Anneaux de Dedekind

Chapitre 1

Anneaux de valuation discrète et de Dedekind.

1.1 Anneaux de valuation discrète

Pour le contexte, moi je m'intéresse au cas intègre déjà et au cas où le DVR est un $A_{\mathfrak{p}}$ pour un anneau noethérien intègre de dimension 1. Sa clôture intégrale dans $\mathrm{Frac}(A)$ devient un anneau de Dedekind.

1.1.1 Les 2 définitions.

Y'a deux manières de les voir :

1. Dans un corps (K, v) muni d'une valuation discrète. Avec $A = \{x \in K | v(x) \geq 0\}$. $(v(x) = 0 \implies v(x^{-1}) = 0)$

2. Comme un anneau principal (donc intègre) ayant un seul idéal premier non nul.

L'implication 1. implique 2. consiste juste à se placer dans l'espace ambiant K.

L'autre côté consiste à construire une valuation par l'absurde.

1.1.2 Première caractérisation

Équivalences. Dans un anneau noethérien,

$$\text{DVR} \equiv \text{local, noethérien, } \mathfrak{m} = (\pi) \text{ non nilpotent.}$$

On veut juste écrire $x = \pi^n u$ de manière unique, on peut juste utiliser que $t \in A$ implique $t \in \mathfrak{m}$ ou $t \in A^\times$.

1.1.3 Deuxième caractérisation

Équivalences. DVR $\equiv$ Noethérien, intégralement clos, un seul idéal premier $\neq 0$ (local mais pas un corps ? Non! Tu verras pq.).

Là c'est un peu plus dur. Le point c'est de montrer que $\mathfrak{m}$ est inversible, alors $\mathfrak{m}$ est principal. On note $\mathfrak{m}' = \{x \in K | x\mathfrak{m} \subset A\}$. On a

$$\mathfrak{m}\mathfrak{m}' \subset A \text{ et } A \subset \mathfrak{m}' \text{ implique } \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}\mathfrak{m}'.$$

d'où $\mathfrak{m}\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}$ ou A. Maintenant en fait

$$\text{si } \mathfrak{m}\mathfrak{m}' = A \text{ alors } \sum x_i y_i = 1 \text{ d'où } u = x_{i_0} y_{i_0} \in A - \mathfrak{m} = A^\times$$

par l'absurde. En particulier tout $z \in \mathfrak{m}$ se réécrit

$$z = x_{i_0}(u^{-1} y_{i_0} z)$$

parce que $x_{i_0} y_{i_0} u^{-1} = 1$ et $y_{i_0} z \in A$!

1.1.4 Résumé de preuve

On montre en trois temps que

1. Si $\mathfrak{m}$ est inversible alors il est principal.
2. Si $\mathfrak{m}\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}$ et A est intégralement clos alors $\mathfrak{m}' = A$.
3. Si A a un seul idéal non nul (et pas juste local) alors $\mathfrak{m}' \neq A$.

Le premier je l'ai expliqué avant. Le deuxième c'est que si $z \in \mathfrak{m}'$ alors $A[z] \subset \mathfrak{m}'$ qui est t.f. D'où le résultat. Le troisème utilise que si $x \in \mathfrak{m} - 0$, alors

1. $A_x = K$
2. En faisant varier x, $\mathfrak{m}^N \subset zA$ pour un N minimal et $z \in A - 0$.
3. Pour $z \in \mathfrak{m}$, on a $y \in \mathfrak{m}^{N-1} - zA$ puis $y/z\mathfrak{m}' - A$.

Note 1. *Le troisième point se traduit en Spec$(K) = D(x) \subset$ Spec(A) et*

$$\begin{aligned} A_x &= \mathcal{O}_{D(x)}(D(x)) \\ &= \mathcal{O}_{Spec(A)}(Spec(A))|_{(0)} \\ &= \mathcal{O}_{Spec(A),(0)} \\ &= (A\backslash 0)^{-1} A \\ &= K \end{aligned}$$

Aussi, cette histoire de $y \in \mathfrak{m}^{n-1} - zA$ et $y\mathfrak{m} \subset zA$ ça fait remarquer de l'arithmétique plus habituelle.

