

Géométrie algébrique

Table des matières

1	Variétés algébriques	7
1.1	Nullstellensatz	7
1.2	Espace projectif	9
1.3	fonctions régulières	9
1.4	Morphismes d'ensembles algébriques	10
1.5	Espaces annelés	10
1.6	Recollements	12
1.7	Sous-variétés	12
1.8	Variétés projectives	12
2	Dimension	13
3	Produits fibrés	15
3.1	Séparation et propriété	15
4	Espace tangent	17
4.1	Variétés lisses	18
4.2	Variétés normales	21

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

On est censés prouver Riemann-Roch.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1

Variétés algébriques

1.1 Nullstellensatz

Pas oublier de rechopper mon carnet. Y'a les preuves complètes.

Théoreme 1.1.1. *Y'a une correspondance entre points fermés de $\mathbb{A}^n(k)$ et idéaux maximaux dans $\text{Spm}(k[T_1, \dots, T_n])$.*

Corollaire 1.1.2. *Si A est une k -algèbre de t.f. et \mathfrak{m} un idéal maximal alors A/\mathfrak{m} est une extension finie de k .*

Lemme 1.1.3. *Si A est une k -algèbre de t.f. alors $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \text{Spm}(A), I \subset \mathfrak{m}} \mathfrak{m}$*

Lemme 1.1.4. *Si k est algébriquement clos, c'est un homéomorphisme (entre $\mathbb{A}^n(k)$ et $\text{Spm}(k[T_1, \dots, T_n])$).*

Démonstration. On prends le morphisme quotient, c'est l'évaluation et le noyau est de la forme $(T_i - t_i)_i$. \square

Théoreme 1.1.5 (Nullstellensatz). *Si $k = \bar{k}$ alors $I(Z(J)) = \sqrt{J}$.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} I(Z(J)) &= I\left(\bigcup_{x \in Z(J)} x\right) \\ &= \bigcap_{x \in Z(J)} I(\{x\}) \\ &= \bigcap_{x \in Z(J)} \mathfrak{m}_x \\ &= \bigcap_{\mathfrak{m} \in \text{Spm}(A), J \subset \mathfrak{m}} \mathfrak{m} \end{aligned}$$

et la dernière est \sqrt{J} par le lemme. (omg, revoir la preuve dans Atiyah) \square

Remarque 1 (!). *L'endroit où on utilise le weak nullstellensatz on a besoin de k algébriquement clos. La dernière qui vient du lemme y'a pas besoin. Autrement dit, on peut utiliser Spm pour faire de la géométrie algébrique sur un corps non algébriquement clos.*

Définition 1.1.6. $A(Z) = k[T_1, \dots, T_n]/I(Z)$

Pour $f \in A(Z)$ et \tilde{f} t.q $p(\tilde{f}) = f$ pour $p: k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A(Z)$. Pour $z \in k^n$ on peut toujours déf $f(z) := \tilde{f}(z)$. En particulier, on peut déf

Définition 1.1.7. $D(f) = \{s \in Z : f(s) \neq 0\} = D(\tilde{f}) \cap Z$. Avec $D(\tilde{f}) = \mathbb{A}^n(k) - Z(\tilde{f})$.

Remarque 2. *Comme d'hab juste il définit pour des fonctions a priori par déf sur $\mathbb{A}^n(k)$.*

Remarque 3 (C'est super chiant). *Faut faire gaffe ducoup en fonction de la fonction que j'utilise ou de son lift pour les inclusions.*

Corollaire 1.1.8. *Si $f, g \in A(Z)$ et $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$. On a*

- *Pour $J_1, J_2 \leq A(Z) : Z(J_1) \subset Z(J_2) \leftrightarrow J_2 \subset \sqrt{J_1}$.*
- *$D(f) \subset D(g) \leftrightarrow \exists h \in A(Z)$ t.q. $f^n = gh$.*
- *Les ouverts principaux forment une base de la topologie.*

Démonstration. Pour le premier point si $Z(J_1) \subset Z(J_2)$ alors faut lift dans $k[T_1, \dots, T_n]$ avant d'appliquer le nullstellensatz. Pour le deuxième, c'est clair. Pour le troisième, sur $\mathbb{A}^n(k)$ on prend $f \in I(Z)$, où $U = \mathbb{A}^n(k) - Z$, t.q $f(x) \neq 0$ (possible car $x \notin Z$). \square

