Exercices d'algèbre homologique

Rayane Bait

Exercice 0.1

On utilise les notations de l'exercice. Soit

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \xrightarrow[f]{} \mathscr{F} \xrightarrow[g]{} \mathscr{F}'' \qquad (*)$$

une suite exacte dans $Sh(X)$ et $U \subseteq X$ un ouvert de X. On doit montrer que

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}'(U) \xrightarrow[f(U)]{} \mathscr{F}(U) \xrightarrow[g(U)]{} \mathscr{F}''(U)$$

est exacte dans Ab. Autrement dit que $\ker(f(U)) = 0$ et $\mathrm{im}(f(U)) = \ker(g(U))$ dans Ab.

On montre d'abord le premier point. Soit $s \in \ker(f(U))$ et $x \in X$. Par commutativité de

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{F}'(U) \arrow[r, "f(U)"'] \arrow[d] & \mathscr{F}(U) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F}_x \arrow[r, "f_x"'] & \mathscr{F}'_x
\end{tikzcd}$$

pour les flèches évidentes et par exactitude de la ligne du bas, on a $(U, s) = (V_x, 0) \in \mathscr{F}_x$ pour tout $x \in U$. Quitte à remplacer V_x par $U \cap V_x$, on peut supposer $V_x \subset U$. En particulier, on obtient un recouvrement de U par des ouverts V_x tels que

$$s|_{V_x} = 0$$

pour tout $x \in U$. D'où $s = 0 \in \mathscr{F}(U)$ car $\mathscr{F}$ est un faisceau. On a montré que $f(U)$ est injective pour tout ouvert U de X.

On montre maintenant le second point par double inclusion, d'abord $\ker(g(U)) \subset \mathrm{im}(f(U))$: Soit $s \in \ker(g(U))$ et $x \in U$, par commutativité de

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U) \arrow[r, "g(U)"'] \arrow[d] & \mathscr{F}''(U) \arrow[d] \\
\mathscr{F}_x \arrow[r, "g_x"'] & \mathscr{F}''_x
\end{tikzcd}$$

on a, $g_x((U,s))=0$. Maintenant par exactitude de

$$\mathscr{F}'_x \xrightarrow[f_x]{} \mathscr{F}_x \xrightarrow[g_x]{} \mathscr{F}''_x$$

il existe $(V_x, s'_x) \in \mathscr{F}'_x$ tel que $f_x((V_x, s'_x)) = (U,s)$. Quitte à prendre $V_x \cap U = V_x$ on peut supposer $V_x \subset U$. Maintenant par commutativité de

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{F}'(U) \arrow[r, "f(U)"'] \arrow[d] & \mathscr{F}(U) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F}'(V_x) \arrow[r, "f(V_x)"'] \arrow[d] & \mathscr{F}(V_x) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F}'_x \arrow[r, "f_x"'] & \mathscr{F}_x
\end{tikzcd}$$

on obtient $f(V_x)(s'_x) = s|_{V_x}$ pour chaque $x \in U$ et $U = \cup_{x\in U} V_x$. Enfin, pour tout $x, x' \in U$, par commutativité de

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}'(V_x) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F}(V_x) \arrow[d] \\
\mathscr{F}'(V_x \cap V_{x'}) \arrow[r] & \mathscr{F}'(V_x \cap V_{x'}) \\
\mathscr{F}'(V_{x'}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{F}(V_{x'}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

on a

$$f(V_x \cap V_{x'})(s'_x|_{V_x \cap V_{x'}}) = s|_{V_x \cap V_{x'}} = f(V_x \cap V_{x'})(s'_{x'}|_{V_x \cap V_{x'}})$$

d'où par injectivité de $f(V_x \cap V_{x'})$ on a

$$s'_x|_{V_x \cap V_{x'}} = s'_{x'}|_{V_x \cap V_{x'}}$$

comme $\mathscr{F}'$ est un faisceau on peut relever les s'_x en un $s' \in U$. Par commutativité du carré du haut dans l'avant dernier diagramme, comme $\mathscr{F}$ est un faisceau et $f(V_x)(s'|_{V_x}) = s|_{V_x}$ on obtient que $f(U)(s') = s$ d'où $\ker(g(U)) \subset \mathrm{im}(f(U))$.

Soit maintenant $s = f(U)(s')$ pour $s' \in \mathscr{F}'(U)$. Pour tout $x \in U$, par commutativité de

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}'(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F}''(U) \arrow[d] \\
\mathscr{F}'_x \arrow[r, "f_x"'] & \mathscr{F}_x \arrow[r, "g_x"'] & \mathscr{F}''_x
\end{tikzcd}$$

et par exactitude de la ligne du bas on a

$$(V_x, 0) = g_x(f_x((U, s'))) = g_x((U, s)).$$

On obtient un recouvrement $U = \cup_x V_x$ de U par les V_x tel que $g(U)(s)|_{V_x} = g(V_x)(s|_{V_x}) = 0$. Comme $\mathscr{F}''$ est un faisceau, on obtient $g(U)(s) = 0$ d'où $\ker(g(U)) = \operatorname{im}(f(U))$.

Exercice 0.2