Notes de (co)-Homologie (des faisceaux)

2024-2025

Table des matières

Chapitre 1

Point sur le cours 09/10/2024, catégories abéliennes

1.1 Catégories abéliennes

On rajoute tout les égalisateurs et coégalisateurs.

1.2 Catégories additives

La section du dessous motive la définition comme, catégories avec objet zéro, produits et coproduits. Je sais pas si on suppose que le hom est un groupe ducoup mais c'est un monoide abélien.

1.3 Catégories préadditives

D'abord y'a les catégories préadditives, concrètement c'est juste que les Hom sont des monoides abéliens. Mais on peut voir en fait que c'est une conséquence de l'existence de morphismes nuls. Où simplement d'objet zéro. On montre que le produit est un coproduit :

$$\begin{tikzcd}
& A & \\
A \arrow[ur, "id"] \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "O_{A,B}"'] & A \times B \arrow[u] \arrow[d] & B \arrow[ul, "O_{B,A}"'] \arrow[l, "i_2"] \arrow[dl, "id"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

puis si

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_1"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
& A \times B \arrow[r, dashed, "h"] & X \\
B \arrow[ur, "i_2"] \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

Alors avec $id = i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2$ on obtient directement que $h = f \circ p_1 + g \circ p_2$. Maintenant la codiagonale $\delta_A \colon A \times A \to A$ peut être décrite via simplement

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d] \arrow[dr, "id"] & \\
A \times A \arrow[r] & A \\
A \arrow[u] \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd}$$

i.e. $\delta_A = id \circ p_1 + id \circ p_2$. Mais le point important c'est que on peut réecrire $f + g$ comme $\delta_B \circ (f, g)$:

$$\begin{tikzcd}
& B & \\
A \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[dr, "f"'] & B \times B \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "\delta_B"] & B \\
& B &
\end{tikzcd}$$

et donc

- la structure de monoide commutatif vient de l'existence de l'objet zéro.