

Exercices d'algèbre homologique

Rayane Bait

Exercice 0.1

On utilise les notations de l'exercice. Soit

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \quad (*)$$

une suite exacte dans $Sh(X)$ et $U \subseteq X$ un ouvert de X . On doit montrer que

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{f(U)} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{g(U)} \mathcal{F}''(U)$$

est exacte dans Ab . Autrement dit que $\ker(f(U)) = 0$ et $\text{im}(f(U)) = \ker(g(U))$ dans Ab .

On montre d'abord le premier point. Soit $s \in \ker(f(U))$ et $x \in X$. Par commutativité de

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}'(U) & \xrightarrow{f(U)} & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 \longrightarrow \mathcal{F}'_x & \xrightarrow{f_x} & \mathcal{F}_x \end{array}$$

pour les flèches évidentes et par exactitude de la ligne du bas, on a $(U, s) = (V_x, 0) \in \mathcal{F}_x$ pour tout $x \in U$. Quitte à remplacer V_x par $U \cap V_x$, on peut supposer $V_x \subset U$. En particulier, on obtient un recouvrement de U par des ouverts V_x tels que

$$s|_{V_x} = 0$$

pour tout $x \in U$. D'où $s = 0 \in \mathcal{F}(U)$ car \mathcal{F} est un faisceau. On a montré que $f(U)$ est injective pour tout ouvert U de X .

On montre maintenant le second point par double inclusion, d'abord $\ker(g(U)) \subset \text{im}(f(U))$: Soit $s \in \ker(g(U))$ et $x \in U$, par commutativité de

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{g(U)} & \mathcal{F}''(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_x & \xrightarrow{g_x} & \mathcal{F}''_x \end{array}$$

on a, $g_x((U, s)) = (U, 0)$. Maintenant par exactitude de

$$\mathcal{F}'_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{F}_x \xrightarrow{g_x} \mathcal{F}''_x$$

il existe $(V_x, s'_x) \in \mathcal{F}'_x$ tel que $f_x((V_x, s'_x)) = (U, s)$. Quitte à prendre $V_x \cap U = V_x$ on peut supposer $V_x \subset U$. Maintenant par commutativité de

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(U) & \xrightarrow{f(U)} & \mathcal{F}(U) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(V_x) & \xrightarrow{f(V_x)} & \mathcal{F}(V_x) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'_x & \xrightarrow{f_x} & \mathcal{F}_x \end{array}$$

on obtient $f(V_x)(s'_x) = s|_{V_x}$ pour chaque $x \in U$ et $U = \cup_{x \in U} V_x$. Enfin, pour tout $x, x' \in U$, par commutativité de

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}'(V_x) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V_x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}'(V_x \cap V_{x'}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V_x \cap V_{x'}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{F}'(V_{x'}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V_{x'}) \end{array}$$

on a

$$f(V_x \cap V_{x'})(s'_x|_{V_x \cap V_{x'}}) = s|_{V_x \cap V_{x'}} = f(V_x \cap V_{x'})(s'_{x'}|_{V_x \cap V_{x'}})$$

d'où par injectivité de $f(V_x \cap V_{x'})$ on a

$$s'_x|_{V_x \cap V_{x'}} = s'_{x'}|_{V_x \cap V_{x'}}$$

comme \mathcal{F}' est un faisceau on peut relever les s'_x en un $s' \in U$. Par commutativité du carré du haut dans l'avant dernier diagramme, comme \mathcal{F} est un faisceau et $f(V_x)(s'|_{V_x}) = s|_{V_x}$ on obtient que $f(U)(s') = s$ d'où $\ker(g(U)) \subset \text{im}(f(U))$.

Soit maintenant $s = f(U)(s')$ pour $s' \in \mathcal{F}'(U)$. Pour tout $x \in U$, par commutativité de

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}'(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}''(U) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}'_x & \xrightarrow{f_x} & \mathcal{F}_x & \xrightarrow{g_x} & \mathcal{F}''_x \end{array}$$

et par exactitude de la ligne du bas on a

$$(V_x, 0) = g_x(f_x((U, s'))) = g_x((U, s)).$$

On obtient un recouvrement $U = \cup_x V_x$ de U par les V_x tel que $g(U)(s)|_{V_x} = g(V_x)(s|_{V_x}) = 0$. Comme \mathcal{F}'' est un faisceau, on obtient $g(U)(s) = 0$ d'où $\ker(g(U)) = \text{im}(f(U))$.

