

(co)-Homologie (des faisceaux)

2023-2024

Table des matières

1	Faisceaux	7
1.1	Définitions	7
1.2	Faisceautisation	8
1.3	Faisceau localement constant	9
1.4	Suites exactes de faisceaux	9
1.5	Images directes et inverses de faisceaux	10
2	Catégories abéliennes	15
2.1	Catégories additives	17
2.2	Catégories abéliennes	18

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Le but ca va être la cohomologie des faisceaux et les théorèmes de changement de base propres (pas comme dans [\[Mum70\]](#)).

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1

Faisceaux

1.1 Définitions

On parle d'espaces topologiques. Soit X un e.t.

Définition 1.1.1 (Préfaisceau abélien). Pour l'instant c'est un faisceau en groupe abélien.

Remarque 1. Soit \mathcal{P} un faisceau en groupes abéliens. Soit $U = \bigcup_i U_i$ un recouvrement ouvert on peut définir la séquence

$$0 \rightarrow \mathcal{P}(U) \rightarrow \prod_i \mathcal{P}(U_i) \rightarrow \prod_{(i,j)} \mathcal{P}(U_i \cap U_j)$$

où la première flèche est la restriction et la deuxième la différence $(s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j}$. C'est une suite exacte parce que si on appelle d_0 et d_1 les deux flèches :

$$(s|_{U_i}|_{U_i \cap U_j} - s|_{U_j}|_{U_i \cap U_j})$$

Ca mesure si une section est globale! En particulier ça axiomatise les faisceaux :

- La condition $\ker(d^1) = \text{Im}(d^0)$ équivaut au gluing de sections locales.
- La condition $\ker(d^0) = 0$ équivaut à l'unicité des sections.

On appelle $C(\bigcup_i U_i, \mathcal{P})$ la suite exacte du dessus.

Définition 1.1.2. On définit la fibre (stalk) en $x \in X$ pour un préfaisceau \mathcal{P} par

$$\mathcal{P}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{P}(U)$$

et on a

$$\mathcal{P}_x = \sqcup_{x \in U} \mathcal{P}(U) / \sim$$

où la relation c'est la relation de coïncider sur une restriction. On a les germes de sections comme d'habitude qu'on note par s_x .

Théoreme 1.1.3. *Une flèche de faisceaux $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un isomorphisme ssi la flèche induite sur les fibres sont des isomorphismes.*

Preuve. À faire! □

Définition 1.1.4 (Support d'une section d'un faisceau). Soit \mathcal{F} un faisceau sur X . On définit $\text{Supp}_U(s) := \{s \in U \mid s_x \neq 0\}$

Exercices 1.1.5. Soit \mathcal{F} un faisceau abélien, montrer que le support d'une section s est fermé. Faut juste montrer que s_x vaut zéro même en élargissant à un petit ouvert autour de x , c'est évident en fait.

Remarque 2. *Le foncteur d'oubli $Sh(X) \rightarrow PreSh(X)$ est pleinement fidèle. Au sens où les morphismes sont les mêmes par définition.*

1.2 Faisceautisation

Il a l'air de l'avoir fait avec l'espace étalé. Bon je peux garder ma déf habituelle.

Définition 1.2.1 (Faisceautisé). Pour un préfaisceau \mathcal{F} sur X on définit $\mathcal{F}^+(U) := \{f_P \in \prod_{P \in \mathcal{F}(U)} \mathcal{F}_P \mid \forall P \exists V_P, t \in \mathcal{F}(V_P) t_P = f_P \forall Q \in V_P t_Q = f_Q\}$

Remarque 3. *En ajoutant les restrictions induites le préfaisceau \mathcal{F}^+ est un faisceau.*

Remarque 4. *Il faut utiliser des sections non locales de \mathcal{F} simplement parce que avoir les mêmes fibres à isomorphisme de permet pas nécessairement de relever de manière cohérente.*

On définit $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ par la diagonale.

Théoreme 1.2.2 (Propriété universelle). *Soit $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de préfaisceaux où \mathcal{G} est un faisceau. Alors le morphisme se factorise en*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}^+ \\ & \searrow & \downarrow \text{---} \\ & & \mathcal{G} \end{array}$$

et la flèche $\mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ est unique.

