ۳$ ب. $\log_۷ ۵$ ج. $\log_۷ ۱۵$ د. $\log_۷ ۴۵$

هـ. $\log_۷ ۷۵$ و. $\log_۵ ۳$ ز. $\log_{۲۱} ۵$ ح. $\log_۳ \sqrt{۱۵}$

پاسخ: آ. $\log_۷ ۳ = \frac{۱}{\log_۷ ۳}$ د. $\log_۷ ۱۵ = \log_۷ ۵ + \log_۷ ۳$ و. $\log_۵ ۳ = \log_۵ ۷ \times \log_۷ ۳$ ■

مثال ۱۷.۵: شخصی معادلهٔ $\log_۵(۲x+۱) = \log_۵(۳x+۳)$ را به صورت زیر حل می‌کند.

$$\log_۵(۲x+۱) = \log_۵(۳x+۳) \Longrightarrow ۲x+۱ = ۳x+۳ \Longrightarrow x = -۲$$

آیا نتیجه‌گیری این شخص درست است؟

پاسخ: نادرست است؛ چون با قرار دادن $x = -۲$ در معادله داریم
$\log_۵(۲(-۲)+۱) = \log_۵(-۳)$ و $\log_۳(۳(-۲)+۳) = \log_۵(-۳)$
که هر دو بی‌معنا هستند؛ چون $۰ \not> ۳$. در واقع نتیجه‌گیری فوق بیان می‌کند: «اگر برای عددی مانند x تساوی درست باشد، آن عدد برابر است با (-۲)» اما به‌هیچ وجه نمی‌توان از آن نتیجه گرفت که اگر $x = -۲$ آن‌گاه معادله مذکور برقرار است. لذا باید حتما به معنادار بودن عبارات و درستی تساوی‌ها برای جواب معادله توجه کرد. ■

تمرین:

(۲۳) مقادیر زیر را به‌دست آورید.

آ. $\log_{۲} ۶۴$ ب. $\log_{۲} \sqrt[۳]{۱۶}$ ج. $\log_{۴} ۸$

د. $\log_{۸۱} ۲۷$ ه. $\log_{۲۷} ۲۴۳$ و. $log_{\sqrt[۳]{۸۱}} \sqrt[۵]{۲۷}$

ز. $\log_{۲۵} ۱۲۵$ ح. $\log_{\sqrt{۱۲۵}} ۲۵$ ط. $\log_{\sqrt[۴]{۱۲۵}} \sqrt[۳]{۶۲۵}$

(۲۴) معادلات زیر را حل کنید.

آ. $\log_{۲} x = \frac{۳}{۵}$ ب. $\log_{۴} \sqrt[۳]{x^{۵}} = ۱$ ج. $\log_{۱۶} \sqrt[۴]{x^{۳}} = ۰$

د. $\log_{x} ۲ = ۳$ ه. $\log_{x} ۱۶ = \frac{۲}{۳}$ و. $\log_{\sqrt[۳]{x^{۲}}} \sqrt[۵]{۶۴} = \frac{۱}{۳}$

(۲۵) نشان دهید:

به تغییر جهت نامساوی‌ها دقت کنید.

آ. برای $c > ۱$ داریم: $۰ < a < b$ اگر و تنها اگر $\log_c a < \log_c b$

ب. برای $۰ < c < ۱$ داریم: $۰ < a < b$ اگر و تنها اگر $\log_c a > \log_c b$

(۲۶) نامعادلات زیر را حل کنید.

آ. $\log_{۲} x < ۰$ ب. $\log_{۳} x \geq -۱$ ج. $\log_{۹} x \leq ۲$

د. $\log_{\frac{۱}{۲}} x > ۱$ ه. $\log_{\frac{۱}{۲}} x < ۲$ و. $\log_{\sqrt[۳]{۲}} x < ۳$

ز. $\log_{۲} \frac{۱}{x} > ۳$ ح. $\log_{۴} \frac{۱}{x^{۳}} > \frac{۱}{۲}$ ط. $\log_{۳} \sqrt[۲]{\frac{۱}{x}} \geq \frac{۲}{۳}$

فصل ۶

اعشار و اعداد حقیقی

اعداد حقیقی یکی از انتزاعی‌ترین مفاهیمی است که انسان ساخته است. اما این مفهوم کاملا انتزاعی، به‌دنبال روش اعشاری در عددنویسی آمده است. روش اعشاری در ادامهٔ عدد نویسی هندی آمده و آن نیز در طول تاریخی طولانی از اولین تلاش‌های بشر برای شمارش و عدد نویسی ایجاد شده است. البته باید توجه داشت که مفهوم اعداد حقیقی که امروزه درک می‌شود و شامل اعداد گویا و گنگ می‌باشد، بدون داشتن مفهوم کسر غیر قابل درک بوده است.

اعداد اعشاری در ادامه کار با روش عدد نویسی هندی – عربی به‌وجود آمده است که در فصل دوم با آن آشنا شدیم. در این فصل، پس از آشنایی با عدد نویسی اعشاری، قضیهٔ فیثاغورث را بیان کرده و نشان خواهیم داد که چگونه این قضیهٔ ساده با درک گنگ بودن $\sqrt{۲}$، دنیای یونان باستان را در قرن ششم پیش از میلاد دگرگون ساخت و یونان را به سمت فلسفه پیش برد تا نزدیک به دو و نیم قرن بعد، در قرن چهارم پیش از میلاد مسیح، ائودوکسوس با تعریفی کاملا انتزاعی از نسبت طول دو پاره‌خط، راه را برای ساختن اعداد حقیقی در قرن هفدهم میلادی باز کرد. این داستان هیجان انگیز را به‌طور تکنیکی‌تر و دقیق‌تر در کتاب‌های تاریخ ریاضی دنبال کنید.

۱.۶ نمایش اعشار متناهی

پیش از پرداختن به این مطالب، لازم می‌دانیم نمادگذاری جدیدی را معرفی کنیم. پیش از این گفتیم که همه اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}$ نمایش می‌دهیم. از این پس بجای اینکه بگوییم a یک عدد طبیعی است، می‌گوییم a عضو مجموعه اعداد طبیعی است و می‌نویسیم $a \in \mathbb{N}$. البته این نماد را در فصل مجموعه‌ها به تفصیل توضیح خواهیم داد.

مبتدی – ضروری
یکبار خواندن این مطالب به همه پیشنهاد می‌شود.

هر عدد طبیعی در دستگاه عددنویسی هندی دارای نمایشی منحصربه‌فرد است که مقایسه، جمع، ضرب، تفریق و تقسیم آنها را ساده می‌کند. می‌توان با نمایش هر عدد گویا به‌وسیلهٔ کسری تحویل‌ناپذیر، به هر عدد گویا، نمایشی منحصربه‌فرد اختصاص داد. اما این روش نیز برای انجام محاسبات و مقایسه اعداد گویا، چندان مناسب به‌نظر نمی‌رسد؛ چون برای هر یک از آنها، به چندین محاسبه و مقایسه در اعداد طبیعی نیاز داریم.

راهکار دیگر، توسعه دستگاه عدد نویسی هندی است. در عدد نویسی هندی، هر رقم، بنا به مکانی که قرار گرفته، ضریبی از ۱۰^n است که در آن $n \in \mathbb{N}$ به مکان رقم اشاره دارد. یعنی

$$\overline{a_n \dots a_۱ a_۰} = a_۰ ۱۰^۰ + a_۱ ۱۰^۱ + a_۲ ۱۰^۲ + \dots + a_n ۱۰^n$$

می‌توانیم با استفاده از توان‌های ۱۰ با نمای منفی، اعدادی به‌شکل زیر تولید کنیم:

$$x = a_n ۱۰^n + \ldots + a_۱ ۱۰ + a_۰ ۱۰^۰ + b_۱ ۱۰^{-۱} + b_۲ ۱۰^{-۲} + \ldots + b_m ۱۰^{-m}$$

بابلیان باستان که در هزارهٔ دوم پیش از میلاد مسیح از عدد نویسی موضعی (مکانی) در مبنای ۶۰ استفاده می‌کردند، چیزی شبیه به اعشار امروزی داشتند. کلمات «دقیقه» به‌معنای $۶۰^{-۱}$ و «ثانیه» به‌معنای $۶۰^{-۲}$ یادگار ایشان است که امروزه نیز به‌کار می‌رود.

بابلیان، که اعداد کوچک‌تر از ۶۰ را مانند مصریان به روش گروه‌بندی ساده می‌نوشتند، $\sqrt{۲}$ را با دقت خوبی حساب کرده بودند و به‌صورت نمایش می‌دادند. که به‌معنای

$$۱ + ۲۴(۶۰^{-۱}) + ۵۰(۶۰^{-۲}) + ۱۰(۶۰^{-۳})$$

است و با مقداری واقعیِ $\sqrt{۲}$ اختلافی کمتر از ۸×۱۰^{-۶} دارد.

بابلیان از نگارشی شبیه به برای نمایش $۲ + ۳(۶۰^{-۱})$ استفاده می‌کردند که برای نمایش $۲(۶۰^{-۱}) = ۳(۶۰^{-۲})$ و $۲(۶۰^{-۲}) + ۳(۶-^{-۳})$ نیز به‌کار می‌رفت.

به‌طور مشابه، اگر ما نیز از نگارش $x = \overline{a_n \ldots a_۱ a_۰ b_۱ b_۲ \ldots b_m}$ استفاده کنیم، با مشکل مواجه می‌شویم. به نگارش دو عدد زیر توجه کنید:

$$x = ۲ \times ۱۰ + ۳ + ۴ \times ۱۰^{-۱} + ۵ \times ۱۰^{-۲} = ۲۳ + \frac{۴}{۱۰} + \frac{۵}{۱۰۰} = ۲۳۴۵$$
$$y = ۲ \times ۱۰^{-۱} + ۳ \times ۱۰^{-۲} + ۴ \times ۱۰^{-۳} + ۵ \times ۱۰^{-۴} = \frac{۲}{۱۰} + \frac{۳}{۱۰۰} + \frac{۴}{۱۰۰۰} + \frac{۵}{۱۰۰۰۰} = ۲۳۴۵$$

در نگارش فوق، هر دو عدد x و y دارای یک نمایش هستند؛ زیرا فقط می‌دانیم این اعداد ضرایب توان‌هایی از ۱۰ هستند که به‌صورت متوالی آمده‌اند. یک راهکار این است که توان ۱۰ مربوط به اولین رقم سمت چپ را مشخص کنیم. به‌طور مثال می‌توانیم x و y را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$x = ۲۳۴۵e۱ \quad \text{و} \quad y = ۲۳۴۵e-۱$$

در نگارش فوق $e-۱$ نشان می‌دهد که اولین رقمِ سمتِ چپ (یعنی ۲) ضریب $۱۰^{-۱}$ است و $e۱$ یعنی اولین رقمِ سمتِ چپ (یعنی ۲) ضریبِ $۱۰^۱$ را نشان می‌دهد. اما در این روش نیز برای نگارش یک عدد، از دو عدد طبیعی استفاده می‌شود. بنابراین راهی دیگر را جستجو می‌کنیم.

می‌توانیم به نحوی مشخص کنیم که کدام رقم، ضریبی از $۱۰^۰$ است. به‌طور مثال می‌توانیم با گذاشتن یک علامت «$\hat{}$» روی آن رقم، آن را مشخص کنیم. در این‌صورت $x = ۲۳\hat{۴}۵۶$ به‌معنای $x = ۲ \times ۱۰^۲ + ۳ \times ۱۰^۱ + ۴ \times ۱۰^۰ + ۵ \times ۱۰^{-۱} + ۶ \times ۱۰^{-۲}$ است. امروزه، در تمام دنیا بین ضرایب $۱۰^۰$ و $۱۰^{-۱}$ علامتی مانند «/» را به‌عنوان جدا کنندهٔ توان‌های مثبت از توان‌های منفی گذاشته و آن را ممیز (جداکننده) می‌خوانند. بنابراین، می‌نویسیم $x = ۲۳۴/۵۶$. نمایش اعشاری برای اولین بار در قرن شانزدهم توسط پاچیولی به‌کار رفت. وی از نقطه به‌عنوان ممیز استفاده کرده و بدین ترتیب عددنویسی هندی را به اعداد گویا توسعه داد.

$\boldsymbol{x = a_n \ldots a_۱ a_۰ / b_۱ \ldots b_m}$ را نمایش اعشاریِ $\boldsymbol{x}$ گوییم که در آن:

$$\boldsymbol{x = a_n ۱۰^n + \ldots + a_۱ ۱۰ + a_۰ + b_۱ ۱۰^{-۱} + \ldots + b_m ۱۰^{-m}}$$

این روش صرفاً برای نمایش اعداد گویای مثبت قابل استفاده است. لذا برای نمایش اعداد گویای

منفی، از یک علامت منفی در کنار آن عدد استفاده می‌کنیم. به‌طور مثال $۰/۲ = \frac{۲}{۱۰}$ بنابراین $-\frac{۲}{۱۰}$ را به‌صورت $-۰/۲$ نمایش می‌دهیم.

نمایش اعشاری $a_n\ldots a_۱a_۰/b_۱b_۲\ldots b_m$ را یک نمایش اعشاری با m رقم اعشار گوییم اگر $b_m \neq ۰$. به طور مثال $۰/۲۳۰۰۰۰$ را عددی اعشاری با دو رقم اعشار در نظر می‌گیریم؛ زیرا $۰/۲۳ = ۰/۲۳۰۰۰۰$ و به‌عبارتی آخرین رقم اعشاریِ ناصفرِ آن، دومین رقمِ آن است. بنابراین، $۱/۰۰$ را عددی با صفر رقم اعشار درنظر می‌گیریم.

در نگارش فوق $a_۰$ نوشته می‌شود، حتی اگر مقدار آن صفر باشد. به طور مثال عدد ۲×۱۰^{-۲} را به‌صورت $۰/۰۲$ نمایش می‌دهیم که به‌معنای $۰ + ۰ \times ۱۰^{-۱} + ۲ \times ۱۰^{-۲}$ است.

بنابراین برای کسر $\frac{۱۲}{۱۰}$ داریم $۱/۲ = ۱ + \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱۰ + ۲}{۱۰}$ پس $۱/۲ = \frac{۱۲}{۱۰}$. همچنین برای نوشتن $x = ۱/۳$ به‌صورت کسری، گوییم $۱/۳ = ۱ + \frac{۳}{۱۰} = \frac{۱۳}{۱۰}$.

قضیه ۱.۶: برای هر عدد گویایی مانند x با نمایش اعشاری $a_n\ldots a_۱a_۰/b_۱\ldots b_m$ داریم:

آ. $$x = \frac{\left(\overline{a_na_{n-۱}\ldots a_۱a_۰b_۱\ldots b_m}\right)}{۱۰^m}$$

ب. $$x = a_n/a_{n-۱}\ldots a_۱a_۰b_۱b_۲\ldots b_m \times ۱۰^n$$

اثبات: آ. روی m استقرا می‌بندیم. برای $m = ۱$ داریم: مبتدی - ضروری

$$\begin{aligned} a_n\ldots a_۰/b_۱ &= a_n۱۰^n + \ldots + a_۰ + b_۱۱۰^{-۱} \\ &= \frac{۱۰\left(a_n۱۰^n + \ldots + a_۰ + b_۱۱۰^{-۱}\right)}{۱۰} \\ &= \frac{a_n۱۰^{n+۱} + \ldots a_۰۱۰ + b_۱}{۱۰} = \frac{\left(\overline{a_n\ldots a_۰b_۱}\right)}{۱۰} \end{aligned}$$

کافی است نشان دهیم اگر $a_n\ldots a_۰/b_۱\ldots b_k = \frac{\overline{a_n\ldots a_۰b_۱\ldots b_k}}{۱۰^k}$ آنگاه

$$a_n\ldots a_۰/b_۱\ldots b_kb_{k+۱} = \frac{\overline{a_n\ldots a_۰b_۱\ldots b_kb_{k+۱}}}{۱۰^{k+۱}}$$

و می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} a_n\ldots a_۰/b_۱\ldots b_kb_{k+۱} &= a_n\ldots a_۰/b_۱\ldots b_k + b_{k+۱}۱۰^{-(k+۱)} \\ &= \frac{\left(\overline{a_n\ldots a_۰b_۱\ldots b_k}\right)}{۱۰^k} + b_{k+۱}۱۰^{-(k+۱)} \\ &= \frac{۱۰\left(\overline{a_n\ldots a_۰b_۱\ldots b_k}\right) + b_{k+۱}}{۱۰^{k+۱}} \\ &= \frac{\left(\overline{a_n\ldots a_۰b_۱\ldots b_kb_{k+۱}}\right)}{۱۰^{k+۱}} \end{aligned}$$

بنابراین برای هر عدد اعشاری مانند x، اعدادی طبیعی مانند k و N وجود دارند که $x = \frac{\mathrm{N}}{۱۰^k}$.

ب. به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. (راهنمایی: از مورد قبل استفاده کنید.) ■

مورد (ب) از قضیه فوق، ایده نگارشی موسوم به نگارش علمی را به همراه دارد.

گزاره ۱.۶: نمایش $x = a_۰/a_۱a_۲\dots a_n \times ۱۰^k$ که در آن k عددی صحیح است و $a_۰ \neq ۰$ را نمایش علمیِ x می‌خوانیم.

مثال ۱.۶: نمایش‌های اعشاری زیر را با نگارش علمی بازنویسی کنید.

آ. $۳۲/۴۷$ ب. ۲۵۰۰۰۰۰۰ ج. $۰/۰۰۰۰۳۴$ د. $۴/۵$

پاسخ: آ. $۳/۲۴ \times ۱۰^۱$ ب. $۲/۵ \times ۱۰^۷$ ج. $۳/۴ \times ۱۰^{-۵}$ د. $۴/۵ \times ۱۰^۰$ ■

مثال ۲.۶: نمایش‌های علمی زیر را به‌صورت اعشاری بازنویسی کنید.

آ. $۳/۲۴ \times ۱۰^{۲۳}$ ب. $۳/۴۷ \times ۱۰^{-۱۷}$ ج. $۷/۰۰۵ \times ۱۰^{۹۸}$ د. $۹/۲۱ \times ۱۰^{-۱۰۵}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

نتیجه ۱: هر نمایش اعشاری (با ارقام اعشاری متناهی) عددی گویا را نمایش می دهد.

۱.۱.۶ مقایسه و محاسبات اعشار متناهی

قضیه (۱.۶) امکان مقایسه و محاسبات اصلی را با استفاده از ترتیب و محاسبات اعداد طبیعی ایجاد می‌کند که در ادامه به آن می‌پردازیم.

مقایسه اعداد اعشاری

مورد (آ) از قضیه (۱.۶) امکان مقایسه دو عدد، براساس نمایش‌های اعشاری آنها را فراهم می‌کند. به‌طور مثال برای محاسبهٔ ۲/۳۴ و ۳/۴۲ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۳/۴۲ = \dfrac{۳۴۲}{۱۰۰} \\ ۲/۳۴ = \dfrac{۲۳۴}{۱۰۰} \end{array}\right\} \xRightarrow{۳۴۲>۲۳۴} ۳/۴۲ > ۲/۳۴$$

برای به دست آوردن روشی برای مقایسه هر دو عدد گویا براساس نمایش اعشاری آنها به مثال زیر توجه می‌کنیم.

با دقت بخوانید... صورت مثال از حل آن مهم‌تر است.

مثال ۳.۶: نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

آ. $۰ \leqslant \overline{b_۱b_۲\dots b_n} \leqslant ۱۰^n - ۱$ ب. $۰ \leqslant ۰/b_۱b_۲\dots b_n \leqslant ۱ - ۱۰^{-n}$

ج. $۰/۰b_۱b_۲\dots b_n < \dfrac{۱}{۱۰}$ د. $۰ \leqslant ۰/۰b_۲b_۳\dots b_n \leqslant \dfrac{۱-۱۰^{-n}}{۱۰}$

ه. $۰ \leqslant ۰.\overbrace{۰۰\dots۰}^{m\ \text{بار}}b_{m+۱}\dots b_n \leqslant \dfrac{۱-۱۰^{-n}}{۱۰^m} < \dfrac{۱}{۱۰^m}$

و. اگر $b_۱ < c_۱$ آن‌گاه $۰/b_۱b_۲\dots b_n < ۰/c_۱c_۲\dots c_m$

ز. اگر $b_۱ = c_۱$ و $b_۲ < c_۲$ آن‌گاه $۰/b_۱b_۲\dots b_n < ۰/c_۱c_۲\dots c_m$

ح. اگر برای هر i که $۱ \leqslant i < k$ داشته باشیم $b_i = c_i$ و $b_k < c_k$ آن‌گاه

$۰/b_۱b_۲\dots b_k\dots b_n < ۰/c_۱c_۲\dots c_k\dots c_m$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

قرارداد: برای هر نمایش اعشاری مانند $x = a_n \dots a_1 a_0/b_1 b_2 \dots b_m$ قرار می‌دهیم
$x_i = a_n \dots a_1 a_0/b_1 b_2 \dots b_i$
به‌طور مثال برای $x = ۱۲/۳۴۵۶۷۸$ داریم $x_0 = ۱۲$، $x_1 = ۱۲/۳$ و $x_5 = ۱۲/۳۴۵۶۷$.

قراردادی مهم:
این قرارداد در این بخش کاربر زیادی دارد.
آن را به‌خاطر بسپارید.

نتیجه ۲: برای هر نمایش اعشاری مانند $x = a_n \dots a_1 a_0/b_1 b_2 \dots b_m$ داریم
$$x_i \le x < x_i + ۱۰^{-n}$$
که در آن $۱ \le i \le m$ و $x_i = a_n \dots a_1 a_0/b_1 \dots b_i$.

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

جمع و تفریق اعداد اعشاری

مورد (ب) از قضیه (۱.۶) انجام محاسبات براساس نگارش اعشاری را نیز میسر می‌سازد. به‌طور مثال برای $۰/۸۷۱ + ۶۵/۵$ داریم:

$$۰/۸۷۱ + ۶۵/۵ = \frac{۸۷۱}{۱۰۰۰} + \frac{۶۵۵}{۱۰} = \frac{۸۷۱}{۱۰۰۰} + \frac{۶۵۵۰۰}{۱۰۰۰} = \frac{۶۶۳۷۱}{۱۰۰۰} = ۶۶ + \frac{۳۷۱}{۱۰۰۰} = ۶۶/۳۷۱$$

بنابراین، می‌توان با نوشتن ۶۵/۵ به‌صورتِ ۶۵/۵۰۰ تعداد ارقام اعشاری را در نمایش‌های ۰/۸۷۱ و ۶۵/۵۰۰ برابر کرد. حال می‌توانیم بدون درنظر گرفتن ممیزها، ۸۷۱+ ۶۵۵۰۰ را به‌عنوان حاصل‌جمع دو عدد طبیعی محاسبه نموده و سپس ممیز را چنان قرار دهیم که حاصل‌جمع دارای ۳ رقم اعشار باشد. این روش را در دوران دبستان به‌صورت مجاور اجرا می‌کردیم. برای محاسبه حاصل‌تفریق دو عدد اعشاری نیز می‌توان از همین ایده استفاده کرد.

$$\begin{array}{r} ۰/۸۷۱ \\ ۶۵/۵۰۰ \\ \hline ۶۶/۳۷۱ \end{array}$$

ضرب و تقسیم اعداد اعشاری

برای محاسبه $۱/۴۵۳ \times ۰/۷۸$ داریم:

$$۰/۷۸ \times ۱/۴۵۳ = (۷۸)۱۰^{-۲} \times (۱۴۵۳)۱۰^{-۳} = (۷۸ \times ۱۴۵۳)۱۰^{(-۲)+(-۳)} = (۷۸ \times ۱۴۵۳)۱۰^{-۵}$$

بنابراین کافی است حاصل ۱۴۵۳×۷۸ را به‌عنوان حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی محاسبه کرده و ۵ رقم اعشار برای حاصل درنظر بگیریم. با این روش در دبستان آشنا شده بودیم.

برای محاسبه حاصل $۰/۲ \div ۰/۸$ داریم:

$$۰/۸ \div ۰/۲ = \frac{۸}{۱۰} \div \frac{۲}{۱۰} = \frac{۸}{۱۰} \times \frac{۱۰}{۲} = \frac{۸}{۲} \times \frac{۱۰}{۱۰} = ۴$$

به‌طور مشابه، برای محاسبهٔ $۰/۲ \div ۰/۰۸$ داریم:

$$۰/۰۸ \div ۰/۲ = \frac{۸}{۱۰۰} \div \frac{۲}{۱۰} = \frac{۸}{۱۰۰} \times \frac{۱۰}{۲} = \frac{۸}{۲} \times \frac{۱۰}{۱۰۰} = ۴ \times \frac{۱}{۱۰} = ۰/۴$$

این روش ایده محاسبه $۵ \div ۳$ را نیز فراهم می‌آورد.

$$۳ \div ۵ = ۳ \times \frac{۱}{۵} = \frac{۳۰}{۱۰} \times \frac{۱}{۵} = \frac{۳۰}{۵} \times \frac{۱}{۱۰} = ۶ \times \frac{۱}{۱۰} = ۰٫۶$$

در مثال زیر همین روش را به‌نحوی دیگر بیان می‌کنیم تا بتوانیم آن را با الگوریتم تقسیم اعداد طبیعی ارتباط دهیم و از همان الگوریتم برای محاسبه نمایشِ اعشاری $۴ \div ۱۳$ استفاده کنیم.

مثال ۴.۶: نشان دهید:

آ. $۱۳ = ۳ \times ۴ + ۱$

ب. $۱ \times ۱۰ = ۲ \times ۴ + ۲$

ج. $۱ = ۰٫۲ \times ۴ + ۰٫۲$

د. $۰٫۲ \times ۱۰۰ = ۲۰ = ۵ \times ۴ + ۰$

ه. $۰٫۲ = ۰٫۰۵ \times ۴ + ۰$

و. $۱۳ = ۳٫۲۵ \times ۴ + ۰$

۱۳	۴
۱۲	۳
۱٫۰	۰٫۲
٫۸	
٫۲۰	۰٫۰۵
٫۲۰	
۰٫۰۰	۳٫۲۵

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

پیشرفته - اختیاری
از این مثال تا انتهای این بخش، به بیان دقیق الگوریتم تقسیم توسعه یافته پرداخته‌ایم که در مثال قبل بیان شد.

اگر وقت ندارید می‌توانید از این مطالب صرف نظر کنید.

مثال ۵.۶: فرض کنید برای $x, y, q, r \in \mathbb{N}$ داریم $x = qy + r$ که در آن $۰ \leqslant r < y$. نشان دهید اگر $q_۱, r_۱ \in \mathbb{N}$ چنان باشند که $۱۰r = q_۱ y + r_۱$ و $۰ \leq r_۱ < y$ آن‌گاه داریم:

آ. $r = \frac{q_۱}{۱۰} y + \frac{r_۱}{۱۰}$

ب. $x = \left(q + \frac{q_۱}{۱۰}\right) y + \frac{r_۱}{۱۰}$

ج. $۰ \leqslant q_۱ < ۱۰$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

فرض کنید $x = qy + r_۰$ که $۰ \leqslant r_۰ < y$. در این صورت به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم $۱۰r_{i-۱}$ بر y را r_i و q_i می‌نامیم. یا به‌عبارتی:

$$\begin{aligned} ۱۰r_۰ &= q_۱ y + r_۱ & ۰ &\leqslant r_۱ < y \\ ۱۰r_۱ &= q_۲ y + r_۲ & ۰ &\leqslant r_۲ < y \\ &\vdots \end{aligned}$$

این روش را «الگوریتم تقسیم توسعه یافته» می‌گوییم. به‌طور مثال برای $۲۴ \div ۲۸۵$ داریم $۲۸۵ = ۱۱ \times ۲۴ + ۲۱$. پس $q = ۱۱$ و $r_۰ = ۲۱$. درنتیجه:

$$\begin{aligned} ۱۰ \times ۲۱ &= ۸ \times ۲۴ + ۱۸ && \Longrightarrow q_۱ = ۸ \text{ و } r_۱ = ۱۸ \\ ۱۰ \times ۱۸ &= ۷ \times ۲۴ + ۱۲ && \Longrightarrow q_۲ = ۷ \text{ و } r_۲ = ۱۲ \\ ۱۰ \times ۱۲ &= ۵ \times ۲۴ + ۰ && \Longrightarrow q_۳ = ۵ \text{ و } r_۳ = ۰ \\ ۱۰ \times ۰ &= ۰ \times ۲۴ + ۰ && \Longrightarrow q_۴ = ۰ \text{ و } r_۴ = ۰ \\ ۱۰ \times ۰ &= ۰ \times ۲۴ + ۰ && \Longrightarrow q_۵ = ۰ \text{ و } r_۵ = ۰ \\ &\vdots && \quad \vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

مثال ۶.۶: نشان دهید در عبارت فوق داریم:

آ . اگر $i > ۳$ آن‌گاه $q_i = r_i = ۰$

ب . $۲۴ \times ۰٫۵ = ۱۲$

ج . $۲۴(۰٫۷ + ۰٫۰۵) = ۱۸$

د . $۲۴(۰٫۸ + ۰٫۰۷ + ۰٫۰۰۵) = ۲۱$

هـ . $۲۴ \times ۱۱٫۸۷۵ = ۲۸۵$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۷.۶: نشان دهید در الگوریتم تقسیم توسعه یافته، اگر $r_k = ۰$، به‌ازای هر $i > k$ داریم: $q_i = r_i = ۰$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۸.۶: نشان دهید برای هر $k, x, y \in \mathbb{N}$ با نمادگذاری الگوریتم تقسیم توسعه یافته داریم:

$$\begin{aligned} x &= \left(q + q_۱ ۱۰^{-۱} + q_۲ ۱۰^{-۲} + q_۳ ۱۰^{-۳} + \ldots q_k ۱۰^{-k}\right) y + r_k ۱۰^{-k} \\ &= \left(q + (۰٫q_۱ q_۲ q_۳ \ldots q_k)\right) y + r_k ۱۰^{-k} \end{aligned}$$

پاسخ: با استقرا روی k اثبات می‌شود. ■

از این روش می‌توان برای تعیین نگارش اعشاری اعداد کسری استفاده کرد. به‌طور مثال می‌توان برای یافتن نگارش اعشاریِ عددِ گویایِ $x = \frac{۱}{۴}$ از $x = ۱ \div ۴$ استفاده کرد. بنابراین:

$$\frac{۱}{۴} = \frac{۱۰۰}{۴} \times \frac{۱}{۱۰۰} = ۲۵ \times \frac{۱}{۱۰۰} = \frac{۲۵}{۱۰۰} = ۰٫۲۵$$

الگوریتم تقسیم توسعه یافته برای محاسبه نمایش اعشاری $\frac{۱}{۴}$ روشی نظام‌مند فراهم می‌آورد.

۱	۴
۰	۰
۱٫۰	
۰٫۸	۰٫۲
۰٫۲۰	
۰٫۲۰	۰٫۰۵
۰٫۰۰	۰٫۲۵

$$\begin{aligned} ۱ &= ۰ \times ۴ + ۱ & & \\ ۱۰ \times ۱ &= ۲ \times ۴ + ۲ & &\Longrightarrow ۱ = ۰٫۲ \times ۴ + ۰٫۲ \\ ۲ \times ۱۰ &= ۵ \times ۴ + ۰ & &\Longrightarrow ۱ = (۰٫۲ + ۰٫۰۵) \times ۴ + ۰ \end{aligned}$$

بنابراین، $\frac{۱}{۴} = ۱ \div ۴ = ۰٫۲۵$.

تمرین:

(۱) اعداد زیر را با هم مقایسه کنید.

آ . ۰٫۲ و ۰٫۲۰۰۰ ب . ۲۳٫۳۰۰ و ۲۳٫۳۰ ج . ۲۳۰٫۰ و ۲۳٫۰۰

د . ۰٫۴۷ و ۲٫۳ هـ . ۱۲٫۳۰۴ و ۱۲٫۳۱۰ و . ۲۳٫۰ و ۰٫۰۰۰۲۳

ز . (۲٫۳−) و (۳٫۲−) ح . (۲٫۳−) و ۱٫۴ ط . ۲٫۳ و (۱٫۴−)

(۲) نشان دهید:

آ . $۰ < ۰٫۲ < ۱ - ۱۰^{-۱}$ ب . $۱۰^{-۱} - ۱۰^{-۲} < ۰٫۰۳ < ۱۰^{-۱}$ ج . $۰٫۲۱ < ۰٫۲۳$

(۳) حاصلِ جمع‌های زیر را محاسبه کنید.

آ . $۰٫۲۳ + ۰٫۳۴$ ب . $۲۳ + ۰٫۴۵$ ج . $۲۳٫۲۴ + ۸۶٫۷۶$

د . $۰٫۰۲۳ + ۱٫۵$ هـ . $۲۴٫۲۶ + ۹۲٫۱۳$ و . $۱۳۲٫۳ + ۲٫۶۵۷$

(۴) نشان دهید اگر اعداد اعشاریِ x و y به ترتیب دارای m و n رقم اعشار باشند، آن‌گاه $x+y$ حداکثر $\max\{m,n\}$ رقم اعشار دارد که در آن $\max\{m,n\}$ به‌معنای بزرگ‌ترین عدد بین m و n است.

(۵) حاصلِ تفریق‌های زیر را محاسبه کنید.

آ. $۰/۷-۰/۵$ ب. $۰/۷۳-۰/۳$ ج. $۲/۳-۰/۷۴$

د. $۲۳/۴۵-۹/۳۴۵$ هـ. $۰/۰۳۴-۰/۰۰۰۰۵$ و. $۱۳-۰/۰۴$

(۶) حاصلِ جمع‌های زیر را محاسبه کنید.

آ. $(-۰/۳)+۰/۵$ ب. $۰/۳+(-۰/۵)$ ج. $(-۰/۳)+(-۰/۵)$

(۷) حاصلِ ضرب‌های زیر را محاسبه کنید.

آ. $۰/۳\times۴$ ب. $۰/۰۳\times۴$ ج. $۰/۳\times۰/۴$

د. $۰/۰۳\times۰/۰۰۴$ هـ. $۱/۳\times۲/۳$ و. $۰/۱۳\times۰/۰۲۳$

۲.۶ اعشار متناوب

می‌خواهیم عدد گویای $\frac{۱}{۳}$ را به صورت اعشاری نمایش دهیم. چون $\frac{۱}{۳}=۱\div۳$ می‌توانیم از الگوریتم تقسیم توسعه یافته، برای یافتن نمایش اعشاری آن استفاده کنیم. بنابراین $۱\div۳$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{array}{ll} ۱=۰\times۳+۱ & \Longrightarrow q_۰=۰ \text{ و } r_۰=۱ \\ ۱۰\times۱=۳\times۳+۱ & \Longrightarrow q_۱=۳ \text{ و } r_۱=۱ \\ ۱۰\times۱=۳\times۳+۱ & \Longrightarrow q_۲=۳ \text{ و } r_۲=۱ \\ ۱۰\times۱=۳\times۳+۱ & \Longrightarrow q_۳=۳ \text{ و } r_۳=۱ \\ \vdots & \quad\vdots \qquad \vdots \end{array}$$

بنابراین $\frac{۱}{۳}=۱\div۳=۰/۳۳۳۳\ldots$ به‌عبارتی به‌ازای هر $i\in\mathbb{N}$ داریم $q_i=۳$. چون $r_۰=r_۱$ پس $q_۱=q_۲$ و $r_۱=r_۲$؛ چون $q_۱$ و $r_۱$ از روی $r_۰$ و ۳ به‌دست می‌آیند و همچنین $q_۲$ و $r_۲$ نیز براساس $r_۱$. به‌طور مشابه چون $r_۱=r_۲$ پس $q_۲=q_۳$ و $r_۲=r_۳$ و ...

مثال ۹.۶: هر یک از اعداد گویای زیر را به‌صورت اعشاری بنویسید.

آ. $\frac{۱}{۹}$ ب. $\frac{۱}{۷}$ ج. $\frac{۳}{۷}$

د. $\frac{۲}{۷}$ هـ. $\frac{-۳}{۱۱}$ و. $\frac{۵}{۱۴}$

پاسخ: هـ. $\frac{-۳}{۱۱}=-\frac{۳}{۱۱}=-(۰/۲۷۲۷۲۷\ldots)$

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

ارقام اعشاریِ نمایش اعشاری $\frac{۱}{۳}$ هیچ‌گاه تمام نمی‌شوند و اصطلاحاً گوییم بی‌نهایت رقم اعشاری دارد و این نمایش را یک نمایش **اعشار نامتناهی** خوانده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

نمایش $\overline{a_n\ldots a_۱a_۰/b_۱b_۲b_۳b_۴\ldots}$ به‌معنای حاصل‌جمع زیر است:

$$a_n ۱۰^n + \ldots + a_۱ ۱۰ + a_۰ + b_۱ ۱۰^{-۱} + b_۲ ۱۰^{-۲} + b_۳ ۱۰^{-۳} + \ldots$$

فرض کنید $x = \overline{a_n\ldots a_۱a_۰/b_۱b_۲b_۳b_۴\ldots}$ یک نمایش اعشار نامتناهی باشد. این نمایش را می‌توان به صورت $x = a + ۰/b_۱b_۲\ldots$ نمایش داد که در آن $a = \overline{a_n\ldots a_۱a_۰}$ عددی طبیعی است.

قرارداد: معمولا هر نمایش اعشار نامتناهی را به‌صورت $x = x_۰ + ۰/x_۱x_۲x_۳\ldots$ نمایش می‌دهیم که در آن $x_۰$ عددی طبیعی است اما بقیهٔ x_iها رقم هستند.

قراردادی مهم...
در ادامهٔ این فصل از این قرارداد استفاده می‌شود.

هر عدد اعشاری مانند ۱/۲۳ را می‌توان به‌صورت ...۱/۲۳۰۰۰۰۰ نمایش داد که دارای بی‌شمار رقم اعشاری است. لذا برای تفاوت گذاشتن بین اعشار متناهی و اعشار نامتناهی، به نمایشی اعشاری که در آن، از جایی به بعد تمام ارقام اعشاری صفر باشند، یک نمایش اعشار متناهی گوییم؛ چون می‌توان آن را با نمایشی اعشار متناهی نمایش داد. بنابراین، نمایشی مانند $x = a_n\ldots a_۱a_۰/b_۱b_۲b_۳b_۴\ldots$ را اعشار متناهی گوییم اگر عددی طبیعی مانند N وجود داشته باشد که برای هر $n > \mathrm{N}$ داشته باشیم $b_n = ۰$ و در غیر این‌صورت، آن را نمایشی اعشار نامتناهی می‌خوانیم.

به‌عبارتی، اگر برای هر $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد $n \in \mathbb{N}$ که $n \geqslant \mathrm{N}$ و $b_n \neq ۰$. اصطلاحاً این نمایش را «اعشار نامتناهی» می‌خوانیم.

همچنین $۰/b_۱b_۲b_۳\ldots$ را متناوب گوییم اگر از جایی به‌بعد ارقام اعشاری تکرار شوند. به‌طور مثال در نمایش اعشاری ...۰/۲۷۲۷۲۷ ارقام ۲۷ همواره تکرار می‌شوند. می‌توانیم ارقام تکراری را با یک خط روی آنها مشخص کنیم. به‌طور مثال:

$$۱/۲۳۴۵۳۴۵۳۴۵\ldots = ۱/۲\overline{۳۴۵} \qquad ۰/۲۷۲۷۲۷۲۷\ldots = ۰/\overline{۲۷}$$

مثال ۱۰.۶: نشان دهید هر نمایش اعشار نامتناهی، بی‌نهایت رقم اعشاری ناصفر دارد.

پاسخ: فرض کنید عدد اعشار نامتناهی $x = ۰/b_۱b_۲b_۳\ldots$ فقط در $b_{i_۱}, b_{i_۲}, \ldots, b_{i_k}$ دارای ارقام ناصفر باشد و باقی ارقام آن، همه صفر باشند. در این صورت، برای هر $n \in \mathbb{N}$ که $n > \max\{b_{i_۱}, b_{i_۲}, \ldots, b_{i_k}\}$ داریم $b_n = ۰$ که با تعریف اعشار نامتناهی در تناقض است. ■

مثال ۱۱.۶: در هر یک از موارد زیر فرض کنید $x = x_۰ + ۰/x_۱x_۲x_۳x_۴\ldots$. نشان دهید:

آ. اگر $x = ۰/۳۳۳۳\ldots$ آن‌گاه برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $x_k = x_{k+۱}$.

ب. اگر $x = ۱/۲۷۳۲۷۳۲۷۳\ldots$ آن‌گاه برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $x_k = x_{k+۳}$.

ج. اگر $x = ۱/۲۳۵۳۵۳۵\ldots$ آن‌گاه برای هر $k \in \mathbb{N}$ که $k \geqslant ۲$ داریم $x_k = x_{k+۲}$.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

با توجه به مثال فوق می‌توانیم نمایش اعشار نامتناهی $a_n\ldots a_۱a_۰/b_۱b_۲b_۳\ldots$ را اعشار متناوب (با دوره تناوب $m \geqslant ۰$ و از رقم $n \geqslant ۱$اُم) گوییم اگر برای هر $k \in \mathbb{N}$ که $k \geqslant n$ داشته باشیم $b_k = b_{k+m}$. این عدد را به صورت $۰/b_۱b_۲\ldots b_{n-۱}\overline{b_nb_{n+۱}\ldots b_{n+m-۱}}$ می‌نویسیم. به‌طور مثال $۰/۱۵\overline{۲۷}$ یک اعشار متناوب با دوره تناوب ۲ است که تناوب آن از رقم سوم شروع می‌شود.

مثال زیر حقیقت مهمی را بر ما آشکار می‌کند که در قضیه‌ای بعد از آن بیان شده است.

مثال ۱۲.۶: با توجه به الگوریتم تقسیم توسعه یافته برای $x = a \div b$ که $a, b \in \mathbb{N}$ نشان دهید:

آ. اگر $r_i = ۰$ آن گاه به‌ازای هر j که $j \geqslant i$ داریم $r_j = ۰$ و $q_j = ۰$.

ب. اگر $r_i = r_j$، آنگاه برای هر $m \in \mathbb{N}$ داریم $r_{i+m} = r_{j+m}$.

ج. اگر $r_i = r_j$ آنگاه برای هر $m \in \mathbb{N}$ که $m \geq ۱$، داریم $q_{i+m} = q_{j+m}$

د. $\frac{a}{۷}$ که در آن $۱ \leqslant a \leqslant ۷$ حداکثر ۷ رقم تناوبی دارد. (دوره تناوب)

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

قضیه ۲.۶: نمایش اعشاری هر عدد گویا، یا متناهی است یا متناوب.

اثبات: اگر در الگوریتم تقسیم توسعه یافته، عددی طبیعی مانند i وجود داشته باشد که $r_i = ۰$، بنا به مورد (آ) از مثال فوق، آن عدد نمایشی اعشار متناهی دارد. اگر عددی طبیعی مانند i وجود نداشته باشد که $r_i = ۰$ پس به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$ داریم $۱ \leq r_i < b$. چون هر یک از اعداد $r_۱$ تا r_b که b تا هستند، مقادیری بین ۱ تا $b - ۱$ دارند، پس دوتا از آنها برابرند.[۱] بنابراین وجود دارند $i, j \in \mathbb{N}$ که $۱ \leqslant i < j \leq b$ و $r_i = r_j$. درنتیجه بنا به مورد (ج) از مثال فوق، این تقسیم دارای نمایشی اعشار متناوب دارد. ■

می‌خواهیم $۰/\overline{۴۵}$ را به‌صورت کسری بنویسیم. قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{r} x = ۰/۴۵۴۵۴۵\ldots \\ ۱۰۰x = ۴۵/۴۵۴۵۴۵\ldots \end{array}\right\} \Longrightarrow ۱۰۰x - x = ۹۹x = ۴۵/\overline{۴۵} - ۰/\overline{۴۵} = ۴۵/۰۰۰۰۰\cdots$$

پس $۹۹x = ۴۵$ و درنتیجه $x = \frac{۴۵}{۹۹} = \frac{۵}{۱۱}$

حتماً پاسخ دهید...
پاسخ دادن به این مثال درک مطالب بعدی را ساده می‌کند.

مثال ۱۳.۶: نشان دهید:

آ. $۰/\overline{۱} = \frac{۱}{۹}$ ب. $۰/\overline{۲} = \frac{۲}{۹}$ ج. $۰/\overline{۷} = \frac{۷}{۹}$

د. $۰/\overline{۰۱} = \frac{۱}{۹۹}$ ه. $۰/\overline{۱۳} = \frac{۱۳}{۹۹}$ و. $۰/\overline{۳۱۷} = \frac{۳۱۷}{۹۹۹}$

ز. $۰/۱\overline{۷} = \frac{۱۷ - ۱}{۱۰۰ - ۱۰}$ ح. $۰/\overline{۰۰۰۱} = \frac{۱}{۱۰^۴ - ۱۰}$

ط. $۵۶/۷\overline{۱۲۳۴} = \frac{۵۶۷۱۲۳۴ - ۵۶۷}{۱۰^۵ - ۱۰^۱}$

پاسخ: آ. $۱۰x - x = ۱/۱۱۱\ldots - ۰/۱۱۱\ldots = ۱ \Longrightarrow ۹x = ۱ \Longrightarrow x = \frac{۱}{۹}$

د. $۱۰۰x - x = ۱/۰۱۰۱۰۱\ldots - ۰/۰۱۰۱۰۱\ldots = ۱ \Longrightarrow ۹۹x = ۱ \Longrightarrow x = \frac{۱}{۹۹}$

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

قضیه ۳.۶: هر نمایش اعشار متناوب، عددی گویا را نمایش می‌دهد.

اثبات: فرض کنید $x = a_n \ldots a_۱ a_۰ / b_۱ b_۲ b_۳ b_۴ \ldots$ نمایشی اعشار نامتناهی با دوره تناوب k باشد که تناوب آن از رقم nاُم شروع می‌شود. در این صورت داریم:

$$۱۰^n x = a_n \ldots a_۱ a_۰ b_۱ b_۲ \ldots b_n / b_{n+۱} b_{n+۲} \ldots$$
$$۱۰^{n+k} x = a_n \ldots a_۱ a_۰ b_۱ b_۲ \ldots b_{n+k} / b_{n+k+۱} b_{n+k+۲} \ldots$$

بنابراین، $۱۰^{n+k}x - ۱۰^n x = \overline{a_n \ldots a_۱ a_۰ b_۱ b_۲ \ldots b_{n+k}} - \overline{a_n \ldots a_۱ a_۰ b_۱ b_۲ \ldots b_n}$ چون برای هر $i \in \mathbb{N}$

[۱] خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند اصل لانه‌کبوتری را مطالعه نمایند.

داریم $b_{n+i}=b_{n+k+i}$. بنابراین: $x=\dfrac{\overline{a_n\ldots a_1a_0b_1b_2\ldots b_{n+k}}-\overline{a_n\ldots a_1a_0b_1b_2\ldots b_n}}{10^{n+k}-10^{n}}$ ■

با دقت بخوانید...
این مطلب در ادامه از اهمیت زیادی برخوردار است.

می‌خواهیم عدد گویای xرا چنان بیابیم که $x=0/9999\ldots$. با روش فوق داریم:

$$\begin{cases} x=0/9999\ldots=(9)10^{-1}+(9)10^{-2}+(9)10^{-3}+(9)10^{-4}+\ldots \\ 10x=9/9999\ldots=9+\left((9)10^{-1}+(9)10^{-2}+(9)10^{-3}+(9)10^{-4}+\ldots\right)\end{cases}$$

پس $10x=9+x$ و درنتیجه $9x=9$. بنابراین $x=\frac{9}{9}=1$.

چون $x\in\mathbb{Q}$، از خواص $\mathbb{Q}$ استفاده کرده‌ایم.
$\mathbb{Q}$ به‌اعداد گویا اشاره دارد.

گزاره ۲.۶: $\mathbf{1=0/9999\ldots=(9)10^{-1}+(9)10^{-2}+(9)10^{-3}+(9)10^{-4}+\ldots}$

۱.۲.۶ مقایسه اعشار متناوب

شخصی روش مقایسهٔ دو عدد با نمایش اعشار متناهی را به اعشار نامتناهی توسعه داده، دو نمایش اعشاری $0/9999\ldots$ و $1/0000\ldots$ را با هم مقایسه کرده و نتیجه می‌گیرد:
$1/0000\ldots>0/9999\ldots$
اما از طرفی داریم $0/9999\ldots=1/0000\ldots$. مشکل کجاست؟

در نمایش‌های اعشاری نامتناهی، از هر جایی به‌بعد رقمی غیر صفر وجود دارد. در نتیجه برای هر نمایش اعشاری مانند $x=0/b_1b_2b_3b_4\ldots$ و هر $k\in\mathbb{N}$ داریم $0/b_1b_2\ldots b_k<x$. درحالی‌که در نمایش‌های متناهی، می‌توان همهٔ ارقام اعشاری را، از جایی به بعد، صفر در نظر گرفت و درنتیجه برای هر $x=0/b_1b_2\ldots b_n$ و هر $1\leqslant k\leqslant n$ داریم $0/b_1b_2\ldots b_k\leqslant x$.

مثال ۱۴.۶: نشان دهید برای هر $n\in\mathbb{N}$ که $n>0$ داریم:

آ. $0/\overbrace{999\ldots9}^{n\ \text{بار}}=1-10^{-n}$

ب. $0/0\overbrace{999\ldots9}^{n\ \text{بار}}=\dfrac{1-10^{-n}}{10}$

ج. $0/\overbrace{00\ldots0}^{m\ \text{بار}}\overbrace{99\ldots9}^{n\ \text{بار}}=\dfrac{1-10^{-n}}{10^{m}}$

د. $0/09999\ldots=0/1$

ه. $0/0009999\ldots=0/001$

و. $0/\overbrace{00\ldots0}^{n\ \text{بار}}999\ldots=10^{-n}$

پاسخ: با توجه به قضیه (۱.۶) و گزاره (۲.۶) واضح است. ■

مثال ۱۵.۶: نشان دهید:

آ. $22/\overline{9}=22/9999\ldots=23$

ب. $0/020\overline{9}=0/0209999\ldots=0/021$

پاسخ: با توجه به مثال قبل واضح است. ■

گزاره ۳.۶: **هر عدد گویای مثبت، دارای نمایشی اعشار متناوب است.**

اثبات: بنا به مثال‌های قبل واضح است. ■

با دقت بخوانید...
با گزارهٔ فوق مقایسه شود.

مثال ۱۶.۶: نشان دهید صفر دارای نمایش اعشار متناوب (اعشار نامتناهی) نیست.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

نکته‌ای ظریف ...
با نتیجهٔ ۲ در صفحهٔ ۱۵۷ مقایسه شود.

قضیه ۴.۶: برای هر $x = a_0 + 0/a_1a_2a_3a_4\ldots \in \mathbb{Q}^+$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:
$$a_0 + 0/a_1a_2\ldots a_n \quad < \quad x \quad \leqslant a_0 + 0/a_1a_2\ldots a_n + 10^{-n}$$

اثبات: چون در نمایش‌های اعشار نامتناهی از هر جایی به بعد، رقمی غیر صفر وجود دارد، پس:
$a_0 + 0/a_1a_2\ldots a_n < x$

برای اثبات $x \leqslant a_0 + 0/a_1a_2\ldots a_n + 10^{-n}$ گوییم:
$$x = 0/b_1b_2b_3b_4\ldots \leqslant 0/b_1b_2\ldots b_k9999\ldots = 0/b_1b_2\ldots b_k + 0/\overbrace{00\ldots0}^{k\text{ بار}}9999\ldots$$
$$= 0/b_1b_2\ldots b_k + 10^{-k}$$
بنابراین $x \leqslant 0/b_1b_2\ldots b_k + 10^{-k}$ ■

اگر اولین اختلاف در ارقام اعشاری دو نمایش اعشاری $x = 0/a_1a_2a_3\ldots$ و $y = 0/b_1b_2b_3\ldots$ در رقم nاُم ظاهر شود، آنگاه $a_n \neq b_n$ و برای هر $i \in \mathbb{N}$ که $1 \leq i < n$، داریم $a_i = b_i$. در این صورت داریم: $x < y$ اگر و تنها اگر $a_n < b_n$

قضیه ۵.۶: اگر $x = 0/a_1a_2a_3\ldots$ و $y = 0/b_1b_2b_3\ldots$ دو عدد گویا با نمایش اعشار نامتناهی باشند، داریم $x < y$ اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $n \in \mathbb{N}$ به‌نحوی‌که $a_n < b_n$ و برای هر i که $1 \leq i < n$ داشته باشیم $a_i = b_i$.

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

با توجه به قضیهٔ فوق می‌توانیم هر دو عدد با نمایش اعشار نامتناهی را مقایسه کنیم، اما همان‌طور که دیدیم $0/9999\ldots = 1$ و درنتیجه نمی‌توانیم از آن برای مقایسهٔ یک نمایش اعشار نامتناهی با یک نمایش اعشار نامتناهی استفاده کنیم. لذا برای مقایسه آنها نخست اعشار متناهی را به اعشار نامتناهی تبدیل کرده و سپس آنها را مقایسه می‌کنیم.

با توجه به قضیه فوق، هر عدد گویا دارای نمایش اعشارنامتناهیِ منحصربه‌فردی است. زیرا در غیر این صورت دو نمایش اعشار نامتناهی مانند $x = 0/a_1a_2a_3a_4\ldots$ و $y = 0/b_1b_2b_3\ldots$ وجود دارند که هر دو به یک عدد گویا اشاره می‌کنند. یعنی $x = y$؛ اما اگر این دو نمایش اعشار نامتناهی، یکسان نباشند، n را کوچک‌ترین عددی درنظر می‌گیریم که $a_n \neq b_n$، آنگاه برای هر i که $1 \leq i < n$ داریم $a_i = b_i$ و از قضیهٔ فوق نتیجه می‌گیریم

$$\begin{cases} a_n < b_n \Longrightarrow x < y \Longrightarrow x \neq y \\ a_n > b_n \Longrightarrow x > y \Longrightarrow x \neq y \end{cases}$$

که با فرض $x = y$ در تناقض است.

با دقت بخوانید...
به تفاوت لم‌ها توجه کنید.
با مطالعه اثبات‌ها، درک تفاوت‌ها ساده خواهد شد.

لِم ۱.۶: هر عدد گویا، نمایش اعشار نامتناهیِ منحصربه‌فردی دارد.

اما از لِم فوق نمی‌توان نتیجه گرفت هر نمایش اعشار نامتناهی صرفا به یک عدد گویا اشاره دارد. لذا، لم زیر را بیان می‌کنیم.

لِم ۲.۶: هر دو عدد گویا با نمایش‌های اعشار نامتناهی یکسان، برابرند.

اثبات: اگر اعداد گویای x و y هر دو دارای نمایش اعشار نامتناهیِ $a_۰ + ۰/a_۱ a_۲ a_۳ \cdots$ باشند، برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $۰/a_۱ a_۲ \ldots a_n < x, y \leqslant ۰/a_۱ a_۲ \ldots a_n + ۱۰^{-n}$. در نتیجه، اگر $x > y$ آن‌گاه $۰ \leqslant x - y \leqslant ۱۰^{-n}$. چون برای هر $z \in \mathbb{Q}^+$ وجود دارد $n \in \mathbb{N}$ که $۱۰^{-n} < z$ پس $۰ \leqslant x - y < ۱۰^{-n} < z$. بنابراین برای هر $z \in \mathbb{Q}^+$ داریم $۰ \leqslant x - y < z$ و چون $x - y \in \mathbb{Q}$ پس بنا به خاصیت ارشمیدسی اعداد گویا، $x - y = ۰$ و درنتیجه $x = y$. ■

بنابراین به سادگی می‌توان فوق قضیه زیر را نتیجه گرفت.

قضیه ۶.۶: هر عدد گویا، یک و تنها یک نمایش اعشار نامتناهی دارد.

اثبات: بنا به لم‌های فوق، واضح است. ■

تمرین:

مبتدی - ضروری
تمرینات (۸) تا (۱۳) صرفاً برای خوانندگان مبتدی ارائه شده‌اند.

(۸) هر یک از اعداد گویای زیر را به صورت اعشاری بنویسید.

آ. $\frac{۱}{۱۰}$ ب. $\frac{۱۲}{۱۰}$ ج. $\frac{۵}{۱۰۰}$

د. $\frac{-۳}{۱۰}$ ه. $-\frac{۴}{۱۰۰}$ و. $\frac{۱۰۰۱}{۱۰۰}$

(۹) اعداد اعشاری زیر را با کسری تحویل‌ناپذیر، با مخرجی مثبت، نمایش دهید.

آ. ۰/۱ ب. ۰/۰۱ ج. ۰/۰۰۱ د. ۰/۰۰۰۱

ه. ۰/۵ و. −۰/۲ ز. ۰/۴ ح. ۰/۰۸

ط. ۲/۴ ی. ۳/۶ ک. ۲/۰۴ ل. −۳/۱۶

(۱۰) حاصل جمع‌های زیر را به‌صورت اعشاری بنویسید.

آ. $۰/۲ + ۰/۳$ ب. $۵/۳ + ۳/۴$ ج. $۰/۰۳ + ۲/۵۱$

د. $۰/۸۹ + ۰/۴۷$ ه. $۹/۷۳ + ۳/۳۹$ و. $۸/۹ + ۳/۰۲$

(۱۱) حاصل ضرب‌های زیر را به‌صورت اعشاری بنویسید.

آ. $۰/۲ \times ۰/۳$ ب. $۲ \times ۰/۳$ ج. $۰/۲۳ \times ۲$

د. $۰/۲۳ \times ۰/۰۳$ ه. $۰/۲۳ \times ۲/۳$ و. $۱/۲۳ \times ۲/۳۱$

(۱۲) اعداد زیر را با هم مقایسه کنید.

آ. ۰/۲۳, ۰/۲۴ ب. ۰/۲۳, ۰/۴۱ ج. ۰/۲۷, ۰/۳

(۱۳) حاصل عبارات زیرا را بیابید.

آ. $۰/\overline{۲۳۸} + ۰/\overline{۳۴۰}$ ب. $۰/\overline{۲۳} + ۰/\overline{۱۳۴}$ ج. $۰/\overline{۷۶۵} + ۰/\overline{۵۹۴}$

د. $۰/\overline{۸۷۵} - ۰/\overline{۳۹۸}$ ه. $۰/\overline{۴۷} - ۰/\overline{۱۵۹}$ و. $۱/۲\overline{۴۵} - ۳/۱\overline{۹۸}$

ز. $۱/\overline{۰} - ۰/\overline{۳}$ ح. $۰/\overline{۹} - ۰/\overline{۳}$ ط. $۱/\overline{۰} - ۰/\overline{۹}$

ی. $۱/\overline{۰} + ۰/\overline{۳}$ ک. $۰/\overline{۹} + ۰/\overline{۳}$ ل. $۰/\overline{۹} + ۰/\overline{۹}$

نکته‌ای ظریف ...
به مورد (ح) توجه کنید.

(۱۴) حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید.

آ. $۹ \times ۰/۷$ ب. $۹ \times ۰/۷۷$ ج. $۹ \times ۰/۷۷۷$

د. $۹ \times ۰/۷۷۷\ldots$ ه. $۰/۳ \times ۰/۷۷۷\ldots$ و. $۰/۳۳ \times ۰/۷۷۷\ldots$

ز. $۰/۳۳۳ \times ۰/۷۷۷\ldots$ $۰/۰۰۰۳۳۳ \times ۰/۷۷۷\ldots$ ح. $۰/۳۳۳\ldots \times ۰/۷۷۷\ldots$

(۱۵) برای $x = \frac{a}{b}$ که $a, b \in \mathbb{N}$ و ناصفرند نشان دهید:

آ. x دارای نمایش اعشار متناوبی با حداکثر دوره تناوب b است.

ب. اگر x دارای دوره تناوب m باشد، برای هر $k \in \mathbb{N}$ دوره تناوب $xk^{-۱}$ حداکثر km است.

ج . اگر x دارای دوره تناوب m باشد، برای هر $k \in \mathbb{N}$، دوره تناوب kx حداکثر m است.

(۱۶) دوره تناوب نمایش اعشاری هر یک از اعداد زیر را بیابید.

آ . $\frac{۱}{۳}$ ب . $\frac{۱}{۹}$ ج . $\frac{۱}{۳ \times ۹} = \frac{۱}{۲۷}$

د . $\frac{۱}{۳ \times ۲۷} = \frac{۱}{۸۱}$ ه . $\frac{۱}{۳ \times ۸۱} = \frac{۱}{۲۴۳}$ و . $\frac{۱}{۳ \times ۲۴۳} = \frac{۱}{۷۲۹}$

پیشرفته - اختیاری

(۱۷) اگر $x = \frac{a}{b}$ دارای دوره تناوب m باشد آن‌گاه وجود دارد $k \in \mathbb{N}$ که $b = km$.

۳.۶ اعشار نامتناهی و اعداد حقیقی

با دقت بخوانید... با پیچیدگی‌ها و اهمیت اعداد حقیقی آشنا شوید.

می‌خواهیم با دقت بیشتری به بررسی اعشاری نامتناهی‌ها بپردازیم. این بررسی نتایج شگرفی به دنبال خواهد داشت. در اولین قدم، بنا به قضیه (۳.۶)، داریم:

هر نمایش اعشاری (متناهی)، یک عدد گویا را نمایش می‌دهد.

شخصی با توجه به عبارت فوق ادعا می‌کند:

نتیجهٔ غلط

هر نمایش اعشار نامتناهی، متناوب است.

اما نمایش‌های اعشار نامتناهیِ زیر، تناوبی نیستند.

$$۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱۰۰۰۰۰۱\ldots$$
$$۰/۱۲۳۴۵۶۷۸۹\ ۱۰\ ۱۱\ ۱۲\ ۱۳\ ۱۴\ldots$$
$$۰/۱۲۳۵۸\ ۱۳\ ۲۱\ ۳۴\ ۵۵\ ۸۹\ldots$$
$$۰/۱۴۹\ ۱۶\ ۲۵\ ۳۶\ ۴۹\ ۶۴\ ۸۱\ldots$$

این شخص فرض کرده بود غیر از اعداد گویا هیچ عدد دیگری وجود ندارد و همچنین هر نمایش اعشار نامتناهی به یک عدد اشاره دارد. او با این دو فرض، از اینکه نمایش اعشار نامتناهی همه اعداد گویا متناوب است، نتیجه گرفت که همه اعشار نامتناهی‌ها متناوب هستند. از آنجا که استدلال وی درست است، پس یکی از فرضیاتش نادرست است. یعنی یا اعدادی غیر از اعداد گویا وجود دارند که اعشار نامتناهی‌های نامتناوب به آنها اشاره دارند، یا اینکه نمایش‌های اعشار نامتناهیِ نامتناوب به هیچ عددی اشاره نکرده و باید آنها را بی‌معنا دانست.

با دقت بخوانید ...

در روشی ابتکاری، نمایش‌های اعشار نامتناهی را عدد خوانده و اعداد حقیقی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۶: همه نمایش‌های اعشار نامتناهی مانند $a_n \ldots a_۱ a_۰/b_۱ b_۲ b_۳ b_۴\ldots$ را که به‌ازای هر $N \in \mathbb{N}$، وجود داشته باشد $n \in \mathbb{N}$ که $n \geqslant N$ و $b_n \neq ۰$ را با $\mathbb{R}^+$ نمایش داده و آن را اعداد حقیقی مثبت می‌خوانیم.

همچنین اعداد حقیقی منفی، را با $\mathbb{R}^-$ نشان داده که شامل منفی اعداد حقیقی مثبت است و همهٔ اعداد حقیقی مثبت، منفی و صفر را «اعداد حقیقی» گفته و با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم.

در تعریف فوق هر عضوِ $\mathbb{R}$ صرفاً یک نمایش اعشار نامتناهی است و نمی‌توان آن را عدد خواند! در ادامه خواهیم دید که چگونه این نمایش‌های اعشار نامتناهی به سمت عدد شدن پیش می‌روند. در

اولین قدم چون نمایش‌های اعشار متناوب اعداد گویا را مشخص می‌سازند، پس $\mathbb{R}^+$ شامل $\mathbb{Q}^+$ است و درنتیجه $\mathbb{R}^-$ نیز شامل $\mathbb{Q}^-$ است. پس $\mathbb{R}$ شامل $\mathbb{Q}$ است.

اما در این صورت نمایش‌های اعشارنامتناهیِ نامتناوب چه هستند؟ آیا آنها نیز عددی را نمایش می‌دهند؟ اگر آنها را عدد در نظر بگیریم، مسلماً گویا نیستند؛ چون متناوب نیستند. قضیه زیر می‌تواند در معنا بخشیدن به نمایش‌های اعشار نامتناهی نامتناوب به ما کمک کند. اما بهتر است پیش از آن به مثال زیر توجه کنیم.

مثال ۱۷.۶: نشان دهید برای هر $p \in \mathbb{N}$ داریم:
آ. $p^۲$ فرد است اگر و تنها اگر p فرد باشد. ب. $p^۲$ زوج است اگر و تنها اگر p زوج باشد.

پاسخ: اگر p زوج باشد پس $k \in \mathbb{N}$ هست که $p = ۲k$ و درنتیجه $p^۲ = ۴k^۲ = ۲(۲k^۲)$
اگر p فرد باشد، پس $k \in \mathbb{N}$ هست که $p = ۲k + ۱$ و درنتیجه $p^۲ = (۲k+۱)^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = ۲(۲k^۲ + ۲k) + ۱$ و درنتیجه $p^۲$ نیز فرد است.
بنابراین، اگر $p^۲$ زوج باشد، p نمی‌تواند فرد باشد، چون اگر فرد باشد، $p^۲$ نیز فرد است و همچنین اگر $p^۲$ فرد باشد، p نمی‌تواند زوج باشد، چون اگر p زوج باشد، $p^۲$ نیز زوج خواهد بود. ■

قضیه ۷.۶: معادلهٔ $x^۲ = ۲$ در اعداد گویا جواب ندارد.

اثبات: اگر $x \in \mathbb{Q}^+$ چنان باشد که $x^۲ = ۲$، و چون هر عدد گویا دارای نمایشی تحویل‌ناپذیر مانند $x = \frac{p}{q}$ است که p و q هر دو زوج نیستند. کافی است نشان دهیم چنین نمایشی وجود ندارد و درنتیجه چنین عدد گویایی وجود ندارد.
اگر p و q هر دو زوج نباشند و $\left(\frac{p}{q}\right)^۲ = ۲$ پس $\frac{p^۲}{q^۲} = ۲$ و درنتیجه $p^۲ = ۲q^۲$. بنابراین، p زوج است پس $k \in \mathbb{N}$ هست که $p = ۲k$ و $p^۲ = ۴k^۲ = ۲q^۲$. بنابراین، $q^۲ = ۲k^۲$. پس $q^۲$ زوج است و درنتیجه q زوج است. بنابراین، نمایشی مانند $\frac{p}{q}$ وجود ندارد که p و q هر دو زوج نباشند و $\frac{p^۲}{q^۲} = ۲$.
بدین‌ترتیب نشان دادیم $x^۲ = ۲$ در $\mathbb{Q}^+$ جواب ندارد. ■

سؤالی مهم...
با دقت بخوانید...

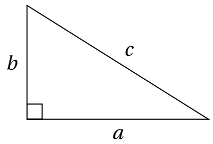
اعداد گویای مثبت وسیلهٔ مقداری از کمیتی دلخواه بر حسب مقدار دیگری از آنند. خاصیت ارشمیدسی اعداد گویا، این باور را پدید می‌آورد که برای هر دو مقدار A و B از کمیتی دلخواه، عدد گویای مثبتی مانند x هست که $\mathrm{B} = x\mathrm{A}$. آیا $\sqrt{۲}$ (جواب معادلهٔ $x^۲ = ۲$) بامعناست؟ به‌عبارت دیگر، آیا دو مقدار مانند A و B از کمیتی مانند طول وجود دارند که $\mathrm{B} = \sqrt{۲}\mathrm{A}$؟ اولین بار وجود چنین طولی را فیثاغوریان کشف کردند.

فیثاغورث از ریاضیدانان بزرگ یونان باستان، در اوخر قرن هفتم پیش از میلاد، در سنین جوانی نزد طالس آموزش دید. سپس همانند استادش به مصر و بابل سفر کرد و به کسب دانش پرداخت. در آن روزگار که یونان از حدود ۱۲۰۰ پیش از میلاد به سمت تمدن گام برداشته و هنوز تمدنی بسیار نوپا بود، مصر و بابل تمدن‌های با قدمت چند هزار ساله بودند. مصریان در هندسه و بابلیان در نجوم و حساب مهارت داشتند. فیثاغورث پس از بازگشت از سفر، آکادمی خود را در کرونای تأسیس کرد. وی به پیروی از کاهنان مصری و بابلی که علم و دانش را در انحصار خویش داشتند، نوعی انجمن برادری در آکادمی خویش تأسیس نمود. اعضای این انجمن را «فیثاغوریان» گویند. در آکادمی فیثاغورث، تمامی آموزش‌ها شفاهی و محرمانه بود و کسی خارج از انجمن برادری نباید از آنها آگاه می‌شد؛ سوگند رازداری از مهم‌ترین قوانین این آکادمی بود.

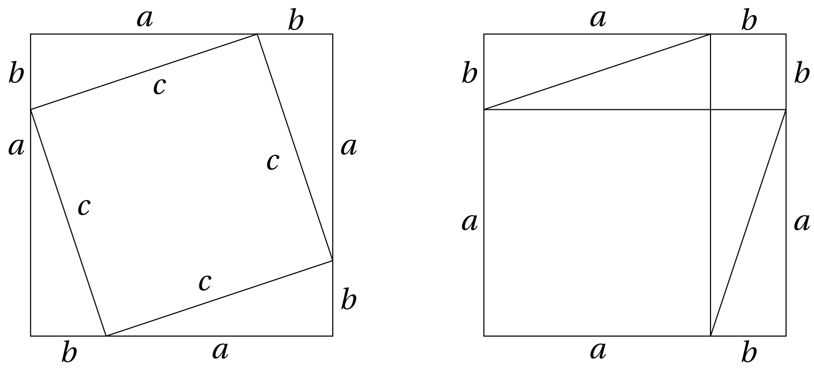
فیثاغوریان بیش از آنکه به گروهی علمی شباهت داشته باشند، همچون همتایان شرقی خویش، بیشتر به فرقه‌های دینی و گروه‌های سیاسی شبیه بودند. آنها حتی در مورد ریاضیات نیز عقایدی خُرافی

داشتند. به‌طور مثال بر این باور بودند که دنیا از اعداد ساخته شده است راز همه چیز در اعداد نهفته است. به‌همین سبب اعداد برایشان مهم بود و حتی تقدس داشت.

فیثاغوریان که محاسبهٔ مساحت مستطیل و مثلث را از تمدن‌های شرقی آموخته بودند، با استدلال زیر قضیهٔ مهمی را اثبات کردند که به نام فیثاغورث شهرت یافته است؛ اما از آنجا که تمامی فیثاغوریان دست‌آوردهایشان را به بنیانگذار اعظمشان تقدیم می‌نمودند، نمی‌دانیم این قضیه دست‌آورد فیثاغورث است یا یکی از شاگردانش. قضیه فیثاغورث با استدلالی ساده نشان می‌دهد که برای هر مثلث قائم‌الزاویه، با اضلاعی به طول a، b و c که c طول ضلع روبه‌روی زاویهٔ قائمه است داریم $.a^2 + b^2 = c^2$



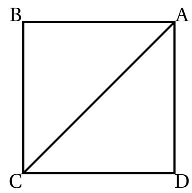
برای اثبات قضیهٔ فیثاغورث کافی است به شکل‌های زیر توجه کنیم.



بدین‌ترتیب دو مربع بزرگ با اضلاعی به طول $a+b$ داریم که مساحت برابر دارند. مساحت شکل سمت چپ $4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2$ و مساحت شکل سمت راست $a^2 + b^2 + 2ab$ است. درنتیجه داریم:

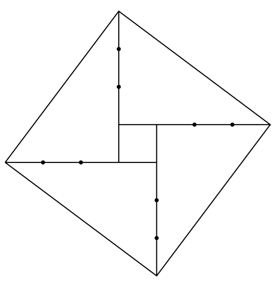
$$a^2 + b^2 + c^2 = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2 = 2ab + c^2$$

و تساوی $a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$ نتیجه می‌گیریم $.a^2 + b^2 = c^2$



قضیه فیثاغورث نشان داد طول‌هایی وجود دارند که آنها را نمی‌توان با استفاده از اعداد کسری بیان کرد. به‌طور مثال مربعی را در نظر بگیرید که هر ضلع آن برابر باشد با ۱U. در این صورت اگر طول قطر را x بنامیم داریم $.x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ اما در قضیه (۷.۶) دیدیم که معادلهٔ $x^2 = 2$ در اعداد گویا جواب ندارد و به عبارتی $\sqrt{2}$ در اعداد گویا بی‌معناست.

فیثاغوریان که معتقد بودند جهان از اعداد ساخته شده و اعداد می‌توانند تمامی رازهای جهان را بر ایشان آشکار سازند، اعداد را در ساختن طول قطر مربع و بیان طول آن نیز ناتوان یافتند. بدین‌ترتیب بنیان‌های فکری ایشان به‌کل متزلزل گردید. از طرفی نمی‌توانستند اثبات قضیه را نادرست پندارند، چون هیچ خطایی در آن نمی‌دیدند. از طرفی هم هیچ توضیح قابل قبولی نمی‌یافتند. به‌همین سبب، این واقعه به «رسوایی بزرگ» شهرت یافته است.



البته مصریان در ساخت هرم بزرگ جیزه، در حدود ۲۹۰۰ پیش از میلاد مسیح، زاویه‌های راست قاعدهٔ مربعی شکل را چنان دقیق ساخته‌اند که بدون آگاهی از هندسه ممکن نیست. مصریان بدون اینکه قضیهٔ فیثاغورث را اثبات کرده باشند، درک کرده بودند که مثلثی با اضلاع ۳، ۴ و ۵ یک مثلث قائم‌الزاویه است. هرچند برخی از مورخان تاریخ ریاضیات بر این عقیده‌اند که مصریان این ویژگی را بدون هیچ‌گونه تحلیل و صرفاً

با تجربه به دست آورده‌اند، اما سندی معروف به چوئوپی مربوط به چین، با شکل مقابل نشان می‌دهد چینی‌ها و شاید مصری‌ها نیز از استدلال‌های هندسی بهره‌مند بوده‌اند.

به‌هرحال آنچه مسلم است، فیثاغوریان اولین کسانی بودند که متوجه رسوایی بزرگ شدند. پس از این رسوایی، دو قرن و نیم تلاش یونانیان برای سامان بخشیدن به باورها و تفکراتشان، تحولات بزرگی در تاریخ تفکر بشر آفرید. هرچند اولین فیلسوف را طالس می‌دانیم، اما فلسفه پیش از رسوایی بزرگ و پس از آن تفاوت‌های چشمگیری دارد. در قرن چهارم پیش از میلاد مسیح در حالی که هنوز پیشرفتی در مورد رسوایی بزرگ رخ نداده بود، دو فیلسوف بزرگ تاریخ بشریت، یعنی سقراط و افلاطون ظهور کردند. در زمان بزرگ‌ترین ایشان، ارسطو، ملقب به «معلم اول» که شاگرد افلاطون بود، ائودوکسوس راهی زیرکانه برای غلبه بر رسوایی بزرگ یافت. وی که دریافته بود برای هر عدد کسری مانند x و هر دو عدد طبیعی مانند a و b داریم

$$x \gtreqless \frac{a}{b} \Longleftrightarrow bx \gtreqless a$$

و درنتیجه برای مقداری مانند A از کمیتی دلخواه نیز داریم $x\mathrm{A} \gtreqless \frac{a}{b}\mathrm{A} \Longleftrightarrow bx\mathrm{A} \gtreqless a\mathrm{A}$. بنابراین، تعریفی شبیه به تعریف زیر را ارائه کرد تا عباراتی مانند $\frac{a}{b} < \sqrt{۲}$ یا $\frac{a}{b} > \sqrt{۲}$ معنا یابند.

با این نمادگذاری در ترتیب اعداد کسری آشنا شدیم.

تعریف ۶.۲: برای هر دو مقدار A و B از کمیتی دلخواه مانند طول و هر دو عدد طبیعی مانند a و b داریم: $\mathbf{B} \gtreqless \frac{a}{b}\mathbf{A} \Longleftrightarrow b\mathbf{B} \gtreqless a\mathbf{A}$

از آنجا که معادلهٔ $x^۲ = ۲$ در اعداد گویا جواب ندارد، پس عبارت $\sqrt{۲}$ در اعداد کسری بی‌معناست. زیرا بنا به تعریف رادیکال، به‌ازای هر $y \in \mathbb{Q}$، عبارت $\sqrt{y}$ عددی **گویا** مانند x است اگر $x^۲ = y$. بنابراین، از تعریف ادوکسوس ایده گرفته و رادیکال را چنان تعریف می‌کنیم که $\sqrt{۲}$ بامعنا شود. در اعداد گویا دیدیم که برای هر $x, y \in \mathbb{Q}^+$ داریم:

$x < y$ اگر و تنها اگر $x^۲ < y^۲$

بنابراین، می‌توانیم با ایده گرفتن از روش ادوکسوس برای هر $x, y \in \mathbb{Q}^+$ تعریف کنیم:

$x \gtreqless \sqrt{y}$ اگر و تنها اگر $x^۲ \gtreqless y$

هرچند به‌ازای هر $x \in \mathbb{Q}^+$ داریم $x^۲ \neq ۲$، اما برای هر $x \in \mathbb{Q}^+$ یکی از دو نامساوی $x^۲ < ۲$ و $x^۲ > ۲$ برقرار خواهد بود. مشابه اعداد گویا، فرض کنید طول قطر مربعی به طول ضلع U را با $\sqrt{۲}\mathrm{U}$ نمایش دهیم.[۱] در این صورت به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{Q}^+$ که $x^۲ < ۲ < y^۲$ داریم $x\mathrm{U} < \sqrt{۲}\mathrm{U} < y\mathrm{U}$ که آن را به‌صورت $x < \sqrt{۲} < y$ می‌نویسیم. بنابراین:

$$\begin{array}{ccc} ۱ < \sqrt{۲} < ۲ & \Longleftrightarrow & ۱^۲ = ۱ < ۲ < ۲^۲ = ۴ \\ ۱/۴ < \sqrt{۲} < ۱/۵ & \Longleftrightarrow & (۱/۴)^۲ = ۱/۹۶ < ۲ < (۱/۵)^۲ = ۲/۲۵ \\ ۱/۴۱ < \sqrt{۲} < ۱/۴۲ & \Longleftrightarrow & (۱/۴۱)^۲ = ۱/۹۸۸۱ < ۲ < (۱/۴۲)^۲ = ۲/۰۱۶۴ \\ ۱/۴۱۴ < \sqrt{۲} < ۱/۴۱۵ & \Longleftrightarrow & (۱/۴۱۴)^۲ = ۱/۹۹۳۹۶ < ۲ < (۱/۴۱۵)^۲ = ۲/۰۰۲۲۲۵ \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

[۱] در اینجا $\sqrt{۲}$ صرفاً یک نماد است که طول قطر مربع را براساس ضلع آن بیان می‌کند.

با روش فوق، $x = \sqrt{۲}$ نمایشی اعشار نامتناهی (عددی حقیقی) را مشخص می‌سازد. اگر آن را به صورت $x = a_۰ + ۰/a_۱ a_۲ a_۳ a_۴ \ldots$ درنظر بگیریم، برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$x_n < \sqrt{۲} \leq x_n + ۱۰^{-n}$$

بنابراین، به‌وضوح x دارای نمایشی اعشار نامتناهی و نامتناوب است، چون $x^۲ = ۲$ در اعداد گویا جواب ندارد. بدین‌ترتیب، $x = \sqrt{۲}$، به عنوان طول قطر مربعی به طول واحد، با نمایشی اعشار نامتناهی و **نامتناوب** قابل بیان است.

نکته‌ای ضریف ...

پیش از این، قضایای مربوط به تساوی و مقایسه دو نمایش اعشار نامتناهی، برای حالتی بیان شدند که نمایش اعشار نامتناهی مذکور عددی گویا و مثبت را نمایش دهد، پس برای نمایش‌های اعشار نامتناهی نامتناوب نامعتبر و غیرقابل استفاده اند. اما از همان قضایا ایده گرفته و تساوی و ترتیب را روی اعداد حقیقی مثبت (نمایش‌های اعشار نامتناهی) تعریف می‌کنیم.

با دقت بخوانید...
در تاریخ ریاضیات، اعداد حقیقی توسط جرج کانتور، با استفاده از قضایای کشی و به کمک دنباله‌ها و سری‌ها ساخته شده است. اعشار نامتناهی‌ها بیان ساده شده‌ای از روش کانتور است.

تعریف ۳.۶: برای هر $x, y \in \mathbb{R}^+$ مانند $x = a_۰ + ۰/a_۱ a_۲ a_۳ \ldots$ و $y = b_۰ + ۰/b_۱ b_۲ b_۳ \ldots$ گوییم $x = y$ اگر و تنها اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $a_i = b_i$.

این تعریف صرفاً تساوی را مشخص می‌کند ولی در مورد ترتیب اعداد حقیقی (نمایش‌های اعشار نامتناهی) چیزی نمی‌گوید. بنابراین، از **؟؟** ایده گرفته و ترتیب اعداد حقیقی (نمایش‌های اعشار نامتناهی) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.۶: برای هر $x, y \in \mathbb{R}^+$ مانند $x = a_۰ + ۰/a_۱ a_۲ a_۳ \ldots$ و $y = b_۰ + ۰/b_۱ b_۲ b_۳ \ldots$ گوییم $x < y$ اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $n \in \mathbb{N}$ به‌نحوی که $a_n < b_n$ و برای هر $i \in \mathbb{N}$ که $i < n$ داشته باشیم $a_i = b_i$.

مهم‌ترین ویژگی کوچک‌تری، اصل تثلیث است که در گزارهٔ زیر به آن می‌پردازیم.

گزاره ۴.۶: برای هر $x, y \in \mathbb{R}^+$ یک و تنها یک حالت از سه حالت زیر رخ می‌دهد.

$$x < y \qquad\qquad x = y \qquad\qquad x > y$$

اثبات: قرار می‌دهیم $x = a_۰ + ۰/a_۱ a_۲ a_۳ \ldots$ و $y = b_۰ + ۰/b_۱ b_۲ b_۳ \ldots$. واضح است که اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $a_n = b_n$ پس $x = y$. اگر $x \neq y$، پس n کوچک‌ترین عددی باشد که $a_n \neq b_n$، آن‌گاه اگر $a_n > b_n$، گوییم $x > y$ و اگر $a_n < b_n$، گوییم $x < y$. بدین‌ترتیب، یک و تنها یکی از سه حالت فوق امکان‌پذیر است. (بنا به اصل تثلیث در مقایسهٔ اعداد طبیعی) ■

مثال ۱۸.۶: نشان دهید:

آ. بین هر دو عدد حقیقی یک عدد گویا وجود دارد.
ب. بین هر دو عدد حقیقی یک عدد گنگ وجود دارد.
ج. بین هر دو عدد حقیقی بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.
د. بین هر دو عدد حقیقی، بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد.

پاسخ: آ. کافی است نشان دهیم بین هر دو نمایش اعشار نامتناهی (عدد حقیقی مثبت) نمایشی اعشار متناوب (عددی گویا و مثبت) وجود دارد.
به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود. ■

گزاره ۵.۶: اگر $x \in \mathbb{R}$ چنان باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $۰ \leq x \leq ۱۰^{-n}$ آن‌گاه $x = ۰$.

اثبات: $\overset{n\text{تا صفر}}{\overbrace{۰/۰۰\dots۰}}۹۹۹\dots = ۱۰^{-n}$ پس اگر $x = a_۰ + ۰/a_۱a_۲a_۳\dots$ چنان باشد که $۰ \leq x \leq ۱۰^{-n}$، بنا به تعاریف فوق داریم $a_۰ = a_۱ = \dots = a_n = ۰$. بنابراین، $x = ۰/۰۰۰۰\dots = ۰$ ■

مثال ۱۹.۶: اگر $x \in \mathbb{R}$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $۰ \leq x < \frac{۱}{n}$ آن‌گاه $x = ۰$.

پاسخ: برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $m = ۱۰^n$. در این صورت $x \leq ۱۰^{-m} \Longleftrightarrow x \leq \frac{۱}{n}$. بنابراین، $x = ۰$. ■

۱.۳.۶ جمع و ضرب اعداد حقیقی

برای محاسبهٔ حاصل جمع و حاصل‌ضرب اعشار نامتناهی‌ها از مثال زیر ایده می‌گیریم.

مثال ۲۰.۶: نشان دهید برای هر $a, b, x, y \in \mathbb{Q}^+$ داریم:
اگر $x \gtreqqless a$ و $y \gtreqqless b$ آن‌گاه $a + b \gtreqqless x + y$ و $ab \gtreqqless xy$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

باتوجه به مثال فوق تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۵.۶: برای هر $x, y \in \mathbb{R}^+$ و هر $a, b \in \mathbb{Q}^+$، حاصل $x + y$ و xy چنانند که اگر $a \gtreqqless x$ و $b \gtreqqless y$، آن‌گاه $a + b \gtreqqless x + y$ و $ab \gtreqqless xy$

مثال ۲۱.۶: با فرض $x = ۰/۱۵۴۳۲۱۵۱۵۳۷\dots$ و $y = ۰/۴۲۵۶۸۸۴۸۴۶۲\dots$ مقادیر زیر را به‌دست آورید. **حتماً پاسخ دهید...**

آ. $x_۳ + y_۳$ ب. $x_۴ + y_۴$ ج. $x_۵ + y_۵$
د. $x_۶ + y_۶$ ه. $x_{۱۰} + y_{۱۰}$ و. $x_{۱۱} + y_{۱۱}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

توجه!..........توجه! پاسخ‌دادن به مثال قبل، درک این مطلب را ساده می‌کند.

مثال فوق نشان می‌دهد که اگر $x = a_۰ + ۰/a_۱a_۲a_۳\dots$ و $y = b_۰ + ۰/b_۱b_۲b_۳\dots$ دو نمایش اعشار نامتناهی باشند، چون ما هیچ‌گاه تمام ارقام اعشاری آن دو را نمی‌دانیم، در مواردی که آخرین ارقام به‌دست آمده ۹ هستند، از ۹ یا ۰ بودن آنها بی‌اطلاع هستیم و حتی در مورد آخرین رقم اعشاری غیر ۹ نیز نمی‌دانیم که همان می‌ماند یا یکی بیشتر می‌شود. در این دیدگاه، هر عدد حقیقی، نمایشی اعشار نامتناهی دانسته شده است که ما آن را تا چند رقم بیشتر نمی‌دانیم ولی می‌توانیم تا هر رقم دلخواهی از آن مطلع شویم. برای درک بهتر این وضعیت، فرض کنیم دو کامپیوتر داریم که هر ثانیه، یک رقم اعشار از نمایش اعشاری x و y را به ما می‌دهند. در این صورت برای حالتی که با جمع $۰/۶۴۷۱۵۸\dots + ۰/۳۵۲۸۴۱\dots$ روبرو هستیم، حاصل‌جمع را با $x = a_۰ + ۰/a_۱a_۲a_۳a_۴\dots$ نشان دهیم، الگوریتم فوق هیچ‌گاه نمی‌تواند در مورد اینکه $a_۱ = a_۲ = a_۳ = a_۴ = a_۵ = ۹$ و حالت دیگری که در آن $a_۰ = ۱$ و $a_۱ = a_۲ = a_۳ = a_۴ = a_۵ = ۰$ تصمیم‌بگیرد مگر اینکه در ادامه با مشخص شدن ارقام بعدی، به رقمی غیرِ ۹ برسیم.

مثال ۲۲.۶: با فرضِ $x = ۰/۹۹۹۹۹...$ و $y = ۰/۹۹۴۹۹۹...$ مقادیر زیر را محاسبه کنید.

آ. $x_۲y_۲$ ب. $x_۳y_۲$ ج. $x_۴y_۴$

د. $x_۵y_۵$ ه. $x_۶y_۶$ و. $x_۷y_۷$

پاسخ: آ. ۰/۹۸۰۱ ب. ۰/۹۹۳۰۰۶ ج. ۰/۹۹۴۸۰۰۵۱

د. ۰/۹۹۴۹۸۰۰۵۰۱ موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

درمثال فوق با مشخص شدن $x_{n+۲}y_{n+۲}$ می‌توان از مقدار n رقم اعشار اول xy مطمئن شد. اما مثال زیر نشان می‌دهد این دیدگاه چندان قابل اطمینان نیست.

$$(۰/۸)^۲ = ۰/۶۴$$
$$(۰/۸۹)^۲ = ۰/۷۹۲۱$$
$$(۰/۸۹۴)^۲ = ۰/۷۹۹۲۳۶$$
$$(۰/۸۹۴۴)^۲ = ۰/۷۹۹۹۵۱۳۶$$
$$(۰/۸۹۴۴۸)^۲ = ۰/۸۰۰۰۹۴۴۷۰۴$$

البته می‌توان نشان داد که برای هر دو نمایش اعشار نامتناهی مانند $x = ۰/a_۱a_۲a_۳...$ و $y = ۰/b_۱b_۲b_۳...$ با توجه به n رقمِ اعشارِ اول از $x_{n+۲}y_{n+۲}$ دقیقا همان وضعیتی را دارند که ارقام به‌دست آمده در مورد جمع داشتند. یعنی اگر رقم $(n+۱)$اُم غیرِ ۹ باشد، می‌توان از مقدارِ n رقم اعشار به‌دست آمده اطمینان داشت.

مشکلاتی از این دست، رسیدن به اعداد حقیقی و پذیرفتن آن را دشوار کرد. ابتدا جورج کانتور با استفاده از دنباله‌های کوشی[۱] به مقابله با این مشکل برخاست و سپس ددکیند[۲] با ارائهٔ ایدهٔ «برش‌ها» این مشکل را به روشی ساده‌تر برطرف کرد. می‌توانیم ایدهٔ جورج کانتور[۳] را در کتاب‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال و روش ددکیند را در کتاب‌های مبانی ریاضی و آنالیز ریاضی دنبال کنیم. اما به‌هرحال، ایدهٔ اصلی تعریف جمع و ضرب در هر دو روش، تعریف فوق است.هرچند محاسبهٔ حاصل‌جمع و حاصل‌تقسیم در اعداد حقیقی دشوار است، اما می‌توانیم خواص جمع و ضرب اعداد حقیقی را از تعریف به‌دست آوریم.

گزاره ۶.۶: برای هر $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ داریم:

آ. $x = y \Longrightarrow x + z = y + z$ ب. $x = y \Longrightarrow xz = yz$

ج. $x + y = y + z$ د. $xy = yx$

ه. $x + (y + z) = (x + y) + z$ و. $x(yz) = (xy)z$

ز. $x + ۰ = ۰ + x = x$ ح. $x \times ۱ = ۱ \times x = x$

ط. $x(y + z) = xy + xz$ ی. $x \times ۰ = ۰ \times x = ۰$

ک. برای هر $x \in \mathbb{R}^+$، وجود دارد $x^{-۱} \in \mathbb{R}^+$ که $x.x^{-۱} = x^{-۱}.x = ۱$.

اثبات: در این کتاب از بیان اثبات دقیق این قضیه صرف‌نظر کرده و به بیان دقیق‌تر صورت مسئله اکتفا می‌کنیم.

آ. باید نشان دهیم برای هر $a, b, c \in \mathbb{Q}^+$، فقط یک $z \in \mathbb{R}^+$ وجود دارد که اگر $a < x$ و $b < y$، آنگاه نمایش اعشار نامتناهی ab از z که یک نمایش اعشار نامتناهی است، کوچک‌تر است و همچنین اگر

[۱] Baron Augustin-Louis Cauchy; (1789 - 1857; France)
[۲] Richard Dedekind (1831 - 1916; Germany)
[۳] Georg Cantor (1845;Russia - 1918;Germany)

$x < a$ و $y < b$ آن‌گاه $z < ab$. آنچه باید اثبات شود، صرفاً یکتایی z با این ویژگی‌هاست. می‌توانید اثبات این قضیه را در کتاب‌های تخصصی‌تر ریاضی بیابید. ■

همان‌طور که جمع و ضرب را از اعداد کسری به اعداد گویا توسعه دادیم، جمع و ضرب را از $\mathbb{R}^+$ به $\mathbb{R}$ توسعه می‌دهیم. قضیه زیر نشان می‌دهد که جمع و ضرب اعداد حقیقی علاوه بر تمامی خواص فوق، دارای خاصیت عنصر معکوس هم هست.

تعریف ۶.۶: برای هر $x, y \in \mathbb{R}^+$ قرار می‌دهیم:

آ. $x + (-x) = (-x) + x = 0$ \quad $x + 0 = 0 + x = x$

$(-x) + 0 = 0 + (-x) = -x$ \quad $0 + 0 = 0$

ب. اگر $x < y$ آن‌گاه:

$x + (-y) = (-y) + x = -(x+y)$ و $(-x) + y = y + (-x) = y - x$

ج. $(-x) + (-y) = -(x+y)$

و $0 \times 0 = 0 \times (-x) = (-x) \times 0 = 0 \times x = x \times 0 = 0$

د. $x(-y) = (-y)x = -(xy)$ و $(-x)(-y) = xy$

همان طور که از خواص جمع و ضرب اعداد کسری، خواص جمع و ضرب اعداد گویا را به‌دست آوردیم، می‌توانیم از خواص جمع و ضرب اعداد حقیقیِ مثبت، خواص جمع و ضرب اعداد حقیقی را نیز به‌دست آوریم.

قضیه ۸.۶: برای هر $x, y, z \in \mathbb{R}$ داریم:

آ. $x = y \Longrightarrow x + z = y + z$

ب. $x = y \Longrightarrow xz = yz$

ج. $x + y = y + z$

د. $xy = yx$

ه. $x + (y + z) = (x + y) + z$

و. $x(yz) = (xy)z$

ز. $x + 0 = 0 + x = x$

ح. $x \times 1 = 1 \times x = x$

ط. $x(y + z) = xy + xz$

ی. $x \times 0 = 0 \times x = 0$

ک. برای هر $x \in \mathbb{R}$ که $x \neq 0$، وجود دارد $x^{-1} \in \mathbb{R}^+$ که $x.x^{-1} = x^{-1}.x = 1$.

ل. برای هر $x \in \mathbb{R}$ وجود دارد $(-x) \in \mathbb{R}$ که $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

ترتیب اعداد حقیقی را نیز مشابه ترتیب اعداد گویا تعریف کرده و دقیقا همان خواص را دارد.

تعریف ۷.۶: برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داریم:

آ. اگر $x \in \mathbb{R}^+$ آن‌گاه $x > 0$.

ب. $x < y$ اگر و تنها اگر $z \in \mathbb{R}^+$ وجود داشته باشد که $x + z = y$

قضیه ۹.۶: برای هر $x, y, z \in \mathbb{R}$ داریم:

آ. $x < y$ اگر و تنها اگر $x + z < y + z$.

ب. برای $z > 0$ داریم: $x < y \overset{z>0}{\Longleftrightarrow} xz < yz$

ج. برای $z < 0$ داریم: $x < y \overset{z<0}{\Longleftrightarrow} xz > yz$

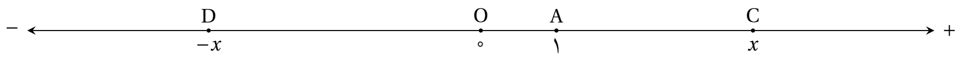
د. اگر $x, y > 0$ آن‌گاه $n \in \mathbb{N}$ هست که $nx > y$.

اثبات: سه مورد اول اثباتی ساده داشته و به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

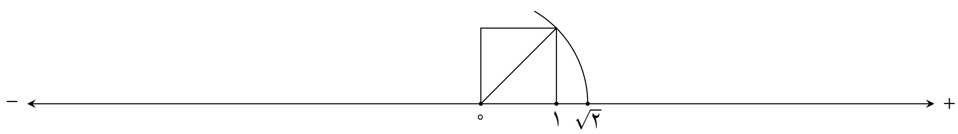
د. فرض کنید برای $x, y \in \mathbb{R}$ داریم $x, y > ۰$
اگر $x < y$ آن‌گاه با قرار دادن $n = ۱$ داریم $nx > y$.
اگر $۰ < x < y$ آن‌گاه وجود دارند $x', y' \in \mathbb{Q}$ که $۰ < x' < x < y < y'$ و بنا به خاصیت ارشمیدسی اعداد گویا وجود دارد $n \in \mathbb{N}$ که $nx' > y'$ و درنتیجه $nx > nx' > y' > y$. ■

۲.۳.۶ محور اعداد حقیقی

برای هر $x \in \mathbb{Q}^+$ و هر طولی مانند U، می‌توان طول L را چنان یافت که $\mathrm{L} = x\mathrm{U}$. اگر مطابق شکل، نقاط O، A و B را به‌نحوی بر خطی مانند l قرار دهیم که $|\mathrm{OA}| = \mathrm{U}$ و $|\mathrm{OB}| = \mathrm{L} = x\mathrm{U}$، می‌توان به نقطهٔ O، عدد گویایِ صفر، به نقطهٔ A عدد گویایِ ۱ و به نقطهٔ B عدد گویایِ x را اختصاص داد. بدین‌ترتیب به هر $x \in \mathbb{Q}^+$ نقطه‌ای بین OA یا از امتداد آن از سمت A اختصاص می‌یابد. این سمت از O را سَمتِ مثبتِ O گوییم و سمتِ دیگرش را سمت منفی. به‌طور مشابه، برای هر $x \in \mathbb{Q}^+$، نقطهٔ D از سمت منفیِ O را به $(-x)$ اختصاص می‌دهیم اگر $|\mathrm{OD}| = x\mathrm{U}$. بدین‌ترتیب، به هر عدد گویا می‌توان نقطه‌ای از پاره‌خط OA یا امتداد آن اختصاص داد. معمولاً می‌گویند خطی را فرض می‌کنیم که از هر دو طرف تا بی‌نهایت امتداد یافته و به هر عدد گویا، نقطه‌ای از آن اختصاص می‌دهیم. این خط را «محور اعداد» گوییم.



با توجه به آنچه گذشت، اگر OC با قطر مربعی به طول U برابر باشد، هیچ عدد گویایی به آن اختصاص نمی‌یابد. آیا به هر عدد حقیقی که با اعشاری نامتناهی مشخص می‌شود، نقطه‌ای بر این محور اختصاص می‌یابد؟ در واقع، آیا اگر $\sqrt{۲}$ که طول قطر مربعی به اضلاع واحد است را صرفاً به‌عنوان یک اعشار نامتناهی در نظر بگیریم، نقطه‌ای خاص را مشخص می‌سازد؟ ساده‌ترین جواب به این سؤال مثبت است. انتظار داریم این‌گونه باشد، اما باز هم در کتاب‌های آنالیز غیراستاندارد می‌بینیم که این فرض هم چندان قوی نیست و فرض‌های سازگار دیگری نیز وجود دارند که به همان اندازه قابل قبولند. به‌هر حال فرض می‌کنیم به هر عدد حقیقی دقیقاً یک نقطه از محور اعداد اختصاص می‌یابد و به هر نقطه از محور اعداد نیز دقیقاً یک عدد حقیقی اختصاص داده می‌شود. لذا آن را محور اعداد حقیقی می‌گوییم. این دیدگاه «آنالیز استاندارد» یا به اختصار «آنالیز» نامیده می شود. دیدگاه دیگری که در آن محور اعداد علاوه‌بر اعداد حقیقی شامل نقاط دیگری است، «آنالیز غیر استاندارد» نام دارد. در آنالیز غیر استاندارد فرض می‌شود به هر عدد حقیقی یک نقطه از محور اعداد اختصاص می‌یابد و علاوه‌بر آن دور هر یک از این نقاط، حاله‌ای از بی‌نهایت کوچک‌ها وجود دارد که درون آن فقط یک عدد حقیقی وجود دارد.



در ادامه با آنالیز استاندارد کار خواهیم کرد. در واقع بیشتر ریاضیدانان با آنالیز استاندارد کار می‌کنند. در آنالیز استاندارد، معمولاً نقاطی که بین دو نقطه قرار دارند را به‌صورت یک بازه درنظر می‌گیرند. در ادامه به معرفی بازه‌ها می‌پردازیم که در بیان جواب‌های نامعادلات به ما کمک می‌کنند.

تعریف ۸.۶: برای هر دو عدد حقیقی مانند x و y که $x < y$:

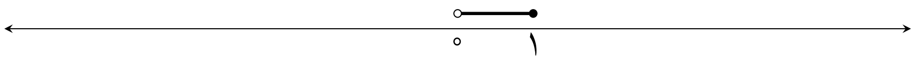
آ . تمامی zهای حقیقی که $x < z < y$ را به صورت (x, y) نمایش داده و آن را یک بازهٔ باز می‌خوانیم.

ب . تمامی zهای حقیقی که $x \le z \le y$ را به‌صورت $[x, y]$ نشان داده و آن را یک بازهٔ بسته می خوانیم.

ج . تمامی zهای حقیقی که $x \le z < y$ را به‌صورت $[x, y)$ نشان داده و آن را یک بازه می‌خوانیم.

د . تمامی zهای حقیقی که $x < z \le y$ را به صورت $(x, y]$ نشان داده و آن را یک بازه می‌خوانیم.

معمولاً بازهٔ $[x, y)$ را از سمت چپ بسته و از سمت راست باز می‌گوییم. همچنین گوییم بازهٔ $(x, y]$ از سمت چپ باز و از سمت راست بسته است. برای نمایش یک بازه بر محور اعداد حقیقی، تمام نقاطی که درون بازه هستند را مشخص می‌کنیم. دو نقطهٔ انتهایی را اگر درون بازه باشند، با دایرهٔ توپُر و اگر درون بازه نباشند با دایرهٔ توخالی نمایش می‌دهیم. به‌طور مثال برای نمایش بازهٔ $(۰, ۱]$ شکل زیر را رسم می‌کنیم.



مثال ۲۳.۶: هر یک از موارد زیر را به صورت یک بازه نوشته و بر محور اعداد مشخص سازید.

آ . $۰ \le x < ۱$ ب . $-۱ < x < ۳$ ج . $-۳ \le x < -۱$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۴.۶ قدر مطلق

قدر مطلق عدد a را با $|a|$ نشان می‌دهیم و برخی آن را «مقدار عدد، بدون توجه به علامت آن» گویند که عبارتی بی‌معناست. زیرا مقدار هر عددی خود آن است. می‌توان آن را به‌صورت زیر تعریف نمود.

تعریف ۹.۶: قدر مطلقِ a را با $|a|$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|a| = \begin{cases} a \quad ; & \text{اگر } a \ge ۰ \\ -a \quad ; & \text{اگر } a < ۰ \end{cases}$$

یا به‌عبارتی برای هر عدد حقیقیِ لخواه مانند a داریم:

- اگر $a \ge ۰$ آن‌گاه $|a| = a$
- اگر $a < ۰$ آن‌گاه $|a| = -a$

به‌طور مثال چون $۳ > ۰$، پس $|۳| = ۳$؛ اما چون $-۳ < ۰$ پس $|-۳| = -(-۳) = ۳$. قدر مطلق، علامت را از کنار عدد برمی‌دارد و چیزی که می‌ماند اندازه یا همان قدر مطلق عدد است. اگر به محور اعداد نگاه کنیم، می‌بینیم قدر مطلق هر عدد حقیقی، فاصله آن تا مبدأ است (منظور از مبدأ، نقطهٔ متناظر با عددِ صفر است).

مثال ۲۴.۶: مقادیر زیر را بیابید.

آ. $|-34|$ ب. $|0|$ ج. $|4|$

د. $|-5|$ هـ. $|-3|$ و. $|2|$

پاسخ: آ. $-34 < 0 \Longrightarrow |-34| = -(-34) = 34 \Longrightarrow |-34| = 34$

ب. $0 \geq 0 \Longrightarrow |0| = 0$

ج. $4 \geq 0 \Longrightarrow |4| = 4$

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

قضیه ۱۰.۶: برای هر عدد حقیقی مانند a داریم $|a| \geq 0$.

اثبات: اگر $a \geq 0$ بنا به تعریف (۹.۶) داریم $|a| = a \geq 0$ و درنتیجه $|a| \geq 0$
اگر $a < 0$، آنگاه $|a| = -a$ و چون $a < 0$ پس $-a > 0$ و درنتیجه $|a| > 0$ پس $|a| \geq 0$ ■

۱.۴.۶ معادلات قدر مطلقی

به معادلهٔ $|x| = 4$ توجه کنید. برای x دو جواب وجود دارد. $x=4$ و $x=-4$. زیرا $|4| = 4$ و $|-4| = -(-4) = 4$. اما می‌خواهیم با استفاده از تعریف، برای این معادله جوابی بیابیم. برای عددی که x به جای آن قرار گرفته دو حالت وجود دارد:

- $x \geq 0$ که در این‌صورت $|x| = 4 \Longrightarrow x = 4$
- $x < 0$ که در این‌صورت $|x| = 4 \Longrightarrow -x = 4 \Longrightarrow x = -4$

بنابراین $x=4$ و $x=-4$ جواب‌های معادله هستند که به اختصار می‌نویسیم $x=\pm 4$.

می‌خواهیم معادلهٔ $|x-2| = 7$ را حل کنیم. اگر x عددی حقیقی باشد که $x - 2 \geq 0$ در این صورت $|x-2| = x-2$ و درنتیجه داریم:

$$|x-2| = 7 \Longrightarrow x-2 = 7 \Longrightarrow x = 9$$

و اگر $x - 2 < 0$ آنگاه $|x-2| = -(x-2)$، پس داریم:

$$|x-2| = 7 \Longrightarrow -(x-2) = 7 \Longrightarrow x-2 = -7 \Longrightarrow x = (-7) + 2 = -5$$

بنابراین $x = 9$ و $x = -5$ جواب‌های معادله هستند.

مثال ۲۵.۶: معادلات زیر را در اعداد حقیقی حل کنید.

آ. $|x| = 7$ ب. $|x-5| = 7$ ج. $|x+3| = 5$

د. $|2x+3| = 5$ هـ. $|2x-4| = 2$ و. $|3x-6| = 0$

پاسخ: با توجه به آنچه پیش از مثال بیان شد، ساده است و به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

قضیهٔ زیر این امکان را به ما می‌دهد تا برخی معادلات قدر مطلقی را سریع‌تر حل کنیم.

قضیه ۱۱.۶: برای هر دو عدد حقیقی مانند a و b داریم: اگر $|a| = b \geq 0$ آنگاه $a = \pm b$

اثبات: با بررسی دو حالت $a \geq ۰$ و $a < ۰$ به‌سادگی اثبات می‌شود. ■

مثال ۲۶.۶: معادلات زیر را حل کنید.

آ. $|x| = ۵$ ب. $|x+۳| = ۶$ ج. $|۳x+۴| = ۲$

توجه!..........توجه!
اعداد حقیقی شامل اعداد طبیعی، کسری، صحیح و گویا است.

پاسخ: آ. $x = \pm ۵$ یعنی $x = ۵$ و $x = -۵$ جواب‌های معادله هستند.

ب. $|x+۳| = ۶ \Longrightarrow x+۳ = \pm ۶ \Longrightarrow \begin{cases} x+۳ = ۶ \Longrightarrow x = ۳ \\ x+۳ = -۶ \Longrightarrow x = -۹ \end{cases}$

بنابراین جواب‌های معادله $x = ۳$ و $x = -۹$ هستند.

ج. $|۳x+۴| = ۲ \Longrightarrow ۳x+۴ = \pm ۲ \Longrightarrow \begin{cases} ۳x+۴ = ۲ \Longrightarrow ۳x = -۲ \Longrightarrow x = -\frac{۲}{۳} \\ ۳x+۴ = -۲ \Longrightarrow ۳x = -۶ \Longrightarrow x = -۲ \end{cases}$ بنابراین، $x = \frac{-۲}{۳}$ و $x = -۲$ جواب‌های معادله‌اند. ■

مثال ۲۷.۶: شخصی معادلهٔ $|۵x+۱۲| = ۳x+۴$ را به شکل زیر حل می‌کند:

$$|۵x+۱۲| = ۳x+۴ \Longrightarrow ۵x+۱۲ = \pm(۳x+۴)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ۵x+۱۲ = ۳x+۴ \Longrightarrow ۲x = -۸ \Longrightarrow x = -۴ \\ ۵x+۱۲ = -(۳x+۴) \quad \Longrightarrow ۵x+۱۲ = -۳x-۴ \\ \qquad \Longrightarrow ۸x = -۱۶ \\ \qquad \Longrightarrow x = -۲ \end{cases}$$

بنابراین $x = -۴$ و $x = -۲$ جواب‌های معادله است. اما با جای‌گذاری آن در معادله داریم:

- $\boldsymbol{x = -۴}$: $|۵(-۴)+۱۲| = ۸$ و $۳(-۴)+۴ = -۸$ پس $x = -۴$ جواب این معادله نیست.
- $\boldsymbol{x = -۲}$: $|۵(-۲)+۱۲| = ۲$ و $۳(-۲)+۴ = -۲$ پس $x = -۲$ جواب این معادله نیست.

