Corps locaux

(Par Qing Liu)

Introduction

Le but c'est d'abord de décrire les extensions finies de corps locaux comment dans [**cassels**].

Chapitre 1

Corps ultramétriques complets

1.1 Valuations et valeurs absolues

Le but là c'est de classifier les valuations, d'abord sur des corps premiers comme $\mathbb{Q}$. D'abord l'équivalence entre valuations et valeurs absolues.

Définition 1.1.1 (Valuation)**.** Une valuation v (de rang 1) est un morphisme de groupe (multiplicatif vers additif)

$$K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

tel que $v(x+y) \geq min\{v(x), v(y)\}$ quand $x+y \neq 0$ avec $v(x+y) = \infty$.

Définition 1.1.2 (Valeur absolue)**.** Une valeur absolue $|.|$ est un morphisme de groupes multiplicatifs $K \to \mathbb{R}$ étendu avec $0 \mapsto 0$ et qui vérifie une inégalité triangulaire.

Le passage aux valeurs absolues : étant donné un réel $0 < t < 1$ on peut déf une valeur absolue

$$x \mapsto t^{v(x)}$$

Bon ensuite la caractérisation archimédienne :

Définition 1.1.3 (Valeur absolue archimédienne)**.** Un corps valué $(K, |.|)$ est archimédien si pour tout $(x, c) \in K \times \mathbb{R}$ il existe n t.q

$$c \leq |n.x|$$

et pas $n|x|$ attention.

Ensuite la première partie de la caractérisation :

Proposition 1.1.4. *Être archimédien c'est équivalent à*

- $(|n|)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est bornée.*
- $(|n|)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est* ≤ 1.
- $|.|$ *est ultramétrique!*

Preuve. La première équivalence est directe. La deuxième aussi via $x \mapsto x^k$ et la troisième se ramène à la deuxieme en regardant $|1+x| \leq 1$ et la flèche $x \mapsto x^k$ à nouveau ! (Ca caractérise les élements inferieurs à 1) □

Proposition 1.1.5 (Valuations et valeurs absolues)**.** *Il y a une bijection entre valeurs absolues ultramétriques et valuations. L'inverse de la flèche du dessus est juste*

$$|.| \mapsto \frac{1}{\log(1/2)}\log(|.|)$$

On s'approche du théorème d'Ostrowski. Avant on déf les équivalences de valeurs absolues.

Proposition 1.1.6 (La topologie induite)**.** *On obtient une distance à partir d'une valeur absolue puis la topologie de la distance.*

Dans le cas ultramétrique c'est très bizarre.

Proposition 1.1.7. *On a les propriétés suivantes.*

- *Si* $|x| \neq |y|$ *alors* $|x+y| = max(|x|,|y|)$.
- *Avec l'inégalité ultramétrique, les boules ont un seul centre.*
- *Puis deux disques qui s'intersectent forment en fait une chaine.*

Proposition 1.1.8 (Anneau de valuation)**.** *On peut déf l'anneau de valuation de* $(K,|.|)$ *par* $\mathcal{O} := \bar{D}(0,1)$ *les éléments de valuations plus petites que* 1. *Et son idéal maximal la boule ouverte* $D(0,1)$. *Les inversibles sont dans la frontière.*

Définition 1.1.9 (Équivalence de valeurs absolues)**.** Deux valeurs absolues sont équivalentes si elles définissent la même topologie.

Lemme 1.1.10 (Caractérisation)**.** *Deux valeur sabsolues sont équivalentes ssi il existe* $s \in \mathbb{R}_+^*$ *t.q* $|.|_1 = |.|_2^s$.