Faisceaux

Démonstration. L'idée c'est qu'on $\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}^+$ et on a tjr une flèche $\mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$. \square

Remarque 5. *Le foncteur de faisceautisation est exact.*

Remarque 6. *Ce serait bien de refaire les preuves rien qu'une fois!*

Remarque 7 (Traduction en terme d'espace étalé). *En gros l'espace étalé c'est les fonctions de U dans $\bigsqcup_P \mathcal{F}_P$. Autrement dit $\prod_{P \in U} \mathcal{F}_P$. Et on demande de la continuité. En gros y'a une fonction continue force des conditions de recollement.*

1.3 Faisceau localement constant

Soit X un espace topologique et A un "objet abélien". On définit le préfaisceau constant par

$$A_X^{pre}(U) = A$$

pour tout ouvert $U \subset X$. On définit ensuite le faisceau localement constant associé à A par A_X .

Remarque 8. (1) *L'exemple canonique du fait que A_X^{pre} c'est pas un faisceau c'est $A_X(\emptyset) = A$.*

(2) *On peut prendre $U_1 \sqcup U_2$ et regarder la section $(0, p_2)$. Elle lift pas vu que les restrictions sont par déf l'identité.*

Proposition 1.3.1. *On a $A_X(U) = A^{\pi_0(U)}$! Où $\pi_0(U)$ compte les composantes connexes. (Attention faut quand même qu'elles soient ouvertes?!)*

Démonstration. Soit $\mathcal{P} = A_X^{pre}$. On a $\mathcal{P}_P = \varinjlim_{P \in U} P(U) = \varinjlim_{P \in U} A = A$. Ensuite faut écrire $X = \bigsqcup X_i$. Puis montrer que $\mathcal{P}^+(X_i) = A$. Ensuite clairement par propriété universelle du produit on a fini. \square

1.4 Suites exactes de faisceaux

On considère $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux abéliens.

Proposition 1.4.1 (Faisceau noyau). *Le préfaisceau donné par $\ker(\alpha)(U) = \ker(\alpha: \mathcal{F}U \rightarrow \mathcal{G}U)$ est un faisceau.*

Définition 1.4.2 (Faisceau image). On définit le préfaisceau image par $U \mapsto \text{Im}^{pre}(\alpha: \mathcal{F}U \rightarrow \mathcal{G}U)$.

1.5 Images directes et inverses de faisceaux

Remarque 9. En général c'est pas un faisceau donc on déf $\text{Im}(\alpha)$ le faisceau associé.

Remarque 10. À faire! Injection canonique des faisceaux Im et ker .

Définition 1.4.3 (Faisceau quotient). À nouveau on faisceautise le préfaisceau quotient.

Remarque 11. La faisceautisation commute avec les fibres. De sorte que le quotient des fibres est la fibre des quotients.

Définition 1.4.4 (Suite exacte de faisceaux abéliens). Une suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\rho} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

est exacte si on a les conditions habituelles **d'égalités** en tant que faisceaux.

Proposition 1.4.5. Suffit d'avoir des suites exactes sur les fibres avec les flèches induites.

Maintenant on arrive au croustillant. Si on a une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\rho} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

on peut montrer que $0 \rightarrow \mathcal{F}'(X) \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}''(X)$ est exacte. Mais la dernière flèche est pas nécessairement surjective.

Exemple 1.4.6. Soit $X = \mathbb{C}^\times$ et \mathcal{O}_X le faisceau des fonctions holomorphes. Alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow (2i\pi\mathbb{Z})_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow 0$$

où la première flèche est celle donnant les fonctions constantes. La deuxième est la post-composition avec l'exponentielle.

Remarque 12. Dans la suite exacte de faisceaux on a pas besoin de la surjectivité de la dernière flèche.

1.5 Images directes et inverses de faisceaux

Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue. On a

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \mathcal{G} \\ & \uparrow & \downarrow \\ f: X & \longrightarrow & Y \\ & \downarrow & \uparrow \\ & f^*\mathcal{G} & f_*\mathcal{F} \end{array}$$

Faisceaux

Définition 1.5.1 (Image directe).

$$f_*\mathcal{F}: \text{Ouv}(Y)^{op} \rightarrow \text{Ab}$$

$$\text{t.q. } f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}V).$$

Remarque 13. C'est un faisceau si \mathcal{F} est un faisceau, suffit de voir que $f^{-1}V = \cup f^{-1}V_i$ si $V = \cup V_i$.

Définition 1.5.2 (Image inverse).

$$f^p\mathcal{F}: \text{Ouv}(X)^{op} \rightarrow \text{Ab}$$

$$\text{t.q. } f^p\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{f(U) \subset V} \mathcal{G}(V). \text{ On déf ensuite } f^* = (f^p)^+ \text{ le faisceau associé.}$$

Exemple 1.5.3 (Contre exemple pour f^p est un faisceau). Si on pullback un faisceau constant sur le singleton $\{*\}$ on obtient un préfaisceau constant!

