Notes perso : Géométrie algébrique

Table des matières

Introduction

En suivant le I. R. Shafarevich.

Chapitre 1

Premières propriétés

1.1 Variété produit

Ce qui est assez clair c'est le produit de variétés affines. L'idée en général c'est de construire

$$X \times Y \to \mathbb{P}^n(k)$$

un isomorphisme sur son image qu'on peut reconstruire localement de sorte à ce qu'il soit unique.

Note 1. *Page 54.*

Concrètement dans le cas affine, les fermés de $\mathbb{A}^{n+m}$ qui sont fermés de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ c'est les fermés du type $V(F(X_1, \dots, X_n)), G(X_{n+1}, \dots, X_m))$. Pour le projectif c'est assez similaire. Le truc c'est que brutalement définir

$$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{n+1+m+1-1}$$

ca marche pas. Un tuple du produit $(u_0, \dots, u_n, v_0, \dots, v_m)$ est doublement homogène donc définit pas un point de $\mathbb{P}^{n+m+1}$. Ducoup faut déf plutôt

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m &\to \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1} \\ ([u_0, \dots, u_n], [v_0, \dots, v_m]) &\mapsto (u_i v_j)_{i,j} \end{aligned}$$

Et là on a clairement

$$\phi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) = \bigcap_{i,j} V\left(\begin{vmatrix} X_{ij} & X_{il} \\ X_{kj} & X_{kl} \end{vmatrix}\right)$$

En fait ce qui est cool c'est la remarque suivante.

Remarque 1. *Si on regarde les mineures 2x2 de* (X_{ij}) *et le lieu de leur zéros communs. On peut prouver que* ϕ *se surjecte dedans. En particulier la matrice* $(w_{ij}) = (u_i v_j)$ *est de rang* 1 *et en plus c'est un produit de matrices* $1 \times (n+1)$ *par* $(m+1) \times 1$.

En fait c'est non trivial le produit projectif mdr. Déjà à faire :

Exercices 1.1.1. Les fermés de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ sont les zéros de polynômes bihomogènes. Réponse : L'idée c'est que si on prend un polynôme homogènes en (X_{ij}) et qu'on regarde

$$X_{ij} \mapsto X_i Y_j$$

. On obtient un polynôme bihomogène en les X_i et les Y_j de mêmes degrés. En fait inversement si on a un polynôme bihomogène G de degré r en X_i et s en Y_j avec $r > s$, on peut remarquer que $V(G)$ dans $\mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{A}^{m+1}$ est égal à à

$$\bigcap V(Y_j^{r-s} G)$$

(à vérifier, ça a l'air de marcher justement parce qu'on regarde dans $\mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{A}^{m+1}$ et pas $\mathbb{A}^{n+1+m+1}$.) **Meilleure réponse** : Si on regarde $Z(G) \subset \varphi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ on peut montrer que G est bihomogène de mêmes degré. À l'inverse pour def des fermés de $\mathbb{P}^n$ on doit utiliser des générateurs homogènes et donc $\bigcap_i V(Y_j^{r-s} G)$ c'est des générateurs homogènes.

Pour $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^n$ on peut prendre les homogènes pour les premières.

1.2 Graphes

En gros étant donné la structure d'une variété projective X on peut se demander si la diagonale dans $X \times X$ est fermée. C'est assez clair si on remarque que dire que deux points projectifs $u = [u_0 : \ldots :_n]$ et $v = [v_0 : \ldots : v_n]$ sont égaux ssi ils sont proportionnels. Autrement dit si

$$u_i / u_j = v_i / v_j$$

ou

$$u_i v_j = u_j v_i.$$

Ensuite étant donné une fonction

$$f : Y \to X$$

on peut regarder

$$id \times f : X \times Y \to X \times X$$

d'où le graphe est fermé.

1.3 Les variétés projectives sont complètes

Y'a la preuve de Shafarevich et la preuve de Dat qui a l'air plus parlante et qui dit qu'on peut "compléter" les courbes ponctionnées d'un point sur une variété complète.

