Notes perso : Géométrie algébrique

Table des matières

. . .

Chapitre 1

Les définitions

1.1 Définition topologique

Concrètement pour $X = \cup_{i=1}^{n} X_i$ une variété algébrique décomposée en composantes irréductibles :

$$\dim(X) = \max(\dim(X_i)) = \sup_{U \subset X \ ouvert} \dim(U)$$

et pour une variété irréductible c'est le sup des longueurs de chaines

$$Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Y_d = X$$

1.2 Définition par les corps de fonctions

Ducoup dans le cas intègre, les restrictions du faisceau sont injectives et le faisceau est approximable par les ouverts principaux affines ! En particulier

$$k(X) \simeq k(U)$$

et

$$k(X) \simeq Frac(\mathcal{O}_X(U_0))$$

pour un affine ouvert $U_0 \subset X$ quelconque. On peut montrer que

$$dim(X) = degtr_k k(X)$$

et c'est bien défini :

1. Si on prends deux familles algébriquement indépendantes et K algébriques sur les deux, on peut montrer qu'elles ont la même cardinalité.

2. On peut se réduire au cas affine.
3. On conclut par l'injection de Noether dans $A(X)$ qui fixe la dimension en passant au corps de fractions!

1.3 À rajouter : codimension, voir notes sur la partiel

1.4 Et donc ?

Bon tout ça montre qu'on peut tjr se ramener au cas affine, ouvert qui nous arrange. Lesquels ? (je pense à l'exemple des équations locales qui utilise des ouverts particuliers)

Chapitre 2

Équations

2.1 Hypersurfaces

2.1.1 Cas affine

Essentiellement, y'a cette suite d'arguments :

1. La dimension est invariante par extension d'anneaux entiers. (Y'a pas mal d'algèbre là dedans, j'en parlerai ailleurs)

2. Par Noether si $F \in k[T_1, \ldots, T_n] - k$ alors

$$\dim k[T_1, \ldots, T_n]/(F) = \dim k[T_1, \ldots, T_{n-1}]$$

3. Ensuite $\dim k[T_1, \ldots, T_n] = n$ par récurrence et l'argument d'avant (faut faire un tout petit peu attention).

4. Automatiquement, si $F \in k[T_1, \ldots, T_n]$ alors $\dim(Z(F)) = n - 1$.

2.1.2 Cas intègre

Ça c'était le cas affine, maintenant le cas intègre : Étant donné $f \in \mathcal{O}_X(X)$ on a

$$\dim(Z(f)) = \dim(X) - 1$$

La preuve consiste à dire

1. $\dim(U) = \dim(X)$ en utilisant $k(U) \simeq k(X)$ d'où on se ramène au cas affine.

2. On à une injection entière finie

$$k[T_1, \dots, T_n]/fA \cap k[T_1, \dots, T_n] \hookrightarrow A(X)/fA(X)$$

où $fA \cap k[T_1, \dots, T_n]$ c'est juste en identifiant avec l'image.

3. Puis on a

$$fA \cap k[T_1, \dots, T_n] \subset \sqrt{N_{k(X)/k(\mathbb{A}^n)}(f)} \subset \sqrt{fA \cap k[T_1, \dots, T_n]}$$

et on conclut par Noether.

Remarque 1. *Les anneaux de polynômes sont factoriels donc intégralement clos. D'où la norme fonctionne bien là.*

Remarque 2. *Je sais vraiment pas si on est obligés d'utiliser $k(U) \simeq k(X)$ mdr. À méditer. Si $F_1 \cap U \subsetneq F_2 \cap U$ et U dense dans X, alors $\bar{F}_1 = \bar{F}_2$ implique F_1 dense dans F_2 d'où y sont égaux dans U car fermés ?*

2.2 Nombre d'équations d'un fermé (à finir)

Tout irréductible affine Z de dimension s dans $\mathbb{A}^n$ est une composante d'un

$$Z \subseteq Z(f_1, \dots, f_{n-s})$$

dont toutes les composantes ont dimension s.

À l'inverse

$$Z(f_1, \dots, f_s) \subset \mathbb{A}^n(k)$$

est de dimension $\geq n - s$.

2.2.1 Dimension des fibres

On en déduit que si $f \colon X \to Y$ est dominant alors

$$\dim(f^{-1}(y)) \geq \dim(X) - \dim(Y)$$

parce que $f^{-1}(y) \subseteq Z(f_* \mathfrak{m}_y)$ et $\mathfrak{m}_y$ est défini par $\dim(Y)$ équations !