آیا می‌توانید توضیح دهید چرا جواب‌های به‌دست آمده اشتباه هستند؟ آیا قضیه (۱۱.۶) نادرست است؟ یا اینکه در استفاده از آن اشتباه شده است؟ آیا این معادله جواب ندارد؟ و اگر جواب دارد، این‌گونه معادلات را باید چگونه حل کنیم تا بدون امتحان کردن جواب، از درستی پاسخ مطمئن باشیم؟

پاسخ: در قضیه (۱۱.۶) شرط $b \geq ۰$ وجود دارد اما در زمان پاسخ‌دادن به این معادله این شرط لحاظ نشده است؛ چون مقدار x معلوم نیست، پس نمی‌دانیم $۳x+۴ \geq ۰$ یا $۳x+۴ < ۰$.
برای حل کردن معالهٔ فوق با حالت‌بندی داریم:

$$\begin{cases} \boldsymbol{۵x+۱۲ \geq ۰:} \ |۵x+۱۲| = ۳x+۴ \Longrightarrow ۵x+۱۲ = ۳x+۴ \Longrightarrow ۲x = -۸ \Longrightarrow x = -۴ \\ \boldsymbol{۵x+۱۲ < ۰:} \ |۵x+۱۲| = ۳x+۴ \Longrightarrow -(۵x+۱۲) = ۳x+۴ \Longrightarrow -۸x = ۱۶ \Longrightarrow x = -۲ \end{cases}$$

اما از طرفی هم داریم:

$$\begin{cases} ۵x+۱۲ \geq ۰ \Longrightarrow ۵x \geq -۱۲ > -۱۵ \Longrightarrow x > -۳ \Longrightarrow x \geq -۲ \\ ۵x+۱۲ < ۰ \Longrightarrow ۵x < -۱۲ < -۱۰ \Longrightarrow x < -۲ \end{cases}$$

جواب $x = -۴$ با شرط $۵x+۱۲ \geq ۰$ به‌دست آمده است که با شرط $x \geq -۲$ معادل است اما $-۴ \not\geq -۲$ پس این جواب غیر قابل قبول است.

همچنین جواب $x=-۲$ با شرط $۵x+۱۲<۰$ به‌دست آمده است که با شرط $x<-۲$ معادل است اما $-۲\not<-۲$ پس این جواب نیز غیر قابل قبول است.

بنابراین معادلهٔ فوق جواب ندارد. ■

مثال ۲۸.۶: **معادلات زیر را در اعداد حقیقی حل کنید.**

آ. $|x|=x$ ب. $|x+۱|=x-۱$ ج. $|۲x+۳|=x+۵$

د. $|x+۱|=|۴-x|$ هـ. $|x+۱|=۴-|x-۱|$ و. $|۵x+۱۲|=|۳x+۴|$

پاسخ: از حالت‌بندی استفاده می‌کنیم.

آ. $\begin{cases} \boldsymbol{x\geq ۰:}\ |x|=x \Longrightarrow x=x \Longrightarrow x\in[۰,۱) \\ \boldsymbol{x<۰:}\ |x|=x \Longrightarrow -x=x \Longrightarrow x=۰\not<۰ \Longrightarrow \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$

ب. نخست عبارت داخل قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم.

$$\begin{cases} x+۱\geq ۰ \Longleftrightarrow x\geq -۱ \\ x+۱<۰ \Longleftrightarrow x<-۱ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x\geq -۱: & |x+۱|=x+۱ \\ x<-۱: & |x+۱|=-(x+۱) \end{cases}$$

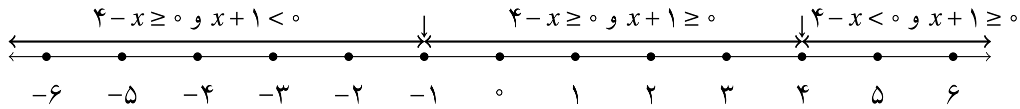
بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x\geq -۱:} & |x+۱|=x-۱ \Longrightarrow x+۱=x-۱ \Longrightarrow ۱=-۱ \Longrightarrow \text{جواب ندارد.} \\ \boldsymbol{x<-۱:} & |x+۱|=x-۱ \Longrightarrow -(x+۱)=x-۱ \Longrightarrow (-x)+(-۱)=x+(-۱) \\ & \Longrightarrow -x=x \Longrightarrow x=۰\not<-۱ \Longrightarrow \text{جواب غیر قابل قبول است.} \end{cases}$$

پس این معادله در $\mathbb{R}$ جواب ندارد.

د. $\begin{cases} x+۱\geq ۰ \Longrightarrow x\geq -۱ \\ x+۱<۰ \Longrightarrow x<-۱ \end{cases}$ و $\begin{cases} ۴-x\geq ۰ \Longrightarrow ۴\geq x \Longrightarrow x\leq ۴ \\ ۴-x<۰ \Longrightarrow ۴<x \Longrightarrow x>۴ \end{cases}$

با توجه به نقاط $x=-۱$ و $x=۴$ که عبارات درون قدر مطلق‌ها در این نقاط تغییر علامت می‌دهند، محور اعداد به سه قسمت تقسیم می‌شود. حالت‌بندی زیر می‌تواند ما را در حل این مسئله یاری کند.



$$\boldsymbol{x<-۱:}\quad |x+۱|=|۴-x| \Longrightarrow -(x+۱)=۴-x \Longrightarrow (-x)+(-۱)=۴+(-x)$$
$$\Longrightarrow -۱=۴ \Longrightarrow \text{در این حالت جواب ندارد}$$

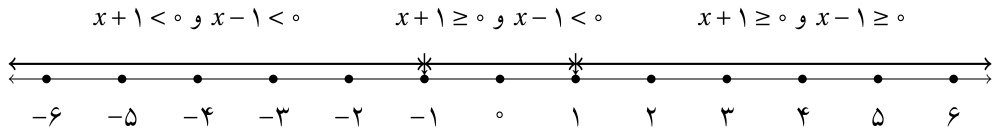
$$\boldsymbol{-۱\leq x\leq ۴:}\quad |x+۱|=|۴-x| \Longrightarrow x+۱=۴-x \Longrightarrow ۲x=۳$$
$$\Longrightarrow x=\frac{۳}{۲} \Longrightarrow \text{در اعداد حقیقی جواب ندارد}$$

$$\boldsymbol{x>۴:}\quad |x+۱|=|۴-x| \Longrightarrow x+۱=-(۴-x)=x-۴ \Longrightarrow ۱=-۴$$
$$\Longrightarrow \text{در این حالت جواب ندارد}$$

درنتیجه، این معادله در $\mathbb{R}$ جواب ندارد.

هـ. $\begin{cases} x+۱\geq ۰ \Longrightarrow x\geq -۱ \\ x+۱<۰ \Longrightarrow x<-۱ \end{cases}$ و $\begin{cases} x-۱\geq ۰ \Longrightarrow x\geq ۱ \\ x-۱<۰ \Longrightarrow x<۱ \end{cases}$

با توجه به $x=۱$ و $x=-۱$ محور اعداد به سه قسمت تقسیم می‌شود که حالت‌بندی زیر را نتیجه می‌دهد.



$$\boldsymbol{x<-1}: |x+1| = 4-|x-1| \implies -(x+1) = 4-\big(-(x-1)\big) \implies -2x = 4 \implies x=-2$$

$$\boldsymbol{-1 \le x < 1}: |x+1| = 4-|x-1| \implies x+1 = 4-\big(-(x-1)\big) \implies x+1 = 4+x+(-1) \implies 1=3$$
$\implies$ این معادله جواب ندارد.

$$\boldsymbol{x \ge 1}: |x+1| = 4-|x-1| \implies x+1 = 4-(x-1) \implies 2x = 4 \implies x = 2$$

$x=-2$ در حالت $x<-1$ به‌دست آمده است و چون $-2<-1$ پس این جواب قابل قبول است.
همچنین، چون $2 \ge 1$ پس $x=2$ نیز قابل قبول است. ■

قضیه ۱۲.۶: برای هر عدد حقیقی مانند a داریم: $\boldsymbol{a^2 = \left|a^2\right| = |a|^2}$

اثبات: با حالت‌بندی روی علامت a به‌سادگی اثبات می‌شود. ■

۲.۴.۶ نامعادلات قدر مطلقی

برای حل نامعادلهٔ $|x| \le 3$ با حالت بندی براساس علامت عبارت داخل قدر مطلق می‌توانیم از تعریف (۹.۶) استفاده کنیم.

$$\begin{cases} x \ge 0 : |x| \le 3 \iff 0 \le x \le 3 \iff x \in [0,3] \\ x < 0 : |x| \le 3 \iff -x \le 3 \iff -3 \le x < 0 \iff x \in [-3,0] \end{cases}$$

پس همهٔ اعضای بازهٔ بستهٔ $[-3,3]$ جواب‌های نامعادله هستند که به $-3 \le x \le 3$ اشاره دارد.

مثال ۲۹.۶: نامعادلات زیر را در اعداد حقیقی حل کنید.

آ. $|x+3| \le 4$ ب. $|x+1| \le 5$ ج. $|x+3| \le 2x$

(راهنمایی: باید براساس علامت عبارت داخل پرانتز حالت‌بندی کرد.)

پاسخ: آ. اول نامعادلات $x+3 \ge 0$ و $x+3<0$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x+3 \ge 0 \implies x \ge -3 \\ x+3 < 0 \implies x < -3 \end{cases} \implies \begin{cases} x \ge -3:\ |x+3| \le 4 \implies x+3 \le 4 \implies x \le 1 \\ x < -3:\ |x+3| \le 4 \implies -(x+3) \le 4 \implies x \ge -7 \end{cases}$$

در حالت اول: از بین xهایی که $x \ge -3$، آن xهایی که $x \le 1$، جواب معادله هستند.
پس $-3 \le x \le 1$ جواب‌های نامعادله هستند. که بازهٔ $[-3,1]$ را مشخص می‌سازد.
در حالت دوم: به‌طور مشابه $-7 \le x < -3$ جواب‌های نامعادله هستند. پس $x=-7,-6,-5,-4$
بنابراین جواب‌های نامعادله فوق $-7 \le x \le 1$ است که با بازهٔ $[-7,1]$ را مشخص می‌سازد.
موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

قضیه ۱۳.۶: برای هر دو عدد حقیقی مانند a و b داریم:
آ. $|a| \le b$ اگر و تنها اگر $-b \le a \le b$
ب. $|a| \ge b \ge 0$ اگر و تنها اگر $a \le -b$ یا $a \ge b$.

اثبات: به عهده خواننده گذاشته می‌شود. (راهنمایی: از پاسخ مثال قبل ایده بگیرید.) ■

قضیهٔ فوق در حل نامعادلات قدر مطلقی بسیار راه‌گشا است. در مثال زیر، کاربرد این قضیه را مشاهده می‌کنیم.

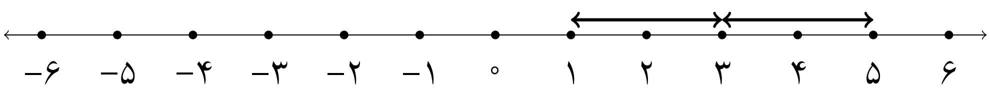
مثال ۳۰.۶: نامعادلات زیر را در اعداد حقیقی حل کنید.

آ. $|x| \leq ۵$ ب. $|x| \geq ۳$ ج. $|x-۵| \leq ۲$

د. $|x+۴| \leq ۳$ ه. $|x-۳| \geq ۵$ و. $|x+۳| \geq ۵$

پاسخ: با استفاده از قضیه (۱۳.۶) ساده است. ■

اگر مجموعه جواب نامعادلات مثال فوق را بر محور اعداد حقیقی نشان دهیم، خواهیم دید، با فرض اینکه a و b اعدادی حقیقی هستند که $b \geq ۰$، جواب‌های نامعادلهٔ $|x-a| \leq b$ تمام نقاطی خواهند بود که فاصلهٔ آنها از a کمتر یا مساوی b است. به‌طور مثال جواب‌های نامعادلهٔ $|x-۳| \leq ۲$ را بر محور اعداد نشان می‌دهیم.



یعنی بازهٔ $[۱,۵]$ جواب‌های نامعادله هستند.

قضیه ۱۴.۶: برای هر دو عدد حقیقی مانند a و b داریم:

آ. $|ab| = |a|.|b|$ ب. $-|a| \leq a \leq |a|$

ج. $|a+b| \leq |a|+|b|$ د. $\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$

اثبات: موارد (آ) و (ب) به‌سادگی با حالت‌بندی به‌دست می‌آیند.

ج. با استفاده از قضیه (۱۴.۶)، با به توان دو رساندن دو طرف تساوی داریم:

$$|a+b|^۲ = (a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$
$$(|a|+|b|)^۲ = |a|^۲ + ۲|a|.|b| + |b|^۲ = a^۲ + ۲|ab| + b^۲$$

که با استفاده از مورد (آ) نتیجه حاصل می‌شود و به‌صورت زیر مرتب می‌گردد.

$$\begin{aligned}
ab \leq |ab| &\Longrightarrow ab \leq |a|.|b| \Longrightarrow ۲ab \leq ۲|a|.|b| \\
&\Longrightarrow a^۲ + ۲ab + b^۲ \leq a^۲ + ۲|a|.|b| + b^۲ \\
&\Longrightarrow a^۲ + ۲ab + b^۲ \leq |a|^۲ + ۲|a|.|b| + |b|^۲ \\
&\Longrightarrow (a+b)^۲ \leq (|a|+|b|)^۲ \\
&\Longrightarrow |a+b|^۲ \leq (|a|+|b|)^۲
\end{aligned}$$

و چون $|a+b|$ و $(|a|+|b|)$ هر دو اعدادی طبیعی هستند، از قضیه (۷.۱) داریم

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

د. $|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b|+|b|$ پس $|a| \leq |a-b|+|b|$ در نتیجه $|a|-|b| \leq |a-b|$ و به‌طور مشابه می‌توانیم نتیجه بگیریم $|b|-|a| \leq |a-b|$ که در این‌صورت $-|a-b| \leq |a|-|b| \leq |a-b|$ و درنتیجه $\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$. ■

۵.۶ تابع علامت

تابع علامت که با sgn نشان داده می‌شود را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۰.۶: برای هر عدد حقیقی مانند a، علامت a را با $\mathrm{sgn}(a)$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{sgn}(a)=\begin{cases} ۱: & \text{اگر } a>۰ \\ ۰ & \text{اگر } a=۰ \\ -۱ & \text{اگر } a<۰ \end{cases}$$

به عبارتی $\mathrm{sgn(a)}$ علامت a را با نسبت دادن ۱، صفر و ۱− به آن تعیین می‌کند که مقدار $\mathrm{sgn}(a)$ فقط به علامت a بستگی دارد. به عدد صفر علامتی نسبت داده نمی‌شود[1] و به‌همین جهت آن را بنا به قرارداد با صفر نشان می‌دهیم. البته این قرارداد در خاصیتی ریشه دارد که آن را در قضیهٔ زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۵.۶: برای هر عدد حقیقی و <u>ناصفر</u> مانند a داریم: $\mathbf{sgn}(a)=\dfrac{a}{|a|}=\dfrac{|a|}{a}$

اثبات: چون $a\neq ۰$ پس یا $a>۰$ یا $a<۰$ که در هر دو صورت هر دو تقسیم $\dfrac{a}{|a|}$ و $\dfrac{|a|}{a}$ تعریف شده هستند و برای $a>۰$ مقدار هر دو برابر ۱ و برای $a<۰$ مقدار هر دو برابر ۱− خواهد بود. ■

قضیه ۱۶.۶: برای هر دو عدد حقیقی مانند a و b داریم:

$$\mathbf{sgn}\ (a.b)=\mathbf{sgn}(a).\mathbf{sgn}(b)$$

اثبات: اگر $a=۰$ یا $b=۰$، به وضوح تساوی فوق برقرار است. پس فرض می‌کنیم $a,b\neq ۰$. در این‌صورت:

$$\mathrm{sgn}(ab)=\frac{|ab|}{ab}=\frac{|a|.|b|}{ab}=\frac{|a|}{a}\cdot\frac{|b|}{b}=\mathrm{sgn}(a).\mathrm{sgn}(b)$$ ■

با دیگر خواص تابع علامت در تمرینات آشنا خواهیم شد.

تمرین:

توجه! توجه!
تمرینات این بخش مهم و پر از نکته هستند.
با دقت بخوانید.

حتماً پاسخ دهید...
پاسخ دادن به هر مورد با توجه به پاسخِ موارد قبل ساده است.

(۱۸) مقادیر زیر را به‌دست آورید.

آ. $|-۶|$ ب. $|۴-۳|$ ج. $||۴|-|-۳||$

د. $||-۴|-|۳||$ ه. $|۳-۴|$ و. $|(-۴)-۳|$

(۱۹) معادلات زیر را در اعداد حقیقی حل کنید.

آ. $|x|=۳$ ب. $|x|=-۳$ ج. $|۴+x|=۳$

د. $||x|-۲|=۴$ ه. $|x-۱|=|x-۳|$ و. $|x-۲|=|۴-x|$

ز. $|x-۱|-|x-۵|=۲$ ح. $||x-۱|-|x-۵||=۲$ ط. $|x-۴|=۳$

ی. $||x-۱|-۲|=۳$ ک. $|x+۵|=|۳-x|$ ل. $||x+۱|-|x+۷||=۴$

(۲۰) a و b اعدادی حقیقی هستند. نشان دهید $|a-b|\le|a|+|b|$

(۲۱) فرض کنید x و y اعدادی حقیقی هستند که $|x|\le ۳$ و $|y|\le ۴$. نشان دهید:

آ. $|x.y|\le ۱۲$ ب. $-۱۲\le x.y\le ۱۲$ ج. $|x+y|\le ۷$

د. $|x-y|\le ۷$ ه. $||x|-|y||\le ۴$

[1] ــ به یاد دارید که عدد صفر، نه مثبت است و نه منفی.

(۲۲) نامعادلات زیر را در اعداد حقیقی حل کنید.

آ. $|x| \le ۵$ ب. $|x| < ۷$ ج. $|x| \ge ۴$

د. $|x| > ۵$ ه. $|x - ۴| \le ۳$ و. $|x - ۴| \ge ۵$

ز. $|x + ۳| < ۵$ ح. $|x + ۴| > ۷$ ط. $||x| - ۱| \le ۳$

ی. $||x| - ۳| \ge ۵$ ک. $||x - ۲| - ۴| \le ۵$ ل. $||x + ۳| + ۳| \ge ۲$

(۲۳) درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را برای هر دو عدد حقیقیِ a و b بررسی کنید.

آ. $\operatorname{sgn}(a+b) = \operatorname{sgn}(a)$ اگر و تنها اگر $a > b$

ب. اگر $a > b$ آن‌گاه $\operatorname{sgn}(a+b) = \operatorname{sgn}(a)$

ج. اگر $a > b$ آن‌گاه $\operatorname{sgn}(a-b) = \operatorname{sgn}(a)$

(۲۴) نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی مانند a و b داریم:

آ. $a > b$ اگر و تنها اگر $\operatorname{sgn}(a-b) = ۱$

ب. $a = b$ اگر و تنها اگر $\operatorname{sgn}(a-b) = ۰$

ج. $a < b$ اگر و تنها اگر $\operatorname{sgn}(a-b) = -۱$

(۲۵) فرض کنید $a > ۰$ و $b < ۰$. نشان دهید:

آ. $\operatorname{sgn}(a+b) = \operatorname{sgn}(a)$ اگر و تنها اگر $|a| > |b|$

ب. $\operatorname{sgn}(a+b) = \operatorname{sgn}(b)$ اگر و تنها اگر $|a| < |b|$

۶.۶ جزء صحیح

در عددی اعشاری مانند $۲۳٫۴۵ = ۲۳ + ۰٫۴۵$، عدد ۲۳ را جزء صحیح و ۰٫۴۵ را جزء اعشاری آن می‌خوانیم. به‌طور کلی در عددی اعشاری مانند $x = a_۰ + ۰٫a_۱a_۲a_۳\ldots a_n$، $a_۰$ را جزء صحیحِ x گوییم. اما برای جزء صحیح اعداد حقیقی با اعشار نامتناهی مانند $۰٫۹۹۹\ldots = ۱$، نمی‌توانیم از این ایده استفاده کنیم؛ چون می‌خواهیم جزء صحیح اعداد صحیح، خودشان باشند. اما باتوجه به اینکه در نمایش‌های اعشار متناهی داریم $۰ \le ۰٫a_۱a_۲a_۳\ldots a_n < ۱$ پس

$$a_۰ \le x = a_۰ + ۰٫a_۱a_۲a_۳\ldots a_n < a_۰ + ۱$$

بنابراین، می‌توانیم بگوییم جزء صحیح هر عدد اعشاری با نمایش اعشار متناهی مانند x، عددی است صحیح مانند n که $n \le x < n + ۱$ و با توجه به این تعریف، می‌توان جزء صحیح را به اعداد حقیقی با اعشار نامتناهی نیز توسعه داد.

گزاره ۷.۶: برای هر عدد حقیقی مانند x، جزء صحیح x را با $[x]$ نمایش داده و عددی است صحیح مانند n که $n \le x < n + ۱$.

مثال ۳۱.۶: مقادیر زیر را به‌دست آورید.

آ. $[۳٫۴۵]$ ب. $\left[۲٫\overline{۹}\right]$ ج. $\left[\sqrt{۲}\right]$ د. $\left[٫۴۷^{\frac{۲}{۵}}\right]$

پاسخ: آ. $[۳٫۴۵] = ۳ \Longleftarrow ۳ \le ۳٫۴۵ < ۳ + ۱$

ب. $[۲٫\overline{۹}] = ۳ \Longleftarrow ۳ = ۲٫\overline{۹} \le ۲٫\overline{۹} < ۳٫\overline{۹} = ۴ = ۳ + ۱$

ج. $[\sqrt{۲}] = ۱ \Longleftarrow ۱ \le \sqrt{۲} < ۲ \Longleftarrow ۱^۲ \le ۲ < ۲^۲$

د. $\left[٫۴۷^{\frac{۲}{۵}}\right] = ۰ \Longleftarrow ۰ < ٫۴۷^{\frac{۱}{۵}} < ۱^{\frac{۲}{۵}} = ۱ \xLeftarrow{\frac{۲}{۵} > ۰} ۰ < ٫۴۷ < ۱$ ■

شخصی ادعا می‌کند $[-۲٫۱] = -۲$ اما اگر به تعریف بنگریم می بینیم که این $-۳ \le -۲٫۱ < -۲$ پس $[-۲٫۱] = -۳$.

مثال ۳۲.۶: حاصل مقادیر زیر را به‌دست آورید.

آ. $[-۴٫۰۰۱]$ ب. $[-۰٫۰۰۱]$ ج. $\left[\sqrt[۳]{-۲۰}\right]$ د. $[-۲٫۹۹۹\ldots]$

پاسخ: آ. $-۵ \le -۴٫۰۰۱ < -۴ \Longrightarrow [-۴٫۰۰۱] = -۵$ ب. $[-۰٫۰۰۱] = -۱$

ج. $(-۳)^۲ = ۲۷ \le -۲۰ < -۸ = (-۲)^۳ \Longrightarrow -۳ \le \sqrt[۳]{-۲۰} < -۲ \Longrightarrow \left[\sqrt[۳]{-۲۰}\right] = -۳$

د. $[-۲٫۹۹۹\ldots] = [-۳] = -۳$ ■

مثال ۳۳.۶: نشان دهید برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ و هر $n \in \mathbb{Z}$ داریم:

آ. $[x] = x \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$ ب. اگر $x \ge ۰$ آن‌گاه $\left|[x]\right| = \left[|x|\right]$

ج. اگر $x < ۰$ آن‌گاه $\left|[-x]\right| = \left[|x|\right]$ د. $[-x] = -[x] \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

ه. $[x \pm n] = [x] \pm n$ و. $[x] + [y] \le [x+y] < [x] + [y] + ۲$

ز. $x < n \Longrightarrow [x] < n$ ح. $n > ۰ \Longrightarrow n[x] \le [nx] < n[x] + n$

ط. $n < x \Longrightarrow n \le [x]$ ی. $n < ۰ \Longrightarrow n[x] + n \le [nx] \le n[x]$

پاسخ: آ. واضح است.

ب. اگر $x \ge ۰$ پس $|x| = x$ و درنتیجه $[x] = \left[|x|\right]$ و چون $x \ge ۰$ پس $[x] \ge ۰$ و درنتیجه $[x] = \left|[x]\right|$. بنابراین، $\left|[x]\right| = \left[|x|\right]$.

ج. اگر $x < ۰$ پس $|x| = -x$ و مورد قبل تساوی $\left|[-x]\right| = \left[|x|\right]$ را ثابت می‌کند.

د. اگر $[x] \le x < x + ۱$ آن‌گاه $-x - ۱ < -x \le -[x]$. از طرفی هم داریم $[-x] \le -x < [-x] + ۱$ بنابراین $[-x] \le -x \le -[x]$. پس اگر $-[x] = [-x]$، آن‌گاه $-[x] = -x = [-x]$ و درنتیجه $[x] = x$ پس $x \in \mathbb{Z}$.

ه. $[x] \le x < [x] + ۱ \Longrightarrow [x] + n \le x + n < [x] + n + ۱ \xrightarrow{[x]+n \in \mathbb{Z}} [x+n] = [x] + n$

و. $[x] \le x < [x] + ۱$ و $[y] \le y < [y] + ۱$ درنتیجه داریم:

$$[x] + [y] \le [x] + y \le x + y < x + [y] + ۱ < [x] + ۱ + [y] + ۱ = [x] + [y] + ۲$$

ز. $[x] \le x < n \Longrightarrow [x] < n$

ح. $[x] < x < [x] + ۱ \xrightarrow{n>۰} n[x] \le nx < n\big([x] + ۱\big) = n[x] + n \xrightarrow{\text{مورد قبل}} n[x] \le [nx] < n[x] + n$

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

مثال ۳۴.۶: معادلات زیر را حل کنید.

آ. $[x] = ۰$ ب. $[x] = ۵$ ج. $[x] = -۳$ د. $[x] = ۱٫۵$

ه. $[۲x] = ۰$ و. $[۲x] = ۵$ ز. $۲[x] = ۶$ ح. $۲[۱ - x] = ۵$

ط. $[x + ۱] = ۳$ ی. $[x + ۱٫۵] = ۳$ ک. $[۲x + ۱٫۵] = ۳$ ل. $۳[۱٫۵ - ۲x] = ۶$

پاسخ: آ. $[x] \le x < [x] + ۱ \xrightarrow{[x]=۰} ۰ \le x < ۱ \Longrightarrow x \in [۰, ۱)$

ه. $[۲x] \le ۲x < [۲x] + ۱ \xrightarrow{[۲x]=۰} ۰ \le ۲x < ۱ \Longrightarrow ۰ \le x < \frac{۱}{۲} \Longrightarrow x \in \left[۰, \frac{۱}{۲}\right)$

ز. $۲[x] = ۶ \Longrightarrow [x] = \frac{۶}{۲} = ۳ \Longrightarrow ۳ \le x < ۴ \Longrightarrow x \in [۳, ۴)$

ل. $۳[۱٫۵ - ۲x] = ۶ \Longrightarrow [۱٫۵ - ۲x] = ۲ \Longrightarrow ۲ \le ۱٫۵ - ۲x < ۳ \Longrightarrow ٫۵ \le -۲x < ۱٫۵$

$\Longrightarrow -۰٫۲۵ \ge x > -۰٫۷۵ \Longrightarrow x \in (-۰٫۷۵, -۰٫۲۵]$

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود. ■

تمرین:

(۲۶) نشان دهید برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ و هر $m, n \in \mathbb{Z}$ داریم:

آ. $[x] < n \Longleftrightarrow [x] \leq n - ۱$ ب. $[x] \leq n \Longleftrightarrow x < n + ۱$

ج. $[x] \leq y \Longleftrightarrow [x] \leq [y]$ د. $[x] \leq y \Longleftrightarrow x < [y + ۱]$

ه. $[x] > n \Longleftrightarrow x \geq n + ۱$ و. $[x] \geq n \Longleftrightarrow x \geq n$

ز. $[x] > y \Longleftrightarrow [x] > [y]$ ح. $[x] > y \Longleftrightarrow x \geq [y + ۱] = [y] + ۱$

(۲۷) نادرستی عبارات زیر را برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ نشان دهید.

آ. $[x] \geq y \Longleftrightarrow [x] \geq [y]$ ب. $[x] \geq y \Longleftrightarrow [x] > y$

ج. $[x] < y \Longleftrightarrow [x] < [y]$ د. $[x] < y \Longleftrightarrow [x] \leq [y]$

(۲۸) نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{R}$ که $y \in \mathbb{Z}$ داریم:

آ. $[x] < y \Longleftrightarrow [x] < [y]$ ب. $[x] \geq y \Longleftrightarrow [x] \geq [y]$

(۲۹) نشان دهید برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ که $y \notin \mathbb{Z}$ داریم:

آ. $[x] \geq y \Longleftrightarrow [x] > [y]$ ب. $[x] < y \Longleftrightarrow [x] \leq [y]$

(۳۰) نامعادلات زیر را حل کنید.

آ. $[x] \leq ۳$ ب. $[x] < ۳$ ج. $[x] \geq ۱$ د. $[x] > ۱$

ه. $[x] < ۰/۵$ و. $[x] > ۰/۵$ ز. $[۲x + ۱] \geq ۱$ ح. $۲[۳x - ۲] < ۹$

ط. $۳[۱ - ۲x] > ۷$ ی. $[\sqrt{x}] < ۳$ ک. $[\sqrt{x}] \leq ۳$ ل. $[\sqrt[۳]{x}] \leq ۲$

م. $[\sqrt[۳]{x}] < ۳$ ن. $[x^۲] < ۴$ س. $[x^۳] \leq ۸$

۷.۶ توان، ریشه و لگاریتم در اعداد حقیقی

همان‌طور که دیدیم، مشکل اساسی که ما را به سمت تشکیل اعداد حقیقی سوق داد، معنا نداشتن $\sqrt{۲}$ در اعداد گویا بود. اما برای تعریف ریشهٔ اعداد حقیقی، نخست باید توان را در اعداد حقیقی تعریف کنیم. با توجه به اینکه ضرب اعداد حقیقی بامعناست و دارای خواص جبریِ ضرب اعداد گویا است، به‌سادگی می‌توان برای هر $a \in \mathbb{R}$ و هر $n \in \mathbb{N}$، عبارت a^n را مشابه قبل تعریف کرد.

تعریف ۱۱.۶: برای هر $a \in \mathbb{R}$ و هر $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم: آ. $a^۰ = ۱$ ب. $a^{n+۱} = a^n \times a$

مشابه آنچه در فصل دوم دیدیم، به‌سادگی می‌توانیم قضیهٔ زیر را نیز نتیجه بگیریم.

قضیه ۱۷.۶: برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ و هر $m, n \in \mathbb{N}$ داریم:

آ. $a^n a^m = a^{m+n}$ ب. $a^n b^n = (ab)^n$ ج. $(a^m)^n = a^{mn}$

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

به‌طور مشابه می‌توان قضیهٔ زیر را نیز دقیقاً مانند قضیهٔ مشابهی که در فصل قبل دیدیم، اثبات کرد.

قضیه ۱۸.۶: برای هر $a, b \in \mathbb{R}^+$ و هر $m, n \in \mathbb{N}$ داریم:

آ. برای $a, b \in \mathbb{R}^+$ و $n \neq ۰$ داریم $a < b \Longleftrightarrow a^n < b^n$

ب. برای هر $a > ۱$ داریم $a^m < a^n \Longleftrightarrow m < n$

ج. اگر $۰ < a < ۱$ آن‌گاه داریم $a^m < a^n \Longleftrightarrow m > n$

د. برای $n \neq ۰$ داریم $a^n = b^n \Longleftrightarrow a = b$
ه. برای $۰ < a \neq ۱$ داریم $a^m = a^n \Longleftrightarrow m = n$

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مورد (د) از قضیهٔ فوق نشان می‌دهد جواب معادلهٔ $x^n = a$ درصورت وجود یکتاست. اما مسئلهٔ اصلی وجود یا عدم وجود جواب این معادله است که معمولاً آن را با $\sqrt[n]{a}$ نمایش می‌دهیم. پیش از این دیدیم که معادلهٔ $x^۲ = ۲$ در $\mathbb{Q}$ جواب ندارد و درنتیجه $\sqrt{۲}$ در $\mathbb{Q}$ بی‌معناست. در تمرینات دیدیم که بسیاری از عبارت‌های $\sqrt[n]{a}$ در اعداد گویا جواب ندارند. به‌همین ترتیب $a^{\frac{۱}{n}}$ که با $\sqrt[n]{a}$ تعریف شده بود نیز در $\mathbb{Q}$ معنایی ندارد. همچنین a^α برای عددی کسری یا گویا مانند α لزوماً بامعنا نیست. از همهٔ اینها گذشته، در این فرآیند، برای تعریف عبارتی مانند $۲^{\sqrt{۲}}$ با مشکل مواجه می‌شویم. همچنین در تعریف و معنا بخشیدن به عبارتی مانند a^t که در آن t عددی گنگ است نیز مشکل داریم. راه‌حل این مشکل را در تعریف $\sqrt{۲}$ جستجو می‌کنیم. پیش از تعریف a^α برای $a, \alpha \in \mathbb{R}$ که هر دو می‌توانند گنگ نیز باشند، عبارت a^t را برای $a \in \mathbb{R}$ و $t \in \mathbb{Q}$ تعریف کرده، سپس عبارت a^α را برای $a, \alpha \in \mathbb{R}$ تعریف کرده و معنا می‌بخشیم.

پیش از این، $\sqrt{۲}$ را عددی حقیقی در نظر گرفتیم که برای هر $a \in \mathbb{Q}^+$ داریم:

$$a \gtreqless \sqrt{۲} \Longleftrightarrow a^۲ \gtreqless ۲$$

اما اگر عددی حقیقی مانند $x \in \mathbb{R}^+$ باشد که $x = \sqrt{۲}$ پس $x^۲ = ۲$ و درنتیجه با توجه به قضایای فوق، برای هر $a \in \mathbb{R}^+$ داریم:

$$a \gtreqless x \Longleftrightarrow a^۲ \gtreqless x^۲$$

بنابراین، می‌توانیم بگوییم $\sqrt{۲}$ عددی حقیقی است که برای هر $a \in \mathbb{R}^+$ داریم

$$a \gtreqless \sqrt{۲} \Longleftrightarrow a^۲ \gtreqless ۲$$

به‌همین روش، برای هر $a \in \mathbb{R}^+$ و هر $n \in \mathbb{N}$ که $n \geq ۱$ گوییم $\sqrt[n]{a}$ عددی حقیقی است که برای هر $b \in \mathbb{R}^+$ داشته باشیم

$$b \gtreqless \sqrt[n]{a} \Longleftrightarrow b^n \gtreqless a$$

بنابراین، می‌توانیم قضیهٔ زیر را بیان کنیم.

قضیه ۱۹.۶: برای هر $a \in \mathbb{R}^+$ و $n \in \mathbb{N}$ که $n \geq ۲$، معادلهٔ $x^n = a$ در $\mathbb{R}^+$ جوابی یکتا دارد.

اثبات: هرچند استدلال فوق پذیرش این قضیه را ساده می‌کند، اما اثبات آن با مشکلاتی جدی مواجه می‌شود که آن را از حوصلهٔ این کتاب خارج می‌کند. خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند اثبات این قضیه را در کتاب اصول آنالیز ریاضی اثر والتر رودین مشاهده کنند. ■

بدین‌ترتیب به سادگی می‌توان $a^{\frac{۱}{n}}$ را به‌معنای $\sqrt[n]{a}$ درنظر گرفت و آن را به تمامی $\mathbb{R}$ نیز گسترش داد؛ همان‌طور که در فصل قبل، ریشه را از اعداد کسری به اعداد گویا توسعه دادیم. بدین ترتیب برای هر $a \in \mathbb{R}^+$ و هر $t \in \mathbb{Q}$، عبارت a^t بامعناست.

خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند نشان دهند که تمامی قضایای بخش‌های ریشه و توان با نمای کسری و گویا از فصل قبل، برای اعداد حقیقیِ مثبت به‌توان اعداد گویا نیز برقرارند که از بیان مجدد

آنها صرف نظر می‌کنیم.
به‌طور مشابه، برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و هر $a \in \mathbb{R}^+$، عبارت a^α را عددی حقیقی درنظر می‌گیریم، به‌نحوی‌که برای هر $t \in \mathbb{Q}^+$ داریم:

$$a^t \gtreqless a^\alpha \iff t \gtreqless \alpha$$

بدین‌ترتیب، $a^{\sqrt{۲}}$ عددی حقیقی است، به‌نحوی که برای هر $t \in \mathbb{Q}^+$ داریم:

$$a^t \gtreqless a^{\sqrt{۲}} \iff t \gtreqless \sqrt{۲} \iff t^۲ \gtreqless ۲$$

بنابراین، می‌توانیم انتظار داشته باشیم که قضایای زیر که تعمیم قضایای قبلی به اعداد حقیقی هستند نیز درست می‌باشند. اما اولین قضیه که پیش از این آن را به‌اشتباه، در اعداد گویا درست فرض کرده بودیم از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

قضیه ۶.۲۰: برای هر $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ و هر $a,b \in \mathbb{R}^+$ داریم:
آ. عبارت a^α عددی حقیقی و یکتا را مشخص می سازد.
ب. $a \gtreqless b$ اگر و تنها اگر $a^\alpha \gtreqless b^\alpha$
ج. برای $a > ۱$ داریم $a^\alpha \gtreqless a^\beta \iff \alpha \gtreqless \beta$
د. برای $۰ < a < ۱$ داریم $a^\alpha \gtreqless a^\beta \iff \alpha \lesseqgtr \beta$

اثبات: اثبات مورد (آ) خارج از حوصله این کتاب است.
موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

قضیهٔ فوق این ایده را مطرح می‌کند که برای هر $a,b \in \mathbb{R}^+$ که $b \neq ۱$، معادلهٔ $b^x = a$ دارای جواب منحصربه‌فردی در $\mathbb{R}$ است. باز هم از اثبات آن صرف‌نظر کرده و درستی آن را می‌پذیریم. بدین‌ترتیب می‌توانیم $\log_b a$ را به‌عنوان جواب منحصربه‌فرد این معادله درنظر بگیریم. بدین‌ترتیب تمامی قضایایی که در بخش لگاریتم از فصل قبل ارائه کردیم، در اعداد حقیقی نیز برقرارند.

تمرین:

(۳۱) نشان دهید برای هر عدد اول مانند p و هر عدد طبیعی مانند $n > ۱$، $\sqrt[n]{p}$ عددی گنگ است.

(۳۲) نشان دهید $\sqrt[n]{p_۱^{k_۱} p_۲^{k_۲} \dots p_k^{k_m}}$ گویا است اگر برای هر i که $۱ \leq i \leq m$ داشته باشیم $n \mid k_i$.

(۳۳) بامعنا بودن عبارات زیر را در اعداد حقیقی مشخص کنید.

آ. $\sqrt{۱۲}$ ب. $\sqrt{-۹}$ ج. $\sqrt{۱۱ - ۲^۴}$

د. $\dfrac{\sqrt{۳}}{۱ - \sqrt{۳}}$ ه. $\dfrac{\sqrt[۳]{-۳}}{\sqrt[۳]{-۸} - ۲}$ و. $\dfrac{\sqrt[۳]{-۳}}{\sqrt[۳]{-۸} + ۲}$

ز. $\log_۲ ۳$ ح. $\log_۲ ۳^{-۱}$ ط. $\log_۲ ۱$

ی. $\log_۲ -۱$ ک. $\log_{۰/۵} ۱$ ل. $\log_۱ ۱$

(۳۴) درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ب. $\sqrt[۳]{a}\sqrt[۳]{b} = \sqrt[۳]{ab}$

ج. اگر $x = c^{\log_c a}$ آن‌گاه $x = a$ د. اگر $x = a$ آن‌گاه $x = c^{\log_c a}$

ه. اگر $x = \log_c a + \log_c b$ آن‌گاه $x = \log_c ab$

و. اگر $x = \log_c ab$ آن‌گاه $x = \log_c a + \log_c b$

فصل ۷

چندجمله‌ای‌ها و کاربردها

پایه‌ای - ضروری
هرچند ساده می‌نماید، اما با دقت بخوانید!

در معادله‌ای مانند $۳x + ۴ = ۲x - ۳$، در هر طرف تساوی عبارتی وجود دارد که با قرار دادن جواب به‌جای مجهول، تساوی برقرار می شود. به‌عبارت دقیق‌تر، اگر عبارت $۳x + ۴$ را با $\mathrm{P}(x)$ و عبارت $۲x - ۳$ را با $\mathrm{Q}(x)$ نمایش دهیم، می‌توانیم معادلهٔ فوق را به صورت $\mathrm{P}(x) = \mathrm{Q}(x)$ بازنویسی کنیم. معمولاً از عبارت $\mathrm{P}(x) = ۳x + ۴$ به‌معنای «$\mathrm{P}(x)$ به عبارت $۳x + ۴$ اشاره دارد» استفاده می‌کنیم. به‌همین ترتیب، $\mathrm{Q}(x) = ۲x - ۳$ به‌معنای «$\mathrm{Q}(x)$ به $۲x - ۳$ اشاره دارد» است.

برای حل معادلهٔ فوق باید عددی را بیابیم که با جایگذاری آن به‌جای x در عبارات $۳x + ۴$ و $۲x - ۳$، که آنها را به‌ترتیب با $\mathrm{P}(x)$ و $\mathrm{Q}(x)$ نمایش می‌دهیم، تساوی $\mathrm{P}(x) = \mathrm{Q}(x)$ برقرار گردد. با حل معادلهٔ فوق داریم:

$$\mathrm{P}(x) = \mathrm{Q}(x) \Longleftrightarrow ۳x + ۴ = ۲x - ۳ \Longleftrightarrow ۳x - ۲x = (-۳) - ۴ = -۷ \Longleftrightarrow x = -۷$$

بدین‌ترتیب با جایگذاری (-۷) به‌جای x در $\mathrm{P}(x)$، عبارت $\mathrm{P}(-۷)$ به‌دست می‌آید که به عبارت $۳(-۷) + ۴$ اشاره دارد. به طور مشابه، $\mathrm{Q}(-۷)$ نیز به $۲(-۷) - ۳$ اشاره دارد که نتیجه جایگذاری (-۷) به‌جای x در عبارت $\mathrm{Q}(x)$ است. پس داریم:

$$۳(-۷) + ۴ = ۲(-۷) - ۳ \Longleftrightarrow \mathrm{P}(-۷) = \mathrm{Q}(-۷)$$

برای هر عبارتی مانند $\mathrm{P}(x)$، نتیجهٔ جایگذاری هر $a \in \mathbb{R}$، به‌جای x در عبارت $\mathrm{P}(x)$ را با $\mathrm{P}(a)$ نمایش می‌دهیم. به‌طور مثال، برای $\mathrm{P}(x) = ۳x + ۴$ داریم $\mathrm{P}(۱) = ۳(۱) + ۴$ و $\mathrm{P}(۵) = ۳(۵) + ۴$.

با دقت بخوانید...
به تفاوت مجهول و متغیر دقت کنید.

شخصی به ما خُرده گرفته می‌گوید: در معادلهٔ $۳x + ۴ = ۲x - ۳$، نماد x به عدد (-۷) اشاره دارد، هرچند ما مقدار آن را نمی‌دانیم و به‌همین سبب آن را مجهول می‌خوانیم. حل کردن معادله به‌معنای یافتن آن مقدار مجهول است که به عددی حقیقی اشاره دارد. بنابراین، در عبارات $\mathrm{P}(x)$ و $\mathrm{Q}(x)$ نیز نماد x به (-۷) اشاره دارد و درنتیجه سخن گفتن از $\mathrm{P}(۱)$ و جایگذاری ۱ به‌جای مجهول x که به (-۷) اشاره دارد، بی‌معناست.

این شخص درست می‌گوید. نمی‌توان عددی غیر از جواب یا جوابهای معادله را در مجهول جایگذاری نمود. اما ریاضیدانان روش دیگری را در پیش می‌گیرند. آنان عبارت‌هایی مانند $\mathrm{P}(x)$ می‌سازند که در آن نماد x، به عددی خاص اشاره ندارد و مجهول نیست. در این نگاه جدید، نماد x را «متغیّر» خوانده و با جایگذاری هر عددی به‌جای آن عبارتی به دست می‌آید که قابل محاسبه است.

مثال ۱.۷: در هر یک از موارد زیر عبارت و مقدار $\mathrm{P}(a)$ را به‌دست آورید.

آ. $\mathrm{P}(x) = x + ۱$ و $a = ۳$
ب. $\mathrm{P}(x) = \sqrt{x}$ و $a = -۱$
ج. $\mathrm{P}(x) = ۳x^{۲} - ۲x + ۱$ و $a = ۱$
د. $\mathrm{P}(x) = ۲^{x} + ۳x + ۱$ و $a = ۲$
هـ. $\mathrm{P}(x) = (x - ۱)(x - ۳)$ و $a = ۱$
و. $\mathrm{P}(x) = (x - ۱)(x - ۳)$ و $a = ۳$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

البته می‌توان در بیان این عبارات از متغیرهای دیگر نیز استفاده کرد. به‌طور مثال می‌توان قرار داد $\mathrm{P}(y) = ۲y + ۳$. در این صورت $\mathrm{P}(۱) = ۲(۱) + ۳$ و مقدار آن نیز برابر است با ۵ که در این مورد نیز می‌نویسیم $\mathrm{P}(۱) = ۵$. اما در این صورت با جایگذاری x به‌جای y در $\mathrm{P}(y)$ داریم $\mathrm{P}(x) = ۲x + ۳$.

می‌توان P را به‌عنوان یک «عبارت محاسباتی» درنظر گرفت که با تخصیص متغیرها یا اعداد مختلف به آن، عبارت‌های مختلفی را تولید می‌کند. به‌عبارتی در $\mathrm{P}(x)$ و $\mathrm{P}(y)$، چیزی که ثابت است، P است و فقط آنچه در آن جایگذاری شده است، یکبار x و بار دیگر y بوده است. همچنین می‌توان اعداد مختلف را در آن جایگذاری نمود. اما بیان P، بدون استفاده از متغیرها غیر ممکن است. بنابراین، عبارتی مانند P را با استفاده از یکی از عبارت‌های $\mathrm{P}(x)$ یا $\mathrm{P}(y)$ بیان می‌کنیم.

اما سؤال مهم این است که «عبارت محاسباتی» چگونه عبارتی است؟ در ادامه نگاه خود را به عبارت‌های محاسباتی‌ای که با استفاده از جمع و ضرب به‌دست می‌آیند محدود کرده و چندجمله‌ای‌ها را می‌سازیم. سپس با عبارت‌های گویا و جبری آشنا شده و از آنها در حل معادلات و نامعادلات استفاده خواهیم کرد.

به‌وضوح، مقدار عبارت $\mathrm{P}(x) = x$ برای $x = a$ که با $\mathrm{P}(a)$ نمایش داده می‌شود، قابل محاسبه، و برابر با a است. همچنین برای هر دو عددی مانند a و b و برای عبارت $\mathrm{P}(x) = b$، مقدار $\mathrm{P}(a)$ قابل محاسبه بوده و برابر است با b. به‌طور مشابه، هرگاه $\mathrm{P}(x)$ و $\mathrm{Q}(x)$ دو عبارت محاسباتی باشند، می‌توان عبارت جدیدی مانند $\mathrm{T}(x)$ ساخت که $\mathrm{T}(x) = \mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x)$. به‌طور مثال اگر $\mathrm{P}(x) = x^{۲} + ۱$ و $\mathrm{Q}(x) = ۳x$، آنگاه داریم:

$$\mathrm{T}(x) = \mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x) = (x^{۲} + ۱) + (۳x)$$

برای هر عددی مانند a نیز مقدار $\mathrm{T}(a)$ را به‌صورت $\mathrm{T}(a) = \mathrm{P}(a) + \mathrm{Q}(a)$ تعریف می‌کنیم که در این‌صورت، $\mathrm{T}(x)$ نیز یک عبارت محاسباتی است. به‌طور مشابه می‌توانیم $\mathrm{T}(x) = \mathrm{P}(x).\mathrm{Q}(x)$ را نیز یک عبارت محاسباتی درنظر بگیریم و برای هر عددی مانند a قرار دهیم $\mathrm{T}(a) = \mathrm{P}(a).\mathrm{Q}(a)$.

مثال ۲.۷: بری $\mathrm{P}(x) = x^{۲} + x + ۱$ و $\mathrm{Q}(x) = ۳x + ۲$ هر یک از عبارات زیر را به‌دست آورید.

آ. $\mathrm{P}(y)$
ب. $\mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x)$
ج. $\mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(y)$
د. $\mathrm{P}(y + ۱)$
هـ. $\mathrm{Q}(x + ۱)$
و. $\mathrm{Q}\big(\mathrm{P}(x)\big)$
ز. $\mathrm{P}\big(\mathrm{Q}(x)\big)$
ح. $\mathrm{Q}\big(\mathrm{P}(x) + ۲x\big)$
ط. $\mathrm{P}\big(\mathrm{Q}(x + ۱) - ۷\big)$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

در ادامه خواهیم دید که عبارت‌ها محاسباتی، مفهوم «چندجمله‌ای» را می‌سازند که در تمام این فصل به کاردبرهای آن و توسعهٔ آن به عبارت‌های گویا و جبری می‌پردازیم.

۱.۷ چندجمله‌ای‌ها

با دقت بخوانید ... مفهوم چندجمله‌ای‌ها را باید فرزند ریاضیات نمادین دانست. زمانی‌که انسان به اعداد به‌عنوان نمادهایی مشابه نگاه کرد و از نمادها برای نشان دادن اعداد دلخواه استفاده کرد، توانست خواص جمع و ضرب را نشان دهد و به سمت ایجاد شاخهٔ جدیدی به نام جبر گام بردارد که در آن، بدون توجه به معنای جمع و ضرب، صرفاً به خواص آنها توجه می‌شود. در این کتاب چندجمله‌ای‌ها را روی اعداد حقیقی تعریف می‌کنیم. هر چندجمله‌ای روی اعداد حقیقی، عبارتی است متشکل از اعداد حقیقی، علامت‌های جمع و ضرب، پرانتزها و نمادهایی جدید که آنها را متغیر می‌نامیم. معمولاً هر متغیر را با یک حرف کوچک انگلیسی مانند x، y، z و ... نشان می‌دهیم. همچنین، می‌توانیم با استفاده از اندیس‌گذاری از نمادهایی مانند $x_۱$، $x_۲$ و ... برای نمایش متغیرها استفاده کنیم.

چندجمله‌ای‌ها را چنان تعریف می‌کنیم که با جایگذاری اعداد حقیقی به‌جایِ متغیر یا متغیّرها، عباراتی «بامعنا» در اعداد حقیقی به‌دست آیند. به‌طور مثال، $x+۲$ رشته‌ای است، متشکّل از نمادهای ۲، + و x. همچنین، عبارت $(x+۲)\times۳$ نیز رشته‌ای است که از نمادهای ۳،)، ۲، +، x و (تشکیل شده است.

شخصی با توجه به اینکه هر چندجمله‌ای رشته‌ای از نمادها است ادعا می‌کند هر رشته‌ای از نمادهای +، . (ضرب)، (،)، x و اعداد حقیقی، یک چندجمله‌ای است؛ در حالی‌که رشته‌هایی مانند $x++$ و $-+$ چندجمله‌ای نیستند، چون با جایگذاری اعدادی حقیقی مانند ۱ به‌جای x عبارت‌های بی‌معنایی چون $۱++$ و $-+$ به‌دست می‌آیند. لذا با گزارهٔ زیر، رشته‌هایی را به‌عنوان چندجمله‌ای مشخص می‌کنیم که از جایگذاری اعداد حقیقی به‌جای متغیّرها، به عبارت‌هایی بامعنا (قابل محاسبه) در اعداد حقیقی تبدیل شوند.

تعریف ۱.۷: چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند.

آ. هر عدد حقیقی مانند a یک چندجمله‌ای است.

ب. هر متغیری مانند x یک چندجمله‌ای است.

ج. هرگاه P و Q چندجمله‌ای باشند، عبارت $(P+Q)$ نیز چندجمله‌ای است.

د. هرگاه P و Q چندجمله‌ای باشند، عبارت $(P.Q)$ نیز چندجمله‌ای است.

ه. عبارت T چندجمله‌ای است اگر و تنها اگر بنا به موارد فوق چندجمله‌ای باشد.

گزارهٔ فوق را معمولاً به‌اختصار به‌صورت زیر بیان می‌کنیم.

$$P,Q ::= a\,|\,x\,|\,(P+Q)\,|\,(P.Q)$$

که در آن a عددی حقیقی و x متغیّر است. به اعدادی حقیقی مانند a که در یک چندجمله‌ای ظاهر می‌شوند، «ثابت» گفته می‌شود.

به‌طور مثال، y یک متغیر است پس یک چندجمله‌ای است. اعداد ۲ و $\sqrt{۲}$ هر دو اعدادی حقیقی، و درنتیجه چندجمله‌ای‌اند. با قرار دادن $P=۲$ و $Q=y$، عبارت $(۲.y)$ به‌صورت $(P.Q)$ قابل بیان است و درنتیجه چندجمله‌ای است. همچنین با قرار دادن $P=(۲.y)$ و $Q=\sqrt{۲}$ داریم $(P+Q)=\left((۲.y)+\sqrt{۲}\right)$. پس عبارت $\left((۲.y)+\sqrt{۲}\right)$ نیز چندجمله‌ای است.

مثال ۳.۷: نشان دهید عبارات زیر چندجمله‌ای هستند.

آ. ۲   ب. x ج. $(۲.x)$

د. $(۲+x)$ ه. $((۲+x).y)$ و. $\left((۲.x)+(۳.y)\right)\left((x.y)+(۳x)\right)$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

واضح است که تعریف فوق، رشتهٔ $x++$ را تولید نمی‌کند و در نتیجه آن را چندجمله‌ای نمی‌دانیم. اما تعریف فوق، رشتهٔ $x+۲$ را نیز نمی‌سازد؛ درحالی که رشتهٔ $(x+۲)$ به‌وسیلهٔ آن ساخته شده و چندجمله‌ای به حساب می‌آید. در واقع، عبارت $x+۲$ یک خلاصه‌نویسی برای چندجمله‌ایِ $(x+۲)$ درنظر گرفته می‌شود و به‌همین سبب $x+۲$ نیز چندجمله‌ای خوانده می‌شود.

مبتدی - ضروری اجازه ندهید ظاهر نمادگذاری‌ها شما را بترساند.

هر متغیر یک نماد است. اما اگر مجموعهٔ نمادها مشخص نباشد، چگونه می‌توانیم از مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ای‌های مورد بحث، سخن بگوییم؟ برای مقابله با این مشکل، مجموعهٔ همه چندجمله‌ای‌هایی که با متغیرهای $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n ساخته می‌شوند را با $\mathbb{R}[x_۱, x_۲, \dots, x_n]$ نمایش می‌دهیم. بنابراین، $\mathbb{R}[x]$ مجموعهٔ همه چندجمله‌ای‌های تک‌متغیره‌ای را نشان می‌دهد که با متغیر x ساخته شده‌اند. همچنین، $\mathbb{R}[y]$ به مجموعهٔ همه چندجمله‌ای‌های تک‌متغیره‌ای اشاره دارد که با متغیر y ساخته شده‌اند. می‌توان ثابت‌ها را به‌جای $\mathbb{R}$ از $\mathbb{Q}$ انتخاب کرد. تمام چندجمله‌ای‌های تک متغیره، با متغیر x که ثابت‌های آن از $\mathbb{Q}$ هستند را با $\mathbb{Q}[x]$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۴.۷: نشان دهید:

آ. $x \in \mathbb{Q}[x]$ ب. $x \in \mathbb{R}[x, y]$ ج. $x \in \mathbb{Q}_{\mathrm{P}}[x, y]$

د. $x \notin \mathbb{R}[y]$ ه. $(\sqrt{۲}.x) \in \mathbb{R}[x]$ و. $(\sqrt{۲}.x) \notin \mathbb{Q}[x]$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

نکته‌ای ظریف ...

هر دو عبارت $\big(x.(x+۱)\big)$ و $\big((x.x)+(x.۱)\big)$ عضوِ $\mathbb{R}[x]$ هستند. اما هیچ دلیلی بر تساوی این دو عبارت به عنوان دو چندجمله‌ای نداریم؛ درحالی که به‌ازای هر عدد حقیقی مانند a داریم $\big(a.(a+۱)\big) = \big((a.a)+(a.۱)\big)$. لذا تساوی دو چندجمله‌ای را چنان تعریف می‌کنیم که به‌ازای هر $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[x]$ و هر $a \in \mathbb{R}$، نتیجهٔ جایگذاری a به‌جای x در چندجمله‌ای‌های P و Q، به‌عنوان دو عدد حقیقی برابر باشد. به‌عبارت دقیق‌تر اگر نتیجهٔ جایگذاری عدد حقیقیِ a به‌جای x در چندجمله‌ای P را با $\mathrm{P}(a)$ و نتیجهٔ جایگذاریِ a به‌جای x در چندجمله‌ایِ Q را با $\mathrm{Q}(a)$ نشان دهیم، می‌خواهیم تساوی دو چندجمله‌ای، به‌عنوان دو رشته از نمادها را چنان تعریف کنیم که داشته باشیم:

$\mathrm{P}(x) = \mathrm{Q}(x)$ اگر و تنها اگر برای هر $a \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $\mathrm{P}(a) = \mathrm{Q}(a)$.

پیش از تعریف تساوی دو چندجمله‌ای، ترجیح می‌دهیم عبارت‌هایی مانند $\mathrm{P}(a)$ به‌معنای «جایگذاری a به‌جای x در چندجمله‌ایِ P» را تعریف کنیم.

تعریف ۲.۷: **برای هر $\mathrm{T}, \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[x]$ و هر $a, b \in \mathbb{R}$ داریم:**

آ. $\mathbf{T} = b \Longrightarrow \mathbf{T}(a) = b$

ب. $\mathbf{T} = x \Longrightarrow \mathbf{T}(a) = a$

ج. $\mathbf{T} = (\mathbf{P}.\mathbf{Q}) \Longrightarrow \mathbf{T}(a) = \big(\mathbf{P}(a).\mathbf{Q}(a)\big)$

د. $\mathbf{T} = (\mathbf{P}+\mathbf{Q}) \Longrightarrow \mathbf{T}(a) = \big(\mathbf{P}(a)+\mathbf{Q}(a)\big)$

مثال ۵.۷: مقدار $\mathrm{P}(-۲)$ را برای $\mathrm{P} = (x+۱)$ محاسبه نمایید.

پاسخ: $\left.\begin{array}{l}\mathrm{P}_۱ = x \Longrightarrow \mathrm{P}_۱(-۲) = -۲ \\ \mathrm{Q}_۱ = ۱ \Longrightarrow \mathrm{Q}_۱(-۲) = ۱\end{array}\right\} \xRightarrow{\mathrm{P}=(\mathrm{P}_۱+\mathrm{Q}_۱)} \mathrm{P}(-۲) = (\mathrm{P}_۱(-۲)+\mathrm{Q}_۱(-۲)) = ((-۲)+۱) = -۱$ ■

توجه داریم که در پاسخِ مثال فوق، تساویِ $\mathrm{P} = (\mathrm{P}_۱ + \mathrm{Q}_۱)$ صرفاً به‌معنای تساوی دو رشته از نمادها به‌کار رفته است. البته می‌توان گزارهٔ فوق را به‌نحوی ارتقا داد که جایگذاریِ یک چندجمله‌ای به‌جای یک متغیّر را معنا بخشد و حتی $a \in \mathbb{R}$ را نیز به‌عنوان یکی از اعضای $\mathbb{R}[x]$ درنظر بگیرد. به‌طور مثال، برای چندجمله‌ای‌های $\mathrm{P} = (y + ۱) \in \mathbb{R}[y]$ و $\mathrm{Q} = (۲.x) \in \mathbb{R}[x]$ قرار می‌دهیم $\mathrm{P}(\mathrm{Q}) = (\mathrm{Q} + ۱) = \big((۲.x) + ۱\big)$ که در آن، Q را در P به‌جای y گذاشته‌ایم.

تعریف ۳.۷: برای هر $\mathrm{T,P,Q} \in \mathbb{R}[x]$ هر $a \in \mathbb{R}$ و هر $\mathrm{A} \in \mathbb{R}[\mathrm{Y}]$ داریم:

آ. $\mathrm{T} = a \Longrightarrow \mathrm{T}(\mathrm{A}) = a$

ب. $\mathrm{T} = x \Longrightarrow \mathrm{T}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$

ج. $\mathrm{T} = (\mathrm{P.Q}) \Longrightarrow \mathrm{T}(\mathrm{A}) = \big(\mathrm{P}(\mathrm{A}).\mathrm{Q}(\mathrm{A})\big)$

د. $\mathrm{T} = (\mathrm{P} + \mathrm{Q}) \Longrightarrow \mathrm{T}(\mathrm{A}) = \big(\mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{Q}(\mathrm{A})\big)$

تعریف فوق امکان محاسبه $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ را به‌ازای هر $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$ و هر چندجمله‌ای دلخواه A فراهم می‌آورد و A می‌تواند عددی حقیقی باشد.

مثال ۶.۷: عبارات زیر را برای $\mathrm{P}(x) = \big(x + \sqrt{۲}\big)$ و $\mathrm{Q}(y) = \big(۲.y\big)$ به‌دست آورید.

آ. $\mathrm{P}(۰)$ ب. $\mathrm{P}(-\sqrt{۲})$ ج. $\mathrm{Q}(۰)$ د. $\mathrm{Q}(۱/۲)$

ه. $\mathrm{P}(\mathrm{Q}(y))$ و. $\mathrm{Q}(x)$ ز. $\mathrm{P}(\mathrm{Q}(x))$ ح. $\mathrm{Q}(\mathrm{P}(z))$

ط. $\mathrm{P}(-۱.\mathrm{Q}(۳))$ ی. $\mathrm{Q}(\mathrm{P}(۳) + ۳)$ ک. $\mathrm{P}(x - ۱)$ ل. $\mathrm{Q}(x + ۳)$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود. ■

بنا به آنچه گذشت، تساوی چندجمله‌ای‌ها را با استفاده از خواص جمع و ضرب تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.۷: برای هر سه چندجمله‌ای دلخواه P، Q و R تعریف می‌کنیم:

آ. اگر $\mathrm{P,Q} \in \mathbb{R}$ آن‌گاه $(\mathrm{P} + \mathrm{Q})$ به‌معنای جمع اعداد حقیقی است.

ب. اگر $\mathrm{P,Q} \in \mathbb{R}$ آن‌گاه $(\mathrm{P.Q})$ به‌معنای ضرب اعداد حقیقی است.

ج. $(\mathrm{P} + \mathrm{Q}) = (\mathrm{Q} + \mathrm{P})$ د. $(\mathrm{P.Q}) = (\mathrm{Q.P})$

ه. $\big(\mathrm{P} + (\mathrm{Q} + \mathrm{S})\big) = \big((\mathrm{P} + \mathrm{Q}) + \mathrm{S}\big)$ و. $\big(\mathrm{P.(Q.S)}\big) = \big(\mathrm{(P.Q).S}\big)$

ز. $\big(\mathrm{P.(Q + S)}\big) = \big(\mathrm{(P.Q) + (P.S)}\big)$ ح. $(۰ + \mathrm{P}) = (\mathrm{P} + ۰) = \mathrm{P}$

ط. $(۰.\mathrm{P}) = (\mathrm{P}.۰) = ۰$ ی. $(۱.\mathrm{P}) = (\mathrm{P}.۱) = \mathrm{P}$

همچنین، تساوی چندجمله‌ای‌ها نیز به‌عنوان نوعی یکسانی درنظر گرفته می‌شود و بدون هیچ بیانی فرض می‌شود که برای هر سه چندجمله‌ایِ P، Q و R داریم:

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{P} = \mathrm{P} \\ \mathrm{P} = \mathrm{Q} \Longleftrightarrow \mathrm{Q} = \mathrm{P} \\ \text{اگر } \mathrm{P} = \mathrm{Q} \text{ و } \mathrm{Q} = \mathrm{R} \text{ آن‌گاه } \mathrm{P} = \mathrm{R} \end{array}\right\}$$

مثال ۷.۷: درستی عبارت‌های زیر را ثابت کنید.

آ. $(۰.(x + y)) = ۰$ ب. $(x.(۱ + y)) = (x + (x.y))$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۱.۱.۷ خلاصه‌نویسی چندجمله‌ای‌ها

در عبارت‌های عددی دیدیم که می‌توان از نوشتن برخی پرانتزها صرف‌نظر کرده و هیچ ابهامی نیز در محاسبات به‌وجود نیاید. حال می‌خواهیم روشی و قاعده‌ای برای حذف پرانتزها ارائه دهیم که تساوی چندجمله‌ای‌ها را حفظ کند؛ یعنی هر دو چندجمله‌ای مانند P و Q که پس از حذف پارانتزها به‌عنوان دو عبارت برابر باشند، به‌عنوان دو چندجمله‌ای نیز برابر باشند.ذمثال‌های زیر در رسیدن به راهی مناسب برای حذف پرانتزها و راحت‌تر نوشتن چندجمله‌ای‌ها به ما یاری خواهند رساند.

مثال ۸.۷: با پرانتزگذاری مناسب، از هر یک از عبارات زیر، یک چندجمله‌ای بسازید.

آ. $x+۱$ ب. $۲.x$ ج. x

د. ۲ ه. $۲+x+y$ و. $۲.x.y$

پاسخ: آ. $(x+۱)$ ب. $(۲.x)$ ج. x

د. ۲ ه. $((۲+x)+y)$ و $(۲+(x+y))$ و. $((۲.x).y)$ و $(۲.(x.y))$ ■

مثال ۹.۷: نشان دهید برای چندجمله‌ای‌های دلخواه $P_۱$، $P_۲$، … و $P_۶$ داریم:

آ. هر دو پرانتزگذاری $P_۱+P_۲+P_۳$ با هم برابرند.

ب. هر دو پرانتزگذاری $P_۱+\cdots+P_۴$ با هم برابرند.

ج. هر دو پرانتزگذاری $P_۱+\cdots+P_۵$ با هم برابرند.

د. هر دو پرانتزگذاری $P_۱+\cdots+P_۶$ با هم برابرند.

پاسخ: آ. تنها پرانتزگذاری‌های ممکن $((P_۱+P_۲)+P_۳)$ و $(P_۱+(P_۲)+P_۳))$ هستند که بنا به شرکت‌پذیری جمع، با هم برابرند.

ب. پرانتزگذاری‌های ممکن را به‌صورت زیر دسته‌بندی و بررسی می‌کنیم.

بنا به مورد (آ)	$=\big(((P_۱+P_۲)+P_۳)+P_۴\big)$	$((P_۱+P_۲+P_۳)+P_۴)$	(۱)
بنا به شرکت‌پذیری جمع	$=\big((P_۱+P_۲)+P_۳)+P_۴\big)$	$\big((P_۱+P_۲)+(P_۳+P_۴)\big)$	(۲)
بنا به مورد (آ)	$=\big(P_۱+(P_۲+(P_۳+P_۴))\big)$	$\big(P_۱+(P_۲+P_۳+P_۴)\big)$	(۳)
بنا به شرکت‌پذیری جمع	$=\big((P_۱+P_۲)+(P_۳+P_۴)\big)$		
بنا به شرکت‌پذیری جمع	$=\big((P_۱+P_۲)+P_۳)+P_۴\big)$		

بنابراین، هرچندجمله‌ای که با پرانتزگذاری $P_۱+\cdots+P_۴$ به‌دست آید با $\big((P_۱+P_۲)+P_۳)+P_۴\big)$ برابر است.

ج. کافی است با استفاده از موارد قبل نشان دهیم در هر یک از حالت‌های زیر، هر پرانتزگذاری دلخواه با $\Big(\big((P_۱+P_۲)+P_۳)+P_۴\big)+P_۵\Big)$ برابر است.

(۱) $\big((P_۱+\cdots+P_۴)+P_۵\big)$ (۲) $\big((P_۱+p_۲+P_۳)+(P_۴+P_۵)\big)$

(۳) $\big((P_۱+P_۲)+(P_۳+P_۴+P_۵)\big)$ (۴) $\big(P۱+(P_۲+P_۳+P_۴+P_۵)\big)$ ■

صورت مثال از پاسخ آن مهمتر است

مثال ۱۰.۷: نشان دهید برای چندجمله‌ای‌های دلخواه $P_۱$، $P_۲$، … و P_n هر دو پرانتزگذاری $P_۱+P_۲+\cdots+P_n$ با هم برابرند.

مبتدی – ضروری
پاسخ را کامل کنید.

پاسخ: درستی ادعای فوق برای $n=۱$ و $n=۲$ واضح است. برای $n=۳$ نیز چیزی جز خاصیت شرکت‌پذیری نیست و واضح است. برای اثبات آن برای $n\geq ۴$ از استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. به استقرای ریاضی فرض کنید برای هر $m\in\mathbb{N}$ که $۱\leq m<n$ هر دو پرانتزگذاری $Q_۱+Q_۲+\cdots+Q_m$ برابرند؛ برای هر

.$Q_1, Q_2 \dots, Q_m \in \mathbb{R}[x]$
از طرفی هم برای هر پرانتزگذاری $P_1 + \cdots + P_n$، به‌صورت $(T + S)$ است که در این صورت برای عددی طبیعی مانند i که $1 \le i < n$، چندجمله‌ای یک پرانتزگذاری از $P_1 + \cdots + P_i$ است و S با پرانتزگذاری $P_{i+1} + \cdots + P_n$ به‌دست می‌آید. S_iها و T_iها را به‌صورت زیر می‌سازیم.

$$\begin{array}{ll} S_1 = P_n & T_1 = P_1 \\ S_2 = (P_{n-1} + S_1) = (P_{n-1} + P_n) & T_2 = (T_1 + P_2) = (P_1 + P_2) \\ S_3 = (P_{n-2} + S_2) = (P_{n-2} + (P_{n-1} + P_n)) & T_3 = (T_2 + P_3) = ((P_1 + P_2) + P_3) \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

چون $1 \le i, n - i < n$، پس بنا به فرض استقرا داریم $S = S_{n-i}$ و $T = T_i$. بدین‌ترتیب کافی است با استفاده از شرکت‌پذیری و استقرایی دیگر نشان دهیم

$$T_1 + S_{n-1} = T_2 + S_{n-2} = T_3 + S_{n-3} = \dots = T_{n-1} + S_1$$

ادامه کار به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مبتدی - ضروری
صورت مثال از پاسخ مهم‌تر است.

مثال ۱۱.۷: نشان دهید هرگاه $P_1, P_2, \dots, P_n, S, T \in \mathbb{R}[x]$ چنان باشند که T و S با پرانتزگذاریِ $P_1.P_2.\dots.P_n$ به‌وجود آیند، آن‌گاه $T = S$.

مبتدی - ضروری
از پاسخ مثال قبل کمک بگیرید.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. (از پاسخ مثال قبل کمک بگیرید) ■

مطالب فوق این ایده حذف پرانتزگذاری را مطرح می‌کند، اما چندجمله‌ای‌های $P = (x.(1) + (-(1)))$ و $Q = ((x.1) + (-1))$ با حذف پرانتزها (به‌جز پرانتزی که برای بیان (-1) به‌کار رفته) به صورت $x.1 + (-1)$ نوشته می‌شوند؛ درحالی‌که $P \neq Q$. لذا مشابه بحث پرانتزگذاری در فصل اول، ضرب را بر جمع تقدم بخشیده و تنها Q را نتیجه پرانتزگذاریِ $x.1 + (-1)$ می‌دانیم. اما سؤال مهم این است که با چه روشی به حذف پرانتزها بپردازیم که چندجمله‌ایِ حاصل از پرانتزگذاریِ مجدد آن، با چندجمله‌ایِ اولیه برابر باشد. به‌طور مثال، با حذف پرانتز از $(P_1.(P_2.P_3))$ به $P_1.P_2.P_3$ می‌رسیم و با پرانتزگذاری مجدد آن، به $((P_1.P_2).P_3)$ می‌رسیم که با چندجمله‌ایِ اولیه برابر است، هرچند دو رشتهٔ یکسان از نمادها نیستند. بنابراین به روش زیر به حذف پرانتزگذاری می‌پردازیم.

- در عباراتی مانند $(P + Q)$ و $(P.Q)$ بیرونی‌ترین پرانتز حذف می‌شود.
- در عباراتی مانند $P + (Q + S)$، $(P + Q) + S$، $P.(Q.S)$ و $(P.Q).S$ پرانتزها حذف می‌شوند.
- در عباراتی مانند $P + (Q.S)$ و $(P.S) + Q$ نیز پرانتزها حذف می‌شوند.
- در عباراتی مانند $P.(Q + S)$ و $(P + Q).S$ پرانتزها باقی می‌مانند.

خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند بررسی کنند که هر گاه چندجمله‌ای‌های P و Q با حذف پرانتزها به یک رشته تبدیل شوند، داریم $P = Q$.

توان

یکی دیگر از راه‌های خلاصه نویسی استفاده از توان است. بنا به مطالب قسمت قبل، برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر پرانتزگذاری دلخواه داریم:

$$\overbrace{P.P.\dots.P}^{n \text{ بار}} = \overbrace{((\dots((P.P).P)\dots)P)}^{n \text{ بار}}$$

بنابراین «توان» را برای چندجمله‌ای‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵.۷: برای هر چندجمله‌ای مانند P و هر عدد $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم:

آ. $\mathbf{P}^{\circ} = \mathbf{1}$ ب. $\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{P}^n\mathbf{P}$

بنابراین $(x+1)^3 = (x+1)(x+1)(x+1)$ و $x^4 = xxxx$. می‌بینیم که توان نه‌تنها برای متغیرها، بلکه برای چندجمله‌ای‌ها تعریف شده است.

یک عبارت (رشته‌ای از نمادها) را چندجمله‌ای گوییم اگر پرانتزگذاری‌ای از آن چندجمله‌ای باشد. به‌طور مثال عبارت $3x^2 + 1$ را چندجمله‌ای خواهنیم چون با پرانتزگذاری به چندجمله‌ای $((3(x.x)) + 1)$ تبدیل می‌شود.

مثال ۱۲.۷: نشان دهید:

آ. $2(3x) = 6x$ ب. $(2x)(5y) = 10xy$
ج. $1(2x) = 2x$ د. $(1+x)(1+y) = 1+x+y+xy$
ه. $(1+x)(2+x) = 2+3x+x^2$ و. $(2+3x)(5+7x) = 15+29x+21x^2$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

درک صورت مثال از پاسخ آن مهم‌تر است.

مثال ۱۳.۷: نشان دهید:

آ. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ عبارت $x^n \in \mathbb{R}[x]$.
ب. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $a \in \mathbb{R}$، عبارت $ax^n \in \mathbb{R}[x]$.
ج. به‌ازای هر $a_\circ, a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ داریم $a_\circ + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k \in \mathbb{R}[x]$.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۱۴.۷: نشان دهید برای هر چندجمله‌ای مانند P داریم:

آ. $\mathrm{P} + ((-1)\mathrm{P}) = \circ$ ب. $\big(\mathrm{P} + (-1)\mathrm{Q}\big) + \mathrm{Q} = \mathrm{P}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال فوق نشان می‌دهد که برای هر چندجمله‌ای مانند P، یک چندجمله‌ای قرینه وجود دارد که می‌توان آن را با $(-\mathrm{P})$ نشان داد. به‌عبارتی $(-\mathrm{P})$ یک خلاصه‌نویسی برای $(-1)\mathrm{P}$ است.

همچنین، $(\mathrm{P} + (-\mathrm{Q})) + \mathrm{Q} = \mathrm{P}$ پس با توجه به معنای تفریق داریم $\mathrm{P} - \mathrm{Q} = \mathrm{P} + (-\mathrm{Q})$. پس $\mathrm{P} - \mathrm{Q}$ را خلاصه‌نویسی‌ای از $\mathrm{P} + (-\mathrm{Q})$ درنظر می‌گیریم که بنا به گزاره فوق، چندجمله‌ای است.

تمرین:

(۱) عبارت‌های زیر را به‌طریق مناسب پرانتزگذاری کنید.

آ. $2x + 3xy + 1$ ب. $2xy + 3 \times 4 \times y$ ج. $2x + 3y \times 2x$

(۲) با روش ارائه شده، پرانتزها را حذف کنید.

آ. $((2+x).(3 \times x))$ ب. $(2 + (3 \times x))$ ج. $(x \times ((2+3) \times x))$

(۳) نشان دهید برای هر سه چندجمله‌ایِ P، Q و R داریم:

آ. $(2+\mathrm{P})(\mathrm{Q}+2\mathrm{P}) = 2\mathrm{Q} + 4\mathrm{P} + \mathrm{PQ} + 2\mathrm{P}^2$
ب. $(\mathrm{P}+\mathrm{Q})(2\mathrm{P}+\mathrm{QR}) = 2\mathrm{P}^2 + 2\mathrm{PQ} + \mathrm{PQR} + \mathrm{Q}^2\mathrm{R}$

(۴) نشان دهید:

آ . $(۱+x)^۳+(۱+x)^۴=(۱+x)^۳(۲+x)$

ب . $(۲x+۱)(۳x+۱)^۳+(۱-۲x)(۳x+۱)^۳=۲(۳x+۱)^۳$

۲.۱.۷ ساده کردن و تک‌جمله‌ای‌ها

مبتدی - ضروری

می‌توان با استفاده از خاصیت توزیع‌پذیری که در مورد (ز) از تعریف (۴.۷) بیان شده است، از $P(Q+S)$ عبارت $PS+QS$ را نتیجه گرفت و این کار را آن‌قدر انجام داد تا دیگر امکان‌پذیر نباشد. به‌طور مثال می‌توان عبارت $x(۱+y)$ را به‌صورت $x+xy$ نوشت و این روند اینجا متوقف می‌شود؛ چون $x+xy$ حاصل‌جمعی از حاصل‌ضرب متغیرها و ثابت‌ها است. این تغییر نگارش را «ساده‌کردن چندجمله‌ای» گوییم. به‌طور مشابه، برای ساده کردن عبارت $P=(۱+x)(۱+y)$ گوییم:

$$(۱+x)(۱+y)=(۱+x)۱+(۱+x)y=(۱+x)+(y+xy)=۱+x+y+xy$$

بنابراین، $P=۱+x+y+xy$؛ که حاصل‌جمعی از حاصل‌ضرب متغیرها و ثابت‌ها است.

به طور کلی، به حاصل‌ضرب ثابت‌ها و متغیرها «تک‌جمله‌ای» و به نگارش یک چندجمله‌ای به‌صورت حاصل‌جمعی از تک‌جمله‌ای‌ها، «ساده‌کردن» گوییم. اما در این‌صورت نوشتن عبارت $۲x$ به‌صورت $x+x$ نیز ساده‌کردن چندجمله‌ای محسوب می‌شود. برای اینکه صرفا عباراتی مانند $۲x$ را مدنظر داشته باشیم باید تعریف بهتری ارائه دهیم. لذا به بررسی چندجمله‌ای‌ها و تک‌جمله‌ای‌ها می‌پردازیم. از تعریف دقیق تک‌جمله‌ای‌ها شروع می‌کنیم.

تعریف ۶.۷: عبارت T یک تک‌جمله‌ای است اگر:

آ . T یک ثابت (عدد) باشد.

ب . T یک متغیر باشد.

ج . دو تک‌جمله‌ایِ P و Q وجود داشته باشند که T = PQ.

بنابراین، عبارت T تک‌جمله‌ای است اگر و تنها اگر بنا به موارد فوق تک‌جمله‌ای باشد. تعریف فوق را به‌اختصار به‌صورت مقابل بیان می‌کنیم: $T ::= a|x|T.T$

که در آن a عددی حقیقی و x متغیر است.

مثال ۱۵.۷: نشان دهید عبارات زیر تک‌جمله‌ای هستند.

آ . ۳	ب . x	ج . $۳x$
د . $\sqrt[۳]{۵}$	ه . $\sqrt[۳]{۵}x$	و . xy
ز . ۰	ح . $۳xy$	ط . $\sqrt{۲}x\sqrt[۳]{۵}y$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. (از تعریف فوق استفاده کنید.) ■

مبتدی - اختیاری
نکته‌ای ظریف اما ساده

مثال ۱۶.۷: شخصی پیشنهاد می‌کند تک‌جمله‌ای‌ها را تعریف کنیم چندجمله‌ای‌ها را به‌صورت زیر براساس تک‌جمله‌ای‌ها بیان کنیم.

- هر تک‌جمله‌ای، یک چندجمله‌ای است.
- هرگاه P و Q چند جمله‌ای باشند، P + Q نیز چندجمله‌ای است.
- عبارت P چندجمله‌ای است اگر و تنها اگر بنا به دو مورد قبل چندجمله‌ای باشد.

آیا تعریف این شخص با تعریف قبلی یکسان است؟

پاسخ: خیر؛ زیرا عبارتی مانند $(x+۱)(y+۱)$ که پیش از این به‌عنوان چندجمله‌ای پذیرفته‌ایم، در این تعریف به‌عنوان چند جمله‌ای ساخته نمی‌شود و درنتیجه چندجمله‌ای نیست. البته می‌توانیم با اضافه کردن مورد زیر به تعریف وی، این مشکل را برطرف کنیم.
هرگاه P و Q چندجمله‌ای باشند، آن‌گاه PQ نیز چندجمله‌ای است.
که در این‌صورت، نیازی به تعریف مفهوم جدیدی مانند «تک‌جمله‌ای» نداریم. ■

در مورد حاصل‌جمع $۲xy+۳xy$ با استفاده از خاصیت توزیع‌پذیری، در تعریف تساوی چندجمله‌ای‌ها داریم $۲xy+۳xy=(۲+۳)xy=۵xy$. بنابراین، حاصل‌جمع این تک‌جمله‌ای‌ها یک تک‌جمله‌ای است. اما در مورد عبارت $۲x+۳y$ نمی‌توانیم چنین کاری انجام دهیم و حاصل‌جمع آنها تک‌جمله‌ای نیست.

مثال ۱۷.۷: نشان دهید برای تک‌جمله‌ای‌های ناصفری مانند P و Q داریم:
$P+Q$ تک‌جمله‌ای است اگر و تنها اگر عدد حقیقی ناصفری مانند a باشد که $P=aQ$.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

از مثال فوق ایده گرفته، ویژگی فوق را تشابه می‌خوانیم.

گزاره ۱.۷: دو چندجمله‌ای P و Q را «متشابه» گوییم اگر عددی ناصفر مانند a باشد که $P=aQ$

قضیهٔ زیر در بسیاری از کتاب‌های ریاضی، به‌عنوان تعریف تک‌جمله‌ای ارائه می‌شود.

قضیه ۱.۷: هر تک‌جمله‌ای مانند $P\in\mathbb{R}[x_۱,x_۲,\dots,x_n]$ را می‌توان به‌صورت $ax_۱^{n_۱}x_۲^{n_۲}\dots x_k^{n_k}$ نوشت که در آن $a\in\mathbb{R}$ و به‌ازای هر $i\in\mathbb{N}$ که $۱\leqslant i\leqslant k$ داریم $n_i\in\mathbb{N}$.
این نگارش تک‌جمله‌ای را نگارش استاندارد تک‌جمله‌ای گوییم.

مبتدی - ضروری
در برخی کتاب‌ها این قضیه به‌عنوان تعریف ارائه می‌شود.

اثبات: کافی است نشان دهیم هر عدد حقیقی و هر متغیر دارای نگارشی استاندارد است. همچنین حاصل‌ضرب هر دو تک‌جمله‌ای با نگارش استاندارد، دارای نگارشی استاندارد است. ■

گزاره ۲.۷: هر چندجمله‌ای را می‌توان به‌صورت یک تک‌جمله‌ای یا به‌صورت حاصل‌جمعی از تک‌جمله‌ای‌های نامتشابه نوشت.

اثبات: به‌وضوح هر حاصل‌جمعی از تک‌جمله‌ای‌ها را می‌توان به‌صورت حاصل‌جمعی از تک‌جمله‌ای‌های غیرمتشابه نوشت. بنابراین، کافی است نشان دهیم چندجمله‌ای، حاصل‌جمعی از تک‌جمله‌ای‌ها است.
کافی است نشان دهیم اگر P و Q حاصل جمعی از تک‌جمله‌ای‌ها باشند، P.Q نیز حاصل‌جمعی از تک‌جمله‌ای‌هاست. ادامهٔ کار به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

باتوجه به مثال فوق می‌توانیم ساده‌کردن چندجمله‌ای را تعریف کنیم.

با مطالب اول همین بخش مقایسه شود.

تعریف ۷.۷: نگارش چندجمله‌ای به‌صورت یک تک‌جمله‌ای یا حاصل‌جمعی از تک‌جمله‌ای‌های غیرمتشابه با نگارش استاندارد را ساده کردن چندجمله‌ای گوییم.

مثال ۱۸.۷: هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر را ساده کنید.
آ. $(۱+x+x^{۲})y$ ب. $(x+x^{۲})x^{۳}$ ج. $(y-x)(x+y)$
د. $(۱-۲x+x^{۲})+(۳+۳x-۴x^{۲})$ ه. $(۱-x)+(x-۱)$ و. $(۱-۲x)(۳x+۲)$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۱۹.۷: نشان دهید برای هر چندجمله‌ای یک متغیره مانند $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[x]$ داریم:
آ. P تک‌جمله‌ای است اگر و تنها اگر $\mathrm{P}=ax^{n}$ که در آن $a\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$
ب. $n\in\mathbb{N}$ و $a_{۰},a_{۱},\dots a_{n}\in\mathbb{R}$ وجود دارند که $\mathrm{P}=a_{۰}+a_{۱}x+a_{۲}x^{۲}+a_{۳}x^{۳}+\dots+a_{n}x^{n}$
ج. اگر $\mathrm{P}\neq ۰$ آن‌گاه $n\in\mathbb{N}$ و $a_{۰},a_{۱},\dots a_{n}\in\mathbb{R}$ که $a_{n}\neq ۰$ وجود دارند که

$$\mathrm{P}=a_{۰}+a_{۱}x+a_{۲}x^{۲}+a_{۳}x^{۳}+\dots+a_{n}x^{n}$$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

گزاره ۳.۷: هر چندجمله‌ای مانند $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[x]$ دارای نگارشی به‌صورت $\mathrm{P}=a_{n}x^{n}+\dots+a_{۱}x+a_{۰}$ که در آن $a_{n}\neq ۰$ است که آن را نگارش استانداردِ P خوانیم.

اثبات: باتوجه به مثال فوق واضح است. ■

نوشتن چندجمله‌ایِ $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[x]$ به‌صورتِ استاندارد، دقیقا به‌معنای ساده کردنِ آن است.
یکی از ویژگی‌های مهمی که برای چندجمله‌ای‌ها درنظر گرفته می شود را در گزارهٔ زیر بیان می‌کنیم.

گزاره ۴.۷: برای $\mathrm{P,Q}\in\mathbb{R}[x]$ داریم $\mathrm{PQ}=۰$ اگر و تنها اگر $\mathrm{P}=۰$ یا $\mathrm{Q}=۰$.

با استفاده از گزارهٔ فوق به سادگی می‌توان خاصیت حذف ضرب (ناصفر) را برای چندجمله‌ای‌های یک متغیّره اثبات کرد. در مثال زیر به این مهم پرداخته‌ایم.

مثال ۲۰.۷: نشان دهید برای هر $\mathrm{P,Q,S}\in\mathbb{R}[x]$ که $\mathrm{S}\neq ۰$ داریم: $\mathrm{P}=\mathrm{Q}\Longleftrightarrow \mathrm{PS}=\mathrm{QS}$.

پاسخ: $\mathrm{PS}=\mathrm{QS}\Longleftrightarrow \mathrm{PS}-\mathrm{QS}=۰\Longleftrightarrow (\mathrm{P}-\mathrm{Q})\mathrm{S}=۰\overset{\mathrm{S}\neq ۰}{\Longleftrightarrow}\mathrm{P}-\mathrm{Q}=۰\Longleftrightarrow \mathrm{P}=\mathrm{Q}$. ■

گزاره ۵.۷: برای $\mathrm{P}(x)=a_{n}x^{n}+\dots+a_{۱}x+a_{۰}$ و $\mathrm{Q}(x)=b_{m}x^{m}+\dots+b_{۱}x+b_{۰}$ داریم: $\mathrm{P}(x)=\mathrm{Q}(x)$ اگر و تنها اگر $m=n$ و برای هر $i\in\mathbb{N}$ داشته باشیم $a_{i}=b_{i}$.

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

تمرین:

(۵) چندجمله‌ای بودن عبارات زیر را بررسی کنید.
آ. $\sqrt{۳}$ ب. x ج. $x+\sqrt{۳}$
د. $x=\sqrt{۳}$ ه. $(x+۱)x$ و. $\sqrt{x}$
ز. $(\sqrt{x}+x)(\sqrt{x+۱}+x)$ ح. $۱+-x$ ط. $(x-\sqrt[۳]{۲})(\sqrt[۳]{۴}x+۳)$

(۶) تک‌جمله‌ای بودن عبارت‌های زیر را بررسی کنید.
آ. $۳x^{۳}y^{۴}$ ب. $۳xy+۲yx$ ج. $۲x+۱$
د. $(۳x^{۲}-۲x)+(۲x-x^{۲})$ ه. $(۳x^{۲}-۲x)+(۲x-x^{۳})$ و. $\sqrt{x}$

(۷) عبارات زیر را ساده کنید.

آ. $(x+۱)x$ ب. $x^{۲}(۲x-x^{۲})$ ج. $(x+۲)(x-۳)$

د. $(x+۱)^{۲}$ ه. $(x+y)^{۲}$ و. $(x+y)(x-y)$

(۸) برای $\mathrm{P}=x^{۳}-۳x^{۲}+۱$ عبارات زیر را به‌دست آورید:

آ. $\mathrm{P}(۰)$ ب. $\mathrm{P}(۱)$ ج. $\mathrm{P}(-۱)$

د. $\mathrm{P}(y)$ ه. $\mathrm{P}(y-۱)$ و. $\mathrm{P}(x-۱)$

ز. $\mathrm{P}(x-y)$ ح. $\mathrm{P}(x^{۲}-۱)$ ط. $\mathrm{P}(x+y)$

۲.۷ معادلات و نامعادلات چندجمله‌ای

در این قسمت براساس مقدار چندجمله‌ای‌ها به تعریف ریشهٔ چندجمله‌ای می‌پردازیم؛ سپس با استفاده از چندجمله‌ای‌ها و قواعد ترتیب در اعداد حقیقی، روشی برای حل نامعادلات با ارائه می‌دهیم که تعیین علامت نام دارد. سپس با اتحادها و روش‌های دیگر تجزیه، برای تغییر نگارش چندجمله‌ای‌ها آشنا شده و برای کاربردهای آن در حل معادلات و نامعادلات آماده می‌شویم.

به‌طور مثال برای حل معادلهٔ $(x-۱)(x-۲)=۰$ از عبارت زیر استفاده می‌کنیم:

برای هر $a,b\in\mathbb{R}$ داریم: $ab=۰$ اگر و تنها اگر $a=۰$ یا $b=۰$.

چون برای هر $a\in\mathbb{R}$ داریم $(a-۱),(a-۲)\in\mathbb{R}$ پس برای هر $a\in\mathbb{R}$ داریم:

$(a-۱)(a-۲)=۰$ اگر و تنها اگر $(a-۱)=۰$ یا $(a-۲)=۰$

و در نتیجه $x=۱$ و $x=۲$ جواب‌های معادلهٔ $(x-۱)(x-۲)=۰$ هستند.

گزاره ۶.۷: $a\in\mathbb{R}$ **را ریشهٔ** $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[x]$ **گوییم اگر** $\mathrm{P}(a)=۰$.

از آنجا که برای هر $a,b\in\mathbb{R}$ داریم $ab=۰$ اگر و تنها اگر $a=۰$ یا $b=۰$، پس برای هر $\mathrm{P},\mathrm{Q},\mathrm{T}\in\mathbb{R}[x]$ که $\mathrm{T}=\mathrm{P}.\mathrm{Q}$ و هر $a\in\mathbb{R}$ داریم $\mathrm{T}(a)=۰$ اگر و تنها اگر $\mathrm{P}(a)=۰$ یا $\mathrm{Q}(a)=۰$.
به‌عبارتی برای هر $\mathrm{P},\mathrm{Q}\in\mathbb{R}[x]$ و هر $a\in\mathbb{R}$ داریم:
$(\mathrm{P}.\mathrm{Q})(a)=۰$ اگر و تنها اگر $\mathrm{P}(a)=۰$ یا $\mathrm{Q}(a)=۰$.

مثال ۲۱.۷: ریشه یا ریشه‌های هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر را بیابید.

آ. $(x-۴)(x-\sqrt{۲})(x+۳)(x+\sqrt{۳})$ ب. $(۲+x)(۵-x)(\sqrt[۳]{۵}-x)$

پاسخ: آ. با توجه به توضیحات فوق برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم $(x-۴)(x-\sqrt{۲})(x+۳)(x+\sqrt{۳})=۰$ اگر و تنها اگر $x-۴=۰$، یا $x-\sqrt{۲}=۰$، یا $x+۳=۰$، یا $x+\sqrt{۳}=۰$. بنابراین، $x=۴$، $x=\sqrt{۲}$، $x=-۳$ و $x=-\sqrt{۳}$ ریشه‌های این چندجمله‌ای هستند.

ب. به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۱.۲.۷ تعیین علامت

تعیین علامتِ چندجمله‌ایِ $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[x]$ به معنای مشخص کردنِ علامتِ $\mathrm{P}(a)$ به‌ازای هر $a\in\mathbb{R}$ است و به‌عبارتی یافتن جواب نامعادلات $\mathrm{P}(x)<۰$ و $\mathrm{P}(x)>۰$.

گزاره ۷.۷: **برای هر $P \in \mathbb{R}[x]$، مجموعه‌های P^+، P^- و P° را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.**

$$\begin{cases} a \in P^- \Longleftrightarrow P(a) < 0 \\ a \in P^\circ \Longleftrightarrow P(0) = 0 \\ a \in P^+ \Longleftrightarrow P(a) > 0 \end{cases}$$

مشخص کردن P^+ و P^- را تعیین علامتِ P و تعیینِ P° را یافتنِ ریشه‌های P خوانیم.

مثال ۲۲.۷: نشان دهید برای $P(x) = ax + b$ که در آن $a \neq 0$، داریم:

آ. $P^\circ = \left\{\dfrac{-b}{a}\right\}$

ب. $a > 0 \Longrightarrow P^+ = \left(\dfrac{-b}{a}, +\infty\right)$

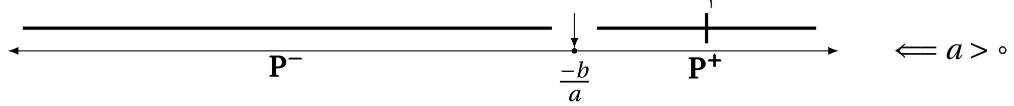
ج. $a < 0 \Longrightarrow P^+ = \left(-\infty, \dfrac{-b}{a}\right)$

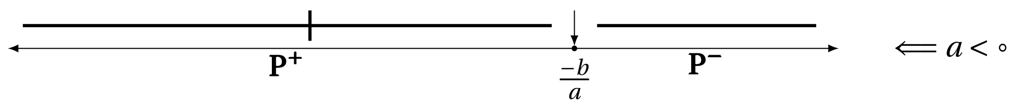
د. $a > 0 \Longrightarrow P^- = \left(-\infty, \dfrac{-b}{a}\right)$

ه. $a < 0 \Longrightarrow P^- = \left(\dfrac{-a}{b}, +\infty\right)$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

با توجه به مثال فوق می‌توانیم از محور اعداد حقیقی برای نشان دادن تعیین علامت چندجمله‌ایِ $P(x) = ax + b$ استفاده کنیم.





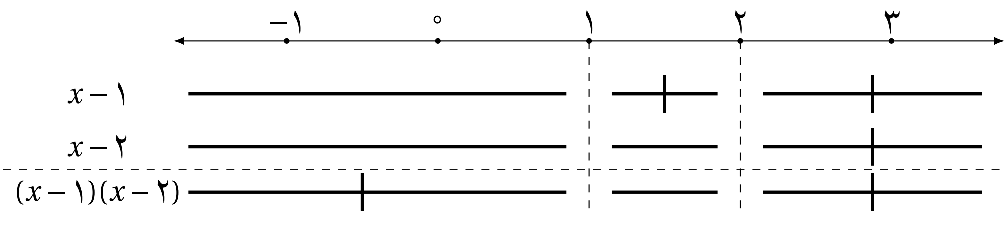
مثال ۲۳.۷: تعیین علامت چندجمله‌ای‌های زیر را بر محور اعداد حقیقی نشان دهید.

آ. $P = 1$ ب. $P = 0$ ج. $P = 2x + 4$

د. $P = -2x + 3$ ه. $P = 3x + 5$ و. $P = x + 3$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

برای تعیین علامت $T = PQ$ به تعیین علامت چندجمله‌ای‌های P و Q نیاز داریم. به‌طورِ مثال، برای تعیین علامت چند جمله‌ایِ $T(x) = (x-1)(x-2)$ چون برای $P(x) = x - 1$ و $Q(x) = x - 2$ داریم $T = PQ$، از جدول زیر برای تعیین علامت $T(x)$ استفاده می‌کنیم.



در جدول فوق بیان شده است که:

- ر بازهٔ $(2, +\infty)$ داریم $(x-1) > 0$ و $(x-2) > 0$ پس $(x-1)(x-2) > 0$.
- در بازهٔ $(1, 2)$ داریم $(x-1) > 0$ و $(x-2) < 0$ پس $(x-1)(x-2) < 0$.

• در بازهٔ $(-\infty,۱)$ داریم $(x-۱)<۰$ و $(x-۲)<۰$ پس $(x-۱)(x-۲)>۰$.

بدین‌ترتیب، P^+ شامل اعضای هر دو بازهٔ $(-\infty,۱)$ و $(۲,+\infty)$ است و می‌نویسیم

$$\mathrm{P}^+ = (-\infty,۱)\cup(۲,+\infty)$$

که در آن نماد $\cup$ «اجتماع» خوانده می‌شود و P^+ را کل اعضای هر دو بازه تعریف می‌کند.

مثال ۲۴.۷: نامعادلات زیر را حل کنید.

آ. $\left(x+\sqrt{۳}\right)\left(x-\sqrt{۲}\right)(x-۳)$ ب. $x\left(x-\sqrt{۲}\right)\left(x-\sqrt[۳]{۳}\right)\left(x-\sqrt[۴]{۴}\right)\left(x-\sqrt[۵]{۵}\right)$

پاسخ: کافی است ریشه‌ها را یافته و آنها را به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب کنیم. ادامه کار ساده است. ■

۲.۲.۷ تجزیه

یافتن ریشه‌ها و تعیین علامت $\mathrm{P}(x)=(x-۱)(x-۲)$ کاری بسیار ساده است. اما پس از ساده کردن و نگارشِ آن به‌صورت $\mathrm{P}(x)=x^۲-۳x+۲$ چندان ساده به‌نظر نمی‌رسد. ساده‌ترین راه این است که باز همَ P را به‌صورت حاصل‌ضربی از چندجمله‌ای‌هایی بنویسیم که یافتن ریشه‌ها و تعیین علامت آن ساده‌تر است. نوشتن یک چندجمله‌ای به‌صورت حاصل‌ضربی از چندجمله‌ای‌هایی غیر ثابت را تجزیه گوییم. اولین و ساده‌ترین روش استفاده از خاصیت توزیع‌پذیری است. به‌طور مثال برای $\mathrm{P}(x)=x^۲-x$ با استفاده از توزیع‌پذیری داریم $\mathrm{P}(x)=x^۲-x=x(x-۱)$.

مثال ۲۵.۷: چندجمله‌ای‌های زیر را تعیین علامت کنید.

آ. $x^۲+x$ ب. $۳x^۲-۴x$ ج. $x^۲y-xy$

پاسخ: با استفاده از خاصیت توزیع‌پذیری آنها را تجزیه کرده، سپس تعیین علامت می‌کنیم. ■

اما همه چندجمله‌ای‌ها را نمی‌توان با استفاده‌ای ساده از توزیع‌پذیری تجزیه کرد. بنابراین، یافتن ریشه و تعیین علامت آنها مشکل می‌شود. اما با استفاده از گزارهٔ زیر می‌توانیم بسیاری از چندجمله‌ای‌های ساده را تجزیه کنیم.

گزاره ۸.۷: برای هر $a,b\in\mathbb{R}$ داریم: $$(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$$

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

برای تجزیهٔ $\mathrm{P}(x)=x^۲+۵x+۶$ با استفاده از گزارهٔ فوق گوییم اگر $a,b\in\mathbb{Z}$ وجود داشته باشند که $\mathrm{P}(x)=(x+a)(x+b)$، آنگاه $ab=۶$ و $a+b=۵$. اما فقط در هشت حالتی که در جدول روبه‌رو بیان شده‌اند، داریم $ab=۶$ و از بین آنها، حالتی را می‌یابیم که $a+b=۵$ که یکی $a=۲$ و $b=۳$ است و دیگری $a=۳$ و $b=۲$. هر دو حالت $\mathrm{P}(x)=(x+۳)(x+۲)$ را مشخص می‌کنند.

rowcolorlightgraya	b	$a+b$
۶	۱	۷
۳	۲	۵
۲	۳	۵
۱	۶	۷
−۱	−۶	−۷
−۲	−۳	−۵
−۳	−۲	−۵
−۶	−۱	−۷

در $\mathrm{P}(x)=(x+a)(x+b)$، با جابه‌جا شدن a و b چندجمله‌ایِ جدیدی ساخته نمی‌شود، پس برای جلوگیری از بررسی حالت‌های تکراری، می‌توان فقط به بررسی حالت‌هایی پرداخت که در آنها $a\geq b$.

مثال ۲۶.۷: هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر را تعیین علامت کنید.

آ . $x^۲ + x - ۲$ ب . $x^۲ + x - ۶$ ج . $x^۳ + ۳x^۲ - ۴x$

پاسخ: راهنمایی: برای تعیین علامت به ریشه‌ها و برای یافتن ریشه‌ها به تجزیه چندجمله‌ای‌ها نیاز داریم.

آ . داریم $(x+a)(x+b) = x^۲ + x - ۲$، اگر $a + b = ۱$ و $ab = -۲$ و با توجه به جدول مقابل، $a = ۲$ و $b = -۱$ پس $(x+۲)(x-۱) = x^۲ + x - ۲$. بنابراین، $x = -۲$ و $x = ۱$ ریشه‌های آنند و با جدول زیر تعیین علامت می‌شود.

a	b	$a+b$
-۲	۱	-۱
-۱	۲	۱
۱	-۲	-۱
۲	-۱	۱

		-۲		۱	
$x+۲$	$-$	$\circ$	$+$		$+$
$x-۱$	$-$		$-$	$\circ$	$+$
$(x+۲)(x-۱)$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$

بنابراین، مقدار چندجمله‌ای در بازهٔ $(-۲, ۱)$ منفی، و در بازه‌های $(۱, +\infty)$ و $(-\infty, -۲)$ مثبت است. ■

گزاره زیر استفاده از روشی مشابه، اما طولانی‌تر را برای تجزیهٔ چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب صحیح پیشنهاد می‌دهد.

گزاره ۹.۷: **برای هر $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ داریم: $(ax+b)(cx+d) = (ac)x^۲ + (ad+bc)x + bd$.**

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

به‌طور مثال، برای تجزیه چندجمله‌ای $۶x^۲ + x - ۲$ گوییم اگر $a, b, c, d, \in \mathbb{Z}$ چنان باشند که

$$۶x^۲ + x - ۲ = (ax+b)(cx+d)$$

آن‌گاه داریم

$$۶x^۲ + x - ۲ = (ax+b)(cx+d) = (ac)x^۲ + (ad+bc)x + bd \Longrightarrow \begin{cases} ac = ۶ \\ bd = -۲ \\ ad + bc = ۱ \end{cases}$$

بنابراین، نخست تمام مقادیر a و c که $ac = ۶$ به‌همراه تمام مقادیر b و d که $bd = -۲$ را می‌یابیم. از میان این اعداد، آنهایی را انتخاب می‌کنیم که به‌ازای آنها داشته باشیم $ad + bc = ۱$. برای این منظور می‌توانیم از جدول زیر استفاده کنیم.

a,c \ b,d	$۱, -۲$	$-۲, ۱$	$-۱, ۲$	$۲, -۱$
$۱, ۶$	۴	-۱۱	-۴	۱۱
$۶, ۱$	-۱۱	۴	۱۱	-۴
$۲, ۳$	-۱	-۴	۱	۴
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

در جدول فوق به هر دوتاییِ b, d یک ستون و به هر دوتاییِ a, c یک سطر اختصاص داده و در هر خانه از جدول، مقدار $ad + bc$ را برحسب سطر و ستون آن قرار می‌دهیم. عدد ۱ در سطر مربوط به

$a=۲$ و $c=۳$، و در ستون مربوط به $b=-۱$ و $d=۲$ ظاهر می‌شود. پس داریم:

$$۶x^۲+x-۲=(۲x+(-۱))(۳x+۲)=(۲x-۱)(۳x+۲)$$

مثال ۲۷.۷: هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر را تعیین علامت کنید.

آ. $۲x^۲-x-۱$ ب. $۱۸x^۲-۳x-۱۰$

پاسخ: کافی است با روش فوق چندجمله‌ای‌های داده شده را تجزیه کنیم. ادامه کار ساده است. ■

مثال ۲۸.۷: نامعادلهٔ $x^۴+۳x^۲+۲<۰$ را حل کنید.

پاسخ: قرار می‌دهیم $y=x^۲$ و درنتیجه $x^۴+۳x^۲+۲=y^۲+۳y+۲=(y+۲)(y+۱)=(x^۲+۲)(x^۲+۱)$
و چون برای هر $a\in\mathbb{R}$ داریم $a^۲>۰$ پس $a^۲+۱>۰$ و $a^۲+۲>۰$ و درنتیجه
$a^۴+۳a^۲+۲=(a^۲+۲)(a^۲+۱)>۰$

بنابراین، این نامعادله در $\mathbb{R}$ جواب ندارد. ■

تمرین:

(۹) چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

آ. $x^۲-x-۲$ ب. $x^۲-۳x+۲$ ج. $x^۲-۱۰x+۱۶$

د. $۲x^۲+۷x+۶$ ه. $۶x^۲-x-۲$ و. $۱۲x^۲+x-۱$

ز. $x^۲-xy-۲y^۲$ ح. $x^۲-۳xy+۲y^۲$ ط. $x^۲-۵xy+۶y^۲$

ی. $۲x^۲+۷xy+۶y^۲$ ک. $۶x^۲y^۲-xy-۲$ ل. $۱۲x^۲+xy^۳-y^۶$

(۱۰) معادلات زیر را حل کنید.

آ. $x^۲=۳x-۲$ ب. $۳x^۲=۱-۲x$ ج. $۲x^۲=۱+x$

(۱۱) جواب نامعادلات زیر را به‌صورت بازه‌ای و همچنین بر محور اعداد نشان دهید.

آ. $x^۲+۴x+۳\le ۰$ ب. $x^۲>۶x-۸$ ج. $x^۲\le ۸-۲x$

د. $۶x^۲\ge ۵x-۶$ ه. $۲x^۲\ge x+۳$ و. $۱۸x^۲<۱-۳x$

۳.۷ اتحادها

استفاده از قضایایی که به اتحادها معرف هستند، در تجزیه و ساده کردن برخی چندجمله‌ای‌ها کاربرد دارند. البته این قضایا نیز به وسیله خواص توزیع‌پذیری و ... ثابت می‌شوند، اما استفاده از این قضایا، تجزیه کردن و همچنین ساده‌کردن را راحت‌تر و سریع‌تر می‌کند.

قضیه ۲.۷ (اتحاد مزدوج)**: برای هر دو چندجمله‌ایِ دلخواه P و Q داریم:**
$$\mathbf{(P+Q)(P-Q)=P^۲-Q^۲}$$

اثبات: $(P+Q)(P-Q)=(P+Q)P-(P+Q)Q=\left(P^۲+PQ\right)-\left(PQ+Q^۲\right)=P^۲-Q^۲$ ■

مثال ۲۹.۷: عبارات زیر را با استفاده از اتحاد مزدواج ساده کنید.