Proposition 1.1.9. *Soit Z un ensemble algébrique affine. Alors Z est irréductible ssi $I(Z)$ est premier. Si $k = \bar{k}$, $I \leq K[T_1, \dots, T_n]$ alors $Z(I)$ est irréductible ssi \sqrt{I} est premier.*

Démonstration. Avec les nouvelles notations c'est direct, avec les anciennes si $Z(I)$ est irréductible $Z(f) \cup Z(g) = Z(I)$ implique $Z(I) \subset Z(f)$ ou $Z(I) \subset Z(g)$. \square

Lemme 1.1.10. *Soit A un anneau noetherien, alors les idéaux radicaux sont des intersections finies d'idéaux premiers.*

Démonstration. On regarde l'ensemble des idéaux qui sont pas des intersections d'idéaux premiers. Comme A est noethérien y'a un élément maximal I qui n'est pas premier. Soit $a, b \in A - I$ t.q. $ab \in I$. On considère $I_a = \sqrt{I + aA}$ et $I_b = \sqrt{I + bA}$. Ils sont plus gros que I donc intersections d'idéaux premiers. En particulier on prouve facilement que $I = I_a \cap I_b$ (I est radical). \square

Proposition 1.1.11. *Si $k = \bar{k}$, on a une décomposition unique des ensembles algébriques en variétés irréductibles non contenues les unes dans les autres.*

Démonstration. $I(Z) = \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{b}_i$. On retire les \mathfrak{b}_i contenus dans les autres. \square

1.2 Espace projectif

On considère $k[T_0, \dots, T_n] = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$.

Lemme 1.2.1. *Sur les corps infinis, $f \in S_d$ ssi $\lambda^d f(x_i, i) = f(\lambda x_i, i)$.*

Définition 1.2.2. Un idéal est homogène ssi dès que $f = f_1 + \dots + f_n \in I$ alors $f_i \in I$. C'est équivalent à être généré par des éléments homogènes, i.e. $I = \bigoplus S_d \cap I$.

Remarque 4. *Comme en géo diff regarder ce qu'il se passe quand on regarde des polynômes homogènes dans \mathbb{A}^{n+1} et qu'on les pousse (homéo?).*

Définition 1.2.3. Pour I un idéal homogène de $k[T_0, \dots, T_n]$, on définit $Z_+(I) = \{P \in \mathbb{P}^n(k) : f(P) = 0 \ \forall f \in I \text{ f homogène}\}$ où autrement on lift P et on prends f quelconque. Si k est infini et $Z \subset \mathbb{P}^n(k)$, on définit $I_+(Z) = I(\pi^{-1}(Z))$.

Théoreme 1.2.4 (Nullsellensatz projectif). *On suppose $k = \bar{k}$ et J homogène. On a*

- $Z_+(J) = \emptyset$ ssi $(T_0, \dots, T_n) \subset J$.
- Si $Z_+(J) \neq \emptyset$ alors $I_+(Z_+(J)) = \sqrt{J}$.

Démonstration. Si $Z_+(J) = \emptyset$ on lift à $\mathbb{A}^{n+1} - 0$ pour voir que $Z(J) \subset \{0\} = (T_0, \dots, T_n)$. Sinon $I_+(Z_+(J)) = I(\pi^{-1}(Z_+(J))) = I(\pi^{-1}(Z_+(J)) \cup \{0\}) = \sqrt{J}$. \square

1.3 fonctions régulières

Revoir que la topologie de Zariski c'est la plus petite topologie que rend continue les polynômes.

Définition 1.3.1 (Fonction régulière). On décrit pour $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$ l'anneau $\mathcal{O}_Z(U)$. On prend les fonctions qui sont localement des fractions rationnelles.

Note 1. *Trouver exactement où on peut écrire des polynômes, les ouverts sont quasi-compacts(!).*

1.4 Morphismes d'ensembles algébriques

Lemme 1.3.2. \mathcal{O}_Z est un faisceau pour les restrictions naturelles.

Démonstration. C'est évident avec la déf mdr. □

Proposition 1.3.3. Soit $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$.

- Les fonctions régulières sont continues.
- Pour tout $f \in \mathbb{A}(Z)$, la flèche $\mathbb{A}(Z) \rightarrow \mathcal{O}_Z(D(f))$ passe au quotient en un isom $\mathbb{A}(Z)_f \simeq \mathcal{O}_Z(D(f))$.
- $\mathbb{A}(Z) \simeq \mathcal{O}_Z(Z)$.

