Point sur le cours de corps locaux

Chapitre 1

Des choses à faire

Construire des extensions explicites! Y'a l'air d'avoir beaucoup de critères là dans le chapitre.

Chapitre 2

4e point sur les cours, 22/10/2024

Dernier point avant l'exam !

2.1 $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est noethérien ?

2.1.1 Cas séparable, caractéristique 0

Étant donnée L/K finie séparable, on a tout ce qui nous faut. On a un discriminant non nul bien défini, d'où si $L = \oplus K e_i$ alors

$$(Tr(e_i e_j))_{i,j}$$

est non dégénérée. Puis on a une base duale à e_i, i.e. e_i^* telle que $Tr(e_i^* e_j) = \delta_{ij}$. Avec ça on peut

1. à partir de e_i une base de L/K dans $\tilde{\mathcal{O}}_K$, obtenir sa base duale pour la trace e_i^*.
2. montrer que tout élément entier $b = \sum \lambda_i e_i^*$ vérifie $\lambda_i \in \mathcal{O}_K$, via $Tr(be_i) = \lambda_i$!
3. D'où $\mathcal{O}_K$ est un sous $\mathcal{O}_K$-module d'un module de type fini donc noethérien.

mais c'est pas si spécifique, c'est toujours vrai en caractéristique 0 ducoup!

2.1.2 Cas semi-local

Y suffit de le montrer dans le cas purement inséparable. Dans ce cas les idéaux maximaux de $\mathcal{O}_K$ et $\tilde{\mathcal{O}}_K$ sont en bijection !

2.2 Ramification 2

On se place **toujours** dans le cadre où on a $\mathcal{O}_K$ de valuation **discrète**. Le cadre en gros c'est

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_K \arrow[r, dash] \arrow[d] & \tilde{\mathcal{O}}_K & \subseteq & (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i} \arrow[d] & =?= & (\mathcal{O}_L) \\ k_K \arrow[rrr] & & & k_L \end{tikzcd}$$

C'est à dire qu'on prends la clôture intégrale, on regarde ses idéaux maximaux et on obtient des extensions de d.v.r. Quand K est complet ou quand on fixe une valuation (un premier $\mathfrak{m}_i$) sur L, $\mathcal{O}_L$ fait sens.

2.2.1 Calcul générique

Pour calculer maintenant en fait une marche à suivre c'est

On sait le faire dans $\mathcal{O}_K[\alpha]$.

On aurait besoin de critères pour que $\tilde{\mathcal{O}}_K = \mathcal{O}_K[\alpha]$. Si c'est le cas alors :

1. La factorisation de P

   dans $k_K[X]$ donne la ramification et les idéaux maximaux de $\tilde{\mathcal{O}}_K$!

2. Plus précisément, si
$$\bar{P} = \prod_i p_i^{r_i} \in k_K[X]$$
   alors $\mathfrak{m}_i = (\mathfrak{m}_K, p_i(\alpha))$.

Le point **important** c'est la ramification, on relève

$$P(\alpha) = \prod_i P_i^{r_i}(\alpha) + \epsilon(\alpha)$$

ce qui donne par le deuxième point

$$\prod_i \mathfrak{m}_i^{r_i} = \prod_i (\mathfrak{m}_K, P_i(\alpha))^{r_i} \subset \mathfrak{m}_K \tilde{\mathcal{O}}_K = \prod_i \mathfrak{m}_i^{e_i}$$

On en déduit $r_i \geq e_i$ pour tout i et on conclut directement avec

$$\sum r_i f_i = \deg \bar{P} = \deg P = [L : K] = \sum e_i f_i$$

On a utilisé que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est fini sur $\mathcal{O}_K$ pour l'égalité $\deg \bar{P} = \deg P$ **et** la dimension $[L : K] = \sum e_i f_i$.

4e point sur les cours, 22/10/2024

2.2.2 Cas primitif

Un cas intéressant quand on a $L = K(\alpha)$, par exemple si L/K est séparable on peut dire des choses fortes. Si $\bar{P}$ est séparable, alors $\tilde{\mathcal{O}}_K = \mathcal{O}_K[\alpha]$ et on peut appliquer la section d'avant!