آ. $(۱+x)(۱-x)$ ب. $(x+y)(x-y)$ ج. $(y-x)(y+x)$

د. $\left(\sqrt{۲}-x^۳\right)\left(\sqrt{۲}+x^۳\right)$ ه. $(\sqrt{۵}-\sqrt{۳})(\sqrt{۵}+\sqrt{۳})$ و. $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

می‌توان از این اتحاد برای تجزیه برخی چندجمله‌ای‌ها نیز استفاده کرد. به‌طور مثال برای چندجمله‌ایِ $x^۲ - ۱۶$ با استفاده از قضیهٔ فوق داریم:

$$x^۲ - ۱۶ = \overbrace{x^۲}^{\mathrm{P}^۲} - \overbrace{۴^۲}^{\mathrm{Q}^۲} = \overbrace{(x+۴)}^{(\mathrm{P}+\mathrm{Q})}\overbrace{(x-۴)}^{(\mathrm{P}-\mathrm{Q})}$$

مثال ۳۰.۷: چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

آ. $x^۲ - ۱$ ب. $x^۲ - y^۲$ ج. $x^۲ - ۹$

د. $۴x^۲ - ۹y^۲$ ه. $x^۲ - ۳$ و. $۳x^۲ - ۱$

ز. $۳x^۲ - ۲y^۲$ ح. $۷x^۲y^۴ - ۳y^۲x^۴$ ط. $۴x^۳ - ۵x$

پاسخ: آ. $(x-۱)(x+۱)$ ب. $(x-y)(x+y)$ ج. $(x-۳)(x+۳)$

د. $(۲x-۳y)(۲x+۳y)$ ه. $(x-\sqrt{۳})(x+\sqrt{۳})$ و. $(\sqrt{۳}x-۱)(\sqrt{۳}x+۱)$

ز. $(\sqrt{۳}x-\sqrt{۲}y)(\sqrt{۳}x+\sqrt{۲}y)$ ح. $x^۲y^۲(\sqrt{۷}y-\sqrt{۳}x)(\sqrt{۷}y+\sqrt{۳}x)$

ط. $x(۲x-\sqrt{۵})(۲x+\sqrt{۵})$ ■

در ادامه با دو اتحاد دیگر آشنا می‌شویم که به اتحادهای اول و دوم شهرت یافته‌اند.

گزاره ۱۰.۷: برای هر دو چندجمله‌ای مانند P و Q داریم:

آ. $(\mathrm{P}+\mathrm{Q})^۲ = \mathrm{P}^۲ + ۲\mathrm{PQ} + \mathrm{Q}^۲$ ب. $(\mathrm{P}-\mathrm{Q})^۲ = \mathrm{P}^۲ - ۲\mathrm{PQ} + \mathrm{Q}^۲$

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۳۱.۷: چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

آ. $x^۲ + ۲x + ۱$ ب. $x^۲ + ۶x + ۹$ ج. $x^۲ - ۴x + ۴$

د. $۴x^۲ - ۴x + ۱$ ه. $x^۴ + ۲x^۲ + ۱$ و. $x^۴ - ۲x^۲ + ۱$

پاسخ: آ. $(x+۱)^۲$ ب. $(x+۳)^۲$ ج. $(x-۲)^۲$

د. $(x-۲)^۲$ ه. $(۲x-۱)^۲$ و. $(x^۲-۱)^۲ = ((x-۱)(x+۱))^۲$ ■

روش مربع کامل

تجزیه، یافتن ریشه و تعیین علامت چندجمله‌ای‌هایی به شکل $\mathrm{P}^۲ - a^۲$ چندان مشکل نیست. این ایده، به همراه اتحادهای اول و دوم، روشی را به ارمغان می‌آورد که «روش مربع کامل کردن» خوانده می‌شود. به‌ازای هر چندجمله‌ایِ P، چندجمله‌ایِ $\mathrm{P}^۲$ را مربع کامل گوییم و روشی که با استفاده از ایجاد یک مربع کامل به حل مسئله می‌پردازد را روش مربع کامل خوانیم. پیش از توضیح بیشتر در مورد روش مربع کامل، به مثال زیر توجه می‌کنیم.

مثال ۳۲.۷: چندجمله‌ایِ $x^۲ + ۲x - ۱$ را تجزیه کنید.

پاسخ: با توجه به اینکه $(x+۱)^۲ = x^۲ + ۲x + ۱$ پس داریم

$$x^۲ + ۲x - ۱ = (x+۱)^۲ - ۲ = (x+۱)^۲ - (\sqrt{۲})^۲ = ((x+۱) - \sqrt{۲})((x+۱) + \sqrt{۲})$$ ■

در مثال فوق برای $P(x) = x^{۲} - ۲x - ۱$ با قرار دادن $Q(x) = x + ۱$ و $a^{۲} = ۲$ داریم $P = Q^{۲} - a^{۲}$. به‌طور کلی نوشتن چندجمله‌ایِ P به‌صورت $Q^{۲} \pm a^{۲}$ که در آن یک مربع کامل (چندجمله‌ای $Q^{۲}$) ایجاد شده به روش مربع کامل شهرت یافته است.

مثال ۳۳.۷: $Q \in \mathbb{R}[x]$ و $a \in \mathbb{R}$ را چنان بیابید که $P = Q^{۲} \pm a^{۲}$

آ. $P(x) = x^{۲} + ۴x - ۳$ ب. $P(x) = x^{۲} - ۶x + ۲$ ج. $P(x) = x^{۲} + x - ۱$

د. $P(x) = x^{۲} + x + ۱$ هـ. $P(x) = ۲x^{۲} + ۳x + ۱$ و. $P(x) = ۳x^{۳} - ۴x + ۵$

پاسخ: آ. $x^{۲} + ۴x - ۳ = (x+b)^{۲} \pm a^{۲} = x^{۲} + ۲bx + b^{۲} \pm a^{۲}$ درنتیجه ضرایب x باید برابر باشند. بنابراین، $۲b = ۴$ و درنتیجه $b = ۲$. از طرفی $b^{۲} \pm a^{۲} = -۳$ پس $۲^{۲} \pm a^{۲} = -۳$. درنتیجه $a^{۲} = ۲^{۲} + ۳ = ۷$ و درنتیجه $P(x) = (x+۲)^{۲} - \left(\sqrt{۷}\right)^{۲}$.

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

روش مربع کامل کردن، توانایی ما در تجزیهٔ چندجمله‌ای‌ها را افزایش می‌دهد.

مثال ۳۴.۷: چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

آ. $P(x) = x^{۲} + x - ۱$ ب. $P(x) = x^{۲} + ۴x - ۳$

ج. $P(x) = x^{۴} + x^{۲} + ۱$ د. $P(x) = x^{۴} - x^{۲} + ۱$

پاسخ: آ.

$$\begin{aligned} P(x) = x^{۲} + x - ۱ &= \left(x + \frac{۱}{۲}\right)^{۲} - \frac{۱}{۴} - ۱ = \left(x + \frac{۱}{۲}\right)^{۲} - \frac{۵}{۴} = \left(x + \frac{۱}{۲}\right) - \left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۲} \\ &= \left(x + \frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۵}}{۲}\right)\left(x + \frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۵}}{۲}\right) = \left(x + \frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}\right)\left(x + \frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}\right) \end{aligned}$$

ب. $P(x) = x^{۲} + ۴x - ۳ = (x+۲)^{۲} - ۴ - ۳ = (x^{۲}) - \left(\sqrt{۷}\right)^{۲} = \left(x + ۲ - \sqrt{۷}\right)\left(x + ۲ + \sqrt{۷}\right)$

ج. $P(x) = x^{۴} + x^{۲} + ۱ = \left(x^{۲} + \frac{۱}{۲}\right)^{۲} - \frac{۱}{۴} + ۱ = \left(x^{۲} + \frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲}$

که به تجزیه چندجمله‌ای داده شده کمکی نمی‌کند. بنابراین روش دیگری را در پیش می‌گیریم.

$$x^{۴} + x + ۱ = x^{۴} + ۲x^{۲} + ۱ - x^{۲} = \left(x^{۲} + ۱\right)^{۲} - x^{۲} = \left(x^{۲} + ۱ - x\right)\left(x^{۲} + ۱ + x\right)$$

د. نوشتن چندجمله‌ایِ $x^{۴} - x^{۲} + ۱$ به صورت‌های $x^{۴} - ۲x^{۲} + ۱ + x^{۲}$ و $\left(x^{۲} - \frac{۱}{۲}\right) + \frac{۳}{۴}$ راهی برای استفاده از اتحاد مزدوج و تجزیه چندجمله‌ای نمی‌گشاید. بنابراین آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^{۴} - x^{۲} + ۱ = x^{۴} + ۲x^{۲} + ۱ - ۳x^{۲} = \left(x^{۲} + ۱\right)^{۲} - \left(\sqrt{۳}x\right)^{۲} = \left(x^{۲} - \sqrt{۳}x + ۱\right)\left(x^{۲} + \sqrt{۳}x + ۱\right)$$ ■

روش دلتا

آنچه به‌عنوان روش دلتا معرفی می‌شود چیزی جز نتیجه روش مربع کامل نیست. مثال زیر درک این موضوع را برای ما ساده‌تر خواهد کرد.

مثال ۳۵.۷: نشان دهید برای $P(x) = ax^{۲} + bx + c$ که در آن $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a > ۰$ داریم:

آ. $P(x) = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{۲\sqrt{a}}\right)^{۲} - \frac{b^{۲} - ۴ac}{۴a}$ ب. $P(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^{۲} - \frac{b^{۲} - ۴ac}{۴a^{۲}}\right)$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. (از روش مربع کامل استفاده کنید.) ■

مثال فوق این ایده را مطرح می‌کند که برای هر چندجمله‌ای مانند $\mathrm{P}(x)=ax^{۲}+bx+c\in\mathbb{R}[x]$ که $a\neq ۰$، بتوان ریشه‌هایش را به‌دست آورده و آن را تجزیه کرد. قضیه زیر با استفاده از مثال فوق، به بحث در مورد ریشه‌های این چندجمله‌ای می‌پردازد.

قضیه ۳.۷: برای هر $\mathrm{P}(x)=ax^{۲}+bx+c\in\mathbb{R}[x]$ که $a\neq ۰$ قرار می‌دهیم $\Delta=b^{۲}-۴ac$ و درنتیجه داریم:

آ. $\Delta<۰$ اگر و تنها اگر معادلهٔ $\mathrm{P}(x)=۰$ در $\mathbb{R}$ جواب نداشته باشد.

ب. $\Delta=۰$ اگر و تنها اگر معادلهٔ $\mathrm{P}(x)=۰$ تنها یک ریشهٔ $x=-\frac{b}{۲a}$ را دارد.

ج. $\Delta>۰$ اگر و تنها اگر معادلهٔ $\mathrm{P}(x)=۰$ دقیقاً دوریشه متمایزِ زیر را دارد:

$$x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \text{ و } x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

اثبات: با توجه به مثال قبل داریم:

$$\mathrm{P}(x)=۰ \overset{a\neq ۰}{\Longleftrightarrow} \left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}-\frac{b^{۲}-۴ac}{۴a^{۲}}=۰ \Longleftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

ادامهٔ کار به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۳۶.۷: تعیین کنید به ازای چه مقادیری از a داریم:

آ. $x^{۲}+۳x+a$ دقیقاً یک ریشه دارد. ب. $x^{۲}+ax+a$ دقیقاً یک ریشه دارد.

ج. $x^{۲}+ax-۱$ ریشه ندارد. د. $x^{۲}+ax+۱$ دو ریشهٔ متمایز دارد.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

تمرین:

(۱۲) نشان دهید:

آ. $\sqrt{۵}+\sqrt{۲}>\sqrt{۱۳}$ ب. $\sqrt{۵}+\sqrt{۲}<\sqrt{۱۴}$ ج. $\sqrt{۵}+\sqrt{۲}>۳$

د. $\sqrt{۱۳}-\sqrt{۷}<۱$ هـ. $\sqrt{۱۳}-\sqrt{۶}>۱$ و. $\sqrt{۸}-\sqrt{۳}<۱$

ز. $\sqrt{۶}-\sqrt{۲}>۱$ ح. $\sqrt{۱۲}-\sqrt{۶}>۱$ ط. $\sqrt{۷۸}-\sqrt{۲۳}>۴$

ی. $\sqrt{۷۸}-\sqrt{۲۴}<۴$ ک. $\sqrt{۸۰}-\sqrt{۲۴}>۴$ ل. $\sqrt{۷۹}-\sqrt{۲۴}<۴$

(۱۳) نشان دهید $\sqrt[۳]{۱۰}-\sqrt[۳]{۴}<\frac{۲}{۳}$.

(۱۴) چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

آ. $۴x^{۲}-۹y^{۲}$ ب. $x^{۲}-۳$ ج. $۳x^{۲}-۹y^{۲}$

د. $x^{۲}+۶x+۹$ هـ. $x^{۲}-۶x+۹$ و. $x^{۲}+۴x+۴$

ز. $x^{۲}-۸x+۱۶$ ح. $۴x^{۲}+۴x+۱$ ط. $۴x^{۲}-۱۲x+۹$

ی. $۹x^{۲}-۶x+۱$ ک. $x^{۲}+۲x-۱$ ل. $x^{۲}+x-۱$

(۱۵) نامعادلات زیر را حل کنید.

آ. $x^{۲}-۴\geq ۰$ ب. $۴x^{۲}-۸<۰$ ج. $۲x^{۲}+۴x+۱\leq ۰$

د. $۲x^{۲}-۲x+۳\geq ۲x^{۲}+۲$ هـ. $x^{۳}-۸x^{۲}+۱۶x<۰$ و. $x^{۲}+۱\geq ۳$

(۱۶) معادلات زیر را با مربع کامل کردن حل کنید.

آ. $۳x^{۲}-۴=x^{۲}$ ب. $x^{۲}-۲x+۳=۵$ ج. $۳x^{۲}+۶x=۳$

(۱۷) به‌ازای چه مقادیری از a، چندجمله‌ای $x^{۲}-۳x+a$ ریشه ندارد؟

(۱۸) به‌ازای چه مقادیری از a، چندجمله‌ای $ax^۲ - ۲x + ۳$ دقیقاً یک ریشه دارد؟

(۱۹) به‌ازای چه مقادیری از a، چندجمله‌ای $x^۲ + ax + ۳$ دو ریشه دارد؟

(۲۰) فرض کنید $\mathrm{P}(x) = ax^۲ + bx + c$. نشان دهید:

آ. اگر $a > ۰$، آن‌گاه برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $\mathrm{P}(x) \geq \mathrm{P}(\frac{-b}{۲a})$

ب. اگر $a < ۰$، آن گاه برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $\mathrm{P}(x) \leq \mathrm{P}(\frac{-b}{۲a})$

(راهنمایی: از روش مربع کامل کردن استفاده کنید.)

(۲۱) اگر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ریشه‌های چندجمله‌ای $\mathrm{P}(x) = ax^۲ + bx + c$ باشند، آن‌گاه
$\mathrm{P}(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$

(۲۲) نشان دهید برای هر سه عدد حقیقی متمایز مانند α، β و γ و چندجمله‌ایِ زیر داریم:
$$\mathrm{P}(x) = \frac{۱}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}(x-\alpha)(x-\beta)$$

آ. $\mathrm{P}(\alpha) = ۰$ ب. $\mathrm{P}(\beta) = ۰$ ج. $\mathrm{P}(\gamma) = ۱$

(۲۳) مقادیر $a, b, c \in \mathbb{R}$ را چنان بیابید که $x = ۲$ و $x = ۳$ ریشه‌های $\mathrm{P}(x) = ax^۲ + bx + c$ باشند و $\mathrm{P}(۴) = -۳$.

(۲۴) مقادیر $a, b, c \in \mathbb{R}$ را چنان بیابید که برای $\mathrm{P}(x) = ax^۲ + bx + c$ داشته باشیم:

آ. $\mathrm{P}(۰) = ۱$، $\mathrm{P}(۱) = ۲$ و $\mathrm{P}(-۱) = ۲$ ب. $\mathrm{P}(۰) = ۰$، $\mathrm{P}(۱) = ۳$ و $\mathrm{P}(-۱) = ۰$

ج. $\mathrm{P}(۱) = ۲$، $\mathrm{P}(۲) = ۳$ و $\mathrm{P}(۳) = ۰$ د. $\mathrm{P}(۰) = ۰$، $\mathrm{P}(۱) = ۱$ و $\mathrm{P}(۲) = ۲$

۴.۷ تقسیم چندجمله‌ای‌ها

محاسبهٔ حاصل‌جمع، حاصل‌ضرب و حاصل تفریق دو چندجمله‌ای با استفاده از خواص جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها کار بسیار ساده‌ای است. اما آیا می‌توانیم تقسیم را نیز روی چندجمله‌ای‌ها تعریف کنیم؟

در تقسیم چندجمله‌ای‌ها نیز مانند تقسیم اعداد، $\mathrm{P} \div \mathrm{Q}$ را به‌معنای چندجمله‌ای‌ای مانند T درنظر می‌گیریم که $\mathrm{P} = \mathrm{TQ}$. بنابراین، $\mathrm{T} = \mathrm{P} \div \mathrm{Q}$ اگر و تنها اگر $\mathrm{P} = \mathrm{TQ}$.

برای به‌دست آوردن الگوریتم تقسیم چندجمله‌ای‌ها، خود را به چندجمله‌ای‌های یک متغیره محدود می‌کنیم. برای سادگی بیشتر، خود را به تقسیم تک‌جمله‌ای‌ها محدود کرده و پس از آن به تقسیم چندجمله‌ای‌ها می‌پردازیم.

مثال ۳۷.۷: حاصل تقسیم‌های زیر را محاسبه کنید.

آ. $x^۲ \div x$ ب. $۳x \div x$

ج. $x^۲y^۳ \div xy$ د. $۳x^۳y^۴ \div ۲xy^۳$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۳۸.۷: نشان دهید:
$$\left(ax_۱^{n_۱}x_۲^{n_۲}\dots x_k^{n_k}\right)\left(bx_۱^{m_۱}x_۲^{m_۲}\dots x_k^{m_k}\right) = (ab)x_۱^{n_۱+m_۱}x_۲^{n_۲+m_۲}\dots x_k^{n_k+m_k}$$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

داریم $(۳x)\left(۲x^۲ + ۳x - ۵\right) = ۶x^۳ + ۹x^۲ - ۱۵x$. بنابراین
$$\left(۶x^۳ + ۹x^۲ - ۱۵x\right) \div \left(۲x^۲ + ۳x - ۵\right) = ۳x$$

برای به‌دست آوردن $۳x$ کافی است $۶x^۳ \div ۲x^۲$ را محاسبه کنیم. سپس با امتحان کردن آن جواب به‌دست می‌آید. از همین راه می‌توان برای محاسبه حاصل تقسیم زیر استفاده کرد

$$\left(۳x^۳ + ۲x^۲ + ۴x + ۱۵\right) \div \left(x^۲ - x + ۳\right)$$

اگر $\mathrm{P}(x) = a_n x^n + \ldots + a_۱ x + a_۰$ حاصل تقسیم مذکور باشد؛ $(a_n x^n)\left(x^۲\right) = ۳x^۳$. بنابراین، $a_n x^n = ۳x^۳ \div x^۲ = ۳x$. پس $n = ۱$ و $\mathrm{P}(x) = ۳x + a_۰$ و درنتیجه:

$$\begin{aligned}\left(۳x^۳ + ۲x^۲ + ۴x + ۱۵\right) &= \left(x^۲ - x + ۳\right)(۳x + a_۰)\\ &= ۳x\left(x^۲ - x + ۳\right) + a_۰\left(x^۲ - x + ۳\right)\end{aligned}$$

بنابراین

$$a_۰\left(x^۲ - x + ۳\right) = \left(۳x^۳ + ۲x^۲ + ۴x + ۱۵\right) - ۳x\left(x^۲ - x + ۳\right) = ۵x^۲ - ۵x + ۱۵$$

به‌طور مشابه داریم $a_۰ = ۵x^۲ \div x^۲ = ۵$ درنتیجه حاصل تقسیم برابر است با $۳x + ۵$. این روند را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم.

$۳x^۳ + ۲x^۲ + ۴x + ۱۵$	$x^۲ - x + ۳$
$۳x^۳ - ۳x + ۹$	$۳x$
$۵x - ۵$	
$۵x - ۵$	۵
$۰ \quad - \quad ۰$	$۳x + ۵$

مثال فوق نشان می‌دهد با توجه به بزرگ‌ترین نمای متغیرها در مقسوم و مقسوم‌علیه، می‌توان خارج قسمت تقسیم را به‌دست آورد. لذا مفهوم جدیدی به‌نام «درجه» تعریف می‌کنیم.

تعریف ۸.۷: برای هر تک‌جمله‌ایِ ناصفر مانند P درجهٔ P که با $\deg\mathrm{P}$ نشان داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

آ. برای هر عدد حقیقی (ثابت) ناصفر مانند a داریم $\deg a = ۰$.

ب. برای هر متغیری مانند x داریم $\deg x = ۱$

ج. برای هر دو تک‌جمله‌ایِ ناصفر مانند P و Q داریم $\deg(\mathrm{PQ}) = (\deg\mathrm{P}) + (\deg\mathrm{Q})$

مثال ۳۹.۷: درجهٔ هر یک از تک‌جمله‌ای‌های زیر را بیابید.

آ. ۲ ب. y ج. $۲x$

د. $۳xy$ ه. $x^۳$ و. $y^۵$

ز. $\sqrt{۳۴}x^۳y^۷$ ح. $x^۲yz^۳$ ط. $۰/۴۵y^۶x^۷$

پاسخ: ج. $\deg(۲x) = (\deg ۲) + (\deg x) = ۰ + ۱ = ۱$

ز. $\deg(\sqrt{۳۴}x^۳y^۷) = (\deg\sqrt{۳۴}) + (\deg x^۳) + (\deg y^۷) = ۰ + ۳ + ۷ = ۱۰$ ■

حال درجه را برای چندجمله‌ای‌ها تعریف می‌کنیم.

تعریف ۹.۷: اگر $\mathrm{P} = \mathrm{Q}_۱ + \mathrm{Q}_۲ + \ldots + \mathrm{Q}_n$ و Q_iها تک‌جمله‌ای‌هایی نامتشابه باشند، آنگاه

$$\deg\mathrm{P} = \max\{\deg\mathrm{Q}_i : ۱ \leqslant i \leqslant n\}$$

به‌عبارتی، $\deg\mathrm{P}$ بزرگ‌ترین عدد بین $\deg\mathrm{Q}_i$هایی است که $۱ \leq i \leq n$.

مثال ۴۰.۷: درجهٔ هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر را بیابید.

آ. $۲xy$ ب. $x+۲$ ج. $۳x^{۵}+۲y$

د. $x-x+۱$ ه. $(x+۱)y^{۳}$ و. $(x-y)(x+y)$

پاسخ: آ. $\deg(۲xy)=۰+۱+۱=۲$ ب. $\deg(x+۲)=\max\{۱,۰\}=۱$

ج. $\deg(۳x^{۵}+۲y)=\max\{۵,۲\}=۵$ د. $\deg(x-x+۱)=\deg(۱)=۰$

ه. $\deg\big((x+۱)y^{۳}\big)=\deg\big(xy^{۳}+y^{۳}\big)=\max\{۴,۳\}=۴$

و. $\deg\big(x-y)(x+y)\big)=\deg\big(x^{۲}-y^{۲}\big)=\max\{۲,۲\}=۲$ ■

با دقت بخوانید... صورت مثال از پاسخ آن مهمتر است.

مثال ۴۱.۷: نشان دهید:

آ. برای هر چندجمله‌ای یک متغیره مانند $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[x]$ داریم $\deg\mathrm{P}=n$ اگر و تنها اگر $\mathrm{P}(x)=a_nx^n+\ldots+a_۱x+a_۰\in\mathbb{R}[x]$ که در آن $a_n\neq ۰$.

ب. $\deg\big(bx^m\mathrm{P}\big)=m+\deg\mathrm{P}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

گزاره ۱۱.۷: برای هر $\mathbf{P,Q}\in\mathbb{R}[x]$ داریم $\mathbf{\deg PQ=\deg P+\deg Q}$.

اثبات: با توجه به مثال فوق واضح است. ■

مورد (ج) از تعریف (۸.۷) به تک‌جمله‌ای‌ها می‌پردازد اما گزارهٔ فوق در مورد چندجمله‌ای‌ها است. به‌طور مثال برای $\mathrm{P}_۰(x)=a_nx^n+\ldots+a_۱x+a_۰$ و $\mathrm{Q}(x)=b_mx^m+\ldots+b_۱x+b_۰$ که در آن $m\leqslant n$. با قرار دادن $\mathrm{T}_۰(x)=a_nx^n\div b_mx^m=\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$ داریم: $\deg(\mathrm{P}_۰-\mathrm{T}_۰\mathrm{Q})<\deg\mathrm{P}_۰$ بنابراین، می‌توانیم این روش را آن‌قدر ادامه دهیم تا $\deg\mathrm{P}_{n+۱}<\deg\mathrm{Q}$ که در این صورت خواهیم داشت $\mathrm{T}_{n+۱}=۰$.

قضیه ۴.۷: به‌ازای هر $\mathbf{T,S}\in\mathbb{R}[x]$ چندجمله‌ای‌های $\mathbf{Q,R}\in\mathbb{R}[x]$ وجود دارند که $\mathbf{T=QS+R}$ و $\mathbf{R=۰}$ یا $\mathbf{\deg R<\deg S}$.

اثبات: با توجه به مثال قبل به‌سادگی اثبات می‌شود. ■

در الگوریتم فوق، Q را خارج‌قسمت و R را باقی‌مانده تقسیم گوییم.

مثال ۴۲.۷: خارج قسمت و باقی‌مانده تقسیم‌های زیر را به‌دست آورید.

آ. $\big(۳x^{۲}-۲x+۱\big)\div(x-۱)$ ب. $\big(x^{۳}+۴x^{۲}+۲x-۳\big)\div(x+۳)$

پاسخ: آ.

$$
\begin{array}{rrr|l}
۳x^{۲} & -۲x & +۱ & x-۱ \\ \cline{4-4}
۳x^{۲} & -۳x & & ۳x \\ \hline
 & x & +۱ & \\
 & x & -۱ & \qquad ۱ \\ \hline
 & & ۲ & ۳x\quad +۱
\end{array}
$$

پس داریم
$$۳x^{۲}-۲x+۱=(\overbrace{۳x+۱}^{\text{خارج قسمت}})(\overbrace{x-۱}^{\text{مقسومٌ علیه}})+\overbrace{۲}^{\text{باقی‌مانده}}$$

ب. به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

قضیه ۵.۷: برای هر $P \in \mathbb{R}[x]$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم: $\quad P(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow (x-\alpha)\big|P$

اثبات: اگر $(x-\alpha)\big|P(x)$، وجود دارد $Q \in \mathbb{R}[x]$ که $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$ و درنتیجه $P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0$.
اگر $P(\alpha) = 0$ پس با تقسیم P بر $(x-\alpha)$ داریم $P(x) = (x-\alpha)Q(x) + R(x)$ که در آن $R = 0$ یا $\deg R = 0$. بنابراین $a \in \mathbb{R}$ وجود دارد که $R(x) = a$. درنتیجه $P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) + a = a$ و چون $P(\alpha) = 0$ داریم $R(x) = a = 0$ و درنتیجه $(x-\alpha)\big|P(x)$. ■

گزاره ۱۲.۷: اگر $P \in \mathbb{R}[x]$ دارای n ریشهٔ متمایز باشد، داریم $\deg P \geqslant n$.

اثبات: از استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. برای $n = 1$ داریم $P(\alpha_1) = 0 \Longrightarrow (x-\alpha_1)\big|P \Longrightarrow \deg P \geqslant 1$.
به استقرا فرض کنید (فرض استقرا) برای هر $P \in \mathbb{R}[x]$ و k عدد حقیقی متمایز مانند α_1، ... ، α_k که $P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = \ldots = P(\alpha_k) = 0$ داریم $\deg P \geqslant k$.
کافی است ثابت کنیم (حکم استقرا) اگر $P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = \ldots = P(\alpha_k) = P(\alpha_{k+1}) = 0$ که در آن α_iها اعداد حقیقی متمایزی هستند، آنگاه $\deg P \geqslant k+1$. برای این منظور گوییم چون $P(\alpha_{k+1}) = 0$ پس $(x-\alpha_{k+1})\big|P$ و درنتیجه $Q \in \mathbb{R}[x]$ وجود دارد که $P(x) = (x-\alpha_{k+1})Q(x)$ و چون برای $i = 1,\ldots,k$ داریم $(\alpha_i - \alpha_{k+1}) \neq 0$ و $P(\alpha_i) = 0$ پس $Q(\alpha_i) = 0$ و درنتیجه $\deg Q \geqslant k$. بنابراین $\deg P \geqslant k+1$. ■

قضیه و گزارهٔ فوق ما را در حل بسیاری مسائل یاری می‌دهند. در مثال زیر با یکی از ایده‌های اصلی حل مسئله به‌وسیلهٔ آنها آشنا می‌شویم و موارد دیگر به تمرینات وامی‌گذاریم.

مثال ۴۳.۷: نشان دهید چندجمله‌ای درجهٔ دوم $P \in \mathbb{R}[x]$ دارای ریشه‌های α و β است اگر و تنها اگر عدد حقیقی ناصفری مانند a وجود داشته باشد که $P(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$.

پاسخ: چون $P(\alpha) = P(\beta) = 0$ پس $(x-\alpha)\big|P(x)$ و $(x-\beta)\big|P(x)$. بنابراین می‌توان از اول بودن $(x-\alpha)$ و $(x-\beta)$ نسبت به یکدیگر نتیجه گرفت که $(x-\alpha)(x-\beta)\big|P(x)$ و چون $\deg P = 2$ پس برای چندجمله‌ایِ Q که $P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)Q(x)$ داریم $\deg Q = 0$ و چون $P \neq 0$ (چون $\deg P$ بامعناست) پس $Q(x) = a$ که در آن $a \in \mathbb{R}$ ناصفر است. ■

تمرین:

(۲۵) باقی‌مانده و خارج قسمت هر یک از تقسیم‌های زیر را بیابید.

آ . $\left(x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 1\right) \div (x-3)$ $\qquad$ ب . $\left(x^2 - 2x + 1\right) \div (x-1)$

(۲۶) درستی یا نادرستی عبارت زیر را برای هر $P, Q \in \mathbb{R}[x] - 0$ مشخص کنید.

آ . $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$

ب . $\deg(P+Q) = \max\{\deg P, \deg Q\}$

ج . اگر $\deg P = \deg Q$ آنگاه P و Q متشابه اند.

د . اگر $\deg P > \deg Q$ آنگاه $\deg(P+Q) = \deg P$

هـ . $\deg(P+Q) \leqslant \max\{\deg P, \deg Q\}$

(۲۷) برای $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ و $Q(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ داریم:

$P = Q$ اگر و تنها اگر $m = n$ و برای هر $0 \leqslant i \leqslant m$ داشته باشیم $a_i = b_i$

(۲۸) نشان دهید با تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم P داریم:

آ . $P^- = (\alpha, \beta)$ اگر و تنها اگر $P = a(x-\alpha)(x-\beta)$ و $a > 0$.

ب . $P^+ = (\alpha, \beta)$ اگر و تنها اگر $P = a(x-\alpha)(x-\beta)$ و $a < 0$.

(۲۹) فرض کنید $\alpha < \beta$ ریشه‌های معادلهٔ $P = ax^۲ + bx + c$ هستند و $a \neq ۰$. نشان دهید:

$$x \in (\alpha,\beta) \text{ اگر و تنها اگر } \operatorname{sgn} P(x) = -\operatorname{sgn} a$$

به عبارتی علامت $P(x)$ برای xهای بین دو ریشهٔ P، مخالفِ علامتِ a است.

(۳۰) نشان دهید برای چندجمله‌ایِ $P(x) = ax^۲ + bx + c$ و $\Delta = b^۲ - ۴ac$ داریم:

آ. برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $P(x) > ۰$ اگر و تنها اگر $\Delta < ۰$ و $a > ۰$.

ب. برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $P(x) < ۰$ اگر و تنها اگر $\Delta < ۰$ و $a < ۰$.

(راهنمایی: از روش مربع کامل کمک بگیرید.)

(۳۱) چندجمله‌ای‌های زیر را تعیین علامت کنید.

آ. $x^۲ - x - ۱$ ب. $x^۳ + x^۲ + x$ ج. $(x^۲ - x + ۱)(x^۲ + x + ۱)$

(۳۲) چندجمله‌ای درجه دوم $P(x) = ax^۲ + bx + c$ را چنان بیابید که:

آ. $P(۱) = P(۳) = ۰$ و $P(۱) = -۱$

ب. برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $P(x) \leqslant P(۰) = ۰$ و $P(۱) = ۲$.

ج. برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $P(x) \geqslant P(۲) = -۱$ و $P(۰) = ۲$.

(راهنمایی: از روش مربع کامل کمک بگیرید.)

(۳۳) نشان دهید برای هر $P = ax^۲ + b^x + c$ که $a \neq ۰$ داریم:

آ. $\forall x \in \mathbb{R};\ P(x) \geqslant P(\alpha)$ اگر و تنها اگر $a > ۰$ و $\alpha = \frac{-b}{a}$.

ب. برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $P(x) \leqslant P(\alpha)$ اگر و تنها اگر $a < ۰$ و $\alpha = \frac{-b}{a}$.

(راهنمای: از روش مربع کامل کمک بگیرید.)

(۳۴) نشان دهید برای اعداد حقیقی متمایز $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ...، α_n و β داریم:

آ. اگر $P = \frac{(x-\alpha_۱)(x-\alpha_۲)\dots(x-\alpha_n)}{(\beta-\alpha_۱)(\beta-\alpha_۲)\dots(\beta-\alpha_n)}$ آن‌گاه $P(\beta) = ۱$ و $P(\alpha_۱) = P(\alpha_۲) = \dots = P(\alpha_n) = ۰$.

ب. اگر $P = \gamma\frac{(x-\alpha_۱)(x-\alpha_۲)\dots(x-\alpha_n)}{(\beta-\alpha_۱)(\beta-\alpha_۲)\dots(\beta-\alpha_n)}$ که در آن $\gamma \in \mathbb{R}$ و $\gamma \neq ۰$ آن‌گاه $P(\beta) = \gamma$ و $P(\alpha_۱) = P(\alpha_۲) = \dots = P(\alpha_n) = ۰$.

(۳۵) نشان دهید برای $P = \frac{x-\alpha_۲}{\alpha_۱-\alpha_۲}\beta_۱ + \frac{x-\alpha_۱}{\alpha_۲-\alpha_۱}\beta_۲$ داریم: $P(\alpha_۱) = \beta_۱$ و $P(\alpha_۲) = \beta_۲$.

(۳۶) چندجمله‌ای P را چنان بسازید که برای هر $i \in \{۱,۲,\dots,n\}$ داشته باشیم $P(\alpha_i) = \beta_i$.

۵.۷ بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک

مشابه اعداد صحیح، مفهوم عاد کردن (بخش‌پذیری) را برای چندجمله‌ای‌ها نیز تعریف می‌کنیم و آن را با همان نام می‌خوانیم.

تعریف ۱۰.۷: برای هر $P,Q \in \mathbb{R}[x]$ گوییم $Q|P$ و می‌خوانیم «Q عاد می‌کند P را» اگر $S \in \mathbb{R}[x]$ وجود داشته باشد که $P = SQ$.

مثال ۴۴.۷: درستی عبارت زیر را برای هر $P,Q \in \mathbb{R}[x]$ بررسی کنید.

آ. $Q|P$ اگر و تنها اگر باقی‌مانده تقسیم P بر Q برابرِ صفر باشد.

ب. اگر $Q|P$ آن‌گاه $P = ۰$ یا $\deg Q \leq \deg P$.

پاسخ: آ. نادرست است؛ چون بنا به تعریف فوق صفر خودش را عاد می‌کند اما تقسیم بر صفر بی‌معناست. البته این مورد برای $P \neq ۰$ درست است و اثبات درستی آن به خواننده واگذار می‌شود.
ب. به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۴۵.۷: نشان دهید برای هر $P, Q, D \in \mathbb{R}[x]$ داریم:
آ. اگر $D|P$، آن‌گاه برای هر $S \in \mathbb{R}[x]$ داریم $D|PS$.
ب. اگر $D|P$ و $D|Q$، آن‌گاه $D|P \pm Q$.
ج. اگر $D|P$ و $D|Q$، آن‌گاه برای هر $A, B \in \mathbb{R}[x]$ داریم $D|(AP \pm BQ)$.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال زیر ایده‌ای بسیار مهم در خویش دارد که آغازگر بحثی بسیار مهم است.

مثال ۴۶.۷: فرض کنید $R_۱$ باقی‌مانده تقسیم P بر $Q \neq ۰$ باشد و $D|P$ و $D|Q$. نشان دهید:
آ. $D|R_۱$
ب. اگر $R_۱ = ۰$، آن‌گاه $Q|P$.
ج. اگر $R_۱ \neq ۰$ و باقی‌مانده تقسیم Q بر $R_۱$ را $R_۲$ بنامیم، آن‌گاه $D|R_۲$.
د. اگر $R_۱ \neq ۰$ و $R_۲ = ۰$، آن‌گاه $R_۱|Q$ و $R_۱|P$

پاسخ: کافی است فرض کنیم $S_۱, S_۲ \in \mathbb{R}[x]$ چنان‌اند که $P = S_۱Q + R_۱$ و اگر $R_۱ \neq ۰$، آن‌گاه $Q = S_۲R_۱ + R_۲$. ادامهٔ کار به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود. ■

با ادامهٔ روند فوق و به‌دست آوردن $R_۱$، $R_۲$، $R_۳$ و ...، در نهایت به یک باقی‌ماندهٔ صفر می‌رسیم. چون در غیر این‌صورت داریم:

$$\deg Q > \deg R_۱ > \deg R_۲ > \deg R_۳ > \ldots \geq ۰$$

اگر $\deg Q = n$، آن‌گاه برای هر $i \in \mathbb{N}$ داریم $\deg R_i < n - i$ و $\deg R_n < ۰$ که غیرممکن است.
اگر این روند با $R_{k+۱} = ۰$ به پایان برسد، آن‌گاه $R_k|P$ و $R_k|Q$ و همچنین برای هر $D \in \mathbb{R}[x]$ که $D|P$ و $D|Q$، داریم $D|R_k$. (قرار دهید $R_۰ = Q$).
چندجمله‌ای D را مقسومٌ علیه مشترک P و Q خوانیم اگر $D|P$ و $D|Q$. چند جمله‌ای R_n را بزرگ‌ترین مقسومٌ علیه P و Q گوییم اگر بر هر مقسومٌ علیه مشترک آنها بخش‌پذیر باشد. بزرگ‌ترین مقسومٌ علیه مشترک را به اختصار «ب‌م‌م» خوانده و ب‌م‌م P و Q را به‌صورت (P, Q) نمایش می‌دهیم.
چون برای هر $T \in \mathbb{R}[x]$ داریم $T|۰$ پس $(P, ۰) = (۰, P) = P$. اما برای $P(x) = ۰$، عبارت $(P, P) = (۰, ۰)$ بی‌معناست. چون اگر $D = (P, P) = (۰, ۰)$، برای هر T داریم $T|D$ و این ممکن نیست. بنابراین، در مورد $(۰, P)$ نیز باید گفت اگر $P \neq ۰$، آن‌گاه $(۰, P) = P$.

گزاره ۱۳.۷: به‌ازای هر $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ اگر $P|Q$ آن‌گاه $Q = ۰$ یا $\deg P \leqslant \deg Q$.

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۴۷.۷: نشان دهید برای هر $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ داریم:
$P|Q$ و $Q|P$ اگر و تنها اگر عددی حقیقی و ناصفر مانند a باشد که $P = aQ$.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال فوق ایده تعریف مفهوم جدیدی را مطرح می‌کند که در زیر به بیان آن می‌پردازیم.

تعریف ۱۱.۷: $\mathrm{P}(x) = a_n x^n + \ldots + a_۱ x + a_۰ \in \mathbb{R}[x]$ **را تکین گوییم اگر** $a_n = ۱$.

بنابراین، $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$ تکین است اگر و تنها اگر بتوان P را به‌صورت زیر نوشت:
$\mathrm{P}(x) = x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \ldots + a_۱ x + a_۰$
به‌عبارتی در چندجمله‌ای تکین، ضریب بیشترین درجه (یعنی x^n) برابر است با ۱. علاوه‌براین دو چندجمله‌ای P و Q که به‌ازای عدد حقیقیِ ناصفری مانند a داریم $\mathrm{P} = a\mathrm{Q}$ را متشابه می‌نامیم. می‌توان تشابه تک‌جمله‌ای‌ها را نمونه‌ای از تشابه چندجمله‌ای‌ها به‌شمار آورد.

مثال ۴۸.۷: نشان دهید:

آ. هر چندجمله‌ای ناصفر با یک چندجمله‌ای تکین متشابه است.

ب. هر دو چندجمله‌ای تکینِ متشابه، با هم برابرند.

پاسخ: با توجه به نمایش استاندارد واضح است. ■

تعریف ۱۲.۷: **برای هر** $\mathrm{P},\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[x]$ **که هر دو صفر نیستند،** $\mathrm{D} \in \mathbb{R}[x]$ **را ب‌م‌م (بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک) P و Q خوانده و با (P,Q) نشان می‌دهیم اگر و تنها اگر:**

آ. D تکین باشد.

ب. $\mathrm{D}|\mathrm{P}$ **و** $\mathrm{D}|\mathrm{Q}$.

ج. برای هر $\mathrm{S} \in \mathbb{R}[x]$ **که** $\mathrm{S}|\mathrm{P}$ **و** $\mathrm{S}|\mathrm{Q}$ **داشته باشیم** $\mathrm{S}|\mathrm{D}$.

مثال ۴۹.۷: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه جفت چندجمله‌ای‌های داده شده را بیابید.

آ. $x^۳ + ۱$ و $x^۴ - ۱$ ب. $۲x^۲ + ۱$ و $۳x^۲ + ۲$

ج. $x^۴ + x^۲ + ۲$ و $x^۲ + ۲$ د. $x^۳ + ۱$ و $x^۲ - ۱$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

در اعداد صحیح نیز ب‌م‌م تعریف می‌شود و با همین نمادگذاری نشان داده می‌شود. به‌طور مثال ب‌م‌م ۶ و ۴ را به‌صورت $(۶,۴)$ نمایش داده و داریم $(۶,۴) = ۲$. اما برای چندجمله‌ای‌های $\mathrm{P}(x) = ۴$ و $\mathrm{Q}(x) = ۶$، داریم $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = ۱$؛ چون تنها چندجمله‌ای تکین از درجهٔ صفر $\mathrm{D}(x) = ۱$ است.

مثال ۵۰.۷: برای هر $\mathrm{P},\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[x]$ که هر دو صفر نباشند، همهٔ چندجمله‌ای‌های $\mathrm{AP} + \mathrm{BQ}$ که $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathbb{R}[x]$ را با $\mathscr{A}$ نمایش می‌دهیم. نشان دهید:

آ. $\mathrm{P},\mathrm{Q} \in \mathscr{A}$

ب. اگر $\mathrm{T},\mathrm{S} \in \mathscr{A}$، آنگاه برای هر $\mathrm{W},\mathrm{Z} \in \mathbb{R}[x]$ داریم $\mathrm{WT} \pm \mathrm{ZS} \in \mathscr{A}$).

ج. اگر $\mathrm{E} \in \mathscr{A}$، آنگاه هر $\mathrm{T} \in \mathbb{R}[x]$ که T با E متشابه باشد داریم $\mathrm{T} \in \mathscr{A}$.

د. اگر $\mathrm{E} \in \mathscr{A}$ بین همه اعضای $\mathscr{A}$ کمترین درجه را داشته باشد،
برای هر $\mathrm{T} \in \mathscr{A}$ که $\deg\mathrm{T} = \deg\mathrm{E}$ داریم T با E متشابه است.

ه. برای E در مورد (ج) داریم $\mathrm{E}|\mathrm{P}$ و $\mathrm{E}|\mathrm{Q}$.

و. (P,Q) با E متشابه است و $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathscr{A}$.

پاسخ: ه. هر مقسومٌ علیه مشترک P و Q مانند D، هر عضو $\mathscr{A}$ مانند T را عاد می‌کند و چون $E \in \mathscr{A}$ پس $D|E$.
اگر باقی‌مانده تقسیم P بر E را با R نشان دهیم، $S \in \mathbb{R}[x]$ وجود دارد که $P = SE+R$ پس $R = P-SE \in \mathscr{A}$.
بنابراین، $\deg R \not< \deg E$ پس $R = ۰$.
توجه داریم که بنا به الگوریتم تقسیم، یا $R = ۰$ یا $\deg R < \deg E$.
موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

گزاره ۱۴.۷: برای هر $P,Q \in \mathbb{R}[x]$ که هر دو صفر نباشند، $A,B \in \mathbb{R}[x]$ وجود دارند که $(P,Q) = AP + BQ$

برای هر $P,Q \in \mathbb{R}[x]$ و هر عدد حقیقی ناصفر مانند a داریم $a|P$ و $a|Q$. بنابراین می‌توانیم اول بودن P و Q نسبت به یکدیگر را به‌معنای نداشتن هیچ مقسوم‌علیه مشترکی به‌غیر از چندجمله‌ای‌های ثابتِ ناصفر درنظر بگیریم که در این صورت داریم $(P,Q) = ۱$. بنابراین به‌صورت رسمی اول بودن دو چندجمله‌ای را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۳.۷: دو چندجمله‌ایِ P و Q را نسبت به هم اول گوییم اگر $(P,Q) = ۱$

قضیه ۶.۷: برای هر $P,Q,S \in \mathbb{R}[x]$ که P و Q هر دو صفر نیستند داریم:
اگر $(P,Q) = ۱$ و $P|QS$ آن‌گاه $P|S$

اثبات: چون $P|QS$ پس $T \in \mathbb{R}[x]$ وجود دارد که $QS = TP$. از طرفی، $(P,Q) = ۱$ پس $A,B \in \mathbb{R}[x]$ وجود دارند که $AP + BQ = ۱$. بنابراین:

$$S = S۱ = S(AP + BQ) = APS + BQS = APS + BTP = P(AS + BT) \Longrightarrow P|S$$ ■

یکتایی تجزیه

با دقت بخوانید...
آگاهی از این مطالب، مهم‌تر از تسلط بر آنهاست.

چندجمله‌ای P را تحویل‌پذیر (تجزیه‌پذیر) می‌خوانیم اگر چندجمله‌ای‌های Q و S وجود داشته باشند که $P = QS$. به‌طور مثال

$$x^۲ + x = x(x + ۱)$$

بنابراین چند جمله‌ای $x^۲ + x$ را تحویل‌پذیر یا تجزیه‌پذیر می‌خوانیم. همچنین چندجمله‌ای P را تحویل‌ناپذیر (تجزیه‌ناپذیر) خوانیم اگر چندجمله‌ای‌های Q و S وجود نداشته باشند که $P = QS$. اما با این بیان برای هرچندجمله‌ایِ P و هر عدد حقیقیِ ناصفر مانند a داریم $P = a\left(\frac{۱}{a}P\right)$ که با قرار دادن $Q = a$ و $S = \frac{۱}{a}P$ داریم $P = QS$. بنابراین، با این تعریف هر چندجمله‌ای ناصفر تحویل‌پذیر است. حتی برای چندجمله‌ایِ صفر نیز داریم $۰P = ۰$؛ برای هر $P \in \mathbb{R}[x]$. بنابراین، با این دیدگاه چندجمله‌ایِ صفر نیز تحویل‌پذیر است.

برای مقابله با این مشکل، می‌گوییم چندجمله‌ایِ P تحویل‌پذیر (تجزیه‌پذیر) است اگر چندجمله‌ای‌های Q و S وجود داشته باشند که $P = QS$ و $\deg Q > ۰$ و $\deg S > ۰$. در واقع روی Q و S شرط گذاشته‌ایم. برای به‌دست آوردن تعریفی برای تحویل‌پذیری و تحویل‌ناپذیری به مثال زیر توجه می‌کنیم.

مثال ۵۱.۷: فرض کنید چندجمله‌ای ناصفرِ $P \in \mathbb{R}[x]$ چنان باشد که برای هر $Q,S \in \mathbb{R}[x]$ که $P = QS$ داشته باشیم $\deg P = ۰$ یا $\deg Q = ۰$ نشان دهید برای هر چندجمله‌ای ناصفر مانند $T \in \mathbb{R}[x]$ داریم $(P,T) = ۱$ یا $P|T$.

پاسخ: کافی است نشان دهیم اگر $(P,T) \neq 1$ آنگاه $P|T$. برای این منظور فرض می‌کنیم $D = (P,T) \neq 1$. چون $D \neq 1$ ناصفر و تکین است، پس $\deg D \geqslant 1$ و درنتیجه $\deg D \neq 0$. چون $D|P$ پس چندجمله‌ایِ ناصفرِ Q وجود دارد که $P = DQ$ و چون $\deg D \neq 0$، از فرض مسئله داریم $\deg Q = 0$ که در این صورت $P|D$ و چون $D|T$ داریم $P|T$. ∎

با توجه به مثال فوق این ایده مطرح می‌شود که تحویل‌ناپذیری را به‌صورت زیر تعریف کرده و چندجمله‌ای‌های ناصفری که تحویل‌ناپذیر نیستند را تجزیه‌پذیر (تحویل‌پذیر) خوانیم.

تعریف ۱۴.۷: چندجمله‌ای $P \in \mathbb{R}[x]$ را تحویل‌ناپذیر خوانیم اگر برای هر چندجمله‌ایِ ناصفرِ $T \in \mathbb{R}[x]$ داشته باشیم $(P,T) = 1$ یا $P|T$.
چندجمله‌ایِ ناصفرِ T را تحویل‌پذیر گوییم اگر تحویل‌ناپذیر نباشد.

توجه داریم که در ابتدا تحویل‌پذیری را به‌معنای تجزیه‌پذیری بیان کردیم و هر چندجمله‌ای تجزیه‌ناپذیر را تحویل‌ناپذیر خواندیم. اما زمانی که تلاش کردیم تعریفی دقیق از تحویل‌پذیری و تحویل‌ناپذیری ارائه دهیم، مجبور شدیم نخست تحویل‌ناپذیری را تعریف کنیم و سپس تحویل‌پذیری را به معنای تحویل‌ناپذیر نبودن درنظر بگیریم.

گزاره ۱۵.۷: برای هر $P \in \mathbb{R}[x]$ که $P \neq 0$ یا P تحویل‌ناپذیر است یا تحویل‌پذیر است و چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر $T \in \mathbb{R}[x]$ وجود دارد که $T|P$ و $\deg T \geqslant 1$.

اثبات: فرض کنید P تحویل‌پذیر است، پس تحویل‌ناپذیر نیست و درنتجه $Q_1 \neq 0$ وجود دارد که $(P,Q_1) \neq 1$. اگر $(P,Q) = T_1$ پس $\deg T_1 \geqslant 1$. بنابراین یا T_1 تحویل‌ناپذیر است یا $Q_2 \in \mathbb{R}[x]$ وجود دارد که $(T_1, Q_2) \neq 1$ و اگر $(T_1, Q_2) = T_2$ آنگاه $\deg T_2 \geqslant 1$ و چون $T_2|T$ پس $T_2|P$.
مطلب فوق ایده استفاده از استقرای ریاضی براساس درجهٔ P را فراهم می‌آورد. تکمیل اثبات به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ∎

مثال ۵۲.۷: نشان دهید هر $P(x) = ax^2 + bx + c$ که $a \neq 0$،داریم $P(x)$ تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر $b^2 - 4ac < 0$.

پاسخ: اگر $P(x)$ تحویل پذیر باشد، پس چندجمله‌ای‌های درجهٔ اولی مانند $T(x) = a_1x+b_1$ و $S(x) = a_2x+b_2$ وجود دارند که $P(x) = T(x).S(x)$. اما T و S در $\mathbb{R}$ دارای ریشه‌های $\frac{-b_1}{a_1}$ و $\frac{-b_2}{a_2}$ هستند که در این‌صورت ریشه‌های P نیز هستند. ∎

با توجه به گزارهٔ فوق، برای هر چندجمله‌ایِ P، دوحالت وجود دارد؛ یا P تحویل‌ناپذیر است که آن را تجزیه‌ناپذیر می‌خوانیم و یا تحویل‌پذیر است که در این‌صورت چندجمله‌ایِ تحویل‌ناپذیری مانند Q_1 وجود دارد که $Q_1|P$. فرض کنیم i_1 بزرگترین عدد طبیعی باشد که $Q_1^{i_1}|P$. قرار می‌دهیم $P_1 = \frac{P}{Q_i^{i_1}}$.
در ادامه یا P_1 تحویل‌ناپذیر است که قرار می‌دهیم $Q_2 = P_1$ و $i_1 = 1$ و کار تمام می‌شود، یا P_1 تحویل‌پذیر است که در این‌صورت چندجمله‌ایِ تحویل‌ناپذیرِ Q_2 وجود دارد که $Q_2|P_1$. با ادامه این روند چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیرِ Q_1، Q_2، ... و Q_n به همراه اعداد طبیعیِ i_1، i_2، ... و i_n یافت می‌شوند که $P = Q_1^{i_1}Q_2^{i_2}\ldots Q_n^{i_n}$. خوانندگان می‌توانند به‌سادگی نشان دهند که Q_iها، دو به دو نسبت به هم اول هستند.

خوانندگان به سادگی می‌توانند نشان دهند برای هر چندجمله‌ایِ ناصفر مانند $P \in \mathbb{R}[x]$ و $\deg P > 0$، چندجمله‌ای‌های تکین و تحویل‌ناپذیرِ Q_1، Q_2، ... و Q_n به همراه $a \in \mathbb{R}$ وجود

دارند که Q_iها دو به دو نسبت به هم اول بوده و $P = aQ_1^{i_1}Q_2^{i_2}\dots Q_n^{i_n}$ که i_1، i_2، ... و i_n اعدادی طبیعی هستند. در این صورت هرچندجمله‌ای $P \in \mathbb{R}[x]$ که $\deg P > 0$ به شیوه‌ای یکتا تجزیه می‌شود.

تعریف ۱۵.۷: برای هر $P \in \mathbb{R}[x]$ که $\deg P > 0$ نگارشِ $P = aQ_1^{i_1}Q_2^{i_2}\dots Q_n^{i_n}$ تجزیهٔ P خوانده می‌شود اگر $n, i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ و Q_iها چندجمله‌ای‌هایی تکین، تحویل‌ناپذیر و دو به دو نسبت به هم اول باشند.

قضیه ۷.۷: برای هر $P \in \mathbb{R}[x]$ که $\deg P > 0$ تجزیه‌ای منحصربه‌فرد وجود دارد.

اثبات: با توجه به مطالب فوق و با استفاده از استقرای ریاضی روی درجه P ساده است. به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۶.۷ عبارات گویا

شباهت زیادی بین $\mathbb{R}[x]$ و $\mathbb{Z}$ (اعداد صحیح) وجود دارد. جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها نیز مانند جمع و ضرب اعداد صحیح دارای خواص جابجایی، شرکت‌پذیری، همانی، توزیع‌پذیری، عنصر قرینه، ضرب در صفر و حذف جمع و حذف ضرب هستند. علاوه‌براین، همان‌طور که برای هر $a, b \in \mathbb{Z}$ داریم «$ab = 0$ اگر و تنها اگر $a = 0$ یا $b = 0$»، برای هر $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ نیز داریم «$PQ = 0$ اگر و تنها اگر $P = 0$ یا $Q = 0$».

البته علاوه‌بر اعداد صحیح، اعداد گویا و حقیقی نیز دارای این ویژگی‌ها هستند. ویژگی مهمی که اعداد صحیح را از اعداد گویا و حقیقی متمایز می‌کند، نداشتن خاصیت عنصر معکوس است. به‌عبارت دیگر، همان‌طور که در اعداد صحیح عبارت $2 \div 1$ بی‌معناست در $\mathbb{R}[x]$ نیز عبارت $1 \div x$ بی‌معناست.

این شباهت‌ها ما را بر آن می‌دارد تا به ساختن عبارات جدیدی فکر کنیم که به‌خاطر شباهت زیادشان به اعداد گویا، آنها را عبارت‌های گویا می‌خوانیم.

تعریف ۱۶.۷: برای هر $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ که $Q \neq 0$، کسرِ $\frac{P}{Q}$ را یک عبارت گویا می‌خوانیم.

در اعداد گویا، تساوی، جمع و ضرب چنان معنا یافتند که برای هر $a, b \in \mathbb{Z}$ داشتیم $\frac{a}{b} = a \div b$ که در آن هر عدد صحیح را یک عدد گویا نیز میدانیم. مثال زیر در تعریف تساوی، جمع و ضرب عبارت‌های گویا به ما کمک خواهد کرد.

مثال ۵۳.۷: فرض کنید $P_1, P_2, Q_1, Q_2, T, S \in \mathbb{R}[x]$ چنان باشند که $T = P_1 \div Q_1$ و $S = P_2 \div Q_2$. نشان دهید:

آ. $T = S$ اگر و تنها اگر $P_1Q_2 = P_2Q_1$. ب. $T \times S = (P_1P_2) \div (Q_1Q_2)$

ج. $T + S = (P_1Q_2 + P_2Q_1) \div (Q_1Q_2)$ د. $T - S = (P_1Q_2 - P_2Q_1) \div (Q_1Q_2)$

پاسخ: آ. بنا به تعریف تقسیم داریم $TQ_1 = P_1$ و $SQ_2 = P_2$. درنتیجه از $Q_1Q_2 \neq 0$ داریم:

$$T = S \iff TQ_1Q_2 = SQ_1Q_2 \iff P_1Q_2 = P_2Q_1$$

ب. کافی است نشان دهیم $(TS)(Q_1Q_2) = P_1P_2$.

ج. کافی است نشان دهیم $(T+S)(Q_1Q_2) = P_1Q_2 + P_2Q_1$.

د. به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

بنابراین، تساوی، جمع و ضرب عبارت‌های گویا را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۷.۷: برای هر $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[x]$ که Q_1 و Q_2 ناصفرند، قرار می‌دهیم:

آ. $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$ اگر و تنها اگر $P_1Q_2 = P_2Q_1$.

ب. $\frac{P_1}{Q_1} \times \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2}$

ج. $\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}$

مشابه اعداد گویا، می‌توان خواص خوش‌تعریفی، جابجایی، شرکت‌پذیری و همانی را برای جمع و ضرب عبارت‌های گویا نیز ثابت کرد. همچنین خواص توزیع‌پذیری، ضرب در صفر و حذف جمع و حذف ضرب نیز به سادگی اثبات می‌شوند. علاوه‌براین، می‌توان نشان داد برای هر دو عبارت گویای T و S داریم «$TS = 0$ اگر و تنها اگر $T = 0$ و $S = 0$».

باتوجه به تعریف فوق، داریم $\frac{x-1}{x+2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)}$ و به‌طورکلی برای هر $P, Q, T \in \mathbb{R}[x]$ که $Q, T \neq 0$، داریم $\frac{PT}{QT} = \frac{P}{Q}$. حذف T از صورت و مخرج یک عبارت گویا را ساده کردن آن عبارت گوییم و یک عبارت گویا را تحول‌پذیر گوییم اگر ساده‌شدنی باشد و هر عبارت ساده‌نشدنی را «تحویل‌ناپذیر» خوانیم.

مثال ۵۴.۷: نشان دهید برای هر $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ که $Q \neq 0$ داریم:

آ. $\frac{P}{Q} = \frac{P \div (P, Q)}{Q \div (P, Q)}$

ب. $\frac{P}{Q}$ تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر $(P, Q) = 1$

پاسخ: بنا به تعاریف واضح است. ■

اما نکتهٔ مهم این است که کسر $\frac{4}{6}$ در اعداد کسری ساده‌شدنی بوده و می‌توان آن را به $\frac{2}{3}$ ساده کرد. در حالی که ۶ و ۴ به‌عنوان دو چندجمله‌ای نسبت به هم اولند. بنابراین، کسری $\frac{4}{6}$ به‌عنوان یک عبارت گویا، تحویل‌ناپذیر است.

مثال ۵۵.۷: عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید.

آ. $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ ب. $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$ ج. $\frac{x^3 - 1}{1 - x^4}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

توجه داریم که هرچند می‌توان عبارت $\frac{2(x+1)}{2(x-1)}$ را ساده‌تر کرد، اما این عبارت تحویل‌ناپذیر است، چون بنا به تعریف ب‌م‌م چندجمله‌ای‌ها داریم $(2x+2, 2x-2) = 1$.

مثال ۵۶.۷: عبارات زیر را ساده کنید.

آ. $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1}$ ب. $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 + 1}$

پاسخ: آ.
$$\begin{cases} x^۴+x^۲+۱=(x^۴+۲x^۲+۱)-x^۲=(x^۲+۱)^۲-x^۲=(x^۲+x+۱)(x^۲-x+۱) \\ x^۳-۱=(x-۱)(x^۲+x+۱) \end{cases}$$

بنابراین، $\dfrac{x^۴+x^۲+۱}{x^۳-۱}=\dfrac{(x^۲-x+۱)(x^۲+x+۱)}{(x-۱)(x^۲+x+۱)}=\dfrac{x^۲-x+۱}{x-۱}$

ب. به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

گزاره ۱۶.۷: برای هر عبارت گویا مانند $\mathbf{T=\frac{P}{Q}}$، مقدار T در $\boldsymbol{a\in\mathbb{R}}$ را با $\mathbf{T(\boldsymbol{a})}$ نمایش داده و تعریف می‌کنیم: $\mathbf{T(\boldsymbol{a})=\dfrac{P(\boldsymbol{a})}{Q(\boldsymbol{a})}}$؛ اگر $\mathbf{Q(\boldsymbol{a})\neq ۰}$.

جالب است که $T(x)=\dfrac{(x-۱)(x+۱)}{x+۱}$ و $S(x)=x-۱$ برابرند، اما $T(۱)$ و $S(۱)$ برابرند نیستند؛ چون $S(۱)=۲$، اما $T(۱)$ بی‌معناست؛ چون $\frac{۰}{۰}=\dfrac{(۱+۱)(۱-۱)}{۱-۱}=T(۱)$. این مثال نشان می‌دهد آنچه به‌عنوان تساوی دو عبارت گویا تعریف کردیم، به هیچ وجه به‌معنای یکسانی کامل آن دو نیست. همان‌طور که $T(x)$ و $S(x)$ به‌عنوان دو عبارت گویا برابرند، اما به‌هیچ وجه یکسان نیستند؛ چون $T(۱)\neq S(۱)$.

مثال زیر، ما را برای بیان قضیه‌ای بسیار مهم آماده می‌کند که در حل معادلات و نامعادلات از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است؛ هرچند معمولاً افراد بدون توجه به آن به حل معادلات و نامعادلات می‌پردازند.

مثال ۵۷.۷: نشان دهید:

آ. اگر $P\in\mathbb{R}[x]$ حداقل n ریشهٔ متمایز داشته باشد آن‌گاه $\deg P\geq n$، یا $P=۰$.

ب. $\dfrac{P(a)}{Q(a)}=۰$ اگر و تنها اگر $P(a)=۰$ و $Q(a)\neq ۰$.

ج. هر عبارت گویا تعدادی متناهی ریشه دارد، اگر و تنها اگر صفر نباشد.

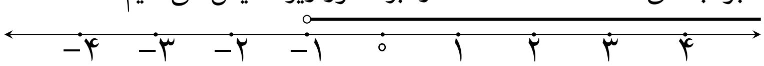
د. اگر عبارت‌های گویای T و S چنان باشند که به‌ازای بی‌شمار $a\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $T(a)=S(a)$، آن‌گاه $T-S=۰$ و $T=S$.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

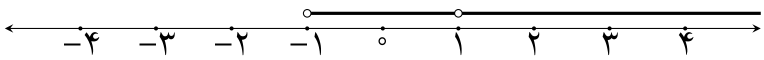
قضیه ۸.۷: دو عبارت گویا برابرند اگر و تنها اگر در بی‌شمار $\boldsymbol{a\in\mathbb{R}}$، مقادیر برابر داشته باشند.

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. (از مثال قبل کمک بگیرید) ■

بنا به قضیهٔ فوق برای حل معادلهٔ $\dfrac{x^۲-۱}{x-۱}=۰$، کافی است معادلهٔ $x+۱=۰$ را حل کرده و جواب آن را در معادلهٔ اولیه امتحان کنیم. همچنین برای حل نامعادلهٔ $\dfrac{x^۲-۱}{x-۱}>۰$، کافی است نامعادلهٔ $x+۱>۰$ را حل کرده و مقادیری که مخرج را صفر می‌کند، از جواب‌های این نامعادله حذف کنیم. به‌طور مثال، جواب‌های نامعادلهٔ $x+۱>۰$ را بر محور زیر نمایش می‌دهیم.



چون $x=۱$ مخرج $\dfrac{x+۲-۱}{x-۱}$ را صفر می‌کند، آن را از جواب‌های فوق حذف می‌کنیم. بنابراین، جواب‌های نامعادلهٔ اصلی به‌شکل زیر بر محور اعداد نمایش داده می‌شوند.



بنابراین، می‌توان جواب این نامعادله را به‌صورت $(-۱,۱)\cup(۱,+\infty)$ نمایش داد.

مثال ۵۸.۷: جواب نامعادلات زیر را هم بر محور اعداد و هم به‌صورت بازه‌ای نمایش دهید.

آ. $\dfrac{x^۳-۱}{x-۱}>۱$ ب. $\dfrac{x^۳-x^۲-۴x+۴}{x+۲}>۶$

پاسخ: در هر دو مورد، صورت و مخرج ریشه‌های برابر دارند، پس ساده می‌شوند. چون مخرج از درجهٔ ۱ است، پس صورت بر مخرج بخش‌پذیر است. بنابراین، صورت را بر مخرج تقسیم کرده، نامعادلهٔ جدید را حل می‌کنیم. در هر دو مورد به یک نامعادله از نوع نامعادلات چندجمله‌ای می‌رسیم که با تعیین علامت به سادگی قابل حل است.

ادامهٔ کار به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۵۹.۷: معادلات زیر را حل کنید.

آ. $\dfrac{x-۱}{x+۱}=۲$ ب. $\dfrac{x^۲-۳x}{x-۱}=x+۱$ ج. $\dfrac{x^۲}{x-۱}-x=۳x+۲$

پاسخ: آ. $\dfrac{x-۱}{x+۱}=۲ \overset{x+۱\neq ۰}{\Longleftrightarrow} x-۱=۲(x+۱)$. (ادامه کار به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود)

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

تعیین علامت و نامعادلات گویا

برای تعیین علامت عبارت‌های گویا، به این نکته توجه می‌کنیم که برای هر $a,b\in\mathbb{R}$ که $b\neq ۰$ داریم:

$$\frac{a}{b}\gtreqqless ۰ \text{ اگر و تنها اگر } ab\gtreqqless ۰$$

بنابراین، برای تعیین علامت $\mathrm{T}(x)=\dfrac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$ می‌توان از تعیین علامت $\mathrm{S}(x)=\mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)$ کمک گرفت. به‌طور مثال برای تعیین علامت $\mathrm{T}(x)=\dfrac{۱-x}{x+۱}$، با تعیین علامت صورت و مخرج داریم:

	$(-\infty,-۱)$	-۱	$(-۱,۱)$	۱	$(۱,+\infty)$
$x+۱$	$-$	۰	$+$		$+$
$۱-x$	$+$		$+$	۰	$-$
$\mathrm{T}(x)$	$-$		$+$	۰	$-$

در تعیین علامت فوق، برای $x=-۱$، مقابل $\mathrm{T}(x)$ از یک خط سیاه استفاده کرده‌ایم تا نشان دهیم $\mathrm{T}(-۱)$ بی‌معناست. همان‌طور که نشان داده‌ایم $\mathrm{T}(۱)=۰$.

مثال ۶۰.۷: جواب نامعادلات زیر را به‌صورت بازه‌ای بنویسید.

آ. $\dfrac{۱-x}{x+۱}>۰$ ب. $\dfrac{۱-x}{x+۱}\geq ۰$ ج. $\dfrac{۱-x}{x+۱}<۰$ د. $\dfrac{۱-x}{x+۱}\leq ۰$

پاسخ: پس از تعیین علامت عبارت گویای $\dfrac{۱-x}{x+۱}$ داریم:

آ. $(-۱,۱)$ ب. $(-۱,۱]$ ج. $(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$ د. $(-\infty,-۱)\cup[۱,+\infty)$ ■

شخصی نامعادلهٔ $\frac{x-۱}{x+۱} > ۲$ را به‌صورت زیر حل می‌کند.

$$\frac{x-۱}{x+۱} > ۲ \Longrightarrow x-۱ > ۲(x+۱) = ۲x+۲ \Longrightarrow x < -۳$$

اما برای $x = -۵$ داریم $\frac{(-۵)-۱}{(-۵)+۱} = \frac{-۶}{-۴} = \frac{۳}{۲} \not> ۲$.
این اشتباه، نتیجهٔ بی‌توجهی به مطلب زیر است.

$$\begin{cases} {}^{a}\!/_{b} > c \overset{b>۰}{\Longleftrightarrow} a > bc \\ {}^{a}\!/_{b} > c \overset{b<۰}{\Longleftrightarrow} a < bc \end{cases}$$

به‌عبارتی با ضرب طرفین نامساوی در عددی منفی، جهت نامساوی تغییر می‌کند. بنابراین، دو حالت درنظر می‌گیریم. $x+۱ > ۰$ و $x+۱ < ۰$.

برای $x+۱ < ۰$ داریم:

$$\frac{x-۱}{x+۱} > ۲ \xrightarrow{x+۱<۰} x-۱ < ۲(x+۱) \Longrightarrow x > -۳$$

از طرفی هم داریم $x+۱ < ۰ \Longleftrightarrow x < -۱$. بنابراین، بین xهایی که $x < -۱$، آنهایی که $x > -۳$ جواب معادله هستند. یعنی $-۳ < x < -۱$. به‌عبارتی همه xهایی که $x \in (-۳, -۱)$

برای $x+۱ > ۰$ داریم:

$$\frac{x-۱}{x+۱} > ۲ \xrightarrow{x+۱>۰} x-۱ > ۲(x+۱) \Longrightarrow x < -۳$$

یعنی از بین xهایی که $x+۱ > ۰$، آنهایی که $x < -۳$. اما $x+۱ > ۰ \Longleftrightarrow x > -۱$ و $-۳ < -۱$. بنابراین هیچ عددی مانند x وجود ندارد که $x < -۳$ و $x > -۱$.

بدین‌ترتیب، $\frac{x-۱}{x+۱} > ۲ \Longleftrightarrow x \in (-۳, -۱)$

اما روش دیگری نیز برای حل این نامعادله وجود دارد. می‌توان نامعادله را مسئلهٔ تعیین علامت تبدیل کرد.

$$\frac{x-۱}{x+۱} > ۲ \Longleftrightarrow \frac{x-۱}{x+۱} - ۲ > ۰ \Longleftrightarrow \frac{(x-۱)-۲(x+۱)}{x+۱} > ۰ \Longleftrightarrow \frac{-x-۳}{x+۱} > ۰$$

بنابراین، می‌توان با تعیین علامت عبارت گویای $\frac{-x-۳}{x+۱}$، جواب نامعادلهٔ فوق را به‌دست آورد.

		-۳		-۱	
$-x-۳$	+	۰	−		−
$x+۱$	−		−	۰	+
$\frac{-x-۳}{x+۱}$	−	۰	+		−

بنابراین داریم: $\frac{x-۱}{x+۱} > ۲ \Longleftrightarrow \frac{-x-۳}{x+۱} > ۰ \Longleftrightarrow x \in (-۳, -۱)$

مثال ۶۱.۷: نامعادلات زیر را حل کنید.

آ. $\dfrac{x^2+2}{x-1} > x$ ب. $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} > 2$

پاسخ: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۷.۷ عبارت‌های جبری

پیش از این با عباراتی مانند $\sqrt{x}$، $\sqrt{x}+1$ و $1/\sqrt{x}$ آشنا شدیم. این عبارات را «عبارات جبری» گوییم. شخصی در تعریف عبارات جبری می‌گوید:

عبارات گویا و ریشه‌های آنها عباراتی جبری هستند.

اما در این صورت $\sqrt{x}+\sqrt{1+x}$ جبری نیست. چون ریشهٔ nاُم هیچ عبارت گویایی نیست. بنابراین، عبارت‌های جبری را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

گزاره ۱۷.۷: هر عبارت گویا یک عبارت جبری است و برای هر دو عبارت جبری مانند $\mathrm{P}(x)$ و $\mathrm{Q}(x)$، هر یک از عبارات زیر، جبری است.

$$\mathrm{P}(x)\pm\mathrm{Q}(x)،\ \sqrt[n]{\mathrm{P}(x)}،\ \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)،\ \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$$

برای هر $a\in\mathbb{R}$ و هر عبارت جبری مانند $\mathrm{T}(x)$، مقدار $\mathrm{T}(x)$ در $x=a$ را به‌معنای نتیجهٔ جایگذاری a به‌جای x در عبارت $\mathrm{T}(x)$ درنظر گرفته و با $\mathrm{T}(a)$ نمایش می‌دهیم.

هرآنچه برای حلّ معادلات و نامعادلات جبری باید بدانیم را در فصل دوم آموخته‌ایم و در فصل سوم به اعداد حقیقی توسعه داده‌ایم. حال که با اتحادها، تجزیه و تعیین علامت آشنا شده‌ایم، می‌توانیم مسائل پیچیده‌تری را حل کنیم.

تمرین:

(۳۷) معادلات زیر را حل کنید.

آ. $x+\dfrac{1}{x}=2$ ب. $\dfrac{2x+3}{5-x}=\dfrac{2x+1}{3-x}$ ج. $\frac{1}{|x-1|}=3$

د. $\dfrac{\log_2 x}{3}=\log_8 9$ ه. $\dfrac{\log_{25} x+2}{3}=\dfrac{3}{8-\log_5 x^2}$ و. $\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x}{\sqrt{8}-2}$

(۳۸) نشان دهید برای هر عدد طبیعی مانند n داریم

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

(۳۹) نشان دهید اگر a^n-1 عددی اول باشد، آنگاه $a=2$ و n عددی اول است.

(۴۰) نشان دهید اگر $\dfrac{a}{b}$ ریشهٔ $a_0+a_1x+\cdots+a_nx_n$ باشد و $(a,b)=1$، آنگاه $a=a_0$ و $b=a_n$

(۴۱) نشان دهید برای عدد اول p و اعداد صحیح a و b، یا a^p-b^p نسبت به p اول است یا $p^2 \mid a^p-b^p$

(۴۲) نشان دهید اگر m و n فرد باشند، آنگاه $8 \mid m^2-n^2$ و $8 \mid m^4+n^4-2$

(۴۳) نشان دهید برای هر عدد طبیعی مانند n داریم:

آ. $۲ | ۳^n - ۱$ ب. $۵ | ۶^n - ۱$ ج. $۱۲۳ | ۱۲۴^n - ۱$

(۴۴) اگر برای $x, n \in \mathbb{N}$، $x^n + ۱$ اول باشد، آن‌گاه n توانی از ۲ است.

فصل ۸

مجموعه‌ها

توانایی دسته‌بندی اشیا و نام‌گذاری بر آنها از ویژگی‌های مهم گونهٔ انسانی است که همیشه از آن بهره برده است. اما اولین باز لایب‌نیتز در قرن هفدهم ساختاری نمادین برای دسته‌بندی‌های دلخواه ارائه کرد و عملگرهایی برای آنها معرفی نمود. امروزه هر یک از این دسته‌ها را یک «مجموعه»[۱] می‌خوانیم.

۱.۸ مجموعه چیست؟

مفهوم مجموعه در ریاضیات، از مفهوم مجموعه در عبارات روزمره گرفته شده است.

آ. مجموعهٔ ورزشی آزادی ب. مجموعهٔ مسکونی البرز

«مجموعه» به‌معنای گروه، دسته و جمعی از اشیا است و واژهٔ «عضویت» به‌معنای «تعلق داشتن»، «عضو بودن» و «داخل یک مجموعه بودن» است. مفهوم «عضویت» نیز تقریباً به همان معنای زبان محاوره‌ای است. به عبارت‌های زیر دقت کنید:

- علی عضو انجمن اسلامی دانشگاه است.
- بهار عضو بسیج دانشجویی است.
- رضا عضو تیم فوتبال دانشگاه است.

به‌پیشنهاد لایب‌نیتز، مجموعه‌ها را با حروف انگلیسی بزرگ نشان می‌دهیم و می‌توان گفت یک نام‌گذاری، برای بیان راحت‌تر مجموعه‌ها است. برای نشان دادن «عضویت» از نماد «$\in$» استفاده می‌شود و نماد «$\notin$» نیز به‌معنای «عدم عضویت»، «تعلق نداشتن» و «عضو نبودن» به‌کار می‌رود.

اگر نماد A به‌معنایِ «انجمن اسلامی دانشگاه» باشد و «علی» را با نماد a نشان دهیم، عبارت «علی عضو انجمن اسلامی دانشگاه است» به صورت‌های زیر نوشته می‌شود.

«$a \in \mathrm{A}$» یا «انجمن اسلامی دانشگاه $\in$ علی»

یکی از راه‌های مشخص نمودن و نشان دادن یک مجموعه، نوشتن اعضای آن میان دو علامت «{» و «}» است[۲] و اعضا با علامت «,» از یکدیگر جدا می‌شوند. به عنوان مثال، مجموعهٔ فصل‌های سال را که شامل «بهار»، «تابستان»، «پاییز» و «زمستان» است، به‌صورت زیر نشان می‌دهیم.

{ بهار , تابستان , پاییز , زمستان }

---

[۱] Set

[۲] ـ این علامت را «آکولاد» یا «دو ابرو» می‌خوانند.

مثال ۱.۸: مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آنها مشخص کنید.
آ. مجموعهٔ اعضای خانوادهٔ خودتان.
ب. مجموعهٔ درس‌هایی که این ترم انتخاب واحد نموده‌اید.
ج. مجموعهٔ رمان‌هایی که تاکنون خوانده‌اید.
د. مجموعهٔ انسان‌هایی که به قتل رسانده‌اید.

پاسخ: فقط خودتان پاسخ این موارد را می‌دانید. ■

مثال ۲.۸: با فرض $A = \{۱,۵,۷\}$ درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین.
آ. $۱ \in A$ ب. $۲ \in A$ ج. $۵ \notin A$ د. $۶ \notin A$

پاسخ: آ. درست ب. نادرست ج. نادرست د. درست ■

نکته‌ای ظریف... همان‌طور که می‌توان جعبه‌ای درونِ جعبه‌ای دیگر داشت، یک مجموعه نیز می‌تواند عضو مجموعه‌ای دیگر باشد و همان‌طور که نمی‌توان جعبه‌ای که یک سیب درون آن است را با سیبِ درون آن یکی دانست، مجموعهٔ تک عضویِ $\{a\}$ را نیز نمی‌توان با a یکسان دانست.

مثال ۳.۸: با فرض $A = \{\{۱,۲\},۳\}$ درستی یا نادرستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.
آ. $۳ \in A$ ب. $۲ \in A$ ج. $\{۱,۲\} \in A$ د. $\{۱\} \notin A$

پاسخ: آ. درست ب. نادرست ج. درست د. درست ■

همهٔ مجموعه‌ها را نمی‌توان با نوشتن اعضای آنها مشخص کرد. به‌طور مثال، مجموعهٔ همهٔ برگ‌های درختان یک شهر، مجموعهٔ همهٔ پرهای گنجشک‌های شهر تهران و مجموعهٔ همهٔ انسان‌هایی که روی کرهٔ زمین زیسته‌اند. مشخص کردن یک مجموعه با توجه به ویژگی‌های اعضای آن راهکاری مناسب برای مقابله با این مشکل است. برای این منظور از ادبیات زیر استفاده می‌کنیم:

$$A = \{x : \text{که } x \text{ دارای خاصیت .... است.}\}$$

یعنی، مجموعهٔ A ، مجموعهٔ همهٔ چیزهایی (xهایی) است که دارای خاصیت «...» هستند و به‌جای سه نقطه، خاصیت مورد نظر نوشته می‌شود. به‌پیشنهاد جورج کانتور[۱] برای هر خاصیت دلخواهی، عبارت «همه چیزهایی که دارای آن خاصیت هستند» یک مجموعه را مشخص می‌سازد. با این پیشنهاد نظریه مجموعه‌ها آغاز شد.[۲]

مبتدی - ضروری
ساده، آموزنده و پرکاربرد

مثال ۴.۸: مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.
آ. $A = \{x : x = ۱\}$ ب. $A = \left\{x \in \mathbb{N} : \text{ زوج است. } x\right\}$
ج. $A = \{x : x = ۲k,\ k \in \mathbb{N}\}$ د. $A = \left\{(x,y) : x = ۱\ ,\ y \in \{۲,a\}\right\}$

پاسخ: آ. خاصیت $x = ۱$ بیان می‌کند که A مجموعهٔ همهٔ چیزهایی است که با ۱ برابر هستند؛ پس $A = \{۱\}$.
به‌عبارتی فقط با جای‌گذاری ۱ در x خاصیت $x = ۱$ درست خواهد بود، پس $A = \{۱\}$.
ب. شرط $x \in \mathbb{N}$، عبارت «همهٔ xهایی که ....» را به عبارت «همهٔ اعداد طبیعی مانند x که ....» تغییر می‌دهد. در نتیجه A مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی زوج است. یعنی $A = \{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲, \dots\}$

---
[۱] Georg Cantor (1845 - 1918; Germany)
[۲] خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند به کتاب‌های «نظریه مجموعه‌ها» مراجعه کنند.

ج . با گذاشتن اعداد طبیعی، یعنی ۴،۳،۲،۱ و ... بجای k می‌بینیم که x می‌تواند اعداد ۲، ۴، ۶، ۸ و ... باشد. بنابراین $A = \{۲, ۴, ۶, ۸, \ldots\}$

د . x را فقط می‌توان با ۱ جای‌گذاری کرد اما y را می‌توان هم با ۲ و هم با a جای‌گذاری کرد. بنابراین $A = \{(۱, ۲), (۱, a)\}$. یعنی مجموعهٔ A دو عضو دارد؛ یکی $(۱, a)$ و دیگری $(۱, ۲)$. ■

۱.۱.۸ مجموعه‌های بی‌پایان و باپایان:

مجموعه‌ها را می‌توان از نظر تعداد اعضا به دو دسته تقسیم کرد؛ «باپایان» یا «متناهی» و «بی‌پایان» یا «نامتناهی». مجموعه متناهی (باپایان) به مجموعه‌ای گویند که اگر اعضای آن را بشماریم به پایان برسد و مجموعهٔ نامتناهی (بی‌پایان) مجموعه‌ای است که اگر اعضای آن را بشماریم، شمارش آنها به پایان نمی‌رسد. مجموعهٔ اعداد طبیعی را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\mathbb{N} = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, \ldots\}$$

سه‌نقطه در انتهای عبارت، به‌معنای این است که عضوهای $\mathbb{N}$ همین‌طور ادامه داشته و تمام نمی‌شوند. اعداد طبیعی را هر چه بشماریم، تمام نمی‌شوند. چون هرجا بگوییم تمام شده، کافی است آن عدد را با ۱ جمع کنیم. می‌بینیم عدد بعد از آن نیز وجود دارد. بنابراین مجموعهٔ اعداد طبیعی نامتناهی (بی‌پایان) است. اما توجه داریم که در $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, \ldots, ۱۰۰۰\}$، سه نقطه یعنی اعضای A همین‌طور ادامه دارند تا به ۱۰۰۰ برسند. بنابراین A مجموعه‌ای متناهی (باپایان) است.

مثال ۵.۸: متناهی یا نامتناهی بودن هریک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

آ . $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ ب . $B = \{-۳, -۵, ۱, ۳\}$

ج . $C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ د . $D = \{x, y, z, t, s\}$

ه . $E = \{f, \sqrt{۲},$ ایران, صندلی, علی$\}$ و . $F = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, \ldots\}$

ز . $G = \{۲, ۴, ۶, ۸, \ldots, ۲۲۲۲\}$ ح . $H = \{x:$ شما را می‌شناسد. $x\}$

ط . $I = \{x:$ یک برگ سبز است. $x\}$ ی . $J = \{x:$ یک ایرانی زنده است. $x\}$

پاسخ: فقط مورد (و) نامتناهی (بی‌پایان) است و موارد دیگر متناهی (باپایان) هستند. ■

همان‌طور که در مجموعهٔ E از مثال فوق دیدیم:

گزاره ۱.۸: اعضای یک مجموعه، لزوماً هم‌جنس نیستند.

۲.۱.۸ زیرمجموعه و تساوی

در این مرحله، مجموعه با اعضایش مشخص می‌شود و چیزی بیش از یک دسته‌بندی ساده و ابتدایی نیست. لذا، با درکی که از دسته‌ها داریم، دو قاعدهٔ زیر را برای مجموعه‌ها درنظر می‌گیریم.

گزاره ۲.۸: در نوشتن یک مجموعه با اعضای آن:

- **ترتیب نوشتن اعضا در بین قلاب‌ها، اهمیتی ندارد.**
- **تکرار عضوها در نظر گرفته نمی‌شود.**

مثال ۶.۸: جفت مجموعه‌های زیر به عنوان مجموعه‌هایی از اعداد با هم برابرند.

آ . $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{۳, ۲, ۱\}$؛ چون ترتیب نوشتن اعضا اهمیتی ندارد.

ب . $A = \left\{۱, ۲, \frac{۴}{۱}\right\}$ و $B = \left\{\frac{۸}{۲}, \frac{۶}{۳}, \frac{۲}{۲}\right\}$ ؛ چون اعضای این دو مجموعه یکسان هستند.

ج . $A = \{۳, ۱, ۱\}$ و $B = \{۱, ۳, ۳\}$؛ چون تکرار عضوها درنظر گرفته نمی‌شود. ■

تعریف ۱.۸: مجموعهٔ A زیرمجموعهٔ B است هرگاه هر عضو A، عضوی از B نیز باشد.

با دقت بخوانید ...
آشنایی با زبان نمادین ریاضی، برای درک بهتر و دقیق‌تر مفاهیم ریاضی الزامی است.

«A زیرمجموعهٔ B است» را با $A \subseteq B$ یا $A \subset B$ نشان می‌دهیم و $A \not\subset B$ را به‌معنای «A زیرمجموعهٔ B نیست» به‌کار می‌بریم. بنابراین، هرگاه مجموعهٔ A دارای عضوی مانند x باشد که عضو B نباشد، گوییم A زیرمجموعهٔ B نیست و می‌نویسیم $A \not\subset B$. به عبارتی «$A \not\subset B$» اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $x \in A$ به‌نحوی‌که «$x \notin B$» یا به‌عبارتی:

$$A \not\subset B \Longleftrightarrow (\exists x \in A \;\; \text{s.t} \;\; x \notin B)$$

که در آن $\exists x$ به‌معنای «وجود دارد x که ... » است. نماد $\exists$ به عنوان «سور وجودی» و به‌معنای «وجود داشتن» (حداقل یکی وجود دارد که ...) است. نماد «s.t» مخفف such that و به‌معنای «به نحوی که» است. نماد $\Longleftrightarrow$ نیز «اگر و تنها اگر» خوانده می‌شود.

همچنین می‌توان گفت «$A \subset B$ اگر و تنها اگر هر عضو A مانند x، عضو B باشد.» یا به عبارتی $A \subset B$ به‌معنای «$x \in A \Longrightarrow x \in B$» است که خوانده می‌شود «اگر $x \in A$ آن‌گاه $x \in B$» و معادل است با عبارت $\forall x \in A; x \in B$ که خوانده می‌شود «برای هر $x \in A$ داریم $x \in B$». نماد «$\forall$» به‌معنای «برای همهٔ ...» و «برای هر ...» می‌باشد. یعنی عبارت $\forall x \in A$ به صورت «برای هر x عضو A» و «برای همهٔ xهای عضو A» خوانده می‌شود.

قضیه ۱.۸: برای هر مجموعهٔ دلخواه مانند A داریم: $A \subseteq A$.

اثبات: از تعریف واضح است. ■

قضیه فوق هرچند بدیهی به‌نظر می‌رسد، اما آن را بیان کرده‌ایم تا خوانندگان بدانند که $A \subseteq A$ نیز از تعریف فوق نتیجه می‌شود و باید آن را قضیه دانست. در ادامه ممکن است خوانندگان بیان **??** را نیز بی‌مورد بدانند؛ اما باز هم آن را به‌عنوان قضیه بیان کرده‌ایم تا مشخص شود که نتیجه‌ای از تعاریف بوده و از اهمیت زیادی برخوردار است.

مثال ۷.۸: با درنظرگرفتن مجموعه‌های زیر، درستی یا نادرستی عبارات داده شده را تعیین کنید.

$A =$ { آذر , آبان , مهر } $\qquad B =$ { اسفند , بهمن , دی }

$C =$ { بهمن , اسفند , آذر , دی } $\qquad D =$ { مهر , آبان , آذر , فروردین , اردیبهشت, خرداد }

آ . $A \subset C$ $\qquad$ ب . $C \not\subset A$ $\qquad$ ج . $B \subset C$

د . $B \subset D$ $\qquad$ ه . $B \subset B$ $\qquad$ و . $C \subset D$

پاسخ: آ . درست است، چون هر عضوA، عضوی از C است.

ب . درست است چون «$C \in$ دی» اما «$A \notin$ دی».

موارد دیگر به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

مثال ۸.۸: با فرض $A = \left\{۲, ۳, \{۲, ۴\}\right\}$ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید . **نکته‌ای ظریف...**

آ. $۳ \in A$	ب. $۳ \subset A$	ج. $\{۳\} \in A$	د. $\{۳\} \subset A$
ه. $\{۲, ۴\} \in A$	و. $\{۲, ۴\} \subset A$	ز. $\left\{\{۲, ۴\}\right\} \subset A$	ح. $\left\{\{۲, ۴\}\right\} \in A$
ط. $\{۲\} \in A$	ی. $\{۲\} \subset A$	ک. $\{۴\} \in A$	ل. $\{۴\} \subset A$
م. $\{۳, ۴\} \in A$	ن. $\{۳, ۴\} \subset A$	س. $\{۲, ۳\} \in A$	ع. $\{۲, ۳\} \subset A$

پاسخ: توجه داریم که اعضای A عبارتند از ۲، ۳ و $\{۲, ۴\}$ بنابراین داریم:

آ. درست	ب. نادرست	ج. نادرست	د. درست
ه. درست	و. نادرست	ز. درست	ح. نادرست
ط. نادرست	ی. درست	ک. نادرست	ل. نادرست
م. نادرست	ن. نادرست	س. نادرست	ع. درست

■

می‌توان با استفاده از تعریف زیرمجموعه بودن، تعریف جدیدی از تساوی دو مجموعه ارائه داد که به عنوان تعریف رسمی تساوی دو مجموعه پذیرفته شده است.

تعریف ۲.۸: برای هر دو مجموعهٔ A و B داریم: $A = B$ اگر و تنها اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$

با دقت بخوانید... آشنایی با زبان نمادها الزامی است.

$A \subset B$ به‌معنای $\forall x(x \in A \Longrightarrow x \in B)$ است و چون $A = B$ به‌معنای $A \subset B$ و $B \subset A$ است، پس $A = B$ به‌معنای $\forall x(x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$ می‌باشد. (به یاد داریم که $x \in A \Longleftrightarrow x \in B$ به‌معنای $x \in A \Longrightarrow x \in B$ و $x \in B \Longrightarrow x \in A$ است.) به‌همین سبب، در برخی متون ریاضی عبارت $\forall x(x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$ را به‌عنوان تعریف $A = B$ به‌کار می‌برند. البته معمولاً به‌جای $\forall x(x \in A \Longrightarrow x \in B)$ می‌نویسیم $x \in A \Longrightarrow x \in B$. در زبان محاوره‌ای نیز به‌طور مشابه عمل کرده و معمولا منظور از عبارت «اگر $x \in A$ آن‌گاه $x \in B$» عبارت دقیق‌ترِ «برای همه مقادیر x داریم اگر $x \in A$ آن‌گاه $x \in B$» است.

قضیه ۲.۸: برای هر مجموعهٔ دلخواه مانندِ A داریم: $A = A$

اثبات: با توجه به مطالب پیش از قضیه واضح است. ■

نکته: معمولا وقتی یک فرمول داده می‌شود که در آن متغیّری بدون سور عمومی یا وجودی ظاهر شده است، به‌جای آن سور عمومی می‌گذاریم. به‌طور مثال عبارت $A = B \Longleftrightarrow (A \subset B$ و $B \subset A)$ درواقع خلاصه‌نویسیِ عبارت زیر است.

$$\forall A\Big(\forall B\big(A = B \Longleftrightarrow (A \subset B \text{ و } B \subset A)\big)\Big)$$

معمولاً قضیه فوق را واضح دانسته و نیازی به اثبات آن احساس نمی‌کنیم. اما چرا قضیهٔ فوق، عنوان قضیه یافته و چه نیازی به اثبات آن احساس شده است؟ در زندگی روزمره معمولا ویژگی فوق را برای تساوی بدیهی در نظر می‌گیریم. اما همان‌طور که می‌بینید در ریاضیات سعی شده تساوی دو مجموعه براساس زیرمجموعه بودن تعریف شود و زیرمجموعه بودن نیز براساس عضو بودن. در واقع قضیه فوق نشان می‌دهد آنچه در تعریف فوق تساوی نامیده‌ایم، انتظار ما از رابطه تساوی را برآورده می‌سازد.

تعریف ۳.۸: به مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد، مجموعهٔ تهی گفته می‌شود.

کار با بیان‌های مختلف از مفاهیم ریاضی را بیاموزید.

مجموعهٔ تهی را با $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نشان می‌دهیم. بنابراین مجموعهٔ تهی هیچ عضوی ندارد.

گزاره ۳.۸: $A \subset B$ یعنی A هیچ عضوی ندارد که در B نباشد.

اثبات: با توجه به تعریف واضح است. ■

بنابراین می‌توانیم قضیهٔ زیر را بیان کنیم.

قضیه ۳.۸: برای هر مجموعهٔ دلخواه مانندِ A داریم:

آ. $\varnothing \subset A$ ب. اگر $A \subset B$ و $B \subset C$ آن‌گاه $A \subset C$

اثبات: آ. به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود (راهنمایی: به مطالب قبل از قضیه رجوع کنید).
ب. کافی است ثابت کنیم هر عضو A، عضو C است. چون $A \subset B$ و $B \subset C$ داریم:

$$x \in A \overset{A \subset B}{\Longrightarrow} x \in B \overset{B \subset C}{\Longrightarrow} x \in C$$

بنابراین «اگر $x \in A$ آن‌گاه $x \in C$» و درنتیجه $A \subset C$. ■

نکته‌ای ظریف ...

مثال ۹.۸: با فرض $A = \left\{a, \{a\}, \varnothing\right\}$ درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

آ. $\varnothing \in A$ ب. $\varnothing \subset A$ ج. $a \in A$ د. $a \subset A$
ه. $\{a\} \in A$ و. $\{a\} \subset A$ ز. $A = \{a\}$ ح. $A = \{a, \varnothing\}$
ط. $\{a, \varnothing\} \in A$ ی. $\{a, \varnothing\} \subset A$

پاسخ: آ. درست ب. درست ج. درست د. نادرست ه. درست
و. درست ز. نادرست ح. نادرست ط. نادرست ی. درست ■

اگر بخواهیم تمام زیر مجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ را بنویسیم دو راه داریم:
راه اول: زیرمجموعه، بنا به شامل بودن یا نبودن هریک از اعضا بررسی می‌شود.

- شامل a است.
  - شامل b است.
    - شامل c است. $\longrightarrow \{a, b, c\}$
    - شامل c نیست. $\longrightarrow \{a, b\}$
  - شامل b نیست.
    - شامل c است. $\longrightarrow \{a, c\}$
    - شامل c نیست. $\longrightarrow \{a\}$
- شامل a نیست.
  - شامل b است.
    - شامل c است. $\longrightarrow \{b, c\}$
    - شامل c نیست. $\longrightarrow \{b\}$
  - شامل b نیست.
    - شامل c است. $\longrightarrow \{c\}$
    - شامل c نیست. $\longrightarrow \{\} = \varnothing$

راه دوم: نوشتن زیرمجموعه‌های A با توجه به تعداد اعضای آنها.

صفر عضوی	۱ عضوی	۲ عضوی	۳ عضوی
$\varnothing$	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$	$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$	$\{a, b, c\}$

تعریف ۴.۸: مجموعهٔ زیرمجموعه‌های A را مجموعهٔ توانی A گفته و با $\mathscr{P}(A)$ نشان می‌دهیم.[۱]

مثال ۱۰.۸: مجموعهٔ توانی هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

آ. $A=\{۱,۲\}$ ب. $B=\{x\}$ ج. $C=\varnothing$

د. $D=\{\varnothing\}$ ه. $E=\big\{\varnothing,\{\varnothing\}\big\}$ و. $F=\big\{\{۱,۲\}\big\}$

پاسخ: تحلیل را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم و به نوشتن پاسخ اکتفا می‌کنیم.

آ. $\mathscr{P}(A)=\Big\{\varnothing,\{۱\},\{۲\},\{۱,۲\}\Big\}$ ب. $\mathscr{P}(B)=\big\{\varnothing,\{x\}\big\}$

ج. $\mathscr{P}(C)=\{\varnothing\}$ د. $\mathscr{P}(D)=\big\{\varnothing,\{\varnothing\}\big\}$

ه. $\mathscr{P}(E)=\Big\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\Big\}$ و. $\mathscr{P}(F)=\Big\{\varnothing,\{\{۱,۲\}\}\Big\}$ ■

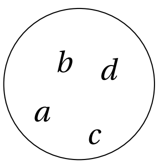
تعداد اعضای هر مجموعهٔ با پایان (متناهی) مانند A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۴.۸: اگر $n(A)=K$، آن‌گاه $n(\mathscr{P}(A))=۲^k$.

اثبات: با استفاده از راه اول ارائه شده برای نوشتن زیر مجموعه‌ها، به‌راحتی ثابت می‌شود. ■

۳.۱.۸ نمودار وِن

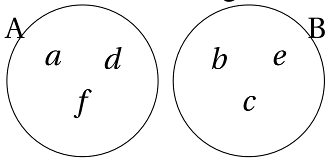
ساده اما مهم!
در برخی موارد درک شهودی بیش از اثبات‌های ریاضی کارایی دارد.



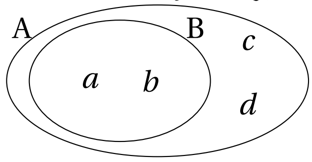
نمودار ون، نمایش تصویری مجموعه‌ها است و برای ایجاد دید شهودی به مجموعه‌ها مفید است. در نمودار ون اشیای خاصی را در یک جا جمع می‌کنیم و برای آنکه شیء دیگری با آنها قاطی نشود، دور آنها یک منحنی بسته می‌کشیم. به‌طورِ مثال، مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ را به‌شکل روبه‌رو نشان می‌دهیم.

در نمودار ون هر عضو را فقط یکبار می‌توان نوشت.

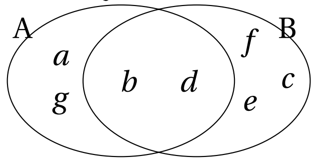
مثال ۱۱.۸: در هر یک از موارد زیر، مجموعه‌های داده شده را مشخص کنید.



ج.



ب.



آ.

پاسخ: آ. $A=\{a,g,b,d\}$ و $B=\{e,f,c,b,d\}$ ب. $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$ و $B=\{a,\ b\}$

ج. $A=\{a,d,f\}$ و $B=\{e,c,b\}$ ■

مثال ۱۲.۸: برای هریک از جفت مجموعه‌های زیر، یک نمودار ون رسم کنید.

آ. $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $B=\{۱,۲,۳\}$ ب. $A=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶,۷\}$

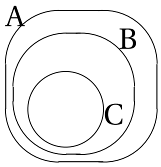
ج. $A=\{۱,۳,۵,۷\}$ و $B=\{۲,۴,۶,۸\}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

---

[۱] $\mathscr{P}$ ابتدای «Power Set» به‌معنای «مجموعهٔ توانی» است.

ساده اما مهم!



مثال ۱۳.۸: درستی یا نادرستی عبارات زیر را با توجه به نمودار ون در شکل مقابل مشخص کنید.

آ. $C \subset B$ ب. $A \subset B$ ج. $B \not\subset A$

د. $C \not\subset A$ هـ. $A \not\subset C$

پاسخ: آ. درست است؛ چون هر عضوی که در C نوشته شود در B قرار دارد، پس بنا به نمودار، هر عضو C عضوی از B است. بنابراین $C \subset B$.
موارد دیگر به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

نکته: توجه داریم که نمودار وِن برای اثبات یک عبارت کلی در مورد مجموعه‌ها قابل استفاده نیست. چون نمی‌توان مطمئن بود که همه حالت‌های ممکن بررسی شده است.

۴.۱.۸ مجموعهٔ مرجع

با دقت بخوانید ... مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ سخن. مجموعه‌ای است که همهٔ حرف‌های ما در مورد اعضای آن است. مجموعهٔ مرجع را با M نشان می‌دهیم .

در کلاس‌های اول و دوم ابتدایی هرجا از عدد سخن می‌گفتیم، منظورمان اعداد طبیعی بودند. در فصل اول مجموعهٔ مرجع اعداد طبیعی بود؛ به‌همین سبب اگر بدون ذکر اینکه مقدار x چه نوع عددی می‌تواند باشد، جواب معادله و یا نامعادله‌ای را می‌خواستیم، در میان اعداد طبیعی به دنبال جواب می‌گشتیم. یعنی اگر به شما می‌گفتند اعداد کوچک‌تر از ۵ را مشخص کنید آنها را در اعداد طبیعی جستجو کرده و می‌گفتید ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴. اما اگر مجموعهٔ مرجع، اعداد صحیح باشد، جواب معادلات و نامعادلات را در اعداد صحیح جستجو می‌کنیم. مجموعهٔ مرجع کاملا قراردادی است.

مثال ۱۴.۸: با فرض $M = \{۱, ۲, ۳, \ldots , ۲۰\}$ مجموعه‌های زیر را مشخص کنید:

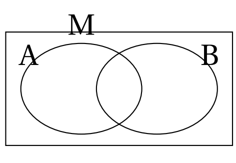
آ. مجموعهٔ همهٔ اعداد زوج ب. مجموعهٔ همهٔ xهایی که $x|۷$

ج. مجموعهٔ همهٔ اعداد بزرگ‌تر از ۱۷

پاسخ: آ. $\{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲,۱۴,۱۶,۱۸,۲۰\}$ ب. $\{۷,۱۴\}$ ج. $\{۱۸, ۱۹, ۲۰\}$ ■

اگر مجموعه‌ای مانند M را مجموعهٔ مرجع بگیریم، فقط در مورد اعضا و زیرمجموعه‌های M سخن خواهیم گفت. پس بدون اینکه ذکر کنیم، همواره فرض بر این است که برای هر مجموعهٔ دلخواه مانند A داریم $A \subset M$. چون برای هر $x \in A$ فرض بر آن است که $x \in M$.

گزاره ۴.۸: اگر M مجموعهٔ مرجع باشد، آن‌گاه برای هر مجموعهٔ دلخواه مانند A داریم $A \subset M$.

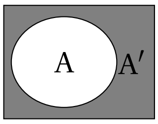


چون تمام مجموعه‌های یک بحث، زیرمجموعه‌ی مجموعهٔ مرجع هستند. در نمودار ون، مجموعهٔ مرجع، به صورت مقابل با یک مستطیل نشان داده می‌شود که شامل اعضای همهٔ مجموعه‌ها است.

۵.۱.۸ متمّم

با دقت بخوانید ... به زبان ساده، متمم مجموعهٔ A مجموعهٔ همهٔ عضوهایی است که در A نیستند. اما این عبارت

چندان روشن نیست. فرض کنید A مجموعه دانش‌آموزان کلاس شما باشد. آیا متمم A شامل دانش‌آموزان مدارس دیگر و یا شهرهای دیگر در پایه‌های دیگر هم می‌شود؟ بنابراین برای محاسبهٔ متمم هر مجموعه‌ای، باید مجموعهٔ مرجع مشخص باشد.



مجموعهٔ A' به رنگ طوسی نشان داده شده است.

تعریف ۵.۸: متمم مجموعهٔ A که با A' و یا A^c نشان داده می‌شود، مجموعهٔ همهٔ اعضایی از مجموعهٔ مرجع است که عضو A نیستند.

$$\mathbf{A' = \{x \in M :\ x \notin A\}}$$

مثال ۱۵.۸: فرض کنید $A = \{۱,۲,۳,۴\}$. برای مشخص کردن A' به M نیاز داریم. با فرض $M = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ داریم: $A' = \{۵,۶,۷,۸\}$. ■

مثال ۱۶.۸: فرض کنید $A = \{۱,۲,۳,۴\}$. برای هر M، مجموعهٔ A' را به‌دست آورید.

آ . $M = \{۱,۲,۳,۴\}$ ب . $M = \{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ ج . $M = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,\ldots\}$

اثبات: آ . $A' = \{\} = \varnothing$ ب . $A' = \{۰,۵,۶,۷,۸,۹\}$ ج . $A' = \{۵,۶,۷,۸,\ldots\}$ ■

قضیه ۵.۸: برای هر مجموعهٔ دلخواه داریم:

آ . $(A')' = A$ ب . $M' = \varnothing$ ج . $\varnothing' = M$

د . $A \subset B$ اگر و تنها اگر $B' \subset A'$

توجه! درک اثبات برای همهٔ خوانندگان الزامی است. اما به‌هیچ وجه از خوانندگان این کتاب انتظار نداریم بتوانند این اثبات‌ها را بازسازی کرده و یا اثبات‌هایی مشابه آنها تولید کنند.

اثبات: آ . $(A')'$ مجموعهٔ اعضایی از M است که در A' نیستند. تنها اعضایی از M که عضو A' نیستند، اعضای A می‌باشند. بنابراین $(A')' = A$. این مطلب را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$x \in (A')' \Longleftrightarrow x \notin A' \Longleftrightarrow x \in A$$

ب . مجموعهٔ M'، مجموعهٔ همه اعضای M است که عضو M نیستند. چون چنین عضوی وجود ندارد پس $M' = \varnothing$

ج . $\varnothing' = \{x \in M :\ x \notin \varnothing\}$. چون $\varnothing$ عضوی ندارد پس برای هر $x \in M$ داریم $x \notin \varnothing$ پس $M \subset \varnothing'$ و از طرفی هم بنا به تعریف مجموعهٔ مرجع داریم $\varnothing' \subset M$. بنابراین $\varnothing' = M$

د . فرض کنید $A \subset B$ پس $x \in A \Longrightarrow x \in B$. حال اگر $x \notin B$ آن‌گاه $x \notin A$. زیرا اگر $x \in A$ آن‌گاه $x \in B$ (چون $A \subset B$) پس نمی‌شود که هم $x \in A$ درست باشد و هم $x \notin B$ پس «هرگاه $x \notin B$، آن‌گاه $x \notin A$» یا به عبارتی «اگر $x \in B'$ آن‌گاه $x \in A'$». در نتیجه $B' \subset A'$.بنابراین «اگر $A \subset B$ آن‌گاه $B' \subset A'$» و درنتیجه با جای‌گذاری B' و A' به ترتیب در A و B داریم: «اگر $B' \subset A'$ آن‌گاه $(A')' \subset (B')'$» که از مورد (آ) نتیجه می‌شود « اگر $B' \subset A'$ آن‌گاه $A \subset B$» . بنابراین، «$A \subset B$ اگر و تنها اگر $B' \subset A'$».

استدلال فوق را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} A \subset B &\Longleftrightarrow \forall x\big(x \in A \Longrightarrow x \in B\big) \Longleftrightarrow \forall x\big(x \notin B \Longrightarrow x \notin A\big) \\ &\Longleftrightarrow \forall x\big(x \in B' \Longrightarrow x \in A'\big) \Longleftrightarrow B' \subset A' \end{aligned}$$

■

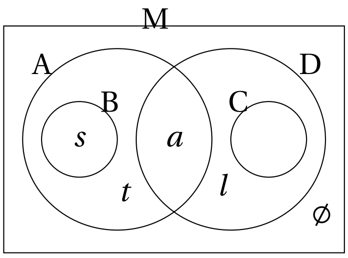
تمرین:

(۱) از مجموعه‌های زیر کدام‌ها با هم برابرند؟

آ . $A = \{۱,۲,۳\}$ ب . $b = \{۳,۲,۲\}$ ج . $C = \{۲,۳,۳\}$ د . $D = \{۳,۱,۲\}$

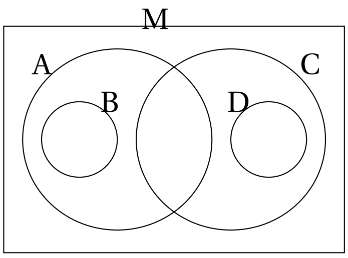
(۲) می دانیم $A \subset B$ و $B = \{۱,۲,۳\}$. در درستی یا نادرستی عبارتهای زیر بحث کنید.