Démonstration. Pour le premier point l'idée c'est que localement on peut se mettre sur un ouvert tel que $f|_U(U) = \{pt\}$. Le deuxième point c'est la surjectivité qu'y faut voir. Le troisième point c'est le plus cool, c'est l'idée que on commence par décomposer Z en une union finie $\bigcup_i D(f_i)$ où on est une fraction rationnelle. Ensuite, on obtient $(gf_i - h_i)|_{D(f_i)} = 0$, faut relever puis dérouler avec le fait que $1 \in (f_i, i)$ quelque part. □

Remarque 5. Si on prend $\mathbb{A}^2 \setminus (0,0)$, il a les mêmes sections globales que \mathbb{A}^2 . Ça prouve que cet ouvert est pas affine.

1.4 Morphismes d'ensembles algébriques

Dans les ensembles algébriques on peut directement prendre des fonctions polynomiales ! C'est la preuve d'avant.

Théoreme 1.4.1. On a une équivalence de catégories entre les k -algèbres de type finies réduites et la k -variétés.

Note 2. Revoir vite fait la construction.

1.5 Espaces annelés

Définition 1.5.1. Un espace annelé est un espace topologique X muni d'un faisceau de k -algèbre pour nous.

Définition 1.5.2. Un morphisme d'espaces annelés

$$(|X|, \mathcal{O}_X) \rightarrow (|Y|, \mathcal{O}_Y)$$

est un couple $(|f|, f^\#)$. Où $|f|$ est un morphisme d'espaces topologiques et $f^\#: \mathcal{O}_Y \rightarrow |f|_* \mathcal{O}_X$ un morphisme tels que les flèches induites sur les fibres sont des morphismes d'anneaux locaux.

Note 3. Le faisceau $|f|_*\mathcal{O}_X$ est le pullback classique. Si $y = |f|(x)$, comme d'habitude on a

$$f^\# : \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow (|f|_*\mathcal{O}_X)_y \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

Enfin en fait comme c'est localement annelé apparemment on peut montrer que $f^\#$ c'est automatiquement le pullback de fonctions.

Théoreme 1.5.3. Le couple (Z, \mathcal{O}_Z) est un espace annelé.

Démonstration. Les fibres $\mathcal{O}_{Z,z}$ sont les $\mathbb{A}(Z)_{\mathfrak{m}_z}$. □

de notre équivalence de base

$$\{\text{ensembles algébriques affines}\} \rightarrow \{k\text{-algèbre réduite de type fini}\}$$

on plonge les ensembles algébriques dans les espaces localement annelés. En fait c'est pleinement fidèle, on a pas un nouvel objet.

Proposition 1.5.4. On a une bijection

$$\text{Hom}_{\text{algSets}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\text{LocRingedSpace}}((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y))$$

Démonstration. Étant donné $f: X \rightarrow Y$, on définit $f^\#(U): \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}U)$ par $s \mapsto s \circ f$. Et à f on associe $(f, f^\#)$. Maintenant si on a un $(f, f^\#)$ un morphisme d'espaces localement annelés quelconque, faut montrer que f est un morphisme d'ensembles algébriques et que $f^\#$ est bien le pullback habituel. Faut se rappeler que $f^\#(\mathfrak{m}_y) \subset \mathfrak{m}_x$ tel que $f(x) = y$. En particulier, le grand carré de

$$\begin{array}{ccc} f^\# : \mathcal{O}_Y(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(f^{-1}U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{Y,f(x)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x} \\ \downarrow & & \downarrow \\ k = \mathcal{O}_{Y,f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = k \end{array}$$

commute, et la flèche $\mathcal{O}_Y(U) \rightarrow k$ est l'évaluation, la flèche $k \rightarrow k$ est l'identité ($1 \mapsto 1$), i.e. $f^\#(s)(x) = s(f(x))$. On a montré que $f^\#$ est le pullback habituel. Pour montrer que c'est un morphisme, on peut regarder $\tilde{f}: X \rightarrow Y \rightarrow \mathbb{A}_k^n$. On obtient

$$\tilde{f}(\mathbb{A}^n(k)): k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$$

qui à T_1 associe f_1 . En particulier, c'est $T_1 \circ f$ par le point d'avant. De sorte que \tilde{f} est défini par des polynômes et donc un morphisme. □

1.6 Recollements

1.7 Sous-variétés

On appelle variété des unions finies de variétés affines avec le faisceau structurant.