On a un problème quand l'extension résiduelle est inséparable, on se place dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & K(\alpha) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & L \arrow[d, dash] \\
\mathcal{O}_K \arrow[r, dash] \arrow[d] & \tilde{\mathcal{O}}'_K \arrow[r, dash] \arrow[d] & \tilde{\mathcal{O}}_K \arrow[d] \\
k_K \arrow[r, dash] & k_{K(\alpha)} \arrow[r, dash] & k_L
\end{tikzcd}$$

2.2.3 Cas complet

On a une équivalence entre :

1. L'extension L/K est non ramifiée (par déf non ramifiée et $k_{K(\alpha)}/k_K$ est séparable).

2. Il existe $\alpha : L = K(\alpha)$ et P le pol min de α sur K est séparable sur k_K.

L'idée c'est juste que la formule $ef = [L : K]$ est vraie. Et on peut relever une base de l'extension résiduelle ! En gros ça donne une réciproque à la section d'avant.

Dans le cas p-adique, les corps finis sont parfaits et on a toujours des extensions séparables (c'est immédiat de la déf)! En particulier, si $\bar{P}$ est inséparable c'est qu'il est scindé. Ça se voit bien par Hensel :

1. On a toujours $\bar{P} = F^d$ et en réécrivant $d \deg F = \deg P = e.f$ sachant que $\deg F \mid f$ (à vérifier mais ça se voit) on obtient $e \mid d$. (l'égalité c'est qu'on suppose P unitaire)

Conclure là dessus, ajouter une discussion des cassages d'extensions de $\mathbb{Q}_p$ est totalement ramifiée et non ramifiée (le faire). Et aussi faire le lien entre ramification sur $\mathbb{Q}$ est sur des complétions $\mathbb{Q}_p$. Aussi conclure le cas primitif avec des divisibilités.

2.3 Ramification 1

J'vais parler de ramification ici. Le lemme clé c'est que dans une extensions de d.v.r $\mathcal{O}_K - \mathcal{O}_L$. Si

$$k_K - k_L$$

est de dimension $f \in \mathbb{N} \cup \infty$. Alors

$$dim_k \mathcal{O}_L / \mathfrak{m}_K \mathcal{O}_L = e.f$$

avec $\mathfrak{m}_K = \mathfrak{m}_L^e$. Ensuite, si $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est la fermeture intégrale de $\mathcal{O}_K$ dans L alors

$$\sum_i e_i f_i \leq [L : K]$$

où on écrit $\mathfrak{m}_K \tilde{\mathcal{O}}_K = \prod_i \mathfrak{m}_i^{e_i}$ et $f_i = [\tilde{\mathcal{O}}_K / \mathfrak{m}_i : k_K]$. Ça c'est par le lemme chinois! Pour utiliser le résultat de juste avant faut aussi montrer que

$$(\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i} / \mathfrak{m}_i^r (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i} \simeq \tilde{\mathcal{O}}_K / \mathfrak{m}_i^r \tilde{\mathcal{O}}_K$$

Pour $\mathfrak{m}$ maximal (ça se fait à la main). On a l'égalité dans plusieurs cas :

1. K est complet, car alors $\tilde{\mathcal{O}}_K = \mathcal{O}_L$.
2. L/K est séparable, car alors $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est fini sur $\mathcal{O}_K$.
3. Plus généralement, si $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est fini sur $\mathcal{O}_K$.
4. $L \otimes_K \widehat{K}$ est réduite. Regarder le lien entre les nilpotents et la séparabilité.

Maintenant faut la calculer.

Chapitre 3

3e point sur les cours, 21/10/2024

Faut faire un peu plus attention qu'au 2e point.

3.1 Extensions de valuations bis

En conséquence de l'autre section on peut reformuler la bijection

$$\{\text{Ideaux maximaux de } L \otimes_K \widehat{K}\} \leftrightarrow \{ \text{ Extensions de } |.|_K \text{ à } L\}$$

en

$$\{\text{Idéaux maximaux de } \tilde{\mathcal{O}}_K\} \leftrightarrow \{ \text{ Extensions de } |.|_K \text{ à } L\}$$

Dans le cadre où $(K, |.|_K)$ est donné par une valuation discrète, L/K est finie et $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est la clôture intégrale de $\mathcal{O}_v$ dans L. Le point c'est que d'un idéal maximal on peut tjr étendre la valuation et étant donné une extension de valuation c'est un d.v.r qui contient $\tilde{\mathcal{O}}_K$. On obtient les extensions de d.v.r via

$$\mathcal{O}_K - (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}}$$

La seule différence c'est que là on traite que du cas ultramétrique et de valuation discrète.

3.2 Extensions d'anneaux de Dedekind

Y'a des propositions clés pour tout c'est que si $A \to B$ est une extension entière d'anneaux intègres alors :

1. A est un corps ssi B est un corps.

2. $\mathfrak{p}$ un premier de B est maximal dans B ssi $\mathfrak{p} \cap A$ est maximal dans A.
3. A est de dimension 1 implique B est de dimension 1 (on est dans un cas intègre).

