(co)-Homologie (des faisceaux)

2023-2024

Table des matières

Introduction

Le but ca va être la cohomologie des faisceaux et les théorèmes de changement de base propres (pas comme dans [Mum70]).

Chapitre 1

Faisceaux

1.1 Définitions

On parle d'espaces topologiques. Soit X un e.t.

Définition 1.1.1 (Préfaisceau abélien)**.** Pour l'instant c'est un faisceau en groupe abélien.

Remarque 1. *Soit $\mathscr{P}$ un faisceau en groupes abéliens. Soit $U = \bigcup_i U_i$ un recouvrement ouvert on peut définir la séquence*

$$0 \to \mathscr{P}(U) \to \prod_i \mathscr{P}(U_i) \to \prod_{(i,j)} \mathscr{P}(U_i \cap U_j)$$

où la premier flèche est la restriction et la deuxième la différence $(s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j}$. C'est une suite exacte parce que si on appelle d_0 et d_1 les deux flèches :

$$(s|_{U_i}|_{U_i \cap U_j} - s|_{U_j}|_{U_i \cap U_j})$$

Ca mesure si une section est globale! En particulier ca axiomatise les faisceaux :

- *La condition $\ker(d^1) = Im(d^0)$ équivaut au gluing de sections locales.*
- *La condition $\ker(d^0) = 0$ équivaut à l'unicité des sections.*

On appelle $C(\bigcup_i U_i, \mathscr{P})$ la suite exacte du dessus.

Définition 1.1.2. On définit la fibre (stalk) en $x \in X$ pour un préfaisceau $\mathscr{P}$ par

$$\mathscr{P}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathscr{P}(U)$$

et on a

$$\mathscr{P}_x = \sqcup_{x\in U}\mathscr{P}(U)/\sim$$

où la relation c'est la relation de coincider sur une restriction. On a les germes de sections comme d'habitude qu'on note par s_x.

Théoreme 1.1.3. *Une flèche de faisceaux $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un isomorphisme ssi la flèche induite sur les fibres sont des isomorphismes.*

Preuve. **À faire!** $\square$

Définition 1.1.4 (Support d'une section d'un faisceau)**.** Soit $\mathscr{F}$ un faisceau sur X. On définit $\mathrm{Supp}_U(s) := \{s \in U | s_x \neq 0\}$

Exercices 1.1.5. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau abélien, montrer que le support d'une section s est fermé. Faut juste montrer que s_x vaut zéro même en élargissant à un petit ouvert autour de x, c'est évident en fait.

Remarque 2. *Le foncteur d'oubli $Sh(X) \to PreSh(X)$ est pleinement fidèle. Au sens où les morphismes sont les mêmes par définition.*

1.2 Faisceautisation

Il a l'air de l'avoir fait avec l'espace étalé. Bon je peux garder ma déf habituelle.

Définition 1.2.1 (Faisceautisé)**.** Pour un préfaisceau $\mathscr{F}$ sur X on définit $\mathscr{F}^+(U) := \{f_P \in \prod_{P\in\mathscr{F}(U)} \mathscr{F}_P | \forall P \exists V_P,\ t \in \mathscr{F}(V_p)\ t_P = f_P \forall Q \in V_P\ t_Q = f_Q\}$

Remarque 3. *En ajoutant les restrictions induites le préfaisceau $\mathscr{F}^+$ est un faisceau.*

Remarque 4. *Il faut utiliser des sections non locales de $\mathscr{F}$ simplement parce que avoir les mêmes fibres à isomorphisme de permet pas nécessairement de relever de manière cohérente.*

On définit $\mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$ par la diagonale.

Théoreme 1.2.2 (Propriété universelle)**.** *Soit $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme de préfaisceaux où $\mathscr{G}$ est un faisceau. Alors le morphisme se factorise en*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathscr{F}^+ \arrow[d, dashed] \\ & \mathscr{G} \end{tikzcd}$$

et la flèche $\mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$ est unique.

Démonstration. L'idée c'est qu'on $\mathscr{G} \simeq \mathscr{G}^+$ et on a tjr une flèche $\mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}^+$. □

Remarque 5. *Le foncteur de faisceautisation est exact.*

Remarque 6. *Ce serait bien de refaire les preuves rien qu'une fois**1**.*

Remarque 7 (Traduction en terme d'espace étalé)**.** *En gros l'espace étalé c'est les fonctions de U dans $\bigsqcup_P \mathscr{F}_P$. Autrement dit $\prod_{P \in U} \mathscr{F}_P$. Et on demande de la continuité. En gros y'a une fonction continue force des conditions de recollement.*

1.3 Faisceau localement constant

Soit X un espace topologique et A un *"objet abélien"*. On définit le préfaisceau constant par

$$A_X^{pre}(U) = A$$

pour tout ouvert $U \subset X$. On définit ensuite le faisceau localement constant associé à A par A_X.

Remarque 8. ***(1)*** *L'exemple canonique du fait que A_X^{pre} c'est pas un faisceau c'est $A_X(\emptyset) = A$.*
(2) *On peut prendre $U_1 \sqcup U_2$ et regarder la section $(0, p_2)$. Elle lift pas vu que les restrictions sont par déf l'identité.*

Proposition 1.3.1. *On a $A_X(U) = A^{\pi_0(U)}$! Où $\pi_0(U)$ compte les composantes connexes. (Attention faut quand même qu'elles soient ouvertes?!)*

Démonstration. Soit $\mathscr{P} = A_X^{pre}$. On a $\mathscr{P}_P = \varinjlim_{P \in U} P(U) = \varinjlim_{P \in U} A = A$. Ensuite faut écrire $X = \bigsqcup X_i$. Puis montrer que $\mathscr{P}^+(X_i) = A$. Ensuite clairement par propriété universelle du produit on a fini. □

1.4 Suites exactes de faisceaux

On considère $\alpha\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme de faisceaux abéliens.

Proposition 1.4.1 (Faisceau noyau)**.** *Le préfaisceau donné par* $\ker(\alpha)(U) = \ker(\alpha\colon \mathscr{F}U \to \mathscr{G}U)$ *est un faisceau.*

Définition 1.4.2 (Faisceau image)**.** On définit le préfaisceau image par $U \mapsto \mathrm{Im}^{pre}(\alpha\colon \mathscr{F}U \to \mathscr{G}U)$.

Remarque 9. *En général c'est pas un faisceau donc on déf Im(α) le faisceau associé.*

Remarque 10. ***À faire!*** *Injection canonique des faisceaux Im et ker.*

Définition 1.4.3 (Faisceau quotient)**.** À nouveau on faisceautise le préfaisceau quotient.

Remarque 11. *La faisceautisation commute avec les fibres. De sorte que le quotient des fibres est la fibre des quotients.*

Définition 1.4.4 (Suite exacte de faisceaux abéliens)**.** Une suite

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F} \xrightarrow{\rho} \mathscr{F}'' \longrightarrow 0$$

est exacte si on a les conditions habituelles **d'égalités** en tant que faisceaux.

Proposition 1.4.5. *Suffit d'avoir des suites exactes sur les fibres avec les flèches induites.*

Maintenant on arrive au croustillant. Si on a une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F} \xrightarrow{\rho} \mathscr{F}'' \longrightarrow 0$$

on peut montrer que $0 \to \mathscr{F}'(X) \to \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}''(X)$ est exacte. Mais la dernière flèche est pas nécessairement surjective.

Exemple 1.4.6. Soit $X = \mathbb{C}^\times$ et $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes. Alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow (2i\pi\mathbb{Z})_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{exp} \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow 0$$

où la première flèche est celle donnant les fonctions constantes. La deuxième est la post-composition avec l'exponentielle.

Remarque 12. *Dans la suite exacte de faisceaux on a pas besoin de la surjectivité de la dernière flèche.*

1.5 Images directes et inverses de faisceaux

Soit $f\colon X \to Y$ une application continue. On a

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} & \mathscr{G} \arrow[dd, bend left] \\
f\colon X \arrow[r] & Y \\
f^*\mathscr{G} \arrow[uu, bend left] & f_*\mathscr{F}
\end{tikzcd}$$

Définition 1.5.1 (Image directe)**.**

$$f_*\mathscr{F} : Ouv(Y)^{op} \to Ab$$

t.q $f_*\mathscr{F}(V) = \mathscr{F}(f^{-1}V)$.

Remarque 13. *C'est un faisceau si $\mathscr{F}$ est un faisceau, suffit de voir que $f^{-1}V = \cup f^{-1}V_i$ si $V = \cup V_i$.*

Définition 1.5.2 (Image inverse)**.**

$$f^p\mathscr{F} : Ouv(X)^{op} \to Ab$$

t.q $f^p\mathscr{G}(U) = \varinjlim_{f(U)\subset V} \mathscr{G}(V)$. On déf ensuite $f^* = (f^p)^+$ le faisceau associé.

Exemple 1.5.3 (Contre exemple pour f^P est un faisceau)**.** Si on pullback un faisceau constant sur le singleton $\{*\}$ on obtient un préfaisceau constant!

Exercices 1.5.4. Revoir l'adjonction entre $(\_)^*$ et $(\_)_*$ et revoir le fait que c'est des foncteurs.

Note 1. *Revoir comment obtenir les flèches de stalks.*

Proposition 1.5.5. *Pour tout $x \in X$,*

$$(f^*\mathscr{G})_x \simeq \mathscr{G}_{f(x)}$$

Démonstration. Soit $x \in X$,

$$\begin{aligned}
(f^*\mathscr{G})_x &\simeq (f^P\mathscr{G})_x \\
&\simeq \varinjlim_{x\in U\subset X} (f^P\mathscr{G})(U) \\
&\simeq \varinjlim_{x\in U\subset X} \varinjlim_{f(U)\subset V\subset Y} \mathscr{G}(V) \\
&\simeq \varinjlim_{f(x)\in V\subset Y} \mathscr{G}(V) \\
&\simeq \mathscr{G}_{f(x)}
\end{aligned}$$

□

Remarque 14. ***Rappel :*** *On peut regarder explicitement les limites et colimites on est dans Ab. Via des quotients!*

Remarque 15. *On peut voir un faisceau $f^*\mathscr{G}$ sur X comme un espace étalé sur X. On considère $\tilde{\mathscr{G}}$ l'espace étalé*

$$\tilde{\mathscr{G}} \to Y$$

on peut regarder le produit fibré

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y \tilde{\mathscr{G}} \arrow[r] \arrow[d, "\text{Homéo local}"'] & \tilde{\mathscr{G}} \arrow[d, "\text{Homéo local}"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Alors $\widetilde{f^*\mathscr{G}} \simeq X \times_Y \tilde{\mathscr{G}}$ au dessus de X.

Corollaire 1.5.6. *$f^* \colon Sh_{Ab}(Y) \to Sh_{Ab}(X)$ est exact.*

Démonstration. Étant donné $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ une suite exacte. On peut regarder directement sur les stalks et c'est clair. $\square$

Remarque 16. *Étant donné $X = \{*\}$, un faisceau $\mathscr{F}$ sur X est de la forme A_X un faisceau constant. On a alors une équivalence de catégorie*

$$Sh_{Ab}(X) \simeq Ab$$

et même un isomorphisme. On a un pont pour envoyer des objets abéliens dans des faisceaux.

Corollaire 1.5.7. *Soit X un e.t, $x \in X$ et $\mathscr{F}$ un faisceau abélien sur X. On note $\iota_x \colon \{x\} \to X$, alors $\iota_x^*\mathscr{F}$ est le faisceau constant associé à $\mathscr{F}_x$ sur $\{x\}$.*

Exercices 1.5.8 (Faisceau gratte-ciel)**.** Sur un e.t X et $x \in X$, $A \in Ab$. On définit

$$A_{\bar{x}}(U) = \begin{cases} A \text{ si } x \in U \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrer que c'est un faisceau avec les restrictions évidentes.
Montrer que

$$(A_{\bar{x}})_y = \begin{cases} A \text{ si } y \in \{\bar{x}\} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Soit $A_{\{\bar{x}\}}$ le faisceau constant sur $\{\bar{x}\}$. Montrer que $\iota_* A_{\{\bar{x}\}} \simeq A_{\bar{x}}$.
D'après Fabrice le faisceau gratte ciel est une co-unité.