Exercices 1.5.4. Revoir l'adjonction entre $(-)^*$ et $(-)_*$ et revoir le fait que c'est des foncteurs.

Note 1. Revoir comment obtenir les flèches de stalks.

Proposition 1.5.5. Pour tout $x \in X$,

$$(f^*\mathcal{G})_x \simeq \mathcal{G}_{f(x)}$$

Démonstration. Soit $x \in X$,

$$\begin{aligned} (f^*\mathcal{G})_x &\simeq (f^p\mathcal{G})_x \\ &\simeq \varinjlim_{x \in U \subset X} (f^p\mathcal{G})(U) \\ &\simeq \varinjlim_{x \in U \subset X} \varinjlim_{f(U) \subset V \subset Y} \mathcal{G}(V) \\ &\simeq \varinjlim_{f(x) \in V \subset Y} \mathcal{G}(V) \\ &\simeq \mathcal{G}_{f(x)} \end{aligned}$$

□

Remarque 14. Rappel : On peut regarder explicitement les limites et colimites on est dans Ab . Via des quotients!

1.5 Images directes et inverses de faisceaux

Remarque 15. On peut voir un faisceau $f^*\mathcal{G}$ sur X comme un espace étalé sur X . On considère $\tilde{\mathcal{G}}$ l'espace étalé

$$\tilde{\mathcal{G}} \rightarrow Y$$

on peut regarder le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y \tilde{\mathcal{G}} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{G}} \\ \text{Homéo local} \downarrow & & \downarrow \text{Homéo local} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Alors $f^*\tilde{\mathcal{G}} \simeq X \times_Y \tilde{\mathcal{G}}$ au dessus de X .

Corollaire 1.5.6. $f^*: Sh_{Ab}(Y) \rightarrow Sh_{Ab}(X)$ est exact.

Démonstration. Étant donné $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ une suite exacte. On peut regarder directement sur les stalks et c'est clair. \square

Remarque 16. Étant donné $X = \{*\}$, un faisceau \mathcal{F} sur X est de la forme A_X un faisceau constant. On a alors une équivalence de catégorie

$$Sh_{Ab}(X) \simeq Ab$$

et même un isomorphisme. On a un pont pour envoyer des objets abéliens dans des faisceaux.

Corollaire 1.5.7. Soit X un e.t, $x \in X$ et \mathcal{F} un faisceau abélien sur X . On note $\iota_x: \{x\} \rightarrow X$, alors $\iota_x^*\mathcal{F}$ est le faisceau constant associé à \mathcal{F}_x sur $\{x\}$.

Exercices 1.5.8 (Faisceau gratte-ciel). Sur un e.t X et $x \in X$, $A \in Ab$. On définit

$$A_{\bar{x}}(U) = \begin{cases} A & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que c'est un faisceau avec les restrictions évidentes.

Montrer que

$$(A_{\bar{x}})_y = \begin{cases} A & \text{si } y \in \{\bar{x}\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $A_{\{\bar{x}\}}$ le faisceau constant sur $\{\bar{x}\}$. Montrer que $\iota_* A_{\{\bar{x}\}} \simeq A_{\bar{x}}$.
D'après Fabrice le faisceau gratte ciel est une co-unité.

Faisceaux

Définition 1.5.9. On regarde $f_P: PSh_{Ab}(X) \rightarrow PSh_{Ab}(Y)$ qui à \mathcal{F} associe $(V \mapsto \mathcal{F}f^{-1}V)$.

Remarque 17. On a un carré commutatif de catégories (foncteurs diagonaux isomorphes)

$$\begin{array}{ccc} Sh_{Ab}(X) & \xrightarrow{\iota_X} & PSh_{Ab}(X) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_P \\ Sh_{Ab}(Y) & \xrightarrow{\iota_Y} & PSh_{Ab}(Y) \end{array}$$

Proposition 1.5.10. On a une adjonction $f^P: PSh(Y) \leftrightarrow PSh(X): f_P$.

