# Notes perso : Géométrie algébrique

# Table des matières



...

Bon encore et toujours, le Nakayama, j'ai vu une preuve un peu en détail. En gros, si $M$ est un $A$-module de type fini. Et si $IM = M$, on peut dire plusieurs choses : soit $(m_0, \ldots, m_n)$ une famille génératrice de $M$, on a

$$m_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} m_i$$

avec $\alpha_{ij} \in I$. D'où la matrice $A = (\alpha_{ij})$ vérifie, $\ker(A - I_n) = M$ en tant qu'endomorphisme du $A$-module $M$. Maintenant on peut faire plusieurs choses.

## 0.1 Avec la formule de Cramer

Par la formule de Cramer, on a $\det(A - I_n).M = d.M = 0$. Avec $d \in 1 + I$, ça ca se vérifie en développant la diagonale.

## 0.2 Directement mdr

En fait la matrice de $M \mapsto IM$ c'est vraiment l'identité ptdr, en particulier si on écrit la matrice de l'application, on l'appelle $C$, alors $Ce_i = e_i$ pour tout vecteur de la famille génératrice. Juste on le réecrit à coefficients dans $I$. Et on a $C \neq I$ parce que $1 \notin I$. Bon maintenant avec Cayley-Hamilton :

$$C^n + a_{n-1}C^{n-1} + \ldots + a_1 C + a_0 = 0$$

avec $a_i \in I$. Bon on a $\phi_C.v = v$ pour tout $v$, en particulier, $\phi_C(\sum a_i + 1) = 0$. En particulier, l'endomorphisme $m_x = m_{\sum a_i+1}$ a pour noyau tout $M$ et $\phi_C$ est l'identité. D'où $xM = 0$ et $\sum a_i \neq -1$ sinon $1 \in I$.

## 0.3 Conséquences

On a des objets maintenant il reste juste à trouver des critères sur $1 + I$ et $d$.

### 0.3.1 $M = B$ est un anneau

Si $A \subset B = M$ est un sur-anneau de $A$, on a $1_A \in M = B$, d'où $aB = 0$ seulement si $a = 0$. On peut en déduire via $0 \in 1 + I$ ssi $I = (1)$ que

$$I \subset A \implies IB \subset B$$

où les inclusions sont strictes.

### 0.3.2 Radical de Jacobson

Maintenant pareil, si $1 + I$ ne contient que des inversibles. Par exemple si $I$ est le radical de Jacobson, on obtient le critère avec

$$I = \bigcap_{\mathfrak{m} \in Specm(A)} \mathfrak{m}$$

que $I.M = M$ implique $M = 0$, ici car $d$ est inversible.

### 0.3.3 Cas général : $1 + I$ contient que des inversibles

Plus généralement ducoup si $1+I$ ne contient que des inversible, si $M'+IM = M$ pour un $M'$ quelconque alors $M = M'$, y suffit d'appliquer la méthode à $M/M'$.

### 0.3.4 Dimension $d$ en tant que $k$-ev implique généré par $d$ éléments

L'espace $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ un $A/\mathfrak{m}$ espace-vectoriel. En particulier, si

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \oplus_{i=1}^d k e_i$$

alors $\mathfrak{m} = (e_1, \ldots, e_d) + \mathfrak{m}^2$ dans $A$. En posant $M = \mathfrak{m}$ et $N = (e_1, \ldots, e_d)$ on peut regarder

$$\mathfrak{m}/(e_1, \ldots, e_d) = \mathfrak{m}.(\mathfrak{m}/(e_1, \ldots, e_d))$$

avec $M/N$ un $A$-module et $I = \mathfrak{m}$. On obtient $f \in 1 + \mathfrak{m}$ tel que $f\mathfrak{m} = (e_1, \ldots, e_d)$. En particulier si on localise en $f$ on a fini. Et si $A$ est local y'a égalité.

## 0.4 Morphisme fini implique surjectif

En fait la fibre $f^{-1}(y)$ vérifie des équations $f^*\mathfrak{m}_y$ et $f(x) = y$ veut dire que $f^*\mathfrak{m}_y \subset \mathfrak{m}_x$. À l'inverse, $f^{-1}(y) = \emptyset$ implique $f_*\mathfrak{m}_y = k[X]$. On remarque alors que en identifiant

$$k[Y] = f_* k[Y]$$

**Remarque 1.** *Les flèches finies sont dominantes donc cette identification est pas bizarre, la flèche est injective.*

si $X \to Y$ est fini, alors $k[X]$ est un $k[X]$-module de type fini et

$$\mathfrak{m}_y k[X] = k[X]$$

via l'identification. En particulier, via le critère où $M$ est un anneau ça peut pas arriver. D'où la surjectivité.

**Exercices 0.4.1.** Preuve constructive ?

## 0.5 Propreté des variétés projectives

**Note 1.** *On utilise seulement l'existence du $f \in 1 + I$.*

La preuve de séparation est dans mes notes. Sinon on doit prouver que $X \times Z \to Z$ est fermée. On peut se ramener à $\mathscr{P}^n \times \mathbb{A}^m$. La condition $y \in \mathbb{A}^m - p_2(Z)$ avec $Z = Z(I) \subset \mathbb{A}^m$ se réecrit

$$(U_0, \ldots, U_n)^N \subset I + \mathfrak{m}_y k[U_0, \ldots, U_n, T_1, \ldots T_m]$$

parce que un fermé du produit est donné par des

$$G_i(U_0, \ldots, U_n, T_1, \ldots, T_m) = 0$$

avec les $G_i$ homogènes en $\bar{U}$. Et en évaluant sur $\mathbb{A}^m$ en $y$, on doit pas avoir de solution pour les $G_i(\bar{U}, y) = 0$ dans $\mathbb{P}^n$. D'où en quotientant par $\mathfrak{m}_y$ le résultat.

**Remarque 2.** *Penser* $A = k[U_0, \ldots, U_n, T_1, \ldots, T_m] \to A/\mathfrak{m}_y$ *qui correspond à* $\mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{A}^m$.

On peut réecrire ducoup en considérant uniquement les éléments homogènes de degré $N$ :

$$(U_0, \ldots, U_n)^N = B_N \subset I_N + \mathfrak{m}_y B_N$$

avec $I_N = I \cap B_N$. D'où on obtient $P \in 1 + \mathfrak{m}_y \subset k[T_1, \ldots, T_m]$ homogène tel que $PB_n = I_N$ dans $k[\bar{U}, T_1, \ldots, T_m]$.

**Remarque 3.** *Là c'est*

$$P(\bar{T})(U_0, \ldots, U_n)^N \subset I_N \subset k[\bar{U}, \bar{T}]$$

En particulier, $y \in D^+(P)$ implique en localisant en $P$ via $p_2^{-1}(D(P))$ dans $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ et via $D(P) \cap Z$ dans $\mathbb{A}^m$ on obtient le résultat.

**Exercices 0.5.1.** Bien écrire les diagrammes et les déductions.