

# Géométrie algébrique



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Variétés algébriques</b>	<b>7</b>
1.1	Nullstellensatz . . . . .	7
1.2	Espace projectif . . . . .	9
1.3	fonctions régulières . . . . .	9
1.4	Morphismes d'ensembles algébriques . . . . .	10
1.5	Espaces annelés . . . . .	10
1.6	Recollements . . . . .	12
1.7	Sous-variétés . . . . .	12
1.8	Variétés projectives . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Dimension</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>Produits fibrés</b>	<b>15</b>
3.1	Séparation et propriété . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Espace tangent</b>	<b>17</b>
4.1	Variétés lisses . . . . .	18
4.2	Variétés normales . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Courbes algébriques</b>	<b>25</b>

## *TABLE DES MATIÈRES*

# Introduction

On est censés prouver Riemann-Roch.

## *TABLE DES MATIÈRES*

# Chapitre 1

## Variétés algébriques

### 1.1 Nullstellensatz

Pas oublier de rechopper mon carnet. Y'a les preuves complètes.

**Théoreme 1.1.1.** *Y'a une correspondance entre points fermés de  $\mathbb{A}^n(k)$  et idéaux maximaux dans  $Spm(k[T_1, \dots, T_n])$ .*

**Corollaire 1.1.2.** *Si  $A$  est une  $k$ -algèbre de t.f. et  $\mathfrak{m}$  un idéal maximal alors  $A/\mathfrak{m}$  est une extension finie de  $k$ .*

**Lemme 1.1.3.** *Si  $A$  est une  $k$ -algèbre de t.f. alors  $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in Spm(A), I \subset \mathfrak{m}} \mathfrak{m}$*

**Lemme 1.1.4.** *Si  $k$  est algébriquement clos, c'est un homéomorphisme (entre  $\mathbb{A}^n(k)$  et  $Spm(k[T_1, \dots, T_n])$ .*

*Démonstration.* On prends le morphisme quotient, c'est l'évaluation et le noyau est de la forme  $(T_i - t_i)_i$ .  $\square$

**Théoreme 1.1.5** (Nullstellensatz). *Si  $k = \bar{k}$  alors  $I(Z(J)) = \sqrt{J}$ .*

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} I(Z(J)) &= I\left(\bigcup_{x \in Z(J)} x\right) \\ &= \bigcap_{x \in Z(J)} I(\{x\}) \\ &= \bigcap_{x \in Z(J)} \mathfrak{m}_x \\ &= \bigcap_{\mathfrak{m} \in Spm(A), J \subset \mathfrak{m}} \mathfrak{m} \end{aligned}$$

et la dernière est  $\sqrt{J}$  par le lemme. (omg, revoir la preuve dans Atiyah)  $\square$

**Remarque 1 (!).** *L'endroit où on utilise le weak nullstellensatz on a besoin de  $k$  algébriquement clos. La dernière qui vient du lemme y'a pas besoin. Autrement dit, on peut utiliser Spm pour faire de la géométrie algébrique sur un corps non algébriquement clos.*

**Définition 1.1.6.**  $A(Z) = k[T_1, \dots, T_n]/I(Z)$

Pour  $f \in A(Z)$  et  $\tilde{f}$  t.q  $p(\tilde{f}) = f$  pour  $p: k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A(Z)$ . Pour  $z \in k^n$  on peut toujours déf  $f(z) := \tilde{f}(z)$ . En particulier, on peut déf

**Définition 1.1.7.**  $D(f) = \{s \in Z : f(s) \neq 0\} = D(\tilde{f}) \cap Z$ . Avec  $D(\tilde{f}) = \mathbb{A}^n(k) - Z(\tilde{f})$ .

**Remarque 2.** *Comme d'hab juste il définit pour des fonctions a priori par déf sur  $\mathbb{A}^n(k)$ .*

**Remarque 3** (C'est super chiant). *Faut faire gaffe ducoup en fonction de la fonction que j'utilise ou de son lift pour les inclusions.*

**Corollaire 1.1.8.** *Si  $f, g \in A(Z)$  et  $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$ . On a*

- *Pour  $J_1, J_2 \leq A(Z) : Z(J_1) \subset Z(J_2) \leftrightarrow J_2 \subset \sqrt{J_1}$ .*
- *$D(f) \subset D(g) \leftrightarrow \exists h \in A(Z)$  t.q.  $f^n = gh$ .*
- *Les ouverts principaux forment une base de la topologie.*

*Démonstration.* Pour le premier point si  $Z(J_1) \subset Z(J_2)$  alors faut lift dans  $k[T_1, \dots, T_n]$  avant d'appliquer le nullstellensatz. Pour le deuxième, c'est clair. Pour le troisième, sur  $\mathbb{A}^n(k)$  on prend  $f \in I(Z)$ , où  $U = \mathbb{A}^n(k) - Z$ , t.q  $f(x) \neq 0$  (possible car  $x \notin Z$ ).  $\square$

**Proposition 1.1.9.** *Soit  $Z$  un ensemble algébrique affine. Alors  $Z$  est irréductible ssi  $I(Z)$  est premier. Si  $k = \bar{k}$ ,  $I \leq K[T_1, \dots, T_n]$  alors  $Z(I)$  est irréductible ssi  $\sqrt{I}$  est premier.*

*Démonstration.* Avec les nouvelles notations c'est direct, avec les anciennes si  $Z(I)$  est irréductible  $Z(f) \cup Z(g) = Z(I)$  implique  $Z(I) \subset Z(f)$  ou  $Z(I) \subset Z(g)$ .  $\square$

**Lemme 1.1.10.** *Soit  $A$  un anneau noetherien, alors les idéaux radicaux sont des intersections finies d'idéaux premiers.*

*Démonstration.* On regarde l'ensemble des idéaux qui sont pas des intersections d'idéaux premiers. Comme  $A$  est noethérien y'a un élément maximal  $I$  qui n'est pas premier. Soit  $a, b \in A - I$  t.q.  $ab \in I$ . On considère  $I_a = \sqrt{I + aA}$  et  $I_b = \sqrt{I + bA}$ . Ils sont plus gros que  $I$  donc intersections d'idéaux premiers. En particulier on prouve facilement que  $I = I_a \cap I_b$  ( $I$  est radical).  $\square$



**Proposition 1.1.11.** *Si  $k = \bar{k}$ , on a une décomposition unique des ensembles algébriques en variétés irréductibles non contenues les unes dans les autres.*

*Démonstration.*  $I(Z) = \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{b}_i$ . On retire les  $\mathfrak{b}_i$  contenus dans les autres.  $\square$

## 1.2 Espace projectif

On considère  $k[T_0, \dots, T_n] = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ .

**Lemme 1.2.1.** *Sur les corps infinis,  $f \in S_d$  ssi  $\lambda^d f(x_i, i) = f(\lambda x_i, i)$ .*

**Définition 1.2.2.** Un idéal est homogène ssi dès que  $f = f_1 + \dots + f_n \in I$  alors  $f_i \in I$ . C'est équivalent à être généré par des éléments homogènes, i.e.  $I = \bigoplus S_d \cap I$ .

**Remarque 4.** *Comme en géo diff regarder ce qu'il se passe quand on regarde des polynômes homogènes dans  $\mathbb{A}^{n+1}$  et qu'on les pousse (homéo?).*

**Définition 1.2.3.** Pour  $I$  un idéal homogène de  $k[T_0, \dots, T_n]$ , on définit  $Z_+(I) = \{P \in \mathbb{P}^n(k) : f(P) = 0 \ \forall f \in I \text{ f homogène}\}$  où autrement on lift  $P$  et on prends  $f$  quelconque. Si  $k$  est infini et  $Z \subset \mathbb{P}^n(k)$ , on définit  $I_+(Z) = I(\pi^{-1}(Z))$ .

**Théoreme 1.2.4** (Nullsellensatz projectif). *On suppose  $k = \bar{k}$  et  $J$  homogène. On a*

- $Z_+(J) = \emptyset$  ssi  $(T_0, \dots, T_n) \subset J$ .
- Si  $Z_+(J) \neq \emptyset$  alors  $I_+(Z_+(J)) = \sqrt{J}$ .

*Démonstration.* Si  $Z_+(J) = \emptyset$  on lift à  $\mathbb{A}^{n+1} - 0$  pour voir que  $Z(J) \subset \{0\} = (T_0, \dots, T_n)$ . Sinon  $I_+(Z_+(J)) = I(\pi^{-1}(Z_+(J))) = I(\pi^{-1}(Z_+(J)) \cup \{0\}) = \sqrt{J}$ .  $\square$

## 1.3 fonctions régulières

Revoir que la topologie de Zariski c'est la plus petite topologie que rend continue les polynômes.

**Définition 1.3.1** (Fonction régulière). On décrit pour  $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$  l'anneau  $\mathcal{O}_Z(U)$ . On prend les fonctions qui sont localement des fractions rationnelles.

**Note 1.** *Trouver exactement où on peut écrire des polynômes, les ouverts sont quasi-compacts(!).*

## 1.4 Morphismes d'ensembles algébriques

**Lemme 1.3.2.**  $\mathcal{O}_Z$  est un faisceau pour les restrictions naturelles.

*Démonstration.* C'est évident avec la déf mdr.  $\square$

**Proposition 1.3.3.** Soit  $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$ .

- Les fonctions régulières sont continues.
- Pour tout  $f \in \mathbb{A}(Z)$ , la flèche  $\mathbb{A}(Z) \rightarrow \mathcal{O}_Z(D(f))$  passe au quotient en un isom  $\mathbb{A}(Z)_f \simeq \mathcal{O}_Z(D(f))$ .
- $\mathbb{A}(Z) \simeq \mathcal{O}_Z(Z)$ .

*Démonstration.* Pour le premier point l'idée c'est que localement on peut se mettre sur un ouvert tel que  $f|_U(U) = \{pt\}$ . Le deuxième point c'est la surjectivité qu'y faut voir. Le troisième point c'est le plus cool, c'est l'idée que on commence par décomposer  $Z$  en une union finie  $\bigcup_i D(f_i)$  où on est une fraction rationnelle. Ensuite, on obtient  $(gf_i - h_i)|_{D(f_i)} = 0$ , faut relever puis dérouler avec le fait que  $1 \in (f_i, i)$  quelque part.  $\square$

**Remarque 5.** Si on prend  $\mathbb{A}^2 \setminus (0,0)$ , il a les mêmes sections globales que  $\mathbb{A}^2$ . Ça prouve que cet ouvert est pas affine.

## 1.4 Morphismes d'ensembles algébriques

Dans les ensembles algébriques on peut directement prendre des fonctions polynomiales ! C'est la preuve d'avant.

**Théoreme 1.4.1.** On a une équivalence de catégories entre les  $k$ -algèbres de type finies réduites et la  $k$ -variétés.

**Note 2.** Revoir vite fait la construction.

## 1.5 Espaces annelés

**Définition 1.5.1.** Un espace annelé est un espace topologique  $X$  muni d'un faisceau de  $k$ -algèbre pour nous.

**Définition 1.5.2.** Un morphisme d'espaces annelés

$$(|X|, \mathcal{O}_X) \rightarrow (|Y|, \mathcal{O}_Y)$$

est un couple  $(|f|, f^\#)$ . Où  $|f|$  est un morphisme d'espaces topologiques et  $f^\#: \mathcal{O}_Y \rightarrow |f|_* \mathcal{O}_X$  un morphisme tels que les flèches induites sur les fibres sont des morphismes d'anneaux locaux.

**Note 3.** Le faisceau  $|f|_*\mathcal{O}_X$  est le pullback classique. Si  $y = |f|(x)$ , comme d'habitude on a

$$f^\# : \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow (|f|_*\mathcal{O}_X)_y \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

Enfin en fait comme c'est localement annelé apparemment on peut montrer que  $f^\#$  c'est automatiquement le pullback de fonctions.

**Théoreme 1.5.3.** Le couple  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  est un espace annelé.

*Démonstration.* Les fibres  $\mathcal{O}_{Z,z}$  sont les  $\mathbb{A}(Z)_{\mathfrak{m}_z}$ . □

de notre équivalence de base

$$\{\text{ensembles algébriques affines}\} \rightarrow \{k\text{-algèbre réduite de type fini}\}$$

on plonge les ensembles algébriques dans les espaces localement annelés. En fait c'est pleinement fidèle, on a pas un nouvel objet.