Preuve. La bonne idée c'est la caractérisation de $D(0,1)$ par les trucs qui tendent vers 0 par $x \mapsto x^k$. Faut comprendre que prendre des limites dans $\mathbb{R}$ donne la même chose pour $|.|_1$ et $|.|_2$. □

Ça suffit à prouver le théorème d'Ostrowski :

Théoreme 1.1.11 (Ostrowski)**.** *Une valeur absolue non triviale sur $\mathbb{Q}$ est équivalente soit à $|.|_\infty$ ou à une valeur absolue p-adique $|.|_p$.*

Preuve. Pour la partie non archimédienne, on regarde $\mathfrak{m} \cap \mathbb{Z}$ pour obtenir un p. Ensuite, on montre via $|uk| = |1 - vp|$ que $|k| = 1$ dés que $k \wedge p = 1$, $|vp| < 1$ parce que $vp \in \mathfrak{m}$. Ensuite y reste à comparer $|p|$ et $|p|_p$. Vu que $|x| = |p|^r|k| = |p|^r$.

Pour le cas archimédien l'idée c'est d'écrire a en base b pour comparer a^n et b^l où $l \sim n$. En particulier montrer que $|a| \geq 1$ implique $b \geq 1$ dès que $a \geq 2$ ET $|a| = |b|^{\log(a)/\log(b)}$, via la comparaison et par symétrie. Puis remplacer b par 2. On a montré que seul $|2|$ détermine le lien entre $|.|$ et $|.|_\infty$. □

Définition 1.1.12 (Places)**.** On définit une place comme une classe d'équivalence de valeurs absolues. Une place est finie/infinie si elle est ultramétrique/archimédienne.

1.2 Complétions et corps complets

Dès qu'on a un corps valué $(K, |.|)$, on peut construire une distance

$$d_{|.|} \colon (x, y) \mapsto |x - y|$$

puis définir des suites de Cauchy.

Définition 1.2.1. Un corps valué $(K, |.|)$ est complet si les suites de Cauchy pour $d_{|.|}$ convergent dans K.

Définition 1.2.2 (Complétion)**.** Pour tout corps valué $(K, |.|)$ il existe un corps valué complet $(\hat{K}, |.|)$ tel que $|.|$ s'étend à $\hat{K}$.

Preuve. L'idée c'est de regarder l'ensemble des suites de Cauchy $\mathscr{C}(K) \subset K^{\mathbb{N}}$, de voir que c'est un anneau puis de quotienter par l'idéal maximal des suites qui convergent vers 0. □

Définition 1.2.3 (Morphismes dans la catégorie des corps valués)**.** Un morphisme de corps valués est un morphisme d'anneau et une isométrie.

On peut étendre les morphismes vers des corps complets en morphismes de corps valués unique à unique isomorphisme près.

Remarque 1. *Si $(K, |.|)$ est ultramétrique et non triviale, $\hat{K}$ peut-être construit algébriquement. On fixe $t \in K$ t.q $0 < |t| < 1$. Dans l'anneau de valuation, on regarde*

$$\widehat{O}_K = \varprojlim_n (O_K/t^n O_K)$$

C'est un anneau intègre muni d'une valuation t.q

$$\widehat{v}((x_n)_n) = v(y)$$

où $(x_n) = \pi(y)$ et $\pi \colon O_K \to \widehat{O}_K;\ x \mapsto (x)_n$. C'est une valuation par densité. On l'étend au corps de fraction de la manière évidente. On peut montrer que c'est complet ***à faire****. Pareil en général $I \subset A$.*

Exercices 1.2.4. Rayon de convergence de $exp(z) = \sum_n \frac{z^n}{n!}$ dans $\mathbb{Q}_p$? Sachant que en métrique p-adique $1/n! \to_{n\to\infty} +\infty$. Faut calculer la valuation de $n!$.

Plus généralement, si A est intègre et $\mathfrak{m}a = tA$ est maximal on peut définir la valuation t-adique associée et l'étendre au corps de fractions et c'est une valuation discrète. Je crois que l'idée c'est que

$$I = \cap t^n A = \{0\}$$

parce que $tI = I$ puis Nakayama dans un anneau noethérien.