Définition 1.5.9. On regarde $f_P \colon PSh_{Ab}(X) \to PSh_{Ab}(Y)$ qui à $\mathscr{F}$ associe $(V \mapsto \mathscr{F} f^{-1}V)$.

Remarque 17. *On a un carré commutatif de catégories (foncteurs diagonaux isomorphes)*

$$\begin{tikzcd} Sh_{Ab}(X) \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[d, "f_*"'] & PSh_{Ab}(X) \arrow[d, "f_P"] \\ Sh_{Ab}(Y) \arrow[r, "\iota_Y"'] & PSh_{Ab}(Y) \end{tikzcd}$$

Proposition 1.5.10. *On a une adjonction $f^P \colon PSh(Y) \leftrightarrow PSh(X) \colon f_P$.*

Démonstration. On doit donner un isomorphisme (d'ensembles)

$$\mathrm{Hom}_{PSh(X)}(f^P\mathscr{G}; \mathscr{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{PSh(Y)}(\mathscr{G}; f_P\mathscr{F})$$

fonctoriel en $\mathscr{F} \in PSh(X)$ et $\mathscr{G} \in PSh(Y)$ (l'adjoint à gauche est à gauche). Étant donné $\alpha \colon \mathscr{G} \to f_P\mathscr{F}$, on a pour tout V

$$\alpha(V) \colon \mathscr{G}(V) \to \mathscr{F} f^{-1}V$$

et pour tout U tel que $f(U) \subset V$ on a une flèche

$$\mathscr{G}(V) \to \mathscr{F}(f^{-1}V) \to \mathscr{F}(U)$$

et on cherche $f^P\mathscr{G}U \to \mathscr{F}U$. Suffit de prendre la limite du diagramme du haut pour l'obtenir, on peut car $U \subset f^{-1}V$.

À l'inverse si on a $\beta \colon f^P\mathscr{G} \to \mathscr{F}$ et qu'on veut des $\mathscr{G}V \to \mathscr{F} f^{-1}V$, on pose $U = f^{-1}V$, on a

$$\varinjlim_{f(f^{-1}V) \subset W} \mathscr{G}W \to \mathscr{F} f^{-1}V$$

puis comme $f(f^{-1}V) \subset V$ on a

$$\mathscr{G}V \to \varinjlim_{f(f^{-1}V) \subset W} \mathscr{G}W$$

d'où $\mathscr{G}V \to \mathscr{F}^{-1}V$. ∎

Par la remarque plus haut et celle juste en dessou on obtient la même adjonction sur les faisceaux.

Remarque 18. *La faisceautisation est adjointe à l'inclusion! (c'est la propriété universelle directement)*

Proposition 1.5.11. *On a une adjonction* $f^*\colon Sh(Y) \leftrightarrow Sh(X)\colon f_*$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{Sh(X)}(f^*\mathscr{G}, \mathscr{F}) &= \mathrm{Hom}_{Sh(X)}((f^p\mathscr{G})^+, \mathscr{F}) \\
&= \mathrm{Hom}_{PSh(X)}(f^p\mathscr{G}, \iota_X\mathscr{F}(= \mathscr{F})) \\
&= \mathrm{Hom}_{PSh(Y)}(\mathscr{G}, f_P\mathscr{F}) \\
&= \mathrm{Hom}_{Sh(Y)}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.5.12. *Soit* $f\colon X \to Y$ *et* $g\colon Y \to Z$*. Alors on a des isomorphismes canoniques* $(g \circ f)_* \simeq g_* \circ f_*$ *et* $(g \circ f)^* \simeq f^* \circ g^*$*.*

$$\begin{tikzcd}
Sh_{Ab}(X) \arrow[r, bend right, "f_*"'] \arrow[dr, "(g\circ f)_*"] & Sh_{Ab}(Y) \arrow[l, bend right, "f^*"'] \arrow[d, bend right, "g_*"'] \arrow[d, bend left, "g^*"] \\
& Sh_{Ab}(Z) \arrow[ul, bend left, "(g\circ f)^*"]
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Pour $(\_)_*$ c'est clair via $(g \circ f)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$. Ensuite on peut faire $(\_)^*$ via l'adjonction mdr. L'adjoint à gauche de $g_* \circ f_*$ est $f^* \circ g^*$ puis unicité. □

Chapitre 2

Catégories abéliennes

Définition 2.0.1 (Catégorie préadditive)**.** Une catégorie préadditive est une catégorie $\mathcal{C}$ telle que les Hom soient dans Ab et

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$$

est $\mathbb{Z}$-bilinéaire.

Remarque 19. *La catégorie opposée est aussi une catégorie préadditive.*

Définition 2.0.2. Un objet T est terminal si y'a un unique morphisme de tout objet vers lui. (Oui ça marche)

Définition 2.0.3 ((co)-Produit)**.** Le (co)-produit est la (co)-limite du diagramme

$$A \qquad\qquad B$$

Remarque 20. *Le produit vide est* ***terminal****! Parce que la propriété universelle est vide, donc y'a tjr une flèche vers lui si il existe... À l'inverse, le coproduit vide est* ***initial****... En plus l'idée que y'a vraiment que* ***le*** *singleton dans Set ca donne encore plus envie des faires des topos. Dans Set, les objets semblent vraiments canoniques en tant qu'ensemble..*

Lemme 2.0.4. *Dans une catégorie préadditive, on a les coproduits finis ssi on a les produits finis, en fait ils sont isomorphes à unique isomorphisme (implique canoniquement égaux ?).*

Démonstration. Il suffit de le montrer dans un sens, ensuite ce sera vrai dans la catégorie opposée! Suffit de construire les coproduits à deux objets étant donnés les produits. On a un objet terminal via le produit vide (c'est de la triche mdr). On a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,A) \in Ab$. On regarde $O_{T,A} \colon T \to A$ l'élément neutre, on remarque que si $f\colon T \to A$ est une flèche, alors $f \circ Id_T = f \circ O_{T,T} = O_{T,A}$. De sorte que T est initial aussi. On remarque que

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, dashed, "Id"'] \arrow[d, dashed, "i_A"] \arrow[dr, dashed, "O_{A,B}"] & \\
A & A \times B \arrow[l] \arrow[r] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl, dashed, "O_{B,A}"'] \arrow[d, dashed, "i_B"] \arrow[dr, dashed, "Id"] & \\
A & A \times B \arrow[l] \arrow[r] & B
\end{tikzcd}
$$

où $i_A = id \times O$ pareil pour i_B. Si on a

$$
\begin{tikzcd}
 & X & \\
A \arrow[ur, dashed, "f"] & & B \arrow[ul, dashed, "g"']
\end{tikzcd}
$$

on peut regarder $h := (f \circ p_A) + (g \circ p_B)$ de $A \times B \to X$. Ensuite faut vérifier que

$$
\begin{tikzcd}
 & X & \\
A \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, dashed, "i_A"] & A \times B \arrow[u, dashed, "h"] & B \arrow[ul, dashed, "g"'] \arrow[l, dashed, "i_B"']
\end{tikzcd}
$$

commute, c'est clair. Pour l'unicité, on remarque que $id_{A\times B} = i_A \circ p_A + i_B \circ p_B$. En particulier, les projecteurs permettent de se ramener à l'égalité terme à terme. Si on a une autre flèche $h'\colon A \times B \to X$, on peut remarquer que $h' \circ id = (h' \circ i_a) \circ p_A + (h' \circ i_B) \circ p_B = f \circ p_A + g \circ p_B$. $\square$

Remarque 21 (Codiagonale)**.** *Dans une catégorie quelconque, on a des flèches*

$$B \sqcup B \to B$$

et

$$B \to B \times B$$

les diagonales et codiagonales. Dans une catégorie préadditive, les deux sont isomorphes, on obtient $\delta_B\colon B \times B \to B$ la ***codiagonale*** *via*

$$
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[d, "i_1"] \arrow[dr, "id"] & \\
B \times B \arrow[rr, bend left, "\delta_B"] & B \sqcup B \arrow[l, "\sim"] \arrow[r, "\delta_B"'] & B \\
 & B \arrow[u, "i_2"] \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd}
$$

2.1 Catégories additives

Définition 2.1.1. Une catégorie additive est une catégorie préadditive qui a tout les produits finis.

Lemme 2.1.2. *Dans une catégorie additive, soit*

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

alors $f + g = \delta_B \circ (f, g)$ *où* $(f, g)\colon A \to B \times B$.

Démonstration. On considère

$$B \times B \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} B$$

et

$$B \underset{i_2}{\overset{i_1}{\rightrightarrows}} B \sqcup B \xrightarrow{\sim} B \times B \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} B$$

on peut se rappeler que $id_{B\times B} = i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2$. Faut juste réécrire tout maintenant. $\square$

Remarque 22. *Une meilleure définition maintenant, $\mathcal{C}$ est additive si elle a un objet zéro $O_{\mathcal{C}}$(:=final et terminal), les produits et coproduits finis et tels que*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d] \arrow[dr, "(O_{A,B}, id_A)"] & \\
A \sqcup B \arrow[r, "\exists!"'] & A \times B \\
B \arrow[u] \arrow[ur, "(O_{B,A}, id_B)"'] &
\end{tikzcd}$$

est un isomorphisme, où cette fois $O_{A,B} = A \to O_{\mathcal{C}} \to B$. Alors $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ est un monoide commutatif et l'addition est définie par $f + g := \delta_B(f, g)$!

Définition 2.1.3 (Catégorie additive (bis))**.** Une catégorie additive est une catégorie $\mathcal{C}$ qui a

- Un objet zéro $O_{\mathcal{C}}$.
- Produits et coproduits finis.
- $\alpha_{A,B}\colon A \sqcup B \simeq A \times B$.
- Le monoide commutatif $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ est un groupe abélien.

Remarque 23. *Il dit dans le premier cas que on fait comme si la catégorie avait de la structure en plus alors qu'en fait c'est plutôt que la structure de groupe est déterminée par la catégorie.*

2.2 Catégories abéliennes

Définition 2.2.1 (Égalisateur/Equalizer)**.** C'est un monomorphisme qui est la limite de

$$E \longrightarrow A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$$

Dans le cas du noyau on peut écrire que pour tout X

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "\exists!\, j"'] \arrow[d, "i"] \arrow[dr, bend left, "0"] & \\ \ker f \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

il existe j qui fait tout commuter. C'est la propriété universelle du noyau.

Note 2. *Le fait que* $\ker f \to A$ *soit un monomorphisme est une conséquence. C'est assez clair.*

Remarque 24. *On peut réecrire le noyau comme $A \times_B O_{\mathcal{C}}$ (pullback) et le conoyau $B \sqcup_A O_{\mathcal{C}}$ (pushout). Y s'agit just de dire que la limite de*

$$A \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} B$$

C'est la limite de

$$\begin{tikzcd} & O_{\mathcal{C}} \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

Définition 2.2.2 ((co)Image)**.** On déf l'image de $f : A \to B$ comme $\ker(B \to Coker(f))$. La coimage par $Coim(f) = Coker(\ker(f) \to A)$.

On a des flèches canoniques, $im(f) \to B$ et $A \to coim(f)$.

