Notes perso : Géométrie algébrique

Table des matières

Chapitre 1

Produits fibrés et foncteur de points

1.1 Remarques sur le lemme de Yoneda

Le légendaire. Je l'énonce que pour ce qui m'intéresse. En gros on a un foncteur $h_{\_} := (X \mapsto \mathrm{Hom}_C(\_, X)$ qui est pleinement fidèle, autrement dit les diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(_,_) & : & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & h_X := \mathrm{Hom}_C(_, X) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_C(_,_) & : & Y \arrow[r] & h_Y := \mathrm{Hom}_C(_, Y)
\end{tikzcd}$$

commutent et

$$\mathrm{Hom}_C(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(h_X, h_Y)$$

est une bijection donnée par

$$f \mapsto (W \mapsto (\alpha(W)(g) = f \circ g)).$$

Remarque 1. *L'énoncé général s'écrit plutôt :*

$$Hom_{\widehat{C}}(h_X, h_Y) \ni \alpha \mapsto (\alpha(X)(id_X) \colon X \to Y)$$

Remarque 2. *Voir le carnet pour des choses plus deep. Pas oublier que c'est bien grâce à ça les propriétés universelles!*

1.2 Point de vue du foncteur de point

Essentiellement, avoir un morphisme de schémas $X \to Y$ équivaut alors à avoir une flèche $h_X \to h_Y$. Si on traduit sur les schémas, il suffit d'avoir

$$\begin{array}{ccc} X_S(T) & \longrightarrow & Y_S(T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_S(T') & \longrightarrow & Y_S(T') \end{array}$$

pour tout $T = Spec(B)$ affine. Plusieurs choses à debunker : pas oublier comment retrouver le morphisme de faisceaux. Pas oublier le morphisme topologique.

1.3 Propriété universelle et cas k-schéma

En gros c'est l'unique triplé $(X \times_S Y, p, q)$ tel que

$$\mathrm{Hom}_{Sch/S}(W, X \times_S Y) \to \mathrm{Hom}_{Sch/S}(W, X) \times \mathrm{Hom}_{Sch/S}(W, Y)$$

donné par $h \mapsto (p \circ h, q \circ h)$ est une bijection.

1.3.1 Étude de la définition

À noter, la propriété de composition $W \to (X \to S) = W \to (Y \to S)$ est bien contenue dans la définition parce que c'est des S-morphismes. Donc y'a pas de $\times_S$ c'est juste $\times$. Dans le cas des variétés, on a automatiquement des $\bar{k}$-schémas.

Question 1. Impact ?

Remarque 3. *Y'a pas encore de lemme de Yoneda explicit là, autre que pour dire que c'est l'unique triplé tel que la propriété universelle.*

1.4 Remarques sur le foncteur de points

En fait si on a un objet qui représente le produit de foncteurs de points alors c'est le produit fibré. C'est pour ça que ça suffit! Ça l'air vachement utile.

Stratégie 1.

Identifier l'ensemble $\to$ par exemple $|X \times_k Y| = |X| \times_k |Y|$ dans le cas $k = \bar{k}$.

Identifier l'espace topologique. Ça ça a l'air d'être induit.

Identifier le faisceau : voir comment faire de l'algèbre. (se rappeler de la preuve que les variétés projectives sont propres)

1.5 Foncteur de points

Petite intuition du foncteur de points : en fait sur un R-schéma T on a des R-flèches $T \to \mathrm{Spec}(R[T_1, \ldots, T_n])$, essentiellement c'est donné par

$$\mathrm{Hom}_R(R[T_1, \ldots, T_n], \Gamma(T, \mathcal{O}_T)) \simeq \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^n$$

là où c'est marrant c'est que si on regarde le noyau donné par des polynômes (c'est une R-flèche) $f_1, \ldots, f_s$ on obtient une flèche dans

$$\mathrm{Hom}_R(R[T_1, \ldots, T_n]/(f_1, \ldots, f_s), \mathcal{O}_T(T))$$

en particulier des équations pour des sections globales de T.