Apparemment il fait une construction de $\mathbb{R}$ sans complétion parce que c'est tautologique? Ah bah oui les valuations c'est dans $\mathbb{R}$, mais en fait on peut d'abord juste les prendre dans $\mathbb{Q}$.

Il regarde un corps K avec un ordre total compatible archimédien et la topologie de l'ordre.

Alors on demande enfin que $\iota \colon \mathbb{Q} \to K$ soit dense, on a nécessairement que ι est croissante. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans K, on peut remplacer toute les suites de Cauchy dans K par des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

En particulier, y'a équivalence entre les suites de Cauchy de K et $\mathbb{Q}$. On regarde maintenant $C(\mathbb{Q})$ les suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ et $I(\mathbb{Q})$ les suites qui tendent vers 0. Dans

$$\pi \colon C(\mathbb{Q}) \to C(\mathbb{Q})/I(\mathbb{Q})$$

on définit un ordre à droite via $\pi(x_n)_n \geq \pi(y_n)_n$ ssi on a égalité où il existe $r \in \mathbb{Q}_+^*$ t.q $x_n \geq y_n + r$. On obtient un corps totalement ordonné $C(\mathbb{Q})/I(\mathbb{Q})$ (totalement car $\pm\pi(x_n)_n \geq 0$). Bon maintenant faut juste conclure en montrant que le quotient est complet. **à faire?**

Remarque 2. *On a bel et bien utilisé que $\mathbb{Q}$.*

Proposition 1.2.5. *$\mathbb{R}$ est unique à unique isomorphisme près en tant que corps totalement ordonné complet archimédien où $\mathbb{Q}$ est dense.*

1.3 Espaces de Banach

Une norme K sur un espace vectoriel V est une flèche $x \mapsto ||x||$ qui est nulle qu'en 0, a une inégalité triangulaire et qui transforme l'action de K en action de $\mathbb{R}$ via $|.|$.

Définition 1.3.1. Un e.v.n est un Banach si il est complet pour sa norme.

Remarque 3. *Un k-espace vectoriel de dimension finie sur un corps complet est un Banach. L'inverse est faux!*

Définition 1.3.2. Deux normes sont équivalentes si elles définissent la même topologie. Ou immédiatemment si il existe c_1, c_2 t.q

$$c_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq c_2||x||_1$$

L'intérêt c'est maintenant qu'étant donné une extension de corps L/k et une valeur absolue sur k, qu'est-ce qu'il se passe quand on l'étend à L? En fait c'est des normes sur L en tant que k-ev, et elles sont équivalentes en tant que norme ssi elles le sont en tant que v.a par définition!

Théoreme 1.3.3. *Si k est complet, et V est un k-ev de dimension finie, alors toutes les normes sur V sont équivalentes et V est un Banach.*

Démonstration. La norme du max donne une structure de Banach grâce à la convergence normale. Il reste à montrer que toutes les normes sont équivalentes à la norme du max $||.||_\infty$. Un côté est simple, l'autre par induction **Faire? Ah la preuve est non triviale mdr**. □

1.4 Lemme de Hensel

Soit $(K, |.|)$ un corps complet ultramétrique. On note $k = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}$ le corps résiduel.

Lemme 1.4.1 (Lemme de Hensel)**.** *Soit $P(X) \in \mathcal{O}_K[X]$, on suppose que $P \equiv f.g \mod \mathfrak{m}$ tels que $gcd(f, g) = 1$. Alors il existe $F, G \in \mathcal{O}_K[X]$ tels que*

$$P = F.G$$

et $F \equiv f \mod \mathfrak{m}$, $G \equiv g \mod \mathfrak{m}$, avec $\deg(F) = \deg(f)$. La décomposition est unique à inversible près.