Ducoup il rappelle c'est quoi un mono/epi. Brièvement, ça dit que si on a $f : X \to Y$ un monomorphisme, alors pour tout Z,

$$\mathrm{Hom}(Z, X) \to \mathrm{Hom}(Z, Y)$$

est injective. Concrètement si on a $f \circ h = f \circ g$ alors $h = f$ dans

$$Z \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$$

À l'inverse dans le diagramme du dessous si $g \circ f = h \circ f$ alors $h = g$ (f atteint toute l'image).

$$X \xrightarrow{f} Y \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} Z$$

et ça se réecrit $\mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$ est surjective.

Remarque 25. *Le (co)noyau est un (epi)monomorphisme. Pour le noyau, la flèche $X \to \ker(f)$ est unique, mais on en a deux via $\iota \circ g = \iota \circ h$ pour $\iota\colon \ker(f) \to A$ d'où $h = g$.*

Remarque 26. *Dans Ab on a $coim(f) = A/\ker(f) \simeq im(f)$ le théorème d'isomorphisme!*

Exercices 2.2.3. Est-ce qu'on a un théorème d'isomorphisme dans une catégorie avec un objet zéro, les noyaux et conoyaux?

(1)

Prouver que y'a une flèche canonique $\bar{f}\colon coim(f) \to im(f)$ tel que

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r, hook, "i"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r, two heads, "p"] & Coker(f) \\
& coim(f) \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] & im(f) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

commute.

2)

Montrer que $f = O$ est équivalent à ce que $i = id_A$ et $p = id_B$.

3)

Si $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ alors $g = Id_A$ implique que $(\ker(g) \to A) = (O \to A)$ et $A \to Coker(g) = A \to 0$.

Lemme 2.2.4. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec un objet zéro, les noyaux et conoyaux. Alors pour tout $f\colon A \to B$, $\ker(f) = (\ker(A \to coim(f))$ et $coker(f) = coker(im(f) \to B)$.*

Démonstration. Par dualité entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^{op}$ il suffit de prouver la première assertion. On rappelle que $coim(f) = coker(\ker(f) \to A)$ en particulier

$$\ker(f) \to A \to coim(f)$$

est la flèche nulle. On doit juste montrer que cette ker est universelle pour cette propriété. Soit $(\alpha\colon X \to A) \to coim(f)$ qui vaut 0. On utilise maintenant $X \to A \to coim(f) \to im(f) \to B$ qui vaut 0. $\square$

Définition 2.2.5. Une catégorie abélienne est une catégorie additive

- qui a tout les noyaux et conoyaux.
- telle que tout $f\colon A \to B$ vérifie
$$\bar{f}\colon coim(f) \to im(f)$$
est un isomorphisme.

Remarque 27. *Une catégorie abélienne se comporte grosso modo comme Ab. Dans Rotman y'avais un méta théorème qui disait qu'on peut toujours se plonger dans une sous-catégorie pleine de modules.*

Exemple 2.2.6. Un contre exemple pour le deuxième axiome dans une catégorie additive avec les noyaux. On peut regarder $Ab(Top^H)$ les groupes abéliens topologiques. Dans ce cas, si on a $f\colon A \to B$ alors $coker(f) = B/\overline{im}(f)$, on doit prendre la clôture. Si on regarde $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, on a $\ker(\subset) = 0$ et $coker(\subset) = \mathbb{R}/\bar{\mathbb{Q}} = 0$. Si, $Ab(Top^H)$ était abélienne, on aurait que $\subset$ est un isomorphisme.

Proposition 2.2.7. *Soit $(f\colon A \to)(g\colon B \to)C$ dans une catégorie abélienne tels que $g \circ f = O$. Alors il existe une flèche canonique,*
$$im(f) \to \ker(g)$$

Démonstration. Faire. (dans le carnet je l'ai fais dcp) □

Définition 2.2.8 (Suite/Complexe)**.** Une suite dans $\mathcal{C}$ est une suite de morphismes
$$\dots \longrightarrow A^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} A^0 \xrightarrow{d^0} A^1 \xrightarrow{d^1} \dots \longrightarrow A^n \xrightarrow{d^n} A^{n+1} \longrightarrow \dots$$
C'est un complexe si $d^{n+1} \circ d^n = 0$ pour tout n.

Un complexe est acyclique (exact) si $im(d^n) \to \ker(d^{n+1})$ est un isomorphisme pour tout n.

Exercices 2.2.9. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et $f\colon A \to B$ dans $\mathcal{C}$. TFAE :

- f est un mono.
- $\ker(f) = (O_{\mathcal{C}} \to A)$.
- $O_{\mathcal{C}} \to A \to B$ est acyclique.

Exercices 2.2.10. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et $f\colon A \to B$ dans $\mathcal{C}$. TFAE : Pareil mais pour épi.

Exercices 2.2.11. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et $f\colon A \to B$ dans $\mathcal{C}$. Prouver que f est un monomorphisme ssi f est la flèche $coim(f) \to B$ naturellement. Pareil pour épi équivaut à $A \to im(f)$. Puis isom équivaut à mono plus épi.

Note 3. *S'entrainer à vite écrire des preuves.*

Lemme 2.2.12. *Soit*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

une suite dans $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. TFAE

- *La suite est exacte dans $\mathcal{C}$.*
- *La suite opposée est exacte dans $\mathcal{C}^{op}$.*
- *$Coker(f) = Coim(g)$.*

Remarque 28. *On a* $\ker(f) = \ker(A \to coim(f))$ *et* $coker(f) = coker(im(f) \to B)$*.*

Démonstration. Pour 1) $\implies$ 3), sachant $im(f) = \ker(g)$ on prends les cokernels $coker(im(f)) \simeq coker(\ker(g))$. Par la remarque $coker(f) \simeq coim(g)$. En plus en regardant (3) dans la catégorie opposée on a immédiatemment (2). Reste à montrer 3) $\implies$ 1). On a $coker(im(f)) = coker(f) = coim(g) = coker(\ker(g))$ canoniquement. Maintenant on prends les noyaux, on obtient $im(im(f)) = \ker(coker(im(f))) = \ker(coker(\ker(g))) = im(\ker(g))$. Mais im et ker sont des monos, de sorte que $im(ker) = ker$ et $im(im) = im$. □

Lemme 2.2.13. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne,*

1. *La suite $0 \to A \to B \to C$ est exacte ssi $f\colon (A \to B) \simeq \ker(g\colon B \to C)$.*
2. *La suite $A \to B \to C \to 0$ est exacte ssi $(B \to C) \simeq coker(A \to B)$.*

Démonstration. Pour 1. on sait que f est un monomorphisme d'où $f \simeq im(f)$, à l'inverse si $f \simeq im(f)$ alors f est un mono (c'est un kernel). On obtient que $f \simeq \ker(g)$. □

Lemme 2.2.14. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne.*

1. *Une suite*
$$(*) \colon 0 \to A \to B \to C$$
est exacte dans $\mathcal{C}$ ssi la suite
$$(**) \colon 0 \to Hom(M, A) \to Hom(M, B) \to Hom(M, C)$$
est exacte dans Ab avec les pullbacks.

2. *Une suite*
$$A \to B \to C \to 0$$
est exacte dans $\mathcal{C}$ ssi la suite
$$0 \to Hom(C, M) \to Hom(B, M) \to Hom(A, M)$$

Dans le 2. *on a inversé $C, M \dots$*

Démonstration. On a directement 1. $\Leftrightarrow$ 2. (Les Hom restent dans Ab même en passant à $\mathcal{C}^{op}$). On prouve 1., on a $(i \colon A \to B) \simeq \ker(f)$ qui se traduit par

$$\begin{cases} f \circ i = O \\ \forall \alpha \colon M \to B \text{ tq } f \circ \alpha = 0, \text{ il existe un unique } \tilde{\alpha} \colon M \to A,\ i \circ \tilde{\alpha} = \alpha \end{cases}$$

en gros on traduit la propriété universelle dans Ab. On suppose que $(*)$ est exacte, alors dans

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[rr, bend right, "(f \circ i)_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, B) \arrow[r, "f_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, C) \end{tikzcd}$$

$$(p \colon M \to A) \longmapsto f \circ i \circ p$$

on a $f \circ i = 0$, d'où $(f \circ i)_*(p) = O$ pour tout $p \colon M \to A$. Puis $im(i_*) \subset \ker(f_*)$. À l'inverse si $\alpha \in \ker(f_*)$, on regarde la propriété universelle et on obtient $i_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$ d'où l'exactitude au milieu. L'exactitude à gauche c'est juste que i est un mono.

Pour l'autre implication on prends $M = A$ on obtient $i_*(id_A) = i$ et $f \circ i = f_*(i)$. D'où $f \circ i = O$. En plus toute flèche $\alpha \colon M \to B$ t.q $f_*(\alpha) = O$ vérifie $\alpha = i_*(\tilde{\alpha})$ via l'exactitude au milieu, l'unicité est claire. Par la propriété universelle du noyau $(*)$ est exacte. $\square$

Corollaire 2.2.15 (Lemme des cinqs). *Dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ si on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_A"'] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f_B"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "f_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "p'"] & C' \arrow[r, "0"] & 0
\end{tikzcd}$$

tel que f_A et f_C sont des isomorphismes, alors f_B est un isomorphisme.

Démonstration. Pour l'injectivité de $(f_B)_*$ on utilise 1. et c'est du diagramme chasing dans

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, B) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, C) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, A) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, B') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, C')
\end{tikzcd}$$

et ça montre que f_B est un mono. Pour la surjectivité on regarde la preuve dans la catégorie opposée ?(ça inverse les $(f_B)_*$? Oui ça a l'air faut oublier les 0). $\square$

Définition 2.2.16. Soit $0 \to A \to B \to C \to 0$, une suite exacte courte, on dit qu'elle split si il existe une section $C \to B$ qui fait commuter.

Proposition 2.2.17. *Le splitting par s équivaut à $f \colon A \oplus C \simeq B$ fait commuter le diagramme du dessus avec les flèches canoniques, i.e. $s = f \circ i_C$ et les deux équivalent à il existe un rétract $r \colon B \to A$.*

Démonstration. Si on a un splitting, on regarde le carré

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, shift right, "p"'] & C \arrow[l, shift right, "s"'] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] & A \oplus C \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[r, dashed, "p_C"] & C \arrow[u, equal] \arrow[l, bend left, "i_C"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où f est la flèche de la propriété universelle. On veut montrer que f est un isomorphisme. On montre que le carré commute puis on applique le lemme du dessus. On a $f \circ i_A = i$ et $f \circ i_C = s$. En particulier le carré à gauche commute. Reste à prouver que $p \circ f = p_C$. Clair. Le 2. implique 1. est quasi immédiat. $\square$

Exercices 2.2.18. Faire 2. équivalent à 3.. En gros on peut le regarder dans $\mathcal{C}^{op}$.

2.3 Lemme du Serpent

Dans Mod_R avec R un anneau quelconque. C'est une catégorie abélienne, si on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "v"] & C \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r, "\beta'"] & C' &
\end{tikzcd}$$

et en plus exact sur les lignes, alors

$$\begin{tikzcd}
 & \ker u \arrow[r] & \ker v \arrow[r] & \ker w \arrow[dddll, bend left] & \\
 & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "v"] & C \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r, "\beta'"] & C' & \\
 & coker(u) \arrow[r] & coker(v) \arrow[r] & coker(w) &
\end{tikzcd}$$

est exacte pour les flèches induites, on regarde le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \ker u \arrow[r] \arrow[d] & \ker v \arrow[r] \arrow[d] & \ker w \arrow[d] & \\
 & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "v"] & C \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d] & B' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d] & C' \arrow[d] & \\
 & coker(u) \arrow[r] & coker(v) \arrow[r] & coker(w) &
\end{tikzcd}$$

qui est commutatif, et on peut construire $\delta\colon \ker w \to coker(u)$ via

$$\ker w \to C \to B \to B' \to A' \to coker(u).$$

Déjà

1. $\alpha\colon \ker u \to \ker v$ est bien défini car le carré

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v"] \\
A' \arrow[r, "\alpha'"] & B'
\end{tikzcd}$$

commute.