Ducoup ça dit directement que **si** :

- B est la clôture intégrale de A un anneau de Dedekind dans $L/Frac(A)$
- B/A est entière.

Alors B est de dimension 1 par le truc d'avant, entier sur A et intégralement clos par construction. La question c'est

Quand est-ce que B est noethérien?

C'est vrai si B/A est finie et L/K séparable.

Et si B/A est pas finie?

Y'a un théorème de **Krull-Akizuki** qui prouve que c'est toujours vrai si L/K est juste finie.

On peut le faire dans le cas semi-local fini. En gros y suffit de séparer en une extension séparable et une extension purement inséparable, y suffit de traiter le cas purement inséparable (On a tjr B entier sur a):

1. Cas purement inséparable : Si A est un d.v.r sa clôture est un d.v.r simplement parce qu'on peut déf $v(x) = v(x^{p^e})/p^e$. ($\tilde{\mathcal{O}}_K^{p^e} \subset \mathcal{O}_K$)
2. Si $B_\mathfrak{m}$ est noethérien pour tout $\mathfrak{m} \subset A$ alors B est noethérien en relevant les générateurs! (A semi-local noetherien) (L'argument est intéressant et montre que $\cap B_\mathfrak{m}$ ca marche pas très bien.)

Un peu plus précisément

1. Au dessus ça prouve que B est de Dedekind, en fait il est aussi semi-local.

Ça couvre ce qui nous intéresse : Les extensions de $\mathbb{Q}_p$ par exemple où $\mathbb{Z}_p$ est un d.v.r puis ses extensions sont semi-locales.

Chapitre 4

2e point sur les cours, 11/10/2024

4.1 Conséquences

Ducoup comme la fermeture intégrale commute avec la localisation on a directement

Les idéaux sont tous inversibles : ça c'est direct, en particulier les idéaux fractionnaires forment un groupe.

La decomposition en idéaux premiers : avec une petite application de la noethérianité.

ensuite, si $L/K = Frac(A)$ est séparable finie, on prouve que

1. La trace $Tr(x\_)$ est non dégénérée (via le discriminant), et c'est ptet là l'hypothèse séparable.

2. La fermeture de A dans L est de Dedekind et de type fini sur A.

On obtient directement les décompositions,

$$\mathfrak{p}B = \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathfrak{P}^{e_\mathfrak{P}}$$

et la formule

$$[L : K] = \sum e_\mathfrak{P} f_\mathfrak{P}$$

avec le lemme chinois.

4.2 Sur les anneaux de Dedekind

Le truc cool que j'avais jamais vu c'est que si A est intègre noethérien

Équivalences. On a :

$$A \text{ est de dimension 1 et intégralement clos.}$$

équivaut à

$$\text{Tout les localisés } A_{\mathfrak{p}} \text{ sont de valuations discrètes.}$$

L'équivalence est assez directe. On obtient la déf d'anneau de Dedekind.

Remarque 1. *En fait ça prouve que localiser et passer à la fermeture intégrale commutent. I.e.* $(\mathfrak{a}.\mathfrak{b})_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}.\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}$ *et* $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} + \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}$.

Ça prouve directement que les idéaux sont tous inversibles dans un anneau de Dedekind.

Faut juste se rappeler de la correspondance entre idéaux de A et $S^{-1}A$.

4.3 Sur les anneaux de valuations discrètes

J'aimerais donner seulement des idées de preuves et équivalences. J'regarde toujours des anneaux commutatifs.

Équivalences. Dans un anneau noethérien,

$$\text{DVR} \equiv \text{local, noethérien, } \mathfrak{m} = (\pi) \text{ non nilpotent.}$$

Idées. On veut écrire $x = \pi^n u$ de manière unique. Il faut montrer que $\cap \mathfrak{m}^n = 0$! Pour ça on utilise $\mathfrak{u} = \{x | \exists n, \pi^n x = 0\}$. Ensuite c'est fini. □

Équivalences. Dans un anneau noethérien intègre,

$$\text{DVR} \equiv \text{un seul idéal premier} \neq 0, \text{ intégralement clos.}$$

