

Intérêts du cours de corps locaux

Chapitre 1

Les questions auxquelles le cours réponds?

1.1 But

Essentiellement, le but c'est de comprendre le morphisme

$$\mathrm{Spec}(\tilde{\mathcal{O}}_K) \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$$

provenant de $\mathcal{O}_K \subset \tilde{\mathcal{O}}_K$ la clôture intégrale de \mathcal{O}_K dans L une extension de K . Surtout dans le cas où l'extension est finie.

1.2 Motiver le cadre

On se restreint au cas où \mathcal{O}_K est de valuation discrète. Quand on a un anneau de Dedekind quelconque, on peut s'y ramener en remplaçant

$$\mathcal{O}_K$$

par

$$(\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{m}}$$

maintenant les localisés d'anneaux de Dedekind sont des anneaux de valuation discrète !

1.3 Le cadre général

Comme on part d'un anneau de Dedekind \mathcal{O}_K . La première question c'est Quand est-ce que

$$\mathcal{O}_K = \tilde{\mathcal{O}}_K$$

1.4 Ésthetique des anneaux de Dedekind

est une extension d'anneaux de Dedekind. La question se réduit systématiquement à

Est-ce que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est noethérien ?

1.4 Ésthetique des anneaux de Dedekind

L'anneau de Dedekind est un anneau noethérien de dimension 1. Autrement dit, on est sur un schéma affine de dimension 1 :

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$$

Mais surtout, tout ses localisés à des premiers sont des anneaux de valuation discrète ! Ça ça m'intéresse pour les raisons suivantes :

1. On obtient un local-global en localisant.
2. On peut compléter et obtenir le cadre des corps locaux.

en particulier on a le pont de, si

$$K - L$$

est une extension de corps finis, on peut en faire une extension de corps valués via le processus suivant :

1. D'un premier de \mathcal{O}_K on obtient $(\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{m}_K}$.
2. On obtient aussi un corps valué $(K, |\cdot|_{\mathfrak{m}_K})$.
3. De $\mathfrak{m}_K \tilde{\mathcal{O}}_K = \prod \mathfrak{m}_i^{e_i}$ on obtient des premiers \mathfrak{m}_i .
4. D'un $\mathfrak{m}_i | \mathfrak{m}_K$ on obtient une extension de valeur absolue $|\cdot|_{\mathfrak{m}_i}$ et une extension de DVR

$$\mathcal{O}_K - (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i}.$$

Géométriquement c'est l'étude de la fibre en $\mathfrak{m}_K \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Maintenant, on cherche à obtenir le e tel que $\mathfrak{m}_K = \mathfrak{m}_i^e$. On obtient la cardinalité de la fibre et l'indice de ramification des uniformisantes.

En fait maintenant le point puissant, c'est le point où on complète K en \mathfrak{m}_K et L en \mathfrak{m}_i . Alors

$$\hat{K} - \hat{L}$$

a dimension $f_i e_i$.

Les questions auxquelles le cours réponds?

Remarque 1. *Un point qui semble flou là c'est : mais si je complète K en \mathfrak{m}_K , $\widehat{L} = L.\widehat{K}$ donc il est où le choix de compléter en \mathfrak{m}_i pour L ? On dirait que le choix est immédiat et les idéaux se contractent en un. En fait écrire*

$$L.\widehat{K}$$

équivalait à faire vivre L et \widehat{K} au même endroit. D'où à plonger L dans une clôture de K , K^c et la regarder dans $(\widehat{K})^c$. Sinon on pourrait regarder

$$L \otimes_K \widehat{K}$$

et là son spectre est non trivial ! Choisir

$$L \otimes_K \widehat{K} \rightarrow (\widehat{K})^c$$

équivalait à choisir un idéal maximal.

On peut maintenant utiliser la théorie des corps complets et Hensel !

1.5 Les points omis

J'ai direct dit que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ était de Dedekind. En fait si L/K est finie c'est toujours vrai.

1.6 Quand est-ce que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est monogène sur \mathcal{O}_K ?

1.7 L'étude du cas complet

1.8 Quand est-ce que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est noethérien ?

Comme d'hab on prends

L/K finie avec $K = \text{Frac}(\mathcal{O}_K)$ un anneau de valuation discrète

Ensuite on regarde sa fermeture intégrale dans L , $\tilde{\mathcal{O}}_K$. On veut une extension de DVR, pour ça y faut que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ soit de Dedekind. Le problème c'est toujours de montrer que c'est noethérien.

1.8 Quand est-ce que \mathcal{O}_K est noethérien ?

1.8.1 Cas séparable

Étant donnée L/K finie séparable, on a tout ce qui nous faut. On a un discriminant non nul bien défini, d'où si $L = \oplus K e_i$ alors

$$(Tr(e_i e_j))_{i,j}$$

est non dégénérée. Puis on a une base duale à e_i , i.e. e_i^* telle que $Tr(e_i^* e_j) = \delta_{ij}$. Avec ça on peut

1. à partir de e_i une base de L/K dans $\tilde{\mathcal{O}}_K$, obtenir sa base duale pour la trace e_i^* .
2. montrer que tout élément entier $b = \sum \lambda_i e_i^*$ vérifie $\lambda_i \in \mathcal{O}_K$, via $Tr(b e_i) = \lambda_i$!
3. D'où \mathcal{O}_K est un sous \mathcal{O}_K -module d'un module de type fini donc noethérien.