2. Pareil pour β: $\ker v \to \ker w$.

3. On déf $coker(u) \to coker(v)$ via $\bar{x} \mapsto \overline{\alpha'(x)}$: Si $x \in im(u)$ faut montrer que $\alpha(x) \in im(v)$. C'est clair car le carré

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v"] \\ A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \end{tikzcd}$$

   commute.

4. Pareil pour β: $coker(v) \to coker(w)$.

Maintenant le δ :

1. On prend $z \in \ker(w) \subset C$.

2. Comme $B \to C$ est surjective on prend $\beta(b) = z$.

3. On pousse dans B' en $v(b)$. Comme $z \in \ker(w)$ et

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "v"'] & C \arrow[d, "w"] \\ B' \arrow[r, "\beta'"] & C' \end{tikzcd}$$

   commute, on a $v(b) \in \ker(\beta') = im(\alpha')$.

4. On prend $\alpha'(a') = v(b)$.

5. On pousse a' dans le $coker(u)$.

Bon à noter, a' est unique par injectivité, le choix est au moment du b. Soit b, b' t.q $\beta(b) = \beta(b')$. On a

$$\beta(b) = \beta(b'))$$

en particulier, $b'-b \in \ker(\beta)$, on obtient $\alpha(a_1-a_2) = b-b'$ d'où si $\alpha'(a'-a'') = v(b) - v(b')$ alors par injectivité de α' et la commutativité de

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v"] \\ A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \end{tikzcd}$$

$u(a_1 - a_2) = a' - a'' \in im(u)$. Et donc $\bar{a}' = \bar{a}''$. On peut définir $\delta(z) = \bar{a}'$.

L'exactitude maintenant

1. En $\ker(v)$ on peut directement utiliser l'exactitude en B et la commutativité des carrés à gauche.

2. Pareil pour $coker(v)$.

3. Pour $\ker(\delta)$, on peut remarquer que si $\bar{a'} = 0$ alors a' est dans l'image de u. De sorte que dans le diagramme on a $b \in im(\alpha) = \ker(\beta)$ et on peut remonter dans $\ker(v)$. On a montré que $\ker(\delta) \subset im(\beta)$.

4. Pour $y \in im(\beta)$, on peut l'amener dans B puis dans B' ou il vaut 0 par hypothèse. D'où dans $im(\alpha')$ d'où dans $\ker(\delta)$.

5. En $coker(u)$ on prend $z \in ker(w)$. Alors faut vérifier que les relèvements de $\delta(z)$ sont dans $im(\alpha')$. Pour ça, c'est parce que on devient 0 en $C \to C'$ d'où un antécédent dans B, b, vaut 0 via $\beta' \circ v$. Puis le résultat vu que tout commute.

6. À l'inverse pour $\bar{x} \in \ker(\alpha')$, bon flemme.

Remarque 29. *On peut obtenir*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker u \arrow[r] & \ker v \arrow[r] & \ker w \arrow[dll] & \\
& coker(u) \arrow[r] & coker(v) \arrow[r] & coker(w) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En rajoutant que $A \to B$ est un mono et $B' \to C'$ est un epi.

Théoreme 2.3.1. *Soit $\mathcal{A}$ une (petite) catégorie abélienne. Alors il existe un foncteur exact pleinement fidèle $i \colon \mathcal{A} \to Mod_R$ pour R un anneau.*

Corollaire 2.3.2. *Le lemme du serpent est vrai dans n'importe quelle catégorie.*

Démonstration. On récupère à gauche via le fait que c'est pleinement fidèle. On envoie à droite via l'exactitude et la fonctorialité. □

Exercices 2.3.3. Écouter *"The Snake"* par Al Wilson.

2.4 Foncteurs entre catégories additives/abéliennes

Définition 2.4.1. Un foncteur $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre catégories additives est additif si les morphismes de Hom sont des morphismes de groupes abéliens.

Remarque 30. *On avait une autre manière les catégories additives via :*

1. *Avoir un objet zéro.*
2. *Avoir les produits et cofinis qui sont alors isomorphes.*
3. *Les Hom sont alors des monoides et on veut que ce soit des groupes abéliens.*

On peut redéfinir les foncteurs additifs comme des foncteurs préservant les produits finis. Car alors ils préservent la codiagonale.

À rattraper.

Lemme 2.4.2. *Un foncteur exact à gauche $C \to D$ entre catégories abéliennes est additif.*

Démonstration. Le foncteur préserve les splittings. □

Exercices 2.4.3. Soit $f\colon X \to Y$, si f a une section alors c'est un epi (i.e. c'est un rétract).

Remarque 31. *Si $\mathcal{C}$ est abélienne et $M \in \mathcal{C}$:*

$$Hom_{\mathcal{C}}(M, \_)\colon A \mapsto Hom_{\mathcal{C}}(M, A)$$

est exact à gauche. Pareil pour

$$Hom_{\mathcal{C}}(\_, M)\colon A \mapsto Hom_{\mathcal{C}}(A, M)$$

Chapitre 3

Homologie

3.1 Injectifs

Définition 3.1.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne,

1. $I \in \mathcal{C}$ est injectif si
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, I) \colon \mathcal{C}^{op} \to Ab$$
est exact.
2. $P \in \mathcal{C}$ est projectif si
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, \_) \colon \mathcal{C}^{op} \to Ab$$
est exact.

Remarque 32. *Essentiellement, on demande à ce que pour tout monomorphisme $A \to B$, $Hom(B, I) \to Hom(A, I)$ est surjectif. C'est le diagramme*

$$\begin{tikzcd} I & \\ A \arrow[u] \arrow[r, hook] & B \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd}$$

À l'inverse pour tout epimorphisme $B \to C$:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] \arrow[dl, dashed] \\ B \arrow[r, two heads] & C \end{tikzcd}$$

Exemple 3.1.2. Les sommes directes d'injectifs (resp. projectifs) sont injectifs (resp. projectifs)

Lemme 3.1.3. *Soit R un anneau commutatif, $M \in Mod_R$ est injectif ssi pour tout idéal $I \subset R$, $Hom(R, M) \to Hom(I, M)$ est surjectif.*

Démonstration. On prouve $\leftarrow$. Soit $\iota\colon A \to B$ un mono. Et soit $\alpha\colon A \to M$. On considère

$$\mathcal{S} = \{(A', \alpha') | \text{ le diagramme commute } \}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, hook, "\iota"] \arrow[dr, "\alpha"'] & A' \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha'"] & B \\ & M & \end{tikzcd}$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ a un ordre partiel donné par l'inclusion. Si on a un sous-ensemble totalement ordonné, alors l'union est une borne sup. Et on applique Zorn pour obtenir $(C, \gamma) \in \mathcal{S}$ maximal. On suppose que $A \subset C \subsetneq B$ et soit $x \in B - C$. On regarde

$$I = (C : (x))$$

et $\gamma \circ m_x\colon r \mapsto r.x \mapsto \gamma(r.x)$ de $I \to C \to M$. On a

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "\gamma \circ m_x"'] & R \arrow[dl, "\exists\psi"] \\ M & \end{tikzcd}$$

où ψ existe par hypothèse. On déf $\tilde{\gamma}\colon C + R.x \to M$ par $c + r.x \mapsto \gamma(c) + \psi(r)$. On a $\tilde{\gamma}|_C = \gamma$ comme $C \subsetneq C + R.X$ on a une contradiction. D'où $C = B$ et M est injectif. $\square$

Note 4. *Vérifier que $\tilde{\gamma}$ est bien définie.*

3.2 coHomologie

Lemme 3.2.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et*

$$0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$$

une suite exacte dans $Ch(\mathcal{C})$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ il existe une flèche canonique

$$\delta^n\colon H^n(C^\bullet) \to H^{n+1}(A^\bullet)$$

telle que on a la suite exacte longue de cohomologie.

En plus, la construction est fonctorielle dans la catégorie des suites exactes de $Ch(\mathcal{C})$.

Démonstration. La preuve consiste à appliquer le lemme du serpent à

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^n \arrow[r] \arrow[d, "d_A^n"] & B^n \arrow[r] \arrow[d, "d_B^n"] & C^n \arrow[r] \arrow[d, "d_C^n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{n+1} \arrow[r] & B^{n+1} \arrow[r] & C^{n+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Note 5.

$$Z^n(A) := \ker(d_A^n) \hookrightarrow A^n$$
$$I^n(A) := im(d_A^{n-1}) \hookrightarrow A^n$$
$$H^n(A) := Z^n(A)/I^n(A)$$

On obtient

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z^n(A) \arrow[r] & Z^n(B) \arrow[r] & Z^n(C) \arrow[dll] & \\
& A^{n+1}/I^{n+1}(A) \arrow[r] & B^{n+1}/I^{n+1}(B) \arrow[r] & C^{n+1}/I^{n+1}(C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

comme $d_A^{n+1} \circ d_A^n = 0$, d_A^n se factorise par $Z^n(A)$. On obtient en plus

$$\begin{tikzcd}
I^n(A) \arrow[r, hook, "i_A^n"] & A^n \arrow[rr, "d_A^n"] \arrow[dr, "\tilde{d}_A^n"'] & & A^{n+1} \\
& & Z^{n+1}(A) \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

d'où $i \circ \tilde{d}_A^n \circ i_A^n = d_A^n \circ i_A^n = 0$. Comme i est un mono, on a $\tilde{d}_A^n \circ i_A^n = 0$. D'où $\tilde{d}_A^n$ induit

$$\begin{tikzcd}
A^n/I^n(A) \arrow[dr, "\overline{d_A^n}"'] & A^n \arrow[l, "p_A^n"'] \arrow[d, "\tilde{d}_A^n"] \\
& Z^{n+1}(A)
\end{tikzcd}$$

Question 1.

$$\ker(\overline{d_A^n}) \simeq H^n(A^\bullet)?$$
$$coker(\overline{d_A^n}) \simeq H^{n+1}(A^\bullet)?$$

On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^n/I^n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d_A^n}"] & B^n/I^n(B) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d_B^n}"] & C^n/I^n(C) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d_C^n}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z^{n+1}(A) \arrow[r] & Z^{n+1}(B) \arrow[r] & Z^{n+1}(C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Le lemme du serpent permet de conclure si la question est vraie. C'est clair parce que $\overline{d_A^n} \circ p_A^n = \tilde{d_A^n}$. On a

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker(p_A^n) \arrow[r] & \ker(\tilde{d_A^n}) \arrow[r] & \ker(\overline{d_A^n}) \arrow[dll] & \\ & coker(p_A^n) \arrow[r] & coker(\tilde{d_A^n}) \arrow[r] & coker(\overline{d_A^n}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

qui est égal a

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I^n(A) \arrow[r] & \ker(\tilde{d_A^n}) \arrow[r] & \ker(\overline{d_A^n}) \arrow[dll] & \\ & 0 \arrow[r] & coker(\tilde{d_A^n}) \arrow[r] & coker(\overline{d_A^n}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

est exact. On obtient

$$coker(\overline{d_A^n}) \simeq coker(\tilde{d_A^n}) \simeq H^{n+1}(A)$$

en plus $i \circ \tilde{d_A^n}$ et i est un mono, d'où ils ont le même noyau, qui est $Z^n(A)$. D'où $\ker(\overline{d_A^n}) \simeq H^n(A)$. □

Remarque 33. *En fait y'a un raccourci pour les preuves, si on a $X \to Y \to Z$ exact, on peut appliquer le snake lemme avec $f, g \circ f, g$.*

Définition 3.2.2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et $A^\bullet, B^\bullet \in Ch(\mathcal{C})$. Soit en plus $f^\bullet \colon A^\bullet \to B^\bullet$, $f^\bullet$ est contractile si il existe une famille

$$(h^n \colon A^n \to B^{n-1})$$

telle que $f^n = h^{n+1} \circ d_A^n + d_B^{n-1} \circ h^n$.