Démonstration. On doit donner un isomorphisme (d'ensembles)

$$\text{Hom}_{PSh(X)}(f^P\mathcal{G}; \mathcal{F}) \simeq \text{Hom}_{PSh(Y)}(\mathcal{G}; f_P\mathcal{F})$$

fonctoriel en $\mathcal{F} \in PSh(X)$ et $\mathcal{G} \in PSh(Y)$ (l'adjoint à gauche est à gauche). Étant donné $\alpha: \mathcal{G} \rightarrow f_P\mathcal{F}$, on a pour tout V

$$\alpha(V): \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}f^{-1}V$$

et pour tout U tel que $f(U) \subset V$ on a une flèche

$$\mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

et on cherche $f^P\mathcal{G}U \rightarrow \mathcal{F}U$. Suffit de prendre la limite du diagramme du haut pour l'obtenir, on peut car $U \subset f^{-1}V$.

À l'inverse si on a $\beta: f^P\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ et qu'on veut des $\mathcal{G}V \rightarrow \mathcal{F}f^{-1}V$, on pose $U = f^{-1}V$, on a

$$\varinjlim_{f(f^{-1}V) \subset W} \mathcal{G}W \rightarrow \mathcal{F}f^{-1}V$$

puis comme $f(f^{-1}V) \subset V$ on a

$$\mathcal{G}V \rightarrow \varinjlim_{f(f^{-1}V) \subset W} \mathcal{G}W$$

d'où $\mathcal{G}V \rightarrow \mathcal{F}f^{-1}V$. □

Par la remarque plus haut et celle juste en dessous on obtient la même adjonction sur les faisceaux.

1.5 Images directes et inverses de faisceaux

Remarque 18. *La faisceautisation est adjointe à l'inclusion! (c'est la propriété universelle directement)*

Proposition 1.5.11. *On a une adjonction $f^*: Sh(Y) \leftrightarrow Sh(X): f_*$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \mathrm{Hom}_{Sh(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) &= \mathrm{Hom}_{Sh(X)}((f^p\mathcal{G})^+, \mathcal{F}) \\
 &= \mathrm{Hom}_{PSh(X)}(f^p\mathcal{G}, \iota_X \mathcal{F} (= \mathcal{F})) \\
 &= \mathrm{Hom}_{PSh(Y)}(\mathcal{G}, f_P \mathcal{F}) \\
 &= \mathrm{Hom}_{Sh(Y)}(\mathcal{G}, f_* \mathcal{F})
 \end{aligned}$$

□

Proposition 1.5.12. *Soit $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$. Alors on a des isomorphismes canoniques $(g \circ f)_* \simeq g_* \circ f_*$ et $(g \circ f)^* \simeq f^* \circ g^*$.*

$$\begin{array}{ccc}
 Sh_{Ab}(X) & \xleftarrow{f^*} & Sh_{Ab}(Y) \\
 & \xrightarrow{f_*} & \\
 & \searrow (g \circ f)_* & \downarrow g_* \quad \downarrow g^* \\
 & \swarrow (g \circ f)^* & Sh_{Ab}(Z)
 \end{array}$$

Démonstration. Pour $(-)_*$ c'est clair via $(g \circ f)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$. Ensuite on peut faire $(-)^*$ via l'adjonction mdr. L'adjoint à gauche de $g_* \circ f_*$ est $f^* \circ g^*$ puis unicité. □

Chapitre 2

Catégories abéliennes

Définition 2.0.1 (Catégorie préadditive). Une catégorie préadditive est une catégorie \mathcal{C} telle que les Hom soient dans Ab et

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

est \mathbb{Z} -bilinéaire.

Remarque 19. La catégorie opposée est aussi une catégorie préadditive.

Définition 2.0.2. Un objet T est terminal si y'a un unique morphisme de tout objet vers lui. (Oui ça marche)

Définition 2.0.3 ((co)-Produit). Le (co)-produit est la (co)-limite du diagramme

$$A \qquad B$$

Remarque 20. Le produit vide est **terminal**! Parce que la propriété universelle est vide, donc y'a tjr une flèche vers lui si il existe... À l'inverse, le coproduit vide est **initial**... En plus l'idée que y'a vraiment que **le** singleton dans Set ça donne encore plus envie des faire des topos. Dans Set , les objets semblent vraiment canoniques en tant qu'ensemble..

Lemme 2.0.4. Dans une catégorie préadditive, on a les coproduits finis ssi on a les produits finis, en fait ils sont isomorphes à unique isomorphisme (implique canoniquement égaux ?).