Définition 1.7.1 (Sous-variété). Pour un fermé dans $Z \subset X$ une variété algébrique. On définit,

$$\mathcal{O}_Z(V) = \{f: V \rightarrow k \mid \forall z \in V \exists g \in \mathcal{O}_X(U), U \cap Z \subset V, g|_{U \cap Z} = f|_{U \cap Z}\}$$

autrement dit c'est juste $i^{-1}\mathcal{O}_X$ pour $i: Z \subset X$.

Lemme 1.7.2. Soit X une variété algébrique et $Z \subset X$ fermé. Alors Z est une variété algébrique. Si X est affine alors Z aussi.

Démonstration. On doit montrer que Z est un recouvrement d'affine. Suffit de montrer que $Z \cap U$ est affine si U est affine. Suffit de le montrer dans $X = \mathbb{A}^n$ et là \mathcal{O}_Z c'est littéralement le faisceau de fonction régulière donc on a fini. (Il définit une variété affine comme un fermé topologique de \mathbb{A}^n plus faisceau) \square

1.8 Variétés projectives

Dans $\mathbb{P}^n(k)$ on définit sur $X = Z_+(I)$,

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f: U \rightarrow k, \text{Localement une fraction homogène}\}$$

Si on définit la localisation homogène en P homogène, avec $B = k[T_1, \dots, T_n]/I$, via $B_{(P)}$ les fractions de degrés 0. Plus rigoureusement, via $k[T_1, \dots, T_n]_{(P)}/I_{(P)}$ avec $I_{(P)} = \{Q/P^n \mid Q \in I\}$.

Proposition 1.8.1. Si $X = Z_+(I) \subset \mathbb{P}^n(k)$ et $U = X \cap D_+(p)$ ($\bar{P} = p$). On a $B_{(p)} \simeq \mathcal{O}_X(U)$.

Proposition 1.8.2. Si P est non constant homogène alors $D_+(P)$ est une variété affine. Si $P \in \mathcal{O}_Z(Z) = B$ de degré ≥ 1 pareil.

Définition 1.8.3. Les variétés quasi-projectives sont les localement fermées dans $\mathbb{P}^n(k)$.

Chapitre 2

Dimension

Définition 2.0.1. On prend la dimension de Krull avec le sup des chaines de fermés irréductibles.

Chapitre 3

Produits fibrés

Y'a des choses à rattraper, comme l'immersion fermée.

3.1 Séparation et propriété

Définition 3.1.1. Une variété algébrique sur k est séparée si l'image de

$$\delta = (id, id): X \rightarrow X \times_k X$$

est fermée.

Exemple 3.1.2. Les variétés algébriques affines sont séparées, parce que $A(X) \otimes A(X)$ est surjective, en effet $im(\delta) = Z(ker \delta_*)$.

Comme la séparation imite le fait d'être Hausdorff, en ajoutant la quasi-compacité on obtient la "compacité"?

Définition 3.1.3. Une variété algébrique X sur k est propre/complète si elle est séparée et pour toute variété Z :

$$X \times Z \rightarrow Z$$

est fermée (on dit qu'elle est universellement fermée).

Exemple 3.1.4. \mathbb{A}_k^1 n'est pas propre mais pourtant est séparée et quasi-compacte. On regarde $\mathbb{A}^2 \simeq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$, et dans \mathbb{A}^2 on regarde $Z(XY - 1)$, d'image $\mathbb{A}^1 - 0!$ Le problème vient du point à l'infini qu'il manque.

Remarque 6. Les fermées de variétés séparées (resp. propres) sont séparées (resp. propres). Et les ouverts de variétés séparées sont séparés.

Proposition 3.1.5. Les variétés projectives sont propres.

3.1 Séparation et propriété

Démonstration. Il suffit de le prouver pour \mathbb{P}_k^n . On montre que c'est séparé, on peut restreindre $\mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^n$ à $D(T_i) \cap D(T_j) \rightarrow D(T_i) \times D(T_j)$ qui a une diagonale fermée car affine (le fait d'être une immersion fermée est local, check). Soit Y une variété algébrique, on doit prouver que $\mathbb{P}_k^n \times Y \rightarrow Y$ est fermée, on peut le montrer localement puis supposer Y affine et même $= \mathbb{A}^n$. En fait c'est la preuve de Shafarevich. Y a un twist, il dit pour $y \in \mathbb{A}^n - p_2(Z)$ on a

$$(T_0, \dots, T_n)^N \subset I + \mathfrak{m}_y k[T_0, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m]$$

puis $B_N \subset I_N + \mathfrak{m}_y B_N$ avec $B_N = k[T_0, \dots, T_n]_N$ le module des polynômes de degré N . D'où par Nakayama, il existe $P \notin \mathfrak{m}_y$ homogène dans I t.q. $PB_N \subset I_N$ et $y \in D^+(P)$ (on veut les monômes dans I et P est en Y d'où dans $D^+(P)$, $P(y) \neq 0$ et les monômes sont dans I_y , (penser au quotient pas \mathfrak{m}_y). \square

