Notes perso : Corps locaux

Table des matières

Valuations discrètes

Caractéristion des anneaux de valuations discrètes

J'ai enfin compris la preuve du fait que A noethérien local et d'idéal maximal principal engenré par un non nilpotent. Donc c'est page 19 du corps locaux. Dire que $\cap\mathfrak{m}^n = 0$ c'est dire qu'il existe un n tel que $x \in A$ s'écrit $\pi^n u$ avec u inversible et $\mathfrak{m} = (\pi)$.

Le fait qu'on ait pas deux écritures $\pi^n u = \pi^{n+m} v$ c'est parce qu'alors $1-u^{-1}v\pi^m \in I$ ou I est le noyau de la localisation en π. Mais alors $1-u^{-1}v\pi^m$ est inversible dans I d'où la puissance de π qui l'annule est nulle !

En fait c'est aussi équivalent au fait d'être noétherien, intégralement clos et d'avoir un seul idéal premier non nul.

Des exercices

Lemme de Krasner

Lemme 0.0.1. *Si E/K est galoisienne et K est complet pour $|.|$. Si $(x_i)_i$ sont des conjugués dans E/K et $y \in E$ vérifie $|y - x_1|_E < |y - x_i|$ pour tout $i \neq 1$. Alors $x_1 \in K(y)$.*

L'idée c'est que les x_i conjugués à x_1 au dessus de $K(y)$ vérifient $|y - x_1|_E = |y-x_i|_E$ en appliquant un automorphisme et vu que $K(y)$ est complet. Si c'est pas le cas $\sigma(y) \neq y$ et donc on peut juste comparer $|y - x_1| = |\sigma(y) - \sigma(x_1)$. En fait, si $K(y) \nsubseteq K(x_i, i)$ par Galois il y a toujours un automorphisme non trivial qui fixe $K(y)$. Donc si pour tous on a $|y - x_1| < |y - \sigma(x_1)$ c'est que $x_1 \in K(y)$.

Application : Si f est séparable irréductible de degré n et x_i sont ses racines. Et si $|f - h|$ est petite, alors h est irréductible et l'extension qu'il engendre est la même que celle de f. On peut poser $E = K(y, x_1, \dots, x_n)$ pour y une racine de h. On peut maintenant remarquer que

$$min_i|y - x_i|^n \leq |f(y)| \leq O(n|f - h|)$$

comme f est séparable, ses racines sont distinctes donc celles de h doivent s'écarter. En particulier si $|f - h|$ est petit $|y - x_{i_0}| < |y - x_i|$ pour tout i. D'où $x_{i_0} \in K(y)$ et on réitère.