1.1.5 But de ces caractérisations

Celle qui nous intéresse c'est la deuxième qui permet de montrer que $\mathfrak{m}$ est principal. Alors on peut utiliser la première pour montrer que c'est un DVR.

1.2 Anneaux de Dedekind

On montre que

Équivalences. $A_\mathfrak{p}$ est un dvr pour tout $\mathfrak{p} \equiv A$ est noethérien intégralement clos de dimension 1.

On sait que un $DVR \equiv$ noethérien intègre avec un seul idéal premier non nul. I.e. de dimension ≤ 1. Donc faut juste Que intégralement clos équivaut à tout les $A_\mathfrak{p}$ sont intégralement clos.

Remarque 1. *Gauche à droite c'est l'équivalence habituelle et droite à gauche c'est que le dénominateur est dans aucun idéal maximal. Donc est inversible.*

1.2.1 Relever l'inversibilité pour les premiers

De l'inversibilité de $\mathfrak{p}$ dans $A_\mathfrak{p}$ je veux relever dans A. En fait ça vient du fait que $\_ \otimes_A A_\mathfrak{p}$ est un morphisme de monoides $Mod_{A,\subset K} \to Mod_{A_\mathfrak{p},\subset K}$ additif et multiplicatif !

1.2.2 Spec(A) est de dimension 1, i.e. $V(I)$ est fini pour $I \neq (0)$.

Si on prends $x \in A$, psq si $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k, \ldots$ le contiennent alors on a une chaine

$$A \subset (A : \mathfrak{p}_1) \subset (A : \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \subset \ldots \subset (A : \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_k) \subset \ldots \subset x^{-1}A$$

d'où ça stationne et c'est fini.

Comme I est de type fini on obtient direct que $V(I)$ est fini.

1.2.3 Valuations et décomposition

Étant donné $I \subset A$, on a $I_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^m$ et on peut définir $v_\mathfrak{p}(I) = m$, on l'étend à $I \subset K$ par $(I : A)$.

1.2.4 Relever l'inversibilité en général

Il transforme aussi $(I : J)$ en $(I_\mathfrak{p} : J_\mathfrak{p})$. Concrètement :

$$(\mathfrak{p}.(A : \mathfrak{p})) \otimes_A A_\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}.(A_\mathfrak{p} : \mathfrak{p}A_\mathfrak{p})) = A_\mathfrak{p}$$

sauf que à gauche $\mathfrak{p}.(A : \mathfrak{p}) \subseteq A$ est un idéal et y'a que A qui a pour image $A_\mathfrak{p}$.

Remarque 2. *On a utilisé que* $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ *est injectif.*

Remarque 3. *Ca se généralise direct à* I *un idéal fractionnaire car* $I \otimes_A A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^n$ *d'où* $(I\mathfrak{p}^{-n})_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}$.

Note 2. *Le foncteur* $\_ \otimes_A A_\mathfrak{p}$ *de* Mod_A *dans* $Mod_{A_\mathfrak{p}}$ *a surement les mêmes propriétés pour les bonnes définitions de produits et sommes.*

1.2.5 Décomposition en idéaux

Note 3. *Faire une section sur la décomposition en idéaux primaires.*

Chapitre 2

Extensions d'anneaux de Dedekind

2.1 Le cadre général

Comme on part d'un anneau de Dedekind $\mathcal{O}_K$. La première question c'est Quand est-ce que

$$\mathcal{O}_K - \tilde{\mathcal{O}}_K$$

est une extension d'anneaux de Dedekind. La question se réduit systématiquement à

Est-ce que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est noethérien ?