Définition 3.1.6. On définit le graphe comme l'image inverse de la diagonale δ_Y par $(f, id_Y): X \times Y \rightarrow Y \times Y$.

Remarque 7. Si Y est séparée, Γ_f est fermé dans $X \times Y$. En effet, $(id_X, f): X \rightarrow X \times Y$ est un isomorphisme vers Γ_f .

Lemme 3.1.7. Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques avec X propre et Y séparée. Alors f est fermée.

Démonstration. On regarde $X \rightarrow X \times Y \rightarrow Y$. \square

Proposition 3.1.8. Soit X une variété algébrique connexe et propre. Alors $\mathcal{O}_X(X) = k$.

Démonstration. Étant donné $f: X \rightarrow \mathbb{A}^1$, l'image est connexe et fermée dans \mathbb{P}^1 et incluse dans \mathbb{A}^1 donc est un point. \square

Corollaire 3.1.9. Une variété affine connexe est propre ssi $X = \mathbb{A}_k^0$.

Chapitre 4

Espace tangent

La première définition à partir d'équations/d'un plongement affine.

Définition 4.0.1. Soit $X = Z(I)$ une variété algébrique et $P = (a_1, \dots, a_n) \in X$. On définit

$$T_{X,P} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}_k^n \mid \sum_i T_i \partial_i F(P) = 0, \forall F \in I\}$$

c'est un espace vectoriel.

Remarque 8. *Penser $T_i = X_i - a_i$, pour que ce soit un espace vectoriel.*

Exemple 4.0.2. Pour $Z(T_1 - T_2^2) = Z$ et $P = (1, 1)$ on a $T_P Z = \{(t_1, t_2) \mid t_1 - 2t_2 = 0\}$.

Soit maintenant $E = k^n$ et $P \in \mathbb{A}^n(k)$. On regarde

$$D_P: k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow E^\wedge$$

donné par $F \mapsto D_P(F) = \sum T_i \partial_i F(P)$. On remarque que $D_P(\mathfrak{m}_P^2) = 0$ car si $f, g \in \mathfrak{m}_P$ alors $\partial_i(fg)(P) = f(P)\partial_i g(P) + g(P)\partial_i f(P) = 0$. D'où ça passe au quotient en

$$\mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2 \rightarrow E^\wedge$$

maintenant c'est des k -espaces vectoriels de dimensions n d'où il suffit de montrer la surjectivité ce qui est clair.

Proposition 4.0.3. *Soit X une variété affine et $P \in X$. Alors*

$$(\mathfrak{m}_P)^\wedge \simeq T_{X,P}$$

4.1 Variétés lisses

Démonstration. Par définition $T_{X,P}$ est l'orthogonal de $D_P(I)$ ou l'ensemble des $v \in E$ tels que pour tout $\phi \in D_P(I)$, $\phi(v) = 0$. On note \mathfrak{m} l'idéal de $k[T_1, \dots, T_n]$ tel que $\mathfrak{m}_P = \mathfrak{m}/I$. Alors $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ rentre dans un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I/I \cap \mathfrak{m}^2 & \longrightarrow & \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 & \longrightarrow & \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \scriptstyle D_P & & = \\ 0 & \longrightarrow & D_P I & \longrightarrow & E^\wedge & \longrightarrow & \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

la flèche du bas montre bien le résultat en passant aux duals (ça inverse les flèches). \square

Lemme 4.0.4. *Soit A un anneau et $\mathfrak{m} \leq A$ maximal. Y'a un isomorphisme $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \simeq \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}^2A_{\mathfrak{m}}$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathfrak{m}$ t.q $x \in \mathfrak{m}^2A_{\mathfrak{m}}$. Alors il existe $s \in A - \mathfrak{m}$ tel que $s.x \in \mathfrak{m}^2A$. En plus il existe $t \in A$ t.q $st - 1 \in \mathfrak{m}$ car A/\mathfrak{m} est un corps. Ensuite

$$(st - 1)x \in \mathfrak{m}^2$$

mais $stx \in \mathfrak{m}^2$ car $sx \in \mathfrak{m}^2$ d'où $x \in \mathfrak{m}^2$ et la flèche est injective.