**Proposition 1.5.4.** On a une bijection

$$\text{Hom}_{\text{algSets}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\text{LocRingedSpace}}((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y))$$

*Démonstration.* Étant donné  $f: X \rightarrow Y$ , on définit  $f^\#(U): \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}U)$  par  $s \mapsto s \circ f$ . Et à  $f$  on associe  $(f, f^\#)$ . Maintenant si on a un  $(f, f^\#)$  un morphisme d'espaces localement annelés quelconque, faut montrer que  $f$  est un morphisme d'ensembles algébriques et que  $f^\#$  est bien le pullback habituel. Faut se rappeler que  $f^\#(\mathfrak{m}_y) \subset \mathfrak{m}_x$  tel que  $f(x) = y$ . En particulier, le grand carré de

$$\begin{array}{ccc} f^\# : \mathcal{O}_Y(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(f^{-1}U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{Y,f(x)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x} \\ \downarrow & & \downarrow \\ k = \mathcal{O}_{Y,f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = k \end{array}$$

commute, et la flèche  $\mathcal{O}_Y(U) \rightarrow k$  est l'évaluation, la flèche  $k \rightarrow k$  est l'identité ( $1 \mapsto 1$ ), i.e.  $f^\#(s)(x) = s(f(x))$ . On a montré que  $f^\#$  est le pullback habituel. Pour montrer que c'est un morphisme, on peut regarder  $\tilde{f}: X \rightarrow Y \rightarrow \mathbb{A}_k^n$ . On obtient

$$\tilde{f}(\mathbb{A}^n(k)): k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$$

qui à  $T_1$  associe  $f_1$ . En particulier, c'est  $T_1 \circ f$  par le point d'avant. De sorte que  $\tilde{f}$  est défini par des polynômes et donc un morphisme. □

## 1.6 Recollements

## 1.7 Sous-variétés

On appelle variété des unions finies de variétés affines avec le faisceau structurant.

**Définition 1.7.1** (Sous-variété). Pour un fermé dans  $Z \subset X$  une variété algébrique. On définit,

$$\mathcal{O}_Z(V) = \{f: V \rightarrow k \mid \forall z \in V \exists g \in \mathcal{O}_X(U), U \cap Z \subset V, g|_{U \cap Z} = f|_{U \cap Z}\}$$

autrement dit c'est juste  $i^{-1}\mathcal{O}_X$  pour  $i: Z \subset X$ .

**Lemme 1.7.2.** Soit  $X$  une variété algébrique et  $Z \subset X$  fermé. Alors  $Z$  est une variété algébrique. Si  $X$  est affine alors  $Z$  aussi.

*Démonstration.* On doit montrer que  $Z$  est un recouvrement d'affine. Suffit de montrer que  $Z \cap U$  est affine si  $U$  est affine. Suffit de le montrer dans  $X = \mathbb{A}^n$  et là  $\mathcal{O}_Z$  c'est littéralement le faisceau de fonction régulière donc on a fini. (Il définit une variété affine comme un fermé topologique de  $\mathbb{A}^n$  plus faisceau)  $\square$

## 1.8 Variétés projectives

Dans  $\mathbb{P}^n(k)$  on définit sur  $X = Z_+(I)$ ,

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f: U \rightarrow k, \text{Localement une fraction homogène}\}$$

Si on définit la localisation homogène en  $P$  homogène, avec  $B = k[T_1, \dots, T_n]/I$ , via  $B_{(P)}$  les fractions de degrés 0. Plus rigoureusement, via  $k[T_1, \dots, T_n]_{(P)}/I_{(P)}$  avec  $I_{(P)} = \{Q/P^n \mid Q \in I\}$ .

**Proposition 1.8.1.** Si  $X = Z_+(I) \subset \mathbb{P}^n(k)$  et  $U = X \cap D_+(p)$  ( $\bar{P} = p$ ). On a  $B_{(p)} \simeq \mathcal{O}_X(U)$ .

**Proposition 1.8.2.** Si  $P$  est non constant homogène alors  $D_+(P)$  est une variété affine. Si  $P \in \mathcal{O}_Z(Z) = B$  de degré  $\geq 1$  pareil.

**Définition 1.8.3.** Les variétés quasi-projectives sont les localement fermées dans  $\mathbb{P}^n(k)$ .

# Chapitre 2

## Dimension

**Définition 2.0.1.** On prend la dimension de Krull avec le sup des chaines de fermés irréductibles.



# Chapitre 3

## Produits fibrés

Y'a des choses à rattraper, comme l'immersion fermée.

### 3.1 Séparation et propriété

**Définition 3.1.1.** Une variété algébrique sur  $k$  est séparée si l'image de

$$\delta = (id, id): X \rightarrow X \times_k X$$

est fermée.

**Exemple 3.1.2.** Les variétés algébriques affines sont séparées, parce que  $A(X) \otimes A(X)$  est surjective, en effet  $im(\delta) = Z(ker \delta_*)$ .

Comme la séparation imite le fait d'être Hausdorff, en ajoutant la quasi-compacité on obtient la "compacité"?

**Définition 3.1.3.** Une variété algébrique  $X$  sur  $k$  est propre/complète si elle est séparée et pour toute variété  $Z$  :

$$X \times Z \rightarrow Z$$

est fermée (on dit qu'elle est universellement fermée).

**Exemple 3.1.4.**  $\mathbb{A}_k^1$  n'est pas propre mais pourtant est séparée et quasi-compacte. On regarde  $\mathbb{A}^2 \simeq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$ , et dans  $\mathbb{A}^2$  on regarde  $Z(XY - 1)$ , d'image  $\mathbb{A}^1 - 0!$  Le problème vient du point à l'infini qu'il manque.

**Remarque 6.** Les fermées de variétés séparées (resp. propres) sont séparées (resp. propres). Et les ouverts de variétés séparées sont séparés.