آ . $۴ \in A$ ب . $۲ \in A$ ج . $۳ \notin A$ د . $۵ \notin A$



(۳) با توجه به نمودار مقابل، مجموعه‌های داده شده را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

آ. A   ب. B
ج. A' د. B'
ه. C   و. C'
ز. D   ح. D'
ط. M   ی. M'



(۴) با توجه به نمودار زیر، درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید.

آ. $A \subset B$ ب. $B \subset A$
ج. $C \subset A$ د. $D \subset C$
ه. $A \subset M$ و. $D \subset A$

تمرینات (۵) - (۷) علاوه بر درک مجموعه‌ها به افزایش دقت خوانندگان نیز کمک خواهد کرد.

(۵) مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آنها مشخص کنید.

آ. $\{x \in \mathbb{N}: x < ۵\}$ ب. $\{x \in \mathbb{N}: ۲ < x \text{ و } x < ۴\}$
ج. $\{x \in \mathbb{N}: x \leq ۳\}$ د. $\{x \in \mathbb{N}: \forall k \in \mathbb{N}; x \leq k\}$
ه. $\{x \in \mathbb{N}: \exists k \in \mathbb{N}; x = ۳k\}$ و. $\{x \in \mathbb{N}: x + ۲ = ۵\}$
ز. $\{x \in \mathbb{Z}: x + ۵ = ۲\}$ ح. $\{x \in \mathbb{N}: x + ۵ = ۲\}$
ط. $\{x \in \mathbb{N}: \forall a \in \mathbb{N}; x.a = a\}$ ی. $\{x \in \mathbb{N}: \forall a \in \mathbb{N}; x.a = x\}$
ک. $\{x \in \mathbb{N}: \forall a \in \mathbb{N}; x + a = a\}$ ل. $\{x \in \mathbb{N}: \forall a \in \mathbb{N}; x + a = x\}$

(۶) فرض کنید $A = \{x \in \mathbb{N}: x = ۳k; k \in \mathbb{N}\}$. این تعریف معادل کدام‌یک از عبارات زیر است.

آ. $A = \{x \in \mathbb{N}: \forall k \in \mathbb{N}; ۳ = ۳k\}$ ب. $A = \{x \in \mathbb{N}: \exists k \in \mathbb{N}; x = ۳k\}$

(۷) هریک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آنها مشخص کنید.

آ. $A = \{x \in \mathbb{N}: \exists k \in \mathbb{N}; x = ۲k\}$ ب. $B = \{x \in \mathbb{N}: \exists k \in \mathbb{N}; x = ۲k\}$
ج. $C = \{x \in \mathbb{N}: x = ۲k + ۱; k \in \mathbb{N}\}$ د. $D = \left\{x: x, \frac{x}{۲} \in \mathbb{N}\right\}$
ه. $E = \{x^۲: x \in \mathbb{N}\}$ و. $F = \{x^۳: x \in \mathbb{N}\}$

(۸) مجموعه‌های زیر را با نوشتن خاصیت آنها مشخص کنید.

آ. $A = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, \ldots\}$ ب. $B = \{۰, ۲, ۴, ۶, \cdots\}$
ج. $C = \{۰, ۳, ۶, ۱۲, \cdots\}$ د. $D = \{۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳, \cdots\}$
ه. $E = \{۰, ۱, ۴, ۹, ۱۶, \ldots\}$ و. $F = \{۰, ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, \ldots\}$

(۹) مجموعه‌های زیر با اعضای آنها نوشته و متناهی یا نامتناهی بودن آنها را مشخص کنید.

آ. $A = \{x \in \mathbb{Z}: ۳x + ۵ = ۱۱\}$ ب. $B = \varnothing$
ج. $C = \mathbb{N}$ د. $D = \left\{\{x, \{y\}\}: x, y \in \mathbb{N} \text{ و } x + y = ۰\right\}$
ه. $E = \left\{\{x, \{y\}\}: x, y \in \mathbb{Z} \text{ و } x + y = ۰\right\}$ و. $F = \{x \in \mathbb{N}: \exists k \in \mathbb{N}; x = ۲k\}$
ز. $G = \{x \in \mathbb{N}: \exists k \in \mathbb{N}; x = ۲k + ۱\}$ ح. $H = \left\{\{x, \{y\}\}: x, y \in \mathbb{N}, x.y = ۶\right\}$
ط. $I = \left\{\{x, \{y\}\}: x, y \in \mathbb{Z}, x.y = ۶\right\}$ ی. $J = \left\{\{x, \{x, y\}\}: x, y \in \mathbb{N}, x.y = ۰\right\}$
ک. $K = \left\{\{x, \{x, y\}\}: x, y \in \mathbb{N}, x.y = ۰\right\}$ ل. $L = \left\{\{x\{x, y\}\}: x \in \{۱, ۲\}, y \in \{۳, ۴, ۵\}\right\}$
م. $L = \left\{\{\{x, y\}, \{x\}, y\}: x \in \{۱, ۲, ۳, ۴\}, y \in \{۱, ۲, ۳, ۴\}, \text{ زوج است } x \times y\right\}$

(۱۰) فرض کنید $A \subset B \subset C \subset D \subset E$، D نامتناهی و B متناهی است. در مورد درستی یا نادرستی کدام‌یک از موارد زیر می‌توان مطمئن بود؟

آ . A متناهی است ب . C متناهی است ج . E متناهی است

د . E نامتناهی است ه . C نامتناهی است و . A' متناهی است

ز . B' نامتناهی است ح . E' متناهی است

(۱۱) می‌دانیم $A \subset B$ و A نامتناهی است. کدام گزینه حتماً درست است؟

آ . B نامتناهی است. ب . B متناهی است.

ج . B می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. د . A و B با این شرایط وجود ندارند.

با دقت بخوانید ...
این تمرین شامل نکته‌ای بسیار مهم است.

(۱۲) فرض کنید $A = \{۱\}$ و $B = \{\varnothing, \{\varnothing\}, A, ۱\}$.

آ . مجموعهٔ مرجع M را چنان بسازید که $A \subset M$ و $B \subset M$.

ب . آیا می‌توانید دو مجموعهٔ فوق را بر نمودار ون نمایش دهید؟

ج . چرا استفاده از نمودار ون برای اثبات کفایت نمی‌کند؟

پیشرفته - اختیاری
دیدن پاسخ، به همه خوانندگان پیشنهاد می‌شود.

(۱۳) فرض کنید $A = \left\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\right\}$. در این صورت:

آ . $\mathscr{P}(A)$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

ب . مجموعهٔ $B = \left\{\{x, \{y\}\} : x, y \in A\right\}$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

ج . $x, y, w, z \in A$ را چنان بیابید که $\{x, \{y\}\} = \{w, \{z\}\}$ اما $x \neq w$ و $y \neq z$.

۲.۸ جبر مجموعه‌ها

در بحث اعداد از عملگرهایی چون جمع و ضرب استفاده کرده، خواص آنها را مورد بررسی قرار داده و استفاده از این خواص را جبر نامیدیم. در ادامه برای مجموعه‌ها نیز عملگرهایی تعریف کرده، خواص آنها را مورد بررسی قرار داده و استفاده از این خواص را جبر مجموعه‌ها گوییم.

۱.۲.۸ اجتماع مجموعه‌ها

توجه! توجه!
تمامی مطالب این بخش مهم هستند و خواننده باید در استفاده از قضایا و گزاره‌های این بخش توانمند شده و قدرت حل مثال‌ها و بازسازی اثبات‌ها را داشته باشد. مگر در مواردی که اختیاری بودن آن ذکر شده است.

برای درک اجتماع دو مجموعه فرض کنید انجمن اسلامی و کانون موسیقی دانشگاه همایشی برگزار کرده و تمام اعضای فعال خود را به این همایش دعوت نموده‌اند. اگر تمام اعضای فعال هر دو گروه در همایش شرکت کنند، افراد حاضر در همایش را اجتماع اعضای فعال دو گروه می‌خوانیم شامل اعضای فعال هر دو گروه است؛ هرچند ممکن است شخص یا اشخاصی در هر دو گروه فعال باشند. با همین دیدگاه، اجتماع دو مجموعه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۶.۸: اجتماع دو مجموعهٔ A و B که با $A \cup B$ نشان داده می‌شود، مجموعهٔ همهٔ عضوهایی از M است که عضو حداقل یکی از دو مجموعهٔ A و B هستند.

$$A \cup B = \{x \in M : x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

توجه: «یا» در زبان ریاضی با «یا» در زبان محاوره کمی تفاوت دارد. در زبان ریاضی وقتی می‌گوییم «عضو A یا عضو B باشد» یعنی «عضو A یا عضو B یا عضو هردو باشد». اما در زبان محاوره معمولاً برداشت ما از «یا» متفاوت است و منظور این است که عضو یکی از دو مجموعه باشد، نه عضو هر دو.

مثال ۱۷.۸: فرض کنید $A=\{a,b,c,d\}$ ، $B=\{۱,۲,۳,۴\}$ ، $C=\{۱,a,b\}$ و $D=\{۲,c,۴\}$.
مجموعه‌های زیر را به‌دست آورید.

آ. $B\cup C$ ب. $A\cup C$ ج. $A\cup B$

د. $D\cup C$ ه. $B\cup D$

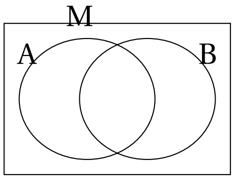
پاسخ: آ. $B\cup C=\{۱,۲,۳,۴,a,b\}$ ب. $A\cup C=\{۱,a,b,c,d\}$

ج. $A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,a,b,c,d\}$ د. $D\cup C=\{۱,۲,۴,a,b,c\}$

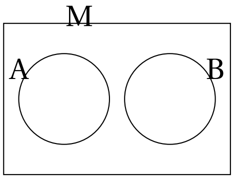
ه. $B\cup D=\{c,۱,۲,۳,۴\}$ ■

نمایش اجتماع روی نمودار ون، دید شهودی خوبی را برای خواننده به ارمغان می‌آورد و البته تفاوت اجتماع در حالت‌های مختلف را نیز می‌توان مشاهده کرد. به مثال زیر توجه کنید.

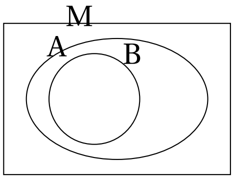
مثال ۱۸.۸: مجموعه‌های داده شده را در هر یک از نمودارهای زیر مشخص کنید:



(۱)



(۲)

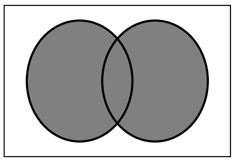


(۳)

آ. $A\cup B$ ب. A' ج. $A'\cup B$ د. $(A\cup B)'$

ه. $A'\cup B'$ و. $(A'\cup B')'$ ز. $(A\cup B')'$ ح. $(A\cup B)'\cup B$

ط. $(A\cup B')'\cup B$



پاسخ: آ. مورد (۱) مطابق شکل مجاور به‌دست می‌آید.
موارد (ب) و (ج) نیز به طور مشابه به‌دست می‌آیند.

د. اول A' را رسم کرده سپس $A'\cup B$ را به دست می‌آوریم.

ه. اول $A\cup B$ و سپس متمم آن را به دست می‌آوریم.

و. اول A' و B' را مشخص کرده سپس اجتماع آنها را به‌دست می‌آوریم.

ز. متمم نمودارهای به دست آمده در مورد قبل جواب خواهند بود.
موارد دیگر نیز به‌طور مشابه به‌دست می‌آیند. ■

قضیه ۶.۸: برای هر سه مجموعهٔ دلخواه A، B و C داریم :

آ. $A\cup B=B\cup A$ (جابجایی)

ب. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ (شرکت‌پذیری)

ج. $A\subset A\cup B$

د. $A\cup A'=M$

ه. اگر $A\subset B$ آن‌گاه $A\cup B=B$

اثبات: موارد (آ)، (ب) و (ج) بنا به تعریف واضح هستند.

د. بنا به تعریف متمم هر عضو M یا عضو A است یا عضو A' پس $M\subset A\cup A'$ و بنا به گزاره (۴.۸) داریم $A\cup A'\subset M$ در نتیجه بنا به تعریف (۲.۸) $A\cup A'=M$

ه. هر عضو $A\cup B$ یا عضو A است و یا عضو B که چون $A\subset B$ پس در هر دو صورت عضو B است در نتیجه $A\cup B\subset B$ و از طرفی بنا به مورد (ج) $B\subset A\cup B$ که از تعریف (۲.۸) نتیجه می‌دهد $A\cup B=B$ ■

قضیه ۷.۸: برای هر مجموعهٔ دلخواه A داریم:

آ. $A \cup M = M$ ‏ ب. $A \cup A = A$ ‏ ج. $A \cup \varnothing = A$

اثبات: آ. با استفاده از مورد (هـ) از قضیه قبل داریم:
$$\left.\begin{array}{r} A \subset M \Longrightarrow A\cup M \subset M \\ M \subset A \cup M \end{array}\right\} \Longrightarrow A \cup M = M$$
موارد دیگر به‌طور مشابه اثبات می‌شوند. ■

۲.۲.۸ اشتراک مجموعه‌ها

اعضای مشترک دو مجموعه را «اشتراک دو مجموعه» گفته و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

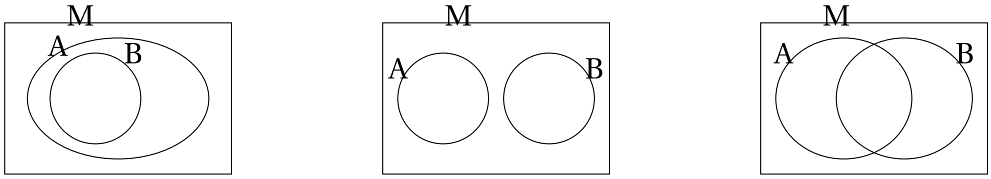
تعریف ۷.۸: اشتراک دو مجموعهٔ A و B که با $A\cap B$ نشان داده می‌شود، مجموعه‌ای است که شامل همهٔ عضوهای مشترک A و B باشد. یعنی: $A \cap B = \{x: x \in A \text{ و } x \in B\}$

مثال ۱۹.۸: فرض کنید $A = \{a, b, c, d, e\}$ و $B = \{a, e, o, u\}$. مطلوبست محاسبهٔ $A \cap B$.

پاسخ: $A \cap B = \{a, e\}$ (به اعضایی که در A و B مشترک هستند توجه کنید). ■

مثال ۲۰.۸: مجموعه‌های داده شده را در هر یک از نمودارهای زیر مشخص کنید.

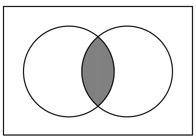
مهم! پاسخ‌ها را با هم مقایسه کنید.



(۱) ‏ (۲) ‏ (۳)

آ. $A \cap B$ ‏ ب. $A' \cap B$ ‏ ج. $A' \cap B'$

د. $(A \cap B)'$ ‏ هـ. $(A' \cap B)'$ ‏ و. $(A' \cap B')'$



پاسخ: آ. نمودار (۱) مطابق شکل مجاور است.
موارد (ب) تا (ح) مانند مثال (۱۸.۸) اما با استفاده از اشتراک به دست می‌آیند. ■

قضیه ۸.۸: برای هر سه مجموعهٔ دلخواه مانند A، B و C داریم:

آ. $A \cap B = B \cap A$ (جابجایی)

ب. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (شرکت‌پذیری)

ج. $A \cap A' = \varnothing$

د. اگر $A \subset B$ آن‌گاه $A \cap B = A$

اثبات: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. (راهنمایی: مشابه قضیه (۶.۸)) ■

گزاره ۵.۸: برای هر مجموعهٔ دلخواه A داریم:

آ. $A \cap M = A$ ‏ ب. $A \cap A = A$ ‏ ج. $A \cap \varnothing = \varnothing$

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. (راهنمایی: مشابه قضیه (۷.۸)) ■

مثال ۲۱.۸: نشان دهید:

آ. $A\cap(A\cup B)=A$ ب. $A\cup(A\cap B)=A$

ج. $(A\cap B)\cap(A\cup B)=A\cap B$ د. $(A\cup B)\cup(A\cap B)=A\cup B$

پاسخ: آ. چون $A\subset A\cup B$ پس بنا به قضیه (۸.۸) مورد (د) داریم $(A\cup B)\cap A=A$
موارد دیگر به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

بادقت بخوانید ...
قضیه‌ای پرکاربرد.

قضیه ۹.۸ (خاصیت توزیع‌پذیری)**: برای هر سه مجموعهٔ دلخواه مانند A، B و C داریم:**

آ. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ب. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

اختیاری
خواندن و درک اثبات مفید خواهد بود. به همه پیشنهاد می‌شود.

اثبات: آ. با عضوگیری می‌توان این قضیه را اثبات کرد.

$$x\in A \text{ و } x\in B\cup C\Rightarrow\begin{cases} x\in A \text{ و } x\in B\\ \text{یا}\\ x\in A \text{ و } x\in C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\in A\cap B\\ \text{یا}\\ x\in A\cap C\end{cases}\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\qquad(۱)$$

$$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\Rightarrow\begin{cases} x\in A\cap B\\ \text{یا}\\ x\in A\cap C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\in A \text{ و } x\in B\\ \text{یا}\\ x\in A \text{ و } x\in C\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x\in A\\ \text{و}\\ x\in B \text{ یا } x\in C\Rightarrow x\in B\cup C\end{cases}\Rightarrow x\in A\cap(B\cup C)\qquad(۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
ب. به‌طور مشابه اثبات می‌شود. ■

خوانندگان باید توانایی تولید اثباتهایی از این قبیل (اثبات با استفاده از قضایا و گزاره‌های قبل) را کسب کنند.

مثال ۲۲.۸: نشان دهید برای هر دو مجموعهٔ A و B داریم :

آ. $(A\cup B)\cap A'=B\cap A'$ ب. $(A\cap B)\cup A'=B\cup A'$

ج. $(A\cap B)\cap A=A\cap B$ د. $(A\cup B)\cap A=A$

پاسخ: آ.

$(A\cup B)\cap A'=(A\cap A')\cup(B\cap A')$ بنا به توزیع‌پذیری

$=\varnothing\cup(B\cap A')$ بنا به قضیه (۸.۸) مورد (ج)

$=B\cap A'$ بنا به قضیه (۷.۸) مورد (ج)

اثبات موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۲۳.۸: نشان دهید برای هر دو مجموعهٔ دلخواه A و B داریم:

آ. $(A\cap B')\cup(A\cap B)=A$ ب. $(A\cup B')\cap(A\cup B)=A$

پاسخ: با استفاده از توزیع‌پذیری به‌سادگی اثبات می‌شوند. ■

قضیه ۱۰.۸ (دمورگان)**: برای هر دو مجموعهٔ دلخواه مانند A و B داریم:**

آ. $(A\cup B)'=A'\cap B'$ ب. $(A\cap B)'=A'\cup B'$

اختیاری
صرفاً جهت خوانندگان علاقه‌مند.

اثبات: آ. کافی است نشان دهیم $x\in(A\cup B)'\Longleftrightarrow x\in(A'\cap B')$

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)' &\Longleftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Longleftrightarrow x \notin A \text{ و } x \notin B \\ &\Longleftrightarrow x \in A' \text{ و } x \in B' \\ &\Longleftrightarrow x \in (A' \cap B') \end{aligned}$$

ب .   با استفاده از قسمت (آ) داریم: $(A \cap B)' = \Big((A')' \cap (B')'\Big)' = \Big((A' \cup B')'\Big)' = A' \cup B'$ ■

مثال ۲۴.۸: درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

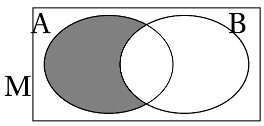
آ . $(A' \cap B') \cap (A \cup B) = \varnothing$ ب . $(A \cap B) \cup (A' \cup B') = M$

ج . $(A \cap B') \cup (A' \cup B) = M$ د . $(A' \cap B) \cap (A \cup B') = \varnothing$

پاسخ: چون بنا به دمورگان $A' \cap B' = (A \cup B)'$ پس $(A' \cap B') \cap (A \cup B) = (A \cup B)' \cap (A \cup B) = \varnothing$
موارد دیگر به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. (راهنمایی: $(A')' = A$) ■

۳.۲.۸ تفاضل و تفاضل متقارن

توجه! **توجه!**
خواندن این بخش برای کلیه خوانندگان الزامی است اما تمرینات این مبحث صرفا برای خوانندگان علاقه‌مند ارائه شده است.



$A - B$ که «A منهای B» خوانده می‌شود، به‌معنای **تفاضل** یا **اختلاف** A با B است. به عبارت دیگر $A - B$ به‌معنای همهٔ عضوهایی از A است که در B نیستند. (به شکل مقابل توجه کنید.)
می‌توان $A - B$ را مجموعهٔ عضوهایی از A دانست که عضو B' هستند. یا به عبارت دیگر می‌توانیم بگوییم $A - B$ مجموعهٔ همه عضوهایی است که هم عضو A و هم عضو B' هستند.

تعریف ۸.۸: $A - B$ یک خلاصه نویسی برای $A \cap B'$ است . یعنی $A - B = A \cap B'$.

قضیه ۱۱.۸: برای هر دو مجموعهٔ دلخواه مانند A و B داریم:

آ . $A' = M - A$ **ب . $A \subset B$ اگر و تنها اگر $A - B = \varnothing$**

اثبات: آ . $M - A = M \cap A' = A'$
ب .   چون $A - B = \varnothing$ پس xی در A وجود ندارد که عضو B نباشد، بنابراین هر عضو A، عضوی از B نیز هست درنتیجه $A \subset B$. بنابراین ثابت کردیم «اگر $A - B = \varnothing$ آن‌گاه $A \subset B$».
به‌طور مشابه، اگر $A \subset B$ آن‌گاه هر x عضو A، عضو B نیز هست. پس عضوی از A وجود ندارد که عضو B نباشد. درنتیجه $A - B = \varnothing$.
بنابراین ثابت کردیم «$A \subset B$ اگر و تنها اگر $A - B = \varnothing$». ■

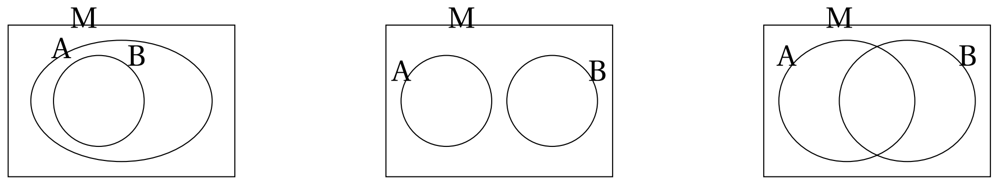
تعریف ۹.۸: دو مجموعهٔ A و B را «جدا از هم» یا «مجزا» گوئیم اگر $A \cap B$ تهی باشد.

مثال ۲۵.۸: از مجموعه‌های زیر کدام‌ها مجزا هستند؟

$A = \{۱, ۲, ۳\}$ $B = \{۳, ۴, ۵\}$ $C = \{۵, ۴, ۶\}$ $D = \{۲, ۱, ۵\}$ $E = \{۳, ۴, ۶\}$

پاسخ: $A \cap C = \varnothing$ پس A و C مجزا هستند. $C \cap D = \{۵\}$ پس C و D مجزا نیستند. $D \cap E = \varnothing$ پس D و E مجزا هستند. (بررسی موارد دیگر به خواننده واگذار می‌شود.) ■

مثال ۲۶.۸: درکدام نمودار زیر A و B از هم جدا هستند؟



(۱) (۲) (۳)

پاسخ: نمودار (۲)؛ چون $A \cap B = \varnothing$ ■

قضیه ۱۲.۸: برای هر دو مجموعهٔ دلخواه مانند A و B مجموعه‌های $A-B$، $A\cap B$ و $B-A$ دوبه‌دو مجزا هستند.

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

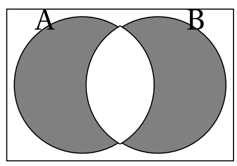
مثال ۲۷.۸: نشان دهید برای هر دو مجموعهٔ A و B داریم: $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A) = A\cup B$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

تعریف ۱۰.۸: تفاضل متقارن A و B که با $A \triangle B$ نشان داده می‌شود برابر است با:

$$A \triangle B = (A-B)\cup(B-A)$$

مجموعهٔ $A \triangle B$ بر نمودار ون دارای نمایش مقابل است.



قضیه ۱۳.۸: برای هر دو مجموعهٔ دلخواه مانند A و B داریم:

آ. $A \triangle B = B \triangle A$ ب. $A \triangle B = (A\cup B)-(A\cap B)$

اثبات: آ. (راهنمایی: با نوشتن $A \triangle B$ و با استفاده از خاصیت جابجایی $\cup$ به راحتی به $B \triangle A$ می‌رسیم.)
ب. (راهنمایی: هر چند از روی نمودار به وضوح دیده می‌شود، اما لازم است با استفاده از قضایای دمورگان و توزیع‌پذیری مورد (ب) را اثبات کنید.) ■

۳.۸ اصل شمول و عدم شمول

این اصل در تعداد اعضای مجموعه‌ها و ارتباط آن با اجتماع و اشتراک و دیگر اعمالی که تاکنون در مورد مجموعه‌ها آموخته‌ایم، بحث می‌کند که پس از بیان چند مثال ساده، به بیان آن می‌پردازیم.

مثال ۲۸.۸: در هر یک از موارد زیر داریم $n(A) = ۵$ و $n(B) = ۷$. در هر یک از این موارد، مقدار $n(A\cup B)$، $n(A\cap B)$، $n(A-B)$ و $n(B-A)$ را به‌دست آورید.

آ. $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B = \{۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲\}$

ب. $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$

ج. $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B = \{۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$

د. $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B = \{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$

پاسخ: آ. $n(A) = ۵$ ، $n(B) = ۷$ ، $n(A \cap B) = ۰$ ، $n(A \cup B) = ۱۲$ ، $n(A - B) = ۵$ و $n(B - A) = ۷$
ب. $n(A) = ۵$ ، $n(B) = ۷$ ، $n(A \cap B) = ۵$ ، $n(A \cup B) = ۷$ ، $n(A - B) = ۰$ و $n(B - A) = ۲$
ج. $n(A) = ۵$ ، $n(B) = ۷$ ، $n(A \cap B) = ۲$ ، $n(A \cup B) = ۱۰$ ، $n(A - B) = ۳$ و $n(B - A) = ۵$
د. $n(A) = ۵$ ، $n(B) = ۷$ ، $n(A \cap B) = ۴$ ، $n(A \cup B) = ۸$ ، $n(A - B) = ۱$ و $n(B - A) = ۳$ ■

به وضوح اگر دو مجموعه مجزا باشند، تعداد اعضای اجتماع آن دو مجموعه برابر است با حاصل جمع تعداد اعضای آن دو.

اصل ۱.۸: برای هر دو مجموعهٔ متناهی و جدا از همِ A و B داریم: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

با استفاده از قضیه (۱۲.۸) واضح به‌نظر می‌رسد؛ اما در آن قضیه در مورد تعداد اعضا سخنی به میان نیامده است. به‌هرحال، اصل فوق قابل استنتاج نیست، اما آن را می‌پذیریم و از آن استفاده می‌کنیم. لذا، آن را **اصل** می‌نامیم. با استفاده از گزارهٔ فوق که به اصل شمول و عدم شمول معروف است، به سادگی نتایج زیر به دست می‌آید.

قضیه ۱۴.۸: برای هر دو مجموعهٔ متناهی A و B داریم:

آ. $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

ب. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ج. $n(A \triangle B) = n(A) + n(B) - ۲n(A \cap B)$

د. $n(A \triangle B) = n(A - B) + n(B - A)$

ه.
$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) = &\ n(A) + n(B) + n(C) \\ &- n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) \\ &+ n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

توجه! توجه!
تلاش برای اثبات این قضیه درک آن را ساده‌تر خواهد کرد.

اثبات: آ. چون $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ و از طرفی $(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$ پس $n((A - B) \cap (A \cap B)) = ۰$ و درنتیجه بنا به اصل شمول داریم $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B) - n((A - B) \cap (A \cap B))$بنابراین $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

موارد دیگر به عنوان تمرین به خوانننده واگذار می‌شود. ■

تمرین:

(۱۴) با فرض اینکه $M = \{x \in \mathbb{N} : x < ۱۰\}$ مجموعهٔ مرجع باشد و داشته باشیم:

$$A = \{x : x = ۲k, k \in \mathbb{N}\} \text{ و } B = \{x : x = ۳k, k \in \mathbb{N}\}$$

هریک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

آ. M ب. M' ج. A د. B
ه. A' و. B' ز. $A \cap B$ ح. $A \cup B$
ط. $A - B$ ی. $B - A$ ک. $A \triangle B$ ل. $(A \cup B)'$
م. $(A \cap B)'$ ن. $A' \cap B$ س. $A' \triangle B$ ع. $A' \cap B$
ف. $B' \cup A'$ ص. $A \cup (A' \triangle B)$ ق. $A \cup (B \triangle A)$

(۱۵) مجموعه‌های $A - B$ ،$B - A$ $A \cap B$ را بر نمودار ون مشخص کنید، سپس درستی عبارات زیر را بر نمودار ون تحقیق نمایید. در پایان درستی تساوی‌های زیر را با استفاده از قضایای ارائه شده، ثابت کنید.

آ. $(A\cap B)\cup(B-A)=B$ ب. $(A\cap B)\cup(A-B)=A$
ج. $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=A\cup B$

(۱۶) نشان دهید
آ. $A\cup(A-B)=A$ ب. $A\cup(B-A)=A\cup B$
ج. $(A-B)\cup(A\cap B)=A$ د. $(A-C)\cup(B-C)=(A\cup B)-C$
ه. $(A-C)\cap(B-C)=(A\cap B)-C$ و. $A-B=A-(B\cap A)$
ز. $(A-B)-C=A-(B\cup C)$ ح. $A'-B'=B-A$
ط. $A=B$ اگر و تنها اگر $A\cup B=A\cap B$ ی. $A=B$ اگر و تنها اگر $A-B=B-A$
ک. $A\cup B=A\cup C$ اگر و تنها اگر $B-A=C-A$

(۱۷) با یک مثال نشان دهید تساوی $A-(B\cup C)=(A-B)\cup(A-C)$ همیشه برقرار نیست.

(۱۸) نشان دهید $(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$

(۱۹) درستی یا نادرستی عبارت زیر را بررسی کنید.
آ. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$ ب. $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

(۲۰) نشان دهید اگر $A\subset B$ آن‌گاه
آ. $A\cup C\subset B\cup C$ ب. $A\cap C\subset B\cap C$

(۲۱) نشان دهید:
آ. $A\subset B$ و $A\subset C$ اگر و تنها اگر $A\subset(B\cap C)$
ب. $A\subset C$ و $B\subset C$ اگر و تنها اگر $A\cup B\subset C$
ج. اگر $A\subset B$ و $C\subset D$ آن‌گاه $A\cup C\subset B\cup D$
د. عکس مورد (ج) برقرار نیست. یعنی امکان دارد $A\not\subset B$ یا $C\not\subset D$ اما $A\cup C\subset B\cup D$
ه. $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$ اگر و تنها اگر $C\subset A$
(راهنمایی: $C\subset A\Longrightarrow C-A=\varnothing$. با کم کردن A از دو طرف تساوی به نتیجه می‌رسید.)

(۲۲) $A\triangle B=B-A$ با کدام گزینه معادل است؟
آ. $A\cap B=\varnothing$ ب. $A\subset B$ ج. $B\subset A$ د. $A\triangle B=\varnothing$

(۲۳) نشان دهید اگر A و B دو مجموعهٔ مجزا باشند، آن‌گاه
آ. $A\subset B'$ ب. $A-B=A$

(۲۴) نشان دهید: تمرینات (۲۴) - (۲۷) صرفاً برای خوانندگان علاقه‌مند ارائه شده‌اند.
آ. $A\subset A\triangle B$ اگر و تنها اگر $A\cap B=\varnothing$ ب. $A\subset A\triangle B$ اگر و تنها اگر $B\subset A\triangle B$
ج. $A\triangle B=A\cup B$ اگر و تنها اگر $A\cap B=\varnothing$

(۲۵) نشان دهید:
آ. $(A\triangle B)\cup A=A\cup B$ ب. $(A\triangle B)\cup B=A\cup B$
ج. $(A\triangle B)\triangle(A\cap B)=A\cup B$

(۲۶) نشان دهید:
آ. $A\triangle\varnothing=A$ ب. $A\triangle M=A'$
ج. $A\triangle A=\varnothing$ د. $A\triangle A'=M$
ه. $A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C$ و. $A\triangle B=B\triangle A$
ز. $A\triangle(A\triangle B)=B$ ح. $A\triangle B=C$ اگر و تنها اگر $A\triangle C=B$
ط. $C=\varnothing\Longleftrightarrow A\triangle C=A$ ی. $C=A\Longleftrightarrow A\triangle C=\varnothing$
ک. $A=B\Longleftrightarrow A\triangle C=B\triangle C$ ل. $A\triangle B\subset A\Longleftrightarrow B\subset A$

م . $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ (راهنمایی: نماد $\Longleftrightarrow$ به‌معنای «اگر و تنها اگر» می‌باشد.)

(۲۷) درستی یا نادرستی عبارت زیر را بررسی کنید.

$$A \cup (B \triangle C) = (A \triangle B) \cup (A \cup C)$$

۴.۸ حاصل‌ضرب دکارتی

یکی از مباحث مهم که در ریاضیات تحولات زیادی ایجاد کرده است، نوعی ضرب روی مجموعه‌ها است که ایدهٔ آن از رنه دکارت بوده و امروزه نیز آن را «حاصل‌ضرب دکارتی» می‌خوانیم. اما پیش از آنکه بخواهیم با حاصل‌ضرب دکارتی آشنا شویم، باید در مورد زوج‌های مرتب اطلاعاتی داشته باشیم.

یک زوج مرتب عبارتی است به شکل (x, y) که در آن x را مؤلفهٔ اول و y را مؤلفهٔ دوم می‌نامیم. نخست به بیان تساوی دو زوج مرتب می‌پردازیم. گوییم دو زوج مرتب برابر هستند اگر و تنها اگر مولفه‌های اول با یکدیگر و مؤلفه‌های دوم با یکدیگر برابر باشند.

گزاره ۶.۸: هر زوج مرتب عبارتی است به شکل (x_1, x_2) که تساوی دو زوج مرتب به‌معنای تساوی نظیر به نظیر مؤلفه‌های آن است.

توجه داریم که نام متغیرها مهم نیست؛ بلکه محل قرارگرفتن آنها اهمیت دارد. به‌همین سبب این دوتایی را **مرتب** گویند. بنابراین $(2, 1) \neq (1, 2)$؛ زیرا محل قرارگرفتن اعداد تغییر کرده است. دو زوج مرتب برابر هستند اگر مؤلفه‌های اول و دوم هر یک با دیگری برابر باشد. به‌عبارت دقیق‌تر:

تعریف ۱۱.۸: $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ اگر و تنها اگر $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$

مثال ۲۹.۸: مقادیر x و y را چنان بیابید که تساوی‌ها زیر برقرار گردد. مبتدی

آ . $(2, 3) = (x, y)$ ب . $(x, 4) = (3, y)$

پاسخ: آ . $x = 2$ و $y = 3$ ب . $x = 3$ و $y = 4$ ■

می‌دانیم که اعضای یک مجموعه می‌توانند هر چیزی باشند و لازم نیست که حتماً عدد باشند. در مورد زوج‌های مرتب نیز دقیقاً همین امر صادق است. زوج مرتب را می‌توان به زبان مجموعه‌ها بیان کرد. در برخی کتاب‌ها، زوج مرتب (x, y) را یک خلاصه نویسی برای مجموعهٔ $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ معرفی کرده‌اند. زیرا:

گزاره ۷.۸: $\{\{x_1\}, \{x_1, y_1\}\} = \{\{x_2\}, \{x_2, y_2\}\}$ اگر و تنها اگر $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$. پیشرفته - اختیاری

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

نکته‌ای ظریف ... بنابراین هر چیزی که به عنوان عضو یک مجموعه قابل قبول است به‌عنوان یکی از مؤلفه‌های یک زوج مرتب نیز قابل قبول است. پس مؤلفه‌های یک زوج مرتب (و در حالت کلی مؤلفه‌های یک چندتایی مرتب[1])، می‌توانند عدد، مجموعه، چندتایی مرتب یا هر چیز دیگری باشند. درضمن به هیچ وجه محدودیتی نداریم که همه مؤلفه‌ها از یک جنس باشند. یعنی ممکن است مؤلفه اول عدد و مؤلفه دوم مجموعه باشد.

[1] چندتایی مرتب را جلوتر توضیح داده‌ایم.

با دقت بخوانید ...
مثالی ساده اما مفهومی...

مثال ۳۰.۸: x, y را چنان بیابید که تساوی‌های زیر برقرار باشد.

آ. $\{x, \{x, y\}\} = \{۳, \{۳, ۴\}\}$ ب. $\{x, \{y, x\}\} = \{۳, \{۲, x\}\}$

ج. $\{۳, (x, y)\} = \{x, (y, x)\}$ د. $\{(x, ۳), (۲, y)\} = \{(x, y)\}$

ه. $(۲, (۳, y)) = (y, x)$ و. $(\emptyset, \{۲, ۳\}) = (x, y)$

پاسخ: آ. $x = ۳$ و $y = ۴$ ب. $x = ۳$ و $y = ۲$ ج. $x = ۳$ و $y = ۳$
د. $x = ۲$ و $y = ۳$ ه. $y = ۲$ و $x = (۳, ۲)$ و. $x = \emptyset$ و $y = \{۲, ۳\}$ ■

لایب‌نیتز[۱]، با درکی شهودی به پایه‌ریزی مجموعه‌ها به‌عنوان نوعی نمادگذاری و روشی برای سهولت در بیان مطالب پرداخت. با این نمادگذاری، ایدهٔ رنه دکارت[۲] در ارائهٔ هندسه تحلیلی که در فصل بعد با آن آشنا می‌شویم، به تعریف نوعی ضرب میان دو مجموعه انجامید. این تعریف ساده و البته مهم، به نام رنه دکارت نام‌گذاری شده است.

تعریف ۱۲.۸: حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعهٔ A و B را با $A \times B$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:
$A \times B = \{(x, y) : x \in A$ و $y \in B\}$

بنابراین حاصل‌ضرب دکارتی بین دو مجموعه تعریف می‌شود و $A \times B$ برابر است با مجموعهٔ همهٔ زوج‌های مرتبی که مؤلفهٔ اول آنها عضو A و مؤلفهٔ دوم آنها عضو B است.

اگر $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{d, e\}$ باشد، آن‌گاه:

$A \times B = \{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$

توجه داریم که $(a, d) \in A \times B$ اما $b \notin A \times B, a \notin A \times B$ و همچنین اگر $(c, d) \in A \times B$ و $(a, b) \in A \times B$ پس حتماً $\{a, c\} \subseteq A, \{b, d\} \subseteq B$.

ساده اما ظریف ...

مثال ۳۱.۸: درستی عبارات زیر را ثابت کنید:

آ. اگر $A \times B \neq \emptyset$ آن‌گاه $A \neq \emptyset$ ب. اگر $A \times B \neq \emptyset$ آن‌گاه $B \neq \emptyset$

ج. اگر $A = \emptyset$ آن‌گاه $A \times B = \emptyset$ د. اگر $B = \emptyset$ آن‌گاه $A \times B = \emptyset$

ه. اگر $A \subset B$ آن‌گاه $A \times C \subset B \times C$

پاسخ: آ. اگر $A \times B \neq \emptyset$ پس وجود دارد $(x, y) \in A \times B$ که در آن $x \in A$ و $y \in B$ بنابراین حداقل یک x وجود دارد که $x \in A$ باشد و درنتیجه داریم $A \neq \emptyset$

ب. مشابه قسمت (آ) اثبات می‌شود.

ج. بنا به قسمت (آ) امکان ندارد که همزمان هم $A = \emptyset$ و هم $A \times B \neq \emptyset$ بنا براین هرگاه داشته باشیم $A = \emptyset$ حتماً داریم $A \times B = \emptyset$.

د. مشابه قسمت (ج)

ه. کافی است با فرض $A \subset B$ نشان دهیم هر عضو $A \times C$ عضوی از $B \times C$ نیز می‌باشد.

$$(x, y) \in A \times C \Longrightarrow (x \in A \text{ و } y \in C) \overset{A \subset B}{\Longrightarrow} (x \in B \text{ و } y \in C) \Longrightarrow (x, y) \in B \times C$$ ■

مثال ۳۲.۸: نادرستی عبارات زیر را نشان دهید.

آ. اگر $A \times C \subseteq B \times C$ آن‌گاه $A \subseteq B$ ب. اگر $A \times C = B \times C$ آن‌گاه $A = B$

---

[۱] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716; Germany)
[۲] ReneDescartes (1596;Germany - 1650;Sweden)

پاسخ: آ. به سادگی می‌توان دید که اگر $C = \varnothing$ آنگاه $B \times C = \varnothing$ و $A \times C = \varnothing$ که در این صورت بدون توجه به اینکه B و A چه مجموعه‌هایی باشند، داریم $A \times C \subset B \times C$ و با قراردادن $A = \{۱\}$ و $B = \varnothing$ نادرستی عبارت فوق مشخص می‌شود.

مورد (ب) به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

نکته‌ای ظریف ...
با مثال قبل مقایسه کنید.

مثال ۳۳.۸: با فرض $C \neq \varnothing$ نشان دهید:

آ. اگر $A \times C \subset B \times C$ آنگاه $A \subset B$ ب. اگر $A \times C = B \times C$ آنگاه $A = B$

پاسخ: آ. چون $C \neq \varnothing$ پس حداقل یک $z \in C$ وجود دارد. بنابراین گوییم برای هر $x \in A$ داریم $(x, z) \in A \times C$ و چون $A \times C \subset B \times C$ پس $(x, z) \in B \times C$ و در نتیجه $z \in C$ و $x \in B$. دیدیم که برای هر $x \in A$ داریم $x \in B$ درنتیجه داریم $A \subset B$.

ب. از تعریف تساوی دو مجموعه و قسمت (آ) به سادگی نتیجه می‌شود. ■

مثال ۳۴.۸: فرض کنید کارخانهٔ آقای خودرو ساز، داخل خودروها را با یکی از ۳رنگ سفید، سیاه و زرد تودوزی می‌کند که با $\{W, B, Y\}$ نشان می‌دهیم و بیرون خودروها را با یکی از ۴ رنگ سفید، سیاه، قرمز و قهوه‌ای رنگ می‌کند که با$\{W, B, R, Br\}$ نمایش می‌دهیم. اگر مؤلفه‌های اول را نشانهٔ رنگ بیرون خودرو و مؤلفهٔ دوم را به‌معنای رنگ درون خودرو در نظر بگیریم، هر یک از خودروهای آقای خودروساز، در یکی از حالت‌های زیر قرار دارد.

$$(W, W), (W, B), (W, Y), (B, W), (B, B), (B, Y), (R, W),$$
$$(R, B), (R, Y), (Br, W), (Br, B), (Br, Y)$$

مجموعهٔ زوج‌های مرتب در حاصل ضرب دکارتی شامل همهٔ انتخابهای ممکن است. ■

چون با زیاد شدن اعضای A و B حاصل‌ضربشان نیز بزرگ شده و نوشتن آن سخت می‌شود، برای جلوگیری از اشتباه به روش زیر عمل می‌کنیم. حاصل‌ضرب را به صورت جدولی می‌نویسیم که در هر ستون مؤلفهٔ اول و در هر سطر، مؤلفهٔ دوم ثابت باشد. به‌طور مثال برای $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{۴, ۵, ۶\}$ مجموعهٔ $A \times B$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$\begin{aligned} A \times B = \{&(۱, ۴), \quad (۲, ۴), \quad (۳, ۴), \\ &(۱, ۵), \quad (۲, ۵), \quad (۳, ۵), \\ &(۱, ۶), \quad (۲, ۶), \quad (۳, ۶)\} \end{aligned}$$

بدین ترتیب اطمینان داریم که همهٔ اعضای $A \times B$ (که زوج مرتب هستند) را نوشته‌ایم. زمانی که $B = \{d, e\}, A = \{a, b, c\}$ است، با استفاده از روش فوق درمی‌یابیم که:

$$\begin{aligned} A \times B = \{&(a, d), \quad (b, d), \quad (c, d), \\ &(a, e), \quad (b, e), \quad (c, e)\} \end{aligned}$$

در این نوشتار به‌سادگی دیده می‌شود که اگر A دارای n عضو و B دارای m عضو باشد، آنگاه $A \times B$ دارای $n.m$ عضو خواهد بود.

قضیه ۱۵.۸: برای هر دو مجموعهٔ متناهی مانند A و B داریم: $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

اثبات: به مطالب پیش از قضیه مراجعه نمایید. ■

مثال ۳۵.۸: برای $A = \{۱\}$، $B = \{a\}$ و $C = \{b\}$ مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

آ. $A \times (B \times C)$ ب. $(A \times B) \times C$ ج. $(A \times B) \times (A \times C)$

نکته‌ای ظریف ...
پاسخ‌ها را با هم مقایسه کنید.

پاسخ: آ. $A \times (B \times C) = A \times (\{(a, b)\}) = \{(۱, (a, b))\}$
ب. $(A \times B) \times C = \{(۱, a)\} \times \{b\} = \{((۱, a), b)\}$
ج. $(A \times B) \times (A \times C) = \{(۱, a)\} \times \{(۱, b)\} = \{((۱, a), (۱, b))\}$ ■

مثال ۳۶.۸: درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. $A \times B = B \times A$ ب. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ ج. $n(A \times B) = n(B \times A)$

پاسخ: آ. نادرست است. کافی است قرار دهیم $A = \{۱\}$ و $B = \{۲\}$.
ب. نادرست است. کافی است قرار دهیم $A = B = C = \{۱\}$
ج. درست است. بنا به قضیهٔ فوق و جابجای اعداد طبیعی واضح است. ■

تمرین:

(۲۸) برای $A = \{۱, ۲\}$، $B = \{a, b\}$ و $C = \{\alpha, \beta\}$، مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

آ. $A \times B$ ب. $A \times A$ ج. $B \times B$ د. $A \times C$
ه. $B \times A$ و. $C \times A$ ز. $A \times (B \times C)$ ح. $(A \times B) \times C$
ط. $(A \times B) \times (B \times C)$ ی. $(B \times A) \times (C \times A)$

اختیاری
تمرینات(۲۹) - (۳۴) صرفاً جهت خوانندگان علاقه‌مند ارائه شده است.

(۲۹) درستی عبارات زیر را ثابت کنید.

آ. $(A \times C) \cup (B \times C) \subset (A \cup B) \times C$ ب. $(A \cap B) \times C \subset (A \times C) \cap (B \times C)$
ج. $(A \cup B) \times C \subset (A \times C) \cup (B \times C)$ د. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
ه. $(A \cap B) \times C \subset (A \times C) \cap (B \times C)$ و. $(A \cap B) \times C \subset (A \times C) \cap (B \times C)$
ز. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ ح. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(۳۰) درستی عبارات زیر را ثابت کنید.

آ. $A \times (B - C) = A \times B - A \times C$ ب. $A \times (B \triangle C) = (A \times B) \triangle (A \times C)$
ج. $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$

(۳۱) درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

آ. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
ب. $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (C \cup D)$
ج. اگر $A \times A = B \times B$ آن‌گاه $A = B$
د. اگر $A \cap B = \varnothing$ آن‌گاه $(A \times C) \cap (B \times D) = \varnothing$
ه. اگر $C \cap D = \varnothing$ آن‌گاه $(A \times C) \cap (B \times D) = \varnothing$

(۳۲) ثابت کنید $A \times B = C \times D$ اگر و تنها اگر $A = C$ و $B = D$

(۳۳) درستی یا نادرستی عبارت زیر را بررسی کنید.

$$A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$$

(۳۴) ثابت کنید:

آ. $(A \times B) - (C \times C) = (A - C) \times (B - C)$

ب. $(A \times A) - (B \times C) = (A - B) \times (A - C)$

ج. $(A \times B) - (C \times D) = (A - C) \times B - A \times (B - D)$

۵.۸ رابطه

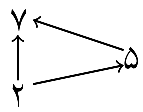
با دقت بخوانید ...
در این فصل مطالب با سرعت پیچیده می‌شوند؛ اما با تکیه بر مطالبی که پیش از این بیان شده‌اند، ساده خواهند بود.

مفهوم رابطه در ریاضیات با مفهوم رابطه در زبان محاوره کمی متفاوت است. جملهٔ «علی با حسین رابطه دارد» معمولاً به معنای ارتباط داشتن است. یعنی علی و حسین با یکدیگر تماس تلفنی دارند یا اینکه معمولاً یکدیگر را می‌بینند و امثال آن. اما زمانی که می‌گوییم «علی پدر حسین است» علی و حسین را با رابطهٔ پدر بودن به یکدیگر مربوط کرده‌ایم. رابطه در ریاضیات بیشتر به این نوع اخیر شبیه است که به معنای «مربوط بودن» است.

رابطه در زندگی روزمرّه، درک شهودی رابطه، تعریف رابطه

فرض کنید «a پدر b باشد». اگر رابطه پدر بودن را با R نشان دهیم، می‌توانیم قرارداد کنیم که «a پدرِ b است» را به صورت $a\mathrm{R}b$ نمایش دهیم. همچنین می‌توان «b پدرِ a نیست» را با «$b \not\mathrm{R}\, a$» نمایش داد. روابط همسر بودن، خواهر بودن، دوست داشتن، هم‌سن بودن و ... نمونه‌هایی از رابطهٔ میان انسان‌ها هستند که در زندگی روزمره با آنها سر و کار داریم. رابطه به معنای ارتباط داشتن که در زبان محاوره‌ای به‌کار می‌رود، یک نمونه از این رابطه‌ها است. برای نزدیک شدن به مفهومِ ریاضیِ رابطه، به برخی روابط ریاضی اشاره می‌کنیم.

مثال ۳۷.۸: به رابطهٔ «>» روی مجموعهٔ {۲,۷,۵} توجه کنید.



داریم ۲ > ۷ اما از طرفی هم داریم ۷ ≯ ۲ که به معنای نادرستی ۷ > ۲ می‌باشد. وجود رابطه میان دو عدد را می‌توان با یک پیکان نشان داد که در شکل فوق رابطه > را روی مجموعهٔ {۲,۷,۵} نشان داده‌ایم.

توجه: رابطه > از ۵ به ۷ برقرار است اما از ۷ به ۵ برقرار نیست. ■

البته «رابطه» با تحول مفهوم تابع به‌وجود آمده است. در فصل توابع با تولد رابطه نیز آشنا خواهیم شد.

آیا می‌توان رابطه فوق را با یک مجموعه نمایش داد؟ چون هر پیکان را می‌توان با یک زوج مرتب نشان داد که مؤلفه اول آن، ابتدای پیکان و مؤلفه دوم آن، انتهای پیکان را نشان می‌دهد؛ با جایگزینی هر یک از پیکان‌ها با یک زوج مرتب، می‌توان رابطه فوق را با زوج مرتب‌های (۵,۷)، (۲,۵) و (۲,۷) بیان نمود. بنابراین رابطه فوق با مجموعهٔ R = {(۲,۷),(۲,۵),(۵,۷)} بیان می‌شود.

به‌طور مشابه برای هر رابطه‌ای مانند R می‌توان مجموعهٔ $\{(x,y) : x\mathrm{R}y\}$ را درنظر گرفت. با ایده گرفتن از این واقعیت، ریاضیدانان تصمیم گرفتند رابطه را به‌صورت زیر تعریف کنند.

تعریف ۱۳.۸: هر رابطه یک مجموعه از زوج‌های مرتب است.

بدین‌ترتیب، رابطه‌ها دیگر معنای خاصی ندارند و $x\mathrm{R}y$ نگارش دیگری از $(x,y) \in \mathrm{R}$ است. هرچند هر یک از رابطه‌های گذشته را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب درنظر گرفت، اما هر مجموعه از زوج‌های مرتب را نمی‌توان به‌سادگی، مانند رابطه‌های گذشته توصیف کرد.

دقت کنید ...
بسیار آموزنده

مثال ۳۸.۸: رابطه بودن یا نبودن هر یک از مجموعه‌های زیر را بررسی کنید.

آ. $\mathrm{R}_a = \{(a,b),(۱,a)\}$ ب. $\mathrm{R}_b = (a,b)$

ج. $\mathrm{R}_c = \{a,b\}$ د. $\mathrm{R}_d = \emptyset$

هـ . $R_e = \{(۱,۲),(۱,(۲,۳))\}$ و . $R_f = \{(a,b),(۱,۲,۳),(۱,۲,۳,۴,۵)\}$

ز . $R_g = \{a,b,(a,b)\}$ ح . $R_h = \{(\varnothing,\{\varnothing\})\}$

ط . $R_i = \{\{\{\varnothing\},\{\varnothing,\varnothing\}\}\}$

پاسخ: آ . مجموعه‌ای است شامل دو زوج مرتب. بنابراین یک رابطه است.
ب . به‌وضوح R_b یک مجموعه نیست و در نتیجه نمی‌تواند یک رابطه باشد.
ج . این مجموعه دو عضو دارد اما اعضای آن زوج مرتب نیستند. پس رابطه نیست.
د . مجموعهٔ تهی هم مجموعه است و هم همه اعضای آن زوج مرتب هستند. پس رابطه است.
هـ . رابطه است. هرچند مؤلفه دوم از زوج مرتب دوم، یک زوج مرتب است، اما به هر حال هر دو عضو مجموعهٔ R_e زوج مرتب هستند پس R_e رابطه است.
و . این مجموعه رابطه نیست چون اعضای آن زوج مرتب نیستند.
ز . این مجموعه رابطه نیست چون $a,b \in R_g$ اما a و b هیچ‌کدام زوج مرتب نیستند.
ح . این مجموعه یک رابطه است که شامل یک زوج مرتب است. مؤلفه اول این زوج مرتب $\varnothing$ و مؤلفه دوم آن $\{\varnothing\}$ می‌باشد.
ط . این مجموعه رابطه نیست چون تنها عضو این مجموعه، زوج مرتب نیست. ■

نگاهی متفاوت به رابطه

در روابطی مانند شوهر بودن، مؤلفهٔ اول از مجموعهٔ مردها و مؤلفهٔ دوم از مجموعهٔ زن‌ها است. در رابطهٔ معلم بودن، مؤلفه اول از مجموعهٔ معلّم‌ها و مؤلفه دوم از مجموعهٔ دانش‌آموزان است. اگر رابطهٔ R چنان باشد که برای هر $(a,b) \in R$ داشته باشیم $a \in A$ و $b \in B$، آنگاه $R \subset A \times B$. در واقع هر رابطه زیرمجموعه‌ای از حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه است و برای تصریح بر اینکه $R \subset A \times B$، آن را به‌صورت $R : A \longrightarrow B$ نشان می‌دهیم و می‌گوییم R رابطه‌ای از A به B است. دو رابطه شوهر بودن و معلم بودن را به شکل زیر نمایش می‌دهیم.

شوهر بودن : مردها ⟵ زن‌ها معلم بودن : معلم‌ها ⟵ دانش‌آموزان

در برخی کتاب‌های ریاضی، رابطه را زیرمجموعه‌ای از حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه معرفی می‌کنند. یعنی برای دو مجموعهٔ A و B گوییم:

R رابطه‌ای از A به B است هرگاه $R \subset A \times B$.

مثال ۳۹.۸: رابطه $R = \{(۱,۲)\}$ را می‌توان به هر یک از صورت‌های زیر تعریف کرد.
آ . $R : \{۱,۲\} \longrightarrow \{۱,۲\}$ ب . $R : \{۱\} \longrightarrow \{۲\}$
ج . $R : \{۱,۳,۵\} \longrightarrow \{۲,۴,۶\}$ د . $R : \{۱,۲,۳,۴,\ldots\} \longrightarrow \{۱,۲,۳,۴,\ldots\}$
زیرا به‌طور مثال در مورد (آ) داریم $R \subset \{۱,۲\} \times \{۱,۲\}$. موارد دیگر نیز درست هستند و به‌طورِ مشابه بررسی می‌شوند. ■

تساوی رابطه‌ها را براساس تساوی مجموعه‌ها تعریف می‌کنیم و گوییم دو رابطه برابرند اگر و تنها اگر به‌عنوان دو مجموعه برابر باشند.

گوییم **R** رابطه‌ای روی **A** است هرگاه **R** رابطه‌ای از مجموعهٔ **A** به خودش باشد.

یا به عبارتی:

تعریف ۱۴.۸: R را رابطه‌ای روی A گوییم اگر $R \subset A \times A$

مثال ۴۰.۸: رابطهٔ $<$ را روی مجموعهٔ $A = \{۲, ۷, ۵\}$ با نمادِ $<_A$ و روی مجموعهٔ $B = \{۳, ۴, ۶\}$ با نمادِ $<_B$ نشان می‌دهیم ، پس داریم:

$$<_A = \{(x, y) \in A \times A: x < y\} = \{(۲, ۵), (۲, ۷), (۵, ۷)\}$$

$$<_B = \left\{(x, y) \in B \times B: x < y\right\} = \left\{(۳, ۴), (۳, ۶), (۴, ۶)\right\}$$

به‌وضوح مشاهده می‌کنیم که این دو مجموعه با هم برابر نیستند پس $<_A \neq <_B$. ■

پس از این، هر رابطه‌ای که مانند «رابطهٔ $<$ روی A» به‌وسیلهٔ ضابطه‌ای شناخته شده، قابل تعریف باشد، با ضابطهٔ آن بیان می‌کنیم. به‌طورِ مثال «رابطه $x = ۲y$ روی مجموعهٔ $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$» برابر است با:

$$\left\{(x, y) \in A \times A: x = ۲y\right\} = \left\{(۲, ۱), (۴, ۲), (۶, ۳)\right\}$$

مثال ۴۱.۸: هر یک از رابطه‌های زیر را روی مجموعهٔ داده شده، مشخص کنید:

آ. رابطهٔ $x = y + ۱$ روی $\{۱, ۲, ۴, ۵, ۷, ۸\}$
ب. رابطهٔ $y = x^۲$ روی $\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$
ج. رابطهٔ $y = x^۲$ روی $\{-۱, ۰, ۱\}$
د. رابطهٔ $x^۲ + y^۲ \leq ۱$ روی $\{-۱, ۱\}$
ه. رابطهٔ $x^۲ + y^۲ \leq ۱$ روی $\{۰, ۱\}$
و. رابطهٔ $x^۲ + y^۲ \leq ۱$ روی $\{-۱, ۰, ۱\}$
ز. رابطهٔ $x^۲ + y^۲ \leq ۱$ روی $\{\dots, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \dots\}$

پاسخ:

آ. $\{(۲, ۱), (۵, ۴), (۸, ۷)\}$
ب. $\left\{(۰, ۰), (۱, ۱), (۲, ۴)\right\}$
ج. $\left\{(-۱, ۱), (۱, ۱), (۰, ۰)\right\}$
د. $\varnothing$
ه. $\left\{(۰, ۰), (۰, ۱), (۱, ۰)\right\}$
و. $\left\{(۰, ۱), (۱, ۰), (۰, ۰), (۰, -۱), (-۱, ۰)\right\}$
ز. $\left\{(۰, ۱), (۱, ۰), (۰, ۰), (۰, -۱), (-۱, ۰)\right\}$

■

مثال ۴۲.۸: فرض کنید $R_۱$، $R_۲$ و $R_۳$ به‌ترتیب روابطِ $x + y = ۲$ ، $x < y$ و $|x| = |y|$ روی مجموعهٔ $A = \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$ باشند. رابطه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

حتماً پاسخ دهید...
مهارت‌های خود را با پاسخ دادن به این مثال افزایش دهید.

آ. $R_۱$	ب. $R_۲$	ج. $R_۳$	د. $R_۱ \cap R_۲$
ه. $R_۱ \cap R_۳$	و. $R_۲ \cap R_۳$	ز. $R_۱ \cup R_۲$	ح. $R_۱ \cup R_۳$
ط. $R_۲ \cup R_۳$	ی. $R_۱ - R_۲$	ک. $R_۱ - R_۳$	ل. $R_۳ - R_۱$
م. $R_۲ - R_۳$	ن. $R_۳ - R_۲$	س. $R_۱ \triangle R_۲$	ع. $R_۲ \triangle R_۳$

پاسخ:

$R_۱ = \left\{(۰, ۲), (۱, ۱), (۲, ۰)\right\}$

$R_۲ = \left\{(-۲, -۱), (-۲, ۰), (-۲, ۱), (-۲, ۲), (-۱, ۰), (-۱, ۱), (-۱, ۲), (۰, ۱), (۰, ۲), (۱, ۲)\right\}$

$R_۳ = \left\{(-۲, -۲), (-۲, ۲), (-۱, -۱), (-۱, ۱), (۰, ۰), (۱, -۱), (۱, ۱), (۲, -۲), (۲, ۲)\right\}$

با داشتن این سه مجموعه، محاسبهٔ موارد دیگر ساده است. (انجام دهید). ■

۱.۵.۸ دامنه و بُرد

برای رابطه‌ای مانند R مجموعهٔ همه مؤلفه‌های اولِ زوج‌های مرتبِ عضو R را دامنهٔ R نامیده و با Dom(R) نمایش می‌دهیم.[۱] همچنین مجموعهٔ همه مؤلفه‌های دومِ زوج مرتب‌های عضو R را بُرد R نامیده و با Im(R) نمایش می‌دهیم.[۲]

تعریف ۱۵.۸: برای هر رابطه دلخواه R تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{Dom(R)} = \{x\colon \exists y; (x,y) \in \mathrm{R}\} \qquad \mathbf{Im(R)} = \{y\colon \exists x; (x,y) \in \mathrm{R}\}$$

با مثال‌های زیر درک واضح‌تر و دقیق‌تری نسبت به این مفاهیم به‌دست خواهیم آورد.

ساده اما مهم.

مثال ۴۳.۸: دامنه و بُرد هر یک از رابطه‌های زیر را بیابید.

آ. $R_۱ = \{(۱,۲),\ (۲,۳),\ (۴,۷)\}$ ب. $R_۲ = \varnothing$

ج. $R_۳ = \{(۱,۲),(۱,۳),\ (۱,۴)\}$ د. $R_۴ = \{(۱,۱),(۲,۱),(۳,۱)\}$

پاسخ: آ. $Dom(R_۱)=\{۱,۲,۴\}$ و $Im(R_۱)=\{۲,۳,۷\}$

ب. $Dom(R_۲)=\varnothing$ و $Im(R_۲)=\varnothing$

ج. $Dom(R_۳)=\{۱\}$ و $Im(R_۳)=\{۲,۳,۴\}$

د. $Dom(R_۴)=\{۱,۲,۳\}$ و $Im(R_۴)=\{۱\}$ ■

در ادامه به اجتماع و اشتراک دو رابطه (به عنوان دو مجموعه از زوج‌های مرتب) و ارتباط دامنه و برد آن با اجتماع و اشتراک دامنه یا برد دو رابطهٔ اولیه می‌پردازیم. به مثال زیر توجه کنید.

در پاسخ دادن به مثال‌های بعد به شما کمک خواهد کرد.

مثال ۴۴.۸: با فرض $R_۱ = \{(۱,۲),(۵,۶)\}$ و $R_۲ = \{(۱,۳),(۷,۶)\}$ درستی و نادرستی هر یک از عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. $Dom(R_۱ \cup R_۲)= Dom(R_۱) \cup Dom(R_۲)$

ب. $Dom(R_۱ \cap R_۲)= Dom(R_۱) \cap Dom(R_۲)$

ج. $Im(R_۱ \cup R_۲)= Im(R_۱) \cup Im(R_۲)$

د. $Im(R_۱ \cap R_۲)= Im(R_۱) \cap Im(R_۲)$

پاسخ: توجه داریم که $R_۱ \cup R_۲ = \{(۱,۲),(۱,۳),(۵,۶),(۷,۶)\}$ و $R_۱ \cap R_۲=\varnothing$ پس:

$Dom(R_۱ \cup R_۲) = \{۱,۵,۷\}$ $\quad Im(R_۱ \cup R_۲) = \{۲,۳,۶\}$ $\quad Dom(R_۱ \cap R_۲) = Im(R_۱ \cap R_۲) = \varnothing$

بنابراین داریم:

آ. درست ب. نادرست ج. درست د. نادرست ■

قضیه ۱۶.۸: برای هر دو رابطهٔ دلخواه مانند R و S داریم:

آ. $\mathbf{Dom(R \cup S) = Dom(R) \cup Dom(S)}$ ب. $\mathbf{Im(R \cup S) = Im(R) \cup Im(S)}$

اثبات: آ. کافی است نشان دهیم $x \in Dom(R \cup S)$ اگر و تنها اگر $x \in (Dom(R) \cup Dom(S))$

---

[۱] Domain

[۲] Image

$$\begin{aligned} x\in \mathrm{Dom}(\mathrm{R}\cup \mathrm{S}) &\Longleftrightarrow \exists y\big((x,y)\in (\mathrm{R}\cup \mathrm{S})\big)\\ &\Longleftrightarrow \exists y\big((x,y)\in \mathrm{R} \text{ یا } (x,y)\in \mathrm{S}\big)\\ &\Longleftrightarrow \big((\exists y;(x,y)\in \mathrm{R}) \text{ یا } (\exists y;(x,y)\in \mathrm{S})\big)\\ &\Longleftrightarrow x\in \mathrm{Dom}(\mathrm{R}) \text{ یا } x\in \mathrm{Dom}(\mathrm{S})\\ &\Longleftrightarrow x\in \mathrm{Dom}(\mathrm{R})\cup \mathrm{Dom}(\mathrm{S}) \end{aligned}$$

ب . به عنوان تمرین به خوانده واگذار می‌شود. ■

نکته‌ای ظریف **با دقت بخوانید.**

در مثال (۴۴.۸) دیدیم که قضیهٔ فوق برای اشتراک برقرار نیست. اما شخصی اثبات قضیهٔ فوق را با تغییراتی مناسب، به اثباتی برای $\mathrm{Dom}(\mathrm{R}\cap \mathrm{S})=\mathrm{Dom}(\mathrm{R})\cap \mathrm{Dom}(\mathrm{S})$ تبدیل می‌کند:

$$\begin{aligned} x\in \mathrm{Dom}(\mathrm{R}\cap \mathrm{S}) &\Longleftrightarrow \exists y(x,y)\in (\mathrm{R}\cap \mathrm{S})\\ &\Longleftrightarrow \exists y\big((x,y)\in \mathrm{R} \text{ و } (x,y)\in \mathrm{S}\big)\\ &\overset{*}{\Longleftrightarrow} \big(\exists y;(x,y)\in \mathrm{R}) \text{ و } (\exists y;(x,y)\in \mathrm{S}\big)\\ &\Longleftrightarrow x\in \mathrm{Dom}(\mathrm{R}) \text{ و } x\in \mathrm{Dom}(\mathrm{S})\\ &\Longleftrightarrow x\in \mathrm{Dom}(\mathrm{R})\cap \mathrm{Dom}(\mathrm{S}) \end{aligned}$$

و در ادامه کل ریاضیات و حتی منطق را زیر سؤال برده و می‌گوید:

> *«تنها انتظار ما از استدلال، منطق و ریاضیات این است که ما را از درستی نتایج به‌دست آمده مطمئن سازند؛ اما در مثال فوق عبارتی را اثبات کرده‌ایم که نادرستی آن را در مثال (۴۴.۸) دیده‌ایم. بنابراین نمی‌توان به ریاضیات اطمینان کرد و آن را در کارهای مهم به‌کار برد. نمی‌توان با ریاضیات مهندسی کرد، خانه، خودرو، هواپیما، کشتی و ... ساخت، زیرا نمی‌توان از درستی نتایج آن در مورد امنیت این سازه‌ها و دست‌آوردها مطمئن بود. علاوه‌براین، مثال فوق نشان می‌دهد منطق، استدلال و ریاضیات به‌عنوان روش‌های استدلال، همیشه به جواب درست نمی‌رسند پس غیرقابل اطمینان بوده و هیچ ارزشی ندارند و باید کنار گذاشته شوند.»*

این شخص درست می‌گوید؛ اما نگران نباشید! ریاضیدانان مسئولیت‌پذیر و دقیق هستند؛ هرگاه خطر اشتباهی در ریاضیات حس شود، ریاضیدانان با دقت در جستجوی اشتباه بوده و برای یافتن و رفع آن تلاش کرده‌اند تا از بروز آن اشتباه یا اشتباهاتی مشابه آن برای همیشه جلوگیری کنند. آنچه امروزه به‌عنوان ریاضیات در اختیار ماست و بدون هیچ اشکال و اشتباهی به‌نظر می‌رسد، نتیجه قرن‌ها تلاش بشر برای یافتن روشی برای نتیجه‌گیری (منطق) است، به‌نحوی‌که درستی نتایج را تضمین کند.

اشتباه در یکی از نتیجه‌گیری‌های دو طرفه که با علامت «*» مشخص کرده‌ایم، رخ داده است. به نتیجه‌گیری زیر دقت کنید

$$\Big(\exists y\big((x,y)\in \mathrm{R} \text{ و } (x,y)\in \mathrm{S}\big)\Big)\Longrightarrow\Big(\big(\exists y;(x,y)\in \mathrm{R}\big) \text{ و } \big(\exists y;(x,y)\in \mathrm{S}\big)\Big)$$

نتیجه‌گیری فوق درست است اما عکس آن که در زیر آمده غلط است:

$$\Big(\big(\exists y;(x,y)\in \mathrm{R}\big) \text{ و } \big(\exists y;(x,y)\in \mathrm{S}\big)\Big)\Longrightarrow\Big(\exists y\big((x,y)\in \mathrm{R} \text{ و } (x,y)\in \mathrm{S}\big)\Big)$$

کافی است قرار دهیم $R = \{(۱,۳)\}$ و $S = \{(۱,۲)\}$.

دقیق اندیشیدن، تنها راه بشر برای یافتن اشتباهات خویش است.

اثبات‌ها در ریاضیات، منطق و فلسفه، صرفا تلاش بشر برای دقیق اندیشیدن هستند تا اشتباهات قابل تشخیص شوند. این اشتباهات گاه در نتایج و نتیجه‌گیری‌ها رخ می‌دهند و گاهی نیز مانند مورد فوق، در درک بشر از استنتاج و نتیجه‌گیری درست. حتی منطق (به‌معنای روش استدلال) طی قرن‌ها تجربیات بشری رشد کرده است.

۲.۵.۸ تحدید رابطه

منظور از تحدید رابطه R به مجموعه A، محدود کردن رابطهٔ R به مجموعهٔ A است. این عبارت چندان روشن نیست. دو نمونه محدود کردن یک رابطه به یک مجموعه را بیان می‌کنیم.

روابط $\le_A$ و $\le_B$ در مثال (۴۰.۸) را به‌خاطر داریم. اگر رابطهٔ $\le$ روی $\mathbb{N}$ را با $\le_{\mathbb{N}}$ ، رابطهٔ $\le_{\mathbb{N}}$ روی A را با $\le_A$ و رابطهٔ $\le_{\mathbb{N}}$ روی B را با $\le_B$ نشان دهیم داریم:

$$\le_A = \le_{\mathbb{N}} \cap (A \times A) \qquad \text{و} \qquad \le_B = \le_{\mathbb{N}} \cap (B \times B)$$

اما تحدید یک رابطه به یک مجموعه با تعریف آن روی آن مجموعه متفاوت است.

در تحدید کردن یک رابطه، فقط دامنهٔ آن محدود می‌شود.

بدین‌ترتیب می‌توانیم تعریف زیر را ارائه دهیم.

تعریف ۱۶.۸: اگر R رابطه‌ای از A در B باشد، منظور از تحدید R به مجموعهٔ D که با $R|_D$ نشان داده می‌شود، برابر است با: $R|_D = \{(x,y) \in R : x \in D\}$

فرض کنید $A = \{۲,۷,۵\}$ در این صورت، چون $۴ >_{\mathbb{N}} ۲$ و $۲ \in A$ پس $(۲,۴)$ عضوِ تحدید $\le_{\mathbb{N}}$ به A است؛ اما $(۲,۴) \notin \le_A$ چون $۴ \notin A$. بنابراین، «$\le$ روی A» با «تحدید $\le$ به A» که به‌صورت $\leqslant|_A$ نمایش داده می‌شود، متفاوت است.

مثال ۴۵.۸: تحدید رابطهٔ R، به مجموعهٔ داده شده را بیابید.

آ. $R = \{(۱,۲),(۲,۱)\}$ ؛ $A = \{۱\}$

ب. $R = \{(۱,۳),(۳,۶),(۲,۵),(۴,۷)\}$ ؛ $B = \{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$

ج. $R = \{(۱,۳),(۳,۶),(۲,۵),(۴,۷)\}$ ؛ $C = \{۰,۱۰,۱۰۰\}$

پاسخ: آ. $R|_A = \{(۱,۲)\}$ **ب**. $R|_B = \{(۲,۵),(۴,۷)\}$ **ج**. $R|_C = \emptyset$ ■

قضیه ۱۷.۸: اگر R رابطه‌ای از A به B باشد، آن‌گاه: $R|_D = R \cap (D \times B)$

اثبات: از $(x,y) \in R|_D$ نتیجه می‌شود $x \in D$ و $y \in \mathrm{Im}(R) \subset B$ و چون $R \subset A \times B$ داریم $(x,y) \in D \times B$.
بنابراین $R|_D \subset D \times B$.چون $R|_D \subset R$ پس $R|_D \subset R \cap (D \times B)$
حال فرض کنید $(x,y) \in R \cap (D \times B)$. بنابراین $x \in D$ و $(x,y) \in R$ پس $(x,y) \in R|_D$. بنابراین $R \cap (D \times B) \subset R|_D$. از این دو نتیجه می‌شود $R|_D = R \cap (D \times B)$. ■

قضیه ۱۸.۸: برای هر رابطهٔ R و هر دو مجموعهٔ D و E داریم:
آ. $\mathrm{R}|_{(\mathrm{D}\cup\mathrm{E})} = \mathrm{R}|_{\mathrm{D}} \cup \mathrm{R}|_{\mathrm{E}}$ ب. $\mathrm{R}|_{(\mathrm{D}\cap\mathrm{E})} = \mathrm{R}|_{\mathrm{D}} \cap \mathrm{R}|_{\mathrm{E}}$

اثبات: راهنمایی: از قضیهٔ قبل و تساوی‌های زیر (از بخش قبل) استفاده کنید.
$(\mathrm{D}\cup\mathrm{E})\times\mathrm{B} = (\mathrm{D}\times\mathrm{B})\cup(\mathrm{E}\times\mathrm{B})$ و $(\mathrm{D}\cap\mathrm{E})\times\mathrm{B} = (\mathrm{D}\times\mathrm{B})\cap(\mathrm{E}\times\mathrm{B})$ ■

۳.۵.۸ نگاره

برای هر رابطه R، نگارهٔ مجموعهٔ D تحت R را با R(D) نمایش داده و به‌اختصار «R-نگارهٔ D» خوانده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۷.۸: R-نگارهٔ D را با R(D) نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$$\mathbf{R(D)} = \{y: \exists x \in \mathrm{D}; (x,y)\in \mathrm{R}\}$$

به‌عبارت دیگر R-نگارهٔ D، تمام yهایی است که برای عضوی از D مانند x داشته باشیم $x\mathrm{R}y$. یعنی $y \in \mathrm{R(D)}$ اگر و تنها اگر $x \in \mathrm{D}$ وجود داشته باشد که $x\mathrm{R}y$. البته کلمهٔ «R-نگاره» از مفهوم نگاشت آمده که نام دیگری از تابع است. در فصل توابع با مفهوم نگاشت آشنا خواهیم شد.

مثال ۴۶.۸: در هر یک از موارد زیر، R-نگارهٔ D را به‌دست آورید.
آ. $\mathrm{R} = \{(۱,۴),(۳,۲)\}$ ؛ $\mathrm{D} = \{۱,۲\}$
ب. $\mathrm{R} = \{(a,b),(b,c),(c,d),(d,a)\}$ ؛ $\mathrm{D} = \{c,d,e,f\}$

پاسخ: آ. $\mathrm{R(D)} = \{۴\}$ ب. $\mathrm{R(D)} = \{a,d\}$ ■

قضیه ۱۹.۸: برای هر رابطهٔ R و هر مجموعهٔ D داریم: $\mathbf{R(D)} = \mathbf{Im}(\mathbf{R}|_{\mathbf{D}})$

اثبات: با عضوگیری نشان می‌دهیم $x \in \mathrm{R(D)}$ اگر و تنها اگر $x \in \mathrm{Im}(\mathrm{R}|_{\mathrm{D}})$
$$x \in \mathrm{R(D)} \Longleftrightarrow \exists t \in \mathrm{D}; (t,x)\in \mathrm{R} \Longleftrightarrow \exists t; (t,x) \in \mathrm{R}|_{\mathrm{D}} \Longleftrightarrow x \in \mathrm{Im}(\mathrm{R}|_{\mathrm{D}})$$ ■

۴.۵.۸ ترکیب رابطه‌ها:

رابطهٔ «مادرشوهر بودن» ترکیبی از دو رابطهٔ «مادر بودن» و «شوهر بودن» است. به‌طور مثال فرض کنید a مادر b است ($a\mathrm{R}b$) و همچنین فرض کنید b شوهر c است ($b\mathrm{S}c$) در این صورت داریم a مادرشوهر c است ($a\mathrm{T}c$). رابطهٔ T از ترکیب دو رابطهٔ R و S به‌دست می‌آید. ترکیب R و S را به‌صورت $\mathrm{R}\circ\mathrm{S}$ نمایش داده و می‌نویسیم $\mathrm{T} = \mathrm{R}\circ\mathrm{S}$. بنابراین برای هر a، b و c که $a\mathrm{R}b$ و $b\mathrm{S}c$ داریم $a\mathrm{T}c$ که دقیقاً همان حرف ساده در زبان محاوره است که «اگر a مادر b و b شوهر c باشد، آن‌گاه a مادرِشوهرِ c است.» در ریاضیات نیز ترکیب دو رابطه به‌همین شکل است. رابطهٔ T را می‌توان به‌عنوان ترکیب دو رابطه R و S درنظر گرفت و با $\mathrm{R}\circ\mathrm{S}$ نشان داد.

تعریف ۱۸.۸: برای هر دو رابطه R و S، ترکیب R و S را با R∘S نشان داده و داریم:
$$\mathbf{R}\circ\mathbf{S} = \{(x,z): \exists y \text{ s.t.} (x,y)\in \mathrm{R} \text{ و } (y,z)\in \mathrm{S}\}$$

توجه! .... توجه!
این نمادگذاری در فصل توابع مورد بررسی بیشتر قرار خواهد گرفت.

به عبارتی $\mathrm{R}\circ\mathrm{S}$ مجموعهٔ همه زوج‌های مرتبی است به شکل (x,z) که برای هر کدام، حداقل

یک y وجود دارد که $(x,y)\in \mathrm{R}$ و $(y,z)\in \mathrm{S}$. به‌وضوح $y\in \mathrm{Im(R)}\cap \mathrm{Dom(S)}$. مثال زیر در آشنایی بیشتر با ترکیب رابطه‌ها به ما کمک می‌کند.

ساده اما مهم
از این مثال ساده نگذرید. تمرینی ضروری است.

مثال ۴۷.۸: در هر یک از موارد زیر رابطه‌های $\mathrm{R}\circ \mathrm{S}$ و $\mathrm{S}\circ \mathrm{R}$ را به‌دست آورید.

آ. $\mathrm{R}=\{(۱,۲),(۳,۴)\}$ و $\mathrm{S}=\{(۲,۳),(۴,۲)\}$

ب. $\mathrm{R}=\{(۱,۲),(۳,۴)\}$ و $\mathrm{S}=\{(۲,۱),(۴,۳)\}$

ج. $\mathrm{R}=\{(۱,۲),(۳,۴)\}$ و $\mathrm{S}=\{(۱,۴),(۳,۲)\}$

پاسخ: آ. چون ۲S۳ و ۱R۲ پس ۱(R∘S)۳ که معادل است با $(۱,۳)\in \mathrm{R}\circ \mathrm{S}$ و به‌همین طریق داریم: $\mathrm{R}\circ \mathrm{S}=\{(۱,۳),(۳,۲)\}$ و همچنین $\mathrm{S}\circ \mathrm{R}=\{(۲,۴)\}$.

ب. $\mathrm{R}\circ \mathrm{S}=\{(۱,۱),(۳,۳)\}$ و $\mathrm{S}\circ \mathrm{R}=\{(۲,۲),(۴,۴)\}$

ج. $\mathrm{R}\circ \mathrm{S}=\varnothing$ و $\mathrm{S}\circ \mathrm{R}=\varnothing$ ■

می‌خواهیم دامنه و برد $\mathrm{R}\circ \mathrm{S}$ را به‌دست آوریم.

$$x\in \mathrm{Dom(R\circ S)} \text{ اگر و تنها اگر } \exists z; (x,z)\in (\mathrm{R}\circ \mathrm{S})$$

و بنا به تعریف (۱۸.۸) داریم:

$$(x,z)\in (\mathrm{R}\circ \mathrm{S}) \Longleftrightarrow \exists y; (x,y)\in \mathrm{R} \text{ و } (y,z)\in \mathrm{S}$$

پس $x\in \mathrm{Dom(R\circ S)}$ اگر و تنها اگر وجود داشته باشند z و y به نحوی که $(x,y)\in \mathrm{R}$ و $(y,z)\in \mathrm{S}$.
این عبارت آخر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x,y)\in \mathrm{R} \qquad \text{و} \qquad y\in \mathrm{Dom(S)}$$

بنابراین، $x\in \mathrm{Dom(R\circ S)}$ اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $y\in \mathrm{Dom\ (S)}$ که $(x,y)\in \mathrm{R}$. پس

$$\mathrm{Dom(R\circ S)}=\left\{x\in \mathrm{Dom(R)} : \exists y\in \mathrm{Dom(S)}; (x,y)\in \mathrm{R}\right\}$$

به طریق مشابه می‌توان $\mathrm{Im(R\circ S)}$ را نیز به‌دست آورد.

توجه!
مثال (۴۸.۸) که در زیر می‌آید، به درک این قضیه کمک خواهد کرد.

قضیه ۲۰.۸: برای هر دو رابطهٔ R و S داریم:

آ. $\mathbf{Dom(R\circ S)}=\left\{x\in \mathbf{Dom(R)} : \exists y\in \mathbf{Dom(S)}; (x,y)\in \mathbf{R}\right\}$

ب. $\mathbf{Im(R\circ S)}=\left\{y\in \mathbf{Im(S)} : \exists x\in \mathbf{Im(R)}; (x,y)\in \mathbf{S}\right\}$

اثبات: آ. به مطالب پیش از قضیه رجوع کنید. ب. مشابه مورد (آ) است؛ با دقت عمل کنید. ■

مثال ۴۸.۸: فرض کنید $\mathrm{R}=\{(۱,۵),(۲,x)\}$ و $\mathrm{S}=\{(۳,۱),(۵,۲)\}$. مقدار x را چنان بیابید که:

آ. $\mathrm{Dom(R\circ S)}=\{۱,۲\}$ ب. $\mathrm{Im(R\circ S)}=\{۲\}$

ج. $\mathrm{Im(R\circ S)}=\{۱\}$ د. $\mathrm{Im(S\circ R)}=\{۵\}$

پاسخ: آ. $x=۵$ یا $x=۳$ ب. $x=۵$ ج. جواب ندارد د. $x=۵$ ■

۵.۵.۸ معکوسِ رابطه

معکوس رابطهٔ R را با نماد R^{-1} نشان داده و منظور از آن رابطه‌ای است که دقیقاً عکس R عمل می‌کند؛ یعنی aRb اگر و تنها اگر $bR^{-1}a$. جای a و b در R^{-1} عکس شده است و R^{-1} با عکس شدنِ R به دست می‌آید.

$(a,b)\in R$ اگر و تنها اگر $(b,a)\in R^{-1}$.

یا به عبارتی:

تعریف ۱۹.۸: **رابطهٔ $R^{-1}=\{(x,y):(y,x)\in R\}$ را معکوس R خوانیم.**

مثال ۴۹.۸: معکوس هر یک از رابطه‌های زیر را بیابید

آ. $\{(1,2),(3,1)\}$ ب. $\{(1,1),(2,2)\}$ ج. $\{(1,2),(2,2),(2,1)\}$ د. $\varnothing$

پاسخ: آ. $\{(2,1),(1,3)\}$ ب. $\{(1,1),(2,2)\}$ ج. $\{(2,1),(2,2),(1,2)\}$ د. $\varnothing$ ■

مثال ۵۰.۸: نشان دهید برای هر رابطه‌ای مانند **R** داریم:

آ. $Im(R^{-1})=Dom(R)$ ب. $Dom(R^{-1})=Im(R)$

ج. $(R_1\cup R_2)^{-1}=(R_1)^{-1}\cup(R_2)^{-1}$ د. $(R_1\cap R_2)^{-1}=(R_1)^{-1}\cap(R_2)^{-1}$

پاسخ: موارد (آ) و (ب) به‌سادگی اثبات می‌شوند.

ج.

$$\begin{aligned}(x,y)\in(R_1\cup R_2)^{-1}&\Longleftrightarrow(y,x)\in R_1\cup R_2\\&\Longleftrightarrow\big((y,x)\in R_1 \text{ یا } (y,x)\in R_2\big)\\&\Longleftrightarrow\big((x,y)\in R_1^{-1} \text{ یا } (x,y)\in R_2^{-1}\big)\\&\Longleftrightarrow(x,y)\in(R_1^{-1}\cup R_2^{-1})\end{aligned}$$

د. مشابه مورد (ج) اثبات می‌شود. ■

قضیه ۲۱.۸: **برای هر دو رابطهٔ R و S داریم $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$**

اثبات: آ.

$$\begin{aligned}(x,y)\in(R\circ S)^{-1}&\Longleftrightarrow(y,x)\in R\circ S\Longleftrightarrow\exists z(yRz \text{ و } zSx)\\&\Longleftrightarrow\exists z;(xS^{-1}z \text{ و } zR^{-1}y)\\&\Longleftrightarrow(x,y)\in(S^{-1}\circ R^{-1})\end{aligned}$$

■

ساده اما مهم
این مثال بسیار آموزنده است. مطالب پیچیده را در مثال‌های ساده بهتر می‌توان آموخت.

مثال ۵۱.۸: در هر یک از موارد زیر R^{-1}، $R^{-1}|_D$ و $R^{-1}(D)$ را به‌دست آورید.

آ. $R=\{(1,2),(3,5),(6,3)\}$ ؛ $D=\{2,5\}$

ب. $R=\{(1,5),(2,3),(5,4),(3,6)\}$ ؛ $D=\{1,2,5,3\}$

پاسخ: آ. $R^{-1}=\{(2,1),(5,3),(3,6)\}$ پس $R^{-1}|_{\{2,5\}}=\{(2,1),(5,3)\}$ و $R^{-1}(\{2,5\})=\{1,3\}$

ب. $R^{-1}=\{(5,1),(3,2),(4,5),(6,3)\}$ پس $R^{-1}|_{\{1,2,5,3\}}=\{(5,1),(3,2)\}$
و $R^{-1}(\{1,2,5,3\})=\{1,2\}$ ■

تمرین:

(۳۵) رابطه‌های زیر را روی مجموعهٔ $A=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$ با نوشتن اعضا مشخص کنید.

آ. $x<y$ ب. $x.y=۲$ ج. $x.y=۰$

د. $x^۲+y^۲=|x+y|$ هـ. $x+y=|x+y|$ و. $|x|-|y|=|x-y|$

ز. $|x|<|y|$ ح. $\big||x|-|y|\big|=|x-y|$ ط. $|x-y|=x+y$

(۳۶) دامنه و برد رابطه‌های زیر را به‌دست آورید.

آ. $y=x+۳$ روی $\mathbb{N}$ ب. $x=y+۴$ روی $\mathbb{Z}$ ج. $|x|=y$ روی $\mathbb{Z}$

د. $|x|=|y|+۴$ روی $\mathbb{Z}$ هـ. $|x.y|=x.y$ روی $\mathbb{Z}$ و. $\frac{x}{y}=۳$ روی $\mathbb{Z}$

ز. $x.y=۶$ روی $\mathbb{Z}$ ح. $x+y=۵$ روی $\mathbb{Z}$

(۳۷) از رابطه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

آ. $R:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Z}$ به‌نحوی‌که: xRy اگر و تنها اگر $|x|+|y|=۲$

ب. $R:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{N}$ به‌نحوی‌که: xRy اگر و تنها اگر $|x|+|y|=۲$

ج. $R:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ به‌نحوی‌که: xRy اگر و تنها اگر $|x|+|y|=۲$

د. $R:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ به‌نحوی‌که: xRy اگر و تنها اگر $x.y<x+y$

هـ. $R:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ به‌نحوی‌که: xRy اگر و تنها اگر $x.y=۱$

و. $R:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{N}$ به‌نحوی‌که: xRy اگر و تنها اگر $x.y=۱$

ز. $R:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Z}$ به‌نحوی‌که: xRy اگر و تنها اگر $x.y=۱$

(۳۸) رابطه‌های زیر را برای $R_۱=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴)\}$ و $R_۲=\{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۴),(۴,۳)\}$ به‌دست آورید.

آ. $R_۱\cap R_۲$ ب. $R_۱\cup R_۲$ ج. $R_۱-R_۲$ د. $R_۱\triangle R_۲$

(۳۹) درستی یا نادرستی موارد زیر را برای $R=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۱)\}$ و $S=\{(۱,۲),(۳,۱),(۲,۳)\}$ بررسی کنید.

آ. $\mathrm{Dom}(R_۱\cup R_۲)=\mathrm{Dom}(R_۱)\cup\mathrm{Dom}(R_۲)$ ب. $\mathrm{Im}(R_۱\cup R_۲)=\mathrm{Im}(R_۱)\cup\mathrm{Im}(R_۲)$

ج. $\mathrm{Dom}(R_۱\cap R_۲)=\mathrm{Dom}(R_۱)\cap\mathrm{Dom}(R_۲)$ د. $\mathrm{Im}(R_۱\cap R_۲)=\mathrm{Im}(R_۱)\cap\mathrm{Im}(R_۲)$

(۴۰) رابطه R را چنان مثال بزنید که:

آ. $\mathrm{Dom}(R)=\varnothing$

ب. $\mathrm{Dom}(R)=\mathrm{Im}(R)=\{۱,۲\}$ و $R=\mathrm{Dom}(R)\times\mathrm{Im}(R)$

ج. $\mathrm{Dom}(R)=\mathrm{Im}(R)=\{۱,۲\}$ و $R\neq\mathrm{Dom}(R)\times\mathrm{Im}(R)$

د. $\mathrm{Dom}(R)=\mathrm{Im}(R)=\{۱\}$ و $R\neq\mathrm{Dom}(R)\times\mathrm{Im}(R)$

(۴۱) نشان دهید:

آ. اگر $R:A\longrightarrow B$ آن‌گاه $\mathrm{Dom}(R)\subset A$ ب. اگر $R:A\longrightarrow B$ آن‌گاه $\mathrm{Im}(R)\subset B$

ج. $R\subset\mathrm{Dom}(R)\times\mathrm{Im}(R)$ د. اگر $\mathrm{Dom}(R)=\varnothing$ آن‌گاه $R=\varnothing$

هـ. اگر $\mathrm{Im}(R)=\varnothing$ آن‌گاه $R=\varnothing$ و. $\mathrm{Dom}(R)=\varnothing$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Im}(R)=\varnothing$

(۴۲) فرض کنید $R_۱:A_۱\longrightarrow B_۱$، $R_۲:A_۲\longrightarrow B_۲$ و $R_۱=R_۲$. درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. $A_۱=A_۲$ ب. $B_۱=B_۲$

ج. $\mathrm{Im}(R_۱)=\mathrm{Im}(R_۲)$ د. $\mathrm{Dom}(R_۱)=\mathrm{Dom}(R_۲)$

هـ. $R_۱=\mathrm{Dom}(R_۱)\times\mathrm{Im}(R_۱)$

(۴۳) درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. $\mathrm{Dom}(R_1 \cap R_2) \subset \mathrm{Dom}(R_1) \cap \mathrm{Dom}(R_2)$

ب. $\mathrm{Dom}(R_1) \cap \mathrm{Dom}(R_2) \subset \mathrm{Dom}(R_1 \cap R_2)$

ج. $\mathrm{Im}(R_1 \cap R_2) \subset \mathrm{Im}(R_1) \cap \mathrm{Im}(R_2)$

د. $\mathrm{Im}(R_1) \cap \mathrm{Im}(R_2) \subset \mathrm{Im}(R_1 \cap R_2)$

ه. $\mathrm{Dom}(R_1 - R_2) \subset \mathrm{Dom}(R_1) - \mathrm{Dom}(R_2)$

و. $\mathrm{Dom}(R_1) - \mathrm{Dom}(R_2) \subset \mathrm{Dom}(R_1 - R_2)$

ز. $\mathrm{Im}(R_1 - R_2) \subset \mathrm{Im}(R_1) - \mathrm{Im}(R_2)$

ح. $\mathrm{Im}(R_1) - \mathrm{Im}(R_2) \subset \mathrm{Im}(R_1 - R_2)$

(۴۴) رابطه R و مجموعه‌های D و E را چنان مثال بزنید که $R(D \cap E) \neq R(D) \cap R(E)$.

(۴۵) با فرض $R = \{(1,2), (3,4)\}$، $S = \{(3,1), (4,2)\}$ و $T = \{(2,3), (4,1)\}$ هر یک از رابطه‌های زیر را به‌دست آورید.

آ. $R \circ S$ ب. $S \circ R$ ج. $S \circ T$

د. $T \circ S$ ه. $R \circ T$ و. $T \circ R$

ز. $R^{-1} \circ S^{-1}$ ح. $S^{-1} \circ R^{-1}$ ط. $S^{-1} \circ T^{-1}$

ی. $T^{-1} \circ S^{-1}$ ک. $R \circ (S \circ T)$ ل. $(R \circ S) \circ T$

(۴۶) اگر R و S به ترتیب رابطه‌های $|x| + |y| = 2$ و $|x - y| = 2$ روی $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ باشند، هر یک از رابطه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

آ. R ب. S ج. R^{-1}

د. S^{-1} ه. $R \cap S$ و. $R \cup S$

ز. $R \circ S$ ح. $S \circ R$ ط. $R|_{\{-1,1\}}$

ی. $S|_{\{-1,1\}}$ ک. $R(\{-1,1\})$ ل. $S(\{-1,1\})$

م. $R^{-1}|_{\{-1,1\}}$ ن. $R^{-1}(\{-1,1\})$ س. $R|_{\{0,1,2\}}$

(۴۷) نشان دهید:

آ. اگر $\mathrm{Im}(S) \subset \mathrm{Dom}(R)$ آنگاه $\mathrm{Dom}(R) = \mathrm{Dom}(R \circ S)$

ب. اگر $\mathrm{Im}(R) \subset \mathrm{Dom}(S)$ آنگاه $\mathrm{Im}(R \circ S) = \mathrm{Im}(S)$

(۴۸) با فرض اینکه R رابطه‌ای از A به B است، درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. $\mathrm{Dom}(R^{-1} \circ R) = \mathrm{Im}(R)$ ب. $\mathrm{Dom}(R \circ R^{-1}) = \mathrm{Dom}(R)$

ج. $\mathrm{Im}(R^{-1} \circ R) = \mathrm{Im}(R)$ د. $\mathrm{Im}(R \circ R^{-1}) = \mathrm{Dom}(R)$

(۴۹) رابطهٔ R را چنان مثال بزنید که $\mathrm{Dom}(S \circ R) = \mathrm{Dom}(R)$ اما $\mathrm{Im}(S) \not\subset \mathrm{Dom}(R)$.

(۵۰) درستی عبارات زیر را برای هر دو مجموعهٔ دلخواه D و E ثابت کنید.

آ. $R(D \cup E) = R(D) \cup R(E)$ ب. $R^{-1}(D \cup E) = R^{-1}(D) \cup R^{-1}(E)$

ج. $R(D \cap E) \subset R(D) \cap R(E)$ د. $R^{-1}(D \cap E) \subset R^{-1}(D) \cap R^{-1}(E)$

ه. $(R \cup S)(D) = R(D) \cup S(D)$ ؛ که در آن R و S رابطه هستند.

(۵۱) نشان دهید:

آ. $(R^{-1})^{-1} = R$ ب. $(R \cap S)(X) = R(X) \cap S(X)$

(۵۲) نشان دهید:

آ. $S \circ (R|_D) = (S \circ R)|_D$ ب. $(S|_{R(D)}) \circ (R|_D) = (S \circ R)|_D$

فصل ۹

هندسه تحلیلی

پیش از این از نمودار ون به‌عنوان نمودِ تصویری مجموعه‌ها و از محور اعداد برای نمایشِ بصری اعداد بر یک خط راست استفاده کردیم. در این فصل با دستگاه مختصات به‌عنوان نمایشِ بصریِ حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه از اعداد آشنا می‌شویم و نمایش یک رابطه بر آن را نمودار آن رابطه می‌خوانیم.

در محور اعداد، می‌توانستیم با استفاده از اعدادی که به دو نقطه اختصاص می‌یابند، فاصلهٔ آن دو را محاسبه کنیم. در این فصل خواهیم دید که می‌توان از مختصاتی که به دو نقطه از صفحه نسبت داده می‌شود، به فاصلهٔ آن دو پی بُرد. تشخیص فاصله، تشخیص زاویه را نیز به‌دنبال دارد و عامل اصلی ارتباط بین دستگاه مختصات و هندسه است. به بررسی مسائل هندسی با استفاده از دستگاه مختصات، هندسه تحلیلی گفته می‌شود.

توجه!

قبل از مطالعهٔ این فصل، مطالب پیوست (آ)، با عنوان «نیم‌نگاهی به هندسه» را مطالعه کرده و بیاموزید.

برای مطالعهٔ دقیق این فصل به اندکی آشنایی با هندسه نیاز داریم. مطالب مورد نیاز در پیوست (انتهای کتاب) به اختصار ارائه شده‌اند.

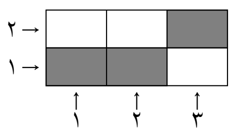
۱.۹ دستگاه مختصات دکارتی

$\{\ (a,۱)\ ,\ (b,۱)\ ,\ (c,۱)$
$(a,۲)\ ,\ (b,۲)\ ,\ (c,۲)\ \}$

برای نمایش $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ که $\mathrm{A}=\{a,b,c\}$ و $\mathrm{B}=\{۱,۲\}$ می‌توان به نگارش مقابل از اعضای $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ توجه نمود. نمایش تصویری یک مجموعه را «نمودار» آن مجموعه گوییم.

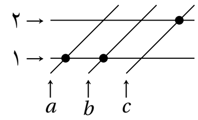
۲ →	$(a,۲)$	$(b,۲)$	$(c,۲)$
۱ →	$(a,۱)$	$(b,۱)$	$(c,۱)$
	↑ a	↑ b	↑ c

به‌طور مشابه می‌توان جدولی رسم کرد که هر ستون آن به عضوی از A و هر سطر آن به عضوی از B اشاره داشته باشد. در این صورت هر خانه از این جدول که در ستون مربوط به $x\in\mathrm{A}$ و در سطر مربوط به $y\in\mathrm{B}$ قرار دارد، می‌تواند نماینده‌ای برای زوج مرتب $(x,y)\in\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ باشد. در شکل مقابل چنین جدولی برای $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ رسم شده است که در آن $\mathrm{A}=\{a,b,c\}$ و $\mathrm{B}=\{۱,۲\}$.



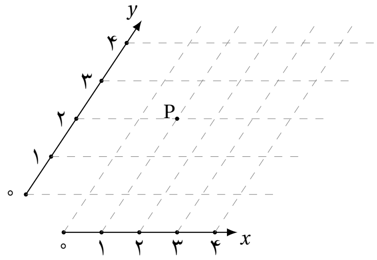
برای ارائه نموداری (نمایشی تصویری) از $\mathrm{R}=\{(۱,۱),(۲,۱),(۳,۲)\}\subseteq\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ می‌توان در جدول مربوط به $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$، خانه‌های مربوط به اعضای R را رنگ‌آمیزی نمود.

می‌توانیم به‌جای سطرها و ستون‌ها از دو دسته خطوط موازی استفاده کنیم. به‌عبارتی به اعضای A یک دسته خطوط موازی چنان اختصاص می‌دهیم که به هر یک از خطوط، یک عضوِ A و به هر عضوِ A نیز یک خط اختصاص یافته باشد. به‌طور مشابه به اعضای B نیز یک دسته خطوط موازی متناظر می‌کنیم که هر عضو B با یکی از آنها متناظر باشد. کافی است این دو دسته خطوط با هم متقاطع باشند، در این‌صورت می‌توان هر یک از نقاط برخورد این دو دسته خطوط را با یکی از اعضای $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ متناظر دانست. به‌طور مثال نقطهٔ برخورد خطِّ مربوط به $a\in\mathrm{A}$ و خطِّ مربوط به $۱\in\mathrm{B}$ را با



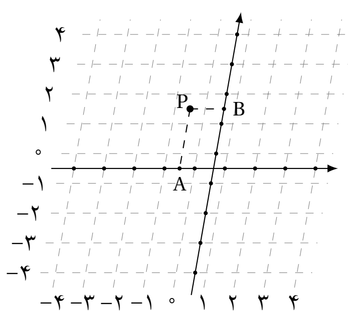
زوج مرتب $(a,۱)$ متناظر دانسته و نمایشی برای آن درنظر می‌گیریم.

محور اعداد نمایش تصویری (نمودار) مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{R}$ است. بنابراین، می‌توان از ترکیب محور اعداد و روش فوق، ایده‌ای برای نمایش تصویری حاصل‌ضرب دکارتی آنها ساخت و بدین ترتیب، نموداری برای آنها ارائه کرد.



به‌طور مثال برای نمایش $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ می‌توان دو محور اعداد طبیعی به‌صورت ناموازی درنظر گرفت و از هر نقطه روی یکی خطی موازی با دیگری رسم نمود. در این صورت هر نقطه‌ای مانند P که محل برخورد دو تا از این خطوط است، با زوج مرتبی مانند $(۱,۲)$ متناظر خواهد بود.

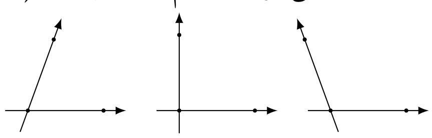
مرسوم است محوری که در نمایش زوج مرتب (x,y) مقدار مؤلفهٔ اول را مشخص می‌سازد، «محورِ xها» یا «محورِ طول‌ها» و محوری که مقدار مؤلفهٔ دوم را مشخص می‌کند، «محورِ yها» یا «محورِ عرض‌ها» نامند.



برای نمایش $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ می‌توان از دو محور اعداد صحیح ناموازی استفاده کرد و از هر نقطه بر یکی، خطی موازی با دیگری رسم نمود. نقاط برخورد با اعضای $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ متناظر خواهند بود. برای راحتی بیشتر محورها را چنان رسم می‌کنیم که نقاط صفر آنها بر یکدیگر منطبق باشد. در این صورت هر محور، خط متناظر با عدد صفر بر محور دیگر است و زوج مرتبِ $(۰,۲)$ به نقطهٔ ۲ بر محور yها و زوج مرتب مرتبِ $(-۱,۰)$ به نقطهٔ -۱ بر محور xها اشاره دارد.

نقطه‌ای مانند P در شکل فوق که محل برخورد هیچ دو خطی نیست، به هیچ زوج مرتبی از $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ اشاره ندارد. پس، اگر از نقطه‌ای دلخواه مانند P دو خط موازی محورها رسم کنیم تا محورهای x و y را به‌ترتیب در نقاط A و B قطع کنند، الزاماً اعدادی صحیح مانند a و b وجود ندارند که به نقاط A و B اختصاص یابند. از آنجا که به هر نقطه از خط (محور اعداد) می‌توان یک عدد حقیقی نسبت داد، اگر محورها را محور اعداد حقیقی در نظر بگیریم، حتماً $a,b\in\mathbb{R}$ وجود دارند که (a,b) به نقطهٔ P اشاره کند. اعداد a و b را به‌ترتیب، مختص‌های x و y نقطهٔ P و زوج مرتبِ (a,b) را مختصاتِ P می‌خوانیم. همچنین، به ساختاری که به هر نقطه از صفحه یک مختصات نسبت دهد دستگاه مختصات گوییم. معمولاً از $\mathrm{P}=(a,b)$ برای بیان «نقطهٔ P دارای مختصات (a,b) است» استفاده می‌شود.

در شکل زیر نقاط $(۰,۱)$، $(۱,۰)$ و $(۰,۰)$ در دستگاه‌های مختصات متفاوت نشان داده شده‌اند. می‌بینیم که مثلث‌هایی که با این نقاط در دستگاه‌های مختلف ساخته می‌شوند، با هم برابر نیستند (بر هم قابل انطباق نیستند). علت این تفاوت را تفاوت در زاویه‌ای که محورها با یکدیگر می‌سازند می‌یابیم. بنابراین ترجیح می‌دهیم زاویه‌ای خاص را مدنظر قرار دهیم.



در صورتی که محورهای مختصات بر یکدیگر عمود بوده و از واحدی یکسان استفاده شود، می‌توان از قضیه فیثاغورث[1] برای محاسبهٔ فاصلهٔ دو نقطه براساس مختصات آنها استفاده کرد که در بخش‌های بعد با آن آشنا خواهیم شد. لذا از محورهای متعامد (عمود برهم) استفاده می‌کنیم. این دستگاه

[1] به فصل «اعشار و اعداد حقیقی» رجوع کنید.

مختصات با توجه به امکان یافتن فاصله، در بررسی مسائل هندسی کاربرد بیشتری دارد. به بررسی مسائل در این دستگاه مختصات، هندسه تحلیلی گفته می‌شود. زیرا به‌جای استفاده از اصول هندسی، از قواعد بین اعداد، چندجمله‌ای‌ها و ... استفاده می‌شود. البته توانمندی‌های بیشتر این دستگاه مختصات را می‌توانیم در کتاب‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال ببینیم.

رنه دکارت اولین کسی نبود که از چنین دستگاه مختصاتی استفاده می‌کرد؛ اما اولین کسی بود که قابلیت‌های بالای استفاده از چنین دستگاه مختصاتی را به جهانیان نشان داد؛ به همین سبب این دستگاه مختصات به دستگاه مختصات دکارتی معروف است. البته دستگاه‌های مختصات دیگری نیز مرسوم است که از آن جمله می‌توان به دستگاه مختصات قطبی، دستگاه مختصات کروی و دستگاه مختصات استوانه‌ای اشاره کرد. دو دستگاه اخیر، ما را از صفحه به فضا برده و در هندسه تحلیلی فضایی نقش به‌سزایی دارند.

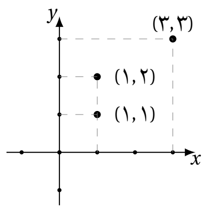
مثال ۱.۹: هر یک از نقاط زیر را بر دستگاه مختصات دکارتی مشخص نمایید.

آ. $(\circ,\circ)$ ب. $(\circ,۳)$ ج. $(\circ,-۳)$

د. $(۲,۳)$ ه. $(۲\div۲,۳\div۲)$ و. $(۲+۱,۳)$

پاسخ: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۱.۱.۹ نمودار رابطه



با توجه به مطالب فوق، می‌توان هر نقطه را بر یک دستگاه مختصات (دکارتی) نشان داد، پس می‌توان مجموعه‌ای از نقاط را نیز بر آن مشخص کرد. به نمایش یک رابطه بر یک دستگاه مختصات، نمودار آن گفته می‌شود. شکل مقابل، نمودار رابطهٔ $R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۳,۳)\}$ را نشان می‌دهد.

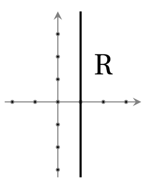
مثال ۲.۹: نمودار رابطه‌های زیر را رسم کنید.

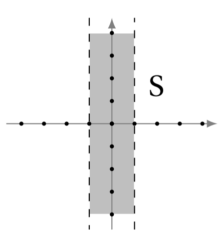
آ. $R=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\ x+y=۲\}$ ب. $R=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}:\ |x|+|y|=۲\}$

پاسخ: به نوشتن رابطه‌ها با اعضای آنها اکتفا کرده و نمایش آنها را به خواننده واگذار می‌کنیم.