Démonstration. On commence par prendre un lift F_0 de f et G_0 de g de degrés minimaux. On a $(f,g) = k[X]$ d'où $1 \in (F_0, G_0) + \mathfrak{m}[X]$, il existe donc $t \in K$ t.q $0 < |t| < 1$ et $\begin{cases} P - F_0G_0 \in t\mathcal{O}_K[X] \\ 1 \in (F_0, G_0) + t\mathcal{O}_K[X] \end{cases}$. On a déjà augmenté la précision. Soit $F_1 = F_0 + tV_1$ et $G_1 = G_0 + tU_1$. On veut $P - F_1G_1 \in t^2\mathcal{O}_K[X]$ t.q $\deg(F_1) = m$ et $\deg(G_1) \leq d - m$. On regarde

$$\begin{aligned} P - (F_0 + tV_1)(G_0 + tU_1) &= P - (F_0G_0 + t(F_0U_1 + G_0V_1) + t^2U_1V_1) \\ &= (P - F_0G_0) + t(F_0U_1 + G_0V_1) + t^2* \\ &= tE_0 + t(\_) + t^2* \\ &= t(E_0 + F_0U_1 + G_0V_1) + t^2* \end{aligned}$$

On prends $E_0 = H_0F_0 + R_0G_0 + t*$. **Revoir la preuve ailleurs.** □

Corollaire 1.4.2. *On garde les hypothèses sur K. Étant donné un polynôme irréductible $P \in K[X]$, on a*

$$max_i|a_i| = max\{|a_0|, |a_d|\}.$$

En particulier si $a_d = 1$ et $a_0 \in \mathcal{O}_K$ alors $P \in \mathcal{O}_K[X]$.

Démonstration. Supp $|a_{i_0}| > |a_0|, |a_d|$. Alors $P' = P/a_{i_0} \in \mathcal{O}_K[X]$. On a

$$P' = X^r g(X) \mod \mathfrak{m}_K$$

avec $r > 0$ et $g(0) \neq 0$. On a $r \leq \deg(P' \mod \mathfrak{m}_K) < d$ et par le lemme de Hensel $P(X) = FG$ avec $0 < \deg(F) = r < d$ par déf, c'est contradictoire. □

Corollaire 1.4.3 (Lemme de Hensel)**.** *Si $P \in \mathcal{O}_K[X]$ a une racine simple modulo $\mathfrak{m}_K$. Alors P a une unique racine congrue à elle modulo $\mathfrak{m}_K$.*

Démonstration. Clair par l'unicité du relèvement. □

Corollaire 1.4.4 (Lemme de Newton)**.** *Pour $P \in \mathcal{O}_K[X]$, on suppose qu'il existe $\alpha \in \mathcal{O}_K$ tel que*

$$|P(\alpha)| < |P'(\alpha)|^2$$

alors il existe un unique $\tilde{\alpha} \in \mathcal{O}_K$ tel que

$$\begin{cases} P(\tilde{\alpha}) = 0, \\ |\tilde{\alpha} - \alpha| < |P'(\alpha) \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\lambda = P'(\alpha)$, l'expansion de taylor de P en α est

$$P(X+\alpha) = P(\alpha) + P'(\alpha)X + X^2R(X)$$

avec $R(X) \in \mathcal{O}_K[X]$. Soit $H(X) = \lambda^{-2}P(\lambda X + \alpha)$, on a

$$P(\lambda X + \alpha)/\lambda^2 = P(\alpha)/\lambda^2 + X + X^2R_1(X)$$

et $|P(\alpha)/\lambda^2| < 1$ par hypothèse. Donc on a $H(X) \in \mathcal{O}_K[X]$ et $\bar{H}(X) = X(1+XG(X))$ pour un G. Et 0 est une racine simple de $\bar{H}$. Par le corollaire précédent on a une unique racine t de H telle que $|t| < 1$. D'où $\lambda t + \alpha$ est une racine de P et c'est la seule dans $D(\alpha, |\lambda|)$. $\square$

Exemple 1. Dans $\mathbb{Q}_p$, si $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ et $|\alpha|_p < 1$ alors $1+\alpha$ a une racine n-ème dans $\mathbb{Z}_p$ si n est premier à p. On peut considérer $X^n - (1+\alpha) \in \mathbb{Z}_p[X]$, dans $\mathbb{F}_p$: $X^n - (1+\alpha) = X^n - 1$ a une racine simple $X = 1$ puis lemme de Hensel.