**Proposition 3.1.5.** Les variétés projectives sont propres.

### 3.1 Séparation et propreté

**Remarque 7.** Voir la preuve dans les notes sur Nakayama, sinon dans les notes sur Shafarevich.

*Démonstration.* Il suffit de le prouver pour  $\mathbb{P}_k^n$ . On montre que c'est séparé, on peut restreindre  $\mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^n$  à  $D(T_i) \cap D(T_j) \rightarrow D(T_i) \times D(T_j)$  qui a une diagonale fermée car affine (le fait d'être une immersion fermée est local, check). Soit  $Y$  une variété algébrique, on doit prouver que  $\mathbb{P}_k^n \times Y \rightarrow Y$  est fermée, on peut le montrer localement puis supposer  $Y$  affine et même  $= \mathbb{A}^n$ . En fait c'est la preuve de Shafarevich. Y'a un twist, il dit pour  $y \in \mathbb{A}^n - p_2(Z)$  on a

$$(T_0, \dots, T_n)^N \subset I + \mathfrak{m}_y k[T_0, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m]$$

puis  $B_N \subset I_N + \mathfrak{m}_y B_N$  avec  $B_N = k[T_0, \dots, T_n]_N$  le module des polynomes de degré  $N$ . D'où par Nakayama, il existe  $P \notin \mathfrak{m}_y$  homogène dans  $I$  t.q.  $PB_N \subset I_N$  et  $y \in D^+(P)$  (on veut les monomes dans  $I$  et  $P$  est en  $Y$  d'où dans  $D^+(P)$ ,  $P(y) \neq 0$  et les monomes sont dans  $I_y$ , (penser au quotient pas  $\mathfrak{m}_y$ ).  $\square$

**Définition 3.1.6.** On définit le graphe comme l'image inverse de la diagonale  $\delta_Y$  par  $(f, id_Y): X \times Y \rightarrow Y \times Y$ .

**Remarque 8.** Si  $Y$  est séparée,  $\Gamma_f$  est fermé dans  $X \times Y$ . En effet,  $(id_X, f): X \rightarrow X \times Y$  est un isomorphisme vers  $\Gamma_f$ .

**Lemme 3.1.7.** Soit  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme de variétés algébriques avec  $X$  propre et  $Y$  séparée. Alors  $f$  est fermée.

*Démonstration.* On regarde  $X \rightarrow X \times Y \rightarrow Y$ .  $\square$

**Proposition 3.1.8.** Soit  $X$  une variété algébrique connexe et propre. Alors  $\mathcal{O}_X(X) = k$ .

*Démonstration.* Étant donné  $f: X \rightarrow \mathbb{A}^1$ , l'image est connexe et fermée dans  $\mathbb{P}^1$  et incluse dans  $\mathbb{A}^1$  donc est un point.  $\square$

**Corollaire 3.1.9.** Une variété affine connexe est propre ssi  $X = \mathbb{A}_k^0$ .



# Chapitre 4

## Espace tangent

La première définition à partir d'équations/d'un plongement affine.

**Définition 4.0.1.** Soit  $X = Z(I)$  une variété algébrique et  $P = (a_1, \dots, a_n) \in X$ . On définit

$$T_{X,P} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}_k^n \mid \sum_i T_i \partial_i F(P) = 0, \forall F \in I\}$$

c'est un espace vectoriel.

**Remarque 9.** Penser  $T_i = X_i - a_i$ , pour que ce soit un espace vectoriel.

**Exemple 4.0.2.** Pour  $Z(T_1 - T_2^2) = Z$  et  $P = (1, 1)$  on a  $T_P Z = \{(t_1, t_2) \mid t_1 - 2t_2 = 0\}$ .

Soit maintenant  $E = k^n$  et  $P \in \mathbb{A}^n(k)$ . On regarde

$$D_P: k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow E^\wedge$$

donné par  $F \mapsto D_P(F) = \sum T_i \partial_i F(P)$ . On remarque que  $D_P(\mathfrak{m}_P^2) = 0$  car si  $f, g \in \mathfrak{m}_P$  alors  $\partial_i(fg)(P) = f(P)\partial_i g(P) + g(P)\partial_i f(P) = 0$ . D'où ça passe au quotient en

$$\mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2 \rightarrow E^\wedge$$

maintenant c'est des  $k$ -espaces vectoriels de dimensions  $n$  d'où il suffit de montrer la surjectivité ce qui est clair.

**Proposition 4.0.3.** Soit  $X$  une variété affine et  $P \in X$ . Alors

$$(\mathfrak{m}_P)^\wedge \simeq T_{X,P}$$

## 4.1 Variétés lisses

*Démonstration.* Par définition  $T_{X,P}$  est l'orthogonal de  $D_P(I)$  ou l'ensemble des  $v \in E$  tels que pour tout  $\phi \in D_P(I)$ ,  $\phi(v) = 0$ . On note  $\mathfrak{m}$  l'idéal de  $k[T_1, \dots, T_n]$  tel que  $\mathfrak{m}_P = \mathfrak{m}/I$ . Alors  $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$  rentre dans un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I/I \cap \mathfrak{m}^2 & \longrightarrow & \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 & \longrightarrow & \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \hat{D}_P & & = \\ 0 & \longrightarrow & D_P I & \longrightarrow & E^\wedge & \longrightarrow & \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

la flèche du bas montre bien le résultat en passant aux duals (ça inverse les flèches).  $\square$

**Lemme 4.0.4.** *Soit  $A$  un anneau et  $\mathfrak{m} \leq A$  maximal. Y'a un isomorphisme  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \simeq \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}^2A_{\mathfrak{m}}$ .*

*Démonstration.* Soit  $x \in \mathfrak{m}$  t.q  $x \in \mathfrak{m}^2A_{\mathfrak{m}}$ . Alors il existe  $s \in A - \mathfrak{m}$  tel que  $s.x \in \mathfrak{m}^2A$ . En plus il existe  $t \in A$  t.q  $st - 1 \in \mathfrak{m}$  car  $A/\mathfrak{m}$  est un corps. Ensuite

$$(st - 1)x \in \mathfrak{m}^2$$

mais  $stx \in \mathfrak{m}^2$  car  $sx \in \mathfrak{m}^2$  d'où  $x \in \mathfrak{m}^2$  et la flèche est injective.

