Extensions de valuation

Ici, on s'en fout de savoir si $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est fini sur $\mathcal{O}_K$.

Chapitre 1

Cas archimédien

On se place donc en caractéristique 0 et sur $K = \mathbb{Q}$. Parce que un corps archimédien algébriquement clos complet est isométrique à $\mathbb{C}$.

1.1 Cas complet

On est soit $\mathbb{C}$ soit $\mathbb{R}$.

1.2 En général

On a $r_1 + r_2$ extensions de $|.|_\infty$ de $\mathbb{Q}$ à L. Avec $r_1 + 2r_2 = [L : \mathbb{Q}]$ et les complétés pour r_1 c'est $\mathbb{R}$. Pour r_2 c'est $\mathbb{C}$.

Chapitre 2

Extension via les complétions : cas ultramétrique

2.1 Unicité sur $(\hat{K})^c$

Étant donné un corps complet K, les extensions L de K sont des corps complets et les normes sont équivalentes.

2.1.1 Extension pour les corps complets

Ce truc

$$x \mapsto |N_{L/K}(x)|^{1/[L:K]}$$

est une valeur absolue qui étend $|.|$ donc l'unique. Pour montrer que c'est ultramétrique on peut par multiplicativité étudier si $|x|_L \leq 1$ force $|1+x|_L \leq 1$ ou la norme de $1+x$. Via Le corollaire de Hensel et le fait que le polynôme minimal de $1+x$ est $\mu(x-1)$ avec μ celui de x on peut conclure simplement parce que $\mu(-1) \in \mathcal{O}_K$.

2.1.2 Détails

L'équivalence de normes force l'équivalence de valeur absolues (passer par la topologie par exemple mais c'est pas clair pourquoi c'est pas bizarre).

Cette réf explique bien la nuance entre valeur absolue et norme. En gros $|.|_1$ et $|.|_2$ deux valeurs absolues étendant $|.|$ sont des K-normes pour $|.|$. Le petit truc bizarre sur le fait que l'équivalence de valeur absolue est exponentielle et l'équivalence de norme est linéaire c'est que. L'équivalence de normes sous entend la même valeur absolue pour laquelle c'est des normes donc forcément l'égalité de valeurs absolues.

2.1.3 Passer à la clôture algébrique

D'une v.a sur K^c suffit de restreindre à L/K on garde une v.a donc l'unique!

2.2 Extensions en général par plongements

Y'a deux manières de faire. Soit regarder K dans $\hat{L}$. Soit regarder L dans $(\hat{K})^c$. La première à l'avantage de sous-entendre la valeur absolue.

2.2.1 Deuxième manière

On regarde K^c dans $(\hat{K})^c$. Alors si $|.|_L$ étend $|.|$ et

$$\tau \colon L \to K^c$$

est un plongement. On peut étendre τ à $\hat{K}.\tau(L)$ un corps complet sur $\hat{K}$ de dimension finie. En plus la valeur absolue s'étend aussi directement et étend bien celle de $\hat{K}$ par limite. En particulier, pour $x \in L$ $|\tau(x)|_{\hat{K}.\tau(L)} = |\tau(x)|_c$ est uniquement determinée par τ. À l'inverse n'importe quel plongement $L \to K^c$ fournit une valeur absolue.

2.3 Extensions en général via les idéaux maximaux de $L \otimes_K \hat{K}$ (topologie)

On note $B_L = L \otimes_K \hat{K}$. En tant qu'espace vectoriel c'est de dimension

$$[L : K]$$

le produit est sur K. C'est un Banach et on a des flèches

$$L \to B_L$$

via $x \mapsto x \otimes 1$ et si on a une extension de $|.|_K$ à L, et qu'on note sa complétion E on a $\iota \colon \hat{K} \to E$ donné par $K \to L \to E$ et $L \to E$ donné par l'injection d'où

$$B_L \to E$$

via $x \otimes y \mapsto x\iota(y)$. À gauche ça a une structure d'algèbre et donc le noyau est un idéal maximal si c'est non nul. C'est clairement non nul par la dimension.

Remarque 1. *Je pense qu'un truc intéressant c'est d'utiliser une base normale d'une clôture galoisienne de sorte à ce que des racines soient associées à des valeurs absolues. En fait le cas séparable est clair et on peut pas se ramener au cas galoisien dans le cas inséparable :c. Mais pour le cas séparable c'est pas mal!*

2.3.1 À regarder

La même chose que $\dim_k \tilde{\mathcal{O}}_K/\mathfrak{m}_K\tilde{\mathcal{O}}_K = [L : K]$ mais avec $\dim_K(L\otimes\hat{K})/\prod \mathfrak{m}_i$.