Si on prends $x \in \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ il existe $s \in A - \mathfrak{m}$ tq $sx \in \mathfrak{m}$. On prends t comme avant. Alors $tsx = x \pmod{\mathfrak{m}^2A_{\mathfrak{m}}}$. D'où $tsx \mapsto x$. \square

Remarque 9. *D'où l'espace tangent provient du stalk du faisceau.*

Définition 4.0.5. Soit X une variété algébrique. L'espace tangent de Zariski en P est le k -espace vectoriel

$$(\mathfrak{m}\mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}^2\mathcal{O}_{X,P})$$

4.1 Variétés lisses

Définition 4.1.1. On note $\dim_P X = \min\{\dim U \mid P \in U\}$ pour les ouverts de X . (Oui la déf marche)

Remarque 10. *C'est aussi le maximum des dimensions des composantes irréductibles qui passent par P .*

Proposition 4.1.2. *Soit X une variété algébrique, alors pour tout $P \in X$ on a*

$$\dim_P X \leq \dim T_{X,P}$$

Définition 4.1.3. On dit que X est lisse/non singulière en P si $\dim_P X = \dim T_{X,P}$.

Espace tangent

Démonstration. Par récurrence sur $\dim T_{X,P}$. Si $\dim T_{X,P} = 0$, en passant au cas affine, $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = 0$ d'où

$$\mathfrak{m}_P = \mathfrak{m}_P^2.$$

Par le lemme de Nakayama il existe $f \in A - \mathfrak{m}_P$ tel que $f\mathfrak{m}_P = 0$ avec $f \in D(f)$. En se plaçant sur $D(f)$ on remplace $\mathcal{O}_X(X)$ par A_f d'où f inversible et $\mathfrak{m}_P = 0$ puis $A_f = k$. En particulier, $\dim_P X = 0$.

Maintenant si $\dim T_{X,P} \geq 1$. Soit Z une composante irréductible de X passant par P et de dimension $\dim_P X$. On a $\mathcal{O}(Z) = \mathcal{O}(X)/I$ puis $\mathfrak{m}_{P,Z} = \mathfrak{m}_{P,X}/I$ puis $\mathfrak{m}_{P,X}/\mathfrak{m}_{P,X}^2$ se surjecte dans $\mathfrak{m}_{P,Z}/\mathfrak{m}_{P,Z}^2$. D'où $\dim T_{P,X} \geq \dim T_{P,Z}$. On peut supposer X irréductible. $\text{Supp } \dim_P X \neq 0$. Alors il existe $f \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ et $Y = Z(f) \subset X$. En plus

$$\dim T_{X,P} \geq \dim T_{Y,P} + 1$$

car $T_{Y,P} \simeq (\mathfrak{m}/f)/(\mathfrak{m}/f)^2$. Avec $\dim Y = \dim X - 1$, par récurrence $\dim T_{P,Y} \geq \dim_P Y$ et on conclut. \square

Étant donnés des générateurs de I , (f_1, \dots, f_r) , on déf la jacobienne en P par

$$J(P) = (\partial_j f_i(P))_{i,j}$$

alors on a

$$\ker(J(P)) = T_P X$$

on a alors le critère jacobien :

Proposition 4.1.4. *On a :*

X est lisse en P

ssi

$$J(P) \text{ est de rang } n - \dim_P(X)$$

avec $f_i \in k[T_1, \dots, T_n]$.

Démonstration. Directement on a $\dim T_P X = \dim_k \ker(J(X)_P) = n - \text{rk}(J(X)_P)$. \square

Corollaire 4.1.5. *Si $X = Z(F) \subset \mathbb{A}^n(k)$ alors P est lisse si au moins un des $\partial_i F(P)$ est non nulle.*

Démonstration. On a $\dim_P(X) = n - 1$ et la jacobienne est une ligne. Donc de rang 1 ssi y'en a un qu'est non nul. \square

Exercices 4.1.6. L'ensemble des points lisse est ouvert.