Si on prends  $x \in \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$  il existe  $s \in A - \mathfrak{m}$  tq  $sx \in \mathfrak{m}$ . On prends  $t$  comme avant. Alors  $tsx = x \pmod{\mathfrak{m}^2A_{\mathfrak{m}}}$ . D'où  $tsx \mapsto x$ .  $\square$

**Remarque 10.** *D'où l'espace tangent provient du stalk du faisceau.*

**Définition 4.0.5.** Soit  $X$  une variété algébrique. L'espace tangent de Zariski en  $P$  est le  $k$ -espace vectoriel

$$(\mathfrak{m}\mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}^2\mathcal{O}_{X,P})$$

## 4.1 Variétés lisses

**Définition 4.1.1.** On note  $\dim_P X = \min\{\dim U | P \in U\}$  pour les ouverts de  $X$ . (Oui la déf marche)

**Remarque 11.** *C'est aussi le maximum des dimensions des composantes irréductibles qui passent par  $P$ .*

**Proposition 4.1.2.** *Soit  $X$  une variété algébrique, alors pour tout  $P \in X$  on a*

$$\dim_P X \leq \dim T_{X,P}$$

**Définition 4.1.3.** On dit que  $X$  est lisse/non singulière en  $P$  si  $\dim_P X = \dim T_{X,P}$ .

### Espace tangent

*Démonstration.* Par récurrence sur  $\dim T_{X,P}$ . Si  $\dim T_{X,P} = 0$ , en passant au cas affine,  $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = 0$  d'où

$$\mathfrak{m}_P = \mathfrak{m}_P^2.$$

Par le lemme de Nakayama il existe  $f \in A - \mathfrak{m}_P$  tel que  $f\mathfrak{m}_P = 0$  avec  $f \in D(f)$ . En se plaçant sur  $D(f)$  on remplace  $\mathcal{O}_X(X)$  par  $A_f$  d'où  $f$  inversible et  $\mathfrak{m}_P = 0$  puis  $A_f = k$ . En particulier,  $\dim_P X = 0$ .

Maintenant si  $\dim T_{X,P} \geq 1$ . Soit  $Z$  une composante irréductible de  $X$  passant par  $P$  et de dimension  $\dim_P X$ . On a  $\mathcal{O}(Z) = \mathcal{O}(X)/I$  puis  $\mathfrak{m}_{P,Z} = \mathfrak{m}_{P,X}/I$  puis  $\mathfrak{m}_{P,X}/\mathfrak{m}_{P,X}^2$  se surjecte dans  $\mathfrak{m}_{P,Z}/\mathfrak{m}_{P,Z}^2$ . D'où  $\dim T_{P,X} \geq \dim T_{P,Z}$ . On peut supposer  $X$  irréductible.  $\text{Supp } \dim_P X \neq 0$ . Alors il existe  $f \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$  et  $Y = Z(f) \subset X$ . En plus

$$\dim T_{X,P} \geq \dim T_{Y,P} + 1$$

car  $T_{Y,P} \simeq (\mathfrak{m}/f)/(\mathfrak{m}/f)^2$ . Avec  $\dim Y = \dim X - 1$ , par récurrence  $\dim T_{P,Y} \geq \dim_P Y$  et on conclut.  $\square$

Étant donnés des générateurs de  $I$ ,  $(f_1, \dots, f_r)$ , on déf la jacobienne en  $P$  par

$$J(P) = (\partial_j f_i(P))_{i,j}$$

alors on a

$$\ker(J(P)) = T_P X$$

on a alors le critère jacobien :

**Proposition 4.1.4.** *On a :*

$X$  est lisse en  $P$

ssi

$$J(P) \text{ est de rang } n - \dim_P(X)$$

avec  $f_i \in k[T_1, \dots, T_n]$ .

*Démonstration.* Directement on a  $\dim T_P X = \dim_k \ker(J(X)_P) = n - \text{rk}(J(X)_P)$ .  $\square$

**Corollaire 4.1.5.** *Si  $X = Z(F) \subset \mathbb{A}^n(k)$  alors  $P$  est lisse si au moins un des  $\partial_i F(P)$  est non nulle.*

*Démonstration.* On a  $\dim_P(X) = n - 1$  et la jacobienne est une ligne. Donc de rang 1 ssi y'en a un qu'est non nul.  $\square$

**Exercices 4.1.6.** L'ensemble des points lisse est ouvert.

**Proposition 4.1.7.** *Soit  $k(X)$  un corps de fonctions. Alors  $k(X)$  est finie séparable d'un  $k(T_1, \dots, T_n)$ .*

*Démonstration.* Par la normalisation de Noether on trouve

$$K = k(T_1, \dots, T_n) \subset k(X)$$

supposons que l'extension n'est pas séparable. On note  $L$  la clôture séparable de  $K$  dans  $k(X)$ . On a  $\text{car}(k) = p > 0$ . On prends  $\theta \in k(X) - L$  t.q.  $\theta^p \in L$ . On montre que  $L(\theta)$  est séparable finie sur un  $k(S_1, \dots, S_n)$ .

Soit  $H(S) = S^r + f_{r-1}S^{r-1} + \dots + f_0 \in K[S]$  le pol min de  $\theta^p$  sur  $K$ . Supposons que  $f_i \in k(T_1^p, \dots, T_n^p)$  alors  $H(S^p) = G(S)^p$  et  $G$  est un polynôme minimal séparable de  $\theta$ . D'où l'un des  $f_i \notin k(T_1^p, \dots, T_n^p)$ .

**Remarque 12.** *On peut pas dire directement que  $H$  est séparable donc  $H(S^p)$  est une puissance  $p$ -ème. Parce que  $S^p - S$  par exemple.*

Si une puissance d'un  $T_i$  non divisible par  $p$  apparaît dans un  $f_i$ , alors  $T_i$  est algébrique sur  $K_1 = k(\theta, T_2, \dots, T_n)$ . (en prenant  $T_i = T_1$ )

Et en plus  $L(\theta)$  est séparable sur  $K_1(T_1)$  qui est séparable sur  $K_1$ . Mais  $K_1$  a le degré de transcendance de  $L(\theta)$  qui est  $n$ . D'où  $\theta, T_2, \dots, T_n$  sont algébriquement indépendants.  $\square$

**Remarque 13.** *Comparer avec la preuve de Sha.*

Soit  $R$  un anneau intègre et  $K = \text{Frac}(R)$ . On pose  $H \in R[S]$  et  $\Delta(H) = \prod (s_i - s_j)^2 \in R$  son discriminant. Alors  $H$  est séparable ssi  $\Delta(H) \neq 0$ .