Démonstration. Le point c'est de montrer que $\mathfrak{m}$ est inversible, alors $\mathfrak{m}$ est principal. On note $\mathfrak{m}' = \{x \in K | x\mathfrak{m} \subset A\}$. On a

$$\mathfrak{m}\mathfrak{m}' \subset A \text{ et } A \subset \mathfrak{m}' \text{ implique } \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}\mathfrak{m}'.$$

d'où $\mathfrak{m}\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}$ ou A. Maintenant en fait

$$\text{si } \mathfrak{m}\mathfrak{m}' = A \text{ alors } \sum x_i y_i = 1 \text{ d'où } u = x_{i_0} y_{i_0} \in A - \mathfrak{m} = A^{\times}$$

en particulier tout $z \in \mathfrak{m}$ se réécrit $z = x_{i_0}(u^{-1}yz)$. Le reste est page 20 du Corps locaux. $\square$

Je veux mentionner la deuxième partie de la preuve, où $\mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} = \mathfrak{m}$ implique $\mathfrak{m}^{-1} = A$. On prend $x \in \mathfrak{m}^{-1}$, si $x \notin A$ alors on a pas nécessairemment $x^n \in \mathfrak{m}^{-1}$. Faut le montrer avant de regarder les A-module $[1, x, \dots, x^n]$ dans $\mathfrak{m}^{-1}$ de type fini.

Je veux aussi mentionner la troisème, la preuve est assez instructive sur les méthodes au final. L'idée c'est de montrer que y'a une fraction dans $\mathfrak{m}^{-1}$ si A a un seul idéal premier non nul (dans le 1.). Pour ça

1. On montre que $K = A_x$ pour un $x \in \mathfrak{m}$. $(1/z = y/x^n)$
2. Alors si $z \in A - 0$, $\mathfrak{m} \subset \sqrt{zA}$. On peut prendre $z \in \mathfrak{m}$.
3. Prendre $y \in \mathfrak{m}^{n-1} - \mathfrak{m}^n$ avec $\mathfrak{m}^n \subset zA$ minimal.

Chapitre 5

1er point sur les cours, 04/10/2024

5.1 Extensions sur corps non complets

Si $(K, |.|_K)$ est ultramétrique et E/K finie. On peut regarder $Aut(L/K)$ pour construire

$$|.|_L \mapsto |\sigma(.)|_L$$

elles étendent toutes $|.|_K$ et on en a $\#Aut(L/K)/ef$ dans le cas galoisien par exemple. À l'inverse, étant donné $|.|_L$ qui étend $|.|_K$ on peut obtenir un σ en trouvant $\tau\colon \widehat{L} \to (\widehat{K})^c$ d'où $|.|_{\widehat{L}} = |.|_c \circ \tau$. En fait on regarde

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r] & L.\overline{K} = \widehat{L} \arrow[dr, dashed] & \\
K \arrow[u] \arrow[r, hook] & \overline{K} \simeq \widehat{K} \arrow[u] \arrow[r, hook] & (\widehat{K})^c
\end{tikzcd}$$

où $\overline{K}$ est l'adhérence de K dans $\widehat{L}$. L'égalité montre que $\widehat{L}$ est de dimension finie sur $\widehat{K}$. En particulier on obtient $\tau\colon \widehat{L} \to (\widehat{K})$. Ensuite, $\tau(\widehat{L}) \ni \tau(x) \mapsto |x|_{\widehat{L}}$ est une valeur absolue sur $\tau(\widehat{L}) \subset (\widehat{K})^c$ qui étend celle de $\overline{K} \simeq \widehat{K}$ d'où par unicité sur la clôture on a

$$|x|_{\widehat{L}} = |\tau(x)|_c$$

et on peut faire redescendre sur $\tau|_L \colon L \to K^c$.

Remarque 2. *Y'a plusieurs plongements en général $\widehat{L} \to (\widehat{K})^c$ penser au groupe de galois sur $\mathbb{Q}$ qui devient le groupe de décomposition sur $\mathbb{Q}_p$. Et y définissent tous la même valeur absolue sur $\widehat{L}$.*

5.2 Avec les anneaux artiniens

Là y'a un truc cool qui montre clairement la décomposition des premiers dans des extensions! On a une correspondance entre

$$\{\text{Idéaux maximaux de } L \otimes_K \widehat{K}\} \leftrightarrow \{\text{extensions de } |.|_K \text{ à } L\}$$

Pour la surjectivité on utilise

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr] \arrow[dr] & & \widehat{L} \\
& L \otimes_K \widehat{K} \arrow[ur, dashed] & \\
K \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \widehat{K} \arrow[uu] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

et on pose $\mathfrak{m}_{|.|_L} = \ker(L \otimes_K \widehat{K}) \to \widehat{L}$. Pour l'injectivité c'est assez direct.

5.3 Extensions de valuations et corps complets

Le cas archimédien est assez particulier puisque y'a que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. C'est l'exercice 8 de la feuille où on peut montrer que tout corps archimédien complet qui contient i est isomorphe à $\mathbb{C}$. Je vais regarder surtout le cas non archimédien.