Note 6. *C'est le fameux diagramme*

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & A^{n-1} \arrow[r, "d_A^n"] \arrow[d, "f^{n-1}"] & A^n \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f^n"] \arrow[dl, dashed, "h^n"'] & A^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f^{n+1}"] \arrow[dl, dashed, "h^{n+1}"'] & A^{n+2} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+2}"] \arrow[dl, dashed, "h^{n+2}"'] & \dots \\ \dots \arrow[r] & B^{n-1} \arrow[r] & B^n \arrow[r] & B^{n+1} \arrow[r] & B^{n+2} \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Proposition 3.2.3. *Soit $f^\bullet \colon A^\bullet \to B^\bullet$ contractile. Alors $H^n(f^\bullet) \colon H^n(A^\bullet) \to H^n(B^\bullet)$ est nulle.*

Démonstration. C'est clair terme à terme. Faire la preuve dans une catégorie abélienne. □

Définition 3.2.4. Deux flèches sont homotopes si leur différence est contractile.

3.3 Résolutions

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et soit $A \in \mathcal{C}$.

Définition 3.3.1. Une résolution de A est une suite exacte

$$0 \to A \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \dots$$

et la résolution est injective, si les I sont injectifs.

Définition 3.3.2. $\mathcal{C}$ a assez d'injectifs si il existe tjr $0 \to A \to I^0$.

Proposition 3.3.3. *Si $\mathcal{C}$ a assez d'injectifs alors tout $A \in \mathcal{C}$ a une résolution injective.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{C}$. On a $i\colon A \hookrightarrow I^0$. Il existe $d^0\colon I^0/A \hookrightarrow I^1$ et $\ker(d^0) \simeq \ker(coker(i)) = im(i)$. À nouveau, on a $coker(d^0) \in \mathcal{C}$ d'où $d^1\colon coker(d^0) \hookrightarrow I^2$. Et par déf $\ker(d^1) = im(d^0)$ d'où par induction. □

Remarque 34. *Étant donné une résolution injective $A \to I^\bullet$. Et le complexe de A concentré en 0, $A^\bullet$. On a un morphisme de complexes, $A^\bullet \to I^\bullet$. En particulier ils ont la même cohomologie, $H^n(A^\bullet) = \begin{cases} A & si\ n = 0 \\ 0 \end{cases}$.*

Définition 3.3.4. Soit $A, B \in Cat$ et $f\colon A \to B$. Soit $A \to I^\bullet$ et $B \to J^\bullet$ des résolutions. Une extensions de f est un morphisme de complexes $f^\bullet\colon J^\bullet$ t.q.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & I^0 \arrow[r] \arrow[d] & I^1 \arrow[r] \arrow[d] & I^2 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & J^0 \arrow[r] & J^1 \arrow[r] & J^2 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Lemme 3.3.5. *Si $I^\bullet$ et $J^\bullet$ sont injectives, alors toute extension de $O_{A,B}$ est contractile.*

Démonstration. Étant donné $h^\bullet\colon I^\bullet \to J^\bullet$ une extension de $O_{A,B}$. On a

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i_A"'] \arrow[d, "O_{A,B}"'] & I^0 \arrow[d, "h^0"'] \\
B \arrow[r, hook, "i_B"] & J^0
\end{tikzcd}$$

D'où on obtient $\overline{h^0}\colon I^0/A \to J^0$. On a aussi $d_I^0\colon I^0/A \to I^1$ avec noyau 0. On obtient

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i_A"'] \arrow[d, "O_{A,B}"'] & I^0 \arrow[r] \arrow[d, "h^0"'] & I^0/A \arrow[r] \arrow[dl] & I^1 \arrow[dll, dashed, "\exists k^1"] \\
B \arrow[r, hook, "i_B"] & J^0 & &
\end{tikzcd}$$

par injectivité de J^0, on a $h^0 = k^1 \circ d_I^0$. Par induction maintenant on suppose qu'on a pour $0 \leq j \leq n$, $k^{j+1} \colon I^{j+1} \to J^j$. Tel que

$$(E_j) : h^j = k^{j+1} \colon d_I^j \circ d_J^{j-1} \circ k^j.$$

On considère $h^{n+1} - d_J^n \circ k^{n+1} \colon I^{n+1} \to J^{n+1}$. En précomposant avec d_I^n on obtient

$$\begin{aligned}(h^{n+1} - d_J^n \colon k^{n+1}) \circ d_I^n &= h^{n+1} \circ d_I^n - d_J^n \circ k^{n+1} \circ d_I^n \\ &= d_J^n (h^n - k^{n+1} \circ d_I^n) \\ &= d_J^n \circ (d_J^{n-1} \circ k^n) \\ &= 0\end{aligned}$$

où la dernière étape est par induction. On obtient

$$\begin{tikzcd} I^{n+1} \arrow[r, "p_A^n"] \arrow[dr, "h^{n+1} - d_J^n \circ k^{n+1}"'] & coker(d_I^n) \arrow[d] \\ & J^{n+1} \end{tikzcd}$$

puis $k^{n+2} \colon I^{n+2} \to J^{n+1}$ par injectivité, la formule de l'homotopie est direct par commutativité. $\square$

Proposition 3.3.6. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et $A, B \in \mathcal{C}$. Soit $A \to I^\bullet$ une résolution et $B \to J^\bullet$ une résolution injective. Alors tout $f \colon A \to B$ admet une extension $f^\bullet \colon I^\bullet \to J^\bullet$ qui est unique à homotopie près.*

Démonstration. **Unicité :** Étant donnés $f^\bullet, g^\bullet \colon I^\bullet \to J^\bullet$ qui étend f. On a que $f^\bullet - g^\bullet$ étend $f - f = O_{A,B}$. D'où est contractile puis $f^\bullet$ et $g^\bullet$ sont homotopes. **Faire l'équivalence ? Existence :** On a

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, dashed, "f"'] \arrow[dr, "i_b \circ f"] & I^0 \arrow[d, dashed, "\exists f^0"] \\ B \arrow[r, "i_B"] & J^0 \end{tikzcd}$$

puis

$$\begin{tikzcd} I^0 \arrow[r] \arrow[d, "f^0"'] & I^0/A \arrow[r, hook] \arrow[d, "\bar{f}^0"'] \arrow[dr] & I^1 \arrow[d, dashed, "\exists f^1"] \\ J^0 \arrow[r] & J^0/B \arrow[r, hook] & J^1 \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
I^0 \arrow[r, "d_I^0"] \arrow[d, "f^0"'] & I^1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f^1"'] & coker(d_I^0) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr] & I^2 \arrow[d, dashed, "\exists f^2"] \\
J^0 \arrow[r, "d_J^0"'] & J^1 \arrow[r, two heads] & coker(d_J^0) \arrow[r, hook] & J^2
\end{tikzcd}$$

Supposons maintenant f^i défini pour tout $i \leq n$, alors

$$\begin{tikzcd}
I^{n-1} \arrow[r, "d_I^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & I^n \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f^n"'] & coker(d_I^{n-1}) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr] & I^{n+1} \arrow[d, dashed, "\exists f^{n+1}"] \\
J^{n-1} \arrow[r, "d_J^{n-1}"'] & J^n \arrow[r, two heads] & coker(d_J^{n-1}) \arrow[r, hook] & J^{n+1}
\end{tikzcd}$$

□

3.4 Foncteurs dérivés

On considère $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories abéliennes t.q. $\mathcal{C}$ a assez d'injectifs. Soit $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur exact à gauche. On veut définir une famille de foncteurs

$$R^n F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D},\ \forall n \geq 0$$

avec $R^0 F \simeq F$ et satisfaisant une propriété universelle.

Soit $A \in \mathcal{C}$ et $A \to I^\bullet$ une résolution injective. On applique F à $I^\bullet$ et on obtient

$$F(I^\bullet) \in Ch(\mathcal{D}).$$

On pose $R^n F(A) = H^n(F(I^\bullet)) \in Dat.$

C'est bien défini en tant que foncteur! (à montrer)

Remarque 35. *La résolution est tronquée comme d'hab y'a pas le A dedans. D'où la prochaine remarque.*

Remarque 36. *On a $R^0F(A) \simeq F(A)$. En effet $0 \to A \to I^0 \to I^1$ est exacte et F est exacte à gauche. D'où $\ker(F(I^0) \to F(I^1)) \simeq F(A)$.*

Remarque 37. *Si F est exact, alors $R^nF = 0$ pour tout $n > 0$.*

Slogan 1. Les foncteurs dérivés à droite $(R^nF)_{n\geq 0}$ mesurent à quel point F est loin d'être exact à droite.

Proposition 3.4.1. *Soit $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ exact à gauche. Alors*

1. *Étant donné $A \to I^\bullet$, $A \to J^\bullet$ injectives on a un isomorphisme canonique*
$$H^n(F(I^\bullet)) \simeq H^n(F(J^\bullet)) \ \forall n \geq 0$$
2. *De $f\colon A \to B$ et $A \to I^\bullet$, $B \to J^\bullet$ injectives, alors on a un morphisme canonique*
$$H^n(F(f^\bullet))\colon H^n(F(I^\bullet)) \to H^n(F(J^\bullet)),\ \forall n \geq 0$$
3. *Si*
$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$
sont des morphismes dans $\mathcal{C}$ et $A \to I^\bullet$,$B \to J^\bullet$,$C \to K^\bullet$ injectives, alors
$$\begin{tikzcd} H^n(F(I^\bullet)) \arrow[rr, "H^n(F(g^\bullet\circ f^\bullet))"] \arrow[dr] & & H^n(F(K^\bullet)) \\ & H^n(F(J^\bullet)) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$
commute pour tout $n \geq 0$.

Démonstration. **(2) :** Il existe une extension $f^\bullet\colon I^\bullet \to J^\bullet$ unique à homotopie près. Comme F et les $H^n(\_)$ sont des foncteurs on obtient des morphismes $F(I^\bullet) \to F(J^\bullet)$ dans $Ch(\mathcal{D})$ et $H^n(F(I^\bullet)) \to H^n(F(J^\bullet))$ dans $\mathcal{D}$ pour tout $n \geq 0$. Soit $g^\bullet\colon I^\bullet \to J^\bullet$ une autre extension de $f\colon A \to B$. Alors $f^\bullet - g^\bullet$ est contractile d'où $f^n - g^n = d_J^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d_I^n$. Comme F est additif, $F(f^n - g^n)$ est contractile. D'où $H^n(F(f^\bullet)) = H^n(F(g^\bullet))$.

(3) : Si $f^\bullet, g^\bullet$ étendent f, g alors $g^\bullet \circ f^\bullet$ étend $g \circ f$ on obtient
$$H^n(F(g^\bullet \circ f^\bullet)) = H^n(F(g^\bullet)) \circ H^n(F(f^\bullet))$$
qui est ce qu'on voulait.