Maintenant si on note  $\varphi: R \rightarrow F$  (un morphisme de corps quelconque) et

$$\tilde{\varphi}: R[S] \rightarrow F(S)$$

alors  $\Delta(\tilde{\varphi}(H)) = \varphi(\Delta)$ .

**Lemme 4.1.8.** *Étant donné  $H \in k[T_1, \dots, T_n][S]$ . Soit  $X \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1$  la variété associée. Si  $\Delta = \text{disc}(H) \in k[T_1, \dots, T_n]$  alors*

$$X \cap D(\Delta)$$

*est non vide et est l'ensemble des points lisses.*

**Remarque 14.** *Il suppose  $H$  unitaire.*

*Démonstration.* Soit  $q \in (\emptyset \neq) D(\Delta) \subseteq \mathbb{A}^n$ . On note  $\phi_q: k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow k$  t.q.  $\phi_q(F) = F(q)$ . Alors si  $s \in k$  est une racine de

$$\tilde{\phi}_q(H)(S)$$

### Espace tangent

on a  $P = (q, s) \in X \cap D(\Delta) \neq \emptyset$ . On regarde la jacobienne de  $H$  en  $P$ . On a

$$\tilde{\phi}_q(H)(S) = \phi_q(\Delta) = \Delta(q) \neq 0$$

d'où  $\tilde{\phi}_q(S)$  est séparable puis

$$\partial_S H(P) = \tilde{\phi}(H)'(S)(s) \neq 0$$

□

**Proposition 4.1.9.** *Le smooth locus est dense dans  $X$ .*

*Démonstration.* On prouve que tout les ouverts non vides contiennent un point lisse. On peut supposer  $X$  affine intègre. On peut donc prendre le corps de fonctions  $k(X)$  et une extension séparable

$$k(T_1, \dots, T_n) \subset k(X).$$

On a donc  $k(T_1, \dots, T_n)(S) = k(T_1, \dots, T_n)[S]/H(\bar{T}, S)$ . avec  $H$  séparable en  $S$ . On se place sur un ouvert où y'a pas de dénominateurs. On a  $\tilde{H} = g^{\deg(H)} H \in k[T_1, \dots, T_n][gS]$  unitaire puis  $k(\tilde{H}) = k(X)$  d'où on peut appliquer le résultat à  $\tilde{H}$ . □

## 4.2 Variétés normales

**Théoreme 4.2.1.** *Soit  $X$  une variété algébrique lisse en  $P$ . Alors*

1. *Il n'y a qu'une seule composante de  $X$  passant par  $P$ .*
2. *Soit  $U$  est ouvert affine connexe (implique intègre) de  $X$  alors  $\mathcal{O}_X(U)$  est intégralement clos. (dans  $\text{Frac}(\mathcal{O}_X(U))$  qui est pas forcément  $\text{Frac}(\mathcal{O}_X(X))$ .)*
3.  *$\mathcal{O}_{X,P}$  est factoriel.*

**Remarque 15.** *On a*

1. *Lisse + connexe implique intègre.*
2. *Si  $\dim U = 1$  alors  $\mathcal{O}_X(U)$  est de Dedekind.*

**Proposition 4.2.2.** *Soit  $P \in X$  et  $d = \dim_P X$ . Alors  $X$  est lisse en  $P$  ssi pour tout voisinage ouvert petit affine de  $P$ , l'idéal  $\mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}_X(U)$  est généré par  $d$  éléments. (Plus précisément  $\mathfrak{m}_P \mathcal{O}_{X,P}$ )*

*Démonstration.* Supposons que  $\mathfrak{m}$  est généré par  $d$  éléments. Alors

$$\mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$$

est généré par  $d$  éléments en tant que  $\mathcal{O}_X(X)$ -module d'où en tant que  $\mathcal{O}_X(X)/\mathfrak{m}$ -module. Puis  $\dim T_P X = d$ . À l'inverse si  $X$  est lisse en  $P$ . On suppose  $X$  affine. On note  $\mathfrak{m} \subset A(X)$  l'idéal de  $P$ . On sait que  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  est de dimension  $d$  sur  $A(X)/\mathfrak{m}$ , disons généré par  $(\bar{e}_i)_i$ . D'où  $\mathfrak{m} = (e_1, \dots, e_d) + \mathfrak{m}^2$  puis  $\mathfrak{m}/(e_1, \dots, e_d) + \mathfrak{m}(\mathfrak{m}/(e_1, \dots, e_d))$ . Par Nakayama il existe  $f \notin \mathfrak{m}$  tel que  $f\mathfrak{m} = (e_1, \dots, e_d)$ . D'où  $\mathfrak{m}A_f = (e_1, \dots, e_d)A_f$ . En particulier,  $\mathfrak{m}A_f$  est l'idéal maximal qui correspond à  $P \in D(f)$ . D'où dans tout ouvert  $U \subseteq D(f)$ .  $\square$

**Corollaire 4.2.3.** *Si  $X$  est une courbe affine intègre. Alors  $X$  est lisse ssi  $A(X)$  est de Dedekind.*

*Démonstration.* C'est juste que tout les localisés sont des DVR et on applique le corollaire.  $\square$

**Définition 4.2.4.**  $X$  est dite normale si pour tout les  $U$  affine ouverts

$$\mathcal{O}_X(U) \text{ est intégralement clos}$$

**Proposition 4.2.5.** *Si  $X$  est affine,  $A(X)$  intégralement clos implique  $X$  normale.*

*Démonstration.* Étant donné  $s \in k(X)$ , on a  $\mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow A(X)_f$ . D'où  $f^r s$  est entier sur  $A(X)$  donc  $s \in A(X)_f$ . Maintenant en prenant un recouvrement on a  $s \in A(X)_{f_i}$ . D'où par la propriété du faisceau  $s \in \mathcal{O}_X(U)$ .  $\square$