Théoreme 1. *Si $C(K)$ est l'ensemble des suites de Cauchy sur K et $\mathfrak{m}(K)$ celles qui tendent vers 0 alors $\mathfrak{m}(K)$ est maximal et $C(K)/\mathfrak{m}(K)$ est un corps complet minimal où K est dense.*

Pour les extensions maintenant on a besoin de Hensel et du fait que

Corollaire 1. *Si K est complet ultramétrique, le max des coefficients de $P(X)$ irréductible sur K est atteint par $P^*(0)$ (coeff dominant) ou $P(0)$. En particulier si $P^*(0) = 1$ et $|P(0)| \leq 1$ alors P est dans $\mathcal{O}_K[X]$.*

mais j'en parlerai a un autre moment. Donc maintenant qu'on sait c'est quoi les corps complets premiers en caractéristique 0 on regarde leurs extensions finies. L'idée c'est que c'est des Banach de dimension finie sur un $\mathbb{Q}_p$ donc

- Toutes les normes sont équivalentes.

en particulier les valeurs absolues sont équivalentes, donc y'en a qu'une qui étend $|.|_p$.

Construction de la valeur absolue. Étant donné $x \in L/K$ on regarde l'endomorphisme de multiplication sur L par x, $m_x \in End_K(L)$. On déf

$$N_{L/K}(x) = \det(m_x)$$

comme $N_{L/K}(y \in K) = y^{[L:K]}$ on déf

$$|.|_L := |N_{L/K}(.)^{1/[L:K]}|$$

pour vérifier qu'elle est ultramétrique, on se rappelle que $\det(m_x)$ est le coefficient constant de $\chi_{m_x}(X)$ le polynôme caractéristique de m_x à coefficient dans K. En plus $x \mapsto m_x$ est un homomorphisme d'anneau. D'où

$$N_{L/K}(x) = (-1)^{[L:K]}\chi_{m_x}(0)$$

si on remarque que m_x est diagonale par bloc avec $[L : K(x)]$ blocs. On peut affiner en remarquant que

$$\chi_{m_x} = \mu_x^{[L:K(x)]}$$

avec μ_x le polynôme minimal de x. Maintenant pour montrer que c'est ultramétrique faut montrer que

$$|1 + \alpha|_L \leq 1$$

Mais $\mu_{1+x}(X) = \mu_x(X - 1)$ et $\mu_x \in \mathcal{O}_K$ par le corollaire puis $\mu_x(-1) \in \mathcal{O}_K$ d'où le résultat. Les autres propriétés sont claires. $\square$

On peut maintenant l'étendre a une clôture algébrique K^c via

$$x \mapsto |N_{K(x)/K}(x)^{1/[K(x):K]}|$$

et il y'a unicité.

5.4 Classification sur $\mathbb{Q}$

En théorie des nombres, on a regardé grosso modo Ostrowski et les équivalences de valeurs absolues ($|.|^s$) pour définir la même topologie.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathbb{R} & & & \\
 & & & (\mathbb{Q}, |.|) \arrow[u] \arrow[dlll] \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & & & \\
\mathbb{Q}_2 & \mathbb{Q}_3 & \mathbb{Q}_5 & \mathbb{Q}_7 & \mathbb{Q}_{11} & \mathbb{Q}_{13} & \cdots
\end{tikzcd}$$

Les grosses idées a retenir pour moi : étant donné une $|.|$, si elle est non archimédienne $\to$ on regarde la valuation associée v. Ensuite $\mathfrak{m} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$, et ensuite sur $\mathbb{Z}$ si $x \wedge p = 1$ $|ux| = |1 - yp| = 1$ d'où suffit de regarder $|p|$. Le cas archimédien est un peu plus compliqué mais assez étonnant. En fait si on regarde un corps archimédien complet dont la v.a. étend celle de $\mathbb{Q}$ contenant i. Alors on peut plonger $\mathbb{C}$, disons $i\colon \mathbb{C} \to K$. L'idée c'est de regarder pour $a \in K$ l'inf de,

$$f_a\colon z \mapsto |z - a|_K$$

si c'est $r > 0$ on peut faire bouger r comme on veut. Ensuite faut regarder pour $|\gamma_0 - a| = r$ et $|\gamma - \gamma_0| < r$ on peut calculer

$$(\gamma_0 - \gamma)^n - (\gamma_0 - a)^n$$

le spécificité de $\mathbb{C}$ analytiquement c'est alors d'avoir toutes les racines de l'unités. Ce qui permet de factoriser le truc du dessus.