Proposition 4.1.7. *Soit $k(X)$ un corps de fonctions. Alors $k(X)$ est finie séparable d'un $k(T_1, \dots, T_n)$.*

Démonstration. Par la normalisation de Noether on trouve

$$K = k(T_1, \dots, T_n) \subset k(X)$$

supposons que l'extension n'est pas séparable. On note L la clôture séparable de K dans $k(X)$. On a $\text{car}(k) = p > 0$. On prends $\theta \in k(X) - L$ t.q. $\theta^p \in L$. On montre que $L(\theta)$ est séparable finie sur un $k(S_1, \dots, S_n)$.

Soit $H(S) = S^r + f_{r-1}S^{r-1} + \dots + f_0 \in K[S]$ le pol min de θ^p sur K . Supposons que $f_i \in k(T_1^p, \dots, T_n^p)$ alors $H(S^p) = G(S)^p$ et G est un polynôme minimal séparable de θ . D'où l'un des $f_i \notin k(T_1^p, \dots, T_n^p)$.

Remarque 11. *On peut pas dire directement que H est séparable donc $H(S^p)$ est une puissance p -ème. Parce que $S^p - S$ par exemple.*

Si une puissance d'un T_i non divisible par p apparaît dans un f_i , alors T_i est algébrique sur $K_1 = k(\theta, T_2, \dots, T_n)$. (en prenant $T_i = T_1$)

Et en plus $L(\theta)$ est séparable sur $K_1(T_1)$ qui est séparable sur K_1 . Mais K_1 a le degré de transcendance de $L(\theta)$ qui est n . D'où θ, T_2, \dots, T_n sont algébriquement indépendants. \square

Remarque 12. *Comparer avec la preuve de Sha.*

Soit R un anneau intègre et $K = \text{Frac}(R)$. On pose $H \in R[S]$ et $\Delta(H) = \prod (s_i - s_j)^2 \in R$ son discriminant. Alors H est séparable ssi $\Delta(H) \neq 0$.

Maintenant si on note $\varphi: R \rightarrow F$ (un morphisme de corps quelconque) et

$$\tilde{\varphi}: R[S] \rightarrow F(S)$$

alors $\Delta(\tilde{\varphi}(H)) = \varphi(\Delta)$.

Lemme 4.1.8. *Étant donné $H \in k[T_1, \dots, T_n][S]$. Soit $X \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1$ la variété associée. Si $\Delta = \text{disc}(H) \in k[T_1, \dots, T_n]$ alors*

$$X \cap D(\Delta)$$

est non vide et est l'ensemble des points lisses.

Remarque 13. *Il suppose H unitaire.*

Démonstration. Soit $q \in (\emptyset \neq) D(\Delta) \subseteq \mathbb{A}^n$. On note $\phi_q: k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow k$ t.q. $\phi_q(F) = F(q)$. Alors si $s \in k$ est une racine de

$$\tilde{\phi}_q(H)(S)$$

Espace tangent

on a $P = (q, s) \in X \cap D(\Delta) \neq \emptyset$. On regarde la jacobienne de H en P . On a

$$\tilde{\phi}_q(H)(S) = \phi_q(\Delta) = \Delta(q) \neq 0$$

d'où $\tilde{\phi}_q(S)$ est séparable puis

$$\partial_S H(P) = \tilde{\phi}(H)'(S)(s) \neq 0$$

□

Proposition 4.1.9. *Le smooth locus est dense dans X .*

Démonstration. On prouve que tout les ouverts non vides contiennent un point lisse. On peut supposer X affine intègre. On peut donc prendre le corps de fonctions $k(X)$ et une extension séparable

$$k(T_1, \dots, T_n) \subset k(X).$$

On a donc $k(T_1, \dots, T_n)(S) = k(T_1, \dots, T_n)[S]/H(\bar{T}, S)$. avec H séparable en S . On se place sur un ouvert où y'a pas de dénominateurs. On a $\tilde{H} = g^{\deg(H)} H \in k[T_1, \dots, T_n][gS]$ unitaire puis $k(\tilde{H}) = k(X)$ d'où on peut appliquer le résultat à \tilde{H} . □

4.2 Variétés normales

Théoreme 4.2.1. *Soit X une variété algébrique lisse en P . Alors*

1. *Il n'y a qu'une seule composante de X passant par P .*
2. *Soit U est ouvert affine connexe (implique intègre) de X alors $\mathcal{O}_X(U)$ est intégralement clos. (dans $\text{Frac}(\mathcal{O}_X(U))$ qui est pas forcément $\text{Frac}(\mathcal{O}_X(X))$.)*
3. *$\mathcal{O}_{X,P}$ est factoriel.*