Démonstration. Il suffit de le montrer dans un sens, ensuite ce sera vrai dans la catégorie opposée! Suffit de construire les coproduits à deux objets étant donnés les produits. On a un objet terminal via le produit vide (c'est de la triche mdr). On a $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, A) \in \text{Ab}$. On regarde $O_{T,A}: T \rightarrow A$ l'élément

neutre, on remarque que si $f: T \rightarrow A$ est une flèche, alors $f \circ Id_T = f \circ O_{T,T} = O_{T,A}$. De sorte que T est initial aussi. On remarque que

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \swarrow Id & \downarrow i_A & \searrow O_{A,B} \\ A & \longleftarrow A \times B \longrightarrow & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & B & \\ \swarrow O_{B,A} & \downarrow i_B & \searrow Id \\ A & \longleftarrow A \times B \longrightarrow & B \end{array}$$

où $i_A = id \times O$ pareil pour i_B . Si on a

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \swarrow f & & \nwarrow g \\ A & & B \end{array}$$

on peut regarder $h := (f \circ p_A) + (g \circ p_B)$ de $A \times B \rightarrow X$. Ensuite faut vérifier que

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \swarrow f & \uparrow h & \nwarrow g \\ A \xrightarrow{i_A} A \times B \xleftarrow{i_B} B \end{array}$$

commute, c'est clair. Pour l'unicité, on remarque que $id_{A \times B} = i_A \circ p_A + i_B \circ p_B$. En particulier, les projecteurs permettent de se ramener à l'égalité terme à terme. Si on a une autre flèche $h': A \times B \rightarrow X$, on peut remarquer que $h' \circ id = (h' \circ i_A) \circ p_A + (h' \circ i_B) \circ p_B = f \circ p_A + g \circ p_B$. \square

Remarque 21 (Codiagonale). *Dans une catégorie quelconque, on a des flèches*

$$B \sqcup B \rightarrow B$$

et

$$B \rightarrow B \times B$$

les diagonales et codiagonales. Dans une catégorie préadditive, les deux sont isomorphes, on obtient $\delta_B: B \times B \rightarrow B$ la **codiagonale** via

$$\begin{array}{ccccc} & B & & & \\ & \downarrow i_1 & \searrow id & & \\ B \times B & \xleftarrow[\sim]{\delta_B} & B \sqcup B & \xrightarrow[\delta_B]{\sim} & B \\ & \uparrow i_2 & \swarrow id & & \\ & B & & & \end{array}$$

2.1 Catégories additives

Définition 2.1.1. Une catégorie additive est une catégorie préadditive qui a tout les produits finis.

Lemme 2.1.2. Dans une catégorie additive, soit

$$A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{smallmatrix} B$$

alors $f + g = \delta_B \circ (f, g)$ où $(f, g): A \rightarrow B \times B$.

Démonstration. On considère

$$B \times B \begin{smallmatrix} \xrightarrow{p_1} \\ \xrightarrow{p_2} \end{smallmatrix} B$$

et

$$B \begin{smallmatrix} \xrightarrow{i_1} \\ \xrightarrow{i_2} \end{smallmatrix} B \sqcup B \xrightarrow{\sim} B \times B \begin{smallmatrix} \xrightarrow{p_1} \\ \xrightarrow{p_2} \end{smallmatrix} B$$

on peut se rappeler que $id_{B \times B} = i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2$. Faut juste réécrire tout maintenant. \square

Remarque 22. Une meilleure définition maintenant, \mathcal{C} est additive si elle a un objet zéro $O_{\mathcal{C}} (= \text{final et terminal})$, les produits et coproduits finis et tels que

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \downarrow & \searrow^{(O_{A,B}, id_A)} & \\ A \sqcup B & \xrightarrow{\exists!} & A \times B \\ \uparrow & \nearrow_{(O_{B,A}, id_B)} & \\ B & & \end{array}$$

est un isomorphisme, où cette fois $O_{A,B} = A \rightarrow O_{\mathcal{C}} \rightarrow B$. Alors $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ est un monoïde commutatif et l'addition est définie par $f + g := \delta_B(f, g)!$

Définition 2.1.3 (Catégorie additive (bis)). Une catégorie additive est une catégorie \mathcal{C} qui a

- Un objet zéro $O_{\mathcal{C}}$.
- Produits et coproduits finis.
- $\alpha_{A,B}: A \sqcup B \simeq A \times B$.
- Le monoïde commutatif $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ est un groupe abélien.

Remarque 23. Il dit dans le premier cas que on fait comme si la catégorie avait de la structure en plus alors qu'en fait c'est plutôt que la structure de groupe est déterminée par la catégorie.

2.2 Catégories abéliennes

Définition 2.2.1 (Égalisateur/Equalizer). C'est un monomorphisme qui est la limite de

$$E \longrightarrow A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

Dans le cas du noyau on peut écrire que pour tout X

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ \exists! \downarrow j & \searrow i & & \searrow 0 & \\ \ker f & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

il existe j qui fait tout commuter. C'est la propriété universelle du noyau.