Pour la preuve de Shafarevich, on peut regarder $Z(G) \subset X \times Y \to Y$ et donner des conditions pour que $y \in p_2(Z(G))$ pour G un polynôme bihomogène. Déjà on peut se ramener à $X = \mathbb{P}^n$ car X est projective et $Y = \mathbb{A}^n$. En fait, $y \in p_2(Z(G))$ ça veut juste dire que $G(\bar{U}, y)$ a un zéro projectif. Autrement dit, $I_s \not\subseteq (G(\bar{U}, y))$. Par cette condition, en notant $(M_a)_a$ les monômes de degrés s on obtient

$$M_a(\bar{U}) = F_a(\bar{U})G(\bar{U}, y)$$

avec $\deg(F_a) = s - \deg(G)$. Enfin si on écrit F_a en somme monomes de degré $s - \deg(G)$ disons en N_b. Alors les M_a sont combinaisons linéaires des N_bG. Et on obtient une matrices entre la base canonique des monômes de degré s et les N_bG à coefficients des polynomes en y à coefficient dans k! La condition $y \in p_2(Z(G))$ équivaut alors au fait que le rang de la matrice soit $<$ au nombre de monôme de degré s en n variables. On prend y qui annule les mineures de taille cette dimension!

Corollaire 1.3.1. *L'image d'une variété projective est fermée.*

Suffit de factoriser $X \to Y$ en $X \to X \times Y \to Y$, la première flèche est $x \mapsto (x, f(x))$ et envoie X sur son graphe.

1.4 Un peu de birationnalité (exo 5 (1.3)

Si on prend $f_d, f_{d-1} \in k[X_1, \dots, X_n]$ de degrés d et $d-1$ tels que $f_d + f_{d-1}$ est irréductible, alors $Z(f_d + f_{d-1})$ est birationnelle à $\mathbb{A}^{n-1}$.

Mon idée c'est que f_d/f_{d-1} est de degré 1, d'où $f_d/f_{d-1} + 1$ définit un hyperplan. Ducoup faut trouver un isomorphisme de $k(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$ vers $k(X_1, \dots, X_{n-1})$. Pour ça deux manières de faire, si f_d a un monôme qui étend f_{d-1} on peut juste le factoriser en haut et en haut de la fraction. On obtient une expression de la forme

$$F_0.(X_k + F_1)$$

où F_0 est de degré 0 et F_1 de degré 1 qui a seulement pour dénominateur le monôme. On peut faire le changement de variable $X_k \mapsto X_k/F_0$, on obtient $X_k + F_1(F_0, X_1, \dots, X_n)$.

Meilleure manière : En fait on peut écrire f_d/f_{d-1} comme $1/F_0(f_d/M)$ où F_0 est une fraction rationnelle de degré 0 et M un monôme. En gros on a factorisé en bas et en haut par M. Ensuite, en notant $M(i) = \{M \in S_{d_1} | X_i \mid M\}$ et

$$f_{d,i} = f_{d,i-1} - X_{i-1} \sum_{M \in M(f_{d,i-1}, i-1)} a_{M,i-1} M$$

et $M(f_{d,i}, i) = \{M \in M(i) | M \in Monome(f_{d,i})\}$ on peut écrire

$$f_d/M = \left(\sum_i X_i \sum_{N \in M(f_{d,i}, i)} a_{N,i} N \right) /M$$

en particulier les N/M ont degré 0. Enfin si on note I le support de la somme de gauche, on peut déf

$$\varphi \colon K[T_1, \ldots, T_n] \to K[Z(f_d + f_{d-1})]_{f_{d-1}, M}$$

par $T_i \mapsto X_i \sum_{N \in M(f_{d,i}, i)} a_{N,i} N/M$ si $i \in I$ et $T_i \mapsto X_i$ sinon. On peut remarquer que la flèche préserve la graduation, i.e. $\ker(\varphi)$ est engendré par des polynômes de degré 1. On obtient une flèche rationnelle dominante injective

$$Z(f_d + f_{d-1}) \to Z(\ker(\varphi))$$

où $\ker(\varphi)$ définit un hyperplan de $\mathbb{A}^n$ d'où le résultat.