2.2 Ésthétique des anneaux de Dedekind

L'anneau de Dedekind est un anneau noethérien de dimension 1. Autrement dit, on est sur un schéma affine de dimension 1 :

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$$

Mais surtout, tout ses localisés à des premiers sont des anneaux de valuation discrète ! Ça ça m'intéresse pour les raisons suivantes :

1. On obtient un local-global en localisant.
2. On peut compléter et obtenir le cadre des corps locaux.

en particulier on a le pont de, si

$$K - L$$

est une extension de corps finis, on peut en faire une extension de corps valués via le processus suivant :

1. D'un premier de $\mathcal{O}_K$ on obtient $(\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{m}_K}$.

2. On obtient aussi un corps valué $(K, |.|_{\mathfrak{m}_K})$.

3. De $\mathfrak{m}_K\tilde{\mathcal{O}}_K = \prod \mathfrak{m}_i^{e_i}$ on obtient des premiers $\mathfrak{m}_i$.

4. D'un $\mathfrak{m}_i|\mathfrak{m}_K$ on obtient une extension de valeur absolue $|.|_{\mathfrak{m}_i}$ et une extension de DVR
$$\mathcal{O}_K - (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i}.$$

Géometriquement c'est l'étude de la fibre en $\mathfrak{m}_K \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Maintenant, on cherche a obtenir le e tel que $\mathfrak{m}_K = \mathfrak{m}_i^e$. On obtient la cardinalité de la fibre et l'indice de ramification des uniformisantes.

En fait maintenant le point puissant, c'est le point où on complète K en $\mathfrak{m}_K$ et L en $\mathfrak{m}_i$. Alors
$$\widehat{K} - \widehat{L}$$
a dimension f_ie_i.

Remarque 4. *Un point qui semble flou là c'est : mais si je complète K en $\mathfrak{m}_K$, $\widehat{L} = L.\widehat{K}$ donc il est où le choix de compléter en $\mathfrak{m}_i$ pour L ? On dirait que le choix est immédiat et les idéaux se contractent en un. En fait écrire*
$$L.\widehat{K}$$
équivaut à faire vivre L et $\widehat{K}$ au même endroit. D'où à plonger L dans une clôture de K, K^c et la regarder dans $(\widehat{K})^c$. Sinon on pourrait regarder
$$L \otimes_K \widehat{K}$$
et là son spectre est non trivial ! Choisir
$$L \otimes_K \widehat{K} \to (\widehat{K})^c$$
équivaut à choisir un idéal maximal.

On peut maintenant utiliser la théorie des corps complets et Hensel !

2.3 Les points omis

J'ai direct dit que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ était de Dedekind. En fait si L/K est finie c'est toujours vrai.

2.4 Quand est-ce que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est monogène sur $\mathcal{O}_K$?

2.5 L'étude du cas complet

2.6 Quand est-ce que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est noethérien ?

Comme d'hab on prends

$$L/K \text{ finie avec } K = Frac(\mathcal{O}_K) \text{ un anneau de valuation discrète}$$

Ensuite on regarde sa fermeture intégrale dans L, $\tilde{\mathcal{O}}_K$. On veut une extension de DVR, pour ça y faut que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ soit de Dedekind. Le problème c'est toujours de montrer que c'est noethérien.

2.6.1 Cas séparable

Étant donnée L/K finie séparable, on a tout ce qui nous faut. On a un discriminant non nul bien défini, d'où si $L = \oplus K e_i$ alors

$$(Tr(e_i e_j))_{i,j}$$

est non dégénérée. Puis on a une base duale à e_i, i.e. e_i^* telle que $Tr(e_i^* e_j) = \delta_{ij}$. Avec ça on peut

1. à partir de e_i une base de L/K dans $\tilde{\mathcal{O}}_K$, obtenir sa base duale pour la trace e_i^*.

2. montrer que tout élément entier $b = \sum \lambda_i e_i^*$ vérifie $\lambda_i \in \mathcal{O}_K$, via $Tr(be_i) = \lambda_i$!

3. D'où $\mathcal{O}_K$ est un sous $\mathcal{O}_K$-module d'un module de type fini donc noethérien.