آ. $R=\{(\circ,۲),(۱,۱),(۲,\circ)\}$

ب. $R=\{(\circ,۲),(\circ,-۲),(۱,۱),(-۱,۱),(۱,-۱),(-۱,-۱),(۲,\circ),(-۲,\circ)\}$ ■





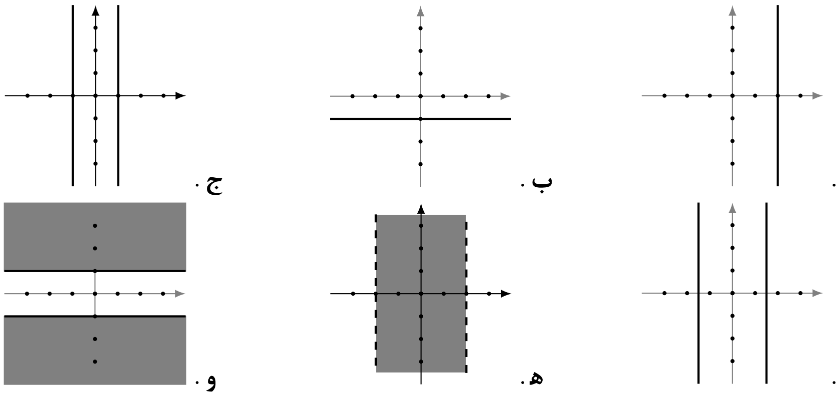
شکل مقابل نمودار رابطهٔ $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:\ x=۱\}$ را نشان می‌دهد که «رابطهٔ $x=۱$ روی $\mathbb{R}$» یا به‌اختصار «رابطهٔ $x=۱$» خوانده می‌شود. به‌طور مشابه رابطهٔ $|x|<۱$ به‌معنای $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:\ |x|<۱\}$ می‌باشد و دارای نمودار مقابل است. توجه داریم که خطوط $x=۱$ و $x=-۱$ را به‌صورت خط‌چین نشان داده‌ایم و این یعنی این نقاط عضو نمودار نیستند.

مثال ۳.۹: نمودار رابطه‌های زیر را رسم کنید.

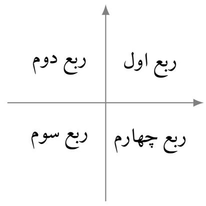
آ. $x=۲$ ب. $y=-۱$ ج. $|x|=۱$

د. $|y|=۱/۵$ ه. $|x|<۲$ و. $|y|\geqslant۱$

پاسخ: در پاسخ برخی موارد به تفاوت بین نقطه‌چین و خط مشکی توجه نمایید. نقاط روی خط‌چین عضو نمودار نیستند اما نقاط روی خطوط پُرْرَنگ عضو نمودار هستند.

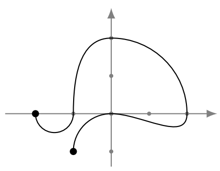


■



همان‌طور که مشاهده می‌شود، محورهای مختصات، صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند که آنها را مطابق شکل، ربع‌های اول، دوم، سوم و چهارم می‌نامیم. مشاهده می‌شود که ربع اول، به همه زوج‌مرتب‌هایی گفته می‌شود که هر دو مؤلفهٔ آنها مثبت باشد. به‌عبارتی برای هر نقطهٔ A با مختصات (x, y) داریم:

- $A = (x, y)$ در ربع اول است اگر $x, y > 0$.
- $A = (x, y)$ در ربع دوم است اگر $x < 0 < y$.
- $A = (x, y)$ در ربع سوم است اگر $x, y < 0$.
- $A = (x, y)$ در ربع چهارم است اگر $y < 0 < x$.



مثال ۴.۹: فرض کنید R رابطه‌ای با نمودار مقابل باشد. نمودار هر یک از رابطه‌های زیر را مشخص کنید.

آ. $R_1 = \{(x, y) \in R : x \leqslant 0\}$

ب. $R_2 = \{(x, y) \in R : x > 0\}$

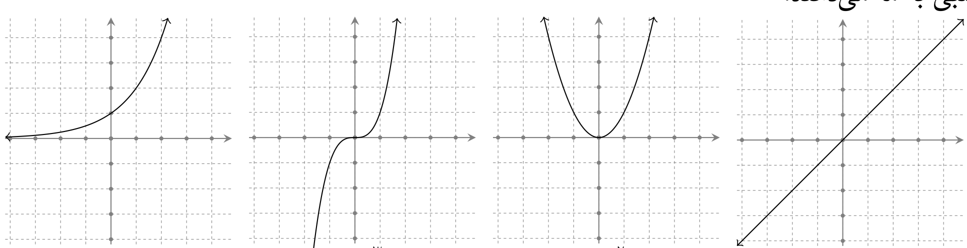
ج. $R_3 = \{(x, y) \in R : x, y \geqslant 0\}$ د. $R_4 = \{(x, y) \in R : x \geqslant 0$ و $y \leqslant 0\}$

پاسخ: به نقاط توپُر و توخالی توجه کنید. نقاط توپُر عضو نمودار بوده و نقاط توخالی عضو نمودار نیستند.

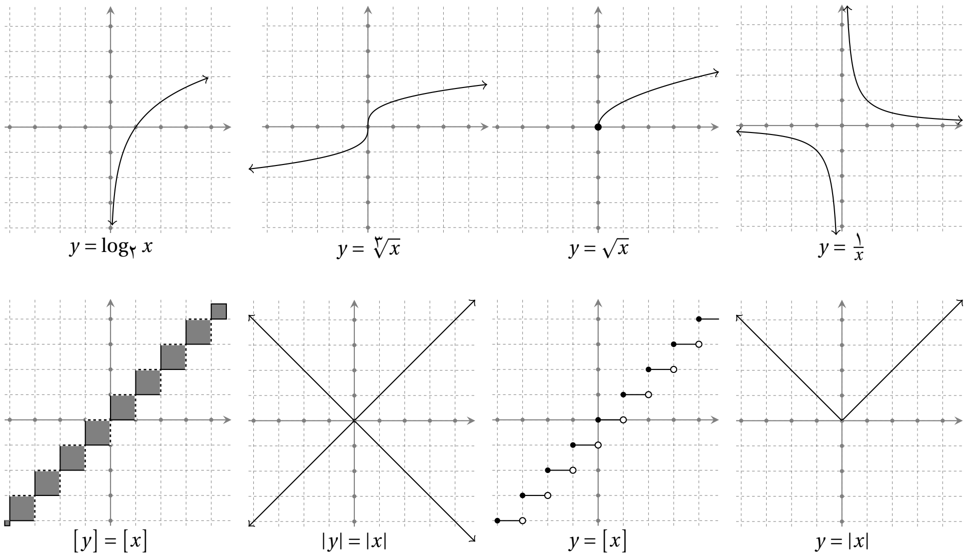
موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

در ادامه نمودار چند معادله را رسم کرده و در ادامه با آنها بیشتر آشنا می‌شویم. معادلات درک شهودی مناسبی به ما می‌دهند.

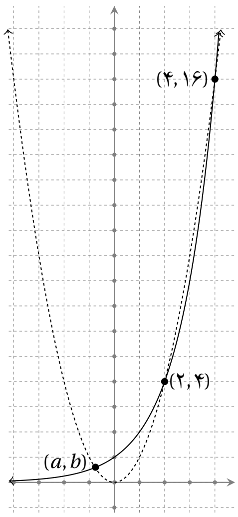
توجه! .... توجه!
انتظار نداریم خوانندگان بتوانند این نمودارها را رسم کنند. اما انتظار داریم بتوانند در ادامهٔ فصل از آنها استفاده کنند.



$y = x$ $y = x^2$ $y = x^3$ $y = 2^x$



علامت پیکان در نمودارهای فوق از ادامه داشتن نمودار حکایت دارد. همچنین، نقاط توخالی، برای تأکید بر «نبودنِ» آن نقاط بر نمودار بوده و نقاط توپُر نیز برای تأکید بر «بودنِ» آن نقاط بر نمودار هستند. نمودار $[x] = [y]$، مربع‌های توپُری است که اضلاع سمت راست و بالایی آنها که با نقطه‌چین‌های سیاه و سفید مشخص شده‌اند و بر نمودار قرار ندارند؛ هرچند تمامی نقاط درون مربع‌ها بر نمودار واقع‌اند.

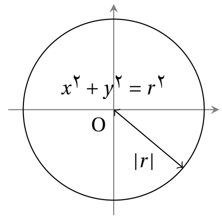


نمودارها می‌توانند در حل بسیاری معادلات و نامعادلات نیز به ما کمک کنند. به طور مثال، معادلهٔ $x^۲ = ۲^x$ دارای جواب‌های $x = ۲$ و $x = ۴$ است؛ چون $۲^۲ = ۲^۲$ و $۲^۴ = ۴^۲$. آیا این معادله فقط همین دو جواب را دارد؟ آیا جواب دیگری ندارد؟
با رسم نمودارهای $y = x^۲$ و $y = ۲^x$ بر یک دستگاه مختصات، شکل مقابل به‌دست می‌آید که در آن دو نمودار یکدیگر را در سه نقطه قطع کرده‌اند. دوتای آنها دارای مختصات $(۲, ۴)$ و $(۴, ۱۶)$ هستند. نقطهٔ برخورد سوم نشان می‌دهد علاوه بر $x = ۲$ و $x = ۴$، جواب دیگری نیز وجود دارد. چون، اگر این نقطه دارای مختصات (a, b) باشد، آنگاه $b = ۲^a$، چون بر نمودار $y = ۲^x$ قرار دارد و همچنین داریم $b = a^۲$؛ چون بر نمودار $y = x^۲$ قرار دارد. بنابراین، $a^۲ = ۲^a$. هرچند نمی‌توانیم مقدار a را با روشهای مقدماتی بیابیم، اما از روی نمودار می‌توانیم مطمئن باشیم که $a \in (-۱, -۰/۵)$.

مثال ۵.۹: معادلات و نامعادلات زیر را با استفاده از نمودارهای فوق حل کنید.

آ. $x^۲ < \dfrac{۱}{x}$ ب. $\sqrt[۳]{x} \geq \dfrac{۱}{x}$ ج. $۲^x = x$ د. $۲^x = \log_۲ x$

پاسخ: آ. جواب این معادله، بازهٔ $(۰, ۱)$ است. (به‌نمودارهای $y = x^۲$ و $y = \dfrac{۱}{x}$ توجه کنید.)
ب. جواب این نامعادله $[-۱, ۰) \cup [۱, +\infty)$ است. (به‌نمودارهای مربوطه توجه کنید.)
ج. دو نمودار یکدیگر را قطع نمی‌کنند، پس معادله جواب ندارد.
د. نمودارها یکدیگر را قطع نمی‌کنند، پس معادله جواب ندارد. ■



نمودار $x^۲ + y^۲ = ۱$ دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ (واحد طول). در بخش‌های آینده به طور دقیق‌تر به این نمودار خواهیم پرداخت، اما در بخش تبدیلات صرفاً از آن استفاده خواهیم کرد. همچنین نمودار معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = r^۲$ دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع $|r|$.

تمرین:

(۱) نمودار رابطه‌های زیر را رسم کنید.

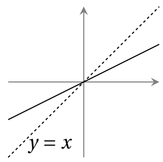
آ. $R = \{(۰, ۰), (-۱, ۲), (۲, -۱)\}$ ب. $R = \{(۰/۵, ۲), (-۱, -۱/۵), (۱/۵, -۲)\}$

(۲) رابطه‌های زیر روی $\mathbb{Z}$ تعریف شده‌اند. نمودار آنها را رسم کنید.

آ. $x = y$ ب. $x < y$ ج. $xy > ۰$ د. $xy < ۰$

هـ. $۰ < xy \leq ۳$ و. $-۳ \leq xy < ۰$ ز. $|x| + |y| = ۱$ ح. $|x| + |y| = ۲$

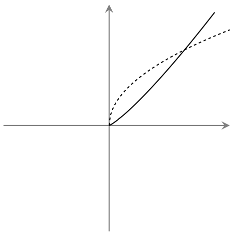
ط. $|x| + |y| \leq ۲$ ی. $|x| + |y| \leq ۴$



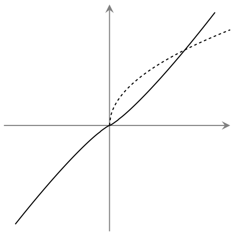
(۳) نمودار مقابل می‌تواند نمودار کدام‌یک از روابط زیر باشد؟

آ. $y = ۲x$ ب. $y = \frac{x}{۲}$ ج. $y = -۲x$ د. $y = \frac{-x}{۲}$

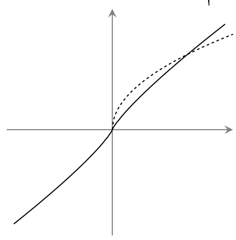
(۴) کدام‌یک از نمودارهای زیر می‌تواند نمودار $y = x^{۱/۲}$ باشد.



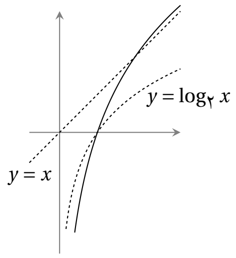
ج.



ب.



آ.



(۵) با توجه به نمودارهای $y = \log_۲ x$ و $y = x$ که با نقطه‌چین رسم شده‌اند، شکل مقابل نمودار کدام یک از معادلات زیر را نشان می‌دهد؟

آ. $y = \log_۲ ۲x$ ب. $y = \log_۴ x$

ج. $y = \log_{۰/۵} x$ د. $y = \log_{\frac{۱}{۴}} x$

(۶) نمودار معادلات زیر را رسم کنید.

آ. $x^۲ + y^۲ = ۴$ ب. $x^۲ + y^۲ = \frac{۱}{۴}$ ج. $x^۲ + y^۲ = ۲$

(۷) نمودار هر یک از رابطه‌های زیر را رسم کنید.

آ. $\{(x, y) : x^۲ + y^۲ = ۴ \text{ و } x, y \geq ۰\}$ ب. $\{(x, y) : x^۲ + y^۲ = ۴ \text{ و } x, y > ۰\}$

ج. $\{(x, y) : x^۲ + y^۲ = ۴ \text{ و } x < ۰ < y\}$ د. $\{(x, y) : x^۲ + y^۲ = ۴ \text{ و } x \leq ۰ \leq y\}$

۲.۹ تبدیلات

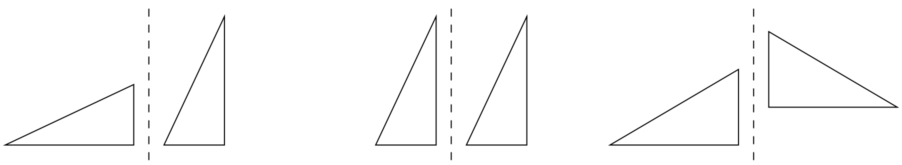
در این بخش سعی می‌کنیم از نمودار رابطه‌ای مانند R نمودار رابطه‌ای دیگر را به‌دست آوریم. بدین ترتیب، با استفاده از نمودار چند رابطه خاص می‌توانیم نمودار روابط بیشتری را به‌دست آوریم. در اولین قدم با تقارن‌های محوری و مرکزی آشنا خواهیم شد و سپس با استفاده از آن به تأثیر قدرمطلق بر نمودار خواهیم پرداخت. سپس با تجانس و انتقال آشنا شده و در نهایت به بیان تأثیر جزء صحیح بر نمودار یک رابطه خواهیم پرداخت.

۱.۲.۹ تقارن محوری و تقارن مرکزی

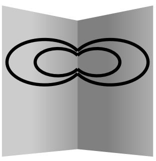
توجه!..........توجه!
به مثال‌های این فصل حتماً پاسخ دهید.

انسان‌ها شباهتی خاص میان یک منظره و عکس آن در یک برکه آب مشاهده نمودند. یک شیء و تصویر آن در آینه نیز همین شباهت را به هم دارند. برای بیان این شباهت می‌گوییم یکی عکس دیگری است. همین شباهت میان دو نیمهٔ راست و چپِ بدن حیوانات و انسان‌ها نیز دیده می‌شود. بدن انسان‌ها و حیوانات و هرچیزی که این‌گونه باشد را متقارن گوییم. به‌زبان ساده اما دقیق‌تر گوییم یک تصویر، متقارن است اگر خطی وجود داشته باشد که دو طرف آن، عکس یکدیگر باشند و معنای عکس را از روی تصویر یک جسم در آینه می‌گیریم. ریاضیدانان این بیان را نادقیق و نامناسب یافتند؛ لذا تصمیم گرفتند آن را به‌نحوی دقیق‌تر و واضح‌تر تعریف کنند.

شخصی می‌گوید: «یک شکل زمانی متقارن است که خطی مانند l وجود داشته باشد که دو طرف آن یکسان باشند». اما در این تعریف معلوم نیست منظور از یکسانی چیست؟ آیا دو مثلث متشابه را یکسان در نظر می‌گیریم؟ آیا اگر یکی عکسی از دیگری در اندازه‌هایی کوچکتر باشد، آن دو را یکسان و درنتیجه کل تصویر را متقارن درنظر می‌گیریم؟ شخصی در پاسخ به این مشکلات می‌گوید دو طرف خط را یکسان و درنتیجه تصویر را زمانی متقارن گوییم که دو طرف خط بر یکدیگر قابل انطباق باشند. اما در هر سه مورد زیر خطی وجود دارد که دو طرف آن بر هم منطبق می‌شوند؛ ولی نمی‌توان آنها را تصویر یکدیگر در آینه دانست؛ لذا آنها را متقارن نمی‌دانیم.

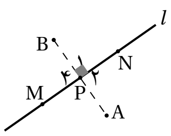


شخصی برای رفع این مشکل عبارت زیر را پیشنهاد می‌کند:



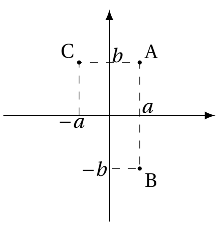
> شکلی که بر صفحه کاغذ کشیده شده باشد را متقارن گوییم اگر بتوان خطی بر آن صفحه رسم کرد که با تا کردن کاغذ تصاویر دو طرف خط بر یکدیگر منطبق شوند. این خط را محور تقارن گوییم.

فرض کنید نقاط A و B نسبت به محور l قرینهٔ یکدیگر باشند و محل برخورد خط گذرنده از نقاط A و B با l را P نامیم. اگر M و N نقطه‌ای (متفاوت با P) بر l باشد داریم:



$$\triangle AMP = \triangle BMP \text{ و } \triangle ANP = \triangle BNP$$

چون، A و B برهم منطبق می‌شوند. بنابراین، $\widehat{P_۱} = \widehat{P_۲}$ و $\widehat{P_۳} = \widehat{P_۴}$ و $|AP| = |BP|$. پس بنا به تساوی زوایای متقابل‌به‌رأس داریم $\widehat{P_۱} = \widehat{P_۳}$ پس $\widehat{P_۱} = \widehat{P_۲} = \widehat{P_۳} = \widehat{P_۴} = ۹۰^\circ$. بنابراین: «اگر نقاط A و B قرینهٔ یکدیگر با محوریت l باشند، خط l عمودمنصف پاره‌خطِ AB است».



مثال ۶.۹: فرض کنید $A = (a, b)$ که در آن $a, b \in \mathbb{R}$. نشان دهید:

آ . نقطهٔ B قرینهٔ A نسبت به محور xهاست اگر و تنها اگر $B = (a, -b)$.

ب . نقطهٔ C قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به محور yهاست اگر و تنها اگر $B = (-a, b)$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود. ■

در دستگاه مختصات هر شکل مجموعه‌ای از نقاط (زوج‌های مرتب) را مشخص می‌سازد که یک رابطه (مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب) است. پس اگر رابطه‌ای که با قرینهٔ نمودار رابطهٔ R نسبت

به محور طول‌ها (xها) مشخص می‌شود را S بنامیم، برای هر نقطهٔ $A=(x,y)$ بر نمودار R، نقطهٔ $B=(x,-y)$ بر نمودار S است.

به‌عبارتی، اگر S قرینهٔ R نسبت به محور طول‌ها (xها) باشد، داریم:

$(x,y)\in R \Longleftrightarrow (x,-y)\in S$

مثال ۷.۹: رابطهٔ S قرینهٔ رابطهٔ R نسبت به محور طول (xها) است. نشان دهید:

$xSy \Longleftrightarrow xR(-y)$

پاسخ: $xR(-y) \Longleftrightarrow (x,-y)\in R \Longleftrightarrow (x,-(-y))\in S \Longleftrightarrow (x,y)\in S \Longleftrightarrow xSy$ ■

به تغییر ادبیات توجه کنید.

بنابراین، رابطهٔ S که قرینهٔ رابطهٔ R نسبت به محور طول‌ها (xها) است به‌صورت زیر مشخص می‌شود.

$$xSy \Longleftrightarrow xR(-y)$$

بنابراین، $S=\{(x,y): xR(-y)\}$ و می‌توان $xR(-y)$ را ضابطهٔ S دانسته و رابطهٔ S را رابطهٔ $xR(-y)$ خواند. مثال‌های زیر کار با این نمادگذاری را ساده‌تر خواهد کرد.

مثال ۸.۹: با فرض اینکه $R=\{(۱,-۲),(-۳,۴)\}$ هر یک از رابطه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

آ. $(-x)Ry$ ب. $xR(-y)$ ج. $(-x)R(-y)$ د. $|x|Ry$
ه. $xR|y|$ و. $(x-۱)Ry$ ز. $(x+۱)Ry$ ح. $xR(y+۱)$
ط. $(۲x)Ry$ ی. $xR(۳y)$ ک. $(x/۳)Ry$ ل. $xR(y/۲)$

پاسخ: آ. $\{(-۱,-۲),(۳,۴)\}$ ب. $\{(۱,۲),(-۳,-۴)\}$
ج. $\{(-۱,۲),(۳,-۴)\}$ د. $\{(۱,-۲),(-۱,-۲)\}$

موارد دیگر به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

مثال ۹.۹: R رابطهٔ $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۳^۲$ روی $\mathbb{R}$ است. نشان دهید:

آ. $(-x)Ry \Longleftrightarrow ((-x)-۱)^۲+(y+۲)^۲=۳^۲$
ب. $(-x)Ry \Longleftrightarrow (x+۱)^۲+(y+۲)^۲=۳^۲$
ج. $xR(-y) \Longleftrightarrow (x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۳^۲$
د. $|x|Ry \Longleftrightarrow (|x|-۱)^۲+(y+۲)^۲=۳^۲$
ه. $(-|x|)R(-y) \Longleftrightarrow (|x|+۱)^۲+(y-۲)^۲=۳^۲$
و. $(x+۱)Ry \Longleftrightarrow x^۲+(y+۲)^۲=۳^۲$
ز. $(x+۱)R(y-۲) \Longleftrightarrow x^۲+y^۲=۳^۲$
ح. $(۲x)Ry \Longleftrightarrow (۲x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۳^۲$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۱۰.۹: فرض کنید T به رابطهٔ $y=x+۲$، S به رابطهٔ $y=-x$ و Q به رابطهٔ $y=|x|$ اشاره کند. نشان دهید برای هر رابطهٔ $R\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ داریم:

آ. $T\circ R$ رابطهٔ $(x+۲)Ry$ است. ب. $S\circ R$ رابطهٔ $(-x)Ry$ است.
ج. $Q\circ R$ رابطهٔ $|x|Ry$ است. د. $R\circ Q^{-۱}$ رابطهٔ $xR|y|$ است.
ه. $R\circ S^{-۱}$ رابطهٔ $xR(y+۲)$ است. و. $Q\circ S$ رابطهٔ $y=-|x|$ است.

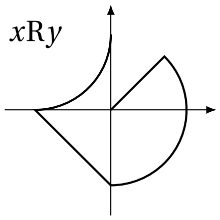
پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

گزاره ۱.۹: **برای هر $\mathrm{R} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ داریم:**

آ . رابطهٔ $(-x)\mathrm{R}y$ قرینهٔ رابطهٔ R نسبت به محور عرض‌ها (محورِ yها) است.

ب . رابطهٔ $x\mathrm{R}(-y)$ قرینهٔ رابطهٔ R نسبت به محور طول‌ها (محور xها) است.

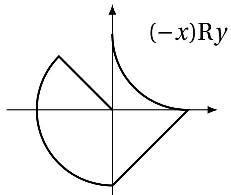
اثبات: با توجه به مطالب فوق واضح است. ■

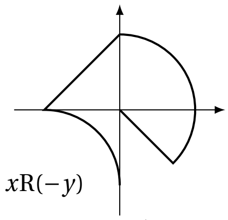


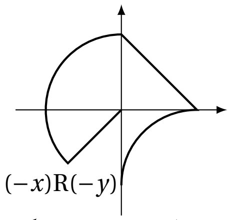
مثال ۱۱.۹: فرض کنید R دارای نمودار روبه‌رو است. نمودار هر یک از رابطه‌های زیر را به‌دست آورید.

آ . $(-x)\mathrm{R}y$ ب . $x\mathrm{R}(-y)$ ج . $(-x)\mathrm{R}(-y)$

پاسخ: موارد (آ) و (ب) به‌سادگی به‌دست می‌آیند.

آ . 

ب . 

ج . 

برای رسم نمودارِ $(-x)\mathrm{R}(-y)$ کافی است رابطهٔ $(-x)\mathrm{R}y$ را S نامیده و رابطهٔ $(-x)\mathrm{R}(-y)$ که با رابطهٔ $x\mathrm{S}(-y)$ برابر است، از نمودار S به‌دست می‌آوریم. ■

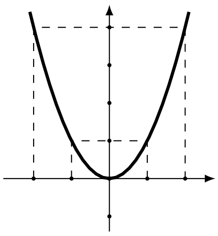
یک رابطه را نسبت به محور xها قرینه گوییم اگر نمودار آن نسبت به محور xها قرینه باشد. نمودار R نسبت به محورِ xها متقارن است اگر قرینهٔ آن خودش باشد. بنابراین داریم:

گزاره ۲.۹: **برای هر $\mathrm{R} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ گوییم:**

آ . R نسبت به محور x ها متقارن است اگر $\forall x, y \in \mathbb{R}\big(x\mathrm{R}y \iff x\mathrm{R}(-y)\big)$

ب . R نسبت به محور yها متقارن است اگر $\forall x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\big(x\mathrm{R}y \iff (-x)\mathrm{R}y\big)$

اثبات: به‌عنوان تمرین به خوانندگان واگذار می شود. ■



به‌وضوح می‌بینیم که رابطهٔ $y = x^۲$ روی $\mathbb{R}$ با نمودار روبرو، نسبت به محور yها متقارن است. همچنین، بدون استفاده از نمودار، می‌توانیم با استفاده از گزارهٔ فوق، به‌شکل زیر استدلال کرده و متقارن بودن آن نسبت به محور yها را ثابت کنیم.

$$x\mathrm{R}y \iff y = x^۲ \iff y = (-x)^۲ \iff (-x)\mathrm{R}y$$

مثال ۱۲.۹: تقارن رابطه‌های زیر نسبت به محور yها بررسی کنید.

آ . $y = ۱$ ب . $y = x$ ج . $y = x^۳$ د . $y = x^۴$

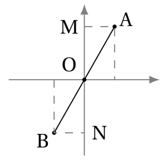
پاسخ: آ . بنا به خاصیت عنصر قرینهٔ اعداد حقیقی داریم $x \in \mathbb{R} \iff (-x) \in \mathbb{R}$. از طرفی هم $x\mathrm{R}y$ اگر و تنها اگر $y = ۱$ و $x \in \mathbb{R}$. بنابراین $x\mathrm{R}y$ اگر و تنها اگر $y = ۱$ و $(-x) \in \mathbb{R}$ که به‌معنای $(-x)\mathrm{R}y$ می‌باشد. درنتیجه بنا به گزارهٔ فوق، رابطهٔ $y = ۱$ نسبت به محور yها متقارن است.

ب . نسبت به محور عرض‌ها (yها) متقارن نیست. زیرا؛ به‌طور مثال $(۱,۱) \in \mathrm{R}$ اما $(-۱,۱) \notin \mathrm{R}$.

ج . نسبت به محور عرض‌ها متقارن نیست. (مشابه مورد قبل عمل کنید)

د . نسبت به محور عرض‌ها متقارن است. زیرا؛ $(-x)\mathrm{R}y \iff y = (-x)^۴ \iff y = x^۴ \iff x\mathrm{R}y$ ■

۲.۲.۹ تقارن مرکزی



تقارن محوری با خطی به‌نام محور تقارن بامعناست. اما تقارن مرکزی به‌جای محور تقارن از مرکز تقارن برخوردار است. در واقع به‌جای خط از نقطه استفاده می‌کنیم. یعنی می‌گوییم دو نقطهٔ A و B نسبت به نقطهٔ O متقارن هستند اگر $|AO| = |BO|$ اما در این صورت می‌توان آن‌ها را رئوس یک مثلث متساوی‌الساقین نیز در نظر گرفت. لذا بیان می‌کنیم که این نقاط باید بر یک خط واقع باشند. یا به‌عبارتی باید O وسطِ پاره‌خطِّ AB باشد.

در شکل مقابل، $|OA| = |OB|$ و $\angle BON = \angle AOM$ و درنتیجه بنا به حالت «وتر و یک زاویه حاده» داریم $\triangle OAM = \triangle OBN$ و درنتیجه اگر $A = (a, b)$ آن‌گاه $B = (-a, -b)$.

مثال ۱۳.۹: نشان دهید:

آ. قرینهٔ نقطهٔ $A = (x, y)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطهٔ $B = (-x, -y)$ است.

ب. قرینهٔ رابطهٔ R نسبت به مبدأ مختصات، رابطهٔ $(-x)R(-y)$ است.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۱۴.۹: فرض کنید R' قرینه R نسبت به محور yها و R'' قرینهٔ R' نسبت به محور xها باشند. نشان دهید R'' و R نسبت به مبدأ مختصات قرینهٔ یکدیگر هستند.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۳.۲.۹ قدرمطلق

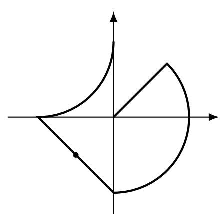
برای بررسی تأثیر قدرمطلق در نمودار یک رابطه، به نمودار رابطهٔ $|x|Ry$ و طریقه به‌دست آمدن آن با استفاده از نمودار رابطهٔ R توجه می‌کنیم. اگر رابطهٔ $|x|Ry$ را با S نشان دهیم، داریم:

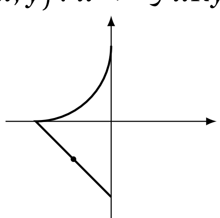
$$\begin{aligned} S = \{(x, y) : |x|Ry\} &= \{(x, y) : x \geqslant 0 \text{ و } |x|Ry\} \cup \{(x, y) : x < 0 \text{ و } |x|Ry\} \\ &= \{(x, y) : x \geqslant 0 \text{ و } xRy\} \cup \{(x, y) : x < 0 \text{ و } (-x)Ry\} \end{aligned}$$

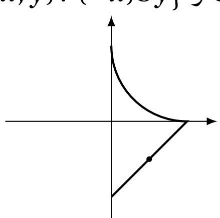
نمودار رابطهٔ $\{(x, y) : x \geqslant 0 \text{ و } xRy\}$ به‌سادگی با حذف تمام نقاطی که در ربع‌های دوم و سوم هستند، به‌دست می‌آید.

اشتباهی رایج...
با دقت بخوانید
نکته‌ای ظریف...

شخصی برای به‌دست آوردنِ نمودار $\{(x, y) : x < 0 \text{ و } (-x)Ry\}$ تمام نقاط واقع در ربع‌های اول و چهارم را به‌واسطهٔ شرط $x < 0$ حذف کرده و نقاط نمودار باقی‌مانده (نقاط واقع بر ربع‌های دوم و سوم) را نسبت به محور yها قرینه می‌کند. بنابراین، به‌ترتیب نمودارهای زیر را از R می‌سازد: $S = \{(x, y) : x < 0 \text{ و } xRy\}$ و $T = \{(x, y) : (-x)Sy\}$


۱. نمودارِ رابطهٔ R


۲. نمودارِ رابطهٔ S


۳. نمودارِ رابطهٔ T

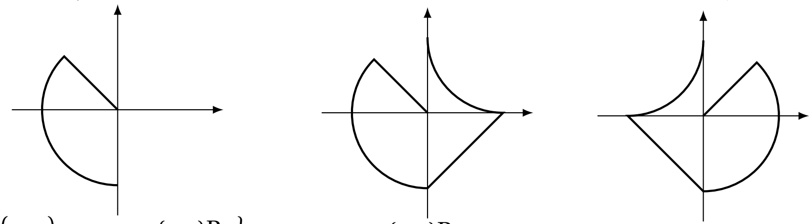
اگر نقطهٔ پررنگ بر نمودار R را با مختصات $(-1, -1)$ در نظر بگیریم، مسلماً $(-1, -1) \in S$ و

همچنین $(۱,-۱)\in \mathrm{T}$، اما اگر $\mathrm{R}=\{(-۱,-۱)\}$ داریم $(|-۱|,-۱)\notin \mathrm{R}$. درحالی که نقطهٔ پررنگ بر نمودارهای فوق نشان می‌دهد $(|-۱|,-۱)\in \mathrm{R}$. بنابراین، استدلال این شخص اشتباه بوده و نموداری که برای $(-x)\mathrm{R}y$، برای xهای منفی به‌دست آورده است، نادرست است. چون:

$$\{(x,y):x<\circ \text{ و } (-x)\mathrm{R}y\}=\{(x,y):(-x)\mathrm{R}y\}\cap\{(x,y):x<\circ\}$$

با دقت بخوانید...

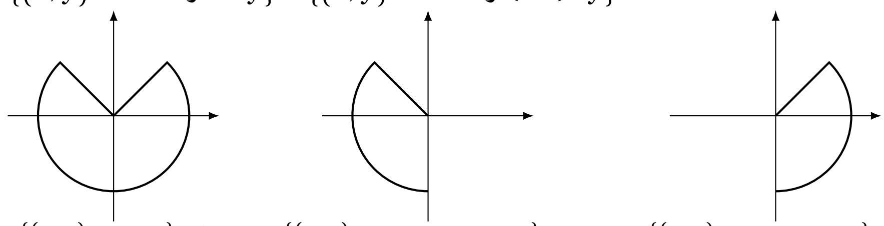
پس نخست نمودارِ رابطهٔ $(-x)\mathrm{R}y$ را به‌دست آورده و سپس xهای منفی آن را رسم می‌کنیم.



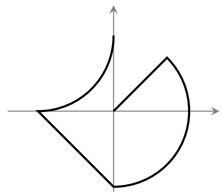
$\{(x,y):x<\circ \text{ و } (-x)\mathrm{R}y\}$ $\quad$ $(-x)\mathrm{R}y$ $\quad$ R

بدین ترتیب می‌توانیم نمودارِ $|x|\mathrm{R}y$ را به‌عنوان نمودار رابطهٔ زیر رسم کنیم.

$$\{(x,y):x\geqslant\circ \text{ و } x\mathrm{R}y\}\cup\{(x,y):x<\circ \text{ و } (-x)\mathrm{R}y\}$$



۳. $\{(x,y):|x|\mathrm{R}y\}$ $\quad$ ۲. $\{(x,y):x<\circ \text{ و } (-x)\mathrm{R}y\}$ $\quad$ ۱. $\{(x,y):x\geqslant\circ \text{ و } x\mathrm{R}y\}$

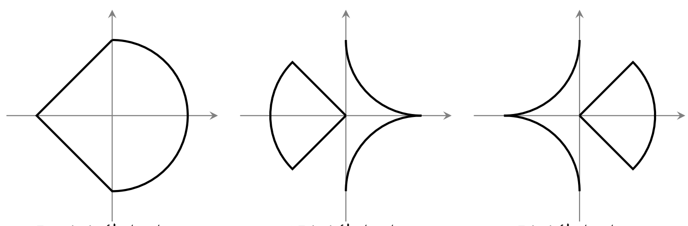


نمودارِ رابطهٔ R

مثال ۱۵.۹: با فرض نمودار مقابل برای رابطهٔ R، نمودار رابطه‌های زیر را مشخص کنید.

آ. $x\mathrm{R}|y|$ $\qquad$ ب. $(-x)\mathrm{R}|y|$ $\qquad$ ج. $x\mathrm{R}(-|y|)$

پاسخ: با توجه به مطالب فوق، نمودارهای زیر به‌دست می‌آیند.



نمودارِ رابطهٔ $x\mathrm{R}|y|$ $\quad$ نمودارِ رابطهٔ $(-x)\mathrm{R}|y|$ $\quad$ نمودارِ رابطهٔ $x\mathrm{R}(-|y|)$

■

مثال ۱۶.۹: فرض کنید R، T و S روابطی روی $\mathbb{R}$ باشند. درستی عبارات زیر را بررسی کنید.

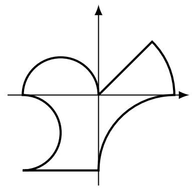
آ. اگر $x\mathrm{S}y \iff (-x)\mathrm{R}y$ و $x\mathrm{T}y \iff |x|\mathrm{S}y$ آن‌گاه $x\mathrm{T}y \iff (-|x|)\mathrm{R}y$

ب. اگر $x\mathrm{S}y \iff |x|\mathrm{R}y$ و $x\mathrm{T}y \iff (-x)\mathrm{S}y$ آن‌گاه $x\mathrm{T}y \iff |-x|\mathrm{R}y$

ج. اگر $x\mathrm{S}y \iff x\mathrm{R}(-y)$ و $x\mathrm{T}y \iff x\mathrm{S}|y|$ آن‌گاه $x\mathrm{T}y \iff x\mathrm{R}(-|y|)$

د. اگر $x\mathrm{S}y \iff x\mathrm{R}|y|$ و $x\mathrm{T}y \iff x\mathrm{S}(-y)$ آن‌گاه $x\mathrm{T}y \iff x\mathrm{R}|-y|$.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■



مثال ۱۷.۹: رابطهٔ R با نمودار روبه‌رو داده شده است. نمودار هر یک از رابطه‌های زیر را بیابید.
آ . $(-|x|)\mathrm{R}y$ ب . $x\mathrm{R}(-|y|)$ ج . $(-x)\mathrm{R}|y|$ د . $(-|x|)\mathrm{R}|y|$

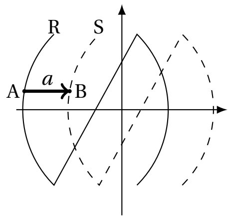
پاسخ: آ . کافی است رابطهٔ $(-x)\mathrm{R}y$ را S بنامیم. در این صورت رابطهٔ $(-|x|)\mathrm{R}y$ به‌صورت $|x|\mathrm{S}y$ قابل نمایش است. از نمودار R نمودار S و از نمودار S، نمودارِ $|x|\mathrm{S}y$ به‌دست می‌آید.
ب . کافی است رابطهٔ $x\mathrm{R}(-y)$ را S بنامیم و نمودار رابطهٔ $x\mathrm{S}|y|$ را به‌دست آوریم.
ج . کافی است رابطهٔ $(-x)\mathrm{R}y$ را S بنامیم و نمودارِ $x\mathrm{S}|y|$ را به‌دست آوریم.
همچنین می‌توانیم رابطهٔ $x\mathrm{R}|y|$ را T نامیده و نمودارِ $(-x)\mathrm{T}y$ را به‌دست آوریم.
د . کافی است رابطهٔ $(-x)\mathrm{R}y$ را S و رابطهٔ $|x|\mathrm{S}y$ را T بنامیم و نمودار $x\mathrm{T}|y|$ را به‌دست آوریم. ■

مثال ۱۸.۹: R رابطهٔ $(x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۳^۲$ روی $\mathbb{R}$ است.
آ . نمودارِ R را رسم کنید.
ب . معادلهٔ رابطهٔ $(-x)\mathrm{R}y$ را نوشته و آن را رسم کنید.
ج . رابطهٔ $(|x|-۱)^۲+(y-۱)^۲=۳^۲$ را بر حسب R نوشته و آن را رسم کنید.
د . نمودارِ رابطهٔ $(|x|+۱)^۲+(|y|+۲)^۲=۳^۲$ را رسم کنید.
ه . معادلهٔ رابطهٔ $|x|\mathrm{R}(-|y|)$ را نوشته و آن را رسم کنید.

پاسخ: آ . دایره‌ای است به شعاع ۳ و به مرکز $A=(۱,۲)$.
ب . $((-x)-۱)^۲+(y-۲)^۲=۳^۲$ ج . $|x|\mathrm{R}y$
د . $(-|x|)\mathrm{R}(-|y|)$ ه . $(|x|-۱)^۲+(|y|+۲)^۲=۳^۲$
رسم نمودارها به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

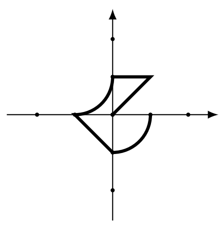
۴.۲.۹ انتقال

نتیجه انتقال هر نقطه‌ای مانند $A=(x,y)$ به‌اندازهٔ $a\in\mathbb{R}^+$ واحد به سمت راست، نقطه‌ای است مانند B که $B=(x+a,y)$. به‌طور مشابه اگر روابط R و S چنان باشند که نمودارِ S با انتقال نمودار R به‌اندازهٔ a واحد به سمت راست به‌دست آید، آن‌گاه $x\mathrm{R}y \iff (x+a)\mathrm{S}y$. بنابراین، با قرار دادنِ $u=x-a$ داریم $x=u+a$ و در نتیجه:



$$(x-a)\mathrm{R}y \iff u\mathrm{R}y \iff (u+a)\mathrm{S}y \iff$$

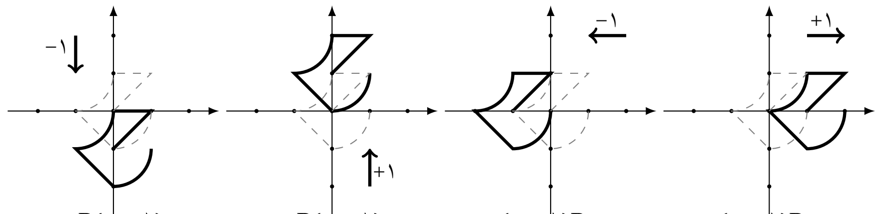
بنابراین نمودارِ $(x-a)\mathrm{R}y$ بر نمودارِ S منطبق است و S همان رابطهٔ $(x-a)\mathrm{R}y$ است.



مثال ۱۹.۹: با فرض نمودار مقابل برای رابطهٔ R، نمودار روابط زیر را رسم کنید.

آ . $(x-۱)\mathrm{R}y$ ب . $(x+۱)\mathrm{R}y$ ج . $x\mathrm{R}(y+۱)$
د . $x\mathrm{R}(y-۱)$ ه . $(۱-x)\mathrm{R}y$ و . $x\mathrm{R}(۱-y)$
ز . $|x|\mathrm{R}(y-۱)$ ح . $|x-۱|\mathrm{R}y$ ط . $(|x|-۱)\mathrm{R}y$

پاسخ: موارد (آ) تا (د) ساده هستند و صرفاً به رسم نمودار آنها اکتفا می‌کنیم.



$x\mathrm{R}(y+۱)$ $\quad$ $x\mathrm{R}(y-۱)$ $\quad$ $(x+۱)\mathrm{R}y$ $\quad$ $(x-۱)\mathrm{R}y$

ه . به بیان ساده اگر $(-x)\mathrm{R}y$ را S بنامیم، $(x+۱)\mathrm{S}y$ برابر است با $(-x-۱)\mathrm{R}y$. بنابراین نخست نمودارِ S را رسم کرده و با انتقال آن به‌اندازهٔ ۱ واحد به سمت چپ نمودار $(-x-۱)\mathrm{R}y$ که همان نمودارِ $(x+۱)\mathrm{S}y$ است را به‌دست خواهیم آورد.

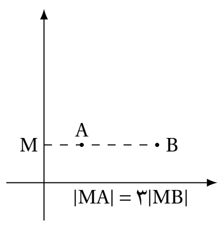
و . رابطهٔ $x\mathrm{R}(-y)$ را S نامیده، از نمودارِ S نمودارِ $x\mathrm{S}(y+۱)$ را به‌دست می‌آوریم.

ز . رابطهٔ $|x|\mathrm{R}y$ را S نامیده و با استفاده از نمودارِ S نمودارِ $x\mathrm{S}(y-۱)$ را رسم می‌کنیم.

ح . رابطهٔ $(x-۱)\mathrm{R}y$ را S نامیده و نمودارِ $|x|\mathrm{S}y$ را رسم می‌کنیم.

ط . رابطهٔ $|x|\mathrm{R}y$ را S نامیده و سپس نمودارِ $(x-۱)\mathrm{S}y$ را رسم می کنیم. ■

۵.۲.۹ ضریب

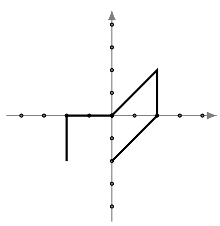


برای نقطهٔ $\mathrm{A}=(x,y)$ و $a\in\mathbb{R}^+$ نقطهٔ $\mathrm{B}=(x,y)$ چنان است که AB پاره‌خطی موازی با محور طول‌ها (xها) است و اگر محل برخورد امتداد آن با محور عرض‌ها (yها) را M بنامیم، آن‌گاه $a|\mathrm{MA}| = |\mathrm{MB}|$. بنابراین، نمودار $\mathrm{S}=\{(ax,y):x\mathrm{R}y\}$ که $a\in\mathbb{R}^+$ از a برابر کردن فاصلهٔ هر نقطه از نمودار R با محور عرض‌ها (yها) به‌دست می‌آید.

مثال ۲۰.۹: نمودار S از a برابر کردن فاصلهٔ نقاط نمودار R از محور عرض‌ها به‌دست می‌آید. نشان دهید:
$$x\mathrm{S}y \Longleftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)\mathrm{R}y$$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

با توجه به مثال فوق، برای به‌دست آوردن نمودارِ $\left(\frac{x}{a}\right)\mathrm{R}y$ کافی است فاصلهٔ هر نقطه از نمودارِ R را نسبت به محور yها a برابر کنیم.

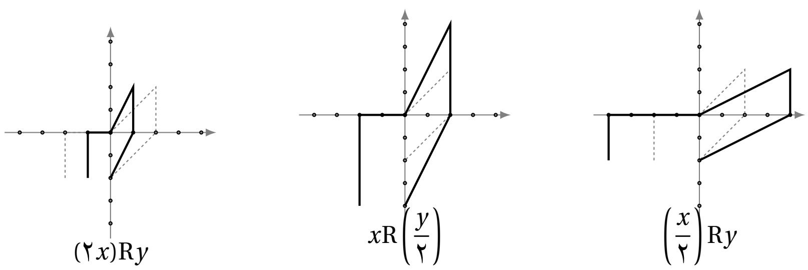


مثال ۲۱.۹: باتوجه به نمودار R در شکل مقابل، نمودار رابطه‌های زیر را رسم کنید.

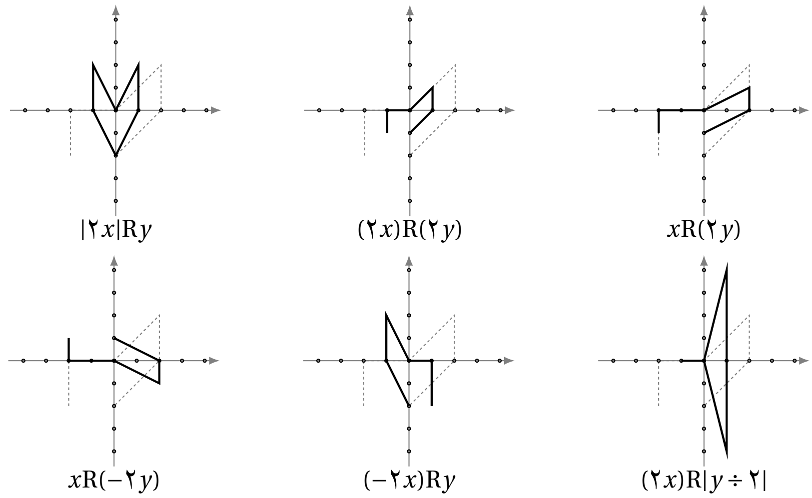
آ . $\left(\frac{x}{۲}\right)\mathrm{R}y$	ب . $x\mathrm{R}\left(\frac{y}{۲}\right)$	ج . $(۲x)\mathrm{R}y$
د . $x\mathrm{R}(۲y)$	ه . $(۲x)\mathrm{R}(۲y)$	و . $|۲x|\mathrm{R}y$
ز . $(۲x)\mathrm{R}|y\div ۲|$	ح . $(-۲x)\mathrm{R}y$	ط . $x\mathrm{R}(-۲y)$

حتما پاسخ دهید...
درستی پاسخ خود را با پاسخ‌های داده شده بررسی کنید.

پاسخ: با توجه به مطالب پیش از قضیه به‌سادگی به‌دست می‌آید.



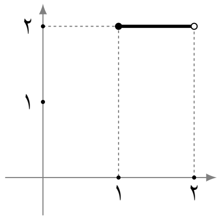
$\left(\frac{x}{۲}\right)\mathrm{R}y$ $\quad$ $x\mathrm{R}\left(\frac{y}{۲}\right)$ $\quad$ $(۲x)\mathrm{R}y$



■

۶.۲.۹ جزء صحیح

جزء صحیح x که به‌صورت $[x]$ نوشته می‌شود، عددی است صحیح مانند n که $n \leqslant x < n+۱$ و $[x]\mathrm{R}y$ به‌معنای رابطهٔ زیر است.

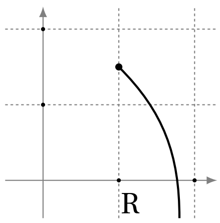


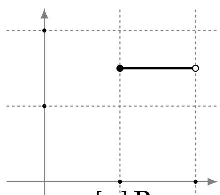
$$[x]\,\mathrm{R}y = \{(x,y):\ [x]\mathrm{R}y\}$$

بنابراین، برای $\mathrm{R} = \{(۱,۲)\}$ داریم

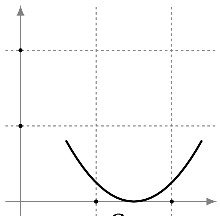
$$\big([x]\,\mathrm{R}y\big) = \{(x,y):\ [x] = ۱ \text{ و } y = ۲\}$$

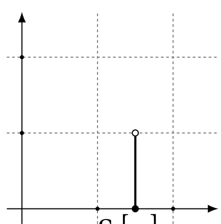
و دارای نمودار مقابل است. نقطهٔ $(۱,۲)$ بر نمودار $[x]\mathrm{R}y$ است و با دایره‌ای توپُر مشخص شده است. همچنین نقطهٔ $(۲,۲)$ بر نمودار نیست و با دایره‌ای توخالی نمایش داده شده است؛ چون $(۱,۲) \in \mathrm{R}$ $= ([۱],۲)$ ولی $(۲,۲) \notin \mathrm{R}$ $= ([۲],۲)$.





به‌طور مشابه فرض کنید رابطهٔ R دارای نمودار مقابل باشد. در این صورت، $(۱,۱/۵) \in \mathrm{R}$. پس، برای هر $x \in [۱,۲)$ داریم $[x] = ۱$ و $([x],۱/۵) \in \mathrm{R}$. برای هر عدد حقیقی خارج این بازه مانند x، داریم $[x] \notin \mathrm{Dom(R)}$؛ چون $\mathbb{Z} \cap \mathrm{Dom(R)} = \{۱\}$.





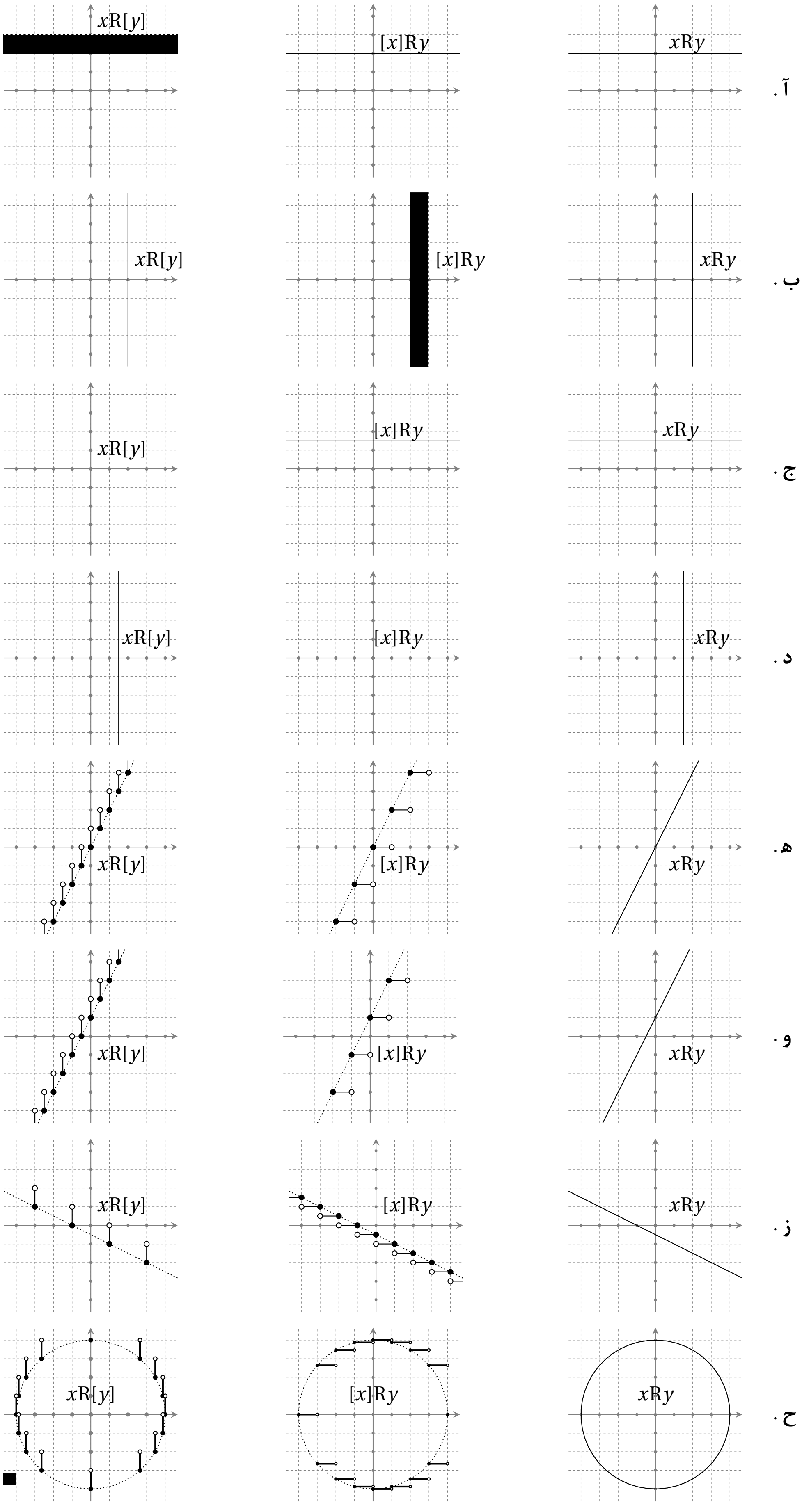
نمودار S نشان می‌دهد برای هر $(x,y) \in \mathrm{S}$ داریم $۰ \leq y < ۱$ و درنتیجه $[y] = ۰$. اما از طرفی هم داریم: $(x,۰) \in \mathrm{S} \Longleftrightarrow x = ۱/۵$
بنابراین، $(x,[y]) \in \mathrm{S}$ اگر و تنها اگر $(x,[y]) = (۱/۵,۰)$ که رسم نمودار آن ساده است.

مثال ۲۲.۹: برای هر یک از رابطه‌های زیر، نمودارهای $x\mathrm{R}y$، $[x]\mathrm{R}y$ و $x\mathrm{R}\,[y]$ را رسم کنید.

آ. $y = ۲$ ب. $x = ۲$ ج. $y = ۱/۵$ د. $x = ۱/۵$

هـ. $y = ۲x$ و. $y = ۲x + ۱$ ز. $x + ۲y + ۱ = ۰$ ح. $x^۲ + y^۲ = ۴^۲$

پاسخ: تحلیل نمودارها و چگونگی به‌دست آمدن آنها، به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.


آ.
xRy
[x]Ry
xR[y]
ب.
xRy
[x]Ry
xR[y]
ج.
xRy
[x]Ry
xR[y]
د.
xRy
[x]Ry
xR[y]
ه.
xRy
[x]Ry
xR[y]
و.
xRy
[x]Ry
xR[y]
ز.
xRy
[x]Ry
xR[y]
ح.
xRy
[x]Ry
xR[y]

تمرین:

حتماً پاسخ دهید ... درک بهتر مطالب و کسب مهارت‌های ضروری با پاسخ دادن به تمرینات امکان‌پذیر است.

(۸) نمودار هر یک از رابطه‌های زیر را رسم کنید.

آ. $y=-x$ ب. $y=(-x)^2$ ج. $y=(-x)^3$

د. $y=\sqrt{-x}$ هـ. $y=-\sqrt{x}$ و. $y=-\sqrt{-x}$

ز. $y=\sqrt[3]{-x}$ ح. $y=-\sqrt[3]{x}$ ط. $y=-\sqrt[3]{-x}$

ی. $y=\log_2(-x)$ ک. $y=-\log_2 x$ ل. $y=-\log_2(-x)$

م. $y=2^x$ ن. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ س. $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$

ع. $y=\log_2 \frac{1}{x}$ ف. $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ ص. $y=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}$

(۹) نمودار هر یک از رابطه‌های زیر را رسم کنید.

آ. $y=-3x$ ب. $x+3y=0$ ج. $y=\sqrt{2x}$

د. $y=\frac{\sqrt{x}}{2}$ هـ. $y=\sqrt{-\frac{x}{3}}$ و. $y=-2\sqrt{\frac{x}{3}}$

ز. $y=3\log_2 x$ ح. $y=\log_2 x^3$ ط. $y=2\log_2 \frac{-3}{x}$

ی. $y=3\times 2^x$ ک. $y=2^{3x}$ ل. $y=4^x$

م. $y=\left(\frac{1}{8}\right)^x$ ن. $y=3\sqrt[3]{2x}$ س. $y=\frac{\sqrt[3]{-2x}}{3}$

(۱۰) نمودار هر یک از رابطه‌های زیر را رسم کنید.

آ. $|y|=\sqrt{x}$ ب. $y=\sqrt{|x|}$ ج. $y=\log_2|x|$

د. $|y|=2^x$ هـ. $|y|=\log_2 x$ و. $y=2^{|x|}$

ز. $y=2^{-|x|}$ ح. $y=|\log_2 x|$ ط. $|y|=-\left|\log_2|x|\right|$

ی. $|y|=2^{|x|}$ ک. $|y|=\log_2 -x$ ل. $|y|=3\log_2\left|\frac{x}{2}\right|$

(۱۱) نمودار هر یک از رابطه‌های زیر را رسم کنید.

آ. $y=(x+1)^2$ ب. $y=x^2+1$ ج. $y=(x-2)^2$

د. $y=x^2-4$ هـ. $y=\sqrt{x+1}$ و. $y=\sqrt{x}-1$

ز. $y=\sqrt{-2(x-1)}$ ح. $y=\sqrt{|x+1|}$ ط. $y=\sqrt{|x-1|}$

ی. $y=\sqrt{|x|-1}$ ک. $y=\sqrt{|x-1|}$ ل. $y=\sqrt{|x|-1}$

م. $|y-1|=\left|\sqrt[3]{|x|-8}\right|$ ن. $|y-1|=\sqrt[3]{|x-1|+2}$

س. $|2y-3|+1=\sqrt[3]{|3x+1|-2}$

(۱۲) نمودار هر یک از روابط زیر را رسم کنید.

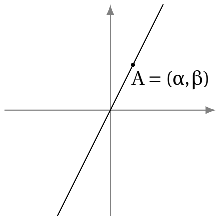
آ. $[x]^2+y^2=1$ ب. $\left[x^2\right]+y^2=1$ ج. $[x]^2+[y]^2=1$

د. $\left[x^2\right]+\left[y^2\right]=1$ هـ. $y=\sqrt{[x]}$ و. $y=\left[\sqrt{3}\right]$

ز. $y=\log_2[x]$ ح. $[y]=\log_2 x$ ط. $[y]=\left|\log_2[x]\right|$

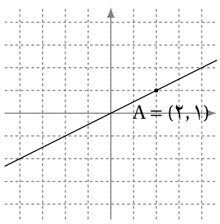
ی. $|y|=\left[\log_2 x\right]$ ک. $\left[|y|\right]=\left[\log_2 x\right]$ ل. $\left|[y]\right|=\left[\log_2 x\right]$

۳.۹ معادلهٔ خط



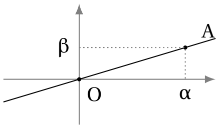
پیش از این با نمودار $y = mx$ آشنا شدیم که برای هر $m \in \mathbb{R}$ خط راستی را نمایش می‌دهد که از مبدأ مختصات می‌گذرد. با این فرض، اگر خطی مانند $y = mx$ چنان باشد که از مبدأ مختصات و نقطهٔ $A = (\alpha, \beta)$ بگذرد، آن‌گاه $m = \frac{\beta}{\alpha}$، چون $A = (\alpha, \beta)$ بر نمودار $\alpha y = \beta x$ قرار داد (کافی است قرار دهیم $x = \alpha$ و $y = \beta$ تا تساوی برقرار شود). بدین‌ترتیب داریم:

$$\alpha y = \beta x \xRightarrow{\alpha \neq 0} y = \frac{\beta}{\alpha} x$$

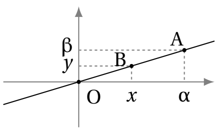


معمولاً به‌جای عبارت «معادله‌ای بنویسید که نمودار آن خطی باشد که ...» از عبارت «معادلهٔ خطی را بنویسید که ...» استفاده می‌کنیم. لذا برای به‌دست آوردن معادلهٔ خطی که از مبدأ مختصات و نقطهٔ $A = (2, 1)$ بگذرد، کافی است قرار دهیم $m = 1/2$ که معادلهٔ $y = \frac{1}{2}x$ به‌دست می‌آید.

زمانی که از تأثیر ضرایب بر نمودار معادلات سخن گفتیم، به‌طور کاملا شهودی و با تعقیب چند نقطه به این نتیجه رسیدیم که برای هر $m \in \mathbb{R}$، نمودارِ معادلهٔ $y = mx$، خطی راست است. اما هیچ دلیلی بر این ادعا نداریم. برای اثبات درستی این مطلب کافی است نشان دهیم برای هر دو نقطهٔ دلخواه مانند $A = (x_1, y_1)$ و $B = (x_2, y_2)$ بر خطی گذرنده از مبدأ مختصات مانند l داریم $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ که در آن x_1 و x_2 ناصفرند. به‌عبارتی کافی است نشان دهیم مقدار m به خط مربوط است و از انتخاب نقطه‌ای که برای محاسبهٔ آن استفاده می‌شود، مستقل است. در مثال زیر به این مهم می‌پردازیم.



مثال ۲۳.۹: فرض کنید l خطی باشد که از مبدأ مختصات و نقطهٔ $A = (\alpha, \beta)$ می‌گذرد و قرار می‌دهیم $m = \frac{\beta}{\alpha}$. نشان دهید نقطهٔ $B = (x_1, y_1)$ بر l واقع است اگر و تنها اگر $y = mx$.



پاسخ: اگر $B = (x, y)$ بر l واقع باشد، دو مثلث $\triangle OAA'$ و $\triangle OBB'$ متشابه و درنتیجه بنا به قضیهٔ طالس و نتایج آن متناسبند. پس $\frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha} = m$ و درنتیجه $y = mx$. (برای اطلاعات بیشتر به پیوست مراجعه کنید.)
اگر $B = (x, y)$ و $y = mx$ آن‌گاه $\frac{y}{x} = m = \frac{\beta}{\alpha}$. بنابراین، دو مثلث $\triangle OAA'$ و $\triangle OBB'$ متشابه‌اند و درنتیجه $\widehat{BOB'} = \widehat{AOA'}$. پس B بر خطی است که از نقاط O و A می‌گذرد. ■

شخصی ادعا می‌کند:

برای هر خطِّ گذرنده از O مانند l، وجود دارد $m \in \mathbb{R}$ که l نمودارِ $y = mx$ است.

اما اگر خطِّ l را منطبق بر محور عرض‌ها (yها) در نظر بگیریم، l مجموعهٔ همه نقاطی است که مختص اول آنها صفر است. به‌عبارتی $l = \{(x, y) : x = 0\}$. بنابراین، عددی حقیقی مانند m وجود ندارد که $(x, y) \in l \iff y = mx$. لذا ادعای این شخص را به‌صورت زیر تصحیح می‌کنیم.

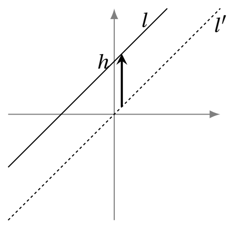
گزاره ۳.۹: برای هر $m \in \mathbb{R}$ نمودارِ $y = mx$ خطی است که از مبدأ می‌گذرد و برای هر خطِّ گذرنده از مبدأ که موازی محور yها نباشد، عددی حقیقی مانند m وجود دارد که l نمودارِ $y = mx$ باشد.

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

گزارهٔ زیر حالتی کلی‌تر از گزارهٔ فوق است که خطوط قائم را نیز شامل می‌شود.

گزاره ۴.۹: خطِّ l از مبدأ مختصات و نقطهٔ $A = (a, b)$ می‌گذرد اگر و تنها اگر $l = \{(x, y) : bx = ay\}$

اثبات: به‌عنوان تمرین به خوانده واگذار می‌شود. ■



فرض کنید خط l محور عرض‌ها (محور yها) را در نقطهٔ $A = (۰, h)$ قطع کند. در این‌صورت گوییم خط l دارای عرض از مبدإِ h است. حال اگر l' خطی موازی با l باشد که از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس نمودار معادله‌ای مانند $y = mx$ است که در آن $m \in \mathbb{R}$. در این‌صورت معادلهٔ $y = mx + h$ برای l از انتقال l' در راستای محور عرض‌ها (محور yها) به‌دست می‌آید.

مثال ۲۴.۹: معادلهٔ خطوطی را بیابید که از جفت نقاط زیر می‌گذرند.

آ. $A = (۰, ۰)$ و $B = (۳, ۱)$ ب. $A = (۰, ۰)$ و $B = (-۳, ۲)$

ج. $A = (-۲, -۳)$ و $B = (۰, ۰)$ د. $A = (۰, ۲)$ و $B = (۳, ۳)$

ه. $A = (-۲, ۰)$ و $B = (۲, -۳)$ و. $A = (۱, ۱)$ و $B = (۳, ۳)$

ز. $A = (۱, ۱)$ و $B = (۳, -۲)$ ح. $A = (-۱, ۲)$ و $B = (۲, -۳)$

با دقت بخوانید...
پاسخ این مثال شامل راه‌حل‌های مختلف یافتن معادلهٔ خط است.

پاسخ: د. **راه اول:** این خط که از نقطهٔ $(۰, ۲)$ می‌گذرد با ۲ واحد انتقال به پایین از نقطهٔ $(۰, ۰)$ و $(۳, ۱)$ می‌گذرد که معادلهٔ آن $y = \frac{x}{۳}$ است. با ۲ واحد انتقال آن به سمت بالا معادلهٔ $y = \frac{x}{۳} + ۲$ به‌دست می‌آید که از نقاط $(۰, ۲)$ و $(۳, ۳)$ می‌گذرد.

راه دوم: اگر $m, h \in \mathbb{R}$ چنان باشند که $y = mx + h$، معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $(۰, ۲)$ و $(۳, ۳)$ باشند، آن‌گاه:

$$\begin{cases} ۲ = m(۰) + h \Longrightarrow h = ۲ \\ ۳ = m(۳) + h \end{cases} \Longrightarrow ۳ = ۳m + ۲ \Longrightarrow m = \frac{۱}{۳}$$

بنابراین، $y = \frac{x}{۳} + ۲$ معادلهٔ خط مذکور است.

و.
$$\begin{cases} ۱ = m(۱) + h \\ ۳ = m(۳) + h \end{cases} \begin{array}{l} \Longrightarrow (۳ - ۱) = (۳m + h - (m + h) \Longrightarrow m = ۱ \\ \xRightarrow{m=۱} ۱ = ۱ + h \Longrightarrow h = ۰ \end{array}$$

بنابراین، خط گذرنده از نقاط A و B از مبدأ می‌گذرد.

ز.
$$\begin{cases} ۱ = m(۱) + h \\ -۲ = m(۳) + h \end{cases} \begin{array}{l} \Longrightarrow ۱ - (-۲) = (m + h) - (۳m + h) = -۲m \\ \Longrightarrow m = \frac{-۳}{۲} \xRightarrow{m=\frac{-۳}{۲}} ۱ = \frac{-۳}{۲} + h \Longrightarrow h = \frac{۵}{۲} \end{array}$$

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

انسان‌ها از زمانی که با سربالایی‌ها و سرازیری‌ها آشنا شده‌اند، یعنی از زمان انسان نخستین، با مفهوم شیب آشنایی داشته‌اند و می‌توانسته‌اند شیب راه‌ها را با هم مقایسه کنند. اما تا پیش از تولد هندسه تحلیلی و معادلهٔ خط هیچ توصیف دقیقی از آن وجود نداشته است. به‌عبارتی، «شیب» مفهومی کاملا توصیفی بوده و براساس معادلهٔ خط در هندسهٔ تحلیلی کمیت‌سازی شده است. واضح است که هرچه مقدار m بیشتر باشد، شیب خطّ $y = mx$ نیز بیشتر می‌شود. پس مقدار m در معادلهٔ $y = mx$

را «شیب خط» نامیده و بدین‌ترتیب، از مفهومی کاملا توصیفی یک کمیت ساخته‌ایم؛ این فرآیند را «کمّی‌سازی» گوییم.

بنا به درک شهودی، انتظار داریم شیب دو خط موازی یکسان باشد. از آنجا که دو خط موازی با انتقال بر یکدیگر منطبق می‌شوند و نتیجه انتقال هر خط، خطّی است موازی با آن، پس انتظار داریم اگر نمودار رابطهٔ R با معادلهٔ $y = mx$، خطی با شیب m باشد، نمودار $(x-a)\mathrm{R}(y-b)$ که دارای معادلهٔ $y - b = m(x-a)$ است نیز برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ خطی با همان شیب باشد. بنابراین، برای هر خطی به‌معادلهٔ $y = mx + h$ نیز m شیب را نشان می‌دهد؛ چون این خط نمودار معادلهٔ $y - h = m(x - ۰)$ است. بدین‌ترتیب، شیب را چنان تعریف کرده‌ایم که:

- **دو خط موازی، شیب برابر داشته باشند.**
- **شیب خطی به معادلهٔ $y = mx + h$ مساویِ m باشد.**

اگر $\mathrm{A} = (x_۱, y_۱)$ و $\mathrm{B} = (x_۲, y_۲)$ دو نقطه بر یک خط به معادلهٔ $y = mx + h$ باشند، آن‌گاه:

$$\left.\begin{array}{l} y_۱ = mx_۱ + h \Longrightarrow h = y_۱ - mx_۱ \\ y_۲ = mx_۲ + h \Longrightarrow h = y_۲ - mx_۲ \end{array}\right\} \Longrightarrow y_۱ - mx_۱ = y_۲ - mx_۲$$

پس $mx_۲ - mx_۱ = y_۲ - y_۱$ و درنتیجه $m = \dfrac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$.

اما برای نقاط $\mathrm{A} = (۱, ۰)$ و $\mathrm{B} = (۱, ۴)$ بر خطّ $x = ۱$ داریم $m = \dfrac{۴ - ۰}{۱ - ۱} = \dfrac{۴}{۰}$ که بی‌معناست. لذا خطوط عمود (موازی با محور عرض‌ها) را جدا کرده و تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۹: برای نقاط $\mathrm{A} = (x_۱, y_۱)$ و $\mathrm{B} = (x_۲, y_۲)$ مقدار $m = \dfrac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$ را شیب خط گذرنده از A و B گوییم.

شیب که براساس درک شهودی ایجاد شده، در تعریف فوق صرفاً مقداری است که براساس دو زوج مرتب تعیین می‌شود.

شخصی ادعا می‌کند می‌توان هر خط گذرنده از دو نقطهٔ $\mathrm{A} = (x_۱, y_۱)$ و $\mathrm{B} = (x_۲, y_۲)$ که $x_۱ \neq x_۲$ را نمودار رابطهٔ $\dfrac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = m = \dfrac{y_۲ - y}{x_۲ - x}$ در نظر گرفت. اما در این صورت برای نقطهٔ B کسرِ $\dfrac{y_۲ - y}{x_۲ - x}$ بی‌معنا خواهد بود. یعنی با جایگذاری $x_۲$ در x و $y_۲$ در y کسر مذکور به‌صورت $\dfrac{۰}{۰}$ نمایان خواهد شد که بی‌معناست. بنابراین، برای جلوگیری از این مشکل گوییم:

نقطهٔ $\mathrm{C} = (x, y)$ بر l واقع است اگر و تنها اگر $y_۲ - y = m(x_۲ - x)$.

گزاره ۵.۹: هر خطِّ گذرنده از $\mathrm{A} = (x_۱, y_۱)$ با شیبِ $m \in \mathbb{R}$ نمودار رابطهٔ زیر است.

$$\boldsymbol{y - y_۱ = m(x - x_۱)}$$

مثال ۲۵.۹: فرض کنید خطّ l از نقاط $\mathrm{A} = (۲, ۳)$ و $\mathrm{B} = (۵, ۰)$ می‌گذرد. در این صورت:

آ . معادلهٔ l را بنویسید.

ب . $m, h \in \mathbb{R}$ را چنان بیابید که خطّ l، نمودارِ رابطهٔ $y = mx + h$ باشد.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۲۶.۹: فرض کنید l خطی در دستگاه مختصات دکارتی است. نشان دهید:

آ. اگر l موازی محور عرض‌ها (yها) نباشد، وجود دارند $m,h \in \mathbb{R}$ که l نمودار رابطهٔ $y = mx + h$ باشد.

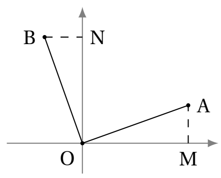
ب. $\mathrm{A,B,C} \in \mathbb{R}$ وجود دارند که l نمودار رابطهٔ $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = ۰$ باشد.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

ساده اما خواندنی...

توجه داریم که مورد (ب) از مثال فوق برای همه خطوط ازجمله خطوطی که موازی محور عرض‌ها (yها) هستند نیز درست است. این نوع بیان، ایده دیگری را مطرح می‌کند که برای هر چندجمله‌ای $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x,y]$ نمودار $\mathrm{P}(x,y) = ۰$ را مدنظر قرار دهیم. چندجمله‌ای $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}$ یک چندجمله‌ایِ درجهٔ اول است، پس هر خط را می‌توان نمودار یک چندجمله‌ای درجه اول دانست. همچنین برای هر چندجمله‌ای مانند $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x,y]$ نمودار معادلهٔ $\mathrm{P}(x,y) = ۰$ یک خط راست است. به‌همین سبب عباراتِ «معادلهٔ درجه اول» و «معادلهٔ خطی» در بسیاری موارد به‌جای یکدیگر به‌کار می‌روند.

خطوطِ متعامد



نماد $\perp$ به‌معنای عمود بودن است و عبارت $\mathrm{OA} \perp \mathrm{OB}$ یعنی OA بر OB عمود است.

برای هر $a,b \in \mathbb{R}^+$ نقطهٔ $\mathrm{A} = (a,b)$ در ربع اول از دستگاه مختصات دکارتی است و $\mathrm{B} = (-b,a)$ نقطه‌ای از ربع دوم که $\mathrm{OB} \perp \mathrm{OA}$. در مثال زیر نشان می‌دهیم نه‌تنها برای هر $a,b \in \mathbb{R}^+$ که برای هر $a,b \in \mathbb{R}$ اگر قرار دهیم $\mathrm{A} = (a,b)$ و $\mathrm{B} = (-b,a)$ آن‌گاه $\mathrm{OA} \perp \mathrm{OB}$.

مثال ۲۷.۹: فرض کنید $a,b \in \mathbb{R}$ و $\mathrm{A} = (a,b)$. نشان دهید:

آ. اگر $\mathrm{B} = (-b,a)$ آن‌گاه $\mathrm{OA} \perp \mathrm{OB}$ ب. اگر $\mathrm{B} = (b,-a)$ آن‌گاه $\mathrm{OA} \perp \mathrm{OB}$.

پاسخ: با حالت‌بندی روی علامت a و b ساده است. ■

مثال فوق ایده بیان گزاره‌ای مهم را مطرح می‌کند که در زیر آن را بیان می‌کنیم.

گزاره ۶.۹: برای خطوط $l_۱$ و $l_۲$ با شیب‌های $m_۱$ و $m_۲$ داریم:
$$l_۱ \perp l_۲ \Longleftrightarrow m_۱ m_۲ = (-۱)$$

اثبات: راهنمایی: با توجه به مثال فوق تساوی شیب خطوط موازی، کافی است با انتقال، $l_۱$ و $l_۲$ را از مبداء عبور دهیم. ■

البته می‌توان از معادلهٔ کلی‌تر خط که شامل خطوط قائم (موازیِ محور yها) است استفاده کرده و قضیه زیر را بیان کنیم.

قضیه ۱.۹: دو خط $l_۱ : \mathrm{A}_۱ x + \mathrm{B}_۱ y + \mathrm{C}_۱ = ۰$ و $l_۲ : \mathrm{A}_۲ x + \mathrm{B}_۲ y + \mathrm{C}_۲ = ۰$ بر هم عمودند اگر و تنها اگر $\mathrm{A}_۱\mathrm{A}_۲ + \mathrm{B}_۱\mathrm{B}_۲ = ۰$.

اثبات: کافی است نشان دهیم $m_۱ = \frac{-\mathrm{A}_۱}{\mathrm{B}_۱}$ و $m_۲ = \frac{-\mathrm{A}_۲}{\mathrm{B}_۲}$. ■

مثال ۲۸.۹: اعداد m و h را چنان بیابید که خط $y = mx + h$ از نقطهٔ $\mathrm{P} = (۲,۳)$ گذشته و بر خط $۳x + ۳y + ۱ = ۰$ عمود باشد.

پاسخ: $x - y + ۱ = ۰$ پس $y = x + ۱$ و درنتیجه $m = ۱$ و $h = ۱$. ■

محل برخورد دو خط

فرض کنید بخواهیم محل برخورد دو خطِ $l_۱$ و $l_۲$ با معادلات $l_۱ : y = ۲x - ۳$ و $l_۲ : y = x + ۱$ را بیابیم. اگر $A = (a, b)$ محل برخورد $l_۱$ و $l_۲$ باشند، A نقطه‌ای از $l_۱$ است پس $b = ۲a - ۳$. همچنین، A نقطه‌ای از $l_۲$ است پس $b = a + ۱$. بدین‌ترتیب داریم:

$$\left.\begin{array}{l} A = (a, b) \in l_۱ \Longrightarrow b = ۲a - ۳ \\ A = (a, b) \in l_۲ \Longrightarrow b = a + ۱ \end{array}\right\} \Longrightarrow ۲a - ۳ = a + ۱ \Longrightarrow ۲a - a = ۱ + ۳ \Longrightarrow a = ۴ \xrightarrow[A \in l_۱]{a=۴} b = ۲(۴) - ۳ = ۵$$

بنابراین، $A = (۴,۵)$ محل برخورد دو خطِ $l_۱$ و $l_۲$ است؛ زیرا با قرار دادنِ $x = ۴$ و $y = ۵$ در هر دو معادله، تساوی‌های به‌دست آمده برقرار هستند.

$$\left\{\begin{array}{l} y = ۲x - ۳ \\ y = x + ۱ \end{array}\right. \xrightarrow{x=۴ \text{ و } y=۵} \left\{\begin{array}{l} ۵ = ۲(۴) - ۳ \\ ۵ = (۴) + ۱ \end{array}\right.$$

معمولاً در حل معادلات فوق، به‌جای استفاده از a و b گوییم می‌خواهیم مقادیر x و y را چنان بیابیم که هر دو معادلهٔ $l_۱$ و $l_۲$ برقرار باشند. به‌عبارت دیگر، برای یافتن نقطهٔ برخورد دو خطِ $l_۱ : y = m_۱x + h_۱$ و $l_۲ : y = m_۲x + h_۲$ باید دستگاه معادلات زیر را حل کنیم.

$$\left\{\begin{array}{l} y = m_۱x + h_۱ \\ y = m_۲x + h_۲ \end{array}\right.$$

دستگاه معادلات فوق را «دستگاه معادلات دو معادله دو مجهولی خطی» می‌خوانیم؛ زیر از دو معادلهٔ دو متغیرهٔ درجه اول (خطی) تشکیل شده است و جواب آن را به‌معنای نقطه برخورد آن دو خط است.

مثال ۲۹.۹: محل برخورد جفت خطوط داده شده را بیابید.

آ. $y = ۳$ و $x = -۲$ ب. $y = ۲x + ۳$ و $x = -۱$

ج. $y = ۳x - ۴$ و $y = ۲$ د. $y = ۴x - ۵$ و $y = ۷ - ۲x$

پاسخ: آ. $A = (-۲,۳)$ ب. $x = -۱ \Longrightarrow y = ۲(-۱) + ۳ = ۱ \Longrightarrow A = (-۱,۱)$

ج. $y = ۲ \Longrightarrow ۲ = ۳x - ۴ \Longrightarrow ۲ + ۴ = ۳x \Longrightarrow x = ۲ \Longrightarrow A = (۲,۲)$

د. مشابه مطالب پیش از مثال عمل کرده نتیجه می‌گیریم

$$۴x - ۵ = ۷ - ۲x \Longrightarrow ۴x + ۲x = ۷ + ۵ \Longrightarrow ۶x = ۱۲ \Longrightarrow x = ۲$$

و در ادامه با قرار دادن $x = ۲$ در معادلهٔ $y = ۷ - ۲x$ داریم $y = ۷ - ۲(۲) = ۳$ بنابراین $A = (۲,۳)$ محل برخورد این دو خط است. با قراردادنِ $x = ۲$ و $y = ۳$ در معادلهٔ $y = ۴x - ۳$ به تساوی $۳ = ۴(۲) - ۵$ می‌رسیم که درستیِ آن، درستی ادعای ما را اثبات می‌کند. ■

مثال ۳۰.۹: محل برخورد جفت خطوط داده شده را بیابید.

آ. $y = mx + h$ و $x = a \in \mathbb{R}$ ب. $y = mx + h$ و $y = b \in \mathbb{R}$ که در آن $m \neq ۰$

ج. $y = m_۱x + h_۱$ و $y = m_۲x + h_۲$ که در آن $m_۱ \neq m_۲$

پاسخ: آ. به‌سادگی از قرار دادنِ $x = a$ در معادلهٔ $y = mx + h$ داریم $y = ma + h$ که عددی حقیقی را مشخص می سازد.

ب. با قرار دادنِ $y=b$ در معادلهٔ $y=mx+h$ داریم $b=mx+h$ و درنتیجه $x=\frac{b-h}{m}$ که با توجه به $m\neq ۰$، عددی حقیقی را مشخص می سازد.

ج. مشابه موارد قبل داریم:

$$m_۱x+h_۱=m_۲x+h_۲ \Longrightarrow (m_۱-m_۲)x=h_۲-h_۱ \Longrightarrow x=\frac{h_۲-h_۱}{m_۱-m_۲}$$

و درنتیجه $y=m_۱m_۱\left(\frac{h_۲-h_۱}{m_۱-m_۲}\right)+h_۱=m_۲\left(\frac{h_۲-h_۱}{m_۱-m_۲}\right)+h_۲$ ■

مثال فوق نشان می‌دهد برای هر دو خط $l_۱$ و $l_۲$ که ناموازی باشند، با معادلاتی به شکل فوق می‌توان محل برخورد آنها را محاسبه نمود.

ممکن است معادلات خطوط به‌صورت $Ax+B_y+C=۰$ داده شده باشند. مثال زیر ما را در حل این‌گونه معادلات کلی، یاری می‌کند.

مثال ۳۱.۹: مقادیر $x,y\in\mathbb{R}$ را چنان بیابید که جفت معادلات داده شده برقرار باشند.

آ. $۲x+۳=۰$ و $۳y-۵=۰$ ب. $۳x+۳=۰$ و $۲x-۳y+۵=۰$

ج. $۲x+۳y-۱=۰$ و $۳x-۳y-۸=۰$ د. $۲x+y+۳=۰$ و $۲x+۲y+۴=۰$

ه. $۲x+۳y+۵=۰$ و $۳x+۲y+۵=۰$ و. $۲x-۳y+۱=۰$ و $-۵x+۴y-۱=۰$

پاسخ: آ. $x=\frac{-۳}{۲} \Longleftarrow ۲x+۳=۰$ و $۳y-۵=۰ \Longrightarrow y=\frac{۵}{۳}$.

ب. $۳x+۳=۰ \Longrightarrow x=-۱$ و درنتیجه $۲x-۳y+۵=۰ \xrightarrow{x=-۱} ۲(-۱)-۳y+۵=۰ \Longrightarrow y=۱$

ج. از معادلات داده شده می‌توان نتیجه گرفت $(۲x+۳y-۱)+(۳x-۳y-۸)=۰+۰=۰$ و درنتیجه $۵x-۹=۰$. در ادامه به‌سادگی $x=\frac{۹}{۵}$ و $y=\frac{۱۳}{۱۵}$ به‌دست می‌آیند.

د. با تفریق دو طرف معادله از یکدیگر داریم $(۲x+y+۳)-(۲x+۲y+۴)=(-y)-۱=۰$. در ادامه به $y=-۱$ و $x=-۱$ خواهیم رسید.

ه. سعی می‌کنیم متغیر x را حذف کنیم. برای این‌کار توجه داریم که کـمم ۲ و ۳ که ضرایب x در دو معادله هستند، ۶ است. بنابراین با ضرب طرفین معادله اول در ۳ و ضرب طرفینِ معادله دوم در ۲ ضرایب x را در آنها برابر کرده، با تفریق طرفین معادلات جدید از یکدیگر، متغیرِ x را حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۲x+۳y+۵=۰ \\ ۳x+۲y+۵=۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۳\times(۲x+۳y+۵)=۳\times ۰ \\ ۲\times(۳x+۲y+۵)=۲\times ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۶x+۹y+۱۵=۰ \\ ۶x+۴y+۱۰=۰ \end{cases} \Longrightarrow ۵y+۵=۰$$

در نتیجه $y=-۱$ در ادامه با قرار دادن $y=-۱$ در یکی از معادلات، خواهیم داشت $x=-۱$. ■

مثال ۳۲.۹: فرض کنید $l_۱: A_۱x+B_۱y+C_۱=۰$ و $l_۲: A_۲x+B_۲y+C_۲=۰$. نشان دهید:

آ. $|A_۱|+|B_۱|\neq ۰$ و $|A_۲|+|B_۲|\neq ۰$ ب. $l_۱ \parallel l_۲$ اگر و تنها اگر $A_۱B_۲=A_۲B_۱$.

ج. اگر $A_۱B_۲\neq A_۲B_۱$ آن‌گاه $x=-\frac{B_۲C_۱-B_۱C_۲}{B_۲A_۱-B_۱A_۲}$ و $y=-\frac{A_۲C_۱-A_۱C_۲}{A_۱B_۲-A_۲B_۱}$ محل برخورد دو خط $l_۱$ و $l_۲$ است.

پاسخ: آ. $|A_۱|+|B_۱|\neq ۰$ بیان دیگری از این است که $A_۱$ و $B_۱$ هر دو صفر نیستند. چون $A_۱x+B_۱y+C_۱=۰$ معادلهٔ یک خط را نشان می‌دهد، حداقل یکی از آنها ناصفر است. زیرا اگر هر دو صفر باشند، برای $C_۱=۰$ داریم:

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: A_۱x+B_۱y+C_۱=۰\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: ۰=۰\}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

و برای $C_۱\neq ۰$ نیز داریم:

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: A_۱x+B_۱y+C_۱=۰\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: C_۱=۰ \text{ و } C_۱\neq ۰\}=\varnothing$$

بنابراین، اگر $|A_۱|+|B_۱|=۰$، معادلهٔ $A_۱x+B_۱y+C_۱=۰$، معادلهٔ یک خط نیست و چون این نمودار

این معادله یک خط راست است (بنا به فرض) پس داریم $|A_1|+|B_1|\neq 0$.
اثبات $|A_2|+|B_2|\neq 0$ به طریق مشابه انجام می‌شود.

ب . با نوشتن معادلات به‌صورت $y=mx+h$ داریم $m_1=\frac{-A_1}{B_1}$ و $m_2=\frac{-A_2}{B_2}$ و درنتیجه

$$l_1 \parallel l_2 \iff m_1=m_2 \iff \frac{-A_1}{B_1}=\frac{-A_2}{B_2} \iff A_1B_2=A_2B_1$$

استدلال فوق برای $B_1\neq 0$ و $B_2\neq 0$ درست است. بررسی حالت $B_1=0$ یا $B_2=0$ به خواننده واگذار می‌شود.

ج . برای حذف y طرفین معادلات را در B_1 و B_2 ضرب می‌کنیم.

$$\begin{matrix} {\scriptstyle B_2\times} \\ {\scriptstyle B_1\times} \end{matrix}\begin{cases} A_1x+b_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A_1B_2x+B_1B_2y+C_1B_2=0 \\ A_2B_1x+B_1B_2y+C_2B_1=0 \end{cases}$$

بدین‌ترتیب با تفریق طرفین معادلات از یکدیگر داریم: $(A_1B_2-A_2B_1)x+(C_1B_2-C_2B_1)=0$
و درنتیجه $x=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}$. به‌طور مشابه با حذف y داریم $y=\frac{A_1C_2-A_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}$. ■

تمرین:

(۱۳) معادلهٔ خطوطی را بیابید که از جفت نقاط زیر می‌گذرند.
آ . $A=(0,0)$ و $B=(0,1)$ ‏ ب . $A=(0,0)$ و $B=(2,0)$
ج . $A=(0,0)$ و $B=(2,3)$ ‏ د . $A=(0,0)$ و $B=(-2,3)$
هـ . $A=(1,3)$ و $B=(5,3)$ ‏ و . $A=(1,3)$ و $B=(1,-2)$

(۱۴) معادلهٔ خطوطی را بیابید که از جفت نقاط زیر می‌گذرند.
آ . $A=(1,2)$ و $B=(3,4)$ ‏ ب . $A=(2,5)$ و $B=(0,1)$
ج . $A=(-1,2)$ و $B=(2,-3)$ ‏ د . $A=(-3,-5)$ و $B=(4,-2)$
هـ . $A=(1,-1)$ و $B=(-2,3)$ ‏ و . $A=(-1,-3)$ و $B=(3,-1)$

(۱۵) مقدار a را چنان بیابید که $l: 2x+3y=a$ از $A=(3,1)$ گذشته و با $l': 2x+3y=5$ موازی باشد.

(۱۶) معادلهٔ خطی را بیابید که از نقطهٔ A گذشته و با خط l موازی باشد.
آ . $A=(0,0)$ و $l: 2x+3y=5$ ‏ ب . $A=(3,0)$ و $l: 2x-y=4$

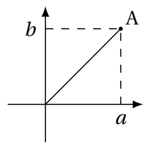
(۱۷) خطوط l و l' با معادلات $l: 2x+3y=5$ و $l': 2y-3x=a$ داده شده‌اند که در آن $a\in\mathbb{R}$.
آ . نشان دهید برای هر $a\in\mathbb{R}$، داریم $l\perp l'$
ب . مقدار a را چنان بیابید که l' از نقطهٔ $A=(1,3)$ بگذرد.

(۱۸) معادلهٔ خطوطی را بیابید که از نقطهٔ A گذشته و بر خط l عمود باشند.
آ . $A=(1,2)$ و $l: x+2y=1$ ‏ ب . $A=(-2,1)$ و $l: y=2x+1$

(۱۹) محل برخورد جفت خطوط زیر را بیابید.
آ . $l: y=3x+1$ و $l': y=2x-1$ ‏ ب . $l: y=3x+2$ و $l': y=3-x$
ج . $l: 2x+3y=5$ و $l': 2x-y=1$ ‏ د . $l: 2x+3y=1$ و $l': x-3y=5$

(۲۰) خط l' از نقطهٔ A گذشته و بر خطّ l عمود شده و آن را در نقطهٔ B قطع کرده است. مختصات نقطهٔ B را به‌دست آورید.
آ . $A=(1,4)$ و $l: y-3x=2$ ‏ ب . $A=(-2,3)$ و $l: y=2x-1$

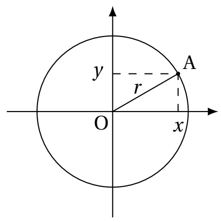
۴.۹ فاصله و دایره



یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های دستگاه مختصات دکارتی عمود بودن محورهای مختصات بر یکدیگر است که آن را دستگاه مختصات متعامد گوییم. چون محورهای مختصات بر یکدیگر عمودند، می‌توان با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث، فاصله دو نقطه را با استفاده از مختصات آنها محاسبه نمود. به‌طور مثال برای یافتن فاصلهٔ نقطهٔ $A = (a, b)$ از مبدأ داریم:

$|OA|^۲ = |OM|^۲ + |MA|^۲ = |a|^۲ + |b|^۲ = a^۲ + b^۲$.

بنابراین $|OA| = \sqrt{a^۲ + b^۲}$



دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r در واقع، مجموعهٔ همهٔ نقاطی است که فاصلهٔ آنها از مبدأ مختصات برابر است با r. بنابراین، نمودار رابطهٔ $x^۲ + y^۲ = r^۲$ دایره‌ای به مرکز مبدأ و به شعاع $|r|$ است. درواقع، می‌گوییم هر نقطه‌ای مانند $A = (x, y)$ روی دایره است اگر $x^۲ + y^۲ = r^۲$ که بنا به مختصات نقطهٔ A و طول اضلاع مثلث‌هایی که در شکل مجاور تشکیل شده‌اند، واضح است. (از قضیه فیثاغوث استفاده کنید)

مثال ۳۳.۹: فاصلهٔ چند نقطه از خطِّ $y = x - ۱$ از مبدأ ۵ واحد است؟

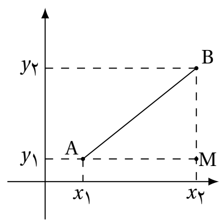
پاسخ: اگر (x, y) مختصات چنین نقطه‌ای باشد، داریم $y = x - ۱$ و $x^۲ + y^۲ = ۵^۲$. می‌توان با استفاده از معادلهٔ خط، به‌جای y عبارت $x - ۱$ قرار داد. درنتیجه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} y = x - ۱ \\ x^۲ + y^۲ = ۵^۲ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow x^۲ + (x - ۱)^۲ = ۵^۲ \Longrightarrow x^۲ + x^۲ - ۲x + ۱ = ۲۵ \\ \Longrightarrow ۲x^۲ - ۲x - ۲۴ = ۰ \Longrightarrow x^۲ - x - ۱۲ = ۰ \end{array}$$

به‌سادگی می‌بینیم که $x = -۳$ و $x = ۴$ جواب‌های این معادله هستند. بنابراین، با قرار دادن آنها در معادلهٔ خط (که ساده‌تر است) داریم:

$$\left\{\begin{array}{ll} x = -۳: & y = (-۳) - ۱ = -۴ \Longrightarrow A = (-۳, -۴) \\ x = ۴: & y = (۴) - ۱ = ۳ \Longrightarrow B = (۴, ۳) \end{array}\right.$$

بدین‌ترتیب، نقاط $A = (-۳, -۴)$ و $B = (۴, ۳)$ به‌دست می‌آیند. ■



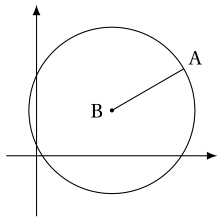
به‌طریقی مشابه، برای یافتن فاصلهٔ دو نقطهٔ $A = \left(x_۱, y_۱\right)$ و $B = \left(x_۲, y_۲\right)$ با ایده گرفتن از شکل مقابل داریم:

$$\left.\begin{array}{l} |AM| = \left|x_۲ - x_۱\right| = \left(x_۲ - x_۱\right) \\ |MB| = \left|y_۲ - y_۱\right| = \left(y_۲ - y_۱\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow |AB|^۲ = \left(x_۲ - x_۱\right)^۲ + \left(y_۲ - y_۱\right)^۲ \\ \Longrightarrow |AB| = \sqrt{\left(x_۲ - x_۱\right)^۲ + \left(y_۲ - y_۱\right)^۲} \end{array}$$

مثال ۳۴.۹: محیط مثلثی را بیابید که اخطوط زیر با هم می‌سازند.

$l_۱: x - ۲y - ۱ = ۰$ و $l_۲: ۳x - y - ۱ = ۰$ و $l_۳: ۲x + y + ۱ = ۰$

پاسخ: نقاط برخورد هر دو خط را یافته، سه نقطهٔ $A = (۱, ۲)$، $B = (-۱, ۱)$ و $C = (۰, -۱)$ به‌دست آیند. محیط مثلث برابر است با $|AB| + |AC| + |BC|$ که به‌سادگی قابل محاسبه است. ■



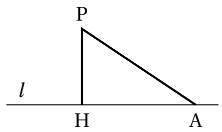
مثال ۳۵.۹: نشان دهید نقطهٔ $A=(x,y)$ بر دایره‌ای به شعاع r ($r>۰$) و به مرکز $B=(x_۱,y_۱)$ است اگر و تنها اگر داشته باشیم $(x-x_۱)^۲+\left(y-y_۱\right)^۲=r^۲$.

پاسخ: با توجه به مطالب فوق ساده است و به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

فاصله نقطه از خط

فاصله یک نقطهٔ P از خطِّ l را به‌معنای کوتاه‌ترین فاصله بین نقطهٔ P و آن خط درنظر می‌گیریم. به‌عبارتی فاصلهٔ نقطهٔ P از خط l برابر است با: $\min\{|PQ|: Q\in l\}$

در عبارت فوق، خط l را مجموعه‌ای از نقاط در نظر گرفته‌ایم و فاصله P از l را کوتاه‌ترین فاصله بین نقطهٔ P و نقاط l. اما سؤال مهم این است که آیا این کوتاه‌ترین فاصله وجود دارد؟ اگر وجود دارد چگونه می‌توانیم آن را بیابیم؟



به‌وضوح اگر H پای عمود وارد بر l از نقطهٔ P باشد، آن‌گاه برای هر نقطهٔ A از خطِّ l داریم $|PA|^۲=|PH|^۲+|HA|^۲$؛ چون $|PH|\leqslant|PA|$.

قضیه ۲.۹: فاصلهٔ نقطهٔ (a,b) از خطی به معادلهٔ $Ax+By+C=۰$ برابر است با:

$$\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^۲+B^۲}}$$

حتما اثبات را کامل کنید

اثبات: فرض کنید $A,B,C\in\mathbb{R}$ چنانند که $AB\neq ۰$ و $Ax+By+C=۰$ معادلهٔ خط l و (a,b) مختصات نقطهٔ M هستند. کافی است نشان دهید:

آ. خطِّ l' به معادلهٔ $Bx-Ay-Ba+Ab=۰$ از نقطهٔ M گذشته و بر خطِّ l عمود است.

ب. محل برخورد خطِّ l با خطِّ l' از مورد قبل، $N=\left(\frac{B^۲a-ABb-AC}{A^۲+B^۲},\frac{A^۲-B^۲a-BC}{A^۲+B^۲}\right)$ است.

ج. اگر N در مورد قبل دارای مختصات (x,y) باشد آن‌گاه

$$(x-a)=\frac{(-A)(Aa+Bb+C)}{A^۲+B^۲} \text{ و } (y-b)=\frac{(-B)(Aa+Bb+C)}{A^۲+B^۲}$$

د. $\sqrt{(x-a)^۲+(y-b)^۲}=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^۲+B^۲}}$ ■

مثال ۳۶.۹: مثلثی با رئوس $A=(۱,۱)$، $B=(-۱,۲)$ و $C=(-۳,-۲)$ در نظر بگیرید.

آ. معادلهٔ خط گذرنده از نقاط B و C را بیابید.

ب. طول ارتفاع وارد بر ضلع BC را بیابید.

ج. مساحت مثلث ABC را بیابید.

پاسخ: آ. معادلهٔ خط گذرنده از B و C برابر است با $((-۱)-(-۳))(y-۲)-(۲-(-۲))(x-(-۳))=۰$ که می‌توان آن را به‌صورت $۴x-۲y+۸=۰$ و حتی به صورت ساده‌تر، به‌شکلِ $۲x-y+۴=۰$ نوشت.

ب. فاصله نقطه $A=(۱,۱)$ از خطِّ $۲x-y+۴=۰$ برابر است با $\frac{|۲(۱)-(۱)+۴|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$

ج. فاصلهٔ نقطهٔ A از خطِّ گذرنده از نقاط B و C دقیقاً به‌معنای طول عمودِ وارد بر ضلع BC از نقطهٔ A است. بنابراین، اگر مساحت مثلث را با S نشان دهیم، داریم

$$S=\frac{۱}{۲}|BC|.|AH|=\frac{۱}{۲}\sqrt{((-۱)-(-۳))^۲+(۲-(-۲))^۲}.\sqrt{۵}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰}\sqrt{۵}=۵$$ ■

تمرین:

(۲۱) نمودارهای زیر را رسم کنید.

آ. $x^۲ - ۲x + y^۲ = ۳$ ب. $۴x^۲ + y^۲ = ۴$

ج. $۴x^۲ + ۹y^۲ = ۹$ د. $۴x^۲ + ۸x + ۹y^۲ - ۶y = ۲$

(۲۲) محل برخورد جفت نمودارهای زیر را بیابید.

آ. $x^۲ + y^۲ = ۱$ و $x^۲ + y^۲ + ۲y = ۰$ ب. $۲x^۲ + y^۲ = ۴$ و $x^۲ + ۲y^۲ = ۴$

(۲۳) معادلهٔ نقاطی را بیابید که از نقطهٔ $A = (۳, -۱)$ به‌اندازهٔ ۲واحد فاصله دارند.

(۲۴) معادلهٔ نقاطی را بیابید که از نقطهٔ $A = (۰, ۱)$ و خط $x = -۱$ به‌یک فاصله‌اند.

(۲۵) برای نقاط $A = (۳, ۳)$ و $B = (۲, -۱)$، رابطهٔ R را مجموعهٔ تمام نقاطی مانند C تعریف می‌کنیم که $|AC| = |BC|$. این رابطه را مکان هندسی نقاطی گوییم که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله‌اند. رابطهٔ R را با یک معادله بیان کنید.

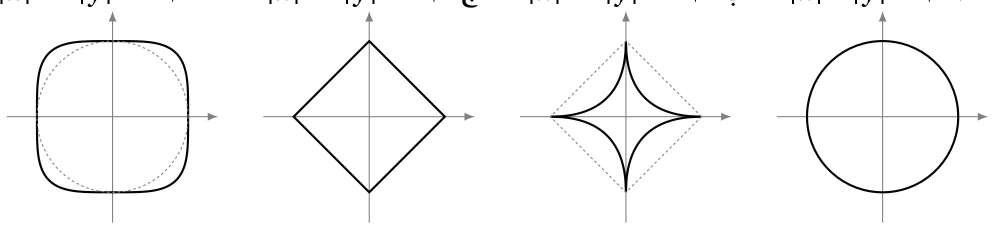
(۲۶) برای نقاط $A = (-۱, ۰)$ و $B = (۱, ۰)$، مکان هندسی نقاطی مانند $C = (x, y)$ را بیابید که $|AC| = ۲|BC|$.

(۲۷) مکان هندسی نقاطی را بیابید که از نقطهٔ $A = (۱, ۱)$ و خطّ $y = x$ به یک فاصله هستند.

(۲۸) مکان هندسی نقاطی را بیابید که از نقاط $A = (۱, ۰)$ و خطّ $x = -۱$ به یک فاصله هستند.

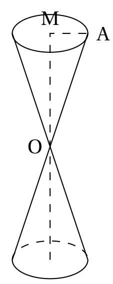
(۲۹) مشخص کنید هر یک از معادلات زیر مربوط به کدام نمودار است.

آ. $|x| + |y| = ۱$ ب. $|x|^۲ + |y|^۲ = ۱$ ج. $|x|^۴ + |y|^۴ = ۱$ د. $|x|^{\frac{۱}{۲}} + |y|^{\frac{۱}{۲}} = ۱$



۵.۹ مقاطع مخروطی

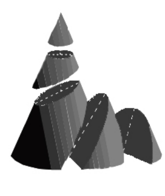
پیشرفته - اختیاری
یکبار خواندن این مطالب به کلیهٔ خوانندگان پیشنهاد می‌شود.



یونانیان باستان که در هندسه قوت یافته بودند، علاوه‌بر بررسی اشکال در صفحه، به بررسی اشکال در فضا نیز علاقه نشان دادند. شکل مقابل که شکلی آشنا و شبیه به کلاه تولد است، مخروط نام دارد. البته در نظر یونانیان باستان و همچنین ریاضیدانان امروزی، مخروط به شکلی گفته می‌شود که شبیه به دو کلاه تولد است که سرِ آنها بر یکدیگر قرارد دارد و در شکل مقابل نشان داده شده است.

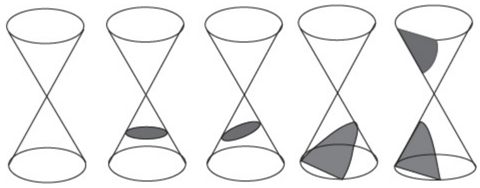
برای توصیف دقیق‌تر مخروط، دایره‌ای به مرکز M و نقطه‌ای مانند O چنان درنظر می‌گیریم که OM بر دایره عمود باشد؛ یعنی بر تمام شعاع‌های دایره عمود باشد. در این صورت:

نقطهٔ A بر مخروط است اگر و تنها اگر خطی که از A و O می‌گذرد، دایره را قطع کند.



این تعاریف اخیر، تقریباً همان چیزی است که یونانیان از آن به‌عنوان تعریف مخروط استفاده می‌کردند. فرض کنید با چوب، مخروطی توپُر بسازیم و آن را چنان برش دهیم که سطح برش داده شده بر سطحی صاف قرار گیرد، منحنی به‌دست آمده را «مقطع مخروطی» خوانیم. به‌طور مثال، اگر سطح برش بر محور اصلی مخروط عمود باشد، سطح مقطع (محل برش) دایره‌ای توپُر خواهد بود. البته، محل تقاطع صفحهٔ برش با مخروط دایره است و درون دایره را شامل نمی‌شود.

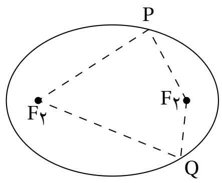
بنابراین، دایره یک مقطع مخروطی است؛ زیرا محل تقاطع مخروط و صفحه‌ای است که بر محور اصلی مخروط عمود است. حال اگر صفحه بر محور اصلی مخروط عمود نباشد، منحنی‌های دیگری به دست می‌آید. که به شرح زیر براساس وضعیت صفحه قاطع نسبت به مخروط نامهای بیضی، سهمی و هذلولی می‌گیرند.



هذلولی نتیجه برخورد صفحه‌ای است که هر دو قسمت بالایی و پایینی مخروط را قطع کند. صفحه‌ای که فقط یک قسمت از مخروط را قطع کند، اگر یک منحنی بسته بسازد، آن منحنی را بیضی نامیم و اگر یک منحنی بسته نسازد، منحنی حاصل را سهمی خوانیم.

یونانیان ویژگی‌های مهمی از این مقاطع مخروطی کشف کرده بودند، به طور مثال، همان طور که دایره را به‌عنوان یک مقطع مخروطی، می‌توان بدون استفاده از مخروط، به عنوان تمام نقاطی تعریف کرد که فاصله آنها از نقطه‌ای ثابت (مرکز دایره) به یک اندازه است. در ادامه بدون استدلال، مقاطع مخروطی را با استفاده از ویژگی‌هایی تعریف می‌کنیم که یونانیان باستان به‌صورت هندسی کشف کرده بودند و سپس با استفاده از این تعاریف، همان‌گونه که رنه دکارت پس از ایجاد دستگاه مختصات دکارتی به بیان این منحنی‌ها به‌عنوان نمودار برخی معادلات پرداخت، ما نیز معادلاتی برای آنها به دست می‌آوریم و برخی ویژگی‌های آنها را بررسی می‌کنیم.