Note 2. Le fait que $\ker f \rightarrow A$ soit un monomorphisme est une conséquence. C'est assez clair.

Remarque 24. On peut réécrire le noyau comme $A \times_B O_C$ (pullback) et le conoyau $B \sqcup_A O_C$ (pushout). Y s'agit just de dire que la limite de

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{0} \end{array} B$$

C'est la limite de

$$\begin{array}{ccc} & O_C & \\ & \downarrow & \\ A & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

Définition 2.2.2 ((co)Image). On déf l'image de $f: A \rightarrow B$ comme $\ker(B \rightarrow \text{Coker}(f))$. La coimage par $\text{Coim}(f) = \text{Coker}(\ker(f) \rightarrow A)$.

On a des flèches canoniques, $\text{im}(f) \rightarrow B$ et $A \rightarrow \text{coim}(f)$.

Ducoup il rappelle c'est quoi un mono/epi. Brièvement, ça dit que si on a $f: X \rightarrow Y$ un monomorphisme, alors pour tout Z ,

$$\text{Hom}(Z, X) \rightarrow \text{Hom}(Z, Y)$$

est injective. Concrètement si on a $f \circ h = f \circ g$ alors $h = g$ dans

$$Z \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} X \xrightarrow{f} Y$$

À l'inverse dans le diagramme du dessous si $g \circ f = h \circ f$ alors $h = g$ (f atteint toute l'image).

$$X \xrightarrow{f} Y \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} Z$$

et ça se réécrit $\text{Hom}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$ est surjective.

Remarque 25. Le (co)noyau est un (epi)monomorphisme. Pour le noyau, la flèche $X \rightarrow \ker(f)$ est unique, mais on en a deux via $\iota \circ g = \iota \circ h$ pour $\iota: \ker(f) \rightarrow A$ d'où $h = g$.

Remarque 26. Dans Ab on a $\text{coim}(f) = A/\ker(f) \simeq \text{im}(f)$ le théorème d'isomorphisme!

Exercices 2.2.3. Est-ce qu'on a un théorème d'isomorphisme dans une catégorie avec un objet zéro, les noyaux et conoyaux?

(1)

Prouver que y'a une flèche canonique $\bar{f}: \text{coim}(f) \rightarrow \text{im}(f)$ tel que

$$\begin{array}{ccccccc} \ker(f) & \xhookrightarrow{i} & A & \xrightarrow{f} & B & \twoheadrightarrow{p} & \text{Coker}(f) \\ & & \downarrow & & \uparrow & & \\ & & \text{coim}(f) & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{im}(f) & & \end{array}$$

commute.

2)

Montrer que $f = 0$ est équivalent à ce que $i = \text{id}_A$ et $p = \text{id}_B$.

3)

Si $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ alors $g = \text{Id}_A$ implique que $(\ker(g) \rightarrow A) = (0 \rightarrow A)$ et $A \rightarrow \text{Coker}(g) = A \rightarrow 0$.

Lemme 2.2.4. Soit \mathcal{C} une catégorie avec un objet zéro, les noyaux et conoyaux. Alors pour tout $f: A \rightarrow B$, $\ker(f) = (\ker(A \rightarrow \text{coim}(f)))$ et $\text{coker}(f) = \text{coker}(\text{im}(f) \rightarrow B)$.

Démonstration. Par dualité entre \mathcal{C} et \mathcal{C}^{op} il suffit de prouver la première assertion. On rappelle que $\text{coim}(f) = \text{coker}(\ker(f) \rightarrow A)$ en particulier

$$\ker(f) \rightarrow A \rightarrow \text{coim}(f)$$

est la flèche nulle. On doit juste montrer que cette \ker est universelle pour cette propriété. Soit $(\alpha: X \rightarrow A) \rightarrow \text{coim}(f)$ qui vaut 0. On utilise maintenant $X \rightarrow A \rightarrow \text{coim}(f) \rightarrow \text{im}(f) \rightarrow B$ qui vaut 0. \square

Définition 2.2.5. Une catégorie abélienne est une catégorie additive

- qui a tout les noyaux et conoyaux.
- telle que tout $f: A \rightarrow B$ vérifie

$$\bar{f}: \text{coim}(f) \rightarrow \text{im}(f)$$

est un isomorphisme.