**Remarque 16.** *La preuve rigoureuse doit utiliser la flèche canonique  $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow k(X)$ .*

**Définition 4.2.6.** Une morphisme  $X \rightarrow Y$  est affine si pour tout affine ouvert  $V$  de  $Y$ ,  $f^{-1}(V)$  est affine. Le morphisme est fini si il est affine et pour tout ouvert affine  $V \subseteq Y$  on a

$$\mathcal{O}_X(f^{-1}V) \text{ est fini sur } \mathcal{O}_Y(V)$$

**Remarque 17.** *On peut montrer que si il existe un recouvrement affine  $Y = \cup_i V_i$  tq pour tout  $i$ ,  $f^{-1}V_i$  est affine (resp.  $\mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}V)$  est fini) alors  $f$  est affine (resp. fini).*

**Définition 4.2.7.** Soit  $X$  une variété intègre. La normalisation de  $X$  est une variété normale  $X'$  muni d'un morphisme fini birationnel

$$X' \rightarrow X$$

### *Espace tangent*

Soit  $\phi: k(X) \rightarrow L$  une extension finie, la normalisation de  $X$  dans  $L$  est un morphisme fini dominant

$$\pi: X' \rightarrow X$$

t.q  $k(X') = L$ ,  $X'$  est normal et  $k(X) \rightarrow L$  est induit par  $\pi$ .

**Proposition 4.2.8.** *Soit  $A$  une  $k$ -algèbre intègre de type fini et  $K = \text{Frac}(A)$ . Soit  $B$  la clôture intégrale de  $A$  dans  $L$ ,  $L$  une extension finie de  $K$ . Alors  $\text{Frac}(B) = L$  et  $B$  est finie sur  $A$ .*

**Remarque 18.** *Si  $L = K$ , la normalisation est  $\text{Spm}(\tilde{A}) \rightarrow \text{Spm}(A)$ .*

**Exemple 4.2.9.** Si  $X = Z(T_1^2 - T_2^3) \subseteq \mathbb{A}_k^2$ . Alors

$$\mathbb{A}^1 \rightarrow X$$

donné par  $t \mapsto (t^3, t^2)$  est la normalisation.

## *4.2 Variétés normales*



# Chapitre 5

## Courbes algébriques

Une courbe algébrique est une variété séparée de dimension pure 1.

**Remarque 19.** *Un morphisme fini est fermé. Y'a la preuve du td, ou y'a la preuve générale de Spec.*

**Définition 5.0.1.** Pour rappel,  $f$  est fini si  $\mathcal{O}_Y(V_i) \rightarrow \mathcal{O}_Y(f^{-1}V_i)$  est fini pour un recouvrement affine de  $Y$ .

*Démonstration.* Le point c'est que  $f$  est surjective et  $f(Z(f^\#(I(Z))))$  est dense dans  $Z$  là où ça fait sens.  $\square$

**Lemme 5.0.2.** *Si  $f: X \rightarrow Y$  est fini et  $Y$  est séparée (resp. propre) alors  $X$  est séparée (resp. propre).*

*Démonstration.* On doit checker que  $X$  est séparée et universellement close. On regarde  $X \times_Y X \hookrightarrow X \times_k X$ , on a

$$X \times_Y X = (f \times f)^{-1}(\Delta(Y))$$

est fermée car  $Y$  est séparée. On a clairement

$$\Delta(X) \subset X \times_Y X$$

il suffit de montrer que  $\Delta(X)$  est fermée dedans. On prend un recouvrement affine  $\cup V_i = Y$ . Maintenant  $X \times_Y X$  est recouverte par les ouverts (check)  $U_i \times_{V_i} U_i$  avec  $U_i = f^{-1}V_i$ . Il suffit de montrer que  $\Delta(U_i)$  est fermée dans  $U_i \times_{V_i} U_i$ . Maintenant,

$$U_i \rightarrow \Delta(U_i) \hookrightarrow U_i \times_{V_i} U_i \hookrightarrow U_i \times_k U_i$$

est fermée. D'où  $X$  est séparée. (on a pas utilisé la finitude)

Soit  $Z$  une variété algébrique. On regarde

$$\begin{array}{ccc} Z \times_k X & \xrightarrow{\quad} & Z \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & Z \times_k Y & \end{array}$$

il suffit de montrer que  $Z \times X \rightarrow Z \times Y$  est fermée, c'est clairement un morphisme fini car localement, les morphismes finis sont affines d'où on peut supposer  $Z, X, Y$  affines et en regardant

$$\begin{array}{ccc} A(Y) & \xrightarrow{\quad} & A(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A(Y) \otimes A(Z) & \xrightarrow{\quad} & A(X) \otimes A(Z) \end{array}$$

on obtient le résultat.  $\square$

**Lemme 5.0.3.** *Soit  $K$  un corps de fonction de degré de transcendance 1. Il existe une courbe intègre lisse et propre telle que  $K = k(X)$ .*

*Démonstration.* C'est un gros sketch de preuve. Soit  $K$  une extension finie de  $k(X)$ , alors  $K = k(X)[T]/(P) = \text{Frac}(k[X][T]/(P))$  est le corps de fonction d'une  $k$ -algèbre réduite de type fini. On prends une variété affine associée  $Z$  et on obtient  $\bar{Z} \subseteq \mathbb{P}^n$ . Maintenant  $\bar{Z}$  est intègre propre. Il reste à normaliser. On prends  $X \rightarrow \bar{Z}$  sa normalisation. Alors la flèche est finie d'où  $X$  est intègre propre et normale.  $\square$

**Note 4.** *Pour rappel, si  $Y$  est séparée et  $X$  intègre alors si  $f, g: X \rightarrow Y$  et  $g|_U = f|_U$  alors  $f = g$ .*