(3) : Il existe $f^\bullet\colon I^\bullet \to J^\bullet$ qui étend id_A et $g^\bullet\colon J^\bullet \to I^\bullet$ qui étend aussi id_A. À nouveau, $g^\bullet \circ f^\bullet$ étend id_A et pareil pour $id_{I^\bullet}$. En particulier
$$g^\bullet \circ f^\bullet \text{ et } id_{I^\bullet} \text{ sont homotopes}$$
puis pareil pour $F(g^\bullet) \circ F(f^\bullet)$ et $F(id_{I^\bullet}) = id_{F(I^\bullet)}$. D'où
$$H^n(F(g^\bullet)) \circ H^n(F(f^\bullet)) = Id_{H^n(F(I^\bullet))}$$
Pareil de l'autre côté et on obtient des isomorphismes canoniques $H^n(F(f^\bullet)), H^n(F(g^\bullet))$. □

Remarque 38. *L'isomorphisme est canonique!*

Remarque 39. *On obtient que $R^nF(A)$ est bien défini pour tout $n \geq 0$ et pour tout $A \in \mathcal{C}$ d'où R^nF est un foncteur pour tout $n \geq 0$.*

Définition 3.4.2. On définit le n-ème foncteur dérivé à droite de F par $R^nF \colon A \mapsto H^n(F(I^\bullet))$.

Proposition 3.4.3. *On a les props suivantes :*

1. *R^nF est un foncteur additif pour tout $n \geq 0$.*

2. *Pour tout $I \in \mathcal{C}$ injectif, $R^nF(I) = 0$ pour tout $n > 0$.*

3. *Soit $0 \to A \to B \to C \to 0$ $(*)$ une suite exacte courte (sec) dans $\mathcal{C}$. Alors pour tout $n \geq 0$ il existe une flèche canonique $\delta^{n+1} \colon R^nF(C) \to R^{n+1}F(A)$ telle que .*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R^0F(A) \arrow[r] & R^0F(B) \arrow[r] & R^0F(C) \arrow[dll] \\
& R^1F(A) \arrow[r] & R^1F(B) \arrow[r] & R^1F(B) \arrow[dll] \\
& R^2F(A) \arrow[r] & R^2F(B) \arrow[r] & R^2F(C) \arrow[dll, "\dots"] \\
& R^nF(A) \arrow[r] & \dots & (**)
\end{tikzcd}$$

est exacte. En plus, l'application $(*) \mapsto (**)$ de $Sec(\mathcal{C}) \to Ch(\mathcal{D})$ est un foncteur. Plus simplement, tout les

$$\begin{tikzcd}
R^nF(C) \arrow[r, "\delta^n"] \arrow[d] & R^{n+1}F(A) \arrow[d] \\
R^nF(C)' \arrow[r, "\delta^n"] & R^{n+1}F(A')
\end{tikzcd}$$

commutent.

Démonstration. **(1) :** On prouve que R^nF préserve les sommes directes. Soit $A \to I^\bullet$, $B \to J^\bullet$ injectives. Alors $A \oplus B \to I^\bullet \oplus J^\bullet$ est injective (**check**). Maintenant F est exact à gauche donc additif, d'où

$$F(I^\bullet \oplus J^\bullet) \simeq F(I^\bullet) \oplus F(J^\bullet)$$

Maintenant $H^n(\_)$ est additif aussi (**check**). D'où $R^nF(A \oplus B) = R^nF(A) \oplus R^nF(B)$.

(2) : Soit $I \in \mathcal{C}$ injectif et $0 \to I \to I \to 0 \to 0 \to \dots$ une résolution injective. D'où le résultat.

(3) : On claim que on peut choisir $A \to I^\bullet$, $B \to J^\bullet$,$C \to K^\bullet$ injectives et des extensions

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I^\bullet \arrow[r] & J^\bullet \arrow[r] & K^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

telles que $J^n \simeq I^n \oplus K^n$ pour tout $n \geq 0$ ET $I^n \to J^n \to K^n$ est donnée par $J^n = I^n \oplus K^n$. Comme F est additif $F(J^n) = F(I^n) \oplus F(K^n)$ d'où

$$0 \to F(I^\bullet) \to F(J^\bullet) \to F(K^\bullet) \to 0$$

est exacte dans $Ch(\mathcal{D})$. On obtient la suite exacte longue qui donne le résultat voulu. $\square$

Démonstration du claim. Bon la flèche de gauche est par l'injectivité et à droite par composition puis au milieu par produit.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, hook] & B \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\exists"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, bend left] & C \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^0 \oplus K^0 \arrow[r] & K^0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On applique le lemme du serpent pour obtenir

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & ker(B \to J^0) \arrow[r] & 0 \arrow[dll] & \\
& I^0/A \arrow[r] & J^0/B \arrow[r] & K^0/C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

d'où la suite exacte de coker et l'injectivité au milieu puis

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I^0/A \arrow[r] \arrow[d, hook] & J^0/B \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\exists"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, bend left] & K^0/C \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^1 \oplus K^1 \arrow[r] & K^1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

on définit alors $d_J^0 \colon J^0 \to J^0/B \to I^1 \oplus K^1 = J^1$. À nouveau le lemme du serpent donne

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & coker(d_I^0) \arrow[r] \arrow[d, hook] & coker(d_J^0) \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\exists"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, bend left] & coker(d_K^0) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] & I^2 \oplus K^2 \arrow[r] & K^2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Cette étape donne exactement l'induction. (**CHECK QUE ÇA MARCHE**)

$\square$

Propriété universelle

Définition 3.4.4. Soit $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ comme avant. Un foncteur cohomologique $T \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la donnée de

1. Une famille de foncteurs $(T^n \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D})_{n \geq 0}$.
2. Pour tout $n \geq 0$ des cobords
$$\delta^n \colon T^n(C) \to T^{n+1}(A)$$
tels que on obtient une suite exacte longue et à nouveau que SEC$\mapsto$ SEL via les cobords est un foncteur. Revoir les petits diagrammes à faire commuter.

Un morphisme de foncteurs cohomologiques est un foncteur qui induit une transformation naturelle des foncteurs SEC$\mapsto$ SEL.

Remarque 40. *On demande pas forcément que $\mathcal{C}$ ait assez d'injectifs ici.*

Définition 3.4.5. Un foncteur cohomologique $T = (T^n, \delta^n)_n$ est universel si pour tout foncteur cohomologique $T' = (T'^n, \delta'^n)_n$ et pour toute transformation naturelle $g \colon T^0 \to T'^0$ il existe un unique morphisme de foncteurs cohomologiques $f \colon T \to T'$ tel que $f^0 = g$.

Théoreme 3.4.6. *Soit $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur exact à gauche entre catégories abéliennes où $\mathcal{C}$ a assez d'injectifs. Le foncteur cohomologique donné par les foncteurs dérivés est un foncteur cohomologique universel. de $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$.*

Corollaire 3.4.7. *$(R^n F, \delta^n)_n$ muni de $F \simeq R^0 F$ est initial dans la catégorie des foncteurs cohomologiques T de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ avec un morphisme $F \to T^0$.*

Définition 3.4.8. Soit $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ exact à gauche et $\mathcal{C}$ a assez d'inj. Un objet $C \in \mathcal{C}$ est F-acyclique si pour tout $n > 0$:

$$R^n F(C) = O_{\mathcal{D}}$$

Remarque 41. *Les injectifs sont F-acycliques pour tout F.*

Définition 3.4.9. Une résolution F-acyclique de $A \in \mathcal{C}$ est une résolution faite d'acycliques.

Proposition 3.4.10. *Soit $A \in \mathcal{C}$, $A \to C^\bullet$ une résolution F-acyclique, et $A \to I^\bullet$ une résolution injective. On a une extension de id_A en $C^\bullet \to I^\bullet$ unique à homotopie près. Alors la flèche*

$$F(C^\bullet) \to F^(I^\bullet)$$

est un quasi-isomorphisme

$$H^n(F(C^\bullet)) \simeq H^n(F(I^\bullet)) = R^n F(A)$$

Démonstration. Utilise les suites spectrales. □

Chapitre 4

Cohomologie des faisceaux

4.1 Définition

Soit X un e.t. et $PSh_{Ab}(X)$ (resp. $Sh_{Ab}(X)$) la catégorie des préfaisceaux en groupes abéliens.

Remarque 42. *On va définir*

$$R^n\Gamma(X, \mathscr{F}) =: H^n(X, \mathscr{F})$$

y faut prouver que $Sh(X)$ est une catégorie abélienne, a assez d'injectifs et que $\Gamma(X, \_)$ est exact à gauche.

Proposition 4.1.1. *Les limite et les colimites existent dans $PSh(X)$ et sont calculées arguments par arguments.*

Idées de démonstration. Soit $F\colon I \to PSh(X)$ un foncteur d'une petite catégorie I. Alors pour tout $U \in Ouv(X)$:

$$(\varinjlim_I(F_i))(U) = \varinjlim_I(F_i(U))$$

et

$$(\varprojlim_I(F_i))(U) = \varprojlim_I(F_i(U))$$

maintenant on peut définir les préfaisceaux $U \mapsto \varprojlim_I(F_i(U)) =: F_\infty$ par la condition d'avant. Faut montrer que c'est un faisceau. Pour tout $i \in I$ on a une flèche $F_\infty(U) \to F_i(U)$ fonctorielle en U d'où $F_\infty \to F_i$ dans $PSh(X)$. Maintenant si $L \in PSh(X)$ est un cône on obtient $L(U) \to F_i(U)$ donc $L(U) \to F_\infty(U)$ fonctoriel en U. D'où $L \to F_\infty$ ce qui prouve que F_∞ est bien universel.

□

Corollaire 4.1.2. *$PSh_{Ab}(X)$ est abélienne, et même $PSh(X)$ sur une catégorie abélienne.*

Démonstration. On a le faisceau nul. Le produit/coproduit est une limite/colimite et on a l'isomorphisme entre coproduit et produit. On en déduit que

$$\mathrm{Hom}_{PSh(X)}(F, G)$$

est un monoide commutatif. On définit facilement les inverses terme à terme donc c'est un groupe.

On a montré que $PSh(X)$ est additive.

Maintenant les noyaux et conoyaux existent. Reste à voir le théorème d'isomorphisme. On l'a clairement terme à terme. □

Corollaire 4.1.3. *$Sh(X)$ est abélienne.*

Démonstration. Via l'adjonction $(\_)^\sharp \colon PSh(X) \leftrightarrow Sh(X) : i$. On a $(\_)^\sharp \circ i = id_{Sh(X)}$ et, i préserve les limites, $(\_)^\sharp$ préserve les colimites (en tant qu'adjoint à droite). Étant donné un diagramme dans $Sh(X)$: (F_k) on le pousse dans $PSh(X)$ en $i(F_k)$ pour obtenir une limite $\varinjlim_k i(F_k)$. Maintenant

$$0 \to F_k(U \cup V) \to F_k(U) \oplus F_k(V) \to F_k(U \cap V)$$

passe à la limite (le noyau est une limite) d'où

$$\varprojlim_k i(F_k) \text{ est un faisceau}$$

et $(\varprojlim_k (i(F_k)))^\sharp = \varprojlim_k F_k$. D'où $(\_)^\sharp$ préserve les colimites et les limites de diagrammes de la forme

$$I \to Sh(X) \to PSh(X)$$

en particulier l'objet 0.

Maintenant si $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in Sh(X)$ alors

$$(i(\mathscr{F}) \oplus i(\mathscr{G}))^\sharp = \mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$$

est une somme directe dans $Sh(X)$. Pareil on récupère le noyau et conoyau par faisceautisation. Les Hom sont clairement des groupes abéliens car sont les mêmes que dans PSh. Enfin le théorème d'isomorphisme se déduit sur les fibres par exemple. □

Proposition 4.1.4. *$Sh(X)$ a assez d'injectifs.*

Démonstration. DM. □

Proposition 4.1.5. *Pour tout $U \in Ouv(X)$, Γ_U est exact à gauche.*

Démonstration. DM. □

Définition 4.1.6. Soit $\mathscr{F} \in Sh(X)$. Les groupes de cohomologie de X a coefficients dans $\mathscr{F}$ sont les $H^n(X, \mathscr{F}) = R^n\Gamma(X, \mathscr{F})$.