Remarque 27. Une catégorie abélienne se comporte grosso modo comme Ab . Dans Rotman y'avais un méta théorème qui disait qu'on peut toujours se plonger dans une sous-catégorie pleine de modules.

Exemple 2.2.6. Un contre exemple pour le deuxième axiome dans une catégorie additive avec les noyaux. On peut regarder $Ab(Top^H)$ les groupes abéliens topologiques. Dans ce cas, si on a $f: A \rightarrow B$ alors $\text{coker}(f) = B/\overline{\text{im}(f)}$, on doit prendre la clôture. Si on regarde $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, on a $\text{ker}(\subset) = 0$ et $\text{coker}(\subset) = \mathbb{R}/\overline{\mathbb{Q}} = 0$. Si, $Ab(Top^H)$ était abélienne, on aurait que \subset est un isomorphisme.

Proposition 2.2.7. Soit $(f: A \rightarrow)(g: B \rightarrow)C$ dans une catégorie abélienne tels que $g \circ f = 0$. Alors il existe une flèche canonique,

$$\text{im}(f) \rightarrow \text{ker}(g)$$

Démonstration. Faire. (dans le carnet je l'ai fais dcp)

□

Définition 2.2.8 (Suite/Complexe). Une suite dans \mathcal{C} est une suite de morphismes

$$\dots \longrightarrow A^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} A^0 \xrightarrow{d^0} A^1 \xrightarrow{d^1} \dots \longrightarrow A^n \xrightarrow{d^n} A^{n+1} \longrightarrow \dots$$

C'est un complexe si $d^{n+1} \circ d^n = 0$ pour tout n .

Un complexe est acyclique (exact) si $\text{im}(d^n) \rightarrow \text{ker}(d^{n+1})$ est un isomorphisme pour tout n .

Exercices 2.2.9. Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne et $f: A \rightarrow B$ dans \mathcal{C} . TFAE :

- f est un mono.
- $\text{ker}(f) = (0_{\mathcal{C}} \rightarrow A)$.
- $0_{\mathcal{C}} \rightarrow A \rightarrow B$ est acyclique.

Exercices 2.2.10. Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne et $f: A \rightarrow B$ dans \mathcal{C} . TFAE : Pareil mais pour épi.

Exercices 2.2.11. Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne et $f: A \rightarrow B$ dans \mathcal{C} . Prouver que f est un monomorphisme ssi f est la flèche $\text{coim}(f) \rightarrow B$ naturellement. Pareil pour épi équivaut à $A \rightarrow \text{im}(f)$. Puis isom équivaut à mono plus épi.

Note 3. S'entraîner à vite écrire des preuves.

Lemme 2.2.12. Soit

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

une suite dans \mathcal{C} une catégorie abélienne. TFAE

- La suite est exacte dans \mathcal{C} .
- La suite opposée est exacte dans \mathcal{C}^{op} .
- $\text{Coker}(f) = \text{Coim}(g)$.

Remarque 28. On a $\ker(f) = \ker(A \rightarrow \text{coim}(f))$ et $\text{coker}(f) = \text{coker}(\text{im}(f) \rightarrow B)$.

Démonstration. Pour $1) \implies 3)$, sachant $\text{im}(f) = \ker(g)$ on prends les cokernels $\text{coker}(\text{im}(f)) \simeq \text{coker}(\ker(g))$. Par la remarque $\text{coker}(f) \simeq \text{coim}(g)$. En plus en regardant (3) dans la catégorie opposée on a immédiatement (2). Reste à montrer $3) \implies 1)$. On a $\text{coker}(\text{im}(f)) = \text{coker}(f) = \text{coim}(g) = \text{coker}(\ker(g))$ canoniquement. Maintenant on prends les noyaux, on obtient $\text{im}(\text{im}(f)) = \ker(\text{coker}(\text{im}(f))) = \ker(\text{coker}(\ker(g))) = \text{im}(\ker(g))$. Mais im et \ker sont des monos, de sorte que $\text{im}(\ker) = \ker$ et $\text{im}(\text{im}) = \text{im}$. \square

Lemme 2.2.13. Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne,

1. La suite $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ est exacte ssi $f: (A \rightarrow B) \simeq \ker(g: B \rightarrow C)$.
2. La suite $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ est exacte ssi $(B \rightarrow C) \simeq \text{coker}(A \rightarrow B)$.

Démonstration. Pour 1. on sait que f est un monomorphisme d'où $f \simeq \text{im}(f)$, à l'inverse si $f \simeq \text{im}(f)$ alors f est un mono (c'est un kernel). On obtient que $f \simeq \ker(g)$. \square

Lemme 2.2.14. Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne.

