

# 0.1 2e point sur les cours, 09/10/2024

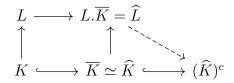
## 0.2 1er point sur les cours, 04/10/2024

### 0.2.1 Extensions sur corps non complets

Si  $(K, |.|_K)$  est ultramétrique et E/K finie. On peut regarder Aut(L/K) pour construire

$$|.|_L \mapsto |\sigma(.)|_L$$

elles étendent toutes  $|.|_K$  et on en a #Aut(L/K)/ef dans le cas galoisien par exemple. À l'inverse, étant donné  $|.|_L$  qui étend  $|.|_K$  on peut obtenir un  $\sigma$  en trouvant  $\tau \colon \widehat{L} \to (\widehat{K})^c$  d'où  $|.|_{\widehat{L}} = |.|_c \circ \tau$ . En fait on regarde



où  $\overline{K}$  est l'adhérence de K dans  $\widehat{L}$ . L'égalité montre que  $\widehat{L}$  est de dimension finie sur  $\widehat{K}$ . En particulier on obtient  $\tau\colon \widehat{L}\to (\widehat{K})$ . Ensuite,  $\tau(\widehat{L})\ni \tau(x)\mapsto |x|_{\widehat{L}}$  est une valeur absolue sur  $\tau(\widehat{L})\subset (\widehat{K})^c$  qui étend celle de  $\overline{K}\simeq \widehat{K}$  d'où par unicité sur la clôture on a

$$|x|_{\widehat{L}} = |\tau(x)|_c$$

et on peut faire redescendre sur  $\tau|_L: L \to K^c$ .

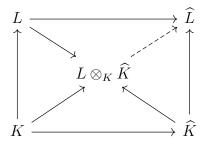
Remarque 1. Y'a plusieurs plongements en général  $\widehat{L} \to (\widehat{K})^c$  penser au groupe de galois sur  $\mathbb{Q}$  qui devient le groupe de décomposition sur  $\mathbb{Q}_p$ . Et y définissent tous la même valeur absolue sur  $\widehat{L}$ .

#### 0.2.2 Avec les anneaux artiniens

Là y'a un truc cool qui montre clairement la décomposition des premiers dans des extensions! On a une correspondance entre

{Idéaux maximaux de  $L \otimes_K \widehat{K}$ }  $\leftrightarrow$  {extensions de  $|.|_K$  à L}

Pour la surjectivité on utilise



et on pose  $\mathfrak{m}_{|.|_L} = \ker(L \otimes_K \widehat{K}) \to \widehat{L}$ . Pour l'injectivité c'est assez direct.

### 0.2.3 Extensions de valuations et corps complets

Le cas archimédien est assez particulier puisque y'a que  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ . C'est l'exercice 8 de la feuille où on peut montrer que tout corps archimédien complet qui contient i est isomorphe à  $\mathbb{C}$ . Je vais regarder surtout le cas non archimédien.

**Théoreme 1.** Si C(K) est l'ensemble des suites de Cauchy sur K et  $\mathfrak{m}(K)$  celles qui tendent vers 0 alors  $\mathfrak{m}(K)$  est maximal et  $C(K)/\mathfrak{m}(K)$  est un corps complet minimal où K est dense.

Pour les extensions maintenant on a besoin de Hensel et du fait que

Corollaire 1. Si K est complet ultramétrique, le max des coefficients de P(X) irréductible sur K est atteint par  $P^*(0)$  (coeff dominant) ou P(0). En particulier si  $P^*(0) = 1$  et  $|P(0)| \le 1$  alors P est dans  $\mathcal{O}_K[X]$ .

mais j'en parlerai a un autre moment. Donc maintenant qu'on sait c'est quoi les corps complets premiers en caractéristique 0 on regarde leurs extensions finies. L'idée c'est que c'est des Banach de dimension finie sur un  $\mathbb{Q}_p$  donc

• Toutes les normes sont équivalentes.

en particulier les valeurs absolues sont équivalentes, donc y'en a qu'une qui étend  $|.|_p$ .

Construction de la valeur absolue. Étant donné  $x \in L/K$  on regarde l'endomorphisme de multiplication sur L par  $x, m_x \in End_K(L)$ . On déf

$$N_{L/K}(x) = \det(m_x)$$

comme  $N_{L/K}(y \in K) = y^{[L:K]}$  on déf

$$|.|_L := |N_{L/K}(.)^{1/[L:K]}|$$

pour vérifier qu'elle est ultramétrique, on se rappelle que  $\det(m_x)$  est le coefficient constant de  $\chi_{m_x}(X)$  le polynôme caractéristique de  $m_x$  à coefficient dans K. En plus  $x \mapsto m_x$  est un homomorphisme d'anneau. D'où

$$N_{L/K}(x) = (-1)^{[L:K]} \chi_{m_x}(0)$$

si on remarque que  $m_x$  est diagonale par bloc avec [L:K(x)] blocs. On peut affiner en remarquant que

$$\chi_{m_x} = \mu_x^{[L:K(x)]}$$

avec  $\mu_x$  le polynôme minimal de x. Maintenant pour montrer que c'est ultramétrique faut montrer que

$$|1 + \alpha|_L \le 1$$

Mais  $\mu_{1+x}(X) = \mu_x(X-1)$  et  $\mu_x \in \mathcal{O}_K$  par le corollaire puis  $\mu_x(-1) \in \mathcal{O}_K$  d'où le résultat. Les autres propriétés sont claires.

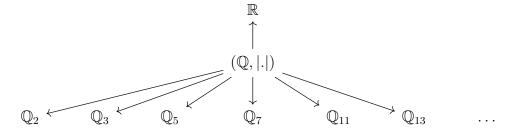
On peut maintenant l'étendre a une clôture algébrique  $K^c$  via

$$x \mapsto |N_{K(x)/K}(x)^{1/[K(x):K]}|$$

et il y'a unicité.

## 0.2.4 Classification sur $\mathbb{Q}$

En théorie des nombres, on a regardé grosso modo Ostrowski et les équivalences de valeurs absolues  $(|.|^s)$  pour définir la même topologie.



Les grosses idées a retenir pour moi : étant donné une |.|, si elle est non archimédienne  $\to$  on regarde la valuation associée v. Ensuite  $\mathfrak{m} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ , et ensuite sur  $\mathbb{Z}$  si  $x \wedge p = 1$  |ux| = |1 - yp| = 1 d'où suffit de regarder |p|. Le

cas archimédien est un peu plus compliqué mais assez étonnant. En fait si on regarde un corps archimédien complet dont la v.a. étend celle de  $\mathbb{Q}$  contenant i. Alors on peut plonger  $\mathbb{C}$ , disons  $i \colon \mathbb{C} \to K$ . L'idée c'est de regarder pour  $a \in K$  l'inf de,

$$f_a \colon z \mapsto |z - a|_K$$

si c'est r>0 on peut faire bouger r comme on veut. Ensuite faut regarder pour  $|\gamma_0-a|=r$  et  $|\gamma-\gamma_0|< r$  on peut calculer

$$(\gamma_0 - \gamma)^n - (\gamma_0 - a)^n$$

le spécificité de  $\mathbb C$  analytiquement c'est alors d'avoir toutes les racines de l'unités. Ce qui permet de factoriser le truc du dessus.