Remarque 4. *En toute généralité je sais pas si ça dit grand chose de T. Mais ça doit être intéressant de creuser.*

1.6 Construction

1.6.1 Cas affine

Étant donné $\mathrm{Spec}(A)$ et $\mathrm{Spec}(B)$ des C-schémas affines. Le produit fibré est $\mathrm{Spec}(A \otimes_C B)$ (par l'équivalence de catégorie). Le faisceau a pour fibres ? Via le morphisme topologique

$$X \times_Z Y \to |X| \times_{|Z|} |Y|$$

$$(A_{\mathfrak{p}} \otimes B_{\mathfrak{p}})$$

1.6.2

Chapitre 2

Produits tensoriels

Via ça, un petit cours du légendaire Keith Conrad. Aussi les exercices de Vakil seraient cools.

2.1 Quand est-ce que $m \otimes n = 0$?

Étant donné une application bilinéaire

$$f\colon M \times N \to K$$

on peut la factoriser via $M \times N \to M \otimes N \to K$. Alors $f(m,n) = 0$ dès que $m \otimes n = 0$. L'inverse est aussi vrai parce que $M \times N \to M \otimes N$ est bilinéaire!

Remarque 5. *Suffit donc de trouver $M \times N \to K$ bilinéaire telle que $(m,n) \mapsto k \neq 0$ pour prouver que $m \otimes n \neq 0$.*

2.2 Cas des polynômes

J'aimerai montrer que si $k[T_1, \ldots, T_n] \to A$ est injective et $k[S_1, \ldots, S_m] \to B$ aussi alors

$$k[T_1, \ldots, T_n, S_1, \ldots, S_m] \to A \otimes_k B$$

aussi. Avec ce morphisme étant celui qui étend

$$k[T_1, \ldots, T_n] \times k[S_1, \ldots, S_m] \to A \otimes_k B$$

donné par $(f, g) \mapsto f \otimes g$.

Remarque 6. *Si on prouve que A et B sont des quotients d'anneaux de polynômes c'est immédiat.*

2.2.1 Produits d'anneaux de polynômes

On a $k[T_1, \ldots, T_n] \otimes_k k[S_1, \ldots, S_m] = k[T_1, \ldots, T_n, S_1, \ldots, S_m]$. Pour le prouver on peut juste remarquer que $(f, g) \mapsto f.g$ est universelle et bilinéaire.

2.2.2 Injectivité

Ducoup clairement $f \otimes g \neq 0$ par ce que $f.g \neq 0$ dès que $f \neq 0$ ou $g \neq 0$. Ensuite si $\sum_i a_i f_i \otimes g_i = 0$

Chapitre 3

Sur les $\bar{k}$-variétés

3.1 Construction

Donc là
$$A(X) \otimes_k A(Y) = k[T_1, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m]/(I, J)$$
donc le produit fibré est
$$Z(I, J) \subset \mathbb{A}_k^{n+m}$$
et le faisceau

3.2 Adapter les définitions : la bijection ensembliste

Donc en regardant même pas les schémas, les variétés sur $\bar{k}$ qu'on regarde correspondent à des $\bar{k}$-schémas. Mais en fait plus simplement, dans le cas affine on à $X \simeq Spm(A(X))$ avec la topologie de Zariski ($\{\mathfrak{m} | I \subset \mathfrak{m}\} = V(I)$), i.e. $Spm(A(X))$ est une variété à la Weil! Donc ça fait sens d'écrire :
$$Y, X \to \mathrm{Spm}(k)$$
on déduit direct par le produit fibré dans une catégorie C quelconque (donc ici $C = k-$Var) dans la catégorie variétés abstraites que
$$\mathrm{Hom}_{k-Var}(\mathrm{Spm}(k), X \times_k Y) \approx \mathrm{Hom}_{k-Var}(\mathrm{Spm}(k), X) \times \mathrm{Hom}_{k-Var}(\mathrm{Spm}(k), Y)$$
via Yoneda maintenant on obtient
$$|X \times_k Y| = |X| \times_k |Y|$$
une bijection d'ensemble !

Remarque 7. *C'est pas un homéomorphisme, Yoneda agit au niveau ensembliste.*

3.3 Topologie : cas quasi-projectif

Essentiellement, on regarde la topologie induite sur $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$, donc quand on a $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, $Z^+(I)$ donné par la graduation de $\mathbb{P}^n$ est la bonne topologie par restriction.

3.4 Topologie : cas général

On peut remarquer $X \times_k Y$ contient (strictement) la topologie produit, sinon dans le cas p

3.5 Faisceau