Remarque 14. *On a*

1. *Lisse + connexe implique intègre.*
2. *Si $\dim U = 1$ alors $\mathcal{O}_X(U)$ est de Dedekind.*

Proposition 4.2.2. *Soit $P \in X$ et $d = \dim_P X$. Alors X est lisse en P ssi pour tout voisinage ouvert petit affine de P , l'idéal $\mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}_X(U)$ est généré par d éléments. (Plus précisément $\mathfrak{m}_P \mathcal{O}_{X,P}$)*

Démonstration. Supposons que \mathfrak{m} est généré par d éléments. Alors

$$\mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$$

est généré par d éléments en tant que $\mathcal{O}_X(X)$ -module d'où en tant que $\mathcal{O}_X(X)/\mathfrak{m}$ -module. Puis $\dim T_P X = d$. À l'inverse si X est lisse en P . On suppose X affine. On note $\mathfrak{m} \subset A(X)$ l'idéal de P . On sait que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est de dimension d sur $A(X)/\mathfrak{m}$, disons généré par $(\bar{e}_i)_i$. D'où $\mathfrak{m} = (e_1, \dots, e_d) + \mathfrak{m}^2$ puis $\mathfrak{m}/(e_1, \dots, e_d) + \mathfrak{m}(\mathfrak{m}/(e_1, \dots, e_d))$. Par Nakayama il existe $f \notin \mathfrak{m}$ tel que $f\mathfrak{m} = (e_1, \dots, e_d)$. D'où $\mathfrak{m}A_f = (e_1, \dots, e_d)A_f$. En particulier, $\mathfrak{m}A_f$ est l'idéal maximal qui correspond à $P \in D(f)$. D'où dans tout ouvert $U \subseteq D(f)$. \square

Corollaire 4.2.3. *Si X est une courbe affine intègre. Alors X est lisse ssi $A(X)$ est de Dedekind.*

Démonstration. C'est juste que tout les localisés sont des DVR et on applique le corollaire. \square

Définition 4.2.4. X est dite normale si pour tout les U affine ouverts

$$\mathcal{O}_X(U) \text{ est intégralement clos}$$

Proposition 4.2.5. *Si X est affine, $A(X)$ intégralement clos implique X normale.*

Démonstration. Étant donné $s \in k(X)$, on a $\mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow A(X)_f$. D'où $f^r s$ est entier sur $A(X)$ donc $s \in A(X)_f$. Maintenant en prenant un recouvrement on a $s \in A(X)_{f_i}$. D'où par la propriété du faisceau $s \in \mathcal{O}_X(U)$. \square

Remarque 15. *La preuve rigoureuse doit utiliser la flèche canonique $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow k(X)$.*

Définition 4.2.6. Une morphisme $X \rightarrow Y$ est affine si pour tout affine ouvert V de Y , $f^{-1}(V)$ est affine. Le morphisme est fini si il est affine et pour tout ouvert affine $V \subseteq Y$ on a

$$\mathcal{O}_X(f^{-1}V) \text{ est fini sur } \mathcal{O}_Y(V)$$

Remarque 16. *On peut montrer que si il existe un recouvrement affine $Y = \cup_i V_i$ tq pour tout i , $f^{-1}V_i$ est affine (resp. $\mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}V)$ est fini) alors f est affine (resp. fini).*

Définition 4.2.7. Soit X une variété intègre. La normalisation de X est une variété normale X' muni d'un morphisme fini birationnel

$$X' \rightarrow X$$

Espace tangent

Soit $\phi: k(X) \rightarrow L$ une extension finie, la normalisation de X dans L est un morphisme fini dominant

$$\pi: X' \rightarrow X$$

t.q $k(X') = L$, X' est normal et $k(X) \rightarrow L$ est induit par π .

Proposition 4.2.8. *Soit A une k -algèbre intègre de type fini et $K = \text{Frac}(A)$. Soit B la clôture intégrale de A dans L , L une extension finie de K . Alors $\text{Frac}(B) = L$ et B est finie sur A .*

Remarque 17. *Si $L = K$, la normalisation est $\text{Spm}(\tilde{A}) \rightarrow \text{Spm}(A)$.*

Exemple 4.2.9. Si $X = Z(T_1^2 - T_2^3) \subseteq \mathbb{A}_k^2$. Alors

$$\mathbb{A}^1 \rightarrow X$$

donné par $t \mapsto (t^3, t^2)$ est la normalisation.