Exemple 2. Si $n = p-1$, $P = X^{p-1} - 1$ est décomposé dans $\mathbb{F}_p$ d'où on a les racines $p-1$-èmes de l'unité dans $\mathbb{Z}_p$.

Exemple 3. Si $n = p$, $(1+p\alpha)^p = 1 + p^2\alpha*$ et $(1+X)^p = 1 + pX + p(p-1)/2X^2{}_{-} + pX^{p-1} + X^p$ et $p \mid \binom{p}{k}$ pour $1 \leq k \leq p-1$. Enfin

$$(1+p\alpha)^p = 1 + p^2\alpha*$$

et $(1+p) \neq (1+\alpha)^p, \alpha \in \mathbb{Z}_p$.

Exemple 4. Enfin par exemple $X^2 - p$ peut pas avoir de racines dans $\mathbb{Z}_p$ parce que $\equiv X^2 \mod p$ et $v_p(\alpha^2) = 2v_p(\alpha) \neq 1 = v_p(p)$.

Théoreme 1.4.5 (Lemme de Hensel multivarié)**.** *Soit $F(X,Y) \in \mathcal{O}_K[X,Y]$. On suppose que $\bar{F}$ a un zéro (a,b). On suppose que $\bar{F}'_X(a,b) \neq 0$. Alors*

$$\{(x,y) \in \mathcal{O}_K^2 \mid F(x,y) = 0, \bar{x} = a, \bar{y} = b\}$$

est en bijection avec

$$\{t \in \mathcal{O}_K \mid |t| < 1\}.$$

Démonstration. Soit $t \in \mathfrak{m}_K$. On considère $P = F(X, \tilde{b} + t) \in \mathcal{O}_K[X]$ où $\tilde{b} \equiv b$ et $\bar{P}(X) = \bar{F}(X,b)$, $\bar{P}'(X) = \bar{F}'_X(X,b)$. Par le lemme de Hensel, P a une unique racine $\alpha(t) \in \mathcal{O}_K$, telle que $\bar{\alpha}(t) \equiv a$. Alors

$$\{|t| < 1\} \to \{(x,y) \in \mathcal{O}_K^2 | F(x,y) = 0, \bar{x} = a, \bar{y} = b\}$$

est injective car $t \mapsto b + t$ est injective.

Inversement, si (x, y) est dans l'ensemble de droite. On pose $t = y - b$ d'où $P_t(x) = 0$, $\bar{x} = a$ implique $x = \alpha(t)$. En fait,

$$\{|t| < 1\} \to \{F^{-1}(0) \dots\}$$

est continue et même analytique. □

Exemple 5. Soit $E\colon y^2 = x^3+1$ sur $\mathbb{Q}_p$, $p > 3$. On regarde $F = Y^2-(X+1)^3$. On a $F_X = 3X^2$ et $F_Y = 2Y$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{F}_p^2$ tel que $b^2 = a^3 + 1$, au moins l'un des $\bar{F}_X(a, b)$ et $\bar{F}_Y(a, b)$ est non nul. Alors $E(\mathbb{Z}_p)$ est une union disjointe de disques ouvert de $\mathbb{Z}_p$ indexés par $E(\mathbb{F}_p)$.

1.5 Extension de valeurs absolues

On considère L/K une extension finie de corps quelconques. Pour rappel la norme

$$N_{L/K}(\alpha)\colon L \to K$$

est définie comme le déterminant de $x \mapsto \alpha x$ dans L.

