# Examen partiel géométrie algébrique

# Table des matières



## 0.1 Exercice 3)

Pour l'exo 3) sur les codimensions :

1. Cas irreductible :

$$codim(Z,X) = \sup\{\#\{Z = Z_0 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_n\}\}$$

2. En général :

$$\inf codim(W,X)$$

pour les composantes $W$ de $Z$.

### 0.1.1 $\dim(X) \geq codim(Z,X) + dim(Z)$

Clair.

### 0.1.2 $codim(Z,X) = 0$ ssi $Z$ contient une composante de $X$

On peut supposer $X$ irréductible ? Si $Z$ contient une composante c'est clair la codimension. Si $codim(Z,X) = 0$, et si $Z$ ne contient pas de composante, étant donné une chaine de longueur maximale $Z_0 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_n = Z$ on peut

pas conclure direct parce que la chaine peut-être de longueur maximale pour $Z$ ET maximale pour $X$ sans être de longueur maximale. Maintenant $Z$ irreductible implique $Z \subset W$ une composante de $X$. Et $codim(Z, W) = 0$ implique $Z \subset W$ n'est pas stricte, d'où $Z = W$.
Suffit de supposer $Z$ irréductible (on prends une de ses composantes de dim maximale).

### 0.1.3 $X$ affine, $Z$ fermé irreductible de $X$, $codim(Z, X) = 1 \leftrightarrow dim A(X)_{I(Z)} = 1$

On a une bijection entre $Spec(A(X)_{I(Z)}$ et $Spec(A(X)) \cap D(I(Z))$ (Faut pas croiser $A - I(Z)$) préservant l'inclusion. Le résultat tombe direct.

### 0.1.4 $X$ affine intégre et $Z$ irred, $codim(Z, X) = 1$

Faut montrer que pour tout $f \in I(Z) - 0$ il existe $h \in A(X)$ t.q

$$Z \cap D(h) = Z(f) \cap D(h) \neq \emptyset.$$

Pour un tel $f$ on a $Z \subset Z(f)$, si $Z(f) = Z$ on a $h = 0$ suffit. Sinon, on a $Z \subsetneq Z(f)$ et $codim(Z, Z(f)) = 0$ d'où $Z$ est une composante de $Z(f) \cup \bigcup_i W_i$. On prends des générateurs des $I(W_i) = (g_{ij}, j)$ puis on pose $h = \prod g_{ij}$ et le résultat via la dimension ?

### 0.1.5 $X$ intègre, $Z$ irred fermé, $codim(Z, X) = dim(X) - dim(Z)$

Par récurrence apparemment, pour codimension 0 c'est clair, Pour la codimension 1 c'est question 4)? On peut prouver maintenant que pour tout $Z \subsetneq Z_1$ irréd avec $codim(Z, Z_1) = 1$ on a

$$codim(Z_1, X) \leq codim(Z, X) - 1$$

alors $codim(Z, X) \geq dim(X) - dim(Z_1) + 1 = dim(X) - dim(Z)$. D'où le résultat par double inégalité.
Le claim c'est que si

$$Z \subsetneq Z_1 \subsetneq Z_2 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_{codim(Z,X)}$$