۱.۵.۹ بیضی



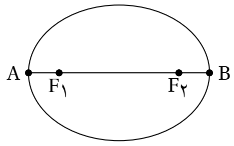
یونانیان باستان فهمیده بودند که درون هر بیضی دو نقطه مانند $F_۱$ و $F_۲$ وجود دارد که برای هر نقطه روی بیضی مانند P، مجموعه فواصل P از $F_۱$ و $F_۲$ ثابت است. به‌عبارتی برای هر P و Q روی بیضی داریم $|F_۱P| + |F_۲P| = |F_۱Q| + |F_۲Q|$. نقاط $F_۱$ و $F_۲$ را کانون‌های بیضی گوییم.

بنابراین، اگر دو سر قطعه‌نخی را مطابق شکل، به‌کمک میخ در صفحه ثابت نگه داریم و مداد را چنان به نخ چسبیده حرکت دهیم که نخ همواره بین نوک مداد و میخ‌ها، خط راست باشد، آن‌گاه مداد یک بیضی رسم خواهد کرد. مجموع فاصلهٔ مداد از دو میخ همواره برابر است با طول قطعه نخ که همواره ثابت است.

صرفاً خواندنی ...
مواردی از کاربردهای اعجاب‌انگیز بیضی و خواص آن

این ویژگی بیضی، کاربردهای جالب و جادویی را در معماری ایجاد کرده است. اگر بنایی به شکل بیضی‌گون بسازیم، یعنی شکلی که مانند یک بیضی باشد که حول قطر بزرگ‌ترِ خویش دوران کرده است، در یک کانون صحبت کنیم شخصی که در کانون دیگر قرار دارد صدای ما را بهتر از کسی که بین ما و آن شخص ایستاده است خواهد شنید. نمونه‌هایی از این اعجاب را در ساخت اپراها و برخی آثار معماری ایرانی می‌بینیم که همواره موجب شگفتی افراد می‌شوند.

همچنین، اگر بیضی‌ای از آینه بسازیم، هر نوری که از یک کانون به هر نقطه از دیوارهٔ بیضی بتابد، به سمت کانون دیگر بیضی منعکس می‌شود. به‌همین سبب اگر ساختمانی به شکل بیضی‌گون بسازیم و دیوارهایش از آینه باشند و شخصی در یکی از کانون‌ها قرار گیرد، بدون اینکه در کانون دیگر حضور داشته باشد، در آن کانون نیز دیده می‌شود. از این ویژگیِ بیضی در شعبده‌بازی استفاده می‌شود. شما نیز می‌توانید در یک کانون چنین ساختمانی که از چشم بینندگان پنهان است ایستاده و دستیار شما، در کانون دیگر بیضی که در دید بینندگان قرار دارد، دست خود را درون بدن شما عبور دهد. سعی کنید با استفاده از این خواص بیضی، کارهایی شگفت‌انگیز انجام دهید.



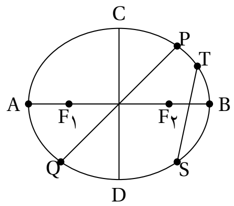
مثال ۳۷.۹: بیضی مقابل با کانون‌های $F_۱$ و $F_۲$ را در نظر بگیرید. نقاط برخوردِ خطِّ گذرنده از $F_۱$ و $F_۲$ با بیضی را A و B می‌نامیم. نشان دهید برای هر نقطه‌ای مانند P بر این بیضی داریم $|F_۱P| + |F_۲P| = |AB|$.

پاسخ: بنا به تعریف بیضی داریم $|F_۱A| + |F_۲A| = |F_۱B| + |F_۲B|$. اما از طرفی هم داریم:

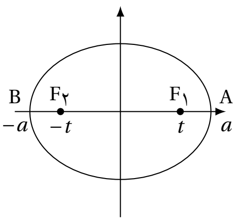
$$\begin{cases} |F_۱A| + |F_۲A| = |F_۱A| + |F_۱A| + |F_۱F_۲| = ۲|F_۱A| + |F_۱F_۲| \\ |F_۱B| + |F_۲B| = |F_۱F_۲| + |F_۲B| + |F_۲B| = ۲|F_۲B| + |F_۱F_۲| \end{cases}$$

درنتیجه $|F_۱A| = |F_۲B|$ و همچنین، برای هر نقطهٔ P بر بیضی داریم:

$$\begin{aligned} |F_۱P| + |F_۲P| &= |F_۱A| + |F_۲A| = |F_۱A| + |F_۱F_۲| + |F_۱A| \\ &= |F_۱A| + |F_۱F_۲| + |F_۲B| = |AB| \end{aligned}$$ ■



پاره‌خطِّ TS را یک وتر بیضی گوییم اگر نقاط T و S بر روی بیضی قرار داشته باشند. نقطهٔ O وسطِ پاره‌خطِّ $F_۱F_۲$ را مرکز بیضی گوییم که در آن $F_۱$ و $F_۲$ کانون‌های بیضی هستند. هر وترِ گذرنده از مرکز بیضی را یک قطر خوانیم. قطر گذرنده از کانون‌ها را قطر اصلی و خطی که بر آن منطبق باشد را محور اصلی خوانیم. همچنین، قطری که بر قطر اصلی عمود است را قطر فرعی، و خطِّ منطبق بر قطر فرعی را محور فرعی گوییم. بنابراین، در شکل مقابل، AB قطر اصلی، CD قطر فرعی، پاره‌خطِّ TS صرفاً یک وتر و پاره‌خطّ PQ نیز صرفاً یک قطر بیضی است. یونانیان باستان، با روش‌های هندسی نشان دادند که محورهای اصلی و فرعی بیضی، محور تقارن آن نیز هستند و همچنین نشان دادند که مرکز بیضی، مرکز تقارن آن است. اما این روش‌ها پیچیده هستند. در ادامه خواهیم دید که استفاده از مختصات دکارتی چگونه اثبات این خواص را ساده می‌کند. در اولین قدم، سعی می‌کنیم معادله‌ای بیابیم که نمودارِ آن بیضی باشد.



یک بیضی با دو کانونِ $F_۱$ و $F_۲$ در نظر بگیرید. دستگاه مختصاتی را چنان رسم می‌کنیم که مبدأ مختصات، وسطِ پاره‌خطِ $F_۱F_۲$ باشد و محور xها از نقاط $F_۱$ و $F_۲$ بگذرد. فرض کنید $F_۱$ بر قسمت مثبت محور xها باشد. بنابراین، اعداد حقیقیِ مثبتِ a و t وجود دارند که $F_۱ = (t, ۰)$، $F_۲ = (-t, ۰)$ و همچنین $A = (a, ۰)$ و $B = (-a, ۰)$ نقاط برخوردِ بیضی با محورِ xها باشند. به‌وضوح $۰ < t < a$ و بنا به تعریف بیضی داریم:

$$|F_۱A| + |F_۲A| = |a - t| + |a - (-t)| = (a - t) + (a + t) = ۲a$$

بنابراین، برای هر نقطهٔ $P = (x, y)$ روی این بیضی داریم:

$$\begin{aligned} |F_۱P| + |F_۲P| = ۲a &\iff \sqrt{(x-t)^۲ + y^۲} + \sqrt{(x+t)^۲ + y^۲} = ۲a \\ &\iff \sqrt{(x-t)^۲ + y^۲} = ۲a - \sqrt{(x+t)^۲ + y^۲} \\ &\iff \left(\sqrt{(x-t)^۲ + y^۲}\right)^۲ = \left(۲a - \sqrt{(x+t)^۲ + y^۲}\right)^۲ \\ &\iff \underline{x^۲ + t^۲ + y^۲} - \underline{۲tx} = ۴a^۲ + \underline{x^۲ + t^۲ + y^۲} + \underline{۲tx} - ۴a\sqrt{(x+t)^۲ + y^۲} \\ &\iff -۴tx = ۴a^۲ - ۴a\sqrt{(x+t)^۲ + y^۲} \\ &\iff a\sqrt{(x+t)^۲ + y^۲} = tx + a^۲ \\ &\iff a^۲\left((x+t)^۲ + y^۲\right) = \left(tx + a^۲\right)^۲ \\ &\iff a^۲x^۲ + a^۲t^۲ + \underline{۲a^۲tx} + a^۲y^۲ = t^۲x^۲ + a^۴ + \underline{۲a^۲tx} \\ &\iff x^۲\left(a^۲ - t^۲\right) + a^۲y^۲ = a^۴ - a^۲t^۲ = a^۲\left(a^۲ - t^۲\right) \\ &\iff \frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{a^۲ - t^۲} = ۱ \end{aligned}$$

با قرار دادن $b = \sqrt{a^2 + t^2}$ داریم $b^2 = a^2 - t^2$ و درنتیجه، می‌توان معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - t^2} = 1$ را به‌صورت $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ نوشت.

بدین‌ترتیب، نشان دادیم برای هر بیضی می‌توان دستگاه مختصاتی درنظر گرفت که برای اعدادی حقیقی مانند a و b که $|a| > |b| > 0$، آن بیضی، نمودار معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ باشد.

برای هر دو عدد حقیقی مانند a و b که $0 < b < a$، نمودار معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ یک بیضی است. کافی است قرار دهیم $t = \sqrt{a^2 - b^2}$. در این‌صورت $b^2 = a^2 - t^2$ و درنتیجه معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ به‌صورت $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - t^2} = 1$ نوشته می‌شود که با توجه به دوشرطی بودن استنتاج‌های فوق، برای نقاط $F_1 = (t, 0)$، $F_2 = (-t, 0)$ و $P = (x, y)$ داریم: $|F_1P| + |F_2P| = 2|a|$

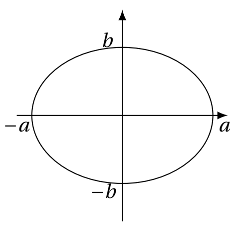
مثال ۳۸.۹: رابطهٔ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را R می‌نامیم. نشان دهید:

آ. xRy اگر و تنها اگر $(bx)^2 + (ay)^2 = (ab)^2$

ب. به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ که $|x| < |a|$، وجود دارد $y \in \mathbb{R}$ که xRy.

ج. $\mathrm{Dom(R)} = \left[-|a|, |a|\right]$ و $\mathrm{Im(R)} = \left[-|b|, |b|\right]$.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ∎



بنا به آنچه تاکنون بیان شد، نمودارِ رابطهٔ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ که در آن $a^2 > b^2 > 0$ یک بیضی است که کانون‌های آن نقاط $F_1 = (t, 0)$ و $f_= (-t, 0)$ هستند که در آن $t = \sqrt{a^2 - b^2}$. با قرار دادن $x = 0$ داریم $y = \pm|b|$ و با قرار دادن $y = 0$ داریم $x = \pm|a|$. و اگر فرض کنیم $a, b > 0$ آن‌گاه نمودار مقابل، نمودار این بیضی است.

به‌وضوح، محور xها، محور اصلی بیضی و محور yها محور فرعی بیضی است و طول قطر اصلی بیضی برابر است با $2a$ و طول قطر فرعی بیضی برابر است با $2b$.

هرچند روش هندسیِ یونانیان برای تعیین محورهای تقارن بیضی و مرکز تقارن آن پیچیده و دشوار بود، اما مثال زیر نشان می‌دهد استفاده از هندسه تحلیلی و دستگاه مختصات دکارتی، بررسی این موارد تا چه‌اندازه ساده است.

مثال ۳۹.۹: رابطهٔ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را با R نشان می‌دهیم. نشان دهید:

آ. نمودارِ R نسبت به محور xها متقارن است.

ب. نمودارِ R نسبت به محور yها متقارن است.

ج. نمودارِ R نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

پاسخ: آ. کافی است نشان دهیم $xRy \Longleftrightarrow (-x)Ry$ **ب**. کافی است نشان دهیم $xRy \Longleftrightarrow xR(-y)$
ج. کافی است نشان دهیم $xRy \Longleftrightarrow (-x)R(-y)$ ∎

روش یونانیان باستان برای اثبات اینکه بزرگ‌ترین قطرِ بیضی، قطر اصلی و کوچک‌ترین قطرِ بیضی، قطرِ فرعیِ آن است، پیچیده بود. مثال زیر توانایی بالای هندسه تحلیلی در رسیدن به این حقیقت را نشان می‌دهد.

مثال ۴۰.۹: نشان دهید:

آ. قطری که از کانون‌های بیضی می‌گذرد بزرگ‌ترین قطر بیضی (قطر اصلی) است.
ب. قطری که بر قطر اصلی عمود است، کوچک‌ترین قطر بیضی (قطر فرعی) است.

پاسخ: آ. مطابق با مطالب قبل، کافی است دستگاه مختصاتی را درنظر بگیریم که در آن بیضی مذکور نمودار معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ باشد. فرض کنید PQ قطر بیضی باشد. اگر $P=(x,y)$، آن‌گاه $Q=(-x,-y)$؛ چون بیضی نسبت به مبدأ متقارن است و قطر از مبدأ می‌گذرد. بنابراین:

$|PQ|=2|OP|=2\sqrt{x^2+y^2}$

اما از طرفی هم داریم:

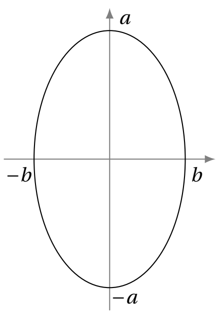
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Longrightarrow y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \Longrightarrow x^2+y^2=\frac{a^2b^2+\left(a^2-b^2\right)x^2}{a^2}$$

و چون $a^2>b^2$ و همچنین برای هر (x,y) روی بیضی داریم $x^2\leqslant a^2$، پس:

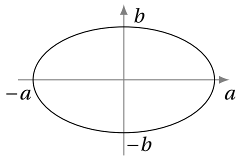
$$x^2<a^2 \Longrightarrow \left(a^2-b^2\right)x^2\leqslant\left(a^2-b^2\right)a^2 \Longrightarrow \frac{a^2b^2+\left(a^2-b^2\right)x^2}{a^2}\leqslant\frac{a^2b^2+\left(a^2-b^2\right)a^2}{a^2}=a^2$$

بنابراین، برای هر نقطهٔ P بر بیضی داریم $|OP|\leqslant a$ و درنتیجه برای هر قطر بیضی مانند PQ نیز داریم $|PQ|\leqslant 2a$. پس قطر اصلی بیضی، بزرگ‌ترین قطر بیضی است.

ب. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد کوچک‌ترین قطر بیضی، قطر فرعیِ آن است. ■



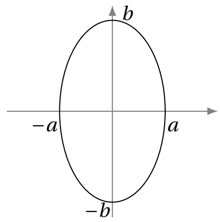
پیش از این دیدیم که نمودار رابطهٔ $(-y)Rx$ با دورانِ نمودارِ R به‌اندازهٔ 90° به‌دست می‌آید؛ اگر این دوران خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد. به‌سادگی می‌توان دید که بیضی روبرو از دورانِ نمودارِ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ به‌اندازهٔ 90° به‌دست می‌آید. اما رابطهٔ $(-y)Rx$ از جایگزین کردنِ $(-y)$ به‌جای x و جایگزین کردنِ x به‌جای y در رابطهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ به‌دست می‌آید. بنابراین، بیضیِ مقابل، نمودارِ رابطهٔ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{(-y)^2}{a^2}=1$ است که با رابطهٔ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ برابر است. این مطلب را می‌توان به‌صورتِ گزارهٔ زیر نیز بیان کرد.



$a>b$

گزاره ۷.۹: برای هر $a,b\in\mathbb{R}^+$ نمودارِ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

آ. یک دایره است اگر و تنها اگر $a=b$
ب. یک بیضی با محور اصلی افقی است اگر و تنها اگر $a>b$.
ج. یک بیضی با محورِ اصلیِ قائم است اگر و تنها اگر $a<b$.



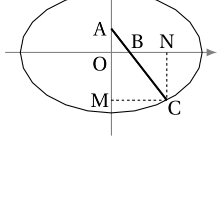
$a<b$

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۴۱.۹: فرض کنید $A=(0,\beta)$ بر محور yها و $B=(\alpha,0)$ بر محور xها واقع باشد و نقطهٔ $C=(x,y)$ بر امتداد AB چنان باشند که $|AC|=a$ و $|BC|=b$. نشان دهید $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

پاسخ: با توجه به تشابه مثلث‌ها داریم:

$\frac{x}{a}=\frac{\alpha}{a-b}$ و $\frac{y}{b}=\frac{\beta}{a-b}$ و درنتیجه $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{(a-b)^2}$.

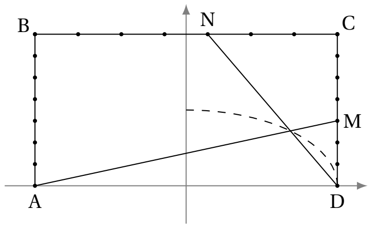


از طرفی هم $|AB|=a-b$ و درنتیجه $(a-b)^2=|AB|^2=|AO|^2+|OB|^2=\alpha^2+\beta^2$.

بنابراین، داریم: $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{(a-b)^۲}=\frac{(a-b)^۲}{(a-b)^۲}=۱$ ■

مثال فوق روش دیگری برای رسم یک بیضی به ما می‌دهد. کافی است چوبی را برداشته، طول‌های نقاط A، B و C را بر آن مشخص کنیم. در این صورت اگر نقاط A و B به ترتیب بر محورهای عمودی فرعی و اصلی بیضی حرکت کنند، نقطهٔ C بیضی را رسم می‌کند. مثال زیر روش دیگری را به ما می‌دهد که البته کاربردهای دیگری دارد

مثال ۴۲.۹: در شکل مقابل چهارضلعی ABCD یک مستطیل است که $|AB|=|CD|=۲b$ و $|BC|=|AD|=۲a$.

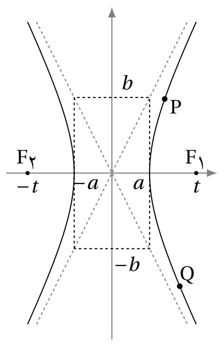


اگر محور xها بر ضلع AD منطبق باشد و مبدأ مختصات نیز وسط ضلع AD، نشان دهید اگر $\frac{DM}{DC}=\frac{CN}{CB}$، آن‌گاه نقطهٔ D، محل برخورد AM و DN بر بیضی‌ای به معادلهٔ $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ است.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۲.۵.۹ هذلولی

درک ویژگی‌ای که به‌عنوان تعریف بیضی قرار گرفت، این سؤال را به‌وجود آورد که اگر به‌جای حاصل‌جمع فاصله‌ها، به تفاضل (حاصل‌تفریق) فاصله‌ها توجه کنیم، چه رخ می‌دهد؟



مشابه بیضی، دو کانون مانند $F_۱$ و $F_۲$ درنظر گرفتند و گفتند نقاط P و Q بر یک هذلولی با کانون‌های $F_۱$ و $F_۲$ هستند اگر و تنها اگر $\big||F_۱Q|-|F_۲Q|\big|=\big||F_۱P|-|F_۲P|\big|$.

به‌طور مشابه، قرار می‌دهیم $F_۱=(t,۰)$ و $F_۲=(-t,۰)$. در این‌صورت، اگر $a>۰$ و $A=(a,۰)$ نقطه‌ای از این هذلولی باشد، داریم:

$$\big||F_۲A|-|F_۱A|\big|=|(t+a)-(t-a)|=۲a$$

بنابراین، نقطهٔ $P=(x,y)$ نقطه‌ای از این هذلولی است اگر و تنها اگر $\big||F_۲P|-|F_۱P|\big|=۲a$ اگر $|F_۱P|\leqslant|F_۲P|$، آن‌گاه:

$$\begin{aligned}
\big||F_۲P|-|F_۱P|\big|=۲a &\iff |F_۲P|-|F_۱P|=۲a\\
&\iff \sqrt{(x+t)^۲+y^۲}=\sqrt{(x-t)^۲+y^۲}+۲a\\
&\iff x^۲+t^۲+y^۲+۲tx=x^۲+t^۲+y^۲-۲tx+۴a^۲+۴a\sqrt{(x-t)^۲+y^۲}\\
&\iff tx=a^۲+a\sqrt{(x-t)^۲+y^۲}\\
&\iff (tx-a^۲)^۲=a^۲\left((x-t)^۲+y^۲\right)\\
&\iff t^۲x^۲+a^۴-۲a^۲tx=a^۲t^۲+a^۲x^۲+a^۲y^۲-۲a^۲tx\\
&\iff x^۲\left(t^۲-a^۲\right)-a^۲y^۲=a^۲\left(t^۲-a^۲\right)\\
&\iff \frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{t^۲-a^۲}=۱
\end{aligned}$$

حال اگر قرار دهیم $b=\sqrt{t^2-a^2}$ آنگاه $b^2=t^2-a^2$ و درنتیجه: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
که در این حالت، کانون‌های هذلولی نقاط $\left(\sqrt{a^2-b^2},0\right)$ و $\left(-\sqrt{a^2-b^2},0\right)$ خواهند بود.
برای حالت $|F_1P|>|F_2P|$ نیز به‌طور مشابه می‌توان به همین نتیجه رسید.

مثال ۴۳.۹: نشان دهید نمودارِ رابطهٔ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ نسبت به محور xها، نسبت به محور yها و نسبت به مبدأ مختصات قرینه است.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

تمرین:

(۳۰) رابطهٔ $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ را R می‌نامیم.
آ. نمودارِ R را رسم کنید.
ب. محور اصلی این بیضی را بیابید.
ج. طول قطر بزرگ بیضی را بیابید.
د. محور فرعی بیضی را بیابید.
ه. طولِ کوچک‌ترین قطرِ بیضی را بیابید.
و. مختصات کانون‌های بیضی را بیابید.
ز. نشان دهید $(x-1)R(y-2)$ اگر و تنها اگر $\frac{(x-1)^2}{5^2}+\frac{(y-2)^2}{4^2}=1$.

(۳۱) نمودارِ رابطهٔ $4^2(x-2)^2+5^2(y-3)^2=(4\times5)^2$ را رسم کنید.

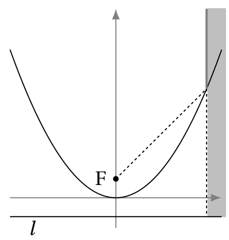
(۳۲) نمودار رابطهٔ $4x^2-24x+9y^2+18y+81=0$ را رسم کنید.

(۳۳) بیضی‌ای را درنظر بگیرد که کانون‌های آن $(3,4)$ و $(5,4)$ باشد و از نقطهٔ $P=(4,3)$ بگذرد.
آ. مرکز بیضی را بیابید.
ب. طولِ قطرِ کوچکِ بیضی را بیابید.
ج. طول قطرِ بزرگِ بیضی را بیابید.
د. معادلهٔ بیضی را بنویسید.

(۳۴) نشان دهید در هر بیضی، دو وتر یکدیگر را نصف می‌کنند اگر و تنها اگر هر دو قطر باشند.

۳.۵.۹ سهمی

یکی دیگر از مقاطع مخروطی سهمی است. یونانیان باستان متوجه شدند که برای هر سهمی، خطی مانند l و نقطه‌ای مانند F وجود دارد که هر نقطه روی سهمی، از خط و نقطه به یک فاصله است. خطِّ l را خطِّ هادیِ سهمی و نقطهٔ F را کانون سهمی نامیدند.



این تعریف روش جالبی برای رسم سهمی به‌وجود آورد. فرض کنید نخی را به یک خطکش بچسبانیم و خطکش را به‌گونه‌ای حرکت‌دهیم که یک انتهای آن بر خط هادی و همواره بر آن عمود باشد. اگر سر نخ را با یک میخ به کانون وصل کنیم، با دور کردن خطکش از کانون، نخ از خطکش جدا می‌شود و نقطه‌ای که نخ از خطکش جدا می‌شود، همواره نقطه‌ای است که از خطِّ هادی و کانون به یک فاصله است. بدین ترتیب، می‌توان با قرار دادن یک مداد در این نقطه یک سهمی رسم کرد.

سهمی خاصیت بسیار جالبی دارد و آن هم اینکه اگر یک آینه به شکل سهمی بسازیم، همهٔ نورهایی که از کانونِ آن منعکس می‌شوند، پس از برخورد با دیوارهٔ بیضی، به‌طور موازی منعکس می‌شوند. به‌همین سبب آینه پشت چراغ‌های جلوی خودروها را به شکل سهمی می‌سازند و چراغ را در کانون آن قرار می‌دهند. همچنین دیش‌های ماهواره‌ای را به‌شکل سهمی می‌سازند تا تمام امواج را که از فاصله‌ای بسیار دور به دیش رسیده‌اند و تقریبا موازی به حساب می‌آیند، در کانون آن سهمی منعکس شوند. بدین ترتیب، قدرت امواج بیشتر شده و گیرنده‌های ماهواره‌ای قابلیت بیشتری در آشکارسازی

آن دارند. البته این خاصیت را در این کتاب اثبات نخواهیم کرد، چون برای اثبات آن به مفهوم مشتق نیاز داریم.

بنابراین، سهمی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

گزاره ۸.۹: برای هر خطِّ l و هر نقطه F، مجموعهٔ همه نقاطی مانند P است که $|\mathrm{FP}| = d(\mathrm{P}, l)$ که در آن $d(\mathrm{P}, l)$ به‌معنای فاصلهٔ نقطهٔ P از خطِّ l می‌باشد.

فاصلهٔ نقطهٔ P از خط l که با $d(\mathrm{P}, l)$ نشان داده می‌شود، به‌معنای طول پارهٔخطِّ PD است که در آن D نقطه‌ای بر l است که $\mathrm{PD} \perp l$. می‌توان نشان داد اگر $\mathrm{P} = (x, y)$ چنان باشد که $|\mathrm{FP}| = d(\mathrm{P}, l)$ که در آن $\mathrm{F} = (۰, a)$ و l، خطِّ $y = -a$ باشد، آن‌گاه $y \geqslant ۰$. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{FP}| = d(\mathrm{P}, l) &\iff \sqrt{x^۲ + (y-a)^۲} = y + a \\
&\iff x^۲ + (y-a)^۲ = \left(y+a\right)^۲ \\
&\iff x^۲ + y^۲ + a^۲ - ۲ay = y^۲ + a^۲ + ۲ay \\
&\iff x^۲ = ۴ay \\
&\iff y = \frac{x^۲}{۴a}
\end{aligned}$$

مثال ۴۴.۹: در هر یک از موارد زیر، معادلهٔ سهمی‌ای را بنویسید که نقطهٔ F کانونِ آن و خطِّ l خطِّ هادیِ آن باشد و آن سهمی را رسم کنید.

آ. $\mathrm{F} = (۱, ۰)$ و $l\colon x = -۱$ ب. $\mathrm{F} = (-۱, ۰)$ و $l\colon x = ۱$

ج. $\mathrm{F} = (۰, ۱)$ و $l\colon y = -۱$ د. $\mathrm{F} = (۰, -۱)$ و $l\colon y = ۱$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۴۵.۹: نشان دهید نمودارِ رابطهٔ $x = ay^۲$ نیز برای هر $a > ۰$ یک سهمی است.

پاسخ: کافی است کانون را نقطهٔ $\mathrm{F} = \left(a^{-۱}۴^{-۱}, ۰\right)$ و $x = -a^{-۱}۴^{-۱}$ را خطِّ هادی سهمی در نظر بگیریم. ادامهٔ راه به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۴۶.۹: کانون و خطِّ هادی هر یک از سهمی‌های زیر را بیابید.

آ. $y = \dfrac{x^۲}{۸}$ ب. $y = x^۲$ ج. $x = y^۲$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۴.۵.۹ خطِّ هادی و گریز از مرکز

برای هر خطِّ l و هر نقطهٔ F (غیر واقع بر l) رابطهٔ $|\mathrm{FP}| = d(\mathrm{P}, l)$ یک سهمی را مشخص می‌سازد. اما سؤال مهمی مطرح می‌شود؟ به‌ازای l، F، روابطِ $|\mathrm{FP}| = ۲d(\mathrm{P}, l)$ و $|\mathrm{FP}| = \frac{۱}{۲}d(\mathrm{P}, l)$ چه منحنی‌هایی می‌سازند؟

مسأله را در حالت کلی مورد بررسی قرار می‌دهیم. توجه خود را به رابطهٔ $|\mathrm{FP}| = ed(\mathrm{P}, l)$ جلب

می‌کنیم. پیش از این دیدیم که به‌ازای $e = ۱$ این رابطه یک سهمی می‌سازد. حال نشان می‌دهیم این رابطه برای $۰ < e < ۱$ بیضی و برای $e > ۱$ هذلولی می‌سازد.

مثال ۴۷.۹: برای l و F داده شده، فرض کنید l' خطّی عمود بر l باشد که از F می‌گذرد و l را در نقطهٔ D قطع می‌کند. همچنین فرض کنید $۰ < e < ۱$. نشان دهید:

آ. دو نقطهٔ A و B بر l' وجود دارند که $|FA| = e|AD|$ و $|FB| = e|BD|$.

ب. نقاط F، A و B در یک طرف خطّ l قرار دارند.

ج. نقطهٔ F بین نقاط A و B قرار دارد.

د. یکی و فقط یکی از نقاط A و B بین F و D قرار دارد.

فرض کنید A بین F و D باشد. وسط پاره‌خطّ AB را O می‌نامیم و طول پاره‌خط‌های OA، OF و OD را به‌ترتیب با a، f و d نشان می‌دهیم. در این‌صورت:

ه. $f = ea$، $a = ed$ و $f = e^۲ d$.

و. اگر مبدأ مختصات بر O و محور xها بر l' منطبق باشد، آن‌گاه برای $P = (x, y)$ داریم:

$$|PF| = ed(P, l) \text{ اگر و تنها اگر } \frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{a^۲ - f^۲} = ۱$$

پاسخ: برای موارد (آ) تا (د)، کافی است محور اعداد حقیقی را چنان بر l' منطبق کنیم که F بر مبدأ و D بر $x = -d$ واقع باشد که در آن $d > ۰$. در این صورت $|FA| = e|AD|$ به‌صورت $|x| = e|x + d|$ نوشته می‌شود که با حل معادله در سه حالتِ $x < -d$، $-d \leqslant x < ۰$ و $x \geqslant ۰$ به‌جواب‌های $x_۱ = \frac{d}{۱ - e}$ و $x_۲ = \frac{-d}{۱ + e}$ می‌رسیم که داریم $x_۱ > ۰$ و $-d < x_۱ < ۰$.

بنا به مورد (د) عددی حقیقی و مثبت مانند $d < a < f < ۰$ وجود دارد که $A = (a, ۰)$ و $B = (-a, ۰)$.

بنابراین، از $|FA| = e|AD|$ داریم $a - f = e(d - a)$ و از $|FB| = e|BD|$ داریم $f + a = e(d + a)$. درنتیجه:

$$\begin{cases} f + a = ed + ea \\ a - f = ed - ea \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = ed \\ f = ea \end{cases} \Longleftrightarrow f = e^۲ d$$ ■

به‌طور مشابه برای $e > ۱$ نیز شرایط مشابهی را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم اگر $e > ۱$ آن‌گاه مجموعهٔ همهٔ نقاط P که $|PF| = e\, d(P, l)$ یک هذلولی می‌سازند.

مثال ۴۸.۹: فرض کنید $e > ۱$، خطِّ l و نقطهٔ F داده شده‌اند. خطِّ l' را از F بر l عمود می‌کنیم تا l را در نقطهٔ D قطع کند. نشان دهید:

آ. تنها یک نقطه مانند A بر l' وجود دارد که $|AF| = e|AD|$.

ب. A از مورد (آ) بین F و D قرار دارد.

ج. نشان دهید نقاط P که $|PF| = e \,.\, d(P, l)$ یک هذلولی می‌سازند.

پاسخ: مشابه مثال قبل عمل کنید. ■

قضیه ۳.۹: برای هر خطِّ l، نقطهٔ F غیر واقع بر l و عدد حقیقیِ مثبتِ e، مجموعهٔ همهٔ نقاطِ P که $|PF| = e \,.\, d(P, l)$

آ. بیضی می‌سازد اگر و تنها اگر $۰ < e < ۱$

ب. سهمی می‌سازد اگر و تنها اگر $e = ۱$.

ج. هذلولی می‌سازد اگر و تنها اگر $e > ۱$.

اثبات: با توجه به مثال‌های فوق و آنچه در مورد سهمی دیدیم واضح است. ■

بنا به قضیهٔ فوق، برای خطی مانند $l: \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$، نقطه‌ای مانند $\mathrm{F}=(\alpha,\beta)$ و عدد حقیقیِ مثبتی مانند e، مجموعهٔ همه نقاطی مانند $\mathrm{P}=(x,y)$ که $|\mathrm{PF}|=e\,.\,d(\mathrm{P},l)$ به‌صورت زیر، به‌عنوان یک رابطه قابل بیان است.

$$\mathrm{R}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:\ \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=e\left(\frac{|\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}\right)\right\}$$

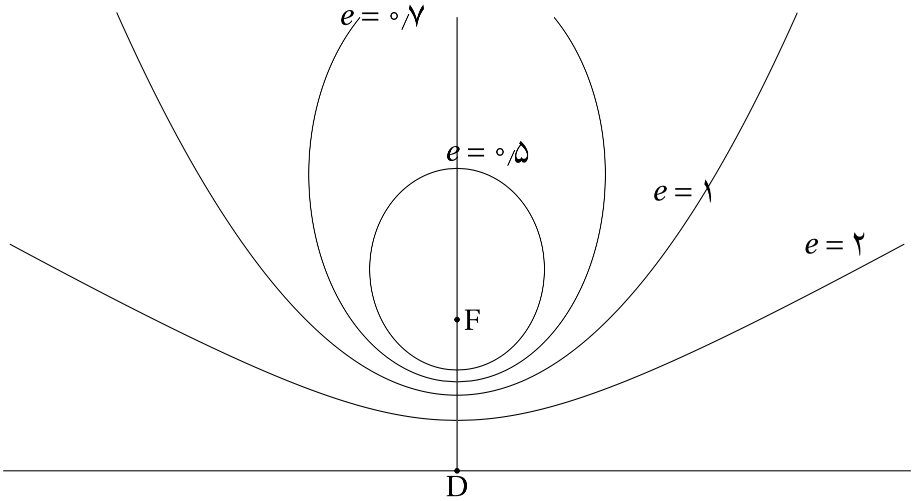
چون معادلهٔ $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$ معادلهٔ یک خط در صفحه است، داریم $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2\neq 0$ بنابراین $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2>0$ و همچنین داریم $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\geqslant 0$. بنابراین، می‌توانیم روابط دوشرطیِ زیر را داشته باشیم:

$$\begin{aligned}(x,y)\in\mathrm{R} &\iff \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=e\left(\tfrac{|\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}\right)\\ &\iff (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2\left(\tfrac{(\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C})^2}{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}\right)\end{aligned}$$

با ساده کردن عبارت فوق به $ax^2+2bxy+cy^2+2hx+2gy+f=0$ می‌رسیم که در آن:

$$\begin{cases} a=\mathrm{B}^2+(1-e^2)\mathrm{A}^2\\ b=e^2\mathrm{AB}\\ c=\mathrm{A}^2+(1-e^2)\mathrm{B}^2\end{cases}$$

شکل زیر درک شهودی از e که «گریز از مرکز خوانده می‌شود را بهبود می‌بخشد.



فصل ۱۰

توابع

آنچه امروزه با عنوان مفهوم تابع می‌شناسیم، در قرن نوزدهم بر پایهٔ نظریه مجموعه‌ها بنا شده است و با جدا شدن از تجربیات روزمره، چنان مجرد گشته که تا پیش از آن هیچ اثری از آن دیده نمی‌شود. اما کلمهٔ تابع اولین بار در قرن هفدهم معرفی شد و مفهومی ابتدایی از آن شکل گرفت. البته مفهومی ساده از تابع، در تجربیات زندگی بشر در تمامی اعصار و قرون حضور داشته است.

در این فصل با مروری بر داستان تولد کلمهٔ تابع (Function) در قرن هفدهم، با مفهوم اولیهٔ تابع آشنا شده و سپس در قرن نوزدهم به مفهوم مدرن تابع تبدیل شده است.

۱.۱۰ تولد تابع

توجه!..........توجه!
با دقت بخوانید...
ادبیات داستانی این مطالب شما را از اهمیت آن غافل نکند.

مفهوم تابع را در وهله اول باید محصول ریاضیات نمادین و عبارت‌های محاسباتی دانست. در قرن چهاردهم، اورسم[1]، نمادی شبیه به «+» را از روی کلمهٔ «et» به‌معنای «وَ» (and) ساخت که به‌معنای جمع است. ریاضیات نمادین به‌طور جدی، یک قرن بعد، در سال ۱۴۹۴ میلادی با کتاب «سوما» اثر «لوکا پاچیولی»[2] آغاز شد. در جدول زیر، برخی از نمادگذاری‌های ابداعیِ پاچیولی را مشاهده می‌کنیم.

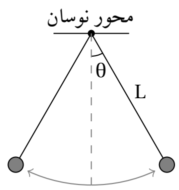
ae	*coce*	*cu*	*ce*	*co*	*m*	*p*
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
aequalis	censocenso	cuba	censo	cosa	meno	piu
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
تساوی	x^4	x^3	x^2	$x =$ شیء	کمتر	بیشتر

در سال ۱۵۱۴ نمادهای + و − را «واندرهوکه»[3]، ریاضیدان هلندی برای اولین بار به‌کار برد و در سال ۱۵۲۵ «کریستوف رودولف»[4] نماد $\sqrt{\ }$ را احتمالاً از روی حرف r ساخت که حرف اول radix، به‌معنای «ریشه» است. در سال ۱۵۴۴ شتیفل کتاب مهمی در ریاضیات نوشت و در آن علاوه بر استفاده از نمادهای +، − و $\sqrt{\ }$، با نمایش مجهول‌ها با حروف الفبا نقش مهمی در اشاعه

[1] Nicole d' Oresme (1323-1382)
[2] Luca Pacioli (1447 - 1517; Italy)
[3] Giel Vander Hoecke
[4] Christoph Rodolf

ریاضیات نمادین ایفا کرد. پس از وی جیرولامو کاردانو[۵]، کتاب مشهور خویش «ارس‌مگنا»[۶] را به لاتین نوشت که اولین رساله‌ای است که اختصاصاً به جبر می‌پردازد. هرچند اعداد منفی با کارهای هندیان و ریاضیدانان مسلمانی همچون خوارزمی و ابوکامل، ظهور کرده بودند و به اروپا رسیده بودند، اما همواره این جواب‌ها را بی‌معنا و دروغ می‌دانستند. اولین‌بار در این کتاب وجود ریشه‌های منفی پذیرفته شده و اعداد صحیح شکل گرفت. بدین‌ترتیب، کاردانو نگاهی نمادگرایانه به ریاضیات ارائه کرد. این دیدگاه چنان رشد یافت که در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم، دیوید هیلبرت[۷] ریاضیات را صرفاً بازی با نمادها دانسته و دیدگاه نمادگرایی را به‌طور رسمی معرفی نمود.

در اواخر قرن شانزدهم، فرانسوا ویت[۱] با نوشتن کتاب «مدخل فنون تحلیل» نقش مهمی در بسط جبر علامتی ایفا کرد؛ چنان که برخی آغاز ریاضیات نمادین را از او می‌دانند. وی از حروف صدادار برای کمیت‌های مجهول و از حروف بی‌صدا برای نمایش کمیت‌های معلوم استفاده کرد. رنه دکارت[۲] روّیهٔ فرانسوا ویت را تغییر داد. وی از حروف آخر الفبا برای مجهول‌ها و از حروف اول آن برای معلوم‌ها استفاده کرد که امروزه نیز کاربرد دارد. در این زمان، گالیلئو گالیله[۳]، با مطالعه بر حرکت آونگ (پاندول)، به نتایج مهمی دست یافته بود.[۴]



هر آونگ شامل وزنه‌ای است که با طنابی به یک نقطه آویزان شده است. وزنه را کشیده، رها می‌کنیم و آونگ حرکتی نوسانی انجام می‌دهد. به زمان یک نوسان کامل، دوره تناوب نوسان گوییم. بیشترین زاویه‌ای که طناب با خطی عمود بر سطح زمین می‌سازد، زاویهٔ نوسان خوانده می‌شود. گالیله با آزمایش‌های فراوان دریافت که زمان یک نوسان کامل (دوره تناوب) فقط به طول طناب بستگی دارد و ارتباطی با وزن وزنه یا زاویهٔ نوسان ندارد.

بدین‌ترتیب با تغییر طول طناب می‌توان دوره تناوب را تغییر داد. وی توانست یک عبارت محاسباتی برای محاسبهٔ دوره تناوب برحسب طول طناب به‌دست آورد. وی دریافت که دوره تناوب نوسان، ضریبی از $\sqrt{\mathrm{L}}$ است که در آن L به طول طناب اشاره دارد. بدین ترتیب می‌توان قرار داد $\mathrm{T} \approx k\sqrt{\mathrm{L}}$ که T دوره تناوب را نشان می‌دهد و k عددی ثابت است.

تا زمان گالیله، عبارت‌های محاسباتی شکل گرفته و متغییرها توسط فرانسوا ویت ابداع شده بودند.، با درنظر گرفتن L و T به‌عنوان دو متغیر، می‌بینیم که مقدارِ L به‌طور مستقل تعیین می‌شود، اما مقدارِ T به مقدار L وابسته است. بنابراین، L را متغیر مستقل و T را متغیر وابسته گوییم.

مثال ۱.۱۰: خودرویی را درنظر بگیرید که با سرعت ثابت، در مسیری مستقیم، از جلوی دانشگاه می‌گذرد. فاصلهٔ خودرو از درب دانشگاه که آن را با متغیر d نشان می‌دهیم، در بین متغیرهای زیر، به کدام متغیرها وابسته و از کدام متغیرها مستقل است؟

آ. m: وزن خودرو ب. t: سن راننده w: وزن راننده

ج. l: طول خودرو. د. v: سرعت خودرو ه. p: قدرت موتور خودرو

و. t: مدت زمانی که از قرار گرفتن خودرو در کنار ما، گذشته است

[۵] Gerolamo Cardano (1501 - 1576; Italy)

[۶] Ars Magna

[۷] David Hilbert (1862 - 1943; Germany)

[۱] Francois Viete (1540-1603; France)

[۲] Rene Descates (1596 - 1650; France)

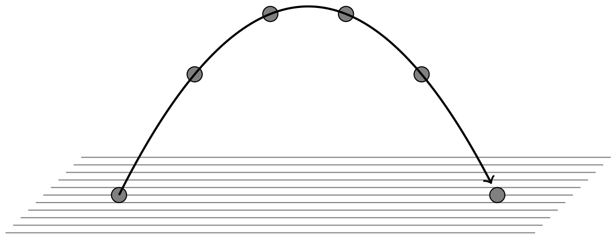
[۳] Galileo Galilei (1564 - 1643; Italy)

[۴] Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, OXFORD UNIVERSITY PRESS, New York, 1972, P. 335 - 340

پاسخ: مقدار d فقط به v و t وابسته است و از بقیه متغیرها مستقل است. ■

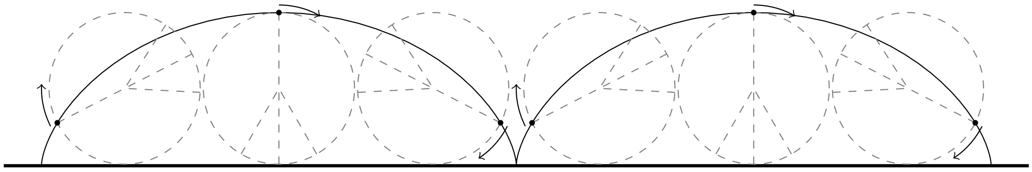
گالیله، علاوه‌بر حرکت پاندول، به سقوط اجسام علاقه نشان داد و مشاهده کرد که زمان سقوط اجسام از وزن آنها مستقل است و فقط به ارتفاع سقوط بستگی دارد. اگر زمان سقوط از ارتفاع h را با t نشان دهیم، داریم $t \approx \sqrt{\frac{h}{5}}$. در این مورد نیز، h (ارتفاع سقوط) متغیر مستقل، و t (زمان سقوط) متغیر وابسته است.

گالیله اولین کسی بود که نشان داد مسیر حرکت جسمی که با زاویه‌ای غیر قائم نسبت به زمین، به هوا پرتاب می‌شود، بخشی از یک سهمی است.



در اواخر قرن شانزدهم، رنه دکارت[۱] هندسه تحلیلی[۲] را معرفی کرد. هرچند پیش از این نیز کارهایی در این زمینه صورت گرفته بود، اما رنه دکارت بیش از هر کسی قابلیت‌های بالای هندسه تحلیلی را نشان داد و ریاضیدانان قرن هفدهم مجذوب آن شدند.

مرسن (Mersenne)، در سال ۱۶۱۵ منحنی زیر با نام سیکلوئید را به‌عنوان مکان هندسی نقطه‌ای بر چرخی تعریف کرد که بر زمینی هموار می‌غلتد. شکل زیر یک سیکلوئید را نشان می‌دهد.



بدین‌ترتیب، مفهوم منحنی روزبه‌روز مشخص‌تر شد و با تلاش‌های جان والیس[۳]، ایزاک برو[۴] و ایزاک نیوتن[۵] به‌عنوان مسیر نقطه‌ای متحرک مورد پذیرش قرارگرفت. نیوتن در سال ۱۶۷۶ می‌نویسد:

> من مقادیر ریاضی را در مقام توصیف حرکتی پیوسته مورد بررسی قرار می‌دهم...

ایزاک نیوتون، از سال ۱۶۶۵، در تمام کارهایش مفهوم «تابع» را با عبارت «Fluent» معرفی کرد. لایب‌نیتز[۶] که علاوه‌بر تمامی ریاضیات، بر علوم دیگر از جمله زبانشناسی نیز تسلط داشت، در سال ۱۶۷۳ کلمهٔ «Function» را در توصیف مقادیر مرتبط با منحنی‌ها مانند شیب در نقطه‌ای خاص، به‌کار بُرد. کلمهٔ Function به‌معنای «عملکرد» است اما در فارسی به «تابع» ترجمه شده است. هرچند از نظر معنای لغتی، کلمهٔ «تابع» با کلمهٔ «Function» بیگانه‌است، اما انتخابی مناسب برای این مفهوم است. در واقع، کلمهٔ «تابع» به تبعیت کردنِ متغیر وابسته از متغیر مستقل اشاره دارد.

در سال ۱۶۶۷، جیمز گریگوری[۷] مفهوم تابع (عملکرد) را مقداری تعریف کرد که از مقادیر دیگر،

---

[۱] Rene Descartes (1540 - 1603; France)
[۲] Analytic Geometry
[۳] John Walis (1616-1703; United Kingdom)
[۴] Issaac Bsrrow (1630 - 1677; England)
[۵] Issaac Newton (1642-1727; United Kingdom)
[۶] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716; Germany)
[۷] James Gregory (1638 - 1675; Scotland)

با اعمال جبری یا هر عمل قابل تصور دیگری به‌دست می‌آید. این اولین توصیف مفهوم تابع (عملکرد) است. جان برنولی[8] عبارت‌هایی که با یک متغیر ساخته می‌شوند را تابع نامید و در سال ۱۶۹۸ با لایب‌نیتز به توافق رسیدند که «هر عبارت محاسباتی که به شیوه‌های جبری یا متعالی ساخته می‌شوند را تابع نامند». جان برنولی در ۱۷۱۸ در توصیف تابع گفت «عبارتی که از یک متغیر و چند ثابت تشکیل شده باشد». در حدود ۱۷۳۴ لئونهارد اویلر[9]، حرف اول کلمهٔ Function را گرفته و از نماد $f(x)$ برای عملکردِ f بر متغیر مستقل x استفاده کرد. آنچه اویلر تابع نامید، امروزه با عنوان «عبارت تحلیلی» (Analytic Expression) شناخته می‌شود.

در این دوران کلمهٔ «Function» (به‌معنای عملکرد) بر نتیجهٔ عملیاتی محاسباتی بر یک عدد اشاره داشت که آن عملیات محاسباتی معمولاً با استفاده از متغیرها و به‌صورت یک عبارت محاسباتی بیان می‌شود. بدین‌ترتیب، هر عبارت محاسباتی یک تابع را مشخص می‌سازد. در زیر چند نمونه از این عبارت‌های محاسباتی را مشاهده می‌کنیم.

$$f(x) = 1 \quad f(x) = x \quad f(x) = x^2 \quad f(x) = \sqrt{x} \quad f(x) = 2^x \quad f(x) = e^x$$

هر تابعِ مانند f عملیاتی محاسباتی است که با عبارتی محاسباتی مانند $f(x)$ بیان می‌شود و این عبارت، اَعمالی محاسباتی را نشان می‌دهد که بر متغیر x اِعمال می‌شوند. نتیجهٔ عملکرد تابعِ (عملیات محاسباتیِ) f بر عددی مانند $a \in \mathbb{R}$ را با $f(a)$، به‌معنای عملکرد عملیات f بر a نمایش می‌دهیم.

با توجه به دستگاه‌هایی مانند «چرخ‌گوشت»، «آب‌میوه‌گیری» و ... که هرکدام ورودی‌هایی داشته، عملیاتی (اَعمالی) خاص بر آنها انجام داده و در نهایت خروجی‌هایی نیز تولید می‌کنند، می‌توان عملیات محاسباتیِ f را دستگاهی در نظر گرفت که بر هر ورودی مانند x اعمالی انجام می‌دهد و نماد $f(x)$ به خروجیِ آن (نتیجهٔ عملکرد f بر x) اشاره دارد. بدین‌ترتیب، هر تابع (عملیات محاسباتی) را یک دستگاه ورودی - خروجی درنظر می‌گیریم.

$$f(x) \longleftarrow \boxed{\quad f \quad} \longleftarrow x$$

۱.۱.۱۰ دامنه و برد تابع

تابعی مانند $f(x) = \sqrt{x}$ به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ بامعنا نیست. به‌عبارتی تابع f هر عدد حقیقی را به‌عنوان ورودی نمی‌پذیرد. مجموعهٔ همهٔ $x \in \mathbb{R}$هایی که به‌ازای آنها عبارت $f(x)$ بامعناست را دامنهٔ تابع f می‌گوییم و آن را با D_f نمایش می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، برای $x \in \mathbb{R}$ داریم $x \in \mathrm{D}_f$ اگر و تنها اگر عددی حقیقی مانند $y \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $y = f(x)$. این مطلب را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$\mathrm{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$$

در نگاه دستگاه ورودی خروجی به تابع گوییم تمام مقادیری از x که تابعِ f به‌عنوان ورودی می‌پذیرد و برای آنها خروجی تولید می‌کند را دامنهٔ تابع گوییم.

---

[8] Johann Bernoulli (1667 - 1748; Switzerland)

[9] Leonhard Euler (1707 - 1783; Switzerland)

مثال ۲.۱۰: دامنهٔ هر یک از توابع زیر را بیابید.

آ . $f(x) = ۱$ ب . $f(x) = x^{۲}$ ج . $f(x) = x^{-۲}$

د . $f(x) = x^{\sqrt{۲}}$ هـ . $f(x) = \sqrt{x}$ و . $f(x) = \sqrt[۳]{x}$

ز . $f(x) = ۲^{x}$ ح . $f(x) = \log_{۲} x$ ط . $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{-۱}$

پاسخ: آ . از آنجا که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، تابع f دارای خروجی است (خروجی آن ۱ است) پس $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

ب . برای هر $x \in \mathbb{R}$، عبارت $x^{۲}$ بامعناست. درنتیجه $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$

ج . داریم $x^{-۲} = \frac{۱}{x^{۲}}$ که فقط به‌ازای $x = ۰$ بی‌معناست. درنتیجه $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{۰\} = (-\infty, ۰) \cup (۰, +\infty)$.

د . در فصل‌های قبل دیدیم که $x^{\sqrt{۲}}$ بامعناست اگر و تنها اگر $x \in [۰, +\infty)$. بنابراین، $\mathrm{D}_f = [۰, +\infty)$.

هـ . در فصل‌های قبل دیدیم که $\sqrt{x}$ فقط برای $x \geq ۰$ بامعناست. بنابراین $\mathrm{D}_f = [۰, +\infty)$.

و . در فصل‌های قبل دیدیم که $\sqrt[۳]{x}$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ بامعناست. درنتیجه $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

ز . در فصل‌های قبل دیدیم که برای هر $a \in \mathbb{R}^{+}$ و هر $x \in \mathbb{R}$، عبارت a^{x} بامعناست درنتیجه ۲^{x} برای هر $x \in \mathbb{R}$ بامعناست. بنابراین $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

ح . در فصل‌های قبل دیدیم که برای هر $a \in \mathbb{R}^{+}$ که $a \neq ۰$ و هر $x \in \mathbb{R}^{+}$، عبارت $\log_{a} x$ بامعناست. بنابراین $\log_{۲} x$ نیز برای هر $x \in \mathbb{R}^{+}$ بامعناست و درنتیجه $\mathrm{D}_f = (۰, +\infty)$.

ط . عبارت $\frac{۱}{\sqrt{x}}$ زمانی بامعناست که $\sqrt{x}$ بامعنا بوده و مخرج کسر نیز مخالف صفر باشد. درنتیجه $f(x)$ برای هر $x \in (۰, +\infty)$ بامعناست. بنابراین، $\mathrm{D}_f = (۰, +\infty)$. ■

به‌طور مشابه، تمام مقادیری که تابع f به‌عنوان خروجی تحویل می‌دهد را بُرد f گفته و با R_f نمایش می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، $y \in \mathrm{R}_f$ اگر و تنها اگر $x \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $y = f(x)$. معمولاً به‌طور رسمی می‌نویسیم:

$$\mathrm{R}_f = \left\{ f(x) \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

مثال ۳.۱۰: بُرد توابع زیر را بیابید.

آ . $f(x) = ۱$ ب . $f(x) = x$ ج . $f(x) = x^{۲}$

د . $f(x) = \sqrt{x}$ هـ . $f(x) = \sqrt[۳]{x}$ و . $f(x) = x^{-۱}$

ز . $f(x) = ۲^{x}$ ح . $f(x) = ۰/۵^{x}$ ط . $\ln x$

پاسخ: آ . تابع f فقط یک خروجی دارد و آن هم $f(x) = ۱$ بنابراین $\mathrm{R}_f = \{۱\}$.

ب . برای هر $a \in \mathbb{R}$ داریم $a \in \mathrm{R}_f$، چون با قرار دادن $x = a$ داریم $f(x) = a$. بنابراین $\mathrm{R}_f \subset \mathbb{R}$. از طرفی هم $\mathbb{R}$ مجموعهٔ مرجع است. درنتیجه $\mathrm{R}_f = \mathbb{R}$.

ج . برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $f(x) = x^{۲} \geq ۰$ درنتیجه $\mathrm{R}_f \subset [۰, +\infty)$. از طرفی هم برای هر $a \in [۰, +\infty)$ با قرار دادن $x = \sqrt{a}$ داریم $f(\sqrt{a}) = (\sqrt{a})^{۲} = a$. درنتیجه $[۰, +\infty) \subset \mathrm{R}_f$. بنابراین $\mathrm{R}_f = [۰, +\infty)$.

د . بنا به تعریف $\sqrt{x}$، داریم $\mathrm{R}_f \subset [۰, +\infty)$. از طرفی هم برای هر $a \in [۰, +\infty)$ با قرار دادن $x = a^{۲}$ داریم $f(a^{۲}) = a$. بنابراین، $\mathrm{R}_f = [۰, +\infty)$.

هـ . $\mathrm{R}_f = \mathbb{R}$. حل آن به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

و . برای هر $a \neq ۰$ داریم $a = \left(\frac{۱}{a}\right)^{-۱}$. همچنین برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $x^{-۱} \neq ۰$. بنابراین $\mathrm{R}_f = \mathbb{R} - \{۰\} = (-\infty, ۰) \cup (۰, +\infty)$.

ز . باتوجه به دامنهٔ تابع $\log_{۲} x$، برای هر $a \in (۰, +\infty)$، عبارت $\log_{۲} a$ بامعناست و چون $a = ۲^{\log_{۲} a}$ پس $\mathrm{R}_f \subset (۰, +\infty)$.

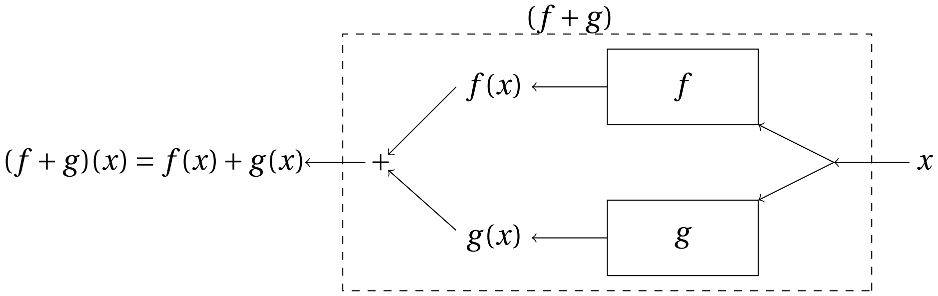
از طرفی هم چون $۲ > ۰$ پس برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $۲^{x} > ۰$. بنابراین $\mathrm{R}_f = (۰, +\infty)$.

ح . $\mathrm{R}_f = (۰, +\infty)$. (مشابه مورد قبل عمل کنید.)

ط . $\ln x = \log_{e} x$ که $e \approx ۲/۷۱ > ۱$. بنابراین، چون برای هر $a \in \mathbb{R}$ عبارت e^{a} بامعنا بوده و $e^{a} > ۰$ پس $\ln e^{a}$ برای هر $a \in \mathbb{R}$ بامعناست و از طرفی هم داریم $a = \ln e^{a}$ درنتیجه $\mathbb{R} \subset \mathrm{R}_f$. بنابراین، $\mathrm{R}_f = \mathbb{R}$. ■

۲.۱.۱۰ جبر توابع

برای هر دو عبارت محاسباتی مانند $f(x)$ و $g(x)$، عبارت $f(x)+g(x)$، عبارت محاسباتی جدیدی است که با دیدگاه دستگاه ورودی - خروجی، می‌توان آن را با $(f+g)$ نمایش داد. در واقع، $(f+g)$ تابعی را مشخص می‌سازد که برای هر ورودی مانند x، مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ را محاسبه کرده، حاصل‌جمع آنها را به‌عنوان خروجی باز می‌گرداند.



به‌طور مشابه، می‌توانیم توابع $f-g$، $f\cdot g$ و $\dfrac{f}{g}$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم.

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

مثال ۴.۱۰: برای $f(x)=x^۲+۱$، $g(x)=\log_{۱۰}x$ و $h(x)=\sqrt[۳]{x}$، توابع زیر را بیابید.

آ. $(f+g)(x)$ ب. $(f-g)(x)$ ج. $(g-f)(x)$

د. $(f.g)(x)$ هـ. $(f/g)(x)$ و. $(g/f)(x)$

ز. $(f+h)(x)$ ح. $(g+h)(x)$ ط. $(g/h)(x)$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۵.۱۰: نشان دهید:

آ. $D_{f+g}=D_f\cap D_g$ ب. $D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g$

ج. $D_{f-g}=D_f\cap D_g$ د. $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\in D_g:\ g(x)=۰\}$

پاسخ: آ. $x\in D_{f+g}$ اگر و تنها اگر $(f+g)(x)$ بامعنا باشد. چون $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ پس $(f+g)(x)$ بامعناست اگر و تنها اگر هر دو عبارت $f(x)$ و $g(x)$ بامعنا باشند. بدین ترتیب $x\in D_{f+g}$ اگر و تنها اگر $x\in D_f\cap D_g$. پس $D_{f+g}=D_f\cap D_g$.

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

مثال ۶.۱۰: دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

آ. $f(x)=\dfrac{۱}{x}+\sqrt{x}$ ب. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$ ج. $f(x)=\log_۲ x+\sqrt{-x}$

پاسخ: آ. با قرار دادن $g(x)=\dfrac{۱}{x}$ و $h(x)=\sqrt{x}$ داریم $f(x)=(g+h)(x)$ و در نتیجه $D_f=D_g\cap D_h=(\mathbb{R}-\{۰\})\cap[۰,+\infty)=(۰,+\infty)$.

ب . برای $g(x)=x$ و $h(x)=\sqrt{x}$ داریم $(x)\left(\frac{g}{h}\right)=f(x)$ پس
$.\mathrm{D}_f=\mathrm{D}_g\cap\mathrm{D}_h-\{x\in\mathrm{D}_h:\ h(x)=۰\}=\mathbb{R}\cap[۰,+\infty)-\{۰\}=(۰,+\infty)$

ج . برای $g(x)=\log_۲ x$ و $h(x)=\sqrt{-x}$ داریم $\mathrm{D}_g=(۰,+\infty)$ و $\mathrm{D}_h=(-\infty,۰]$ و درنتیجه
$\mathrm{D}_f=\mathrm{D}_{(g+h)}=\mathrm{D}_g\cap\mathrm{D}_h=\varnothing$ ■

۳.۱.۱۰ ترکیب توابع

برای هر عبارت محاسباتی مانند $f(x)$، عبارتی که از جایگذاری $y+۲$ به‌جای همه xهای عبارت $f(x)$ به‌دست می‌آید را با $f(y+۲)$ نمایش می‌دهیم. به‌طور مشابه، $f(x+۲)$ نیز عبارتی است که از جایگذاری $x+۲$ به‌جای همهٔ xهای عبارت $f(x)$ حاصل می‌شود.

به‌طور مثال برای $f(x)=x^۲+x+۱$ داریم: $f(x+۲)=(x+۲)^۲+(x+۲)+۱$

چون $f(x+۲)$ عبارتی محاسباتی بر حسب متغیر x است، می‌توان آن را تابعی دیگر در نظر گرفت. اگر این تابع را h بنامیم، داریم $h(x)=f(x+۲)$. پس $.h(x)=(x+۲)^۲+(x+۲)+۱$ بنابراین داریم:

$$
\begin{aligned}
h(y)&=(y+۲)^۲+(y+۲)+۱=f(y+۲)\\
h(y-۲)&=\big((y-۲)+۲\big)^۲+\big((y-۲)+۲\big)+۱=y^۲+y+۱=f(y)
\end{aligned}
$$

نکته‌ای ظریف ... به شباهت‌های و تفاوت‌های $f(g(x))$ و $f(g(a))$ در دو دیدگاه توجه کنید.

همچنین برای هر دو عبارت محاسباتی مانند $f(x)$ و $g(x)$، عبارتی که از جایگذاری عبارت $g(x)$ به‌جای همهٔ xهای عبارت $f(x)$ حاصل می‌شود را با $f(g(x))$ نمایش می‌دهیم. به‌طور مثال، فرض کنید $f(x)=x^۳-x^۲+x-۳$ و $g(x)=\log_۳ x$ در این صورت، داریم:

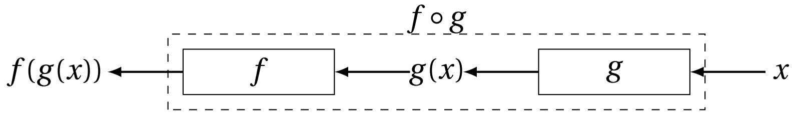
$$f(g(x))=\left(\log_۳ x\right)^۳-\left(\log_۳ x\right)^۲+\left(\log_۳ x\right)-۳$$

و برای $f(g(۹))$ داریم:

$$
\begin{aligned}
f(g(۹))&=\left(\log_۳ ۹\right)^۳-\left(\log_۳ ۹\right)^۲+\left(\log_۳ ۹\right)-۳\\
&=\left(g(۹)\right)^۳-\left(g(۹)\right)^۲+\left(g(۹)\right)-۳\\
&=\ ۲^۳\ -\ ۲^۲\ +\ ۲\ -۳\ =f(۲)
\end{aligned}
$$

بنابراین، برای محاسبهٔ $f(g(۹))$ می‌توان مقدار $g(۹)$ را محاسبه کرد و چون $g(۹)=۲$، به‌جای $f(g(۹))$، مقدار $f(۲)$ را محاسبه نمود. به‌طور مشابه، برای هر دو تابع f و g و هر $a\in\mathbb{R}$، مقدار $f(g(a))$ از جایگذاری مقدارِ $g(a)$ به‌جای x در $f(x)$ به‌دست می‌آید.

اگر توابع را به‌عنوان دستگاه‌های ورودی - خروجی درنظر بگیریم، برای محاسبهٔ $f(g(a))$، نخست a را به g داده، $g(a)$ از آن خارج می‌شود و $g(a)$ را به‌عنوان ورودی به f داده، $f(g(a))$ از آن خارج می‌شود. بنابراین، می‌توانیم مطابق شکل زیر، دو دستگاه (تابع) f و g را در کنار هم، به‌عنوان دستگاه (تابع) جدیدی مرکّب از هر دو درنظر بگیریم، و آن را با $f\circ g$ نمایش دهیم.



بنابراین، برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم $.(f\circ g)(x)=f(g(x))$

مثال ۷.۱۰: برای $f(x)=\log_۲ x$ و $g(x)=\sqrt[۳]{x+۴}$، مقادیر زیر را محاسبه کنید.

آ. $(f\circ g)(۴)$ ب. $(f\circ g)(-۳)$ ج. $(g\circ f)(۱۶)$ د. $(g\circ f)(۱\div ۸)$

پاسخ: آ. $g(۴)=\sqrt[۳]{۴+۴}=۲$ در نتیجه $(f\circ g)(۴)=f(g(۴))=f(۲)=\log_۲ ۲=۱$

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

معمولاً $f(x)=x^۳+۱$ را تابعِ f با ضابطهٔ (قاعدهٔ) $x^۳+۱$ می‌خوانیم.

مثال ۸.۱۰: برای $f(x)=\sqrt[۳]{x^۳+x+۱}$ و $g(x)=۲^x$ و $h(x)=\log_۴ x$، ضابطهٔ هر یک از توابع زیر را بیابید.

آ. $f\circ g$ ب. $g\circ f$ ج. $f\circ h$ د. $h\circ f$

ه. $g\circ h$ و. $h\circ g$

پاسخ: آ. $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt[۳]{(g(x))^۳+۱}=\sqrt[۳]{(۲^x)^۳+۱}=\sqrt[۳]{۲^{۳x}+۱}$

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده وگذار می‌شوند. ■

با توجه به مثال فوق، برای هر $a\in\mathbb{R}$، عبارت $(f\circ g)(a)$ با معناست اگر و تنها اگر $g(a)$ بامعنا و عددی حقیقی باشد و همچنین $f(g(a))$ نیز بامعنا باشد. به‌عبارت دیگر، اگر عددی حقیقی مانند b وجود داشته باشد که $b=g(a)$ و $f(b)\in\mathbb{R}$. بنابراین:

$$\mathrm{D}_{f\circ g}=\{x\in \mathrm{D}_g:\ g(x)\in \mathrm{D}_f\}$$

به‌طور مثال برای $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۱-\sqrt{x}$، داریم $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{۱-\sqrt{x}}$ و چون $\mathrm{D}_g=\mathrm{D}_f=[۰,+\infty)$ پس $x\in\mathrm{D}_{f\circ g}$ اگر و تنها اگر $x\geq ۰$ و $g(x)\geq ۰$. بنابراین باید نامعادلهٔ $g(x)\geq ۰$ را حل کنیم.

$$g(x)\geq ۰ \Longleftrightarrow ۱-\sqrt{x}\geq ۰ \Longleftrightarrow ۱\geq \sqrt{x} \Longleftrightarrow ۰\leq x\leq ۱^۲=۱$$

بنابراین $\mathrm{D}_{f\circ g}=[۰,۱]$.

یکبار خواندن این مثال به تمامی خوانندگان پیشنهاد می‌شود.

مثال ۹.۱۰: در هر یک از موارد زیر دامنهٔ $f\circ g$ را بیابید.

آ. $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=-x$ ب. $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۱-x$

ج. $f(x)=\dfrac{۱}{x}$ و $g(x)=x^۲-۳x+۲$ د. $f(x)=\dfrac{\sqrt{۱+x}}{\sqrt{۱-x}}$ و $g(x)=\log_۲ x$

پاسخ: آ. $\mathrm{D}_f=[۰,+\infty)$ و $\mathrm{D}_g=\mathbb{R}$. بنابراین، $\mathrm{D}_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}:\ -x\geq ۰\}=(-\infty,۰]$.

ب. $\mathrm{D}_f=[۰,+\infty)$ و $\mathrm{D}_g=\mathbb{R}$ پس

$$\mathrm{D}_{f\circ g}=\{x\in\mathrm{D}_g:\ g(x)\in\mathrm{D}_f\}=\{x\in\mathbb{R}:\ x-۱\geq ۰\}=\{x\in\mathbb{R}:\ x\geq ۱\}$$

بنابراین $\mathrm{D}_{f\circ g}=[۱,+\infty)$.

ج. $\mathrm{D}_f=\mathbb{R}-\{۰\}$ و $\mathrm{D}_g=\mathbb{R}$ پس

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_{f\circ g}&=\{x\in\mathrm{D}_g:\ g(x)\neq ۰\}=\{x\in\mathbb{R}:\ x^۲-۳x+۲\neq ۰\}\\&=\{x\in\mathbb{R}:\ (x-۲)(x-۱)\neq ۰\}=\mathbb{R}-\{۱,۲\}\end{aligned}$$

د. برای محاسبهٔ دامنهٔ $f\circ g$ باید نخست D_f و D_g را بیابیم. $\mathrm{D}_g=(۰,+\infty)$. اما برای D_f باید از مطالب گذشته استفاده کرد. با استفاده از مطالب قبل داریم:

$D_f = D_{\sqrt{۱+x}} \cap D_{\sqrt{۱-x}} - \{x\colon \sqrt{۱-x} = ۰\} = [-۱, +\infty) \cap (-\infty, ۱] - \{۱\} = [-۱, ۱)$

بنابراین، $\{۱ > x_{۲}\log \geq ۱ - \colon D_f \circ g = D_g \cap \{x \in D_g\colon g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R}$. با توجه به اینکه $\log_۲ ۲ = ۱$ و $\log_۲ \frac{۱}{۲} = -۱$ و با توجه به تمرین (۲۵) از فصل چهارم داریم $D_{f\circ g} = [۰/۵, ۲)$. ■

تمرین:

(۱) دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

آ. $f(x) = \sqrt{۱ - \sqrt[۳]{x}}$ ب. $f(x) = \sqrt{۱ - |x|}$

ج. $f(x) = \dfrac{۱}{x - [x]}$ د. $f(x) = \sqrt{۱ - \big[|x| + ۱\big]}$

ه. $f(x) = \log_۲ [x]$ و. $f(x) = \ln |x|$

(۲) برد توابع زیر را بیابید.

آ. $f(x) = [x]$ ب. $f(x) = [\ln x]$ ج. $f(x) = \big[x - [x]\big]$

د. $f(x) = \big[[x] - x\big]$ ه. $\ln(x - [x])$ و. $\ln([x] - x)$

ز. $f(x) = ۲^{\sqrt{۱-x^۲}}$ ح. $f(x) = \sqrt{x^۲ + ۱}$ ط. $f(x) = \ln \sqrt{۱ + x^۲}$

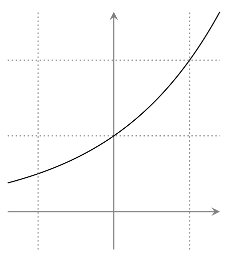
(۳) درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. $R_{f+g} = R_f \cap R_g$ ب. $R_{f+g} = R_f \cup R_g$

ج. $R_{f+g} = \{y + z\colon y \in R_f \text{ و } z \in R_g\}$ د. $R_{f+g} \subset \{y + z\colon y \in R_f \text{ و } z \in R_g\}$

۲.۱۰ رابطه و نمودار تابع

پیش از این، برای هر معادله‌ای مانند $y = x^۲ + ۱$، رابطهٔ $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\colon y = x^۲ + ۱\}$ را درنظر گرفته و نمودار این رابطه را نمودار معادله خواندیم. به‌طور مشابه برای هر تابعی مانند f نیز می‌توان معادلهٔ $y = f(x)$ را درنظر گرفته و نمودار این معادله را نمودار تابع f خواند که در واقع نمودار رابطهٔ $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\colon y = f(x)\}$ است. به‌طور مثال، برای تابع $f(x) = ۲^x$، عبارت $y = f(x)$ به معادلهٔ $y = ۲^x$ اشاره دارد که نمودار آن را نمودار تابع f می‌خوانیم. بدین‌ترتیب نمودار مقابل که نمودار معادلهٔ $y = ۲^x$ است را نیز، نمودار تابع $f(x) = ۲^x$ گوییم.



$f(x) = ۲^x$

مثال ۱۰.۱۰: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

آ. $f(x) = ۲x - ۱$ ب. $f(x) = x^۲ - ۳x + ۱$

ج. $f(x) = ۲^{|x|}$ د. $f(x) = ۰/۵^x$

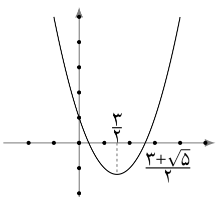
ه. $f(x) = \sqrt{۱ - x^۲}$ و. $f(x) = \sqrt{x^۲ - ۱}$

ز. $f(x) = -۲\sqrt{۱ - x^۲}$ ح. $f(x) = \frac{-۱}{۲}\sqrt{۱ - \frac{x^۲}{۴}}$

ط. $f(x) = \big|\log_۲ x\big|$ ی. $f(x) = \log_۲ \frac{۱}{x}$

پاسخ: آ. با توجه به روش‌های رسم معادلهٔ خط، کافی است نمودار $y = ۲x - ۱$ را رسم کنیم.

ب. با مربع کامل کردن داریم $y = f(x) = x^۲ - ۳x + ۱ = \left(x - \frac{۳}{۲}\right)^۲ - \frac{۵}{۴}$ که از نمودار $y = x^۲$ با انتقال به‌دست می‌آید.



با توجه به ریشه‌های معادله که $x = \dfrac{۳ + \sqrt{۵}}{۲}$ و $x = \dfrac{۳ - \sqrt{۵}}{۲}$ هستند، نمودار در این نقاط محور طول‌ها را قطع می‌کند و در $x = \dfrac{۳}{۲}$ تابعِ f کمترین مقدار خود، یعنی $y = f(\frac{۳}{۲}) = \dfrac{-۵}{۴}$ را می‌گیرد.

ج. نمودار $y = ۲^{|x|}$ را از روی نمودار $y = ۲^x$ به‌دست می‌آوریم.

د. با توجه به اینکه $۲^{-x} = \left(۲^{-۱}\right)^x = \left(\frac{۱}{۲}\right)^x = ۰/۵^x$ ساده است.

ه. داریم $y = \sqrt{۱ - x^۲}$ اگر و تنها اگر $y^۲ + x^۲ = ۱$ و $y \geq ۰$. ادامهٔ کار ساده است.

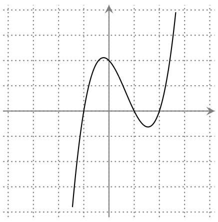
و. داریم $\left(y^۲ - x^۲ = ۱ \text{ و } y \geq ۰\right) \Longleftrightarrow y = \sqrt{x^۲ - ۱}$. بنابراین، کافی است نمودار $y^۲ - x^۲ = ۱$ را برای $y \geq ۰$ رسم کنیم که نمودار یک هذلولی است.

ز. با توجه به نمودار $g(x) = \sqrt{۱ - x^۲}$ به‌سادگی رسم می‌شود.

ح. با استفاده از نمودار $g(x) = \sqrt{۱ - x^۲}$، نمودار $f(x) = \frac{-۱}{۲} f\left(\frac{۱}{۲}\right)$ را رسم می‌کنیم.

ط. از روی نمودار $g(x) = \log_۲ x$، نمودار $f(x) = |g(x)|$ را رسم می‌کنیم.

ی. چون $\log_۲ \frac{۱}{x} = \log_۲ x^{-۱} = -\log_۲ x$ پس کافی است نمودار $f(x) = -\log_۲ x$ را رسم کنیم که با توجه به نمودار $g(x) = \log_۲ x$ به‌سادگی به‌دست می‌آید. ■

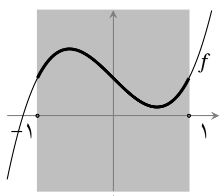


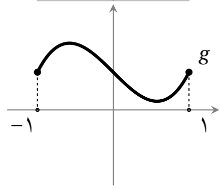
مثال ۱۱.۱۰: تابع $f(x) = x^۳ - ۲x^۲ - x + ۲$ دارای نمودار مقابل است. نمودار هر یک از توابع زیر را بیابید.

آ. $f(-x)$	ب. $-f(x)$	ج. $۲f(x)$
د. $f(۲x)$	ه. $f(\|x\|)$	و. $\left\|f(x)\right\|$
ز. $\left\|f(\|x\|)\right\|$	ح. $f(x-۱)$	ط. $f(x+۲)$
ی. $f(x)+۱$	ک. $f(x)-۱$	ل. $f(x-۲)+۱$

پاسخ: با توجه به مطالب بخش تبدیلات از فصل هندسهٔ تحلیلی، از نمودار تابع f به‌دست می‌آید و به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

۱.۲.۱۰ تحدید تابع





تحدید تابع، به‌معنای محدود کردن دامنهٔ تابع است. به‌طور مثال، در نمودار مقابل، بخشی از نمودار تابع f که در ناحیهٔ رنگی قرار دارد، نمودار نقاطی است که مؤلفهٔ اول آنها در بازهٔ $I = [-۱, ۱]$ قرار دارد. تحدید تابع f به بازهٔ I را به‌صورت $f|_I$ نمایش می‌دهیم. در این صورت اگر قرار دهیم $g = f|_I$، آنگاه تابع g دارای نمودار مقابل خواهد بود.

به‌طور مشابه برای هر مجموعه‌ای مانند D و هر تابعی مانند f می‌توان تحدید f به D را به‌معنای تابعی که از محدود کردن دامنهٔ f به مجموعهٔ D به‌دست می‌آید، در نظر گرفته و با $f|_D$ نمایش داد.

نکته‌ای ظریف...
تمام تلاش خود را به‌کار ببرید.

مثال ۱۲.۱۰: درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. $g = f|_D$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in D$ داشته باشیم $g(x) = f(x)$.

ب. $g = f|_D$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in D$ داشته باشیم $g(x) = f(x)$ و $D_g = D$.

ج. $g = f|_D$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in D_g$ داشته باشیم $g(x) = f(x)$ و $D_g = D$.

د. $g = f|_D$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in D_g$ داشته باشیم $g(x) = f(x)$ و $D_g = D \cap D_f$.

با دقت بخوانید...
بسیاری در پاسخ به این مثال اشتباه می‌کنند.
پاسخ ارائه شده را بخوانید.

پاسخ: آ. نادرست است. چون با توجه به گزارهٔ فوق، ممکن است تابع g بیرون از مجموعهٔ D نیز تعریف شده باشد. به‌طور مثال در صورت درست بودن این عبارت، برای دو تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{|x|}$ و برای $D = [۰, +\infty)$ داریم $g = f|_D$ که نادرست است.

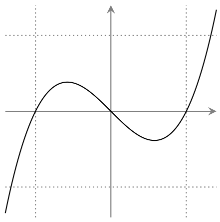
ب. نادرست است. چون ممکن است تابع f برای هر $x \in D$ تعریف شده نباشد. یعنی ممکن است $D \not\subset D_f$. به‌طور مثال برای $f(x) = \ln x$ و $D = [۰, +\infty)$ اگر $g = f|_D$ آنگاه $[۰, +\infty) = D \neq D_g = (۰, +\infty)$.

ج. نادرست است؛ البته اگر $D \not\subset D_f$. اما برای $D \subset D_f$ درست است.

د . درست است. ■

در مثال زیر می‌بینیم که با استفاده از ترکیب و جبر توابع، می‌توان برای هر عبارت محاسباتی مانند f، و بازه‌ای مانند $\mathrm{I}\subset\mathbb{R}$ عبارت محاسباتی دیگری مانند g یافت که برای هر $x\in\mathrm{D}_g=\mathrm{I}\cap\mathrm{D}_f$ داشته باشیم $g(x)=f(x)$.

پیشرفته - اختیاری
یکبار خواندن این مطالب به تمامی خوانندگان پیشنهاد می‌شود.



مثال ۱۳.۱۰: برای تابع $f(x)=x^{۳}-x$ با نمودار مقابل، هر یک از موارد زیر را به‌دست آورید.

آ . عبارتِ $f\left(\sqrt{x}\right)$ ب . عبارتِ $f\left((\sqrt{x})^{۲}\right)$ ج . دامنهٔ تابع $f(\sqrt{x}^{۲})$

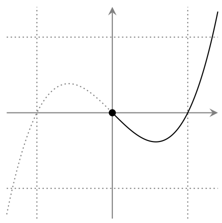
د . نمودارِ تابع $f(\sqrt{x}^{۲})$ ه . نمودارِ تابع $f(\sqrt{x-۱}^{۲})$ و . نمودارِ $f(\sqrt{x-۱}^{۲}+۱)$

پاسخ: آ . $f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^{۳}+\sqrt{x}$ ب . $f(\sqrt{x}^{۲})=\left(\sqrt{x}^{۲}\right)^{۳}-\left(\sqrt{x}^{۲}\right)$

ج . برای $g(x)=\sqrt{x}^{۲}$ داریم $f(\sqrt{x}^{۲})=f(g(x))$ که در آن $\mathrm{D}_f=\mathbb{R}$ و $\mathrm{D}_g=[۰,+\infty)$. پس

$$\mathrm{D}_{f\circ g}=\{x\in\mathrm{D}_g:\ g(x)\in\mathrm{D}_f\}=\{x\in\mathrm{D}_g:\ g(x)\in\mathbb{R}\}=\mathrm{D}_g\cap\{x\in\mathbb{R}:\ g(x)\in\mathbb{R}\}=\mathrm{D}_g\cap\mathrm{D}_g=\mathrm{D}_g$$

بنابراین، دامنهٔ $f(\sqrt{x}^{۲})$ برابر است با $[۰,+\infty)$.



د . چون برای هر $x\in[۰,+\infty)$ داریم $\sqrt{x}^{۲}=x$، پس برای هر $x\in[۰,+\infty)$ داریم $f(\sqrt{x}^{۲})=f(x)$ و برای هر $x\in\mathbb{R}$ که $x\notin[۰,+\infty)$، عبارت $f(\sqrt{x}^{۲})$ بی‌معناست. بنابراین، نمودار $f(\sqrt{x}^{۲})$ بخش‌هایی از نمودار $f(x)$ است که در آن $x\in[۰,+\infty)$. بنابراین، نمودار این تابع به شکل مقابل است.

ه . قرار می‌دهیم $g(x)=f(\sqrt{x}^{۲})$ و نمودار $g(x-۱)$ را با انتقال نمودار $g(x)$ به‌دست می‌آوریم.

و . قرار می‌دهیم $g(x)=f(x+۱)$ و نمودار $g(\sqrt{x-۱}^{۲})$ را رسم می‌کنیم که همان نمودار تابع f بر بازهٔ $[۱,+\infty)$ است. ■

مثال ۱۴.۱۰: نشان دهید برای هر تابع دلخواه مانند f و هر $a\in\mathbb{R}$ داریم:

آ . نمودار $f(\sqrt{x-a}^{۲}+a)$ بخشی از نمودار $f(x)$ است که در آن $x\in[a,+\infty)$.

ب . نمودار $f(a-\sqrt{a-x}^{۲})$ بخشی از نمودار $f(x)$ است که در آن $x\in(-\infty,a]$.

پاسخ: آ . برای $h(x)=\sqrt{x-a}^{۲}+a$ داریم $\mathrm{D}_h=[a,+\infty)$ و برای هر $x\in\mathrm{D}_h$ نیز داریم $h(x)=x$. بنابراین، برای هر $x\in\mathrm{D}_h$ داریم $f(h(x))=f(x)$.

ب . به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. (مشابه مورد قبل) ■

جالب و خواندنی ...
یکبار خواندن مثال و پاسخ به تمامی خوانندگان پیشنهاد می‌شود.

مثال ۱۵.۱۰: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

آ . $f(x)=۱$ ب . $f(x)=۰\times\sqrt{x}+۱$

ج . $f(x)=\dfrac{۰}{\sqrt{x}}+۱$ د . $f(x)=۰\times(\sqrt{x}\sqrt{۱-x})+۱$

ه . $f(x)=\dfrac{۰}{\sqrt{x}\sqrt{۱-x}}+۱$ و . $f(x)=\dfrac{۰\times\sqrt{x}}{\sqrt{۱-x}}+۱$

ز . $f(x)=(\sqrt{x}\sqrt{-x})+۱$ ح . $f(x)=\sqrt{x(۱-x)}\sqrt{-x(۱-x)})+۱$

ط . $f(x)=\sqrt{(x-۱)(x-۴)}\sqrt{-(x-۱)(x-۴)})+\dfrac{x-۱}{۴-۱}\times۲+\dfrac{x-۴}{۱-۴}\times۵$

پاسخ: آ . نمودار این تابع خطی است افقی که از نقطهٔ $(۰,۱)$ می‌گذرد.

ب . تحدید نمودار $y=۱$ به بازهٔ $[۰,+\infty)$ است.

ج. تحدید تابع $y = ۱$ به بازهٔ $(۰,+\infty)$ است.

د. اگر قرار دهیم $g(x) = \sqrt{x}\sqrt{۱-x}$، آن‌گاه $D_g = [۰,۱]$ و درنتیجه برای $f(x) = ۰ \times g + ۱$ نیز داریم $D_f = [۰,۱]$. پس نمودار $f(x)$ تحدید نمودار $y = ۱$ است به بازهٔ $[۰,۱]$.

ه. برای $g(x) = \frac{۰}{\sqrt{x}\sqrt{۱-x}}$ داریم $D_g = (۰,۱)$. پس نمودار $f(x)$ تحدید نمودار $y = ۱$ است به بازهٔ $(۰,۱)$.

و. تحدید نمودار $y = ۱$ است به بازهٔ $[۰,۱)$.

ز. برای $g(x) = \sqrt{x}\sqrt{-x}$ داریم $D_g = \{۰\}$. بنابراین فقط $f(۰)$ بامعناست و $f(۰) = ۱$.

ح. برای $g(x) = \sqrt{x(۱-x)}\sqrt{-x(۱-x)}$ داریم $D_g = \{۰,۱\}$ پس $f(x)$ فقط برای $x = ۰$ و $x = ۱$ بامعناست و داریم $f(۰) = f(۱) = ۱$.

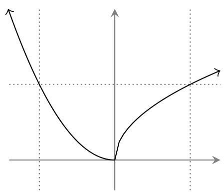
ط. مشابه مورد قبل، $f(x)$ فقط برای $x = ۱$ و $x = ۴$ بامعناست و داریم $f(۱) = ۵$ و $f(۴) = ۲$. ■

۲.۲.۱۰ توابع چندضابطه‌ای

مبتدی - ضروری

در عبارت زیر، تابعِ f با دو ضابطه تعریف شده است و آن را یک تابع دو ضابطه‌ای خوانیم. درواقع مقدار تابع f برای xهایی که $x \geq ۰$، از ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$ و برای xهایی که $x < ۰$، از ضابطهٔ $f(x) = x^۲$ به‌دست می‌آیند.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ;x \geq ۰ \\ x^۲ & ;x < ۰ \end{cases}$$



بدین‌ترتیب $f(۱)$ از ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$ به‌دست می‌آید؛ چون $۱ \geq ۰$، و درنتیجه $f(۱) = \sqrt{۱} = ۱$. همچنین $f(-۱)$ از ضابطهٔ $f(x) = x^۲$ به‌دست می‌آید، چون $-۱ < ۰$ و درنتیجه $f(-۱) = (-۱)^۲ = ۱$. بنابراین، تابع f دارای نمودار مقابل است.

مثال ۱۶.۱۰: برای تابع f مقادیر زیر را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ;x \in \mathbb{Q} \\ x^۲ & ;x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

آ. $f(۱)$ ب. $f(\sqrt{۲})$ ج. $f(۰)$ د. $f(-\sqrt{۲})$

ه. $f(\sqrt{۸})$ و. $f(\sqrt[۳]{۴})$ ز. $f(۴)$ ح. $f(-۴)$

پاسخ:

آ. $۱ \in \mathbb{Q} \Longrightarrow f(۱) = \sqrt{۱} = ۱$

ب. $\sqrt{۲} \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow f(\sqrt{۲}) = (\sqrt{۲})^۲ = ۲$

ج. $۰ \in \mathbb{Q} \Longrightarrow f(۰) = ۰^۲ = ۰$

د. $-\sqrt{۲} \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow f(-\sqrt{۲}) = (-\sqrt{۲})^۲ = ۲$

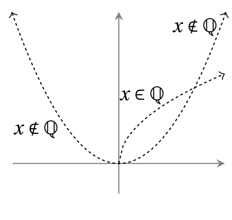
ه. $\sqrt{۸} \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow f(\sqrt{۸}) = (\sqrt{۸})^۲ = ۸$

و. $\sqrt[۳]{۴} \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow f(\sqrt[۳]{۴}) = (\sqrt[۳]{۴})^۲ = \sqrt[۳]{۱۶}$

ز. $۴ \in \mathbb{Q} \Longrightarrow f(۴) = \sqrt{۴} = ۲$

ح. $-۴ \in \mathbb{Q} \Longrightarrow f(-۴) = \sqrt{-۴}$; بی‌معناست ■

با توجه به مثال فوق واضح است که نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ;x \in \mathbb{Q} \\ x^۲ & ;x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ برای xهایی که $x \in \mathbb{Q}$ دقیقاً همان نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ است و برای xهایی که $x \notin \mathbb{Q}$، دقیقاً همان نمودار $f(x) = x^۲$ را نشان می‌دهد. اما مسئله این است که بین هر دو عدد حقیقی بی‌نهایت عدد گویا و بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد. بنابراین، نمی‌توان نمودار این تابع را رسم کرد. اما برای نمایش آن این دو نمودار را صرفاً به‌صورت نقطه‌چین رسم کرده و توضیح می‌دهیم. به شکل مجاور توجه کنید.



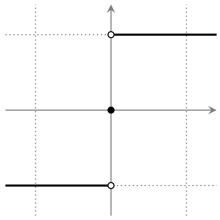
مثال ۱۷.۱۰: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

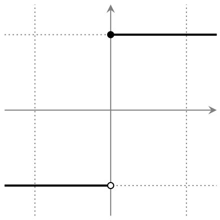
آ . $f(x)=\begin{cases} ۱ & ;x>۰ \\ ۰ & ;x=۰ \\ -۱ & ;x<۰ \end{cases}$ ب . $f(x)=\begin{cases} ۱ & ;x\geq ۰ \\ -۱ & ;x<۰ \end{cases}$

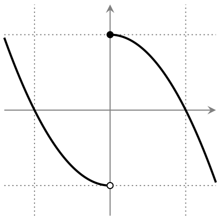
ج . $f(x)=\begin{cases} ۱-x^۲ & ;x\geq ۰ \\ x^۲-۱ & ;x<۰ \end{cases}$ د . $f(x)=\begin{cases} ۱-x^۲ & ;x>۰ \\ x^۲-۱ & ;x\leq ۰ \end{cases}$

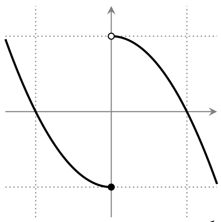
ه . $f(x)=\begin{cases} \sqrt{۱-x^۲} & ;x\geq ۰ \\ -\sqrt{۱-x^۲} & ;x<۰ \end{cases}$ و . $f(x)=\begin{cases} \sqrt{۱-\frac{x^۲}{۴}} & ;x\leq ۰ \\ \sqrt{x^۲-۱} & ;x>۰ \end{cases}$

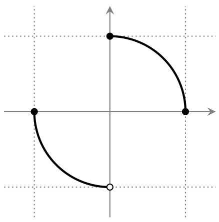
پاسخ: به رسم نمودارها اکتفا می‌کنیم. چگونگی به‌دست آوردن نمودارها با توجه به مطالب گذشته واضح است.

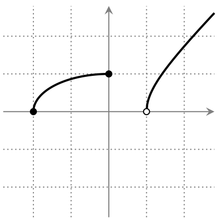
آ .


ب .


ج .


د .


ه .


و .


سعی کنید نمودارهای فوق را تحلیل کنید. ■

مثال ۱۸.۱۰: نمودار توابع زیر را رسم کنید. **حتماً پاسخ دهید...**

آ . $f(x)=|x|$ ب . $f(x)=|x|-۱$

ج . $f(x)=\big||x|-۱\big|$ د . $f(x)=|x-۱|+|x+۱|$

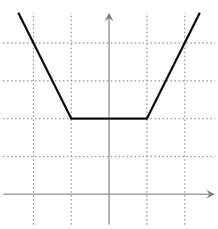
ه . $f(x)=|x-۱|-|x+۱|$ و . $f(x)=|x+۱|-|x-۱|$

پاسخ: رسم نمودار موارد (آ)، (ب) و (ج) ساده بوده و به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

د . با حالت بندی براساس علامت عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها، داریم:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x\geq ۱} : & f(x)=(x-۱)+(x+۱)=۲x \\ \boldsymbol{-۱\leq x<۱}: & f(x)=(۱-x)+(x+۱)=۲ \\ \boldsymbol{x\leq -۱} : & f(x)=(۱-x)+(-(x+۱))=-۲x \end{cases}$$

بدین‌ترتیب می‌توان تابع f را به‌صورت زیر نوشته و نمودار مقابل را برای آن رسم کرد.

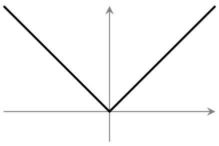


$$f(x)=\begin{cases} ۲x & ;x\geq ۱ \\ ۲ & ;-۱\leq x<۱ \\ -۲x & ;x<-۱ \end{cases}$$

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۳.۱۰ توابع حقیقی

همان‌طور که دیدیم، از همان زمان که لایب‌نیتز کلمهٔ Function را به‌معنای عملکرد برای تابع به‌کار برد و مفهوم تابع متولد شد، برای تعریف تابع مشکلاتی وجود داشت. با چند مثال، گوشه‌هایی مخفی از این سؤال را کشف کرده و سپس توابع حقیقی را تعریف می‌کنیم که به تعریف کلی توابع نزدیک است. در بخش‌های بعد با تعریف کلی تابع نیز آشنا خواهیم شد.



می‌توان یک نمودار را «نمودار تابع» خواند اگر تابعی مانند f وجود داشته باشد که دارای چنین نموداری باشد. به طور مثال نمودار مقابل را نمودار تابع خوانیم چون نمودارِ تابعِ $f(x) = |x|$ است.

نکته‌ای ظریف....
با دقت بخوانید.

مثال ۱۹.۱۰: آیا نمودار معادلهٔ $y^3 - x^2 = 1$، «نمودار تابع» است؟

پاسخ: برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داریم $y^3 - x^2 = 1 \Longleftrightarrow y = \sqrt[3]{1 + x^2}$. بنابراین، نمودار معادلهٔ $y^3 - x^2 = 1$، همان نمودار تابع $f(x) = \sqrt[3]{1 + x^2}$ است. بنابراین، نمودار آن یک «نمودار تابع» است. ■

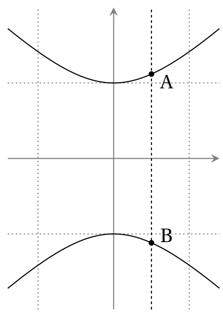
در مثال فوق، بدون رسم نمودار و صرفاً بدین سبب که برای تابعی مانند f داریم:

$$y^3 - x^2 = 1 \Longleftrightarrow y = f(x) \qquad (\star)$$

نمودار معادلهٔ $y^3 - x^2 = 1$ را نمودار تابع خواندیم و به‌طور مشابه این معادله را نیز معادلهٔ تابع گوییم؛ چون تابعی مانند f هست که تساوی $(\star)$ برای آن درست باشد.

اما همهٔ معادلات و نمودارها معادلهٔ تابع و نمودار تابع نیستند. به‌طور مثال، نمودار معادلهٔ $y^2 - x^2 = 1$ نمودار یک تابع را مشخص نمی‌سازد. یعنی تابعی مانند f وجود ندارد که

$y^2 - x^2 = 1 \Longleftrightarrow y = f(x)$



کافی است به نمودار معادلهٔ $y^2 - x^2 = 1$ در شکل مقابل توجه کنیم. خطی مانند $x = 0{,}5$ که موازی محور yها است، نمودار را در دو نقطهٔ $\mathrm{A} = (0{,}5, \sqrt{1{,}25})$ و $\mathrm{B} = (0{,}5, -\sqrt{1{,}25})$ قطع می‌کند. اما از آنجا که هر تابع، به عملکردی مشخص اشاره دارد، پس برای $x = 0{,}5$ یک و تنها یک مقدار را به‌عنوان $f(0{,}5)$ مشخص می‌سازد. بنابراین، نمودار مقابل نمی‌تواند نمودار یک تابع باشد.

البته بدون توجه به نمودار نیز داریم:

$$y^2 - x^2 = 1 \Longleftrightarrow y^2 = 1 + x^2 \Longleftrightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{1 + x^2} \Longleftrightarrow y = \pm\sqrt{1 + x^2}$$

بنابراین، چون $f(x) = \pm\sqrt{1 + x^2}$ به دو عملکرد متفاوت اشاره دارد، نمی‌توان آن را یک تابع درنظر گرفت. در واقع f دو عملکر $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ و $f(x) = -\sqrt{1 + x^2}$ را به‌طور همزمان نشان می‌دهد. بنابراین، یک معادله را، معادلهٔ تابع خوانیم اگر به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$، حداکثر یک $y \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که به‌ازای آنها، آن معادله برقرار باشد.

مثال ۲۰.۱۰: تابع بودن هر یک از معادلات زیر را مشخص کنید.

آ. $y=|x|$ ب. $|y|=x$ ج. $y^۲=x^۲$
د. $\log_۲ y=\log_۴(x+۱)$ ه. $۲^y=۳x+۱$ و. $x^۲+y^۲=۴$
ز. $x^۳+y^۳=۱$ ح. $\ln x+e^y=۰$ ط. $\ln x=\log_۲ y$

پاسخ: آ. کافی است تابع f را به‌صورت $f(x)=\begin{cases} x & ; x\geq ۰ \\ -x & ; x<۰\end{cases}$ بنویسیم.

ب. تابع نیست؛ چون $|y|=x \Longleftrightarrow y=\pm x;\ (x\geq ۰)$ که مسلماً یک عملکر و شیوهٔ محاسباتی خاص را مشخص نمی‌سازد. زیرا، اگر f چنین تابعی وجود داشته باشد، آن‌گاه داریم $f(۱)=۱$ و $f(۱)=-۱$ که غیرممکن است.

ج. تابع نیست. چون اگر تابع بود برای هر x حداکثر یک مقدار برای $f(x)$ وجود داشت. اما برای $x=۱$ دو مقدار $y=۱$ و $y=-۱$ وجود دارند که به‌ازای آنها معادله برقرار است. پس چنین تابعی وجود ندارد.

د. تابع است؛ زیرا $\log_۴(x+۱)=\log_{۲^۲}(x+۱)=\frac{۱}{۲}\log_۲(x+۱)=\log_۲\sqrt{x+۱}$ و درنتیجه

$$\log_۲ y=\log_۲\sqrt{x+۱}\Longleftrightarrow y=f(x)=\sqrt{x+۱}$$

ه. تابع است؛ زیرا $y=\log_۲(۳x+۱)\Longleftrightarrow \log_۲ ۲^y=\log_۲(۳x+۱)\Longleftrightarrow ۲^y=۳x+۱$.

و. تابع نیست. چون برای $x=۰$ دو مقدار $y=۲$ و $y=-۲$ در معادله صدق می‌کنند.

ز. تابع است؛ زیرا $y^۳+x^۳=۱\Longleftrightarrow y^۳=۱-x^۳\Longleftrightarrow y=\sqrt[۳]{۱-x^۳}$

ح. تابع است؛ زیرا $\ln x+e^y=۰\Longleftrightarrow e^y=-\ln x\Longleftrightarrow \ln e^y=\ln(-\ln x)\Longleftrightarrow y=\ln(-\ln x)$

ط. تابع است. $\ln x=\log_۲ y\Longleftrightarrow ۲^{\log_۲ y}=۲^{\ln x}\Longleftrightarrow y=۲^{\ln x}=\left(e^{\ln ۲}\right)^{\ln x}=\left(e^{\ln x}\right)^{\ln ۲}=x^{\ln ۲}$ ■

برای هر تابع مانند f رابطهٔ آن را که به صورت زیر است مورد توجه قرار می‌دهیم.

$$\mathrm{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:\ y=f(x)\}$$

به‌طور مشابه رابطه‌ای مانند R را «رابطهٔ تابع» گوییم اگر تابعی مانند f وجود داشته باشد که R رابطهٔ f باشد. اما همان‌طور که دیدیم، این رابطه‌ها می‌توانند حالت‌های بسیار زیادی را تولید کنند. حتی دیدیم که می‌توانند متناهی نیز باشند. کمی به رابطه‌های متناهی توجه می‌کنیم. مسلماً اگر ضابطه‌ای وجود داشته باشد که روی هر متغیر عملیات محاسباتی خاصی را انجام دهد، به‌ازای هر مقداری از x، فقط یک مقدار برای $f(x)$ تولید می‌کند. بنابراین، برای هر مجموعهٔ متناهی از زوج‌های مرتب که مؤلفهٔ اول تکراری نداشته باشند، می‌توان یک ضابطه یافت. هرچند این ضابطه پیچیده باشد، اما به‌هرحال وجود دارد. بنابراین، یک رابطهٔ متناهی روی $\mathbb{R}$ (مجموعه‌ای متناهی از زوج‌های مرتب) یک تابع است اگر مؤلفهٔ اول تکراری نداشته باشد.

مثال ۲۱.۱۰: تابع بودن یا نبود رابطه‌های زیر را بررسی کنید.

آ. $\mathrm{R}=\{(۱,۳),(۰,۱),(۲,۵)\}$ ب. $\mathrm{R}=\{(۱,۱),(۱,۲)\}$ ج. $\mathrm{R}=\varnothing$

درک پاسخ کفایت می‌کند. حلّ مسائل مشابه، می‌تواند برای خوانندگان دشوار باشد.

پاسخ: آ. کافی است قرار دهیم $g(x)=(x-۱)x(x-۲)$ و قرار دهیم $h(x)=\sqrt{g(x)}\sqrt{-g(x)}$. در این صورت $\mathrm{D}_h=\{۰,۱,۲\}$. بنابراین، می‌توانیم قرار دهیم

$$f(x)=h(x)+\frac{(x-۱)(x-۲)}{(۰-۱)(۰-۲)}(۱)+\frac{x(x-۲)}{۱(۱-۲)}(۳)+\frac{x(x-۱)}{۲(۲-۱)}(۵)$$

بدین‌ترتیب $\mathrm{D}_f=\{۰,۱,۲\}$ و رابطهٔ f برابر است با R.

ب. چنین رابطه‌ای وجود ندارد، چون $f(۱)$ نمی‌تواند همزمان هم ۱ باشد و هم ۲. چون هر عبارت محاسباتی، به‌ازای هر مقداری برای x، حداکثر یک مقدار برای y تولید می‌کند.

ج. کافی است قرار دهیم $f(x) = \sqrt{x-۱}\sqrt{-x}$، در این صورت داریم $D_f = \varnothing$ و درنتیجه رابطهٔ f نیز $R = \varnothing$ خواهد بود. ■

از آنجا که یافتن ضابطه برای یک رابطه دشوار است، این احتمال وجود دارد که ضابطه‌ای وجود داشته باشد اما یافتن آن برای ما دشوار باشد. لذا تعریف تابع را تغییر می‌دهیم.

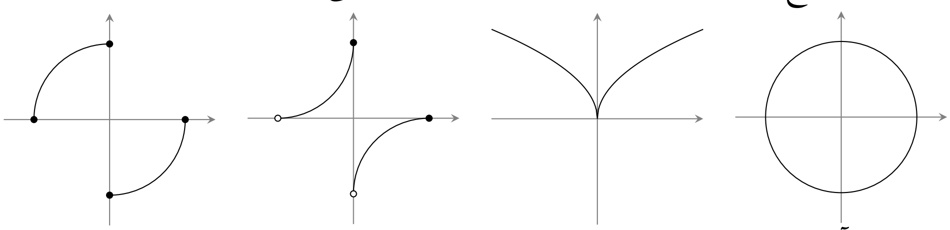
هر تابع را رابطه‌ای در نظر می‌گیریم که مؤلفه‌های اول تکراری نداشته باشد.

هرچند ممکن است این رابطه به وسیله یک نمودار، یک معادله یا یک عبارت محاسباتی بیان شود. بنابراین، منظور از تابع، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب مانند $f \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ است و برای هر $(x,y)\in f$ گوییم $y = f(x)$. واضح است که برای هر عبارت محاسباتی مانند f و هر $a,b\in\mathbb{R}$ اگر $a=b$، آن‌گاه $f(a)=f(b)$. بنابراین، تابع را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۱۰: رابطه‌ای مانند $f\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ را یک تابع حقیقی گوییم در صورتی که: برای هر $(x_۱,y_۱),(x_۲,y_۲)\in f$ اگر $x_۱=x_۲$ آن‌گاه $y_۱=y_۲$.

بدین‌ترتیب، منظور از تابع $f(x)=\sqrt{x}$ رابطهٔ $f=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\colon y=\sqrt{x}\}$ است. باتوجه به تعریف فوق، یک نمودار را نیز تابع گوییم اگر رابطه‌ای که به‌وسیله آن نمودار مشخص می‌شود یک تابع باشد. بنابراین، با تعریف فوق، یک نمودار، تابع است، اگر و تنها اگر هیچ خط عمودی‌ای آن را در بیش از یک نقطه قطع نکند.

مثال ۲۲.۱۰: «تابع» بودن هر یک از نمودارهای زیر را بررسی کنید.



آ. ب. ج. د.

پاسخ: آ. تابع نیست. **ب**. تابع است. **ج**. تابع است. **د**. تابع نیست. ■

به‌طور مشابه، در نگاه رابطه‌ای به تابع، یک معادله را تابع گوییم اگر رابطهٔ مربوط به آن تابع باشد. به‌طور مثال، معادلهٔ $y=x^۲$ را تابع گوییم اگر رابطهٔ $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\colon y=x^۲\}$ تابع باشد. بنابراین معادلهٔ $y=x^۲$ تابع است اگر برای هر $x_۱,x_۲,y_۱,y_۲\in\mathbb{R}$ که $y_۱=x_۱^۲$ و $y_۲=x_۲^۲$ داشته باشیم $x_۱=x_۲ \Longrightarrow y_۱=y_۲$ که با استدلال زیر واضح است.

$$x_۱=x_۲ \Longrightarrow x_۱^۲=x_۲^۲ \Longrightarrow y_۱=y_۲$$

مثال ۲۳.۱۰: تابع بودن هر یک از معادلات زیر را مشخص کنید.

آ. $y=\sqrt{x}$	**ب**. $y=\lvert x\rvert$	**ج**. $y=[x]$
د. $y=۲^x$	**ه**. $y=\log_۲ x$	**و**. $y=x^{-۱}$

پاسخ: با تعریف تابع به‌عنوان عبارتی محاسباتی تابع بودن این عبارات واضح است. با دیدگاه اخیر باید آنها را با استفاده از قضایایی که پیش از این دیدیم، ثابت کرد.

آ. چون $\sqrt{x} \geq ۰$ پس برای هر $x_۱, x_۲, y_۱, y_۲ \in \mathbb{R}$ که $y_۱ = \sqrt{x_۱}$ و $y_۲ = \sqrt{x_۲}$ داریم

$$x_۱ = x_۲ \xrightarrow{x_۱, x_۲ \geq ۰} \sqrt{x_۱} = \sqrt{x_۲} \Longrightarrow y_۱ = y_۲$$

ب.
$$x_۱ = x_۲ \Longrightarrow \begin{cases} x_۱ = x_۲ \geq ۰ \Longrightarrow |x_۱| = x_۱ = x_۲ = |x_۲| \Longrightarrow y_۱ = y_۲ \\ x_۱ = x_۲ < ۰ \Longrightarrow |x_۱| = -x_۱ = -x_۲ = |x_۲| \Longrightarrow y_۱ = y_۲ \end{cases}$$

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. (از قضایای فصل‌های قبل استفاده کنید.) ■

۱.۳.۱۰ تساوی توابع

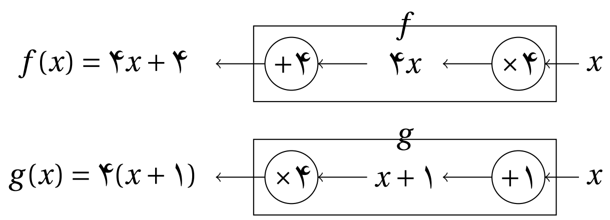
از آنجا که هر تابع را یک رابطه (مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب) در نظر گرفتیم، تساوی توابع را نیز براساس تساوی رابطه‌ها تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲.۱۰: دو تابع حقیقی مانند f و g را برابر خوانیم اگر برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:
$(x, y) \in f \Longleftrightarrow (x, y) \in g$

بنابراین، دو تابع $f(x) = ۴x + ۴$ و $g(x) = ۴(x + ۱)$ برابرند؛ زیرا:

$$(x, y) \in f \Longleftrightarrow y = ۴x + ۴ \Longleftrightarrow y = ۴(x + ۱) \Longleftrightarrow (x, y) \in g$$

و این درحالی است که مطابق شکل زیر، توابع f و g به دو عملیات محاسباتی متفاوت اشاره دارند.