Proposition 1.5.1. *Pour $\alpha \in L$,*

- $N(\alpha) = \alpha^[L : K]$ *si* $\alpha \in K$.
- *La norme est multiplicative.*
- *Étant donné $L/E/K$, on a $N_{L/K}(\alpha) = N_{E/K}(N_{L/E}(\alpha))$. (dur)*
- *Si $P(X) = X^d + \ldots + a_0$est le polynôme minimal de α sur K, alors, $N_{K[\alpha]/K}(\alpha) = (-1)^d a_0$.*

En particulier, le cas $E = K[\alpha]$ est intéressant.

Théoreme 1.5.2. *Si K est complet ultramétrique. Soit L/K une extension finie. Alors $|.|$ s'étend uniquement en une valeur absolue sur L via*

$$|\alpha| = |N_{L/K}(\alpha)|^{1/[L:K]}.$$

Démonstration. L'existence consiste à vérifier que c'est bien une valeur absolue. On supp $|\alpha|_L \leq 1$. On doit vérifier que

$$|1 + \alpha|_L \leq 1$$

mais $|\alpha|_L \leq 1$ dit que $|N_{L/K}(\alpha)| \leq 1$. Si P est le polynôme minimal de α alors $|a_0| \leq 1$ d'où par le corollaire de Hensel $P \in \mathcal{O}_K[X]$. En plus, $P(X - 1)$

est le pol minimal de $1+\alpha$. D'où $|N_{K[\alpha]/K}(1+\alpha)| = |1+\alpha|_L \leq 1$. Enfin l'unicité est dûe à l'unicité des normes sur L en tant que K-ev. (**regarder**)

Si $|.|$ est triviale les extensions définissent des topologies discrètes donc sont triviales. $\square$

Ça c'est pour les extensions finies.

Corollaire 1.5.3. *Une valeur absolue sur un corps ultramétrique complet K s'étend uniquement en une valeur absolue sur $\bar{K}$!*

Démonstration. L'idée c'est de définir

$$|\alpha| := |N_{K[\alpha]/K}(\alpha)^{1/[K[\alpha]:K]}$$

et tout se vérifie localement. En fait dès que $\alpha \in L$, on a $|N_{K[\alpha]/K}(\alpha)|^{1/[K[\alpha]:K]} = |\alpha|_L$. $\square$

Proposition 1.5.4. *Soit $(K, |.|)$ un corps ultramétrique et L/K une extension finie. Alors il existe au plus $[L : K]$ extensions de $|.|$ à L.*

Sans les valeurs absolues, on a tjr un diagramme

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[d, dash] \arrow[rrd, dashed] & & \\
K \arrow[r, dash] & \widehat{K} \arrow[r, dash] & \widehat{K}^c \\
|.| & |.| & |.|_c
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On commence par remarquer qu'on en a une manière d'en avoir $[L : K]$ via $x \mapsto |\sigma(x)|_c$ et qu'on a $|Aut(L/K)| \leq [L : K]$. On montre que toute extension est donnée par un plongement $\sigma \colon L \to \widehat{K}^c$. Étant donné le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(L, |.|_L) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \widehat{L} \arrow[d, phantom, "\cup"] & \\
(K, |.|) \arrow[r, dash] & K' \arrow[r, "\sim"] & \widehat{K}
\end{tikzcd}$$

où K' est la cloture topologique de K dans $\widehat{L}$, on obtient un isomorphisme $K' \to \widehat{K}$. On veut maintenant montrer que $\widehat{L}$ est finie sur K'. Si c'est le cas alors on a un τ tel que $|\tau(x)|' := |x|_{\widehat{L}}$ pour tout $x \in \widehat{L}$. C'est une valeur absolue sur $\tau(\widehat{L}) \subset \widehat{K}^c$ qui étend celle de $\widehat{K}$! L'unicité sur $\widehat{K}^c$ implique que $|.|' = |.|_c$ d'où $|.|_{\widehat{L}} = |.|_c \circ \tau$.