1. Une suite

$$(*) : 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$$

est exacte dans \mathcal{C} ssi la suite

$$(**) : 0 \rightarrow \text{Hom}(M, A) \rightarrow \text{Hom}(M, B) \rightarrow \text{Hom}(M, C)$$

est exacte dans Ab avec les pullbacks.

2. Une suite

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

est exacte dans \mathcal{C} ssi la suite

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, M) \rightarrow \text{Hom}(B, M) \rightarrow \text{Hom}(A, M)$$

Dans le 2. on a inversé $C, M \dots$

Démonstration. On a directement $1. \Leftrightarrow 2.$ (Les Hom restent dans Ab même en passant à \mathcal{C}^{op}). On prouve 1., on a $(i : A \rightarrow B) \simeq \ker(f)$ qui se traduit par

$$\begin{cases} f \circ i = 0 \\ \forall \alpha : M \rightarrow B \text{ tq } f \circ \alpha = 0, \text{ il existe un unique } \tilde{\alpha} : M \rightarrow A, i \circ \tilde{\alpha} = \alpha \end{cases}$$

en gros on traduit la propriété universelle dans Ab . On suppose que $(*)$ est exacte, alors dans

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, A) & \xrightarrow{i_*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, B) & \xrightarrow{f_*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, C) \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & (f \circ i)_* & & \end{array}$$

$$(p : M \rightarrow A) \longmapsto f \circ i \circ p$$

on a $f \circ i = 0$, d'où $(f \circ i)_*(p) = 0$ pour tout $p : M \rightarrow A$. Puis $\text{im}(i_*) \subset \ker(f_*)$. À l'inverse si $\alpha \in \ker(f_*)$, on regarde la propriété universelle et on obtient $i_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$ d'où l'exactitude au milieu. L'exactitude à gauche c'est juste que i est un mono.

Pour l'autre implication on prends $M = A$ on obtient $i_*(id_A) = i$ et $f \circ i = f_*(i)$. D'où $f \circ i = 0$. En plus toute flèche $\alpha : M \rightarrow B$ t.q $f_*(\alpha) = 0$ vérifie $\alpha = i_*(\tilde{\alpha})$ via l'exactitude au milieu, l'unicité est claire. Par la propriété universelle du noyau $(*)$ est exacte. \square

Corollaire 2.2.15 (Lemme des cinq). *Dans une catégorie abélienne \mathcal{C} si on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_A & & \downarrow f_B & & \downarrow f_C & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{p'} & C' & \xrightarrow{0} & 0 \end{array}$$

tel que f_A et f_C sont des isomorphismes, alors f_B est un isomorphisme.

Démonstration. Pour l'injectivité de $(f_B)_*$ on utilise 1. et c'est du diagramme chasing dans

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, A) & \xrightarrow{i_*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, B) & \xrightarrow{f_*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, C) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, A) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, B') & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, C') \end{array}$$

et ça montre que f_B est un mono. Pour la surjectivité on regarde la preuve dans la catégorie opposée ? (ça inverse les $(f_B)_*$? Oui ça a l'air faut oublier les 0). \square

Définition 2.2.16. Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, une suite exacte courte, on dit qu'elle split si il existe une section $C \rightarrow B$ qui fait commuter.

Proposition 2.2.17. *Le splitting par s équivaut à $f: A \oplus C \simeq B$ fait commuter le diagramme du dessus avec les flèches canoniques, i.e. $s = f \circ i_C$ et les deux équivalent à il existe un rétract $r: B \rightarrow A$.*

Démonstration. Si on a un splitting, on regarde le carré

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xleftarrow{s} \xrightarrow{r} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \uparrow f & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus C & \xrightarrow{p_C} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \nwarrow i_C & & \nearrow & & \end{array}$$

où f est la flèche de la propriété universelle. On veut montrer que f est un isomorphisme. On montre que le carré commute puis on applique le lemme du dessus. On a $f \circ i_A = i$ et $f \circ i_C = s$. En particulier le carré à gauche commute. Reste à prouver que $p \circ f = p_C$. Clair. Le 2. implique 1. est quasi immédiat. \square

Exercices 2.2.18. Faire 2. équivalent à 3.. En gros on peut le regarder dans \mathcal{C}^{op} .

2.2 Catégories abéliennes

Bibliographie

- [Mum70] D. MUMFORD. *Abelian Varieties*. Biblioteka Sbornika "Matematika". Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970. ISBN : 9780195605280.