Remarque 43. *Comment les calculer ? On prends une résolution injective*

$$\mathscr{F} \to I^\bullet$$

dans $Sh(X)$. On applique $\Gamma(X, \_)$:

$$0 \to I^0(X) \to I^1(X) \to \dots$$

puis $H^n(X, \mathscr{F}) := H^n(I^\bullet(X))$. Si $\mathscr{F} \to C^\bullet$ est acyclique on calcule de la même manière la cohomologie.

Exercices 4.1.7. Si on prends le faisceau constant $\underline{A}$ sur un point, alors $H^n(\{x\}, \underline{A})$ c'est une cohomologie des groupes?

Exemple 4.1.8. Si M est une variété différentielle de dimension d et $\mathbb{R}$ le faisceau constant sur M. Le lemme de poincaré montre que

$$0 \to \mathbb{R} \to \Omega^0 \to \Omega^1 \to \dots \to \Omega^d \to 0$$

est une résolution de $\mathbb{R}$. On peut montrer que Ω^n est Γ_M acyclique d'où

$$H^n(M, \mathbb{R}) = H^n(\Omega^\bullet(M)) = H^n_{dR}(X)$$

est la cohomologie de DeRham.

4.2 Faisceaux flasques

Soit X un espace topologique. On montre que les faisceaux flasques sont acycliques pour $\Gamma(X, \_)$.

Proposition 4.2.1. *Si on a une suite exacte courte $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to$ dans $Sh(X)$ et si on supp $\mathscr{F}'$ flasque, alors*

$$0 \to \mathscr{F}'(U) \to \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}''(U) \to 0$$

est exacte dans Ab.

Démonstration. DM. ☐

Corollaire 4.2.2. *Soit $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ une s.e.s dans $Sh(X)$, alors si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}''$ sont flasques, $\mathscr{F}''$ aussi.*

Démonstration. Soit $V \subseteq U \subseteq X$ des ouverts. On a une suite exacte et un diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{F}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F}(U) \arrow[r] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, two heads] & \mathscr{F}''(U) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F}'(V) \arrow[r] & \mathscr{F}(V) \arrow[r, two heads] & \mathscr{F}''(V) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dans *Ab*. D'où $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}''(V)$ est surjective d'où $\mathscr{F}''(U) \to \mathscr{F}''(V)$ aussi. ☐

Proposition 4.2.3. *Soit $\mathscr{F} \in Sh(X)$. Il existe un faisceau flasque $C^0(\mathscr{F})$ et un mono $\mathscr{F} \to C^0(\mathscr{F})$. La construction est fonctorielle.*

Démonstration. On a $C^0(\mathscr{F})(U) := \prod_{x \in U} \mathscr{F}_x$. Et

$$\mathscr{F}(U) \to \prod_{x \in U} \mathscr{F}_x$$

est injective. Maintenant $C^0(\mathscr{F})(U) \to C^0(\mathscr{F})(V)$ est surjective. ☐

Proposition 4.2.4. *Tout faisceau injectif sur X est flasque.*

Démonstration. Soit I un faisceau injectif sur X. On a

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, dashed, "id"] & C^0(I) \arrow[dl, dashed, "\exists r"] \\
0 \arrow[r] & I &
\end{tikzcd}$$

Puis pour tout U on a un diagramme induit

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I(U) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, dashed, "id"] & C^0(I)(U) \arrow[dl, dashed, "r(U)"] \\
0 \arrow[r] & I(U) &
\end{tikzcd}$$

d'où $r(U)$ est surjectif pour tout $U \subseteq X$. Pour tout $V \subseteq U \subseteq X$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} C^0(I)(U) \arrow[r, two heads, "r(U)"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, two heads] & I(U) \arrow[d] \\ C^0(I)(V) \arrow[r, two heads] & I(V) \end{tikzcd}$$

on en déduit que I est flasque. $\square$

Proposition 4.2.5. *Soit $\mathscr{F}$ flasque sur X. Alors $\mathscr{F}$ est $\Gamma(U, \_)$-acyclique pour tout $U \in Ouv(X)$.*

Démonstration. On prends $\mathscr{F} \to I^\bullet$ injective. On considère la suite exacte courte

$$0 \to \mathscr{F} \to I \to I/\mathscr{F} \to 0$$

On a vu que $\mathscr{F}$ et I sont flasques. D'où $I/\mathscr{F}$ aussi. Soit $U \in Ouv(X)$. Alors la famille

$$(R^n\Gamma(U, \_))_{n\geq 0}$$

est un foncteur cohomologique, d'où on a une suite exacte longue

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(U,\mathscr{F}) \arrow[r] & H^0(U,I) \arrow[r] & H^0(U,I/\mathscr{F}) \arrow[dll] \\ & H^1(U,\mathscr{F}) \arrow[r] & H^1(U,I) \arrow[r] & H^1(U,I/\mathscr{F}) \arrow[dll] \\ & H^2(U,\mathscr{F}) \arrow[r] & \dots & \end{tikzcd}$$

on a vu que la ligne du haut est exacte. D'où comme $H^i(U, I) = 0$ et la première flèche est injective, on obtient que $H^1(U, \mathscr{F}) = 0$. Par induction on suppose que $H^i(U, \mathscr{F}) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ pour tout $\mathscr{F}$ flasque. On obtient une suite exacte courte

$$H^n(U, I/\mathscr{F}) \to H^{n+1}(U, \mathscr{F}) \to H^{n+1}(U, I)$$

mais par hypothèse $H^n(U, I/\mathscr{F}) = 0$ car $I/\mathscr{F}$ est flasque (on peut swap $\mathscr{F}$ et $I/\mathscr{F}$ dans la preuve). On conclut facilement. $\square$

Résolution de Godemont :

Soit $\mathscr{F} \in Sh(X)$. On a un mono $\alpha\colon \mathscr{F} \to C^0(\mathscr{F})$ où $C^0(\mathscr{F})$ est flasque. On définit

$$Z^1(\mathscr{F}) := C^0(\mathscr{F})/\mathscr{F}$$

et

$$C^1(\mathscr{F}) := C^0(Z^1(\mathscr{F}))$$

on a une flèche $Z^1(\mathscr{F}) \to C^1(\mathscr{F})$. On définit le reste par induction. On a un morphisme $d^n\colon C^n(\mathscr{F}) \to C^{n+1}(\mathscr{F})$ t.q.

$$0 \to \mathscr{F} \to C^\bullet(\mathscr{F})$$

est exacte dans $Ch(Sh(X))$.

Définition 4.2.6. C'est la résolution de Godemont.

Remarque 44. *La construction $C^\bullet(\_)$ est fonctorielle de $Sh(X)$ dans $Ch(Sh(X))$.*

Remarque 45. *Étant Γ_U acyclique, la résolution calcule la bonne cohomologie.*

Chapitre 5

Hypercohomologie

À rattraper.

Soit $\mathscr{F} \in Sh(X)$. On considère

$$Sh(X) \longrightarrow D^+(X) := D^+(Sh(X))$$

$$\mathscr{F} \longmapsto I^\bullet$$

d'où $\mathscr{F}$ dans la catégorie dérivée, avec $I^\bullet$ une résolution injective. On déf

$$Rf_*(\mathscr{F}) := Rf_*(I^\bullet) = f_* I^\bullet$$

qui est complexe borné par en dessous de faisceaux injectifs sur Y tels que

$$H^i(Rf_*\mathscr{F}) = H^i(f_* I^\bullet) =: R^i f_*(\mathscr{F}).$$

Définition 5.0.1. Rf_* est le foncteur dérivé total de f_*.

Note 7. *Soit $f\colon X \to \{*\}$, on note $f_* = \Gamma(X, \_)$ et*

$$Rf_* =: R\Gamma(X, \_)\colon D^+(X) \to D^+(Ab).$$

Si $\mathscr{F} \in Sh(X)$, alors $R\Gamma(X, \mathscr{F})$ est un complexe borné par le bas de groupes abélienes divisibles. Similairement, si

$$\mathscr{F}^* \in Ch^+(Sh(X)) \to K^+(X) \to D^+(X)$$

on a $H^i(X, \mathscr{F}^*) = H^i(R\Gamma(X, \mathscr{F}^*))$.

Proposition 5.0.2. *On considère $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$. Il existe un isomorphisme naturel de foncteurs*

$$R(g\circ f)_* \simeq (R\circ g_*)\circ(Rf_*)\colon D^+(X) \to D^+(Z)$$

$$\begin{tikzcd} D^+(X) \arrow[r, "Rf_*"] \arrow[dr, "R(g\circ f)_*"'] & D^+(Y) \arrow[d, "Rg_*"] \\ & D^+(Z) \end{tikzcd}$$

De manière similaire on a un isomorphisme naturel

$$L(g\circ f)_* \simeq (L\circ f_*)\circ(Lg_*)\colon D^+(Z) \to D^+(X)$$

$$\begin{tikzcd} D^+(Z) \arrow[r, "Lg_*"] \arrow[dr, "L(g\circ f)_*"'] & D^+(Y) \arrow[d, "Lf_*"] \\ & D^+(X) \end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $I^* \in K^+(I_{Sh(X)}) =: D^+(X)$. On a

$$Rf_*(I^*) = f_*I^* \in D^+(Y)$$

et

$$Rg_*(Rf_*(I^*)) = g_*(f_*I^*)$$

comme f_* préserve les injectifs et

$$\begin{aligned} g_*(f_*I^*) &= (g_*\circ f_*)I^* \\ &= (g\circ f)_*I^* \\ &= R(g\circ f)_*I^* \end{aligned}$$

Comme $Lf^*\circ Lg^*$ est adjoint à gauche de $Rg_*\circ Rf_* \simeq R(g\circ f)_*$ et donc est $L(g\circ f)^*$ car les adjoints sont défs à unique isomorphisme près. D'où

$$Lf^*\circ Lg^* \simeq L(g\circ f)^*$$

□

Corollaire 5.0.3. *Soit $f\colon X \to Y$ une flèche continue et $\mathscr{F} \in Sh(X)$. Alors*

1. *$\forall i \geq 0$ $H^i(Y, Rf_*\mathscr{F}) = H^i(X,\mathscr{F})$.*
2. *Si $R^if_*\mathscr{F} = 0$ pour tout $i > 0$ alors*

$$H^i(Y, f_*\mathscr{F}) = H^i(X,\mathscr{F})$$

Démonstration. Pour 1. : on regarde

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & \{x\} \end{tikzcd}$$

d'où

$$\begin{aligned} R\Gamma(X, \mathscr{F}) &= R(g \circ f)_*\mathscr{F} \\ &= Rg_*(Rf_*\mathscr{F}) \\ &= R\Gamma(Y, Rf_*\mathscr{F}) \end{aligned}$$

et on applique $H(\_)$ pour obtenir

$$H^i(R\Gamma(X, \mathscr{F})) \simeq H^i(R\Gamma(Y, Rf_*\mathscr{F}))$$

càd

$$H^i(X, \mathscr{F}) \simeq H^i(Y, Rf_*\mathscr{F})$$

Pour 2. : $Rf_*\mathscr{F} = 0$ pour tout $i > 0$ d'où

$$f_*\mathscr{F} \to Rf_*\mathscr{F}$$

est un quasi-iso car

$$H^0(f_*\mathscr{F}) \simeq H^0(Rf_*\mathscr{F})$$

et $H^i(f_*\mathscr{F}) = 0 = H^i(f_*\mathscr{F}) = R^i f_*\mathscr{F}$. Il suit que

$$H^n(Y, f_*\mathscr{F}) \simeq H^n(Y, Rf_*\mathscr{F})$$

mais il manque qqch. □

Proposition 5.0.4. *Soit $f\colon X \to Y$ une fonction continue et $\mathscr{F}$ un faisceau sur X. Pour tout $n \geq 0$, $R^n f_*\mathscr{F}$ est le faisceau associé au préfaisceau*

$$Ouv(Y)^{op} \to Ab$$

t.q $V \mapsto H^n(f^{-1}V, \mathscr{F})$.

