Géométrie algébrique

Table des matières

Introduction

On est censés prouver Riemann-Roch.

Chapitre 1

Variétés algébriques

1.1 Nullstellensatz

Pas oublier de rechopper mon carnet. Y'a les preuves complètes.

Théoreme 1.1.1. *Y'a une correspondance entre points fermés de* $\mathbb{A}^n(k)$ *et idéaux maximaux dans* $Spm(k[T_1, \ldots, T_n])$.

Corollaire 1.1.2. *Si* A *est une* k*-algèbre de t.f. et* $\mathfrak{m}$ *un idéal maximal alors* $A/\mathfrak{m}$ *est une extension finie de* k.

Lemme 1.1.3. *Si* A *est une* k*-algèbre de t.f. alors* $\sqrt{I} = \cap_{\mathfrak{m} \in Spm(A), I \subset \mathfrak{m}} \mathfrak{m}$

Lemme 1.1.4. *Si* k *est algébriquement clos, c'est un homéomorphisme (entre* $\mathbb{A}^n(k)$ *et* $Spm(k[T_1, \ldots, T_n])$*).*

Démonstration. On prends le morphisme quotient, c'est l'évaluation et le noyau est de la forme $(T_i - t_i)_i$. □

Théoreme 1.1.5 (Nullstellensatz)**.** *Si* $k = \bar{k}$ *alors* $I(Z(J)) = \sqrt{J}$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} I(Z(J)) &= I(\bigcup_{x \in Z(J)} x) \\ &= \bigcap_{x \in Z(J)} I(\{x\}) \\ &= \bigcap_{x \in Z(J)} \mathfrak{m}_x \\ &= \bigcap_{\mathfrak{m} \in Spm(A), J \subset M} \mathfrak{m} \end{aligned}$$

et la dernière est $\sqrt{J}$ par le lemme. (omg, revoir la preuve dans Atiyaah) □

Remarque 1 (!)**.** *L'endroit où on utilise le weak nullstellensatz on a besoin de k algébriquement clos. La dernière qui vient du lemme y'a pas besoin. Autrement dit, on peut utiliser Spm pour faire de la géométrie algébrique sur un corps non algébriquement clos.*

Définition 1.1.6. $A(Z) = k[T_1, \ldots, T_n]/I(Z)$

Pour $f \in A(z)$ et $\tilde{f}$ t.q $p(\tilde{f}) = f$ pour $p\colon k[T_1, \ldots, T_n] \to A(Z)$. Pour $z \in k^n$ on peut toujours déf $f(z) := \tilde{f}(z)$. En particulier, on peut déf

Définition 1.1.7. $D(f) = \{s \in Z : f(z) \neq 0\} = D(\tilde{f}) \cap Z$. Avec $D(\tilde{f}) = \mathbb{A}^n(k) - Z(\tilde{f})$.

Remarque 2. *Comme d'hab juste il définit pour des fonctions a priori par déf sur $\mathbb{A}^n(k)$.*

Remarque 3 (C'est super chiant)**.** *Faut faire gaffe ducoup en fonction de la fonction que j'utilise ou de son lift pour les inclusions.*

Corollaire 1.1.8. *Si $f, g \in A(Z)$ et $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$. On a*

- *Pour $J_1, J_2 \leq A(Z)$: $Z(J_1) \subset Z(J_2) \leftrightarrow J_2 \subset \sqrt{J}_1$.*
- *$D(f) \subset D(g) \leftrightarrow \exists h \in \mathbb{A}(Z)$ t.q. $f^n = gh$.*
- *Les ouverts principaux forment une base de la topologie.*

Démonstration. Pour le premier point si $Z(J_1) \subset Z(J_2)$ alors faut lift dans $k[T_1, \ldots, T_n]$ avant d'appliquer le nullstellensatz. Pour le deuxième, c'est clair. Pour le troisième, sur $\mathbb{A}^n(k)$ on prend $f \in I(Z)$,où $U = \mathbb{A}^n(k) - Z$, t.q $f(x) \neq 0$ (possible car $x \notin Z$. □

Proposition 1.1.9. *Soit Z un ensemble algébrique affine. Alors Z est irréductible ssi $I(Z)$ est premier. Si $k = \bar{k}$, $I \leq K[T_1, \ldots, T_n]$ alors $Z(J)$ est irréductible ssi $\sqrt{J}$ est premier.*

Démonstration. Avec les nouvelles notations c'est direct, avec les anciennes si $Z(J)$ est irreductible $Z(f) \cup Z(g) = Z(J)$ implique $Z(J) \subset Z(f)$ ou $Z(J) \subset Z(g)$. □

Lemme 1.1.10. *Soit A un anneau noetherien, alors les idéaux radicaux sont des intersections finies d'idéaux premiers.*

Démonstration. On regarde l'ensemble des idéaux qui sont pas des intersections d'idéaux premiers. Comme A est noethérien y'a un élement maximal I qui n'est pas premier. Soit $a, b \in A - I$ t.q. $ab \in I$. On considère $I_a\sqrt{I + aA}$ et $I_b = \sqrt{I + bA}$. Ils sont plus gros que I donc intersections d'idéaux premiers. En particulier on prouve facilement que $I = I_a \cap I_b$ (I est radical). □

Proposition 1.1.11. *Si $k = \bar{k}$, on a une décomposition unique des ensembles algébriques en variétés irréductibles non contenues les unes dans les autres.*

Démonstration. $I(Z) = \bigcap_{i=1}^{m} \mathfrak{b}_i$. On retire les $\mathfrak{b}_i$ contenus dans les autres. □

1.2 Espace projectif

On considère $k[T_0, \ldots, T_n] = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$.

Lemme 1.2.1. *Sur les corps infinis, $f \in S_d$ ssi $\lambda^d f(x_i, i) = f(\lambda x_i, i)$.*

Définition 1.2.2. Un idéal est homogène ssi dès que $f = f_1 + \ldots + f_n \in I$ alors $f_i \in I$. C'est équivalent à être généré par des éléments homogènes, i.e. $I = \bigoplus S_d \cap I$.

Remarque 4. *Comme en géo diff regarder ce qu'il se passe quand on regarde des polynômes homogènes dans $\mathbb{A}^{n+1}$ et qu'on les pousse (homéo?).*

Définition 1.2.3. Pour I un idéal homogène de $k[T_0, \ldots, T_n]$, on définit $Z_+(I) = \{P \in \mathscr{P}^n(k) : f(P) = 0 \ \forall f \in I \text{ f homogène}\}$ où autrement on lift P et on prends f quelconque. Si k est infini et $Z \subset \mathscr{P}^n(k)$, on définit $I_+(Z) = I(\pi^{-1}(Z))$.

Théoreme 1.2.4 (Nullsellensatz projectif)**.** *On suppose $k = \bar{k}$ et J homogène. On a*

- *$Z_+(J) = \emptyset$ ssi $(T_0, \ldots, T_n) \subset J$.*
- *Si $Z_+(J) \neq \emptyset$ alors $I_+(J_+(J)) = \sqrt{J}$.*

Démonstration. Si $Z_+(J) = \emptyset$ on lift à $\mathbb{A}^{n+1} - 0$ pour voir que $Z(J) \subset \{0\} = (T_0, \ldots, T_n)$. Sinon $I_+(Z_+(J)) = I(\pi^{-1}(Z_+(J))) = I(\pi^{-1}(Z_+(J)) \cup \{0\}) = \sqrt{J}$. □