On prouve maintenant que $\widehat{L}$ est finie sur K'.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[dd, dash, "finie"'] & & \widehat{L} \arrow[dl, dash] \arrow[dd, phantom, "\cup"] \\
& L.K' \arrow[dr, dash, "finie"] & \\
K \arrow[ur, dash] \arrow[rr, dash] & & K'
\end{tikzcd}$$

On remarque que $L.K'$ est complet donc fermé dans $\widehat{L}$. On conclut en remarquant que c'est dense parce que L est dense dans $\widehat{L}$. □

1.6 Extension de $|.|$ à une extension quelconque

Il suffit de savoir étendre à une extension purement transcendante. On regarde dans

$$K(x_i)_{i\in I} = \bigcup_{J\subset I; \#J<\infty} K(x_j)_{j\in J}$$

si on a une manière de définir des normes de manières canoniques sur les extensions finiment générées. On a sur $K[X_1, \dots, X_n]$ la norme de Gauss

$$||\sum \lambda_{k_1\dots k_n} X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}|| = max|\lambda_{k_1\dots k_n}| \in \mathbb{R}$$

est multiplicative! Et s'étend donc en une valeur absolue de $K(X_1, \dots, X_n)$.

Remarque 4. *En analyse p-adique on a besoin de corps algébriquement clos. Mais $\mathbb{Q}_p^c$ n'est pas complet mdr, donc on complète à nouveau en $\widehat{\mathbb{Q}_p^c}$, et cette fois c'est complet et clos.*

Théoreme 1.6.1. *Soit $(K, |.|)$ un corps ultramétrique. Alors*

$$\widehat{\widehat{K}^c}$$

est complet et algébriquement clos.

On prouve d'abord une proposition, comme dans le cas réel ou complexe, soit $(K, |.|)$ un corps valué. On ajoute la norme 1 (au cas où c'est archimédien) sur $K[X]$. On étend $|.|$ à K^c ($\mathbb{C}$ si archimédien).

Proposition 1.6.2 (Continuité des racines)**.** *Soit $P \in K[X]$ un polynôme unitaire de degré n, alors pour tout $\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ dépendant uniquement de P est ϵ tel que pour tout $Q \in K[X]$ unitaire de degré n avec $||P - Q||_1 < \delta$ on a, pour toute racine $\alpha \in K^c$ de P il existe $|\alpha - \beta| < \epsilon$ et $Q(\beta) = 0$.*

Démonstration du théorème. On peut supposer K complet. Soit $P \in \widehat{K^c}[X]$ et α une racine dans une extension finie. Pour tout $m \geq 1$ et $\epsilon = 1/m$, on a $Q_m \in K^c[X]$ tel que

$$||P - Q_m|| < \delta_m$$

implique qu'il existe une racine β_m de $Q_m(X)$ telle que $|\alpha - \beta_m| < 1/m$. Clairement, $(\beta_m)_m$ est de Cauchy et $\beta_m \in K^c$ d'où $\alpha = \lim_m \beta_m \in \widehat{K^c}$ et on a fini. $\square$

Démonstration de la proposition. On peut noter que $||P|| \geq 1$ implique $|\alpha| \leq ||P||$ si $|\alpha| \leq 1$. On suppose donc $||\alpha|| \geq 1$. On a

$$|\alpha^n| = |-a_{n-1}\alpha^{n-1} - \ldots - a_0| \leq \left(\sum_{0 \leq i \leq n-1} |a_i| \right) |\alpha|^{n-1}$$

puis

$$\leq ||P||.|\alpha|^{n-1} \implies |\alpha| \leq ||P||.$$

Maintenant $|Q(\alpha)| \leq ||Q - P|| max\{1, |\alpha|^n\}$ et $Q(X) = \prod (X - \beta_i) \implies \prod |\alpha - \beta_i| \leq ||Q - P|| max\{1, |\alpha|^n\}$ c'est équivalent à ce qu'il existe $\beta - \beta_{i_0}$ t.q

$$|\alpha - \beta|^n \leq ||Q - P||.||P||^n \implies |\alpha - \beta| \leq ||Q - P||^{1/n}.||P||.$$

$\square$