Démonstration. On prends $F \to I^\bullet$. On a pour tout $n \geq 0$

$$R^n f_*\mathscr{F} = H^n(f_*I^\bullet) \in Sh(Y)$$

et on calcule explicitement via

$$I^{n-1} \xrightarrow[d_{n-1}]{} I^n \xrightarrow[d_n]{} I^{n+1}$$

$$H^n(f_*I^\bullet) = \frac{\ker(f_*d^n)}{im(f_*d^{n-1})}$$

maintenant pour tout $V \in \mathrm{Ouv}(Y)$

$$\ker(f_*d^n)(V) = \ker(I^n(f^{-1}V) \to I^{n+1}(f^{-1}V))$$

et

$$im(f_*d^{n-1}) = (V \mapsto im(I^{n-1}(f^{-1}V) \to I^n(f^{-1}V)))^\sharp$$

maintenant

$$\frac{\ker(f_*d^n)}{im(f_*d^{n-1})} = (V \mapsto \frac{\ker(f_*d^n)(V)}{im(f_*d^{n-1})(V)})^\sharp$$

Il suit que

$$R^nf_*\mathscr{F} = (V \mapsto H^n(\ldots \to I^{n-1}(f^{-1}V) \to I^n(f^{-1}V) \to I^{n+1}(f^{-1}V) \to \ldots))^\sharp$$

mais $H^n(I^\bullet(f^{-1}V)) = H^n(f^{-1}V, \mathscr{F})$. □

Proposition 5.0.5. *Soit $f\colon X \to Y$ et $\mathscr{G} \in Sh(Y)$. On a une flèche canonique*

$$H^n(Y, \mathscr{G}) \to H^n(X, f^*\mathscr{G})$$

Démonstration. Soit $\mathscr{G} \to I^\bullet$ inj. Comme f^* est exact, $f^*\mathscr{G} \to f^*I^\bullet$ est une résolution. Maintenant si $f^*\mathscr{G} \to J^\bullet$ est une résolution inj. Il existe

$$\alpha\colon f^*I^* \to J^*$$

qui étend $id_{f^*\mathscr{G}}$ unique à homotopie près. Soit

$$a\colon Id_{Sh(Y)} \to f_*f^*$$

l'unité de l'adjonction. Inversement, soit

$$b\colon f^*f_*id_{Sh(X)} \to id_{Sh(X)}$$

la co-unité. On a

$$\Gamma(Y, a(I^\bullet))\colon \Gamma(Y, I^\bullet) \to \Gamma(Y, f_*f^*I^\bullet) = \Gamma(X, f^*I^\bullet) \to \Gamma(X, J^*)$$

En appliquant $H^n(\_)$ on obtient $H^n(Y, \mathscr{G}) \to H^n(X, f^*\mathscr{G})$. □

Proposition 5.0.6. *Soit $\mathscr{G}^* \in D^+(Y)$. On a une flèche canonique*

$$R\Gamma(Y, \mathscr{G}^*) \to R\Gamma(X, Lf^*\mathscr{G}).$$

Démonstration. Soit $a\colon Id_{D^+(Y)} \to Rf_*Lf^*$, ca donne

$$R\Gamma(Y, \mathscr{G}^*) \to R\Gamma(Y, Rf_*(Lf^*\mathscr{G})) \simeq R\Gamma(X, Lf^*\mathscr{G})$$

$\square$

Remarque 46. *Soit $A \in Ab$. Pour tout $n \geq 0$ on a un foncteur*

$$Top^{op} \to Ab$$

t.q. $X \mapsto H^n(X, A_X)$ où A_X est le faisceau constant associé à A sur X.

Pour tout $X \in Top$, soit $f_X\colon X \to \{*\}$. Soit $A \in Ab \simeq Sh(\{*\})$. Si $f\colon X \to Y$ et par

$$\begin{tikzcd} & \{*\} \\ X \arrow[ur, "f_X"] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[u, "f_Y"'] \end{tikzcd}$$

on obtient $f_X = f_Y \circ f$ d'où

$$A_X = f_X^* A = f^*(f_Y^* A) \simeq f^*(A_Y)$$

puis pour tout $n \geq 0$ on obtient

$$H^n(Y, A_Y) \to H^n(X, A_X)$$

Proposition 5.0.7. *Soit X un espace topologique, $Z \subseteq X$ un fermé et $i\colon Z \hookrightarrow X$. On a*

1. *$i_*\colon Sh(Z) \to Sh(X)$ est exact.*
2. *La co-unité*
$$i^* i_* \to id_{Sh(Z)}$$
est un isomorphisme de foncteurs.
3. *Pour tout $\mathscr{F} \in Sh(Z)$ et tout $n \geq 0$, on a un isomorphisme*
$$H^n(X, i_*\mathscr{F}) \simeq H^n(Z, \mathscr{F})$$

Démonstration. Soit $x \in X$, et soit $\mathscr{F} \in Sh(Z)$. On calcule

$$\begin{aligned} (i_*\mathscr{F})_x &= \varinjlim_{x \in U \subset X} i_*\mathscr{F}(U) \\ &= \varinjlim_{x \in U} \mathscr{F}(U \cap Z) \\ &= \varinjlim_{x \in U} \mathscr{F}(U \cap Z) \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin Z \\ \mathscr{F}_x \text{ sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

on déduit 1. via
$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$$
exacte dans $Sh(Z)$. Alors la suite est exacte sur les fibres en tout $x \in Z$. D'où
$$0 \to (i_*\mathscr{F}')_x \to (i_*\mathscr{F})_x \to (i_x\mathscr{F}'')_x \to 0$$
est exacte pour tout $x \in X$. Puis
$$0 \to (i_*\mathscr{F}') \to (i_*\mathscr{F}) \to (i_x\mathscr{F}'') \to 0$$
est exacte dans $Sh(X)$. Pour 2. on a $\alpha\colon i^*i_*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ qui induit
$$(i^*i_*\mathscr{F})_x = (i_*\mathscr{F})_x = \mathscr{F}_x \to \mathscr{F}_x$$
où la dernière flèche est l'identité, pour tout $x \in Z$. D'où le résultat. Pour 3., i_* est exact et préserve les injectifs, d'où si $\mathscr{F} \to I^\bullet$ est une résolution inj, $i_*\mathscr{F} \to i_*I^\bullet$ aussi. En plus
$$\Gamma(X, i_*I^\bullet) = \Gamma(Z, I^\bullet)$$
d'où en appliquant la cohomologie
$$H^n(X, i_*\mathscr{F}) \simeq H^n(Z, \mathscr{F})$$
□

5.1 Suites de Mayer-Vietoris et cohomologie des sphères

Étant donné $Z \subseteq X$ un fermé. On définit
$$H^n(Z, \mathscr{F}) := H^n(Z, i^*\mathscr{F})$$
pour un faisceau $\mathscr{F} \in Sh(X)$.

Proposition 5.1.1. *Soit $X = Y \cup Z$ une union de deux fermés. Pour tout $\mathscr{F} \in Sh(X)$ on a une suite exacte longue de cohomologie*
$$0 \to H^0(X, \mathscr{F}) \to H^0(Y, \mathscr{F}) \oplus H^0(Z, \mathscr{F}) \to H^0(Y \cap Z), \mathscr{F}) \to H^1(X, \mathscr{F}) \to \dots$$

Remarque 47. *Si on connaît la cohomologie sur deux fermés et leur intersections on la connaît sur X.*

Démonstration. On pose $g\colon Y \to X$, $h\colon Z \to X$ et $i\colon Y \cap Z \to X$ les inclusions. Claim : on a une suite exacte courte dans $Sh(X)$ donnée par

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow[(\alpha,\beta)]{} g_*g^*\mathscr{F} \oplus h_*h^*\mathscr{F} \xrightarrow[\gamma]{} i_*\mathscr{F} \longrightarrow 0$$

Si le claim est vrai, on obtiens la proposition en appliquant le foncteur cohomologique

$$(H^n(X, \_), \delta)_{n\geq 0}$$

(i.e. en prenant la suite exacte longue) car on a

$$H^n(X, g_*g^*\mathscr{F} \oplus h_*h^*\mathscr{F}) = H^n(X, g_*g^*\mathscr{F}) \oplus H^n(X, h_*h^*\mathscr{F}) = H^n(Y, g^*\mathscr{F}) \oplus H^n(Z, h^*\mathscr{F})$$

et $H^n(X, i_*\mathscr{F}) = H^n(Y \cap Z, \mathscr{F})$. □

Démonstration du claim. On pose $\alpha\colon \mathscr{F} \to g_*g^*\mathscr{F}$, $\beta\colon \mathscr{F} \to h_*h*^*\mathscr{F}$ les flèches d'adjonctions. La flèche (α, β) est donnée par la propriété universelle du produit. On considère

$$\begin{tikzcd} & X \\ Y \cap Z \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

avec $i = g \circ f$, $i_* \simeq g_* \circ f_*$ et $i_* \simeq f^* \circ g^*$. On a

$$g_*g^*\mathscr{F} \to g_*(f_*f^*)g_*\mathscr{F}$$

induite par $id \to f_*f^*$. D'où

$$g_*g^*\mathscr{F} \to g_*(f_*f^*)g^*\mathscr{F} = (g \circ f)_*(g \circ f)^*\mathscr{F} = i_*i^*\mathscr{F}.$$

On a une transformation naturelle $g_*g^* \to i_*i^*$ et pareil pour h. On obtient

$$\gamma_1\colon g_*g^*\mathscr{F} \to i_*i^*\mathscr{F}$$

$$\gamma_2\colon h_*h^*\mathscr{F} \to i_*i^*\mathscr{F}$$

et on pose $\gamma = (\gamma_1, -\gamma_2)$ de

$$g_*g^*\mathscr{F} \oplus h_*h^*\mathscr{F} \to i_*i^*\mathscr{F}$$

Il reste à montrer que la suite est exacte. C'est clairement un complexe. On montre que c'est exact sur les fibres. Soit $x \in X$, on a plusieurs cas

1. Si $x \in Y \cap Z$, on obtient la suite

$$0 \to \mathscr{F}_x \to (g_* g^* \mathscr{F})_x \oplus (h_* h^* \mathscr{F})_x \to (i_* i^* \mathscr{F})_x \to 0$$

   qui est égale à

$$0 \to \mathscr{F}_x \to \mathscr{F}_x \oplus \mathscr{F}_x \to \mathscr{F}_x \to 0$$

   et les flèches sont $s_x \mapsto (s_x, s_x)$ et $(s_x, s'_x) \mapsto s_x - s'_x$. D'où l'exactitude.

2. Si $x \in Y - (Z \cap Y)$: la suite devient

$$0 \mapsto \mathscr{F}_x \to \mathscr{F}_x \oplus 0 \to 0 \to 0$$

   et la flèche est l'identité $s_x \mapsto (s_x, 0)$.

3. Le dernier cas est identique.

Ce qui conclut la preuve car $X = Y \cup Z$. □

Proposition 5.1.2. *Soit $U, V \subseteq X$ des ouverts. Pour tout $\mathscr{F} \in Sh(X)$ on a une suite exacte longue*

$$0 \to H^0(U \cup V, \mathscr{F}) \to H^0(U, \mathscr{F}) \oplus H^0(V, \mathscr{F}) \to H^0(U \cap V), \mathscr{F}) \to H^1(U \cup V, \mathscr{F}) \to \dots$$

Bibliographie

[Mum70] D. MUMFORD. *Abelian Varieties*. Biblioteka Sbornika "Matematika". Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970. ISBN : 9780195605280.