Notes sur les faisceaux

2024-2025

Table des matières

Chapitre 1

Faisceau

1.1 Caractérisation

Étant donné un foncteur $\mathscr{F}\colon \mathrm{Ouv}(X) \to \mathcal{A}$, pour chaque recouvrement $\bigcup_i U_i = X$, on peut définir la suite

$$0 \to \mathscr{F}(U) \to \prod_i \mathscr{F}(U_i) \to \prod_{(i,j)} \mathscr{F}(U_i \cap U_j)$$

notée $C((U_i)_i, \mathscr{F})$. Maintenant

Être un faisceau c'est rendre la suite exacte.

1.2 Préfaisceau séparé

Un préfaisceau est séparé si il rend

$$0 \to \mathscr{F}(U) \to \prod_{x \in U} \mathscr{F}_x$$

injective.

1.3 Faisceautisation et espace étalé

Ducoup étant donné le faisceau

$$C^0(\mathscr{F})\colon U \mapsto \prod_{x \in U} \mathscr{F}_x$$

on va trouver un sous-faisceau $\mathscr{F}^\sharp \subseteq C^0(\mathscr{F})$.

1.3.1 Faisceautisation I

Y'a deux manières de le construire, la simple

$$\mathscr{F}^\sharp(U) := \{(s_x)_x \in \prod_{x\in U} \mathscr{F}_x | \forall x, \exists V_x, t \in \mathscr{F}(V_x), \forall P \in V_x, t_P = s_P\}$$

mais technique. Essentiellement, une section c'est la donnée d'un recouvrement (f_U, U) à équivalence faible près.

1.3.2 Espace étalé

L'autre c'est avec l'espace étalé, on définit

$$Et(\mathscr{F}) := \bigsqcup_{x\in X} \mathscr{F}_x$$

ensuite on définit la projection

$$\pi\colon Et(\mathscr{F}) \to X$$

via $s_x \mapsto x$. Puis enfin, à toute $s \in \mathscr{F}(U)$, on peut associer

$$\bar{s}\colon U \to Et(\mathscr{F})$$

qui a x associe s_x.

Remarque 1. *On remarque que c'est des sections $\pi \circ \bar{s} = id_U$.*

Pour la **topologie** donc via

$$\mathscr{F}(U) \ni s \mapsto \bar{s} \in \mathrm{Hom}(U, Et(\mathscr{F})$$

on prends la topologie finale associée à l'ensemble de $\bar{s}$.

Remarque 2. *Pour rappel U est ouvert sur X ssi $\bar{s}^{-1}(U)$ est ouvert pour tout $s \in \mathscr{F}(U)$.*

1.3.3 Faisceautisation II

Maintenant on peut définir

$$\mathscr{F}^+(U) := U \mapsto \{f \in \mathrm{Hom}_{Top}(U, Et(\mathscr{F}))|\pi \circ f = id_U\}$$

déjà on remarque que si $P \in U$ alors $f(P) \in \mathscr{F}_P$ parce que c'est une section. D'où c'est **injectif** et

$$\mathscr{F}^+(U) \subset \prod_{x\in U} \mathscr{F}_x$$

maintenant la continuité dit que $f^{-1}(f(U) \cap S) = U$ est ouvert ssi localement il existe s t.q $\bar{s}^{-1}(f(U) \cap S) = U$. Autrement dit $\bar{s}(P) = f(P)$ pour tout $P \in U$. On voit en fait que par définition y'a un recouvrement de $U = \bigcup_i U_i$ où

1. $f|_{U_i} = \bar{s}_i$.
2. Sur $U_i \cap U_j$, $\bar{s}_i = \bar{s}_j$ ont les mêmes fibres.

Remarque 3. *Explorer un peu si y'a essentiellement un unique manière d'écrire f à "équivalence faible".*

1.4 Adjonctions

1.5 Image directe et inverse