**Note 5.** *La propriété permet d'étendre uniquement de  $U$  à  $X$  dans le cas des courbes.*

**Note 6.** *Dans le cas lisse, les composantes connexes coïncident avec les irréductibles.*

**Théoreme 5.0.4.** *Si  $U$  est une courbe algébrique lisse. Soit  $Y$  une variété algébrique propre et  $V \subseteq U$  ouvert. Alors toute flèche  $f: V \rightarrow Y$  il existe un unique  $g: U \rightarrow Y$  qui étend  $f$ .*

*Démonstration.* Il suffit de prouver l'existence,  $U - V$  est un nombre fini de point. On montre qu'on peut l'étendre en chaque point. On prends  $P \in W \subset$

$U$  affine. On étend comme suit

$$\begin{array}{ccc} W \cap V & \hookrightarrow & W \\ \downarrow & \nearrow & \\ Y & & \end{array}$$

On peut supposer  $U$  affine et  $V = U - \{P\}$ . Soit  $A = A(U)$ , et soit  $\mathfrak{m} \leq A$  maximal. Comme  $U$  est lisse on peut supposer

$$\mathfrak{m} = (t).$$

On considère

$$f: V \rightarrow Y$$

et  $V \simeq \Gamma_f \subseteq V \times Y \subseteq U \times Y$  fermé car  $Y$  est séparée. Soit  $Z = \bar{\Gamma}_f \subseteq U \times Y$ , alors  $Z$  est birationnel à  $U$ . On va prouver que  $Z \rightarrow U$  est un isomorphisme. Si c'est le cas,  $U \rightarrow Z \rightarrow Y$  étend  $f$  donc on est bon.

On a  $U \times Y \rightarrow U$  est fermée car  $Y$  est propre. D'où  $h: Z \rightarrow U$  est fermée donc surjective. On note  $z \in h^{-1}(P)$ . Soit  $B = \mathcal{O}_Z(W)$  un voisinage ouvert  $W$  de  $z$ . Il y a une flèche  $A(U) \hookrightarrow B = A(W) \hookrightarrow K = \text{Frac}(A)$ . Soit  $b \in B$  et  $b = t^n a/u$  avec  $n \in \mathbb{Z}$  et  $a, u \notin \mathfrak{m}$ . On obtient  $bu = t^n a$  d'où  $0 = (bu)(z) = t^n(z)a(z)$  d'où  $t^n(z) = 0$  car  $a(z) \neq 0$ . D'où  $n \geq 1$  et  $b \in A[1/u]$ . Comme  $B$  est finiment générée,  $A \subset B \subset A[1/u_0]$  pour un  $u_0 \notin \mathfrak{m}$ . D'où  $B[1/u_0] = A[1/u_0]$ . On prouve que

$$h: h^{-1}(D(u_0)) \cap W \simeq D(u_0)$$

On prends  $\{z_1, \dots, z_r\} = h^{-1}(P)$  t.q pour tout  $i = 1, \dots, r$  il existe  $P \in U_0$  et  $g_i: W_i \simeq U_0$  contenu dans  $h: Z \rightarrow U$ . Ca implique que  $r = 1$  sinon  $g_1^{-1}$  et  $g_2^{-1}$  sont deux morphismes différents qui coïncident avec l'inverse de  $\Gamma_f \rightarrow V$ .

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_f & \simeq & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{h} & U \\ \uparrow & & \uparrow \\ W_0 & \simeq & U_0 \end{array}$$

□

**Corollaire 5.0.5.** *Soit  $X, Y$  deux courbes entières lisses propres et birationnelles. Alors elles sont isomorphes.*

*Démonstration.* Simplement, la flèche entre les ouverts,  $f|_U$ , et son inverse,  $g|_U$  s'étendent à  $X, Y$ . Puis  $g \circ f|_U = id|_U$ . Pareil de l'autre côté.  $\square$

**Exemple 5.0.6.** En général c'est faux,  $\mathbb{P}^2 \simeq_{bir} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  sont birationnels mais pas isomorphes.

**Lemme 5.0.7.** *Un morphisme de courbes propres lisses intègres est constant ou fini.*

*Démonstration.* Comme  $X$  est propre,  $f$  est fermé. Alors  $f(X)$  est  $Y$  ou un point. On suppose que c'est  $Y$ , alors on a  $k(Y) \rightarrow k(X)$  est finie. On normalise  $Y$  en  $\pi: X' \rightarrow Y$  dans  $k(X)$ . On a que  $\pi$  est finie et  $X'$  est normale avec  $k(X') = k(X)$ . On a

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \simeq \swarrow & \nearrow \pi & \\ X' & & \end{array}$$

et  $X', X$  induisent la même  $k(Y) \hookrightarrow k(X) = k(X')$ . D'où  $f = \pi \circ g^{-1}$ . Comme  $\pi$  est finie  $f$  est finie.  $\square$

**Théoreme 5.0.8.** *Il existe une équivalence de catégorie entre les corps de fonction de degré de transcendance 1*

*et*

*Les courbes algébriques intègre propre lisse*

**Corollaire 5.0.9.** *Toute courbe intègre lisse propre admet un morphisme fini*

$$X \rightarrow \mathbb{P}^1$$

**Théoreme 5.0.10.** *Toute courbe intègre lisse propre est projective.*

*Démonstration.* On prends un recouvrement affine  $(V_i)_i$  fini. On étend un des  $V_i$  à  $\mathbb{P}^n$  en  $X_i$ . Maintenant,  $X_i$  est pas forcément lisse, et on prend  $P = \prod X_i$  le produit, qui est projective. On regarde l'extension

$$\begin{array}{ccc} & & \prod U_i \\ & \nearrow & \downarrow \\ \cap U_i & \xrightarrow{f} & \prod \overline{U_i} \\ \downarrow & \nearrow g & \\ X & & \end{array}$$

### *Courbes algébriques*

comme  $f$  s'étend car  $P$  est propre. Et on pose  $g(X) = Z$ . Alors  $Z$  est projective et intègre. On montre qu'elle est lisse et propre. On montre que tout point  $z \in Z$  admet un voisinage affine normal. Alors  $z = g(x)$  pour un  $x \in U_i$

$$\begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & Z \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X_i \end{array}$$

$g$  est une inclusion car  $\cap U_i \hookrightarrow X_i$  est une inclusion et  $X_i$  est séparée.

□