D'ailleurs c'est quel schéma qui a les deux en même temps ? $\mathrm{Spec}(\tilde{\mathcal{O}}_K) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ j'imagine, mais le premier quotient c'est pas clair ou il apparaît. Fin c'est $V(\mathfrak{m}_K\tilde{\mathcal{O}}_K)$ qui est pas un point. Et le produit tensoriel c'est la fibre en (0) d'un $\mathcal{O}_X$-module j'imagine où d'une fibre bien choisie.

2.3.2 Interprétation : pourquoi on a pas $L_i \to B_L$

La norme $|.|_i$ sur L_i mesure que la partie associée à $\mathfrak{m}_i$ de L sur K. Tandis que la norme naturelle sur $L \otimes_K \hat{K}$ est vraiment la norme terme à terme sur K. En gros, si par exemple L/K est totalement décomposée au dessus de $|.|$ et (x_i) est une base normale. Alors $|.|_i$ force $|x_j|_i = |x_i|_i$ avec $j \neq i$. Tandis qu'une norme sur B_L ne mesure pas les x_i. Seulement via $\hat{K}$.

2.4 Calcul par la deuxième version

Comment savoir combien on a d'extension ? Il faut calculer B_L explicitement ! Par exemple :

$$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \simeq \mathbb{Q}_p[X]/(X^2 - 2)$$

et $\binom{2}{p} = 1$ si et seulement si $p^2 \equiv 1 \mod 8$. Donc $|.|$ a une ou deux extensions en fonction de p via Hensel.

2.4.1 Lien avec la ramification

Je le mentionne ici, mais pour avoir une extension non ramifiée en $\mathfrak{p}$, faut que B_L soit un produit de corps ducoup!

Chapitre 3

Extension par les anneaux de valuations discrètes

Étant donné un corps (K, v) de valuation discrète. Une extension (L, w) finie de v. L'anneau $\tilde{\mathcal{O}}_K = \tilde{\mathcal{O}}_v$ est semi-local sur $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_v$. Le but c'est de dire que $\mathcal{O}_w = (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}}$ pour un idéal max de $\mathcal{O}_K$ et que chaque idéal maximal de $\tilde{\mathcal{O}}_K$ correspond à une valuation.

Ici, on s'en fout de savoir si $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est fini sur $\mathcal{O}_K$.

3.1 Extensions par les idéaux maximaux

Étant donné seulement $L - K$ finie. un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\tilde{\mathcal{O}}_K$ fournit un dvr $(\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}}$ et une extension de dvrs. Alors

$$w_{\mathfrak{m}} := v_{\mathfrak{m}}/v(\pi_K)$$

étend v et est une valuation discrète sur L. C'est clair que différents idéaux fournissent des valuations différentes.

3.2 Idéal maximal associé à une valuation

À l'inverse si w étend v. Alors $\mathcal{O}_w$ contient $\tilde{\mathcal{O}}_K(w)$ en étudiant la valuation d'une relation. Ensuite faut montrer que

$$(\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_w \cap \tilde{\mathcal{O}}_K} = \mathcal{O}_w$$

À faire c'est pas dur.

Chapitre 4

Remarques

4.1 Cas primitif $L = K[\alpha]$, l'extension

J'écris $L = K[X]/(P(X))$. On regarde B_L

$$L \otimes_K \hat{K} = \prod \hat{K}[X]/(P_i(X)^{b_i})$$

où si y'a un $b_i > 1$ c'est que l'extension est inséparable, parce que P est irréductible donc séparable équivaut à racine simple.

4.2 Cas primitif $L = K[\alpha]$ et monogène $\tilde{\mathcal{O}}_K = \mathcal{O}_K[\alpha]$, l'extension résiduelle

Ça devrait plutôt être dans calculramification un truc comme ça mais bon. On regarde $\mathcal{O}_{\hat{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \tilde{\mathcal{O}}_K = \prod \mathcal{O}_{\hat{K}}[X]/(P_i(X)^{b_i})$. On étend via $k_K \simeq \mathcal{O}_{\hat{K}}/\mathfrak{m}_{\hat{K}}$ pour obtenir la forme résiduelle avec la ramification.

$$\prod \mathcal{O}_{\hat{K}}[X]/(P_i(X)^{b_i}) \otimes_{\mathcal{O}_K} k_K = \prod k_K[X]/(P_i(X)^{e_i})$$

Remarque 2. *Pour remarque ducoup, ce produit tensoriel y'a pas de pb le calcul est identique à celui pour les corps. Ça utilise toujours que la prop universelle des anneaux de polynômes et l'exactitude à droite.*

Maintenant c'est bien clair que c'est non ramifié ssi la version résiduelle est un produit de corps.