گزاره ۱.۱۰: برای هر دو تابع حقیقی مانند f و g داریم:

آ. اگر $f = g$ آن‌گاه $D_f = D_g$.

ب. اگر $D_f \neq D_g$ آن‌گاه $f \neq g$.

ج. اگر $f = g$ آن‌گاه $R_f = R_g$.

د. اگر $R_f \neq R_g$ آن‌گاه $f \neq g$.

اثبات: آ. $f = g$ پس $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}((x, y) \in f)\} = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}((x, y) \in g)\} = D_g$

ب. با توجه به مورد قبل واضح است.

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

مثال ۲۴.۱۰: نشان دهید جفت توابع داده شده، نابرابرند.

آ. $f(x) = x$ و $g(x) = \left(\sqrt{x}\right)^۲$

ب. $f(x) = \dfrac{x^۲ - x}{x - ۱}$ و $g(x) = x$

ج. $f(x) = ۲^{\log_۲ x}$ و $g(x) = x$

د. $f(x) = \left[[x] - x\right]$ و $g(x) = -۱$

پاسخ: در موارد (آ)، (ب) و (ج) کافی است دامنهٔ توابع را به‌دست آورده و از مثال قبل استفاده کنیم.

د. هرچند $D_f = D_g = \mathbb{R}$، اما در هر $x \in \mathbb{Z}$ داریم $f(x) = ۰$ در حالی که $g(x) = -۱$ و در هر $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ نیز داریم $f(x) = -۱ = g(x)$. بنابراین، دو تابع مساوی نیستند. به‌طور مثال $(۰, ۰) \in f$ اما $(۰, ۰) \notin g$. ■

مثال ۲۵.۱۰: نشان دهید جفت توابع زیر با هم برابرند.

آ. $f(x)=\sqrt{x^۲}$ و $g(x)=|x|$ ب. $f(x)=x^۲$ و $g(x)=\sqrt{x^۴}$

ج. $f(x)=\dfrac{x}{x^۲}$ و $g(x)=\dfrac{۱}{x}$ د. $f(x)=\dfrac{|x|}{x^۲}$ و $g(x)=\dfrac{۱}{|x|}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۲.۳.۱۰ ترکیب توابع

پیش از این با ترکیب توابع آشنا شدیم و دیدیم که برای هر دو تابع (عبارت محاسباتی) مانند f و g، ترکیب توابع f و g که به‌صورت $f\circ g$ نمایش داده می‌شود، برابر است با $f(g(x))$ و برای رابطهٔ تابعِ $f\circ g$ داریم:

$$\begin{aligned}(x,y)\in f\circ g &\Longleftrightarrow y=(f\circ g)(x) \Longleftrightarrow y=f(g(x))\\ &\Longleftrightarrow \exists z\in\mathbb{R}\big(z=g(x) \text{ و } y=f(z)\big)\\ &\Longleftrightarrow \exists z\in\mathbb{R}\big((x,z)\in g \text{ و } (z,y)\in f\big)\end{aligned}$$

بنابراین، می‌توان رابطهٔ $f\circ g$ را، به‌عنوان ترکیب دو رابطه، به‌صورت زیر تعریف کرد تا با ترکیب توابع به‌عنوان دو عبارت محاسباتی نیز همخوانی داشته باشد.

$$f\circ g=\big\{(x,y):\exists z\big((x,z)\in g \text{ و } (z,y)\in f\big)\big\}$$

نکته‌ای ظریف... شخصی به‌ما خُرده گرفته و می‌گوید: با تعریف رابطه‌ها از فصل چهارم، برای ترکیب رابطه‌های R و S داریم $\mathrm{R}\circ\mathrm{S}=\big\{(x,y):\exists z\big(x,z)\in\mathrm{R} \text{ و } (z,y)\in\mathrm{S}\big)\big\}$ بنابراین، $f\circ g$ به‌عنوان ترکیب دو رابطه
با دقت بخوانید.... به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

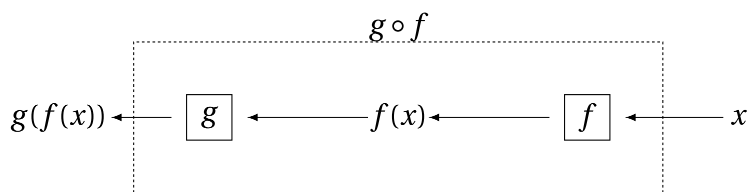
$$f\circ g=\big\{(x,y):\exists z\big((x,z)\in f \text{ و } (z,y)\in g\big)\big\}$$

که با آنچه پیش از این بیان شد متفاوت و عکس آن است. آیا ترکب توابع با ترکیب رابطه‌ها دو مفهوم
نکته‌ای ظریف.... متفاوت هستند و بهتر است از نمادگذاری و نامگذاری متفاوتی برای آن استفاده کنیم؟

این شخص درست می‌گوید. اما علت آن، تفاوت در نگارش آنها است. برای رابطهٔ f که یک تابع را نشان می‌دهد داریم:

$$y=f(x)\Longleftrightarrow (x,y)\in f\Longleftrightarrow x\ f\ y$$

در عبارت $y=f(x)$ متغیر x سمت راست قرار دارد ولی در عبارت xfy متغیر x از سمت چپ وارد شده است. بنابراین، $g\circ f$ به‌عنوان ترکیب توابع دارای نمایش زیر است.



درحالی که $g \circ f$ به‌عنوان ترکیب رابطه‌ها به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & z \arrow[r, "f"] & y \end{tikzcd}$$

همان‌طور که در ادامه خواهیم دید، مفهوم رابطه، فرزند تابع است و برای توسعهٔ آن به‌وجود آمده است. به‌همین سبب مرسوم است که ترکیب رابطه‌ها را نیز با نگارش ترکیب توابع نشان می‌دهند. البته در کتاب‌های جبری معمولاً از نگارش مخصوص ترکیب رابطه‌ها استفاده می‌شود که در این کتاب در بحث رابطه‌ها مورد استفاده قرار گرفت. به‌هرحال نگارش استاندارد را نگارشی معرفی می‌کنیم که با نگارش ترکیب توابع همخوانی داشته و در اکثر کتاب‌های ریاضیات مقدماتی و حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌کار می‌رود.

نکته ۱.۱۰: برای هر دو رابطه یا تابع f و g، منظور از $f \circ g$، ترکیب آنها با نگارش توابع است، مگر آنکه خلاف آن تصریح شده باشد. (مانند فصل مجموعه‌ها.)

تعریف ۳.۱۰: برای هر دو تابع یا رابطهٔ f و g داریم:
$$f \circ g = \{(x,y) : \exists z \in \mathrm{D}_f \big((x,z) \in g \ \text{و}\ (z,y) \in f\big)\}$$

قضیه ۱.۱۰: برای هر دو تابع f و g رابطهٔ $f \circ g = \{(x,y) : \exists z \big((x,z) \in g \ \text{و}\ (z,y) \in f\big)\}$ تابع است.

اثبات:
$$\begin{cases} (x_1, y_1) \in f \circ g \Longrightarrow \exists z_1 \big((x_1, z_1) \in g \ \text{و}\ (z_1, y_1) \in f\big) \\ (x_2, y_2) \in f \circ g \Longrightarrow \exists z_2 \big((x_2, z_2) \in g \ \text{و}\ (z_2, y_2) \in f\big) \end{cases}$$
بنابراین اگر $x_1 = x_2$ داریم:
$$x_1 = x_2 \xRightarrow{g \text{ تابع است.}} z_1 = z_2 \xRightarrow{f \text{ تابع است.}} y_1 = y_2$$
■

مثال ۲۶.۱۰: نشان دهید معادلات زیر تابع هستند.

آ. $y = \log_2 [x]$ ب. $y = 2^{\sqrt{x}}$ ج. $y = |\log_2 x|$

پاسخ: آ. برای $f(x) = \log_2 x$ و $g(x) = [x]$ داریم $f(g(x)) = \log_2 [x]$. پس بنا به مثال و قضیهٔ فوق $y = \log_2 [x]$ تابع است.

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

پیش از این دیدیم که $\mathrm{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$ و همچنین در بحث رابطه‌ها دیدیم که برای رابطهٔ f نیز داریم $\mathrm{Dom}(f) = \{x : \exists y; (x,y) \in f\}$. اما در این صورت داریم $\mathrm{D}_f = \mathrm{Dom}(f)$، زیرا:

$$x \in \mathrm{D}_f \Longleftrightarrow f(x) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \exists y \in \mathbb{R};\ y = f(x) \Longleftrightarrow x \in \mathrm{Dom}(f)$$

بنابراین، آنچه به‌عنوان دامنهٔ تابع به‌عنوان یک عبارت محاسباتی تعریف کردیم (یعنی xهایی که به‌ازای آنها، عبارت محاسباتی $f(x)$ بامعناست) با دامنهٔ تابع به‌عنوان یک رابطه، یکسان است.

واضح است که ترکیب توابع دارای خاصیت جابجایی نیست. اما قضیهٔ زیر نشان می‌دهد ترکیب توابع، دارای خاصیت شرکت‌پذیری است.

قضیه ۲.۱۰: برای هر سه تابع f، g و h داریم: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

اثبات: راهنمایی: از اثبات شرکت‌پذیری ترکیب رابطه‌ها کمک بگیرید. ■

۳.۳.۱۰ جبر توابع

$f+g$ که پیش از این به‌عنوان عبارتی محاسباتی به‌دست آمده بود، حال باید به‌عنوان یک رابطه، از روی دو رابطهٔ f و g ساخته شود. اما دوست داریم رابطهٔ $f+g$ را چنان تعریف کنیم که با تعریف قبلی همخوانی داشته باشد؛ یعنی برای هر دو عبارت محاسباتی مانند $f(x)$ و $g(x)$ که رابطه‌های f و g را می‌سازند داشته باشیم $(x,y)\in f+g$ اگر و تنها اگر $y=f(x)+g(x)$. بنابراین می‌توانیم $f+g$، $f-g$، $f\cdot g$ و $\dfrac{f}{g}$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم.

- $f+g=\{(x,y+z):\ (x,y)\in f \text{ و } (x,z)\in g\}$
- $f-g=\{(x,y-z):\ (x,y)\in f \text{ و } (x,z)\in g\}$
- $f\cdot g=\{(x,y\cdot z):\ (x,y)\in f \text{ و } (x,z)\in g\}$
- $\dfrac{f}{g}=\{(x,\dfrac{y}{z}):\ (x,y)\in f \text{ و } (x,z)\in g \text{ و } z\neq 0\}$

قضیه ۳.۱۰: برای هر دو تابع حقیقی مانند f و g داریم:

آ. $f+g$ نیز تابع است. **ب. $f-g$ نیز تابع است.**

ج. $f\cdot g$ نیز تابع است. **د. $\dfrac{f}{g}$ نیز تابع است.**

اثبات: آ. برای هر $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in f+g$ اعدادی حقیقی مانند w_1، w_2، z_1 و z_2 وجود دارند که $(x_1,w_1)\in f$ و $(x_1,z_1)\in g$ و $y_1=w_1+z_1$ و همچنین $(x_2,w_2)\in f$ و $(x_2,z_2)\in g$ و $y_2=w_2+z_2$.
در این صورت، اگر $x_1=x_2$ آن‌گاه:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=x_2 \xRightarrow{\text{تابع بودنِ } f} w_1=w_2 \\ x_1=x_2 \xRightarrow{\text{تابع بودنِ } g} z_1=z_2 \end{array}\right\}\Longrightarrow w_1+z_1=w_2+z_2\Longrightarrow y_1=y_2$$

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۲۷.۱۰: تابع بودن هر یک از معادلات زیر را بررسی کنید.

آ. $y=x+\ln x$ ب. $y=2^{|x|}+\ln[|x|]$

پاسخ: با استفاده از دو قضیهٔ قبل به سادگی نتیجه می‌شود. ■

می‌توان از قضیهٔ فوق در تشخیص تابع بودن یا نبود برخی معادلات بهره برد. در مثال زیر یکی از این معادلات را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۲۸.۱۰: تابع بودن معادلهٔ $e^y\log_2 x=x^2-1$ را بررسی کنید.

پاسخ: رابطهٔ معادلهٔ فوق را f می‌نامیم. در این‌صورت داریم:

$$e^y\log_2 x=x^2-1\left\{\begin{array}{l}\log_2 x\neq 0:\quad e^y=\dfrac{x^2-1}{\log_2 x}\Longrightarrow y=\ln\left(\dfrac{3x^2-1}{\log_2 x}\right)\\ \log_2 x=0:\quad x=1 \text{ و } x^2-1=0\Longrightarrow y\in\mathbb{R}\end{array}\right.$$

بنابراین، معادلهٔ فوق برای $x \neq ۰$ بنا به قضایای قبل تابع است، اما برای هر $y \in \mathbb{R}$، داریم $(۰, y) \in f$، بنابراین، رابطهٔ f و درنتیجه معادلهٔ فوق، تابع نیستند. ■

تمرین:

(۴) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

آ. $f(x) = \frac{x+۱}{x}$ ب. $f(x) = \frac{۲x+۱}{۳x-۲}$

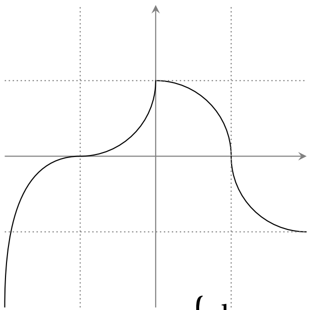
ج. $f(x) = e^{\ln x}$ د. $f(x) = ۲^{\log_۲ x+۱}$

ه. $f(x) = \ln e^x$ و. $f(x) = e^{|\ln x|}$

(۵) تابع بودن هر یک از معادلات زیر را بررسی کنید.

آ. $y^۳ + x^۳ + ۳x = ۱$ ب. $\ln|۲x+۱| = \ln|y|$

ج. $|e^y| = x^۳$ د. $|y| = \ln x^۳$



(۶) نمودار مقابل مربوط به تابع f است. نمودار هر یک از توابع زیر را بیابید.

آ. $f(|x|)$ ب. $|f(x)|$

ج. $f(\sqrt{x}^۲)$ د. $f(e^{\ln x-۱}+۱)$

ه. $f|_{\mathrm{D}}$ که $\mathrm{D} = [۰, ۱]$ و. $f|_{\mathrm{D}}$ که $\mathrm{D} = [۰, +\infty)$

(۷) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

آ. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-۱} & ;x \geq ۰ \\ ۲^x & ;x < ۰ \end{cases}$ ب. $f(x) = \begin{cases} \ln x & ;x \geq ۰ \\ x^{-۱} & ;x < ۰ \end{cases}$

(۸) با رسم نمودار، دامنه و برد هر یک از توابع زیر را به‌دست آورید.

آ. $f(x) = |x+۱| + |x-۱|$ ب. $f(x) = |x+۱| - |x-۱|$

ج. $f(x) = |۲x+۱| + |۳x-۱|$ د. $f(x) = |۳x+۱| - |۲x-۱|$

(۹) تساوی یا عدم تساوی توابع زیر را بررسی کنید.

آ. $f(x) = \frac{x^۲-۹}{x+۳}$ و $g(x) = x-۳$ ب. $f(x) = \left[[x]\right]$ ، $g(x) = [x]$

ج. $f(x) = \left|[x]\right|$ و $g(x) = \left[|x|\right]$ د. $f(x) = \sqrt{-x}\sqrt{x-۱}$ و $g(x) = \sqrt{(-x)(x-۱)}$

۴.۱۰ تابع وارون

پیش از این با وارون رابطه آشنا شدیم و وارون رابطه‌ای مانند R را با $\mathrm{R}^{-۱}$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف کردیم.

$$\mathrm{R}^{-۱} = \{(x,y) : (y,x) \in \mathrm{R}\}$$

بنابراین، برای عبارتی محاسباتی مانند $f(x)$ داریم $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$ و درنتیجه

$$f^{-۱} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (y,x) \in f\} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = f(y)\}$$

به‌طور مثال، برای $f(x)=۳x+۱$ داریم $f=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:\ y=۳x+۱\}$ و درنتیجه

$$\begin{aligned} f^{-۱} &= \{(x,y):\ (y,x)\in f\}\\ &= \{(x,y):\ x=f(y)\}\\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:\ x=۳y+۱\}\end{aligned}$$

اما از طرفی هم داریم:

$$x=۳y+۱ \Longleftrightarrow ۳y=x-۱ \overset{۳\neq ۰}{\Longleftrightarrow} y=\frac{x-۱}{۳}$$

بنابراین،
$$f^{-۱}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:\ y=\frac{x-۱}{۳}\right\}$$
و می‌توان رابطهٔ $f^{-۱}$ را با ضابطهٔ $f^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{۳}$ نیز بیان کرد.

مثال ۲۹.۱۰: در هر یک از موارد زیر، ضابطهٔ $f^{-۱}$ را بیابید.

آ. $f(x)=۲x-۱$ ب. $f(x)=x^۳$ ج. $f(x)=(x-۲)^۳$

د. $f(x)=\log_۲ x$ ه. $f(x)=\ln x$ و. $f(x)=\ln(۲x+۳)$

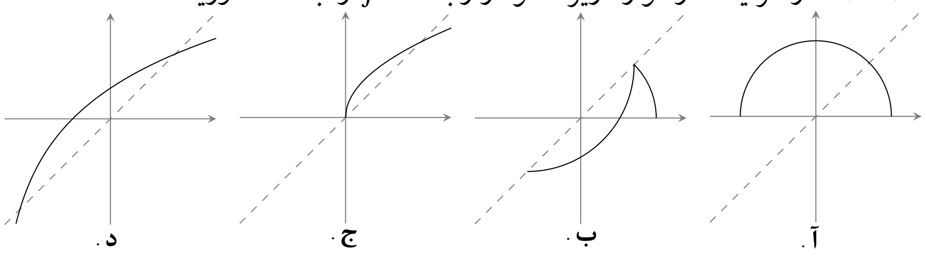
ز. $f(x)=e^x$ ح. $f(x)=۲^x$ ط. $f(x)=e^{(۳x+۴)}$

ی. $f(x)=\frac{۱}{x}$ ک. $f(x)=\frac{۱}{۲x-۳}$ ل. $f(x)=\frac{۱-x}{۲+x}$

پاسخ: آ. $y=f^{-۱}(x) \Longleftrightarrow x=f(y) \Longleftrightarrow x=۲y-۱ \Longleftrightarrow y=\frac{x+۱}{۲}$. بنابراین، $f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۲}$.
موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

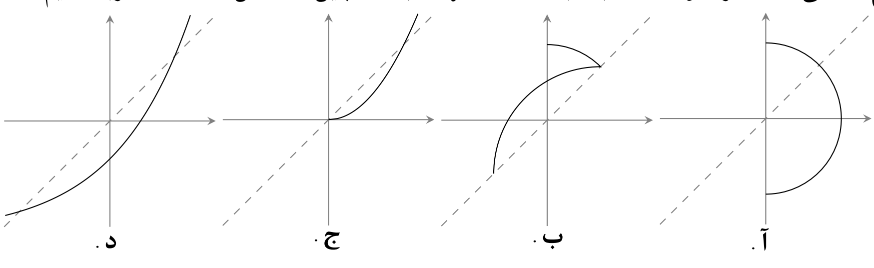
در فصل «هندسهٔ تحلیلی» دیدیم که برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ نقاط (x,y) و (y,x)، نسبت به خطّ $y=x$، قرینهٔ یکدیگرند. بنابراین، نمودار رابطهٔ $f^{-۱}$ را نیز می‌توان با قرینه کردن نمودار تابع f به‌دست آورد.

مثال ۳۰.۱۰: در هر یک از موارد زیر، نمودار رابطهٔ $f^{-۱}$ را به‌دست آورید.



آ. ب. ج. د.

پاسخ: کافی است هر نمودار را نسبت به خطّ $y=x$ که با خط‌چین مشخص شده‌است، قرینه کنیم.



آ. ب. ج. د. ■

در مثال فوق، نمودار وارون توابع، نشان می‌دهد که نمودار یک تابع، لزوماً تابع نیست. لذا:

تعریف ۴.۱۰: تابع f را وارون‌پذیر خوانیم اگر $f^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in f\}$ تابع باشد.

با توجه به تعریف تابع، f^{-1} تابع است اگر
برای هر $x \in \mathbb{R}$، حداکثر یک $y \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $(x,y) \in f^{-1}$
یا به‌عبارتی، اگر
برای هر $x \in \mathbb{R}$ حداکثر یک $y \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $(y,x) \in f$
که با عوض کردن نام‌گذاری متغیرها گوییم f^{-1} تابع است اگر:
برای هر $y \in \mathbb{R}$ حداکثر یک $x \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $(x,y) \in f$
. بنابراین، رابطهٔ f^{-1} تابع است، اگر هیچ خط افقی، نمودار تابع f را در بیش از یک نقطه قطع نکند. (به نمودارهای مثال قبل توجه کنید.)

مثال ۳۱.۱۰: با رسم نمودار، وارون‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید.

آ. $f(x) = \sqrt{x}$ ب. $f(x) = x^2$ ج. $f(x) = |x|$

د. $f(x) = x^3 - x$ ه. $f(x) = x^3 - x^2$ و. $f(x) = x^3 + x^2$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

گزاره ۲.۱۰: رابطهٔ f تابعی وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر
برای هر $(x_1,y_1),\ (x_2,y_2) \in f$ داشته باشیم $x_1 = x_2 \iff y_1 = y_2$

اثبات: فرض کنید f تابعی وارون‌پذیر باشد. در این‌صورت چون f تابع است، پس $x_1 = x_2 \implies y_1 = y_2$.
از طرفی، تابع f وارون‌پذیر است، پس f^{-1} تابع است و چون برای هر $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in f$ داریم $(y_1,x_1),(y_2,x_2) \in f^{-1}$، پس $y_1 = y_2 \implies x_1 = x_2$.
بدین‌ترتیب، اگر رابطهٔ f تابعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $x_1 = x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$.
حال فرض کنید رابطهٔ f چنان است که برای هر $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in f$ داریم $x_1 = x_2 \iff y_1 = y_2$.
واضح است که f تابع است، چون $x_1 = x_2 \implies y_1 = y_2$ و همچنین واضح است که f^{-1} تابع است، چون $y_1 = y_2 \implies x_1 = x_2$. بنابراین، رابطهٔ f، تابعی وارون‌پذیر است. ■

مثال ۳۲.۱۰: نشان دهید رابطهٔ $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ تابعی وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $x \in \mathrm{Dom}(f)$ یک و دقیقاً یک $y \in \mathrm{Im}(f)$ وجود داشته باشد که $(x,y) \in f$

پاسخ: با توجه به گزارهٔ قبل واضح است. ■

مثال فوق، برای تعریف مفهومی جدید ایده‌بخش است که در تعریف زیر به بیان آن می‌پردازیم.

تعریف ۵.۱۰: رابطهٔ f را «تابعی یک‌به‌یک» خوانیم در صورتی که:
اگر $(x_1,y),(x_2,y) \in f$ آن‌گاه $x_1 = x_2$
یا به‌طور معادل، اگر $f(x_1) = f(x_2)$ آن‌گاه $x_1 = x_2$.

بدین‌ترتیب، می‌توانیم گزارهٔ قبل را به‌صورت قضیهٔ زیر بازنویسی کنیم.

قضیه ۴.۱۰: یک تابع وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر یک‌به‌یک باشد.

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۳۳.۱۰: نشان دهید توابع زیر یک‌به‌یک و وارون‌پذیرند.

آ. $f(x)=\dfrac{۱}{x+۱}$ ب. $f(x)=\sqrt{x}$ ج. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+۱}{x-۱}}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۱.۴.۱۰ تابع همانی

حال می‌خواهیم مفهومی به‌نام «تابع همانی» را معرفی کنیم که خواص زیادی در مورد تابع وارون و ارتباط آن با تابع اصلی را قابل بیان می‌سازد. اما پیش از بیان آن، با چند مثال برای ساختن این مفهوم آماده می‌شویم.

مثال ۳۴.۱۰: رابطه‌های زیر را درنظر بگیرید.

$f=\{(۱,۱),(۲,۱),(۳,۴)\}$ $g=\{(۱,۳),(۲,۱),(۳,۲)\}$

$h=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳)\}$ $\mathrm{I}=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$

آ. از روابط فوق، کدام‌ها تابع هستند؟

ب. از روابط فوق کدام‌ها وارون‌پذیرند؟

ج. برای هر یک از روابط فوق مانند f، روابط $f\circ f^{-۱}$ و $f^{-۱}\circ f$ را بنویسید.

ترکیب رابطه را با نگارش ترکیب توابع درنظر بگیرید.

پاسخ: آ. فقط h تابع نیست.

ب. رابطه‌های g و I توابعی وارون‌پذیرند.

ج. $f\circ f^{-۱}=\{(۱,۱),(۴,۴)\}$ $f^{-۱}\circ f=\{(۱,۱),(۲,۲),(۲,۱),(۳,۳)\}$

$g\circ g^{-۱}=\{(۳,۳),(۱,۱),(۲,۲)\}$ $g^{-۱}\circ g=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$

$h\circ h^{-۱}=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳)\}$ $h^{-۱}\circ h=\{(۱,۱)\}$

$\mathrm{I}\circ\mathrm{I}^{-۱}=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$ $\mathrm{I}^{-۱}\circ\mathrm{I}=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$ ■

در مثال فوق، برای رابطه‌های g و I که توابعی وارون‌پذیرند، داریم

$g\circ g^{-۱}=g^{-۱}\circ g$ و $\mathrm{I}\circ\mathrm{I}^{-۱}=\mathrm{I}^{-۱}\circ\mathrm{I}$

اما روابط f و h که توابعی وارون‌پذیر نیستند، از این ویژگی بی‌بهره‌اند. این مشاهده حدسی را به دنبال دارد که در مثال زیر به بررسی آن می‌پردازیم.

نکته‌ای ظریف ...
با دقت بخوانید.

مثال ۳۵.۱۰: درستی یا نادرستی عبارت زیر را بررسی کنید.

برای رابطهٔ $f\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ داریم $f\circ f^{-۱}=f^{-۱}\circ f$ اگر و تنها اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد.

پاسخ: عبارت فوق نادرست است. کافی است قرار دهیم $f=\{(۱,x):x\in\mathbb{R}\}\cup\{(x,۱):x\in\mathbb{R}\}$. در این صورت داریم $f\circ f^{-۱}=f^{-۱}\circ f=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. در حالی که f نه تابع است و نه وارون‌پذیر. ■

هر چند ایدهٔ فوق با شکست مواجه شده است، اما مثال زیر ایدهٔ مهمی را به ما تحویل می‌دهد.

مثال ۳۶.۱۰: نشان دهید هرگاه f تابعی وارون‌پذیر باشد، آن گاه داریم

آ. $f\circ f^{-۱}=\{(y,y):\ y\in\mathrm{Im}(f)\}$ ب. $f^{-۱}\circ f=\{(x,x):\ x\in\mathrm{Dom}(f)\}$

پاسخ: آ. برای هر $y\in\mathrm{Im}(f)$ داریم $y\in\mathrm{Dom}(f^{-۱})$ پس وجود دارد $x\in\mathrm{Im}(f^{-۱})=\mathrm{Dom}(f)$ به‌نحوی‌که $(y,x)\in f^{-۱}$ و $(x,y)\in f$. بنابراین، $(y,y)\in f\circ f^{-۱}$. در نتیجه $\{(y,y):\ y\in\mathrm{Im}(f)\}\subset f\circ f^{-۱}$

اگر $(y,x) \in f \circ f^{-1}$ آن‌گاه وجود دارد $z \in \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Im}(f^{-1})$ که $(y,z) \in f^{-1}$ و $(z,x) \in f$
بنابراین $(z,y),(z,x) \in f$. اما چون f تابعی وارون‌پذیر است، پس تابعی یک‌به‌یک است و درنتیجه داریم
$y = x \Longleftrightarrow z = z$. بنابراین، برای هر $(y,x) \in f \circ f^{-1}$ داریم $y = x$.
بدین‌ترتیب، $f \circ f^{-1} = \{(y,y) : y \in \mathrm{Im}(f)\}$
ب . به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ∎

مثال فوق، ایدهٔ تعریف زیر را به ما می‌دهد.

تابع f را «همانی»[1] گوییم اگر برای هر $(x,y) \in f$ داشته باشیم $x = y$.

اما با این تفاسیر هر دو تابع $\mathrm{R} = \{(۱,۱)\}$ و $\mathrm{S} = \{(۲,۲)\}$ همانی هستند، در حالی‌که $\mathrm{R} \neq \mathrm{S}$. برای فرار از این مشکل تعریف تابع همانی را روی دامنهٔ آن تعریف می‌کنیم.

تعریف ۶.۱۰: برای هر مجموعهٔ D، رابطهٔ همانی روی D را با $\mathrm{I_D}$ نمایش داده و قرار می‌دهیم:

$$\mathrm{I_D} = \{(x,x) : x \in \mathrm{D}\}$$

قضیه ۵.۱۰: برای تابع $f, g \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ داریم:
آ . اگر f وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $f^{-1} \circ f = \mathrm{I}_{\mathrm{R}_f}$ و $f \circ f^{-1} = \mathrm{I}_{\mathrm{D}_f}$. ب . اگر $f \circ g = \mathrm{I}_{\mathrm{D}_f}$ و $g \circ f = \mathrm{I}_{\mathrm{R}_f}$، آن‌گاه f وارون‌پذیر است و $f^{-1} = g$.

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ∎

مثال ۳۷.۱۰: در هر یک از موارد زیر، $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ را بیابید.

آ . $f(x) = x^{۳}$ ب . $f(x) = x^{-۱}$ ج . $f(x) = \sqrt{x}$

د . $f(x) = \ln x$ ه . $f(x) = ۲^{x}$ و . $f(x) = ۳x - ۴$

پاسخ: توابع فوق همه وارون‌پذیرند پس در هر یک از موارد زیر $f \circ f^{-1} = \mathrm{I}_{\mathrm{R}_f}$ و $f^{-1} \circ f = \mathrm{I}_{\mathrm{D}_f}$. ادامهٔ کار به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ∎

قضیه ۶.۱۰: برای هر دو تابع وارون‌پذیر مانند f و g، تابع $f \circ g$ تابعی وارون‌پذیر است و $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

اثبات: کافی است نشان دهیم $(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = \mathrm{I}_{\mathrm{R}_{f \circ g}}$ و $(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = \mathrm{I}_{\mathrm{D}_{f \circ g}}$.
ادامهٔ کار به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ∎

گزاره ۳.۱۰: اگر f و g توابعی یک‌به‌یک باشند، آن‌گاه $f \circ g$ نیز تابعی یک‌به‌یک است.

اثبات: برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داریم، $(x,y) \in f \circ g$ اگر و تنها اگر $z \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $(z,y) \in f$ و $(x,z) \in g$. پس برای هر $(x_۱,y_۱),(x_۲,y_۲) \in f \circ g$، وجود دارند $z_۱, z_۲ \in \mathbb{R}$ که $(z_۱,y_۱),(z_۲,y_۲) \in f$ و $(x_۱,z_۱),(x_۲,z_۲) \in g$. در این صورت داریم:

$$x_۱ = x_۲ \xLeftrightarrow{\text{یک‌به‌یکی } g} z_۱ = z_۲ \xLeftrightarrow{\text{یک‌به‌یکی } f} y_۱ = y_۲$$

پس بنا به تعریف یک‌به‌یکی، رابطهٔ $f \circ g$ نیز تابعی یک‌به‌یک است. ∎

[1] Identity

یکی از توابع همانی مهم، تابع $\mathrm{I}_{\mathbb{R}}$ است که تابعی همانی روی $\mathbb{R}$ خوانده می‌شود. واضح است که $\mathrm{I}_{\mathbb{R}}$ همان تابع $f(x) = x$ است. گزارهٔ زیر با بیان نوعی خاصیت همانی برای تابع $\mathrm{I}_{\mathbb{R}}$ علت نام‌گذاری آن به تابع همانی را مشخص می‌سازد.

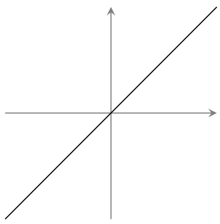
گزاره ۴.۱۰: برای هر تابعی مانند $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ داریم: $\boldsymbol{f \circ \mathrm{I}_{\mathbb{R}} = \mathrm{I}_{\mathbb{R}} \circ f = f}$

اثبات: $(x, y) \in f \Longleftrightarrow (x, y) \in f$ و $(y, y) \in \mathrm{I}_{\mathbb{R}} \Longleftrightarrow (x, y) \in \mathrm{I}_{\mathbb{R}} \circ f$
پس $\mathrm{I}_{\mathbb{R}} \circ f = f$ و به‌طور مشابه می‌توان با استفاده از $(x, x) \in \mathrm{I}_{\mathbb{R}}$ نشان داد که $f \circ \mathrm{I}_{\mathbb{R}} = f$ و درنتیجه داریم $f \circ \mathrm{I}_{\mathbb{R}} = \mathrm{I}_{\mathbb{R}} \circ f = f$. ■

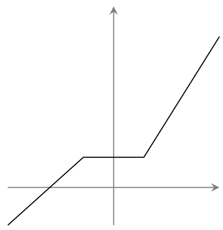
بنا به گزارهٔ فوق، تابع $\mathrm{I}_{\mathbb{R}}$ با ضابطهٔ $\mathrm{I}_{\mathbb{R}}(x) = x$، عنصر همانی ترکیب توابع حقیقی است. لذا آن تابع همانی خوانده و حتی با I نیز نمایش می‌دهیم.

۵.۱۰ یکنوایی

مفاهیم صعود (بالا رفتن) و نزول (پایین رفتن) مفاهیمی آشنا هستند. این مفاهیم را در کوهنوردی به بهترین شکل می‌توان دید. کوهنوردی که از کوه بالا می‌رود در حال صعود است و کوهنوردی که از کوه پایین می‌آید در حال فرود (نزول) است. حال به نمودار تابع $y = x$ در شکل مقابل نگاه کنید.



آیا می‌توان صفت صعودی یا نزولی بودن را به این نمودار نسبت داد؟ مسلما همان‌طور که صعود و نزول برای یک مسیر در کوه بی‌معناست برای نمودار نیز بی‌معناست. اما اگر حرکت بر نمودار در جهتی در نظر بگیریم که مقدار x در حال افزایش باشد، می‌توان از صعودی یا نزولی بودن آن سخن گفت. بنابراین، تابع $f(x) = x$ یک تابع صعودی است، چون با اضافه شدن x، مقدار $f(x)$ نیز افزایش می‌یابد (بالاتر می‌رود).



توابعی مانند $f(x) = x$ با نمودار فوق، به‌وضوح صعودی هستند. اما تابعی با نمودار مجاور صعودی است یا خیر؟ برای درک بهتر این دو نمودار باید گفت در تابع $f(x) = x$، برای هر $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$، هر دو عبارت زیر درست هستند.

«اگر $x_1 < x_2$ آن گاه $f(x_1) < f(x_2)$»
«اگر $x_1 \le x_2$ آن‌گاه $f(x_1) \le f(x_2)$»

اما برای تابعی با نمودار اخیر، فقط عبارت «اگر $x_1 \le x_2$ آن‌گاه $f(x_1) \le f(x_2)$» درست است. به‌هرحال، ریاضیدانان از بحث بی‌مورد در این زمینه پرهیز کرده و با هر یک از این عبارات مفهومی جداگانه تعریف کرده‌اند.

شخصی، مفاهیم «صعودی» و «اکیداً صعودی» را به شکل زیر تعریف می‌کند.

برای هر تابع $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ داریم:
تابع f «صعودی» است اگر برای هر $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ داشته باشیم
اگر $x_1 \le x_2$ آن‌گاه $f(x_1) \le f(x_2)$.
تابع f «اکیداً صعودی» یا «صعودیِ اکید» است اگر برای هر $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ داشته باشیم
اگر $x_1 < x_2$ آن‌گاه $f(x_1) < f(x_2)$

اما با تعریف فوق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ با $D_f=[0,+\infty)$ صعودی نیست. چون به‌طور مثال برای $x_1=-1$ و $x_2=1$ داریم $x_1\le x_2$ اما $f(x_1)\le f(x_2)$ درست نیست؛ چون $f(x_1)$ تعریف شده نیست. برای رفع این مشکل تعریف این شخص را اصلاح کرده و تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۷.۱۰: برای هر تابع $f\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ داریم:
تابع f «صعودی» است اگر برای هر $x_1,x_2\in D_f$ داشته باشیم
اگر $x_1\le x_2$ آن‌گاه $f(x_1)\le f(x_2)$.
تابع f، «اکیداً صعودی» یا «صعودیِ اکید» است اگر برای هر $x_1,x_2\in D_f$ داشته باشیم
اگر $x_1<x_2$ آن‌گاه $f(x_1)<f(x_2)$

به‌طور مشابه می‌توان مفاهیم «نزولی» و «نزولیِ اکید» را نیز به‌صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۸.۱۰: برای هر تابع $f\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ داریم:
تابع f «نزولی» است اگر برای هر $x_1,x_2\in D_f$ داشته باشیم
اگر $x_1\le x_2$ آن‌گاه $f(x_1)\ge f(x_2)$.
تابع f، «اکیداً نزولی» یا «نزولیِ اکید» است اگر برای هر $x_1,x_2\in D_f$ داشته باشیم
اگر $x_1<x_2$ آن‌گاه $f(x_1)>f(x_2)$

مثال ۳۸.۱۰: صعودی، نزولی، اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی بودن توابع زیر را مشخص کنید.

آ. $f(x)=1$ ب. $f(x)=\sqrt{x}$ ج. $f(x)=x^2$
د. $f(x)=x^3$ ه. $f(x)=x^3-x$ و. $f(x)=x^{-1}$
ز. $f(x)=\ln x$ ح. $f(x)=\log_2 x$ ط. $f(x)=\log_{0/5} x$
ی. $f(x)=e^x$ ک. $f(x)=2^x$ ل. $f(x)=0/5^x$

پاسخ: با توجه به نمودار توابع، می‌توانیم جدول زیر را تشکیل دهیم.

	صعودی	نزولی	اکیداً صعودی	اکیداً نزولی
$f(x)=1$	است	است	نیست	نیست
$f(x)=\sqrt{x}$	است	نیست	است	نیست
$f(x)=x^2$	نیست	نیست	نیست	نیست
$f(x)=x^3$	است	نیست	است	نیست
$f(x)=x^3-x$	نیست	نیست	نیست	نیست
$f(x)=x^{-1}$	نیست	است	نیست	است
$f(x)=\ln x$	است	نیست	است	نیست
$f(x)=\log_2 x$	است	نیست	است	نیست
$f(x)=\log_{0/5} x$	نیست	است	نیست	است
$f(x)=e^x$	است	نیست	است	نیست
$f(x)=2^x$	است	نیست	است	نیست
$f(x)=0/5^x$	نیست	است	نیست	است

■

مثال ۳۹.۱۰: درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. اگر f و g صعودی باشند، $f+g$ نیز صعودی است.
ب. اگر f صعودی و g اکیداً صعودی باشد، $f+g$ اکیداً صعودی است.
ج. اگر f صعودی نباشد، آن‌گاه نزولی است.

د. اگر f نه صعودی و نه نزولی باشد، آن‌گاه عددی مانند $a \in \mathbb{R}$ هست که $f(x) = a$.
ه. اگر f هم صعودی و هم نزولی باشد، آن‌گاه عددی مانند $a \in \mathbb{R}$ هست که $f(x) = a$.
و. تابعی مانند f وجود دارد که هم اکیداً صعودی و هم نزولی باشد.

پاسخ: آ. درست است. زیرا $x_1 < x_2 \Longrightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ g(x_1) < g(x_2) \end{cases} \Longrightarrow f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$
ب. درست ج. نادرست د. نادرست. ه. درست و. نادرست. ■

مثال ۴۰.۱۰: نشان دهید تابع $f(x) = \log_2 x - x^{-1}$ یک تابع صعودی است.

پاسخ: بری توابع $g(x) = \log_2 x$ و $h(x) = x^{-1}$ داریم:
$x_1 < x_2 \Longrightarrow g(x_1) < g(x_2)$ و $x_1 < x_2 \Longrightarrow h(x_1) > h(x_2) \Longrightarrow -h(x_1) < -h(x_2)$
بنابراین، $g(x_1) - h(x_1) < g(x_2) - h(x_2)$ و درنتیجه $f(x) = \log_2 x - x^{-1}$ صعودی است. ■

قضیه ۷.۱۰: برای هر دو تابع حقیقی مانند f و g داریم:
آ. اگر f و g صعودی باشند، $f \circ g$ نیز صعودی است.
ب. اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f \circ g$ و $g \circ f$ نزولی خواهند بود.
ج. اگر f و g نزولی باشند، آن‌گاه $f \circ g$ صعودی است.

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۴۱.۱۰: نشان دهید:
آ. اگر f تابعی صعودی و g تابعی اکیداً صعودی باشد، آن گاه $f + g$ تابعی اکیداً صعودی است.
ب. اگر f و g توابعی اکیداً صعودی باشند، $f \circ g$ نیز تابعی اکیداً صعودی است.
ج. اگر f تابعی اکیداً صعودی و g تابعی اکیداً نزولی باشد، آن‌گاه $f \circ g$ و $g \circ f$ توابعی اکیداً نزولی هستند.
د. اگر f تابعی اکیداً یکنوا باشد، آن‌گاه f تابعی وارون‌پذیر است.
ه. تابع $f(x) = \ln(x^2 + \sqrt{x}) + [x]$ تابعی وارون‌پذیر است.

پاسخ: آ. برای هر $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f$ و $(x_1, z_1), (x_2, z_2) \in g$ داریم:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow \begin{cases} y_1 \leq y_2 & \text{صعودی است } f \\ z_1 < z_2 & \text{اکیداً صعودی است } g \end{cases} \Longrightarrow y_1 + z_1 < y_2 + z_2 \Longrightarrow \text{اکیداً صعودی است } f+g$$

ب. به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.
ج. برای هر $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f \circ g$، اعدادی حقیقی مانند $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ وجود دارند به‌نحوی‌که $(x_1, z_1), (x_2, z_2) \in g$ و $(z_1, y_1), (z_2, y_2) \in f$

بنابراین، داریم:

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{اکیداً صعودی است } g} z_1 < z_2 \xRightarrow{\text{اکیداً صعودی است } f} y_1 < y_2$$

پس $f \circ g$ اکیداً صعودی است.
د. به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.
ه. با استفاده از اصل تثلیث به‌سادگی نتیجه می‌شود هر تابع اکیداً یکنوا، تابعی یک‌به‌یک است و درنتیجه وارون‌پذیر است. (ادامهٔ کار به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود)

و. کافی است نشان دهیم f تابعی اکیداً یکنواست. البته توجه داریم که $D_f = (\circ, +\infty)$ و بر این بازه، با توجه به نمودار، توابع $x^{\text{۲}}$، $\sqrt{x}$ و $\ln x$ اکیداً صعودی هستند. بنابراین، تابع $\ln(x + \sqrt{x})$ بر بازهٔ $(\circ, +\infty)$ اکیداً صعودی است. همچنین، از نمودار تابع $[x]$ می‌توان به صعودی بودن آن پی‌برد. بنابراین، تابع f اکیداً صعودی است و درنتیجه وارون‌پذیر است. ■

در مثال فوق دیدیم که چگونه می‌توان با استفاده از یکنوایی توابع، به وارون‌پذیری توابع پیچیده‌تر پی‌برد؛ هرچند یافتن تابع وارون آنها کاری بس دشوار و خارج از توان ما باشد.

مثال ۴۲.۱۰: نشان دهید توابع زیر وارون‌پذیرند.

آ. $f(x) = x^{\text{۳}} + \sqrt{x + \text{۱}}$ ب. $f(x) = \ln\sqrt{\text{۱} - x} + x^{-\text{۱}}$

ج. $f(x) = \text{۲}^{x+\sqrt{\text{۱}+x}} + x + \sqrt{\text{۱} + x}$ د. $f(x) = x^{\text{۲}} + \ln(x + \sqrt{x}) + \sqrt[\text{۳}]{x} - x^{-\text{۳}}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. (از مثال قبل ایده بگیرید) ■

تمرین:

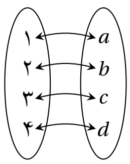
(۱۰) تابع بودن یا نبود هر یک از معادلات زیر را بررسی کنید.

آ. $y^{\text{۳}} + y = x^{\text{۳}} + x$ ب. $\sqrt{y} + \ln y = |x|$

ج. $xy^{\text{۳}} + x\sqrt{y} = \text{۱}$ د. $\ln y^x + xy = x^{\text{۲}} - \text{۱}$

۶.۱۰ دوسویی و تناظر یک‌به‌یک

همان‌طور که در فصل اول دیدیم، انسان‌ها و حتی برخی از حیوانات به‌صورت کاملا شهودی می‌توانند تساوی، بیشتری و کمتری دو تعداد از اشیا را تشخیص دهند. آنها به‌صورت کاملا شهودی، تناظری یک‌به‌یک بین اعضای دو دسته از اشیا تشکیل داده و تعداد آنها را برابر می‌خوانند. در قرن نوزدهم، جرج کانتور با استفاده از مفهوم نگاشت، توانست تناظر یک‌به‌یک را به‌عنوان نوعی نگاشت خاص تعریف کند. در ادامه خواهیم دید که مفهوم نگاشت به‌علت شباهت بسیار زیادی که به مفهوم تابع، دارد، منجر به توسیع مفهوم تابع گردید و امروزه دو مفهوم تابع و نگاشت به یک معنا به کار برده می‌شوند. ما نیز در این کتاب، برای تأکید بر مفهوم نگاشتی تابع، در کنار کلمهٔ نگاشت، از کلمهٔ تابع نیز استفاده می‌کنیم.



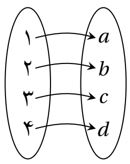
دو مجموعهٔ متناهی مانند $A = \{\text{۱,۲,۳,۴}\}$ و $B = \{a, b, c, d\}$ درنظر بگیرید. مطابق شکل، می‌توان هر یک از اعضای یکی را به یک و دقیقاً یکی از اعضای دیگری نگاشت. اما نگاشت چیست؟ همان‌طور که پیش از این نیز دیدیم، می‌توان هر یک از پیکان‌های رسم شده در شکل مقابل را به صورت یک زوج مرتب نشان داد. واضح است که با این نگارش، هر پیکان، یک عضو $A \times B$ است و نگاشت (مجموعهٔ همهٔ پیکان‌ها) زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ است. به‌هرحال مفهوم نگاشت را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

گزاره ۵.۱۰: برای هر دو مجموعهٔ A و B، مجموعهٔ $f \subset A \times B$ را یک نگاشت از A به B خوانده و می‌نویسیم $f : A \longrightarrow B$، اگر برای هر $x \in A$، دقیقاً یک $y \in B$ وجود داشته باشد که $(x, y) \in f$

مثال ۴۳.۱۰: در هر یک از موارد زیر، برای $A = \{\text{۱,۲,۳}\}$ و $B = \{a, b, c\}$ مشخص کنید f نگاشتی از A به B است یا خیر؟

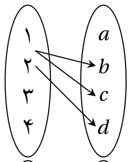
آ. $f=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$
ب. $f=\{(۱,a),(۲,b),(۳,c)\}$
ج. $f=\{(۱,a),(۲,a),(۳,a)\}$
د. $f=\{(۱,a),(۲,b)\}$
ه. $f=\{(۱,a),(۱,b),(۱,c)\}$

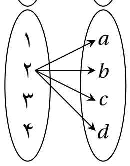
پاسخ: آ. $f \not\subset \mathrm{A}\times\mathrm{B}$ پس f نگاشتی از A به B نیست.
ب. f نگاشتی از A به B است. چون برای هر $x\in\mathrm{A}$ دقیقاً یک $y\in\mathrm{B}$ وجود دارد که $(x,y)\in f$.
ج. f نگاشتی از A به B است. چون برای هر $x\in\mathrm{A}$ دقیقاً یک $y\in\mathrm{B}$ وجود دارد که $(x,y)\in f$.
د. f نگاشتی از A به B نیست. چون برای $۳\in\mathrm{A}$ هیچ $y\in\mathrm{B}$ وجود ندارد که $(۳,y)\in f$.
ه. f نگاشتی از A به B نیست چون اولاً برای $۲,۳\in\mathrm{A}$ هیچ $y,z\in\mathrm{B}$ وجود ندارد که $(۲,y),(۳,z)\in f$. علاوه‌براین، برای $۱\in\mathrm{A}$ نیز بیش از یک $y\in\mathrm{B}$ وجود دارد که $(۱,y)\in f$. ■



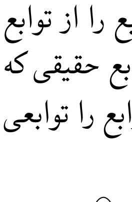
همان‌طور که از نام نگاشت برمی‌آید، نگاشت از مجموعه‌ای به مجموعه‌ای دیگر است. بنابراین، آن را با یک پیکان یک‌طرفه شروع می‌کنیم. به‌طور مثال، در شکل زیر، نگاشت $f:\mathrm{A}\longrightarrow\mathrm{B}$ را به صورت مقابل نمایش می‌دهیم که در آن
$\mathrm{A}=\{۱,۲,۳,۴\}$، $\mathrm{B}=\{a,b,c,d\}$ و $f=\{(۱,a),(۲,b),(۳,c),(۴,d)\}$

البته پیش از این، در بحث رابطه‌ها با ادبیات مشابهی آشنا شده‌ایم. اما تفاوت نگاشتی از A به B با رابطه‌ای از A به B در این است که اگر f نگاشتی از A به B باشد، آنگاه $\mathrm{Dom}(f)=\mathrm{A}$ ولی اگر f رابطه‌ای از A به B باشد، آنگاه $\mathrm{Dom}(f)\subset\mathrm{A}$. به‌عبارتی رابطهٔ $\mathrm{R}:\mathrm{A}\longrightarrow\mathrm{B}$ هرچند اعضایی از A را به اعضایی از B مربوط می‌کند، اما لزوما همهٔ اعضای A را به عضوی از B مربوط نمی‌کند، در حالی که نگاشت $f:\mathrm{A}\longrightarrow\mathrm{B}$ تمام اعضای A را به درون B می‌نگارد.





علاوه‌براین، یک رابطه، می‌تواند یک عضو از A را به چندین عضو از B مربوط کند، اما نگاشت f هر عضو از A را دقیقا به یک عضو از B می‌نگارد. بنابراین، هر چند هر یک از شکل‌های مقابل یک رابطه را نشان می‌دهند، اما هیچ‌کدام یک نگاشت را مشخص نمی‌سازند.
همان‌طور که می‌بینیم، نگاشت و تابع شباهت‌های زیادی به یکدیگر دارند. لذا مفهوم تابع را از توابع حقیقی به نگاشت توسعه داده و در واقع هر نگاشت را یک تابع درنظر می‌گیریم. اما توابع حقیقی که دامنهٔ آنها تمام $\mathbb{R}$ نیست، را نمی‌توان نگاشتی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ درنظر گرفت. لذا معمولاً این توابع را توابعی روی $\mathbb{R}$ درنظر می‌گیریم.



به‌وضوح دیده می‌شود که اگر $f:\mathrm{A}\longrightarrow\mathrm{B}$ تابعی (نگاشتی) یک‌به‌یک باشد، هر عضو از A دقیقاً یک عضو از R_f نگاشته می‌شود و برای هر عضو از R_f نیز دقیقاً یک عضو از A وجود دارد که به آن نگاشته شده است. بنابراین، بین A و R_f تناظری یک‌به‌یک برقرار است و اگر A متناهی باشد، تعداد اعضای A و R_A برابرند.
بنابراین، اگر برای تابع یک‌به‌یکی مانند $f:\mathrm{A}\longrightarrow\mathrm{B}$ داشته باشیم $\mathrm{R}_f=\mathrm{B}$، آنگاه تعداد اعضای A و B یکسان هستند. بنابراین دو مفهوم جدید را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۹.۱۰: تابع (نگاشت) $f:\mathrm{A}\longrightarrow\mathrm{B}$ را پوشا گوییم اگر $\mathrm{R}_f=\mathrm{B}$.

تعریف ۱۰.۱۰: هر تابع (نگاشت) یک‌به‌یک و پوشا را تناظر یک‌به‌یک (تابع دوسویی) گوییم.

ابتکار مهم و سرنوشت‌ساز جرج کانتور، بیان دقیق مفهوم تناظر یک‌به‌یک و معنا بخشیدن به تعدادهای برابر بود که وی را در توسیع مفهوم هم عددی (تعداد برابر داشتن) از مجموعه‌های متناهی به مجموعه‌های نامتناهی توانمند ساخت. وی مفهومی به‌نام کاردینال ایجاد کرد که نشانگر تعداد اعضای آن مجموعه بود. وی در توسیع کاردینال به مجموعه‌ها نامتناهی، بدون اینکه بگوید کاردینال یک مجموعه دقیقاً به چه چیزی اشاره دارد، گفت، دو مجموعه کاردینال برابر دارند اگر در تناظر یک‌به‌یک باشند. یعنی تابعی دوسویی (یک‌به‌یک و پوشا) از یکی به دیگری وجود داشته باشد. این تعریف همان چیزی است که از تساوی تعداد اعضای دو مجموعه درک می‌کنیم.

تعریف ۱۱.۱۰: دو مجموعهٔ دلخواه A و B را هم‌کاردینال گفته و می‌نویسیم Card A = Card B اگر و تنها اگر تابعی دوسویی مانند $f : A \longrightarrow B$ وجود داشته باشد.

تعریف فوق در واقع نوعی برابری (هم‌عددی) را بین مجموعه‌ها بیان می‌کند. از آنجا که در مجموعه‌های متناهی می‌توان کاردینال A را به تعداد اعضای A تعبیر کرد، انتظار داریم شرایط تساوی را داشته باشد. اما آیا این برابری، در مواجهه با مجموعه‌های نامتناهی نیز همین ویژگی‌ها را دارد و می‌توان آن را نوعی یکسانی بین دو مجموعه درنظر گرفت؟ این مشکل با مقایسه کاردینال چند مجموعهٔ نامتناهی جدی‌تر می‌شود. به‌طور مثال اگر از کسی بپرسند اعداد طبیعی بیشترند یا اعداد طبیعیِ زوج، به سرعت پاسخ خواهد داد که اعداد طبیعی بیشترند. اما در مثال زیر می‌بینیم که هم‌کاردینالند.

مثال ۴۴.۱۰: نشان دهید اعداد طبیعی و اعداد طبیعی زوج، دارای کارینال برابر هستند.

پاسخ: کافی است تناظری یک‌به‌یک بین آنها بسازیم. مجموعهٔ اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}$ و مجموعهٔ اعداد زوج را با $\mathbb{E}$ نمایش می‌دهیم. در این صورت تابع $f : \mathbb{N} \Longrightarrow \mathbb{E}$ با ضابطهٔ $f(x) = ۲x$ تابعی یک‌به‌یک و پوشا است. بنابراین، $\text{Card}\ \mathbb{N} = \text{Card}\ \mathbb{E}$. ■

مثال فوق درک شهودی به‌دست آمده را به‌کل متحول نمود. نتیجهٔ مثال زیر، از این هم عجیب‌تر است. در نگاه اول باورنکردی به نظر می‌رسد. به‌طور مثال، منحنی زیر نشان می‌دهد که می‌توان با حرکت بر آن به هر عضو $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ یکی از اعضای $\mathbb{N}$ را متناظر کرد. بدین‌ترتیب $\text{Card}\ \mathbb{N} = \text{Card}\ (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

$$\begin{array}{cccccc}
(۰,۰) & (۱,۰) & (۲,۰) & (۳,۰) & (۴,۰) & \cdots \\
(۰,۱) & (۱,۱) & (۲,۱) & (۳,۱) & (۴,۱) & \cdots \\
(۰,۲) & (۱,۲) & (۲,۲) & (۳,۲) & (۴,۲) & \cdots \\
(۰,۳) & (۱,۳) & (۲,۳) & (۳,۳) & (۴,۳) & \cdots \\
(۰,۴) & (۱,۴) & (۲,۴) & (۳,۴) & (۴,۴) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

مشاهداتی از این دست سؤالات زیادی به‌جود آورد. آیا هم‌کاردینال بودن (متناظر بودن) نوعی یکسانی است؟ مثال زیر نشان می‌دهد که هم‌کاردینالی، نوعی یکسانی است.

مثال ۴۵.۱۰: نشان دهید برای هر سه مجموعهٔ دلخواه مانند A، B و C داریم:

آ. $\mathrm{Card\ A} = \mathrm{Card\ A}$

ب. $\mathrm{Card\ A} = \mathrm{Card\ B}$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Card\ B} = \mathrm{Card\ A}$.

ج. اگر $\mathrm{Card\ B} = \mathrm{Card\ C}$ و $\mathrm{Card\ A} = \mathrm{Card\ B}$ آن‌گاه $\mathrm{Card\ A} = \mathrm{Card\ C}$.

پاسخ: آ. کافی است قرار دهیم $f: \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}$ و $f: x \mapsto x$ یعنی هر عضو از A مانند x را به خودش می‌نگارد. این تابع (نگاشت) را تابع همانی روی A گوییم که به‌وضوح یک‌به‌یک و پوشاست.

ب. اگر $\mathrm{Card\ A} = \mathrm{Card\ B}$ پس نگاشتی دوسویی مانند $f: \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ وجود دارد که در این‌صورت f^{-1} نیز تابعی از B به A است که البته دوسویی است. پس $\mathrm{Card\ B} = \mathrm{Card\ A}$.

ج. کافی است $f: \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ و $g: \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C}$ را توابعی دوسویی درنظر بگیریم و نشان دهیم $g \circ f: \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{C}$ تابعی دوسویی است. ■

مثال فوق نشان می‌دهد هم‌کاردینال بودن نوعی یکسانی است. شخصی پس از معتبر شناخته شدن هم‌کاردینالی به‌عنوان نوعی یکسانی (هم‌ارزی) از هم‌کاردینال بودن مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ و ... نتیجه می‌گیرد هر دو مجموعهٔ نامتناهی هم‌کاردینال هستند. وی می‌افزادی بسیار منطقی است که فقط یک بی‌نهایت داشته باشیم. آیا شما با این شخص موافقید؟

ایده این شخص چنان اقوا کننده و جذاب است که ممکن است شما را بر آن دارد تا برای اثبات آن تلاش کنید. اما به‌هرحال،در قرن نوزدهم، جرج کانتور، ریاضیدان آلمانی اثبات کرد که اعداد حقیقی و اعداد طبیعی هم‌کاردینال نیستند. یعنی نشان داد همهٔ مجموعه‌های نامتناهی هم‌کاردینال نیستند. وی اعداد حقیقی را مجموعهٔ اعشار نامتناهی‌ها درنظر گرفت و نشان داد امکان ندارد تناظری یک‌به‌یک بین اعداد طبیعی و اعدادحقیقی وجود داشته باشد. وی نشان داد اگر تابعی مانند $f: \mathbb{N} \longrightarrow (۰,۱]$ یک‌به‌یک باشد، مسلماً پوشا نیست. برای این منظور نشان داد می‌توان عددی حقیقی مانند $x \in (۰,۱]$ ساخت که $x \notin \mathrm{R}_f$. به‌طور مثال اگر اولین رقم اعشاری $f(۰)$ که آن را $x_۰$ می‌خوانیم، ۳ باشد، اولین رقم اعشاری x را عددی مخالف $x_۰$ مانند ۱ می‌گذاریم. پس $x \neq f(۰)$. به‌طور مشابه، برای هر عدد طبیعی مانند i، $(i+۱)$اُمین رقم اعشارx را رقمی مخالف با $(i+۱)$اُمین رقم اعشاری $f(i)$ می‌گذاریم. بدین‌ترتیب می‌توانیم عددی اعشار نامتناهی مانند x بسازیم که $x \in (۰,۱]$ و با تمام $f(i)$ها متفاوت است. بنابراین، تابع f پوشا نیست. به‌عبارتی تابعی یک‌به‌یک و پوشا از $\mathbb{N}$ به بازهٔ $(۰,۱]$ وجود ندارد.

مثال فوق نشان داد هرچند تعداد اعضای بازهٔ $(۰,۱]$ نیز بی‌نهایت است، اما با تعداد اعضای $\mathbb{N}$ متفاوت است. بدین‌ترتیب، تحولی بزرگ در ریاضیات آغاز شد.

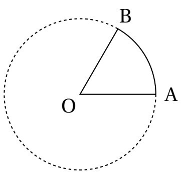
خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند با مراجعه به کتاب‌های نظریهٔ مجموعه‌ها و کتاب‌های مبانی ریاضی، مطالب بیشتری در مورد حساب کاردینال‌ها و حساب بی‌نهایت‌ها بیاموزند.

فصل ۱۱

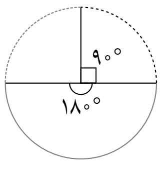
مثلثات

«مثلثات» یا به‌عبارت دقیق‌تر «نسبت‌های مثلثاتی» به نسبت‌های اضلاع مثلث‌های قائم‌الزاویه گفته می‌شود که تابعی از زاویهٔ غیر قائم مثلث قائم‌الزاویه هستند و کاربردهای زیادی دارند. البته با معرفی «دایرهٔ واحد» که «دایرهٔ مثلثاتی» نیز خوانده می‌شود، دامنهٔ توابع مثلثاتی از بازهٔ $\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]$ به $\mathbb{R}$ تغییر می‌یابد. هر چند در مثلث، زاویه‌ای خارج از این بازه نداریم، اما نام «توابع مثلثاتی» بر آنها باقی مانده و این مبحث همچنان مثلثات خوانده می‌شود.

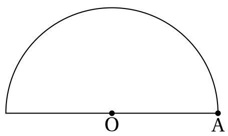
۱.۱۱ درجه و رادیان



زاویه به میزان باز یا بسته بودن یک گوشه (در چندضلعی‌ها) گفته می‌شود و به‌طور کاملا تجربی و حسی، دو زاویه را برابر خواندیم اگر به‌عنوان دو گوشه بریکدیگر منطبق شوند. همچنین، جمع دو زاویه را زاویه‌ای در نظر می‌گیریم که با کنار هم قرار دادن دو زاویهٔ دیگر ساخته می‌شود؛ اما هنوز آن را شمارش‌پذیر نساخته‌ایم. اولین بار، بابلیان باستان دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کردند. امروزه زاویه‌ای که هر قسمت می‌سازد را درجه می‌نامیم. در شکل مقابل، کمان $\overset{\frown}{AB}$ قسمتی از دایره‌ای به مرکز O است و زاویهٔ $\widehat{AOB}$ را زاویهٔ مرکزیِ کمانِ $\overset{\frown}{AB}$ می‌خوانیم. در واقع دایره را به ۳۶۰ قسمت تقسیم کرده، زاویهٔ مرکزی مربوط به هر قسمت را «یک درجه» می‌خوانیم و n درجه را به‌صورت n° نمایش می‌دهیم. واضح است که چهار زاویهٔ قائمه (راست) برابر است با کل دایره، پس هر زاویهٔ راست برابر است با $\left(\frac{۳۶۰}{۴}\right)^\circ = ۹۰^\circ$. همچنین زاویهٔ دو قائمه که یک خط راست است و زاویهٔ مرکزی نصف دایره است، برابر است با



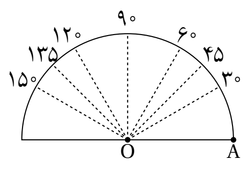
$$۱۸۰^\circ = \left(\frac{۳۶۰}{۲}\right)^\circ = ۲ \times ۹۰^\circ$$



مثال ۱.۱۱: نقطهٔ B را بر نیم‌دایره چنان بیابید که $\widehat{AOB}$ برابر باشد با:

آ. ۴۵° ب. ۱۳۵° ج. ۳۰°

د. ۶۰° ه. ۱۲۰° و. ۱۵۰°



پاسخ: با توجه به تساوی‌های زیر به سادگی می‌توان زوایای مورد نظر را پیدا کرد.

آ. $۴۵ = \frac{۹۰}{۲}$ ب. $۱۳۵ = ۹۰ + ۴۵$ ج. $۳۰ = \frac{۹۰}{۳}$

د. $۶۰ = ۲ \times ۳۰$ ه. $۱۲۰ = ۹۰ + ۳۰$ و. $۱۵۰ = ۱۸۰ - ۳۰$

بنابراین، می‌توان تمام زوایا را در شکل مقابل نشان داد. ■

شاید زمانی که انسان‌ها با استفاده از طناب دور یک چاه دایره‌ای شکل را اندازه می‌گرفتند، فهمیدند که طنابی که دور دایره را می‌گیرد، تقریبا سه برابر قطر آن است و با اندازه‌گیری‌های زیاد دیدند که نسبت محیط به قطر ثابت است. امروزه، نسبت محیط به قطر را عدد پی خوانده و با π نمایش می‌دهیم و می‌دانیم عددی گنگ است. بنابراین، نسبت یک دایرهٔ کامل به شعاع، برابر است با ۲π؛ چون اگر محیط را با l و شعاع را با r نشان دهیم داریم $l = ۲\pi r$ و درنتیجه $\frac{l}{r} = ۲\pi$.

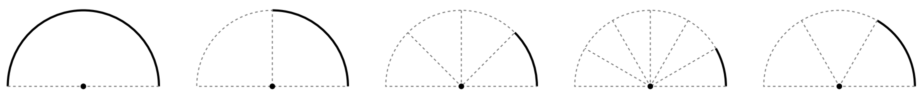
بنابراین، اگر کمان $\overset{\frown}{AB}$ یک نیم‌دایره باشد، طول کمان برابر است با πr و درنتیجه نسبت طول کمان به شعاع دایره برابر است با π.

مثال ۲.۱۱: در هر یک از موارد زیر، طول کمان مربوط به زاویهٔ داده شده را برحسب شعاع دایره محاسبه کنید.

آ. ۱۸۰° ب. ۹۰° ج. ۴۵°
د. ۳۰° ه. ۶۰° و. ۱۳۵°
ز. ۱۲۰° ح. ۱۵۰۰ ط. ۱۰°
ی. ۱° ک. ۲۰° ل. ۹°

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ∎

در شکل‌های زیر، کمان مربوط به هر یک از زاویه‌های داده شده را مشخص کرده‌ایم.



π $\frac{\pi}{۲}$ $\frac{\pi}{۴}$ $\frac{\pi}{۶}$ $\frac{\pi}{۳}$

واضح است که در هر دایره‌ای، زاویهٔ مرکزی کمان $\overset{\frown}{AB}$ زاویهٔ قائمه (۹۰°) است اگر و تنها اگر طول کمان $\overset{\frown}{AB}$، یک‌چهارم محیط دایره باشد. پس نسبت طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ به شعاع دایره برابر است با

$$\frac{\left(\frac{۲\pi r}{۴}\right)}{r} = \frac{\pi}{۲}$$

بنابراین، می‌توان از «نسبت طول کمان به شعاع» برای بیان زاویهٔ مرکزی کمان استفاده کرد. این نسبت را «رادیان» خوانده و با rad مشخص می‌کنیم. به‌طور مثال زاویهٔ قائمه (۹۰°) را به‌صورت $\left(\frac{\pi}{۲}\right)_{\mathrm{rad}}$، یا به‌اختصار به‌صورت $\frac{\pi}{۲}$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۳.۱۱: کمان مربوط به هر یک از زوایای زیر را مشخص کنید.

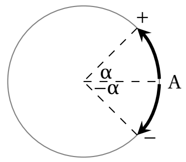
آ. π_{rad} ب. $\left(\frac{\pi}{۴}\right)_{\mathrm{rad}}$ ج. $\left(\frac{\pi}{۳}\right)_{\mathrm{rad}}$ د. $\left(\frac{\pi}{۶}\right)_{\mathrm{rad}}$
ه. $\left(\frac{۲\pi}{۳}\right)_{\mathrm{rad}}$ و. $\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)_{\mathrm{rad}}$ ز. $\left(\frac{۴\pi}{۳}\right)_{\mathrm{rad}}$ ح. $\left(\frac{۵\pi}{۳}\right)_{\mathrm{rad}}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ∎

دایره‌ای به شعاع واحد (l_{U}) را «دایرهٔ واحد» می‌خوانیم. در دایرهٔ واحد برای هر عدد حقیقی مثبت مانند a، که $۰ < a < ۲\pi$ داریم:

طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ برابر است با $a l_{\mathrm{U}}$ اگر و تنها اگر زاویهٔ مرکزی آن برابر باشد با a_{rad}.

در ادامه با مزایای استفاده از رادیان و دایرهٔ واحد آشنا خواهیم شد.



همان‌طور که از اعداد طبیعی، اعداد صحیح و از اعداد کسری اعداد گویا را ساختیم، زوایای مثبت و منفی را به‌معنای گردش در جهت مثبت (مطابق شکل، در جهت خلاف چرخش عقربه‌های ساعت) و جهت منفی را در جهت عکس آن در نظر می‌گیریم. بنابراین، از این به بعد، زاویه به‌معنای حرکت روی کمان، یا به‌عبارتی چرخش حول مرکز دایره است، نه به‌معنای طول کمان یا نسبت طول کمان به شعاع.

معمولاً به عدد صفر (به‌عنوان زاویه)، نقطهٔ A را (مطابق شکل فوق) اختصاص داده و به هر زاویه‌ای مانند α، نقطه‌ای که با α_{rad} چرخش از نقطهٔ A به آن می‌رسیم اختصاص می‌دهیم. همچنین برای هر $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$، می‌توانیم $\alpha+\beta$ را به α_{rad} چرخش در مرحله اول و β_{rad} چرخش در مرحله دوم تعبیر کنیم. واضح است که بعد از $۲\pi_{\mathrm{rad}}$ دوباره به نقطهٔ A بازگشته و درنتیجه $(۲\pi+\alpha)_{\mathrm{rad}}$ همان نقطه‌ای را مشخص می‌کند که α_{rad} مشخص می‌کند.

مثال ۴.۱۱: زوایای زیر را بر دایرهٔ واحد مشخص کنید.

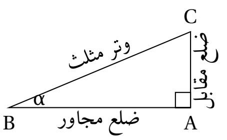
آ. $\frac{\pi}{۲}\mathrm{rad}$ ب. $\frac{-\pi}{۲}\mathrm{rad}$ ج. $\frac{\pi}{۳}\mathrm{rad}$ د. $\frac{-\pi}{۳}\mathrm{rad}$

ه. π_{rad} و. $-\pi_{\mathrm{rad}}$ ز. $۳\pi_{\mathrm{rad}}$ ح. $-۳pi_{\mathrm{rad}}$

ط. $\left(\frac{\pi}{۳}+\pi\right)_{\mathrm{rad}}$ ی. $\left(\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۴}\right)_{\mathrm{rad}}$ ک. $\left(\pi-\frac{\pi}{۶}\right)_{\mathrm{rad}}$ ل. $\left(-۳\pi+\frac{\pi}{۳}\right)_{\mathrm{rad}}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۲.۱۱ سینوس و کسینوس



مثلثات از روی نسبت‌های اضلاع مثلث‌های قائم‌الزاویه به‌وجود آمده است و به‌همین سبب آن را «مثلثات» می‌خوانند. همان‌طور که در مثال زیر مشاهده می‌کنیم، برای هر مثلثی مانند $\triangle ABC$ که در آن $\hat{A} = ۹۰^\circ = \frac{\pi}{۲}\mathrm{rad}$ و $\hat{B}=\alpha$، حاصل $\frac{AB}{BC}$ مقداری ثابت است و فقط به زاویهٔ α بستگی دارد؛ به‌عبارتی تابعی از α است که آن را به‌صورت $\sin\alpha$ نوشته و سینوس α می‌خوانیم. معمولاً می‌گویند:

$$\sin\alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } \alpha}{\text{طول وتر مثلث}}$$

و به‌طور مشابه، کسینوس زاویهٔ α را به‌صورت $\cos\alpha$ نمایش می‌دهند که آن را نیز می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

$$\cos\alpha = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } \alpha}{\text{طول وتر مثلث}}$$

مثال ۵.۱۱: نشان دهید برای هر دو مثلث قائم‌الزاویه مانند $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ که در آن $\hat{A}=\hat{D}=۹۰^\circ=\frac{\pi}{۲}\mathrm{rad}$ داریم:

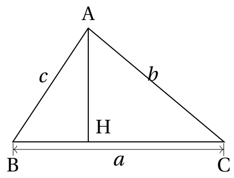
آ. $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ ب. $\frac{AC}{BC}=\frac{DF}{EF}$

پاسخ: آ. چون جمع زوایای مثلث ۱۸۰° است، پس $\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ=\hat{E}+\hat{F}$ و از آنجا که $\hat{B}=\hat{E}$ پس $\hat{C}=\hat{F}$.

بنابراین، دو مثلث سه زاویهٔ برابر داشته و متشابه‌اند. درنتیجه متناسب نیز هستند و داریم:

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}\xRightarrow{BC\neq ۰}\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$$

ب . به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■



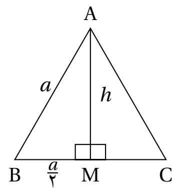
مثال ۶.۱۱: با توجه به شکل مقابل نشان دهید:

آ. $AH=c\sin B$ ب. $AH=b\sin C$ ج. $S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}ab\sin C$

د. $S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}ac\sin B$ هـ. $S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}bc\sin A$ و. $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود. ■

مثلث $\triangle ABC$ را متساوی‌الاضلاع گوییم اگر اضلاع آن با هم برابر باشند. یکی از ویژگی‌های مهم مثلث متساوی‌الساقین این است که زوایای آن با هم برابرند و چون جمع زوایای مثلث برابر است با $(=\pi_{\mathrm{rad}})$ ۱۸۰° پس $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\left(\frac{۱۸۰}{۳}\right)^\circ=\frac{\pi}{۳}\mathrm{rad}$.



اگر در مثلث متساوی‌الاضلاع $\triangle ABC$ با اضلاعی به طول a، نقطهٔ M را وسط ضلع BC درنظر بگیریم، داریم $\triangle ABM=\triangle ACM$ و نتیجه $\widehat{BAM}=\widehat{CAM}=۳۰^\circ=\left(\frac{\pi}{۶}\right)_{\mathrm{rad}}$. اما در این صورت می‌توان از قضیهٔ فیثاغورس استفاده کرده و نوشت

$$h^۲+\left(\frac{a}{۲}\right)^۲=a^۲\Longrightarrow h^۲=\frac{۳a^۲}{۴}\Longrightarrow h=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

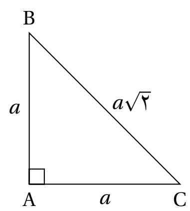
بدین‌ترتیب داریم:

$$\begin{cases}\sin ۳۰^\circ=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{BM}{AB}=\frac{۱}{۲}\\ \cos ۳۰^\circ=\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{AM}{AB}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \sin ۶۰^\circ=\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{AM}{AB}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \cos ۶۰^\circ=\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{BM}{AB}=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

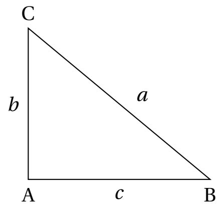
به‌طور مشابه در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\triangle ABC$ با اضلاع قائمه‌ای به طول a، اگر نقطهٔ M را وسط وتر در نظر بگیریم، داریم $\triangle AMB=\triangle ACB$، چون اضلاع قائمه برابرند و درنتیجه $\hat{B}=\hat{C}$ و چون جمع اضلاع مثلث ۱۸۰° است، پس $\hat{B}=\hat{C}=۴۵^\circ$. اما از طرفی بنا به قضیهٔ فیثاغورث داریم

$$|AB|^۲+|AC|^۲=|BC|^۲\Longrightarrow a^۲+a^۲=|BC|^۲\Longrightarrow BC=a\sqrt{۲}$$

بنابراین، می‌توان $\sin ۴۵^\circ$ و $\cos ۴۵^\circ$ را محاسبه نمود.



$$\begin{cases}\cos ۴۵^\circ=\cos\hat{B}=\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{a}{a\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ \sin ۴۵^\circ=\sin\hat{B}=\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{a}{a\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{cases}$$

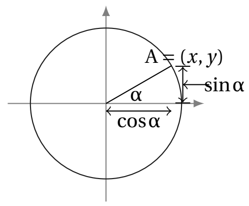


مثال ۷.۱۱: نشان دهید در قائم‌الزاویهٔ $\triangle ABC$ که $\hat{A} = ۹۰^\circ = \frac{\pi}{۲}\mathrm{rad}$، داریم $(\sin B)^۲ + (\cos B)^۲ = ۱$.

پاسخ: بنا به قضیهٔ فیثاغورس $b^۲ + c^۲ = a^۲$ در نتیجه $\frac{b^۲}{a^۲} + \frac{c^۲}{a^۲} = ۱$ پس $(\cos B)^۲ + (\sin B)^۲ = ۱$. ■

معمولاً $(\sin B)^۲$ را به‌صورت $\sin^۲ B$ نشان داده و از $\cos^۲ B$ برای $(\cos B)^۲$ استفاده می‌کنیم.

شخصی با استفاده از مثال فوق نتیجه می‌گیرد $\sin^۲\left(\frac{-\pi}{۷}\right) + \cos^۲\left(\frac{-\pi}{۷}\right) = ۱$. اما در مثال فوق از قضیهٔ فیثاغورث استفاده کرده‌ایم که در آن $\hat{B}$ یک زاویه از مثلثی قائم‌الزاویه است و درنتیجه $۰ < \hat{B} < \frac{\pi}{۲}\mathrm{rad}$. مهم‌تر از همه اینکه توابع $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ نیز فقط برای $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ تعریف شده‌اند؛ چون باید α زاویه‌ای از یک مثلث قائم‌الزاویه باشد.



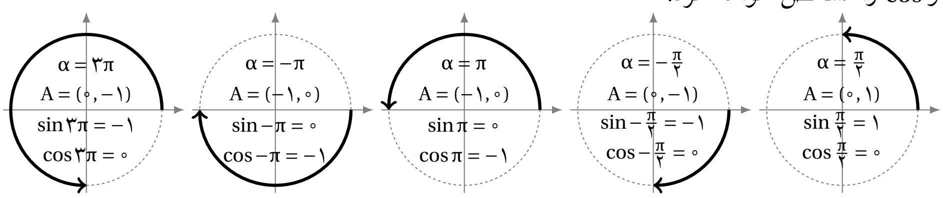
برای مقابله با این مشکل از دایرهٔ واحد استفاده کرده و توابع sin و cos را به شکلی دیگر تعریف می‌کنیم. گوییم برای هر نقطه‌ای مانند A با مختصات (x, y) بر دایرهٔ واحد که زاویهٔ α را نشان دهد، قرار می‌دهیم

$\cos\alpha = x$ و $\sin\alpha = y$

مثال ۸.۱۱: با توجه به دایرهٔ واحد (دایرهٔ مثلثاتی) مقادیر زیر را بیابید.

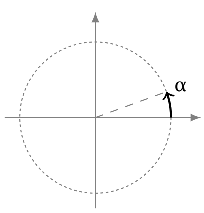
آ . $\sin ۰$	ب . $\cos ۰$	ج . $\sin\frac{\pi}{۲}$	د . $\cos\frac{\pi}{۲}$
ه . $\sin\frac{-\pi}{۲}$	و . $\cos\frac{-\pi}{۲}$	ز . $\sin\pi$	ح . $\cos\pi$
ط . $\sin -\pi$	ی . $\cos -\pi$	ک . $\sin\frac{۳\pi}{۲}$	ل . $\cos\frac{۳\pi}{۲}$

پاسخ: نقطهٔ مربوط به هر زاویه را بر دایرهٔ واحد مشخص کرده، مختصات آن در دستگاه مختصات، مقادیر sin و cos را مشخص خواهد کرد.



زاویهٔ صفر، نقطهٔ $A = (۱, ۰)$ را مشخص کرده و در نتیجه $\sin ۰ = ۰$ و $\cos ۰ = ۱$. ■

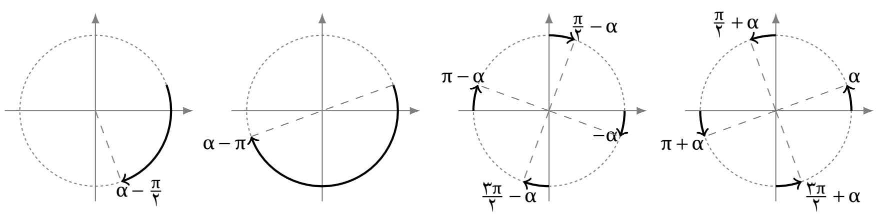
چون هر زاویه، عددی حقیقی (طول حرکتی بر دایرهٔ واحد) است، پس می‌توان $\alpha - \beta$ را به‌معنای $\alpha + (-\beta)$ درنظر گرفت.



مثال ۹.۱۱: باتوجه به شکل مقابل، هر یک از زوایای زیر را بر دایرهٔ واحد مشخص کنید.

آ . $-\alpha$	ب . $\pi + \alpha$	ج . $\pi - \alpha$	د . $\frac{\pi}{۲} + \alpha$	ه . $\frac{\pi}{۲} - \alpha$
و . $\alpha - \pi$	ز . $\alpha - \frac{\pi}{۲}$	ح . $\frac{۳\pi}{۲} + \alpha$	ط . $\frac{۳\pi}{۲} - \alpha$	ی . $\alpha - \frac{۳\pi}{۲}$

پاسخ: با توجه به شکل‌های زیر واضح است.



مورد آخر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۱۰.۱۱: هر یک از مقادیر زیر را برای $۰ \le \alpha \le \frac{\pi}{۲}$، بر حسب $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ به‌دست آورید.

آ. $\cos -\alpha$	ب. $\sin -\alpha$	ج. $\cos(\pi+\alpha)$	د. $\sin(\pi+\alpha)$
ه. $\cos(\pi-\alpha)$	و. $\sin(\pi-\alpha)$	ز. $\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)$	ح. $\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)$
ط. $\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)$	ی. $\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)$	ک. $\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha\right)$	ل. $\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha\right)$
م. $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{۲}\right)$	ن. $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{۲}\right)$	س. $\cos(\alpha-\pi)$	ع. $\sin(\alpha-\pi)$

پاسخ: زوایای مورد نظر را بر دایرهٔ مثلثاتی یافته، مثلث‌های قائم الزاویه‌ای که با محورهای مختصات می‌سازند را مدنظر قرار داده، مختصات آن را می یابیم. بنابراین داریم:

آ. $\cos\alpha$	ب. $-\sin\alpha$	ج. $-\cos\alpha$	د. $-\sin\alpha$
ه. $-\cos\alpha$	و. $\cos\alpha$	ز. $\sin\alpha$	ح. $\cos\alpha$
ط. $-\sin\alpha$	ی. $\cos\alpha$	ک. $-\sin\alpha$	ل. $-\cos\alpha$
م. $\sin\alpha$	ن. $-\cos\alpha$	س. $-\cos\alpha$	ع. $-\sin\alpha$

■

حتماً پاسخ دهید.
ساده اما مهم...

مثال ۱۱.۱۱: نشان دهید:

آ. برای هر $\alpha\in\mathbb{R}$ که $\frac{\pi}{۲}\le\alpha\le\pi$ داریم $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ و $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

ب. برای هر $\alpha\in\mathbb{R}$ که $\pi\le\alpha\le ۲\pi$ داریم $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ و $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$.

ج. برای هر $\alpha\in\mathbb{R}$ که $-۲\pi\le\alpha\le ۰$ داریم $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ و $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$.

د. برای هر $\alpha\in\mathbb{R}$ داریم $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ و $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$.

پاسخ: آ. (راهنمایی: اگر $\frac{\pi}{۲}\le\alpha\le\pi$ پس $۰\le\beta\le\frac{\pi}{۲}$ و درنتیجه $\alpha=\frac{\pi}{۲}+\alpha$.)
موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

حتماً پاسخ دهید.
با توجه به مثال فوق ساده است.

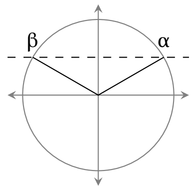
مثال ۱۲.۱۱: نشان دهید برای هر $\alpha\in\mathbb{R}$ داریم:

آ. $\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\sin\alpha$	ب. $\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\cos\alpha$	ج. $\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-\sin\alpha$
د. $\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=\cos\alpha$	ه. $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{۲}\right)=\sin\alpha$	و. $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{۲}\right)=-\cos\alpha$
ز. $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	ح. $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۱۳.۱۱: معادلات زیر را در $[۰,۲\pi)$ حل کنید.

آ. $\sin x=\frac{۱}{۲}$	ب. $\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	ج. $\sin x=\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$
د. $\cos x=\frac{-۱}{۲}$	ه. $\sin x=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$	و. $\cos x=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$



پاسخ: آ. هر زاویه مانند $x\in[۰,۲\pi)$ نقطه‌ای مانند $A=(a,b)$ را بر دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌سازد که در آن $a=\cos x$ و $b=\sin x$. بنابراین، محل تقاطع خط $y=\frac{۱}{۲}$ با دایرهٔ مثلثاتی، نقاطی را مشخص می‌کند که سینوس زاویهٔ مربوط به آن برابر است با $\frac{۱}{۲}$. چون $\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$ پس $\alpha=\frac{\pi}{۶}$ و $\beta=\pi-\frac{\pi}{۶}$ جواب هستند.
موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۱۴.۱۱: نامعادلات زیر را حل در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ حل کنید.

آ. $\sin x<\frac{۱}{۲}$	ب. $\sin x<\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$	ج. $\cos x>\frac{۱}{۲}$

پاسخ: آ. نقاطی از دایرهٔ مثلثاتی را مدنظر قرار می‌دهیم که در آنها مختص دوم کوچک‌تر از $\frac{۱}{۲}$ باشد. ادامه کار

به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

تمرین:

(۱) زوایای زیر را بر حسب رادیان بنویسید.

آ. ۹۰° ب. ۴۵° ج. -۳۰° د. ۶۰° ه. ۰°

و. ۱۲۰° ز. ۱۵۰° ح. ۱۳۵° ط. ۲۱۰° ی. ۳۳۰°

ک. ۱° ل. ۱۳° م. ۵۱° ن. ۱۰° س. ۱۷°

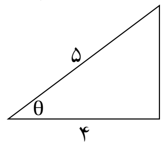
(۲) زوایای زیر را به درجه بیان کنید.

آ. $\frac{\pi}{۸}$ ب. $\frac{۷\pi}{۱۲۰}$ ج. $\frac{۴\pi}{۵}$ د. $\frac{۷\pi}{۱۲}$ ه. $\frac{۹\pi}{۲۰}$

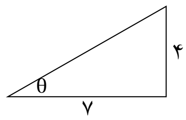
(۳) در هر یک از موارد زیر، مقادیر $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را بیابید.

از قضیهٔ فیثاغورس کمک بگیرید.

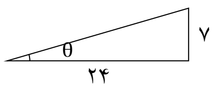
آ.



ب.

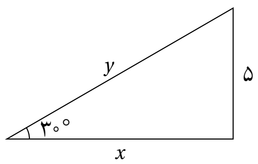


ج.

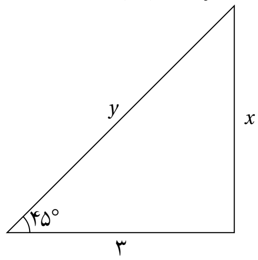


(۴) در هر یک از موارد زیر، مقادیر x و y را بیابید.

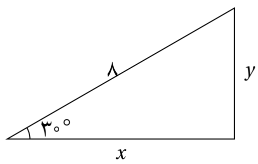
آ.



ب.



ج.



توجه! توجه!
در پاسخ به این تمرینات حتماً از دایرهٔ مثلثاتی استفاده کنید.
استفاده از دایرهٔ مثلثاتی به ماندگاری و استفاده راحت از روابط فوق کمک می‌کند.

(۵) مقادیر زیر را بیابید.

آ. $\cos -۴۵^\circ$ ب. $\sin -۴۵^\circ$ ج. $\cos ۱۳۵^\circ$ د. $\sin ۱۳۵^\circ$

ه. $\cos -۱۳۵^\circ$ و. $\sin -۱۳۵^\circ$ ز. $\sin ۲۲۵^\circ$ ح. $\cos ۲۲۵^\circ$

(۶) با توجه به اینکه $\cos ۲۰^\circ \approx ۰٫۹۴$ و $\sin ۲۰^\circ \approx ۰٫۳۴$، مقادیر زیر را بیابید.

آ. $\cos(-۲۰)^\circ$ ب. $\sin(-۲۰)^\circ$ ج. $\sin ۷۰^\circ$ د. $\cos ۷۰^\circ$

ه. $\cos ۱۱۰^\circ$ و. $\sin ۱۱۰^\circ$ ز. $\cos ۱۶۰^\circ$ ح. $\sin ۱۶۰^\circ$

ط. $\cos ۲۰۰^\circ$ ی. $\sin ۲۰۰^\circ$ ک. $\cos ۲۵۰^\circ$ ل. $\sin ۲۵۰^\circ$

م. $\cos ۲۹۰^\circ$ ن. $\sin ۲۹۰^\circ$ س. $\cos(-۱۱۰)^\circ$ ع. $\sin(-۱۶۰)^\circ$

(۷) مقادیر زیر را بیابید.

آ. $\sin -۳۰^\circ$ ب. $\cos -۳۰^\circ$ ج. $\cos ۱۲۰^\circ$ د. $\sin ۱۲۰^\circ$

ه. $\sin -۶۰۰$ $\cos -۶۰^\circ$ و. $\sin ۱۵۰^\circ$ ز. $\cos -۱۵۰^\circ$

(۸) معادلات زیر را در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ حل کنید.

آ. $\cos x = ۱$ ب. $\sin x = ۱$ ج. $\cos x = -۱$ د. $\sin x = -۱$

ه. $\cos x = ۰$ و. $\sin x = ۰$ ز. $\sin x = \frac{۱}{۲}$ ح. $\sin x = -\frac{۱}{۲}$

ط. $\sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ی. $\cos x = \frac{۱}{۲}$ ک. $\cos x = -\frac{۱}{۲}$ ل. $\cos x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

م. $\sin x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ن. $\cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ س. $\sin x = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$ ع. $\cos x = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$

(۹) نامعادلات زیر را در بازهٔ $\left[۰, \frac{\pi}{۲}\right]$ حل کنید.

آ. $\sin x > \frac{۱}{۲}$ ب. $\sin x < \frac{۱}{۲}$ ج. $\sin x < \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

د. $\sin x \geq \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ه. $\cos x > \frac{۱}{۲}$ و. $\cos x < \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ز. $\sin x < \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ح. $\cos x > \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ط. $\sin x < \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$

(۱۰) نامعادلات زیر را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ حل کنید.

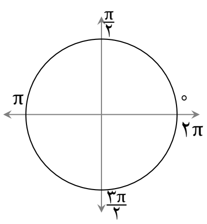
آ. $\sin x > \frac{۱}{۲}$ ب. $\sin x < \frac{۱}{۲}$ ج. $\sin x < \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

د. $\sin x \geq \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ه. $\cos x > \frac{۱}{۲}$ و. $\cos x < \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

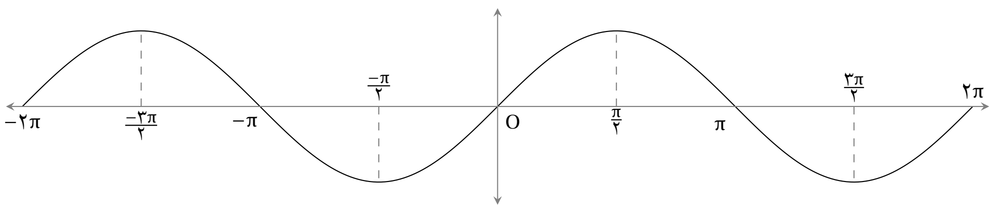
ز. $\sin x < \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ح. $\cos x > \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ط. $\sin x < \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$

۳.۱۱ نمودار توابع مثلثاتی

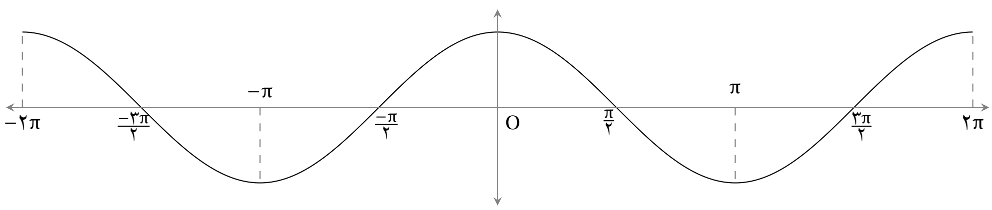
برای هر عدد حقیقی مثبت مانند x، نقطه‌ای را که از چرخش به‌اندازهٔ x_{rad} در جهت مثبت حول مرکز دایرهٔ مثلثاتی به‌دست می‌آید را در نظر گرفته و آن نقطه را به x نسبت می‌دهیم. دیدیم که در دایرهٔ مثلثاتی، می‌توان این نقطه را با حرکت بر محیط دایره، به طول xl_{U} نیز به‌دست آورد که در آن l_{U} واحد طول و شعاع دایره است. همچنین برای $(-x)$ نیز نقطه‌ای مشابه، با حرکت در جهت منفی نسبت دارد. پیش از این دیدیم اگر به زاویه‌ای مانند x نقطه‌ای مانند $\mathrm{A} = (a,b)$ اختصاص یابد، داریم $\sin x = a$ و $\cos x = b$. بدین‌ترتیب $\sin$ و $\cos$ را به‌عنوان توابعی روی $\mathbb{R}$ تعریف کردیم که دامنهٔ آن‌ها نیز $\mathbb{R}$ است.



برای حدس زدن شکل نمودار تابع $\sin$ توجه داریم که این تابع، در $x = ۰$ داریم $\sin ۰ = ۰$ و تا $x = \frac{\pi}{۲}$ مقدار آن با زیاد شدن x، زیاد می‌شود؛ چون نقطه با زیاد شدن x بر دایره بالا رفته تا به نقطهٔ مربوط به $\frac{\pi}{۲}$ برسد و $\sin \frac{\pi}{۲} = ۱$. از $x = \frac{\pi}{۲}$ تا $x = \pi$، با زیاد شدن x، بر دایره پایین آمده تا به نقطهٔ π برسیم و درنتیجه مقدار $\sin x$ کم می‌شود تا از ۱ به صفر برسد. با این تفاسیر و ادامه همین تحلیل، می‌توان حدس زد که تابع $y = \sin x$ دارای نمودار زیر باشد.



به‌طور مشابه می‌توان نمودار تابع $y = \cos x$ را نیز حدس زد که دارای نمودار زیر است.



زاویهٔ $۲\pi_{\mathrm{rad}}$ به یک دور کامل بر دایرهٔ مثلثاتی، در جهت مثبت اشاره دارد و $-۲\pi_{\mathrm{rad}}$ نیز یک دور کامل بر دایرهٔ مثلثاتی در جهت منفی را نشان می‌دهد، پس برای هر عدد حقیقی مانند x، زوایای x_{rad} و $(x \pm ۲\pi)_{\mathrm{rad}}$ به یک نقطه بر دایرهٔ مثلثاتی اشاره دارند. بنابراین برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\cdots = \sin(x - ۴\pi) = \sin(x - ۲\pi) = \boldsymbol{\sin x} = \sin(x + ۲\pi) = \sin(x + ۴\pi) = \cdots$$

و به‌طور مشابه داریم:

$$\cdots = \cos(x - ۴\pi) = \cos(x - ۲\pi) = \boldsymbol{\cos x} = \cos(x + ۲\pi) = \cos(x + ۴\pi) = \cdots$$

به‌عبارتی برای هر $k \in \mathbb{Z}$ داریم: $\sin x = \sin(x+۲k\pi)$ و $\cos x = \cos(x+۲k\pi)$.

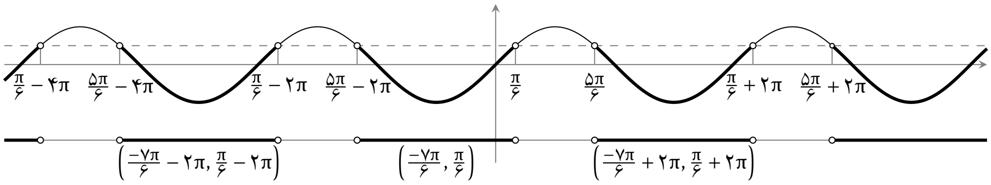
بنابراین، مقادیر $\sin x$ و $\cos x$ در بازه‌هایی به‌طول ۲π تکرار می‌شوند. این تکرار شدن بر نمودار این توابع نیز مشهود است. لذا این توابع را متناوب با دورهٔ تناوب ۲π گوییم.

گزاره ۱.۱۱: تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را متناوب با دورهٔ تناوب k گوییم اگر و تنها اگر برای هر $x\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x)=f(x+k)$.

بدین‌ترتیب، معادلهٔ $\sin x = \frac{۱}{۲}$ که در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارای جواب‌های $x=\frac{\pi}{۶}$ و $x=\frac{۵\pi}{۶}$ است، در $\mathbb{R}$ دارای مجموعه جواب زیر است.

$$\left\{\frac{\pi}{۶}+۲k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{۵\pi}{۶}+۲k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

همچنین در مورد جواب‌های نامعادلهٔ $\sin x < \frac{۱}{۲}$ نیز می‌توان به نمودار تابع توجه کرد و بازه‌هایی که در آن‌ها نقاط روی نمودار دارای مختص دومی کوچک‌تر از $\frac{۱}{۲}$ هستند را یافت. برای این منظور خط $y=\frac{۱}{۲}$ را با نمودار قطع‌داده و نقاط برخورد را می‌یابیم.



با توجه به نمودار فوق، برای هر $k\in\mathbb{Z}$، بازهٔ $\left(\frac{-۷\pi}{۶}+۲k\pi, \frac{\pi}{۶}+۲k\pi\right)$ بخشی از جواب است و مجموعه‌جواب نامعادلهٔ فوق، اجتماع تمام این بازه‌ها است که آن را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{-۷\pi}{۶}+۲k\pi\ ,\ \frac{\pi}{۶}+۲k\pi\right)$$

تمرین:

(۱۱) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

آ. $y=\cos(-x)$ ب. $y=-\cos(x)$ ج. $y=\sin(-x)$

د. $y=-\sin(x)$ ه. $y=-\sin(-x)$ و. $y=|\sin x|$

ز. $y=\sin|x|$ ح. $y=|\cos x|$ ط. $y=\cos|x|$

(۱۲) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

آ. $y=\sin(x+\frac{\pi}{۲})$ ب. $y=\sin(x-\frac{\pi}{۲}$ ج. $y=\sin(x-\pi)$

د. $y=\cos(x+\pi)$ ه. $y=\cos(\frac{\pi}{۲}-x)$ و. $y=\cos(\frac{\pi}{۲}+x)$

(۱۳) معادلات زیر را در $\mathbb{R}$ حل کنید.

آ. $\sin x = ۰$ ب. $\sin x = ۱$ ج. $\sin x = -۱$

د. $\cos x = ۰$ ه. $\cos x = ۱$ و. $\cos x = -۱$

ز. $\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ح. $\cos(-x) = \frac{\sqrt{x}}{۲}$ ط. $\cos|x| = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ی. $-\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ک. $\cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ل. $\sin(-x) = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$

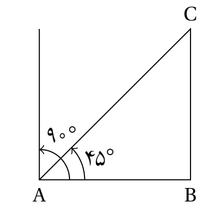
(۱۴) نامعادلات زیر را در $\mathbb{R}$ حل کنید.

آ. $\sin x \le ۰$ ب. $\cos x \ge ۰$ ج. $\sin x < ۱$

د. $\cos x \le \frac{۱}{۲}$ ه. $\cos x \ge \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و. $|\sin x| \le \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

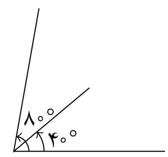
ز. $\sin x \le \cos x$ ح. $|\sin x| < |\cos x|$ ط. $\cos x \le |\sin x|$

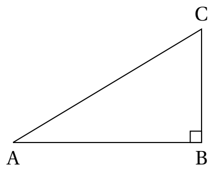
۴.۱۱ نسبت‌های مثلثاتی دیگر



مفاهیم سربالایی، سرازیری و شیب آنچنان ساده در تجربیات روزمره خود را نشان می‌دهند که احتمالا اولین گونه‌های انسانی نیز با آنها آشنا بوده‌اند. اما برای بیان و اندازه‌گیری شیب، یا به‌عبارتی برای شمارش‌پذیر ساختن آن از چه راهی می‌توان استفاده کرد؟ یک راه، استفاده از زاویه است. به‌طور مثال می‌توان در مثلث $\triangle ABC$، زاویهٔ α را به‌عنوان شیب AC درنظر گرفت. اما این راه چندان مناسب نیست. چون به‌طور مثال، $۴۵° \times ۲ = ۹۰°$ اما کسی برای دیوار عمودی شیب تعریف نمی‌کند.

حتی در مقایسهٔ شیب خطوطی که با افق زوایای $۴۰°$ و $۸۰°$ می‌سازند، کسی به‌صورت حسی نمی‌گوید شیب یکی نصف دیگری است. همین مشکلات برای استفاده از نسبت تغییر ارتفاع به طول مسیری که بر سطح طی می‌کنیم نیز برقرار است. چون اگر شیب را به‌این صورت تعریف کنیم، شیب AC برابر خواهد شد با $\frac{BC}{AC}$ که برابر است با $\sin\alpha$ و هم برای خط عمود شیب را برابر با ۱ تعریف می‌کند و هم مقیاس‌های به‌دست آمده با درک شهودی‌مان همخوانی ندارد؛ کافی است شیب‌هایی مانند $۴۰°$ و $۸۰°$ را درنظر بگیریم. اما $\frac{\sin ۸۰°}{\sin ۴۰°} \approx ۱/۵۳$ که با درک شهودی‌مان همخوانی ندارد.





به‌هرحال، امروزه در تمام دنیا، در شکل مجاور $\frac{BC}{AB}$ را به‌معنای شیبِ AC درنظر می‌گیرند. به‌عبارتی تغییرات ارتفاع، تقسیم بر تغییرات افقی را شیب می‌گیریم. پیش از این نیز در فصل هندسه تحلیلی، شیب خطّ راست را به همین شکل تعریف کردیم.

بدین‌ترتیب، شیب AC در مثلث $\triangle ABC$، در شکل مجاور، برابر است با:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{BC/AC}{AB/AC} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

بدین‌ترتیب می‌توانیم شیب را برحسب زاویه محاسبه کنیم. به‌طور مثال در مثلثی مانند $\triangle ABC$ که $\hat{A} = ۹۰°$ و $\hat{B} = \alpha$، می‌توان شیب را به صورت $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ تعریف کرد. این تابع را تانژانت نامیده و با tan نمایش می‌دهیم. بنابراین، تابع تانژانت، به‌ازای هر زاویه‌ای مانند α، شیب خطی را به‌ما می‌دهد که با افق زاویهٔ α می‌سازد. به‌طور مشابه می‌توان تابع دیگری به‌نام کتانژانت، به‌معنای دوگانِ تانژانت تعریف کرد. کتانژانت را با cot نمایش می‌دهیم و داریم $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. این تعاریف را می‌توان از دیدگاه مثلث قائم‌الزاویه $(۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲})$ به دایرهٔ مثلثاتی $(\alpha \in \mathbb{R})$ توسعه داد.

همان‌طور که برای خطی عمودی، شیب تعریف نمی‌شود، $\tan\alpha$ نیز برای $\alpha = ۹۰°$ بی‌معناست؛ چون $\cos ۹۰° = ۰$ و تقسیم بر صفر بی‌معناست.

حتماً پاسخ دهید....
پاسخ‌ها را به‌خاطر بسپارید.

مثال ۱۵.۱۱: مقادیر زیر را بیابید.

آ. $\tan ۰$ ب. $\tan\frac{\pi}{۶}$ ج. $\tan\frac{\pi}{۴}$ د. $\tan\frac{\pi}{۳}$

ه. $\tan\frac{\pi}{۲}$ و. $\cot ۰$ ز. $\cot\frac{\pi}{۶}$ ح. $\cot\frac{\pi}{۴}$

ط. $\cot\frac{\pi}{۳}$ ی. $\cot\frac{\pi}{۲}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

پاسخ دادن و تحلیل جواب‌ها، باعث ماندگاری مطالب در ذهن می‌شود.

مثال ۱۶.۱۱: فرض کنید $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$. مقادیر زیر را برحسب $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ به‌دست آورید.

آ. $\tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$ ب. $\cot(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$ ج. $\tan(\alpha + \pi)$

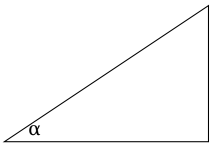
د. $\cot(\alpha + \pi)$ ه. $\tan(\alpha + \frac{\pi}{۲})$ و. $\cot(\alpha + \frac{\pi}{۲})$

ز. $\tan(-\alpha)$ ح. $\cot(-\alpha)$

پاسخ: آ. $\cot\alpha$ ب. $\tan\alpha$ ج. $\tan\alpha$ د. $\cot\alpha$ ه. $\cot\alpha$ و. $\tan\alpha$

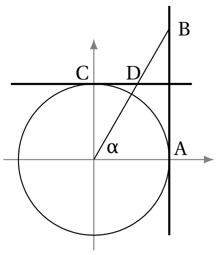
ز. $-\tan\alpha$ ح. $-\cot\alpha$ ■

مثال ۱۷.۱۱: نشان دهید در مثلث مقابل داریم:



آ. $\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل به } \alpha}{\text{ضلع مجاور به } \alpha}$ ب. $\cot\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور به } \alpha}{\text{ضلع مقابل به } \alpha}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■



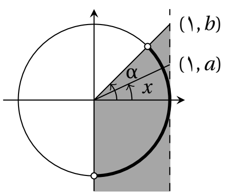
مثال ۱۸.۱۱: در شکل مقابل دایره مثلثاتی و زاویهٔ α دیده می‌شود. نشان دهید:

آ. $\tan\alpha = |AB|$ که در آن $\frac{-\pi}{۲} < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ ب. $\cot\alpha = |CD|$ که در آن $۰ < \alpha < \pi$

پاسخ: آ. با توجه به تشابه مثلث‌ها برای $\alpha \in \left[۰, \frac{\pi}{۲}\right)$ داریم $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{DE}{EO} = \frac{AB}{OB} = \frac{AB}{۱} = AB$

برای $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{۲}, ۰\right]$ نیز با توجه به تساوی $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ واضح است.

ب. به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

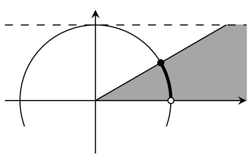


مثال ۱۹.۱۱: نامعادلهٔ $\tan x < ۱$ را در بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right]$ حل کنید.

پاسخ: با توجه به مثال فوق و شکل مقابل، برای هر $x, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right)$ داریم $x < \alpha$ اگر و تنها اگر $a < b$.

بنابراین، $\left(\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۴}\right)$ مجموعه جواب این نامعادله است؛ چون $\tan\frac{\pi}{۴} = ۱$. ■

مثال ۲۰.۱۱: نامعادلهٔ $\cot x \geq \sqrt{۳}$ را در بازهٔ $[۰, \pi]$ حل کنید.



پاسخ: با توجه به شکل مقابل واضح است و به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

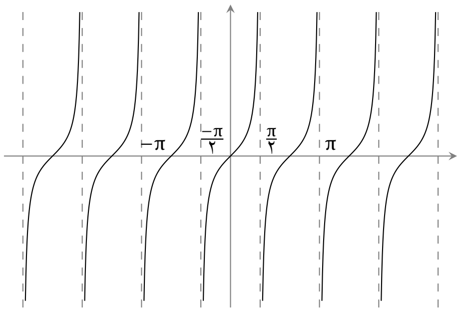
حتماً پاسخ دهید...
و حتماً از شکل استفاده کنید.

مثال ۲۱.۱۱: نامعادلات زیر را در $\left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right)$ یا $(۰, \pi)$ حل کنید.

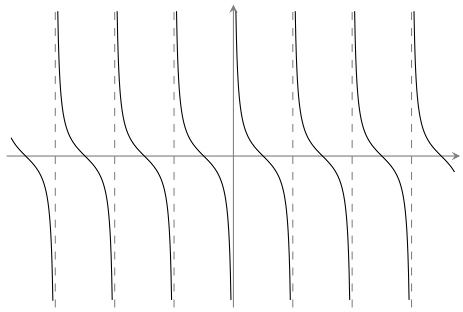
آ. $\tan x \leq \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ب. $\cot x \geq ۱$ ج. $\tan x \leq ۱$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

باتوجه به مثال (۱۸.۱۱) می‌توان شکل کلی نمودار توابع tan و cot را حدس زد. البته نمودار دقیق این توابع را در زیر رسم می‌کنیم.



$y = \tan x$



$y = \cot x$

به‌سادگی می‌توان نشان داد دامنهٔ تابع $\tan x$، تمام اعداد حقیقی است به‌جز آنهایی که مخرج $\frac{\sin x}{\cos x}$ را صفر می‌کنند. یعنی همه به‌جز جواب‌های معادلهٔ $\cos x = ۰$. بنابراین

$$D_{\tan} = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{۲} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$$

و به‌طور مشابه دامنهٔ تابع $y = \cot x$ تمام اعداد حقیقی است به‌جز آنهایی که جواب معادلهٔ $\sin x = ۰$ هستند. بنابراین

$$D_{\cot} = \mathbb{R} - \{k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$$

مثال ۲۲.۱۱: نشان دهید

آ. $\cot x$ تابعی متناوب با دورهٔ تناوب π است.

ب. $\tan x$ تابعی متناوب با دورهٔ تناوب π است.

پاسخ: با توجه به مطالب فوق واضح است و به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

با توجه به نمودار توابع tan و cot، اگر جواب نامعادلهٔ $\tan x < t$ در بازهٔ $\left(\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right)$، بازه‌ای مانند (a, b) باشد، مجموعه جواب آن در $\mathbb{R}$، برابر خواهد بود با:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (a + k\pi, b + k\pi)$$

همچنین اگر جواب نامعادلهٔ $\cot x < t$ در بازهٔ $(۰, \pi)$ بازه‌ای مانند (a, b) باشد، جواب آن در $\mathbb{R}$ برابر است با:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (a + k\pi, b + k\pi)$$

مثال ۲۳.۱۱: نامعادلات زیر را در $\mathbb{R}$ حل کنید.

آ. $\tan x < ۱$ ب. $|\tan x| < ۱$ ج. $\tan|x| < ۱$

د. $\cot x \geq ۱$ ه. $|\cot x| \leq ۱$ و. $\cot|x| \geq ۱$

ز. $\cot(۲x) < \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ح. $\tan\left(\frac{x}{۲}\right) \geq \sqrt{۳}$ ط. $\left|\cot|x|\right| \leq \sqrt{۳}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

دو تابع مثلثاتی دیگر که معمولاً در کتاب‌های ریاضی ظاهر می‌شوند، سِکانتْ و کُسِکانتْ هستند که

به‌ترتیب با sec و csc نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\csc x = \frac{۱}{\sin x} \qquad \sec x = \frac{۱}{\cos x}$$

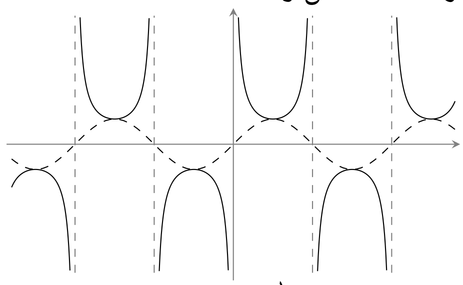
مثال ۲۴.۱۱: نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

آ. $۱ + \tan^۲ x = \sec^۲ x$ ب. $۱ + \cot^۲ x = \csc^۲ x$

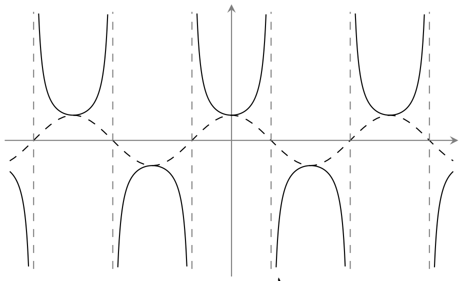
پاسخ: توجه داریم که $\tan^۲ x$ به‌معنای $(\tan x)^۲$ است و $\sec^۲ x$ نیز نمایشی دیگر از $(\sec x)^۲$. همچنین $\cot^۲ x = (\cot x)^۲$ و $\csc^۲ x = (\csc x)^۲$.

با استفاده از تساوی $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$ و اینکه $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$، با مخرج مشترک‌گیری، تساوی‌های فوق اثبات می‌شوند. ■

توابع $\csc x$ و $\sec x$ دارای نمودارهای زیر هستند که می‌توان آنها را با استفاده از نمودار توابع $\sin x$ و $\cos x$ حدس زد.



$y = \csc x = \frac{۱}{\sin x}$



$y = \sec x = \frac{۱}{\cos x}$

مثال ۲۵.۱۱: معادلات زیر را حل کنید.

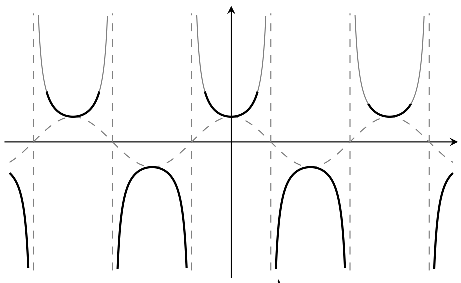
آ. $\sec x \le ۲$ ب. $\csc x > ۲$

پاسخ: آ. $\sec x = ۲$ پس $\cos x = \frac{۱}{۲}$ و درنتیجه

$x = \frac{\pi}{۳} + ۲k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ یا $x = \frac{۲\pi}{۳} + ۲k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

بدین‌ترتیب با مشخص شدن این نقاط و با استفاده از نمودار تابع $y = \sec x$ می‌توان جواب این نامعادله را یافت.

ب. به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■



$y = \sec x = \frac{۱}{\cos x}$

۵.۱۱ اتحادهای مثلثاتی

در فصل چندجمله‌ای‌ها با اتحادها آشنا شدیم و گفتیم که هر اتحاد نوعی تساوی بین دو عبارت است. در این فصل نیز با تساوی برخی عبارت‌های مثلثاتی (اتحاد مثلثاتی) آشنا شدیم که در زیر چند مورد را یادآوری می‌کنیم.

ج. $\sin(-x) = -\sin x$ د. $\sin(\frac{\pi}{۲} - x) = \cos x$ ه. $\tan(\frac{\pi}{۲} - x) = \cot x$

و. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ز. $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$ ح. $۱ + \tan^۲ x = \sec^۲ x$

با توجه به اینکه هر عبارت مثلثاتی را می‌توان یک تابع درنظر گرفت، شخصی در تعریف اتحادهای مثلثاتی پیشنهاد می‌کند: «دو عبارت مثلثاتی را مساوی گوییم اگر به‌عنوان دو تابع برابر باشند. یعنی

هم دامنهٔ برابر داشته و هم برای هر x از دامنه‌شان، مقادیر برابر داشته باشند.» اگر با این شخص موافقید، ممکن است مثال زیر نظر شما تغییر دهد.

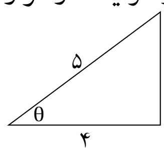
مثال ۲۶.۱۱: شخصی معادلهٔ $\frac{\tan x}{\sec x} = ۱$ را به‌صورت زیر حل می‌کند.
$\sin x = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{۱}{\cos x}} = \frac{\tan x}{\sec x}$. پس $\frac{\tan x}{\sin x} = ۱$ اگر $\sin x = ۱$. بنابراین برای هر $k \in \mathbb{Z}$، عبارت $x = \frac{\pi}{۲} + ۲k\pi$ یک جواب این معادله است.
آیا شما پاسخ این شخص را می‌پذیرید؟

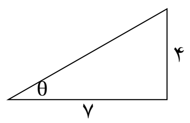
پاسخ: خیر؛ چون $\cos \frac{\pi}{۲} = ۰$ و در نتیجه هر دو عبارت $\tan x$ و $\sec x$ بی‌معنا هستند و درنتیجه جوابهای به‌دست آمده غیرقابل‌قبول می‌باشند. ■

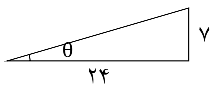
این مثال تساوی عبارت‌های گویا را یادآوری می‌کند که هرچند دو عبارت گویا برابر باشند، اما ممکن است به‌عنوان دو تابع، دامنه‌های متفاوتی داشته باشند. اما دیدیم که دو عبارت گویا برابرند اگر در هر $x \in \mathbb{R}$ که هر دو بامعنا باشند، مقدار آنها نیز برابر باشد. اتحادهای مثلثاتی را نیز مانند تساوی عبارت‌های گویا درنظر می‌گیریم. یعنی می‌گوییم دو عبارت مثلثاتی را برابر گفته و این تساوی را یک اتحاد مثلثاتی خوانیم اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ که هر دو طرف تساوی بامعنا باشند، تساوی برقرار باشد. بدین‌ترتیب، تساوی $\sin x = \frac{\tan x}{\sec x}$ یک اتحاد مثلثاتی است.

تمرین:

(۱۵) در هر یک از موارد زیر، مقدار $\tan\theta$، $\cot\theta$، $\sec\theta$ و $\csc\theta$ را بیابید.

آ.


ب.


ج.


(۱۶) مقادیر زیر را بیابید.

آ. $\sec ۳۰^\circ$ ب. $\csc ۴۵^\circ$ ج. $\sec ۶۰^\circ$
د. $\csc \frac{-\pi}{۶}$ ه. $\sec \frac{۲\pi}{۳}$ و. $\csc \frac{-۳\pi}{۴}$

(۱۷) در هر یک از موارد زیر پنج نسبت مثلثاتی دیگر را به‌دست آورید.($۰ < \theta < \frac{\pi}{۲}$)

آ. $\cos\theta = \frac{۱}{۴}$ ب. $\sin\theta = \frac{۳}{۵}$ ج. $\tan\theta = ۲$
د. $\cot\theta = ۳$ ه. $\sec\theta = ۴$ و. $\csc\theta = ۳$

(۱۸) اتحادهای زیر را ثابت کنید.

آ. $\sin x \sec x = \tan x$ ب. $\frac{\sin(-x)\sec(-x)}{\tan(-x)} = ۱$ ج. $\tan x \csc x = \sec x$
د. $\frac{\sec x}{\csc x} = \tan x$ ه. $\frac{۱ + \csc x}{\cos x + \cot x} = \sec x$

(۱۹) اتحادهای مثلثاتی زیر را ثابت کنید.

آ. $۱ - \sin^۲ x = \cos^۲ x$ ب. $۱ - \cos^۲ x = \sin^۲ x$
ج. $\sec x = \cos x = \sin x \tan x$ د. $\frac{\sec x - \cos x}{\sin x} = \tan x$
ه. $\frac{\cot x}{\csc x - \sin x} = \sec x$ و. $\sin x + \cot x \cos x = \csc x$
ز. $\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} = ۱$ ح. $\frac{\sec x - \cos x}{\tan x} = \sin x$
ط. $\cos^۳ x + \sin^۲ x \cos x = \cos x$

(۲۰) اتحادهای مثلثاتی زیر را ثابت کنید.

آ. $\sec^{۲} x - \tan^{۲} x = ۱$ ب. $\cos^{۲} x\left(۱ + \tan^{۲} x\right) = ۱$

ج. $\dfrac{۲ + \tan^{۲} x}{\sec^{۲} x} = ۱ + \cos^{۲} x$

۶.۱۱ توابع معکوس مثلثاتی

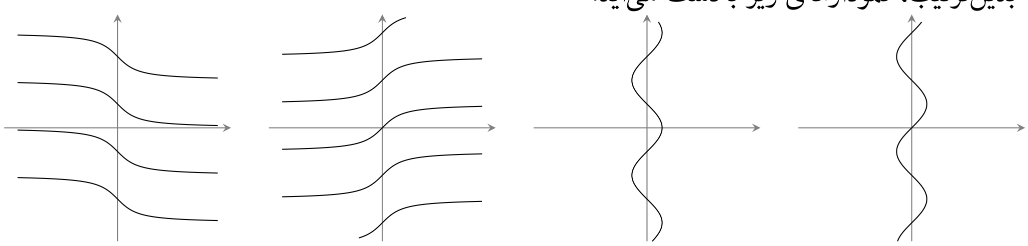
در فصل توابع، برای هر تابعی مانند f، معکوس f را با $f^{-۱}$ نشان دادیم و گفتیم

$$y = f^{-۱}(x) \Longleftrightarrow x = f(y)$$

بدین‌ترتیب، اگر معکوس توابع sin، cos، tan و cot را به‌ترتیب با arcsin، arccos، arctan و arccot نشان دهیم داریم:

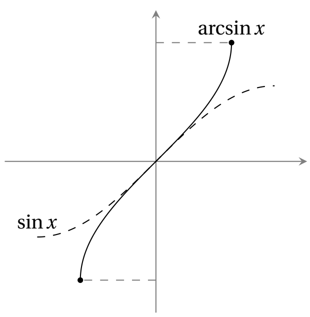
$$y = \arcsin x \Longleftrightarrow x = \sin y$$
$$y = \arccos x \Longleftrightarrow x = \cos y$$
$$y = \arctan x \Longleftrightarrow x = \tan y$$
$$y = \operatorname{arccot} x \Longleftrightarrow x = \cot y$$

بدین‌ترتیب، نمودارهای زیر به‌دست می‌آید.



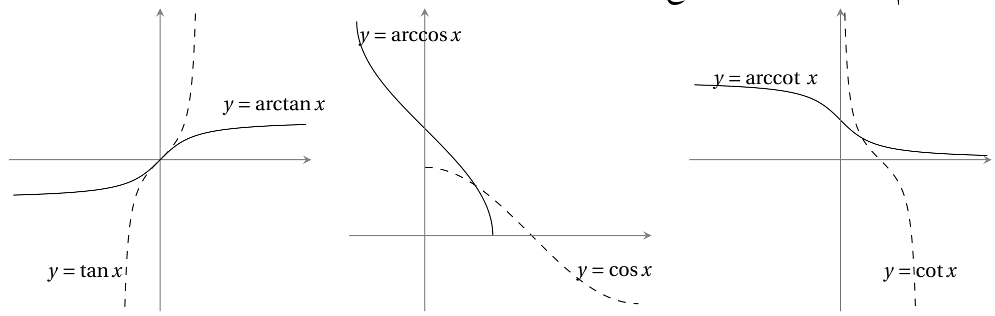
$y = \operatorname{arccot} x$ $y = \arctan x$ $y = \arccos x$ $y = \arcsin x$

اما هیچ یک از نمودارهای فوق، نمودار یک تابع نیستند؛ چون خطوطی موازی با محور yها وجود دارند که آنها را در بیش از یک نقطه قطع می‌کنند. البته پیش از این نیز از نمودار توابع مثلثاتی و عدم یک‌به‌یکی آنها معلوم بود که این توابع معکوس‌پذیر نیستند؛ یعنی معکوسِ آنها (به‌عنوان معکوس یک رابطه)، تابع نیست. حتی پیش از آن نیز، از آنجا که به‌ازای هر عددی مانند $a \in [-۱, ۱]$ معادلات $\sin x = a$، $\cos x = a$، $\tan x = a$ و $\cot x = a$ بیش از یک جواب دارد، پیدا است که این توابع یک‌به‌یک نبوده و درنتجه معکوس‌پذیر نیستند.



اما کاربردهای زیادی که معکوس توابع مثلثاتی دارند، ما را بر آن می‌دارد که برای رفع این مشکل، توابع مثلثاتی را به بازه‌های خاصی محدود کنیم که در آنها یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر باشند و برای آنها تابع معکوس را تعریف کنیم. به‌طور مثال توابع $y = \sin x$ در بازهٔ $\mathrm{I} = \left[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right]$ یک‌به‌یک و درنتیجه معکوس‌پذیر است. بنابراین، $\arcsin x$ را به‌عنوان معکوس تابع $(\sin|_{\mathrm{I}})(x)$ تعریف می‌کنیم که تحدید تابع sin به بازهٔ I است. به‌عبارت بهتر، $\arcsin x$ معکوس تابع $\sin : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ است و معکوس تابع $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ نیست.

به‌طور مشابه، چون تابع $\tan$ نیز بر بازهٔ $I = \left]-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right[$ یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر است، $\arctan x$ را به‌عنوان معکوس تابع $\tan x : I \to \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم. همچنین؛ با توجه به اینکه توابع $\cos x$ و $\cot x$ بر بازهٔ $J = [۰, \pi]$ یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر هستند، $\arccos x$ و $\operatorname{arccot} x$ را به‌عنوان معکوس توابع $\cos|_J$ و $\cot|_J$ در نظر می‌گیریم که تحدید توابع $\cos$ و $\cot$ به بازهٔ $J = [۰, \pi]$ هستند. بنابراین، توابع $\arcsin$، $\arccos$، $\arctan$ و arccot، معکوس توابع مثلثاتی نیستند. به‌همین سبب آنها را «معکوسِ توابعِ مثلثاتی» نمی‌خوانیم و از آنها با عنوان «توابعِ معکوسِ مثلثاتی» یاد می‌کنیم تا نشان دهیم «هرچند معکوس توابع مثلثاتی نیستند اما توابعی هستند که با معکوس آنها ارتباط دارند».



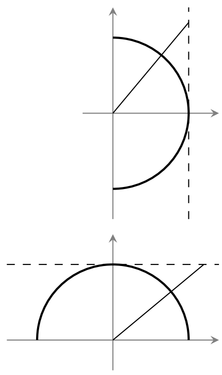
مثال ۲۷.۱۱: مقادیر زیر را محاسبه کنید.

آ. $\arcsin -٫۵$ ب. $\arcsin \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ج. $\arcsin -۱$ د. $\arcsin -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ه. $\arccos \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و. $\arccos -۱$ ز. $\arccos ۰$ ح. $\arccos -\frac{۱}{۲}$

ط. $\arctan ۱$ ی. $\arctan ۰$ ک. $\arctan -۱$ ل. $\arctan -\sqrt{۳}$

م. $\operatorname{arccot} ۱$ ن. $\operatorname{arccot} ۰$ س. $\operatorname{arccot} -۱$ ع. $\operatorname{arccot} -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$



پاسخ: با استفاده از تعریف توابع معکوس مثلثاتی و شکل مقابل داریم:

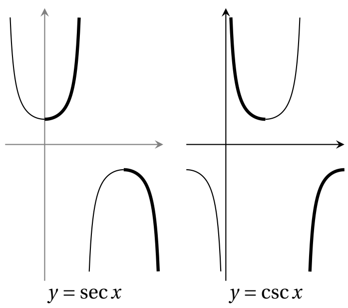
آ. $-\frac{\pi}{۶}$ ب. $\frac{\pi}{۳}$ ج. $-\frac{\pi}{۲}$ د. $-\frac{\pi}{۳}$

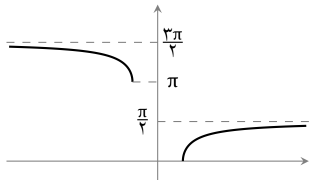
ه. $\frac{\pi}{۶}$ و. π ز. $\frac{\pi}{۲}$ ح. $\pi - \frac{\pi}{۳}$

ط. $\frac{\pi}{۴}$ ی. صفر ک. $-\frac{\pi}{۴}$ ل. $-\frac{\pi}{۳}$

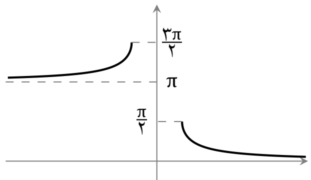
م. $\frac{\pi}{۴}$ ن. $\frac{\pi}{۲}$ س. $\pi - \frac{\pi}{۴} = \frac{۳\pi}{۴}$ ع. $\pi - \frac{pi}{۳} = \frac{۲\pi}{۳}$ ■

توابع $\sec^{-۱}$ و $\csc^{-۱}$ را به‌عنوان توابع معکوس $\sec$ و $\csc$ درنظر می‌گیریم. همان‌طور که برای تعریف $\arcsin$، $\arccos$ و $\arctan$، لازم شد آنها را به بازه‌هایی محدود کنیم که در آنها یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر باشند، در مورد توابع $\sec x$ و $\csc x$ نیز باید چنین بازه‌هایی بیابیم. اولین ایده‌ای که به ذهن می‌رسد استفاده از بازهٔ $(۰, \pi)$ برای $\sec x$ و از بازهٔ $\left(\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right)$ برای $\csc x$ است. اما ریاضیدانان ترجیح داده‌اند مجموعه‌ای را انتخاب کنند که برای هر دو تابع $\sec x$ و $\csc x$ مناسب باشد و هر دو بر آن یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر باشند. شکل مقابل نشان می‌دهد که $\left[۰, \frac{\pi}{۲}\right) \cup \left[\pi, \frac{۳\pi}{۲}\right)$ برای این منظور مناسب است. بدین‌ترتیب، توابع $\sec^{-۱} x$ و $\csc^{-۱} x$ دارای نمودارهای زیر هستند.



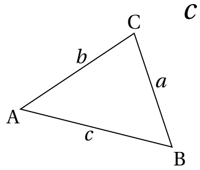


$y = \sec^{-1} x$



$y = \csc^{-1} x$

۷.۱۱ قانون کسینوس‌ها و نتایج آن



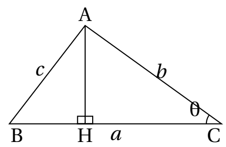
پیش از این دیدیم که برای هر مثلث دلخواه با اضلاعی به طول‌های a، b و c مطابق شکل مقابل داریم:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

قانون فوق که در هر مثلثی برقرار است، به قانون سینوس‌ها شهرت دارد. قانون دیگری نیز وجود دارد که به قانون کسینوس‌ها شهرت دارد

قضیه ۱.۱۱ (قانون کسینوس‌ها)**: اگر زاویهٔ θ با اضلاع a و b، روبه‌رو به ضلع c از مثلثی باشد، آن‌گاه داریم:** $\boldsymbol{c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos\theta}$

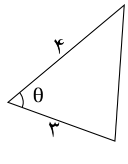
اثبات: با توجه به شکل مقابل داریم $AH = b\cos\theta$ و $CH = b\sin\theta$ پس

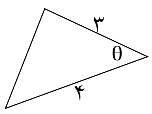


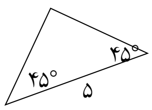
$$\begin{aligned} c^۲ &= (b\sin\theta)^۲ + (a - b\cos\theta)^۲ \\ &= b^۲\sin^۲\theta + a^۲ + b^۲\cos^۲\theta - ۲ab\cos\theta \\ &= a^۲ + b^۲(\sin^۲\theta + \cos^۲\theta) - ۲ab\cos\theta \\ &= a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos\theta \end{aligned}$$

تحقیق درستی این قانون برای هر مثلث دلخواه، به خوانندهٔ واگذار می‌شود. ■

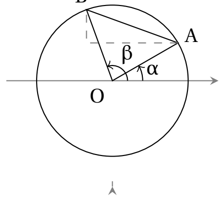
مثال ۲۸.۱۱: طول اضلاع دیگر مثلث‌ها را بیابید.

آ. 

ب. 

ج. 

پاسخ: موارد (آ) و (ب) با استفاده از قانون کسینوس‌ها واضح است. در مورد (ج) نیز بنا به جمع زوایای مثلث، زاویهٔ سوم ۹۰° است و ادامه کار با استفاده از نسبت‌های sin و cos ساده است. ■



مثال ۲۹.۱۱: زوایای α و β بر دایرهٔ مثلثاتی نقاط A و B را مشخص می‌سازند. نشان دهید.

آ. $|AB|^۲ = ۲ - ۲\cos(\beta - \alpha)$

ب. $|AB|^۲ = (\cos\alpha - \cos\beta)^۲ + (\sin\alpha - \sin\beta)۲$

ج. $|AB|^۲ = ۲ - ۲(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

قضیه ۲.۱۱: برای هر $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ داریم $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

اثبات: با توجه به مثال قبل واضح است. ■

قضیهٔ فوق یک اتحاد مثلثاتی را بیان می‌کند که برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ برقرار است و با استفاده ازاتحادهای مثلثاتی که پیش از این دیدیم، اتحادهای مثلثاتی مهمی را به‌دست می‌دهد.

قضیه ۳.۱۱: برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ داریم:

آ. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

ب. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

ج. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

اثبات: آ. $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

ب. $\sin(\alpha+\beta) = \cos(\frac{\pi}{۲} - (\alpha+\beta)) = \cos((\frac{\pi}{۲} - \alpha) - \beta)$. ادامه کار، با خواننده.

ج. به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۳۰.۱۱: مقادیر زیر را بیابید.

آ. $\cos ۱۵^\circ$ ب. $\cos ۷۵^\circ$ ج. $\cos ۱۵^\circ$ د. $\sin ۷۵^\circ$

پاسخ: با توجه به قضیهٔ فوق و اینکه $۳۰ + ۴۵ = ۷۵$ و $۴۵ - ۳۰ = ۱۵$ ساده است. ■

واضح است که با استفاده از قضایای فوق می‌توان $\tan(\alpha \pm \beta)$ و $\cot(\alpha \pm \beta)$ را محاسبه نمود. همچنین می‌توان اتحادهایی در مورد $\sin ۲\alpha$ و $\cos ۲\alpha$ به‌دست آوَرْد که مورد آخر نتایج پرکاربردی دارد. برخی از این نتایج را در مثال زیر مورد توجه قرار می‌دهیم.

مثال ۳۱.۱۱: اتحادهای مثلثاتی زیر را ثابت کنید.

آ. $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \tan\alpha\tan\beta}$ ب. $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta - ۱}{\cot\alpha + \cot\beta}$

ج. $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{۱ + \tan\alpha\tan\beta}$ د. $\cot(\alpha-\beta) = \dfrac{۱ + \cot\alpha\cot\beta}{\cot\alpha - \cot\beta}$

ه. $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$ و. $\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha$

ز. $\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha$ ح. $\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱$

ط. $\sin^۲(\frac{\alpha}{۲}) = \dfrac{۱ - \cos\alpha}{۲}$ ی. $\cos^۲(\frac{\alpha}{۲}) = \dfrac{۱ + \cos\alpha}{۲}$

پاسخ: آ. $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \dfrac{\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \dfrac{۱ - \tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

تمرین:

(۲۱) نشان دهید:

آ. $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = ۲\cos\alpha\cos\beta$

ب. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{۱}{۲}\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big)$

ج. $\sin\alpha\sin\beta = \frac{۱}{۲}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)$

د. $\sin\alpha\cos\beta = \frac{۱}{۲}\big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big)$

(۲۲) نشان دهید:

آ. $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$
ب. $\cos ۲\alpha = \cos^{۲}\alpha - \sin^{۲}\alpha$

ج. $\cos ۲\alpha = ۲\cos^{۲}\alpha - ۱$
د. $\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^{۲}\alpha$

ه. $\frac{۱}{۲}(۱+\cos\alpha) = \cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}$
و. $\frac{۱}{۲}(۱-\cos\alpha) = \sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}$

(۲۳) نشان دهید:

آ. $\cos ۳\alpha = \cos^{۳}\alpha - ۳\cos\alpha\sin^{۲}\alpha$
ب. $\sin ۳\alpha = ۳\sin\alpha\cos^{۲}\alpha - \sin^{۳}\alpha$

ج. $\cos ۳\alpha = ۴\cos^{۳}\alpha - ۳\cos\alpha$
د. $\sin ۳\alpha = ۳\sin\alpha - ۴\sin^{۳}\alpha$

(۲۴) در هر یک از موارد زیر، مقدار $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ را محاسبه کنید.

آ. $\sin\alpha = ۰/۶$
ب. $\cos ۲\alpha = ۰/۲۸$

ج. $\sin ۳\alpha = ۰$
د. $\cos ۳\alpha = ۰$

(۲۵) نشان دهید $\frac{۲\sin ۳\alpha}{\sin ۲\alpha} = ۴\cos\alpha - \sec\alpha$

(۲۶) نشان دهید $\sin^{۲}x\cos^{۲}x = \frac{۱}{۸}(۱-\cos ۴x)$

(۲۷) نشان دهید:

آ. $\sin\frac{\alpha}{۲} = \pm\sqrt{\frac{۱-\cos\alpha}{۲}}$
ب. $\cos\frac{\alpha}{۲} = \pm\sqrt{\frac{۱+\cos\alpha}{۲}}$

ج. $\tan\frac{\alpha}{۲} = \frac{۱-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}$

پیوست آ

مروری بر هندسه

پس از نگاهی اجمالی به نحوهٔ تولد «هندسه» به‌عنوان «مساحی»، ضمن آشنایی با انتزاع مفاهیم هندسی و شکل‌گیری آنها، با رشد استدلال هندسی آشنا شده و به سمت هندسه‌ای کاملا مجرد و با نگاهی فلسفی پیش می‌رویم.

آ.۱ تولد هندسه

در دورهٔ پارینه سنگی که از ۲میلیون سال پیش آغاز شده است، گونه‌های انسانی از طریق شکار و گردآوری میوه‌ها و دانه‌های خوراکی زندگی می‌کردند. در این دوران، ابزارسازی معنای چندانی نداشت و تنها ابزار انسان، سنگ‌های تیزی بود که در طبیعت می‌یافتند و کارکرد چاقو را داشت.

انسان پیش از مهار آتش تقریباً، تمام روز در جستجوی غذا بود؛ اما با مهار آتش و خوردن غذاهای پخته، جذب مواد غذایی بهبود یافت و نیاز انسان به غذا کمتر شد. بدین‌ترتیب، فرصت انسان برای دیدن طبیعت و اندیشیدن افزایش یافت و درنتیجه ابزارسازی رشد کرد. در این دوران، اولین نیزه‌ها ساخته شده و امکان شکار حیوانات بزرگ فراهم شد. سپس طناب‌ها و سبدها بافته شدند و اولین کوزه‌ها در چین ساخته شدند؛ درحالی که پیش از این، نزدیک به یک‌میلیون سال، مهم‌ترین ابزار ساخته دست بشر، تبر سنگی بود که از تراشیدن و تیز کردن سنگی با سنگی دیگر ساخته می‌شد.

برای انسان شکارگر و گردآور، مالکیت معنای چندانی نداشت؛ آنها که به دنبال شکار از جایی به جای دیگر نقل مکان می‌کردند، هر حیوانی که می‌دیدند شکار کرده و هر دانه یا میوه‌ای که می‌یافتند می‌خوردند و مالکیت به ابزارهای ساده‌شان محدود می‌شد که عمرشان کوتاه بود و مالکیت بر آنها نیز معنا و اهمیت خاصی نداشت. هرچند با اهلی کردن حیوانات دوران دامداری آغاز شد و مالکیت بر دامها اهمیت یافت، اما مالک دامها، قبیله بود و مالکیت فردی معنایی نداشت.

با کشف روش کاشت گیاهان که به زنان نسبت داده می‌شود، دورهٔ کشاورزی آغاز شد. انسان کشاورز، درکنار رودهای بزرگی چون نیل، دجله و فرات، سند و یانگ‌تسه ساکن شد و امکان انباشت منابع غذایی را به‌دست آورد. افزایش منابع غذایی و افزایش امنیت در سایهٔ رشد ابزارسازی و خانه‌سازی، رشد چشمگیر جمعیت را به‌دنبال داشت.

انسان کشاورز که پیش از این، هر مقدار از زمین‌های حاصل‌خیز که می‌خواست و می‌توانست، کشت می‌کرد، با رشد جمعیت، با محدودیت زمین مواجه شد و بدین‌ترتیب مالکیت بر زمین، به‌عنوان اصلی‌ترین منبع غذا اهمیت یافت و ثروت معنا پیدا کرد. تقسیم اراضی بین فرزندان، و طغیان سالیانهٔ رودهای بزرگ با از بین بردن مرز زمین‌های کشاورزی، اندازه‌گیری زمین‌ها را ضروری ساختند. علم

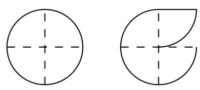
اندازه‌گیری زمین، «مساحی» نام دارد.

توانایی انسان بر ساخت ابزار و ابنیه و همچنین، توجه وی به نجوم و توصیف پدیده‌های طبیعی، مساحی را به علمی کاملا متفاوت به‌نام هندسه تبدیل کرده است. حتی امروزه نیز کلمهٔ Geometry که در زبان انگلیسی به‌معنای هندسه به‌کار می‌رود، ترکیبی از دو کلمهٔ Geo به‌معنای زمین و Merty به‌معنای اندازه‌گیری است. در واقع، Geometry به‌معنای «اندازهٔ زمین» یا «اندازه‌گیری زمین» است. هندسه و تحولات آن در کنار تحولات دیگر از قبیل کشف آهن، شکل‌گیری و نابودیِ تمدن‌ها، منشأ بسیاری از تحولات در تاریخ تفکر و تاریخ تمدن بشری گردیده است.

تحولات زندگی بشر از دو میلیون سال پیش آغاز دورهٔ کشاورزی (۱۰ هزار سال پیش)، در مقایسه با تحولاتی که پس از آن تجربه کرده، بسیار ناچیز است. ورود انسان به دوره کشاورزی، با یکجانشینی و اهمیت یافتن مالکیت، به تولد تمدن‌ها و طبقات اجتماعی انجامید. اما پیش از تمام این موارد، غذا، پوشاک و سلاح انباشته شده توسط انسان کشاورز، انسان گردآور و شکارگر را به سمت خود کشیده و تلاش کشاورزان برای حفظ دست‌رنجشان، جنگ‌های زیادی را به‌همراه داشت. این جنگ‌ها به تشکیل نهادهای مدنی و شبه حکومتی در میان کشاورزان انجامید و تولد اولین تمدن‌ها را به‌دنبال داشت. در حین این جنگ‌ها، انسان کشاورز با دو رویکرد انسان‌دوستانه و سودجویانه زنده نگه‌داشتن انسان‌ها را بر کشتن آنها ترجیح داد تا از ایشان به‌عنوان برده در کشاورزی، دامداری و ابزارسازی استفاده کند. در این دوران، برده‌داری رشد چشمگیرِ جوامع را به‌همراه داشت و یکی از بزرگ‌ترین دست‌آوردهای بشر محسوب می‌شد.

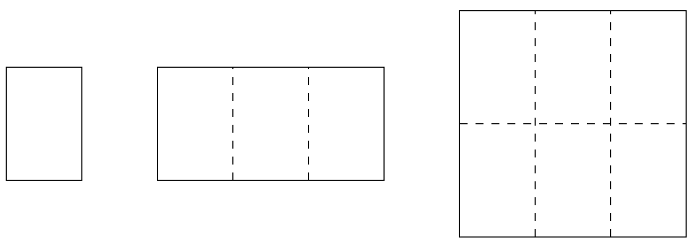
فواید زیاد برده‌داری، انگیزه جنگ‌های بی‌رحمانه زیادی شد. رویکرد سودجویانه بر رویکرد انسان‌دوستانه غلبه یافت و برده‌داری و برده‌فروشی، صنعتی پر سود گشت که تا قرن نوزدهم میلادی دوام داشت. در قرن نوزدهم، با انقلاب صنعتی و صنعتی شدن جوامع، کارگر آزاد به‌صرفه‌تر از برده گردید. کارگر، تا زمانی که توان کار داشت، مزدی اندک دریافت می‌کرد و درصورتی که نمی‌توانست کار کند، کارگر دیگری جای او را گرفته و کسی زیان نمی‌کرد؛ با مرگ یا اخراج کارگر، کارفرما یکی از اموال خود را از دست نمی‌داد. بدین‌ترتیب، سودجویی برضد برده‌داری با انسان‌دوستی هم‌راستا شد تا پس از هزاران سال، برده‌داری مذموم شمرده شود و آخرین برده‌داری، با جنگ داخلی آمریکا در زمان ریاست جمهوری آبراهام لینکلن، برای همیشه نابود گردد.

۲.آ مفاهیم پایه



مساحی، به‌معنای «علم اندازه‌گیری زمین»، در زندگی انسان کشاورز به‌وجود آمده است. به بیانی ساده، آنها مساحت (اندازهٔ) دو زمین را برابر می‌گفتند اگر محصول برداشتی از آنها برابر باشد و درک کرده بودند که جفت زمین‌های مجاور، مساحت‌های برابر دارند.

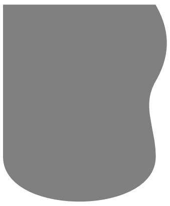
بدین‌ترتیب، در شکل‌های زیر مساحت (اندازهٔ) زمین شمارهٔ (۲) ، سه‌برابرِ زمین شمارهٔ (۱) و مساحت زمین شمارهٔ (۳)، دوبرابر زمین شمارهٔ (۲) و شش‌برابر زمین شمارهٔ (۱) است.



زمین شماره (۳) زمین شمارهٔ (۲) زمین شمارهٔ (۱)

آ.۲.۱ شکل، خط و خطّ راست

زمین با مرزهای آن مشخص می‌شود و مفهوم شکل نیز از روی زمین و با توجه به مرز زمین‌ها ساخته شده است. اقلیدس ۳۰۰ سال پیش از میلاد مسیح، در کتابی به نام «اصول»[۱] می‌گوید:



شکل آن چیزی است که به مرز یا مرزهایی محدود شده باشد.

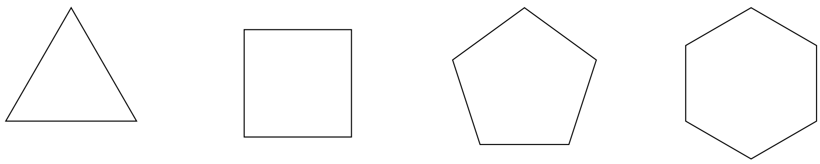
با توجه به شکل زمین‌ها و شکل سایه اجسام بر زمین و با توجه به مرز سایه، مرز را طولی بدون ضخامت می‌بینیم. البته در این میان ضعف دقت بینایی انسان در تشخیص مرز سایه و روشن، تأثیری اساسی دارد. بنابراین، اقلیدس مرز شکل‌ها بین هر دو گوشه را «خط» نامیده و می‌گوید:

خط طولی است بدون ضخامت.

در ادبیات اقلیدس، هر خم پیوسته و بدون شکستی، خط نامیده می‌شود. همان‌گونه که مرز زمین‌ها و مرز سایهٔ اجسام بر زمین می‌تواند شامل هر خم یا خط راستی باشد. بنابراین، مرز هر شکل، به خط یا خط‌هایی محدود می‌شود.

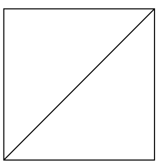
برای راحتی در استفاده از ایدهٔ فوق، بر زمین‌های چهارگوشی متمرکز می‌شویم که مرز زمین بین هر دو گوشه مسیری مستقیم و بدون شکست یا انحنا است. با این ایده، اگر مرز یک شکل، بین دو گوشه مسیری مستقیم و بدون انحنا، شکستگی یا برش باشد، آن را «ضلع» گوییم. بنابراین، زمینی که به سه ضلع محدود شده است (مرز آن از سه ضلع تشکیل شده است) را «سه‌ضلعی» گوییم. به‌طورِ مشابه، زمینی که به چهار ضلع محدود شده است را «چهارضلعی» و زمینی که به پنج ضلع محدود شده است، «پنج‌ضلعی» گوییم. هر گوشه متعلق به دو ضلع است و آن را «رأس» گوییم. بنابراین:

هر ضلع مسیری مستقیم بین دو رأس است.



اقلیدس که هر مرز بدون شکست و برش (خم) را یک خط راست می‌نامد، شکل‌هایی که به‌خط‌های راست محدود می‌شوند را «راست‌خطی» نامیده و آنها را به‌صورت زیر معرفی می‌کند.

شکل‌های راست‌خطی آنهایی هستند که از خط‌های راست تشکیل شده‌اند:
سه ضلعی‌ها از سه خطّ راست، چهارضلعی‌ها از چهار خطّ راست، و چند ضلعی‌ها از بیش از چهار خطّ راست تشکیل شده‌اند.



باید توجه داشت که در عبارت فوق، خط‌های راست به‌عنوان مرز شکل‌ها درنظر گرفته شده‌اند و شکل مجاور یک پنج‌ضلعی نیست.

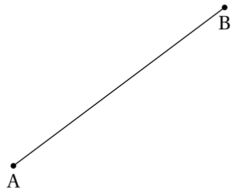
در تمدن‌های شرق باستان همواره سخن از شکل‌ها بود و خواص شکل‌ها. یونانیان اولین کسانی بودند که رأس‌های شکل‌های راست‌خطی را با حروف الفبا نام‌گذاری (نشان‌گذاری) کردند. این ابتکار ساده، نتیجهٔ برتری خط نوشتاری ایشان در داشتن حروف الفبا و تجزیهٔ کلمات به حروف بود.

اولین خط‌ها مانند خط مصریان باستان که به هیروگلیف معروف است، به‌صورت نقاشی بودند.

---
[۱] Elements

آنها برای نوشتن هر چیزی یک نقاشی می‌کشیدند. سپس با خلاصه‌کردن این شکل‌ها و استفاده از آنها خط‌های هجایی به‌وجود آمدند. در این خطوط هر شکل به‌معنای هجای اول آن کلمه به‌کار می‌رفت. خط هیروگلیف جدید و خط میخی نمونه‌هایی از خطوط هجایی هستند. اولین گروهی که خط الفبایی داشتند، مردمان فینیقیه بودند. یونانیان خط الفبایی را از مردمان فینیقیه آموخته و با تغییراتی در آن، خط یونانی را به‌وجود آوردند.

یونانیان از حروف الفبا برای نام‌گذاری و نشان‌گذاری بر رئوس چندضلعی‌ها استفاده کردند. بدین‌ترتیب، به هر رأس مستقل از اینکه رأسی از یک شکل است، هویتی مستقل بخشیدند و نقطه نه به‌عنوان یک گوشه یا یک رأس از یک چندضلعی، بلکه به‌عنوان یک مکان، هویتی مستقل یافت. بدین ترتیب، هر رأس از هر شکل راست‌خطی، نقطه‌ای است که به مکانی اشاره دارد. امروزه، نقاط را با حروف انگلیسی بزرگ مانند A، B، C، D و ... نشان می‌دهیم و برای هر دونقطهٔ دلخواه (و متمایز) مانند A و B مسیر مستقیم بین دو نقطهٔ A و B را «پاره‌خط AB» یا «پاره‌خط BA» خوانده و نقاط A و B را نقاط انتهایی آن گفته و نقاط انتهایی یک پاره‌خط را جزئی از آن پاره‌خط در نظر می‌گیریم. مسیر مستقیم به‌معنای مسیر دید است. به طور مثال، مسیر مستقیم بین چشمان دو نفر که بر دو قلهٔ کوه ایستاده‌اند، مسیر دید آنها است، نه مسیری که باید طی کنند تا به‌هم برسند و از درّهٔ بین آنها می‌گذرد.

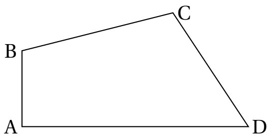


ارائه تعریفی دقیق برای خط راست، چالشی بزرگ در یونان باستان بود. افلاطون (۳۸۰ قم) خطّ راست را چیزی دانست که نسبت به چشمی که در یکی از دو انتهای آن قرار گیرد و در مسیر آن نگاه کند، وسطش دو سرش را بپوشاند. اقلیدس (۳۰۰ قم) خط راست را چنین تعریف کرد: «خطی که به‌طور مستقیم [یکنواخت] بر روی نقاطش قرار گیرد». پروکلس می‌گوید: «اقلیدس بدین‌وسیله نشان داد خط راست تنها خطی است که همه نقاط واقع بر روی آن را می‌پوشاند» و می‌افزاید فاصلهٔ میان دو نقطه بر روی محیط دایره یا هر خط دیگر، در مقایسه با خط راست، بیشتر است. ارشمیدس (۲۲۵ قم) این مطلب را بسیار فشرده‌تر بیان کرده و می‌گوید: «از چند خطی که دارای نهایت‌های یکسان باشند، خط راست کوتاه‌ترین مسیر است» و همین منشأ تعریفی است که در کتاب‌های درسی می‌بینیم: «کوتاه‌ترین فاصله میان دو نقطه، خطی است مستقیم (راست)». البته امروزه، خط و فاصله، دو مفهوم با تفاوت‌های بنیادین شناخته می‌شوند، اما در آن روزگار، این تعاریف قابل قبول بوده‌اند.

این مشکل در مورد تعریف نقطه نیز وجود داشت. به‌طور مثال، فیثاغوریان نقطه را «یکان دارای موضع» می‌شمردند. ارسطو (۳۴۰ قم) تعریف فیثاغوریان را پذیرفت. افلاطون (۳۸۰ قم) نقطه را آغاز خط نامید. سیمپلیکوس (سدهٔ ششم پیش از میلاد مسیح) نقطه را «آغاز کمیت» نامید که در کمیت‌ها از آن نمود می‌کنند و تنها چیز دارای موضع است که بخش‌پذیر نیست. اقلیدس (۳۰۰ قم) گفت: «نقطه آن چیزی است که دارای بخش نیست». هرون (حدود ۵۰ م) تعریف اقلیدس را به‌کار برد ولی افزود: «یا حدی فاقد بعد، یا حد یک خط است». کاپلا (۴۶۰ م) نیز گفت: «نقطه چیزی است که بخشی از آن هیچ است».

بحث‌های مشابهی نیز درمورد خط وجود داشت. به‌طور مثال، افلاطونیان خط را طولی فاقد عرض تعریف کردند و اقلیدس هم همین‌کار را کرد. ارسطو با این نوع تعریف منفی مخالف بود، هرچند پروکلس متوجه این تعریف از جهتی مثبت است، زیرا تأیید می‌کند که خط طول است. یک نویسنده ناشناس یونانی خط را «کمیتی با یک امتداد» تعریف کرد که با تعریف ارسطو بی‌شباهت نیست؛ چون او خط را «کمیتی قابل تقسیم در یک جهت» تعریف کرد. [1]

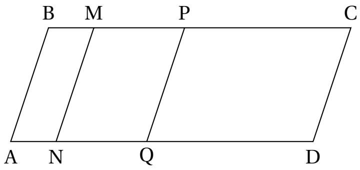
[1] دیوید اسمیت، تاریخ ریاضیات، جلد دوم



بنابراین، اگر مطابق شکل مقابل، چهارگوشهٔ زمینی به‌شکل چهارضلعی را A، B، C و D بنامیم، پاره‌خط‌های AB، BC، CD و AD اضلاع آن را تشکیل می‌دهند. بدین‌ترتیب می‌توان آن را چهارضلعیِ ABCD نامید. توجه داریم که در این بیان، ترتیب نوشتن رئوس چنان است که بین هر دو رأس متوالی یک ضلع قرار دارد و همچنین بین اولین و آخرین. بنابراین، می‌توان آن را به‌صورت DCBA نیز بیان کرد، که عکس ترتیب قبل را دارد. اما عبارتی مانند «چهارضلعیِ ACDB» برای بیان این چهارضلعی نامناسب است؛ چون پاره‌خط‌های AC و BD اضلاع این چهارضلعی نیستند.

آ.۲.۲ مساحت

ایدهٔ مساحت را همان طور که پیش از این بیان شد، باید در میزان محصول برداشتی از زمین‌ها و درک اینکه زمین‌هایی با شکل‌های مختلف می‌توانند محصول برداشتی یکسانی داشته باشند،، جستجو کرد. این ایده زمانی که با اعداد طبیعی و درک کمیت طول همراه می‌شود، به محاسبه مساحت‌هایی ساده و خاص می‌انجامد که با همراه کردن این مفاهیم با نسبت‌ها و اعداد کسری (کسرهای متعارفی) رشد قابل توجهی می‌یابند.



مثال آ.۱: مساحت چهارضلعی‌های ABCD، ABPQ و ABMN با «اضلاع روبه‌روی برابر» را به‌ترتیب با $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ نمایش می‌دهیم. نشان دهید برای هر دو عدد طبیعی مانند m و n داریم:

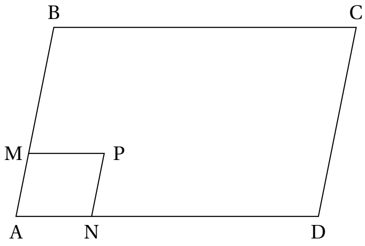
آ. اگر $AD = nAN$ آن‌گاه $S_۱ = nS_۳$

ب. اگر $AN = \frac{۱}{n}AD$ آن‌گاه $S_۳ = \frac{۱}{n}S_۱$

ج. اگر $AQ = mAN$ آن‌گاه $S_۲ = mS_۳$

د. اگر $AQ = \frac{m}{n}AD$ آن‌گاه $S_۲ = \frac{m}{n}S_۱$

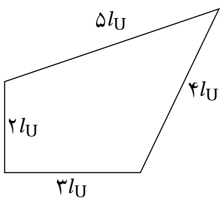
پاسخ: با نگاهی به اعداد کسری، و نسبت‌ها واضح است. ■



مثال آ.۲: اعداد کسری (گویای مثبت) a و b و چهارضلعی‌های ABCD و AMPN با اضلاع روبه‌روی برابر را مطابق شکل چنان درنظر بگیرید که $AB = aAM$ و $AD = bAN$. نشان دهید اگر مساحت چهارضلعی‌های ABCD و AMPN را به‌ترتیب با S و U نمایش دهیم، آن‌گاه $S = abU$.

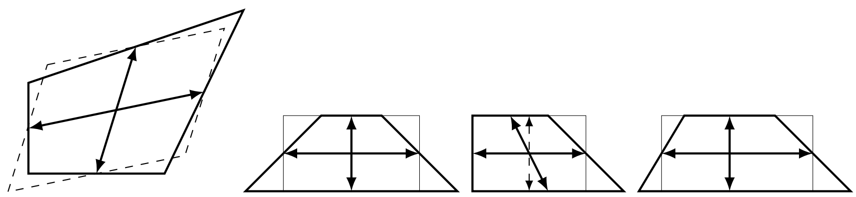
پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

صرفا جهت اطلاع...

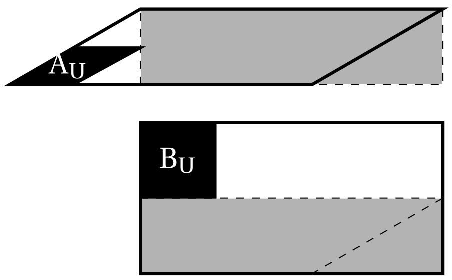


شخصی پیشنهاد می‌کند که برای بیان مساحت یک چهارضلعی کافی است طولی مانند l_U را به‌عنوان طول واحد درنظر گرفته، مساحت چهارضلعی‌ای با اضلاعی به‌طول واحد را با U نمایش دهیم. در این صورت، اگر طول دو ضلعی که در یک رأس مشترک هستند را براساس طول واحدی بیان کرده و آن اعداد را در یکدیگر ضرب نماییم، مساحت چهارضلعی به‌دست می‌آید؛ مشابه روشی که برای چهارضلعی فوق به‌کار رفت. اما این روش برای محاسبهٔ مساحت چهارضلعی‌ای با اضلاع $۲l_U$، $۳l_U$، $۴l_U$ و $۵l_U$ که در آن اضلاع روبه‌رو برابر نیستند، قابل استفاده نیست؛ چون در این‌صورت، از این روش چها جواب ۶U، ۱۲U، ۲۰U و ۱۰U برای مساحت آن به‌دست می‌آید. بنابراین، روش این شخص با شکست روبه‌رو می‌شود.

شخص دیگری پیشنهاد می‌کند طولی را به‌عنوان واحد درنظر گرفته و برای چهارضلعی‌هایی با اضلاع روبه‌روی برابر، مساحت را به صورت حاصل‌ضرب طول دو ضلع مجاور محاسبه کنیم و اگر اضلاع روبه‌رو برابر نبودند، وسط اضلاع روبه‌رو را به‌هم متصل کرده، حاصل‌ضرب طول این پاره‌خط‌ها مساحت چهارضلعی را مشخص خواهد کرد. وی با استناد به شکل‌های زیر ادعا می‌کند که با وصل کردن وسط اضلاع روبه‌رو به یکدیگر می‌توان طول اضلاع چهارضلعی‌ای را به‌دست آورد که در آن اضلاع روبه‌رو برابر بوده و مساحت آن از قاعدهٔ سادهٔ فوق قابل محاسبه است. مصریان باستان نیز مساحت چهارضلعی‌ها را از این طریق محاسبه می‌کردند.



تجربه‌ای ساده نشان می‌دهد این نتیجه‌گیری اشتباه است. به‌طور مثال در شکل زیر دو چهارضلعی با اضلاع برابر رسم شده که مساحت یکی نصف دیگری است؛ با برش دادن شکل از محل خط‌چین و جابه‌جایی قسمت بریده شده، این مسئله واضح می‌شود. در واقع، با روش فوق بیان می‌شود که مساحت چهارضلعی بالایی ۸A_U و مساحت چهارضلعی پایینی ۸B_U است که در آن، A_U و B_U مساحت چهارضلعی‌های مشکی با اضلاعی به‌طول واحد هستند. بنابراین، عدم برابری مساحت دو چهارضلعی فوق، نشان می‌دهد مساحت دو چهارضلعی با اضلاعی به طول واحد، لزوماً یکسان نیستند.

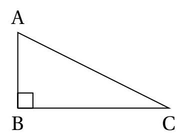


این مشکل در مقایسهٔ محصول برداشتی از دو زمین به شکل فوق به‌سادگی خود را نشان می‌دهد و بعید نیست که نظر انسان کشاورز را نیز به خود جلب کرده باشد. تفاوت دو چهارضلعی فوق، در وضعیت اضلاع آنها نسبت به یکدیگر در گوشه‌ها است که خاص‌ترین وضعیت آن راست بودن دو ضلع نسبت به یکدیگر است.

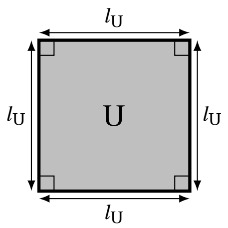
مبتدی – ضروری

برای درک راست بودن، می‌توان به وضعیت مسیر حرکت اجسام هنگام سقوط، نسبت به زمین و وضعیت ساقهٔ نخل و نی و ... نسبت به زمین توجه کرد.. کج بودن ساقه یک درخت نیز به‌معنای راست نبودن نسبت به زمین درنظر گرفته می‌شود.

همچنین، مسیر راست به سمت یک دیوار یا دیوارهٔ صخره‌ای را می‌توان مشابه مسیر راست اجسام در حال سقوط به سمت زمین درنظر گرفت. در شکل مقابل با در نظر گرفتن ضلع BC به مثابهٔ زمین، ضلع AB مسیری راست (مانند مسیر سقوط اجسام نسبت به زمین) است و با درنظر گرفتن ضلع AB به‌مثابهٔ زمین، ضلع BC مسیری راست (مانند مسیر سقوط اجسام نسبت به زمین) است. بدین ترتیب گوییم اضلاع AB و BC نسبت به یکدیگر راست بوده و یک گوشهٔ راست در نقطهٔ B می‌سازند. به‌طور مشابه ضلع AC که نسبت به این دو ضلع راست نیست را نسبت به آنها مایل (کج) خوانیم.



تفاوت مساحت چهارضلعی‌هایی با اضلاعی به‌طول واحد این ایده را مطرح می‌کند که یکی از این چهارضلعی‌ها را به‌عنوان معیار درنظر گرفته و مساحت تمام زمین‌ها و شکل‌ها را براساس آن بیان کنیم. از آنجا که خاص‌ترین و متقارن‌ترین چهارضلعی، چهارضلعی‌ای با اضلاع برابر و چهارگوشهٔ راست است، آن را به‌عنوان یک چهارضلعی خاص درنظر گرفته و بر آن نامی می‌گذاریم. چنین چهارضلعی‌ای



را مربع می‌خوانیم. همچنین مربعی با اضلاعی به‌طول واحد (l_U) را مربع واحد خوانده و مساحت آن (U) را معیار اندازه‌گیری مساحت قرار می‌دهیم.

به‌طور مشابه بین چهارضلعی‌هایی با اضلاع روبه‌روی برابر، بر آنهایی که چهارگوشهٔ راست دارند را «مستطیل» می‌خوانیم و با استدلالی مشابه قبل مساحت آنها را براساس مساحت مربع واحد بیان می‌کنیم. به‌طور مثال در شکل مقابل مساحت مستطیل برابر است با $ab\mathrm{A_U}$ که در آن a و b اعدادی طبیعی یا گویا هستند و البته با نگاهی به فصل اعداد حقیقی می‌بینیم که می‌توانیم آنها را اعدادی حقیقی نیز درنظر بگیریم.[1]

آ.۲.۳ انطباق و هم‌نهشتی

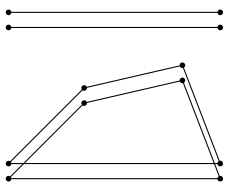
پیش از این ممکن بود شخصی بر این گمان باشد که «هر دو چهارضلعی با اضلاع واحد مساحت یکسان دارند». بنابراین، جا دارد این سؤال را از خود بپرسیم که:

سؤالی کلیدی ...

«آیا هر دو مربع واحد، مساحت یکسان دارند؟»

سر راست ترین راه برای اطمینان از برابری مساحت دو شکل، قابلیت انطباق آنها بر یکدیگر است که آن را هم‌نهشتی دو شکل می‌گوییم. بنابراین دو شکل را هم‌نهشت گوییم اگر بتوان آنها را بریکدیگر منطبق نمود. یعنی با بریدن یکی از آنها از روی کاغذ بتوانیم آن‌را بر دیگری منطبق کنیم. ایدهٔ انطباق در نحوهٔ مقایسهٔ طول دو جسم ریشه دارد که دو جسم (میله) را کنار یکدیگر قرار داده و انطباق دو انتهای میله‌ها بر یکدیگر، به تساوی طولشان تعبیر می‌شود. درک شهودی انسان کشاورز، حکایت از آن دارد که اگر دو شکل بر یکدیگر قابل انطباق باشند، محصول برداشتی برابر و درنتیجه مساحت یکسانی دارند. اقلیدس این دیدگاه را به‌صورت زیر به‌عنوان امری واضح که همه انسان‌ها قبول دارند بیان می‌کند و می‌گوید:

چیزهایی که بر یکدیگر منطبق می‌شوند، با هم برابرند (هم‌نهشتند).



در واقع، این درک شهودی بین همه انسان‌ها مشترک بوده و از مشاهده محصول برداشتی برای همه انسان‌ها حاصل می‌شود و بدون توجه به اینکه این درک شهودی و این وضوح از کجا به‌دست آمده است، آن را واضح می‌شمارند. این درک شهودی، پایه‌گذار تمامی هندسه (تا پیش از قرن نوزدهم) می‌شود. واضح است که دو پاره‌خط یا دو شکل قابل انطباق دو پاره‌خط یا دو شکل مجزا هستند و نمی‌توان آنها را یکسان دانست. اما از نماد $\cong$ برای نشان دادن «هم‌نهشتی» استفاده کرده و آن را «نوعی برابری» درنظر می‌گیریم. همچنین به‌سادگی می‌توان نشان داد:

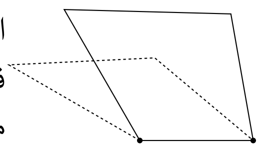
گزاره آ.۱: هر دو مثلث هم‌نهشت، اضلاع هم‌نهشت دارد.

اثبات: اگر دو مثلث بر هم منطبق شوند، اضلاع آنها نیز بر یکدیگر منطبق شده و درنتیجه برابرند. ■

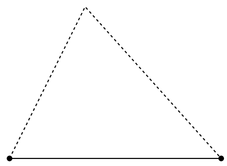
به‌طور مشابه، هر دو چندضلعی هم‌نهشت (قابل انطباق)، اضلاع برابر دارند. اما آیا هر دو مثلث یا هر دو چها ضلعی با اضلاع برابر، هم‌نهشت هستند؟

در شکل مقابل دو چهارضلعی با اضلاع برابر می‌بینیم که بر هم منطبق نمی‌شوند و واضح است که مساحت آنها برابر نیست. بنابراین، کشاورزان مصری نمی‌توانستند با داشتن چهار طناب به طول

[1] توجه: مساحی و اعداد کسری (نسبتی) بر خلاف اعداد حقیقی قدمتی چندهزارساله دارند.



اضلاع زمین، زمین خود یا زمینی با همان مساحت را مشخص سازند. برای درک بهتر این موضوع فرض کنید اضلاع چوب‌هایی هستند که در رأس‌ها (گوشه‌ها) نسبت به یکدیگر دوارن می‌کنند. بنابراین می‌توان با باز و بسته‌کردن چوب‌ها بی‌شمار چهارضلعی ساخت. اما از وصل کردن سه چوب به یکدیگر فقط یک مثلث می‌توان ساخت. یعنی نمی‌توان یک ضلع را ثابت نگه داشت و ضلع یا اضلاع دیگر را تکان داد. به‌طور مشابه اگر دو سر یک طناب با دو میخ بر زمین ثابت شده باشد و ضلعی از مثلث را مشخص کرده باشند، با گرفتن یک نقطه از طناب که طول دو ضلع مثلث را مشخص می‌کند، با کشیدن طناب به نحوی که کشیده و مستقیم باشند، نقطه‌ای خاص مشخص می‌شود که گوشهٔ سوم و درنتیجه اضلاع مثلث به‌طور یکتا مشخص می‌شوند. پس داریم:



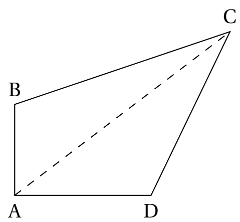
گزاره آ.۲: دو مثلث با اضلاع هم‌نهشت، هم‌نهشت هستند.

اثبات: با توجه به مطالب فوق واضح است. ■

نکته‌ای ظریف ...

بدین‌ترتیب، مسئله هم‌نهشتی (قابلیت انطباق) به مسئلهٔ ترسیم تبدیل می‌شود. به‌عبارتی اگر بتوان با داشتن یک ضلع از یک چندضلعی آن را به نحوی منحصر به‌فرد رسم کرد، مکان رئوس آن به نحوی منحصربه‌فرد مشخص می‌شود. در مثال فوق، چون با داشتن طول سه‌ضلع و مکان یک ضلع، مکان رأس سوم به‌نحوی منحصربه‌فرد (در یک طرف آن ضلع) به‌دست می‌آید، پس هر دو مثلث با اضلاع برابر (هم‌نهشت)، بر هم منطبق می‌شوند و به عبارتی هم‌نهشت هستند.

در یک چهارضلعی، اگر دو رأس مقابل را با یک خط راست به یکدیگر وصل کنیم، دو مثلث به‌دست می‌آید. بنابراین، در هر چهارضلعی‌ای مانند ABCD با داشتن طول‌های AB، BC، CD، DA و AC که در آن ضلعی مانند AB با مکان دو انتهای آن مشخص است، می‌توان با توجه به طول اضلاع مثلث $\triangle ABC$، مکانِ رأس C را مشخص کرد سپس با داشتن طول اضلاع مثلث $\triangle ACD$، می‌توان مکانِ رأس D را نیز مشخص نمود. بدین‌ترتیب چهارضلعی ABCD مشخص می‌شود.

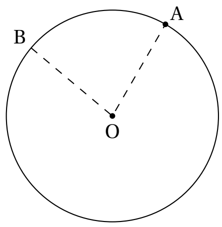


آ.۲.۴ ستاره و پرگار یونانی

ریاضیدانان یونانی متوجه شدند که استفاده از طناب‌ها برای ترسیم شکل‌های هندسی دقیق نیست؛ زیرا طناب‌ها با کشیده شدن، به مقداری هرچند ناچیز، تغییر طول می‌دهند. از طرفی در طناب‌های بلند مشاهده کردند که یک طناب هراندازه کشیده شده باشد، باز هم کمی انحنا دارد. آنها این را درک کرده بودند که طول یک انحنا از طول خط راست بین دو سر آن بیشتر است. لذا دو ابزار دقیق (به‌نظر خودشان دقیق) ساختند و سعی کردند تمامی ترسیمات را با استفاده از این دو ابزار رسم کنند. یکی از آنها وسیله‌ای بود که به‌وسیلهٔ آن خط راست رسم می‌کردند. این وسیله، نوعی خطکش است که هیچ علامتی بر آن درج نشده است، به‌خاطر شکل خاصش، ستاره خوانده می‌شود. اقلیدس این موضوع را چنین بیان می‌کند.

می‌توان از هر نقطه، به هر نقطهٔ دلخواه دیگر، خطی راست رسم کرد.

وسیلهٔ دیگر، نوعی پرگار است که ما امروزه آن را «پرگار فروریختنی» می‌خوانیم. پرگار فروریختنی، وسیله‌ای بود که نخست یک سر آن را بر نقطه‌ای مانند O بر کاغذ (زمین، تخته یا هر سطحی) ثابت می‌کردند، سپس دهانهٔ آن را به اندازه‌ای دلخواه باز نموده سر دیگر آن بر نقطه‌ای مانند A قرار گیرد. حال با ثابت‌کردن طول دهانهٔ پرگار و دَوَران آن، شکلی به‌دست می‌آید که آن را دایره می‌خوانیم. این پرگار را «فروریختنی» گوییم چون با بلند کردن آن از روی سطح، فرو می‌ریزد. واضح است که فاصلهٔ



هر نقطه از این شکل، از نقطهٔ O با فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ O برابر است. بنابراین، اقلیدس دایره را چنین توصیف می‌کند:

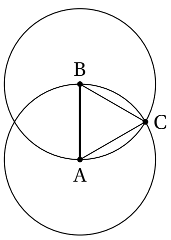
دایره شکلی است که از یک تک‌خط (به‌معنای تک‌خم) تشکیل شده است و همهٔ خطوط راستی که از نقطه‌ای درون آن شکل به محیط آن می‌تابند، با هم برابرند[1] و آن نقطه را مرکز دایره گوییم.

در دایره‌ای که به‌مرکز O رسم شده و از نقطهٔ A می‌گذرد، طول پاره‌خط OA را شعاع دایره گوییم. بنابراین به‌ازای هر نقطه‌ای مانند B بر این دایره، طول پاره‌خط OB برابر است با طول پاره‌خط AB که همان شعاع است. بنابراین، براساس ابزارهای ترسیم یونانیان باستان می‌توان گفت:

به مرکز هر نقطه می‌توان دایره‌ای رسم کرد از نقطه‌ای دلخواه بگذرد.

البته اقلیدس این مطلب را کمی متفاوت ذکر می‌کند که در ادامه خواهیم دید که عبارت اقلیدس با عبارت فوق معادل است. اقلیدس می‌گوید:

به هر مرکز و هر شعاع می‌توان دایره‌ای رسم کرد.



با استفاده از این ابزارهای ابتدایی می‌توان برای هر دو نقطهٔ A و B، به مرکز هر کدام چنان دایره‌ای رسم کرد که از نقطهٔ دیگر بگذرد. اگر محل برخورد این دو دایره را C بنامیم، داریم $AC \cong AB$ و $BC \cong AB$. بنابراین، مثلث $\triangle ABC$ از سه ضلع برابر تشکیل شده است که آن را مثلث متساوی‌الاضلاع می‌خوانیم. اقلیدس مثلث‌ها را براساس قابلیت انطباق اضلاعشان با یکدیگر، به سه گروه تقسیم می‌کند:

از شکل‌های سه‌ضلعی: مثلث متساوی‌الاضلاع آن است که سه ضلع (سه طرف) برابر دارد و مثلث متساوی‌الساقین آن است که فقط دو ضلع (دو طرف) برابر دارد و مثلث مختلف‌الاضلاع آن است که سه ضلع (سه طرف) نابرابر دارد.

در عبارت فوق، از اینکه AC و BC با AB هم‌نهشت (قابل انطباق) هستند، نتیجه گرفته‌ایم با یکدیگر نیز هم‌نهشت (قابل انطباق) هستند. اقلیدس همین مطلب را به‌عنوان امری واضح (بدیهی) که هر انسانی آن را می‌پذیرد، به صورت زیر بیان کرده است.

هر دو چیز که با یک چیز برابر (هم‌نهشت) باشند، با هم برابرند.

اقلیدس عبارت فوق را به‌صورت زیر و به‌عنوان اولین گزارهٔ خویش بیان کرده است.

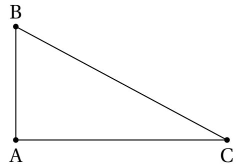
گزاره آ.۳: بر هر پاره‌خط دلخواه می‌توان مثلثی متساوی‌الاضلاع بنا کرد (ساخت).

مثال آ.۳: نقاط A، B و C مطابق شکل داده شده‌اند و طول AB از طول AC کمتر است. با استفاده از ستاره و پرگار فروریختنی، نقطهٔ M را چنان بیابید که:

آ. نقطهٔ M بر پاره‌خطّ AC یا امتداد آن قرار دادشته باشد و $AM \cong AB$.

---

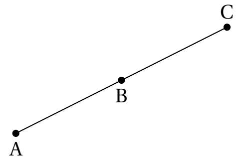
[1] این عبارت معمولاً به صورت زیر ترجمه شده است که در نظر نگارنده صحیح نمی‌نماید.
«دایره شکلی است مسطح، حادث از یک خط که همه خط‌های راستی که از یکی از نقطه‌های درون این شکل بر آن فرود می‌آیند با هم مساوی‌اند.»



ب . نقطهٔ M بر پاره‌خط ABM یا امتداد آن قرار داشته باشد و $AM \cong AC$

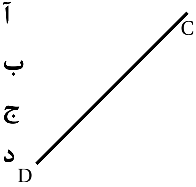
پاسخ: آ . دایره‌ای به مرکز A چنان رسم می‌کنیم که از نقطهٔ B بگذرد و محل برخورد آن با AC را M می‌نامیم.
ب . دایره‌ای به مرکز A چنان رسم می‌کنیم که از نقطهٔ C بگذرد. سپس با استفاده از ستاره پاره‌خط AB را چنان امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ مانند M قطع کند. ■

در مثال فوق فرض کرده‌ایم:



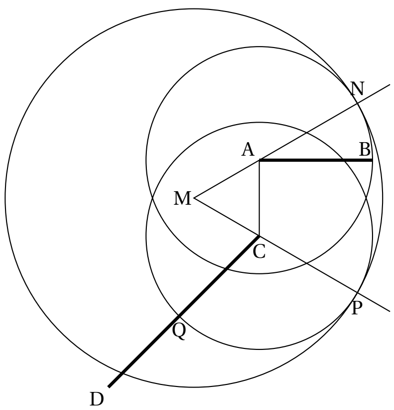
هر پاره‌خط را می‌توان به هر اندازه دلخواه به یک خط راست امتداد داد

در شکل مجاور، نقطهٔ B بر پاره‌خطِ AC قرار دارد و به‌عبارتی، نقطهٔ C بر امتدادِ پاره‌خطّ AB است. نقطهٔ C بر امتداد پاره‌خط AB است اگر A بر پاره خط BC باشد یا B بر پاره‌خط AC.



مثال آ.۴: دو پاره‌خط AB و CD، مطابق شکل داده شده‌اند.
آ . نقطهٔ M را چنان بیابید که مثلث $\triangle ACM$ متساوی‌الاضلاع باشد.
ب . نقطهٔ N را بر امتداد MA چنان بیابید که $NA \cong AB$.
ج . نقطهٔ P را بر امتداد MC چنان بیابید که $MP \cong MN$.
د . نشان دهید $CP \cong AB$.
ه . نقطهٔ Q را بر پاره‌خط CD یا امتداد آن چنان بیابید که $CQ \cong AB$.

پاسخ: آ . مشابه قبل عمل می‌کنیم.
ب . دایره‌ای به مرکز A رسم می‌کنیم که از نقطهٔ B بگذرد و MA را از طرف A امتداد می‌دهیم (با استفاده از ستاره) تا دایره را در نقطهٔ N قطع کند.
ج . دایره‌ای به مرکز M رسم می‌کنیم که از نقطهٔ N بگذرد و MC را از طرف C امتداد می‌دهیم تا این دایره را در نقطهٔ P قطع کند.
د . چون $MN \cong MP$ و $MA \cong MC$، پس $AN \cong CP$.
ه . محل برخورد پاره‌خط CD یا امتداد آن با دایره‌ای به مرکز C که از P می‌گذرد نقطهٔ Q است. ■



در مورد (د) از مثال فوق عبارتی را فرض کرده‌ایم که اقلیدس آن را به‌صورت زیر بیان می‌کند:

اگر چیزهای برابر از چیزهای برابر کم شوند، باقی‌مانده‌ها نیز برابرند.

به‌طور مشابه برای جمع دو مقدار بیان می‌کند:

اگر دو چیز برابر را به دو چیز برابر اضافه کنیم، کل‌ها (حاصل‌ها) با هم برابرند.

عبارات فوق صرفاً برای کمیت‌ها درست است؛ یعنی برای ویژگی‌هایی چون طول، مساحت، حجم، وزن، زمان و تعداد. مثال فوق نشان می‌دهد که با پرگار فرورختنی نیز می‌توان به هر مرکز و هر شعاعی، یک دایره رسم کرد. اقلیدس با توجه به همین مطلب است که ادعا می‌کند:

به هر مرکز و با هر شعاعی، دایره‌ای رسم می‌شود.

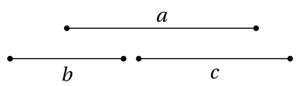
درحالی که دو مثال فوق، دو گزارهٔ اول از مقالهٔ اول از کتاب اصول اقلیدس را تشکیل داده و در اثبات آنها فرض می‌کند:

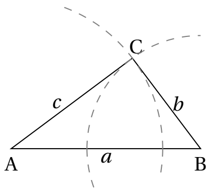
به مرکز هر نقطه، می‌توان دایره‌ای رسم کرد که از نقطهٔ دلخواه دیگری بگذرد.

بنابراین، اقلیدس نتیجهٔ دو گزارهٔ اول خود را به‌عنوان اصل و تعریف دایره بیان می‌کند. به‌هر حال امروزه، با افزایش توانایی انسان در ساخت ابزار، پرگارهایی داریم که عبارت اقلیدس در مورد آنها کاملا درست است. یعنی می‌توان دهانهٔ آن را به اندازه‌ای دلخواه (شعاع) باز کرده و و سپس بدون اینکه دهانهٔ پرگار تغییر کند یک سر آن را بر نقطه‌ای دلخواه (مرکز دایره) گذاشته و دایره‌ای رسم کرد. از این به‌بعد بدون توجه به پرگار فروریختنی، براساس پرگارهای معمولی امروزی به رسم شکل‌های هندسی می‌پردازیم.

پیش از این، با استفاده از طناب‌ها به رسم مثلث پرداختیم. حال می‌خواهیم نشان دهیم با استفاده از روش یونانیان که به‌نظر خودشان از دقتی بی‌نظیر برخوردار بوده است، می‌توان هر مثلثی را با داشتن طول سه ضلع آن رسم کرد. به‌عبارتی نشان می‌دهیم با داشتن طول اضلاع مثلث، اگر دو رأس آن مشخص باشند، رأس سوم نیز مشخص خواهد بود.

مثال آ.۵: با سه پاره‌خط داده شده یک مثلث بسازید.





پاسخ: نخست پاره‌خطّ AB را هم‌نهشت با پاره‌خط a رسم می‌کنیم. برای این‌کار می‌توانیم نقطه‌ای مانند A را مشخص کرده و دایره‌ای به‌شعاع a و به مرکز A رسم کنیم و سپس با استفاده از خط‌کش (ستاره) خطی از نقطهٔ A رسم کرده و محل برخورد آن با دایره را B بنامیم.
در ادامه دایره‌ای به مرکز B و شعاع b رسم می‌کنیم و دایره‌ای نیز به مرکز B و به شعاع c. اگر محل برخورد آنها را C بنامیم، داریم $BC \cong b$ و $AC \cong c$ و البته $AB \cong a$. ■

یونانیان باستان به روشی شبیه به پاسخ مثال فوق، اثبات می‌کردند که هر دو مثلث با اضلاع برابر، هم‌نهشت هستند. برای این امر دو رأس متناظر را بر یکدیگر منطبق نموده و نشان می‌دادند که رأس سوم از هر دو مثلث در یک نقطه قرار می‌گیرد و درنتیجه برهم منطبق هستند.

آ.۲.۵ زاویه

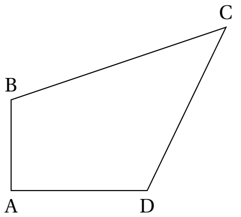
چهارضلعی‌هایی با اضلاع برابر و مساحت‌های نابرابر، در گوشه‌ها و وضعیت اضلاع مجاور نسبت به یکدیگر متفاوت هستند. دو ضلع مجاور که در یک انتها مشترک هستند، یک گوشه می‌سازند و به مقدار باز یا بسته بودن دو ضلع مجاور نسبت به یکدیگر (در یک گوشه)، «زاویه» می‌گوییم. اقلیدس زاویه را به‌صورت زیر توصیف می‌کند:

زاویه در صفحه، میل دو خط نسبت به یکدیگر است، زمانی که در یک صفحه یکدیگر را قطع کنند و بر یک خط راست واقع نباشند.

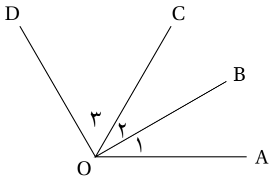
باتوجه به توصیف اقلیدس از زاویه، نقاط A، O و B که بر یک خط راست قرار دارند، زاویه‌ای نمی‌سازند و عبارت $\widehat{AOB}$ که آن را یک زاویه معرفی می‌کند، عبارتی بی‌معنا و نادرست است. اقلیدس در عبارت زیر، بر این امر تأکید کرده و این حالت را مستثنی می‌کند.

اگر خط‌های تشکیل دهنده زاویه بر یک خط راست واقع باشند، «راست‌خطی» نامیده می‌شود.

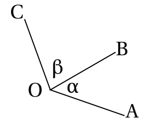
اما برخی بر این اعتقادند که اقلیدس آنچه به‌عنوان «راست‌خطی» معرفی شد را نوعی زاویه دانسته



و این زاویهٔ خاص را «راست‌خطی» نامیده است. در حالی که پیش از این دیدیم که در توصیف زاویه، راست‌خطی را به‌عنوان زاویه درنظر نمی‌گیرد.
به‌هرحال، در چهارضلعی ABCD، در شکل مقابل، اضلاع AB و AD، گوشهٔ A را ساخته‌اند و به مقدار باز یا بسته بودن این دو ضلع نسبت به یکدیگر، زاویهٔ $\widehat{A}$ گوییم و آن‌را به‌صورت $\widehat{BAD}$ یا $\widehat{DAB}$ نیز نشان می‌دهیم.



در شکل مقابل، پاره‌خط‌های OA، OB، OC و OD زاویه‌های $\widehat{AOB}$، $\widehat{BOC}$ و $\widehat{COD}$ را می‌سازند. در این مثال با شماره‌گذاری روی زاویه‌ها (مطابق شکل) می‌توانیم این زوایا را به‌صورت $\widehat{O_1}$، $\widehat{O_2}$ و $\widehat{O_3}$ نیز نشان دهیم.



از روش‌های معمول برای نام‌گذاری زاویه‌ها، استفاده از حروف کوچک یونانی است. به‌طور مثال در شکل مجاور، $\widehat{\alpha}$ به زاویهٔ $\widehat{AOB}$ و $\widehat{\beta}$ به زاویهٔ $\widehat{BOC}$ اشاره دارد.
برابری دو زاویه، به‌معنای برابری مقدار باز یا بسته بودن اضلاع یک گوشه نسبت به یکدیگر است. بنابراین، اگر دو مثلث بر هم منطبق شوند، گوشه‌هایی که بر یکدیگر منطبق می‌شوند، زوایای برابر می‌سازند. همچنین، چهارضلعی‌ها یا به‌طور کلی چندضلعی‌های هم‌نهشت (قابل انطباق) در گوشه‌هایی که بر یکدیگر منطبق می‌شوند، زاویه‌های برابر می‌سازند.

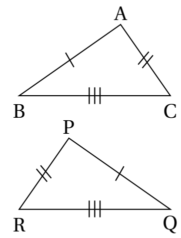
گزاره آ.۴: مثلث‌های هم‌نهشت، زوایای برابر دارند.

مبتدی – ضروری
با دقت پاسخ دهید...

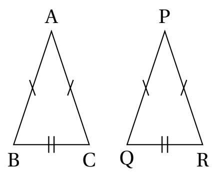
مثال آ.۶: درستی یا نادرستی هر یک از عبارت زیرا برای هر دو مثلث دلخواه $\triangle ABC$ و $\triangle PQR$ بررسی کنید که در آنها $AB \cong PQ$، $AC \cong PR$ و $BC \cong QR$.

آ. $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ ب. $\widehat{A} = \widehat{P}$ ج. $\widehat{B} \neq \widehat{P}$

د. $\widehat{C} = \widehat{Q}$ ه. $\widehat{B} = \widehat{Q}$ و. $\widehat{C} \neq \widehat{Q}$

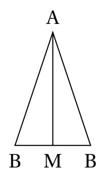


پاسخ: دو مثلث با اضلاع برابر بر هم منطبق می‌شوند. با نشان‌گذاری بر اضلاع برابر واضح است که موارد (آ)، (ب) و (ه) درست هستند.
اگر مثلث‌ها متساوی‌الاضلاع باشند، به‌وضوح همه اضلاع و رئوس بر هم قابل انطباق بوده و درنتیجه همه زوایا با هم برابرند. بدین‌ترتیب، موارد (ج) و (و) نادرستند.
مورد (د) نیز با توجه به شکل، به‌وضوح نادرست است. ■



مثال آ.۷: با فرض $BC \cong QR$ و $AB \cong AC \cong PQ \cong PR$ نشان دهید:
آ. می‌توان دو مثلث را چنان بر هم منطبق کرد که گوشهٔ B بر گوشهٔ P منطبق شود.
ب. می‌توان دو مثلث را چنان بر یکدیگر منطبق کرد که گوشهٔ C بر گوشهٔ P منطبق شود.
ج. $\widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{Q} = \widehat{R}$.

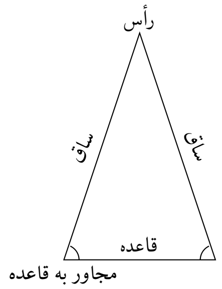
پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■



مثال آ.۸: در مثلث $\triangle ABC$ داریم $AB \cong AC$ و نقطهٔ M بر پاره‌خط BC چنان قرار گرفته است که $BM \cong MC$. نشان دهید:

آ. $\triangle ABM \cong \triangle ACM$ ب. $\widehat{B} = \widehat{C}$

پاسخ: دو مثلث دارای اضلاع برابرند، پس هم‌نهشت هستند و می‌توان آنها را چنان بر هم منطبق نمود که گوشه‌های B و C بر یکدیگر منطبق می‌شوند، درنتیجه $\widehat{B} = \widehat{C}$. ■



دو مثال فوق با دو راه مختلف نشان می‌دهند که در مثلث متساوی‌الساقین، دو زاویه با هم برابرند. مثلثی با دو ضلع برابر را متساوی‌الساقین و اضلاع برابر را ساق‌های آن و گوشه‌ای که این دوضلع با هم می‌سازند را رأس مثلث و ضلع دیگر را قاعدهٔ آن مثلث متساوی‌الساقین گوییم. زاویه‌ای که در رأس مثلث متساوی‌الساقین ساخته می‌شود، چون روبه‌روی قاعده قرار می‌گیرد، آن را زاویهٔ مقابل به (روبه‌روی) قاعده و دو زاویهٔ دیگر که یک ضلع آنها، قاعده است، زوایای مجاور به قاعده گوییم. بنابراین، داریم:

گزاره آ.۵: در مثلث‌های متساوی‌الساقین، زوایای مجاور به قاعده با هم برابرند.

اثبات: در هر یک از دو مثال فوق به شکلی متفاوت این گزاره اثبات شده است. ■

از عبارت «(ض‌زض)» برای اشاره به این گزاره استفاده می‌شود.

گزاره آ.۶: دو مثلث با دو ضلع و زاویهٔ بینِ برابر، هم‌نهشت هستند.

اثبات: زاویه را رسم کرده و بر اضلاع آن طول اضلاع را جدا می‌کنیم دو رأس دیگر مثلث مشخص می‌شوند. تکمیل اثبات به خواننده واگذار می‌شود. ■

از عبارت «(زض‌ز)» برای اشاره به این گزاره استفاده می‌شود.

گزاره آ.۷: دو مثلث با دو زاویه و ضلعِ بین برابر هم‌نهشت هستند.

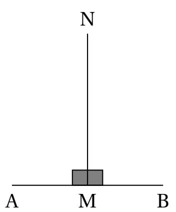
اثبات: ضلع برابر را بر هم منطبق کرده، زوایا را از رئوس خارج می‌کنیم. واضح است رأس سوم هر دو مثلث، بر نقطه برخورد اضلاع زوایای خارج شده‌اند. ■

در اثبات گزارهٔ فوق، به‌صورت کاملاً شهودی فرض کرده‌ایم که هر دو خط، در بیش از یک نقطه برخورد نمی‌کنند. معمولاً در ترجمهٔ آثار اقلیدس، عبارت زیر به وی نسبت داده می‌شود.

از دو نقطه، خطی یکتا می‌گذرد.

اما اقلیدس صرفاً با نگاهی ترسیمی، می‌گوید: «از هر نقطه می‌توان خطی رسم کرد که از نقطه‌ای دیگر بگذرد» و حرفی از یکتایی آن نیست؛ هرچند در اثبات قضایا، به‌طور کاملا شهودی فرض می‌کند از هر دو نقطه خطی یکتا می‌گذرد. البته با ادبیات اقلیدس، بیان این مطلب نیز دشوار و حتی غیرممکن می‌نماید. آنچه امروزه باعنوان خط (خط راست) شناخته می‌شود، بر مبنای تعریف هیلبرت، در اواخر قرن نوزدهم است که کتاب اصول اقلیدس را با نگاهی دقیق‌تر بازنویسی می‌کند.

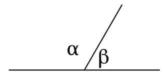
آ.۳ زاویهٔ قائمه و اصل توازی



پیش از این با مفهوم زاویهٔ راست، براساس مسیر حرکت اجسام آشنا شدیم. با این دیدگاه پاره‌خط MN، بر پاره‌خط AB راست ایستاده است، اگر به هیچ‌طرفی مایل (کج) نباشد. اقلیدس همین دیدگاه را به‌صورت زیر بیان می‌کند:

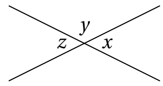
زمانی که خط راستی بر خط راست دیگری بایستد و زاویه‌های مجاور برابر بسازد، هر یک از زاویه‌های برابر را یک زاویهٔ راست (قائمه) گفته و خط اولی را عمود بر خطی گوییم که بر آن ایستاده است.

اقلیدس در عبارت فوق، ضمن معرفی زاویهٔ قائمه زوایای مجاور را نیز تعریف می‌کند. دو زاویهٔ



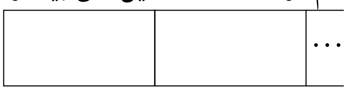
$\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ در شکل مقابل مجاور هستند و مجموع آنها برابر است با مجموع دو زاویهٔ قائمه. اقلیدس که جمع زوایا را می‌پذیرد، به‌سادگی گزارهٔ زیر را ثابت می‌کند که اثبات آن به تالس منسوب است.

گزاره آ.۸: زوایای متقابل به رأس با هم برابرند.

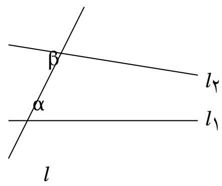


اثبات: «متقابل به رأس» یعنی «روبه‌رو نسبت به رأس» و در شکل مقابل دو زاویهٔ $\hat{x}$ و $\hat{z}$ متقابل به رأس هستند. از آنجا که $\hat{x}$ و $\hat{y}$ مجاورند و $\hat{y}$ و $\hat{z}$ نیز مجاورند و مجموع زوایای مجاور دوقائمه است، پس $\hat{x}+\hat{y}=\hat{y}+\hat{z}$ و درنتیجه $\hat{x}=\hat{z}$. ■

با توجه به تعریف زاویهٔ قائمه، اگر مطابق شکل، دو مستطیل (چهار ضلعی با چهار زاویهٔ قائمه و اضلاع روبه‌روی برابر) را کنار هم بگذاریم، مستطیل جدیدی حاصل می‌شود، چون از کنار هم قرار گرفتن دو زاویهٔ قائمه یک خط راست پدید می‌آید. بنابراین، با کنار هم قرار دادن مستطیل‌های بیشتر، می‌توان آن دو ضلع مستطیل را به هر اندازهٔ دلخواه امتداد داد و مستطیل بزرگ‌تری ساخت. اما نکتهٔ اساسی این است که این



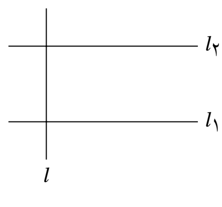
دو ضلع را هر اندازه هم که امتداد دهیم، به هم نمی‌رسند. این ویژگی را «توازی» نامیده و آن دو خط را «موازی» خوانیم. اقلیدس توازی را به‌صورت زیر تعریف می‌کند:



خط‌های راست متوازی، خط‌هایی هستند در یک صفحه که اگر از دو سو تا بی‌نهایت امتداد داده شوند، یکدیگر را نمی‌بُرند.

واضح است که مستطیل‌های متوالی را به‌هر تعداد کنار هم بچینیم، اضلاع آنها تغییری نکرده و درنتیجه دو خط پدید می‌آید که هرچه امتداد یابند، به یکدیگر برخورد نمی‌کنند. تمدن‌های شرق باستان نظیر مصر و بابل که هزار سال پیش از اولین ریاضیدانان یونانی هندسه داشته‌اند، به احتمال زیاد، وجود مستطیل را به‌عنوان یک چهارضلعی پذیرفته بودند و عبارت زیر را به‌سادگی، از مستطیل‌های متوالی نتیجه می‌گرفتند که اقلیدس آن را به‌عنوان اصل و بدون اثبات می‌پذیرد و وجود مستطیل را به‌وسیلهٔ آن اثبات می‌کند.

اگر خط راستی بر دو خط راست فرود آید و مجموعه دو زاویهٔ درونی که در یک طرف خود تشکیل می‌دهد از دو قائمه کمتر باشد، آن دو خط راست اگر بی‌نهایت امتداد داده شوند، یکدیگر را در همان طرف که مجموع دو زاویه در آن کمتر از دو قائمه است، می‌بُرند (قطع می‌کنند).



گزاره آ.۹: خطی که بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

اثبات: فرض کنید $l \perp l_1$ و $l_2 \parallel l_1$. اگر $l \not\perp l_2$، پس در یک طرف زاویه‌ای کمتر از قائمه می‌سازد که در آن طرف یکدیگر را قطع کرده و درنتیجه موازی نیستند. ■

گزاره آ.۱۰: دو خط که بر یک خط عمود باشند، موازیند.

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. (از اثبات گزارهٔ قبل کمک بگیرید) ■

از آنجا که از هر نقطه فقط یک خط بر خطی دیگر عمود می‌شود، از دو گزارهٔ فوق می‌توان نتیجه گرفت:

گزاره آ.۱۱: از هر نقطه خارج از خط، فقط یک خط موازی با آن رسم می‌شود (می‌گذرد).

می‌توان عبارت فوق را به‌عنوان اصل پذیرفته و آنچه اقلیدس به‌عنوان اصل معرفی کرده است را از آن نتیجه گرفت. به‌همین سبب در بسیاری از کتاب‌ها، عبارت فوق را به‌عنوان اصل توازی معرفی می‌کنند.

همچنین می‌توان نشان داد از فرض وجود مستطیل (چهارضلعی‌ای با اضلاع روبه‌روی برابر و چهار زاویهٔ قائمه) اصل توازی نتیجه می‌شود و از اصل توازی نیز وجود مستطیل قابل اثبات است. به‌عبارتی هرچند اروپایی‌ها برآنند که نشان دهند که تفکر از یونان آغاز شده است، اما اشتباه است و بعید نمی‌نماید که عمدی در کار باشد. هرچند یونانیان دانش مصر و بابل را گرفته و پیشرفت‌های قابل توجهی در آن ایجاد کرده‌اند، اما تفکر و استدلال از مشرق زمین آغاز شده و حتی از نظر منطقی فرق چندانی ندارد که فرض وجود مستطیل را بپذیریم که کاملا شهودی و ساده است یا اصل توازی اقلیدس یا معادل آن که باعنوان قضیه ذکر شده است.

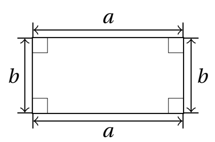
ریاضیدانان یونانی از قبیل طالس، فیثاغورس به شرق سفر کرده، دانش اندوخته و پس از بازگشت به یونان مدارسی تأسیس نموده‌اند که آغازگر ریاضی و فلسفهٔ یونان باستان است. حتی دموکریتوس که قرن‌ها پس از ایشان می‌زیسته، می‌گوید:

> بیش از هر مردی در زمان خویش بخش بزرگی از جهان را گشته‌ام و در باب دورِ دست‌ترین چیزها به پژوهش پرداخته‌ام. اقالیم و سرزمین‌های بسیار دور را دیده‌ام و به سخنان دانشمندان بسیار گوش فرا دادم. ولی هیچ‌کدام در ترسیم خطوط و اثبات آنها بر من پیشی نگرفته، حتی طناب‌کش‌های مصری (Harpedomaptae) که روی هم رفته پنج سال با آنان در دیار غربی به‌سر بردم.

هارپدوماپتاها، طناب‌کش‌ها یا مساحان مصری بودند و این اظهار حاکی از آن است که اثبات منطقی قضایا در آن هنگام در آن کشور هم مانند یونان صورت می‌گرفته است.

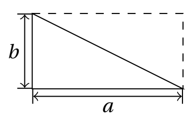
سخن را کوتاه کرده و به اختصار مطالبی در مورد محاسبهٔ مساحت و تشابه و تناسب بیان می‌کنیم که برای درک مطالب اصلی کتاب ضروری است.

آ.۴ تناسب

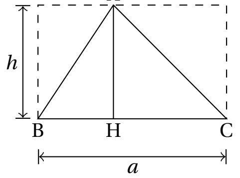


انسان‌ها به تجربه دریافتند که چهارضلعی‌هایی با اضلاع روبه‌روی مساوی و چهارگوشهٔ راست (قائمه) وجود دارند که آنها را «مستطیل» می‌نامیم. مستطیلی با چهار ضلع برابر را «مربع» و مربعی با اضلاعی به طول l_{U} (واحد طول) را «مربع واحد» خوانده و مساحت آن را با $\mathrm{A_U}$ نمایش می‌دهیم.

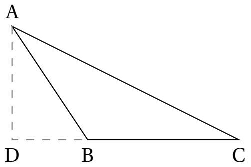
واضح است که مساحت مستطیلی به اضلاع al_{U} و bl_{U} برابر است با $ab\mathrm{A_U}$ که به‌اختصار گوییم مساحت مستطیلی به اضلاع a و b برابر است با ab که در آن a و b می‌توانند اعدادی حقیقی و مثبت باشند.



سه ضلعی را «مثلث» و مثلثی که یک زاویهٔ راست (قائمه) داشته باشد را «مثلث قائم‌الزاویه» خوانیم. در شکل مقابل، مساحت مثلث قائم‌الزاویه، نصف مساحت مستطیل است. پس مساحت مثلث برابر است با $\frac{۱}{۲}ab$.

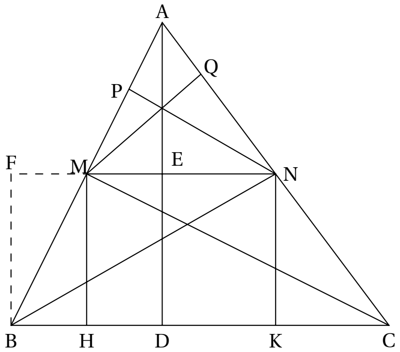


در شکل مقابل $\mathrm{AH} \perp \mathrm{BC}$. پس AH را «ارتفاع» و BC را «قاعده» گوییم. مستطیلی به اضلاع قاعده و ارتفاعِ مثلث، مثلث را در برگرفته است که مساحت آن دو برابرِ مساحت مثلث است. بنابراین گوییم: «مساحتِ مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب ارتفاع در قاعده». بنابراین، اگر مساحت مثلث $\overset{\triangle}{\mathrm{ABC}}$ را با $\mathrm{S}_{\overset{\triangle}{\mathrm{ABC}}}$ نمایش دهیم داریم $\mathrm{S}_{\overset{\triangle}{\mathrm{ABC}}} = \frac{۱}{۲}ah$.



برای مساحت مثلثی با شکل مقابل نیز داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{ACD}} - S_{\overset{\triangle}{ABD}} = \frac{۱}{۲}(a+d)h - \frac{۱}{۲}dh = \frac{۱}{۲}ah$$



مثال آ.۹: فرض کنید $MN \parallel BC$. نشان دهید:

آ. $MH = NK$ ب. $S_{\overset{\triangle}{MBC}} = S_{\overset{\triangle}{NBC}}$

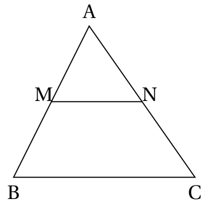
ج. $S_{\overset{\triangle}{MBN}} = S_{\overset{\triangle}{MCN}}$ د. $\dfrac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{ANB}}} = \dfrac{AM}{AB}$

ه. $\dfrac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{AMC}}} = \dfrac{AN}{AC}$ و. $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

ز. $S_{\overset{\triangle}{BMN}} = \frac{۱}{۲}|ED|.|MN|$

ح. $S_{\overset{\triangle}{ABN}} = \frac{۱}{۲}|AD|.|MN|$ ط. $\dfrac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABN}}} = \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB}$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■



قضیه آ.۱: اگر نقاط M و N به‌ترتیب بر اضلاع AB و AC از مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ چنان قرار گیرند که $MN \parallel BC$، آن‌گاه داریم $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.

پاسخ: در مثال قبل اثبات آن ارائه شده است. ■

صورت قضیه مهم است.

نتیجه ۱: اگر نقاط M و N به‌ترتیب بر اضلاع AB و AC از مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ چنان قرار گیرند که $MN \parallel BC$ آن‌گاه داریم $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AB}{BC}$ و $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AB}{AC}$ و $\dfrac{AN}{MN} = \dfrac{AC}{BC}$

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

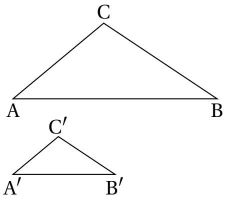
صورت قضیه مهم است.

نتیجه ۲: اگر نقاط M و N به‌ترتیب بر اضلاع AB و AC از مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ چنان قرار گیرند که $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$، آن‌گاه $MN \parallel BC$.

اثبات: نقطهٔ N' را بر AC چنان درنظر می‌گیریم که $MN' \parallel BC$. در این صورت داریم: $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN'}{AC}$ و چون بنا به فرض مسئله داریم $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ پس $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AN'}{AC}$ و درنتیجه $AN = AN'$. بنابراین، N و N' در یک نقطه قرار دارند و درنتیجه $MN \parallel BC$. ■

۵.آ تشابه

غارنگاره‌های ماقبل تاریخ نشان می‌دهد که انسان‌ها از زمان‌های بسیار دور با تصویرگری و نقاشی آشنا بوده‌اند. در عکسی که از یک تصویر می‌گیریم همه چیز به یک اندازه بزرگ‌تر یا کوچک‌تر می‌شود. به‌طور مثال ممکن است همهٔ اندازه‌ها نصف شوند. فرض کنید از مثلثی مانند $\triangle ABC$ عکس بگیریم



و آن تصویر را $\triangle A'B'C'$ بنامیم. در این‌صورت اضلاع مثلث نظیر به نظیر متناسب هستند؛ یعنی:

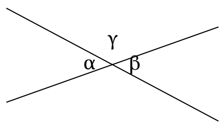
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$

این رابطه شباهت زیادی با قضیهٔ تالس دارد. از طرفی هم در تصاویر زاویه‌ها تغییر نمی‌کنند؛ یعنی $\hat{A}=\hat{A}'$ و $\hat{B}=\hat{B}'$ و $\hat{C}=\hat{C}'$. این ویژگی را تشابه می‌نامیم.

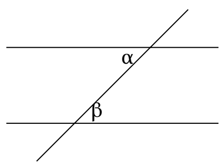
دو مثلث را متشابه گوییم اگر زوایای برابر داشته باشند.

شواهدی در دست است که پیش از یونانیان که به اثبات رابطهٔ بین تشابه و تناسب پرداخته‌اند و از اثبات آنها اطلاع داریم، تمدنهای کهن مصر و بابل نیز از تناسب و تشابه و حتی از رابطهٔ آنها اطلاع داشته‌اند؛ هیچ مدرکی نداریم که نشان دهد آنها این ویژگی‌ها را چگونه درک می‌کرده‌اند. شاید براساس درکی که از تصاویر داشته‌اند، به رابطهٔ بین تشابه و تناسب آگاه بوده‌اند. به‌هر حال، همان‌طور که در ادامه خواهید دید، یونانیان، این ویژگی‌ها را به دقت بیان کرده و اثبات‌های ساده و زیبایی برای آن‌ها اقامه کرده‌اند. تالس، اولین فیلسوف و ریاضیدان یونانی، در حین سفرهای تجاری خویش به مصر و بابل، به یادگیری دانش ایشان پرداخته است. وی نشان می‌دهد که اگر دو خط یکدیگر را قطع کنند، از چهار زاویهٔ تشکیل شده، زوایای روبه‌رو با هم برابرند. وی بر این باور بود که:

حاصل افزودن دو چیز برابر به دو چیز برابر، برابرند.
حاصل کاستنِ دو چیز برابر از دو چیز برابر، برابرند.

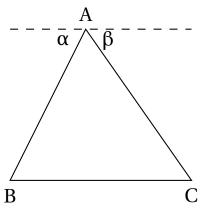


تالس، بر پایهٔ باور فوق، اظهار کرد که در شکل مقابل، $\hat{\alpha}+\hat{\gamma}$ و $\hat{\beta}+\hat{\gamma}$ هر دو برابرند با دو قائمه (خط راست) و درنتیجه $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$.

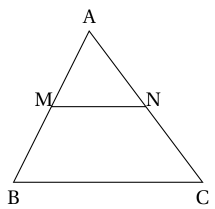


علاوه‌براین، یونانیان نشان دادند که در شکل مقابل دو خط l_1 و l_2 موازیند اگر و تنها اگر $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$. از اثبات این قضیه صرف‌نظر می‌کنیم. ولی از آن استفاده خواهیم کرد.

مثال آ.۱۰: نشان دهید جمع زوایای مثلث برابر است با دو قائمه.



اثبات: از رأس A خط موازی BC رسم می‌کنیم تا مطابق شکل زوایای $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ مشخص شوند. در این‌صورت $\hat{\alpha}=\hat{B}$ و $\hat{\beta}=\hat{C}$. بنابراین، $\hat{B}+\hat{A}+\hat{C}=\hat{\alpha}+\hat{A}+\hat{\beta}$ که برابر است با دوقائمه. ■



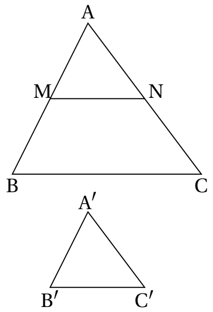
مثال آ.۱۱: نشان دهید در شکل مقابل داریم:
$MN \parallel BC$ اگر و تنها اگر $\widehat{ABC}=\widehat{AMN}$.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

با توجه به قضیهٔ تالس، عکس تالس و مثال فوق، می‌توان قضیهٔ زیر را نتیجه گرفت.

قضیه آ.۲: دو مثلث متشابه‌اند، اگر و تنها اگر متناسب باشند.

قضیهٔ فوق می‌گوید در شکل زیر داریم:
$\hat{A}=\hat{A}'$، $\hat{B}=\hat{B}'$ و $\hat{C}=\hat{C}'$ اگر و تنها اگر $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$



اثبات: فرض کنید دو مثلث متشابه‌اند. رأسِ A' را بر A و رأس B' را بر AB قرار داده، آن را M می‌نامیم. N را بر AC چنان می‌گیریم که $AN = A'C'$. پس $\overset{\triangle}{A'B'C'}=\overset{\triangle}{AMN}$ و درنتیجه $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} = \widehat{AMN}$. درنتیجه $MN \parallel BC$. پس بنا به قضیهٔ تالس متناسب‌اند.

به‌طور مشابه اگر فرض کنیم دو مثلث متناسب‌اند، نقاط M و N را بر AB و AC چنان در نظر می‌گیریم که $AM = A'B'$ و $AN = A'C'$. پس $\frac{AM}{AB} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{AN}{AC}$ و درنتیجه بنا به عکس تالس داریم $MN \parallel BC$. پس $\overset{\triangle}{AMN}$ و $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ متشابه‌اند. توجه داریم $\overset{\triangle}{AMN}=\overset{\triangle}{A'B'C'}$ ■

منابع

۱ استراترن، پل، آشنایی با سقراط، نشر مرکز، تهران، ۱۳۷۹.

۲ اعتماد، شاپور، دیدگاه‌ها و برهان‌ها: مقاله‌ای در فلسفه علم و فلسفه ریاضی، نشر مرکز، ۱۳۸۷.

۳ تامس ال. هیث، اقلیدس: سیزده جلد از اصول،، بهمن اصلاح‌پذیر، مبتکران: پیشروان، تهران ۱۳۹۰.

۴ پرویز، شهریاری، تاریخ ریاضیات، انتشارات مدرسه، تهران، ۱۳۸۵.

۵ تامس ال. هیث، اصول اقلیدس: سیزده مقاله، ترجمهٔ محمد هادی شفیعی‌ها، مرکز نشر دانشگاهی، تهران ۱۳۸۷.

۶ ترنس اروین، تفکر در عهد باستان، ترجمهٔ محمدسعید حنایی کاشانی، قصیده‌سرا، تهران، ۱۳۸۴.

۷ دورانت، ویلیام جیمز، مشرق زمین: گاهواره تمدن، انتشارات علمی و فرهنگی، ۱۳۷۸.

۸ دورانت، ویلیامز، یونان باستان، انتشارات انقلاب اسلامی، ۱۳۶۵.

۹ اسمیت، دیوید یوجین، تاریخ ریاضیات، غلامحسین صدری افشار، ۱۳۷۳.

۱۰ راسل، برتراند، تاریخ فلسفهٔ غرب، پرواز، تهران، ۱۳۷۳.

۱۱ راسل، برتراند، مقدمه‌ای بر فلسفهٔ ریاضی، دفتر تحقیقات یاسین، تهران، ۱۳۷۶.

۱۲ رایش‌هولف، پیدایش انسان، نشر آگه، تهران، ۱۳۸۸.

۱۳ شوینگ‌تی لین، فنگ لین، نظریه مجموعه‌ها و کاربردهای آن، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۸.

۱۴ کاپلستون، فردریک چارلز، تاریخ فلسفه، انتشارات سروش، تهران، ۱۳۹۲.

۱۵ ماروین جی گرینبرگ، هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی، ترجمه محمد هادی شفیعی‌ها، مرکز نشر دانشگاه، تهران، ۱۳۸۹.

۱۶ کولیوان، مارک، درآمدی بر فلسفهٔ ریاضی معاصر، نقد فرهنگ، تهران، ۱۳۹۶.

۱۷ مارسل بل، تاریخ ریاضیات، صائب، تهران، ۱۳۴۴.

۱۸ صال‌مصلحیان، محمد، فلسفه ریاضی: کلاسیک، مدرن، پست مدرن، واژگان خرد، مشهد، ۱۳۸۴.

۱۹ نلسن، راجر، اثبات بدون کلام: تمرینات بیشتر بریا تفکر شهودی، انتشارات علوم و فنون پزشکی اهواز، ۱۳۹۳.

۲۰ رودین، والتر، اصول آنالیز ریاضی، علمی و فنی، تهران، ۱۳۸۷.

۲۱ هاوارد ویتلی ایوز، آشنایی با تاریخ ریاضی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۹ – ۱۳۸۱.

۲۲ هراشتاین آی.ان.، جبر مجرد، انتشارات علمی، تهران، ۱۳۷۶.

۲۳ هراشتاین، آی. ان. ، مباحثی در جبر، علوم نوین، تهران ۱۳۷۰.

24 Fitzpatrick, Richard, Euclid‘s Elements of Geometry, 2nd Ed. 2008.

25 Katz, Victor, A History of Mathematics: An Introduction, Addison-Wesley, 1998.

26 Kline, Morris, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press, New York, 1972.

27 Heath, Thomas, The Elements: Books I-XIII-Comlete and Unabriged, Barnes & Noble, 2006

28 Robinson, Abraham, Non-standard Analysis, Prinston Univesity Press, Prinston: New Jersy, 1966.

29 Schaaf, William Leonard, Basic Concept of Elementary Mathematics, John Wily & sons, New York, 1969.

30 Wheeler, Ruric E., Modern Mathematics: an elementary approach, Cole Pub., Belmont, 1966.

31 Zatsev, V.V, Elementary Mathematics: A Review Course, Mir Publishers, Mouscow, 1978.