Exercice 0.2

1)

Avec les notations de l'exercice, on montre que S est inductif et non vide. Par exactitude sur les fibres, pour $x \in U$ il existe (V_x, s_x) telle que $g_x((V_x, s_x)) = (V'_x, s_x)$. En particulier, (V_x, s_x) est dans S donc S est non vide. Soit maintenant $((U_i, s_i))_{i \in I}$ une chaîne donnée par un ordre total I . Alors pour $i, j \in I$ et $i \leq j$ on a

$$s_j|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i} = s_i = s_i|_{U_i \cap U_j}$$

d'où la famille se relève en un $s \in \cup_{i \in I} U_i$ tel que $s|_{U_i} = s_i$ et $U_i \subset \cup_{j \in I} U_j$ alors

$$(\cup_{i \in I} U_i, s)$$

est un majorant de $((U_i, s_i))_{i \in I}$, on montre qu'il est dans S . On a $g(\cup_{i \in I} U_i)(s)|_{U_i} = s''|_{U_i}$ pour tout $i \in I$, d'où $g(\cup_{i \in I} U_i)(s) = s''|_{\cup_{i \in I} U_i}$ par unicité du relèvement. D'où S est inductif puis en appliquant le lemme de Zorn à S le résultat.

2)

Soit (s, V) un élément maximal de S . Si $U - V$ est non vide alors on prends $x \in U - V$ et localement, (V_x, c_x) un antécédent de (U, s'') par g_x . Alors $s|_{V_x \cap V} \neq c_x|_{V_x \cap V}$ car sinon on pourrait relever c_x et s en un $c \in \mathcal{F}(V_x \cup V)$ tel que $c|_{V_x} = c_x$, $c|_V = s$ et $f(V_x \cup V)(c) = s''|_{V_x \cup V}$ ce qui contredit la maximalité de (V, s) . Supposons donc que $s|_{V_x \cap V} \neq c_x|_{V_x \cap V}$. Alors

$$s|_{V_x \cap V} - c_x|_{V_x \cap V} \in \ker(g(V_x \cap V))$$

or par l'exercice 1, $0 \rightarrow \mathcal{F}'(U) \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}''(U)$ est exacte au milieu, d'où

$$s|_{V_x \cap V} - c_x|_{V_x \cap V} \in \text{im}(f(V_x \cap V)).$$

Comme \mathcal{F}' est flasque, on relève un antécédent $c' \in \mathcal{F}'(V_x \cap V)$ en $c'_x \in \mathcal{F}'(V_x)$. Alors $c_x - f(V_x)(c'_x)$ et s coïncide sur $V_x \cap V$, en effet

$$(c_x - f(V_x)(c'_x))|_{V_x \cap V} = c_x|_{V_x \cap V} - c_x|_{V_x \cap V} + s|_{V_x \cap V} = s|_{V_x \cap V}$$

En plus, $g(V_x)(c_x - f(V_x)(c'_x)) = g(V_x)(c_x) = s''|_{V_x}$. D'où on peut relever $c_x + f(V_x)(c'_x)$ et s en un $c \in \mathcal{F}(V_x \cup U)$ tel que $(V_x \cup V, c) \in S$. Comme V_x n'est pas inclu dans U , on obtient $(V, s) < (V_x \cup U, c)$ ce qui contredit la maximalité de (V, s) . D'où $U - V$ est vide et s est un antécédent de s'' puis l'exactitude à droite.

Exercice 0.3

On utilisera librement dans tout l'exercice que $Sh(X)$ est une catégorie abélienne avec les résultats suivants du cours :

1. Le noyau d'une flèche $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ dans $Sh(X)$ coïncide avec le faisceau défini par

$$\ker: U \mapsto \ker(U) := \ker(\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}'(U))$$

2. L'image d'une flèche $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ dans $Sh(X)$ coïncide avec le faisceautisé du préfaisceau défini par

$$\text{im}: U \mapsto \text{im}(U) := \text{im}(\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}'(U))$$

3. Le conoyau d'une flèche $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ dans $Sh(X)$ coïncide avec le faisceautisé du préfaisceau défini

$$\text{coker}: U \mapsto \text{coker}(U) := \text{coker}(\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}'(U))$$

4. La coimage d'une flèche $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ dans $Sh(X)$ coïncide avec le faisceautisé du préfaisceau défini

$$\text{coim}: U \mapsto \text{coim}(U) := \text{coim}(\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}'(U))$$

5. Le faisceau $0_{Sh(X)}$ défini par $0_{Sh(X)}(U) := 0_{Ab}$ est un objet zéro dans $Sh(X)$.

On note $(-)^\sharp: PSh(X) \rightarrow Sh(X)$ le foncteur de faisceautisation. Enfin, si \mathcal{F} est un faisceau sur un espace topologique on pourra décrire une section $\bar{s}: U \rightarrow Et(\mathcal{F})$ de l'espace étalé de \mathcal{F} au dessus de U comme un tuple $(s_x)_{x \in U} = (\bar{s}(x))_{x \in U}$.

1)

Soit \mathcal{F} un faisceau dans $Sh(X)$. Pour tout $x \in X$, on a $0 = 0_{F_x} \in \mathcal{F}_x$ un élément neutre car \mathcal{F}_x est un groupe. En particulier, pour tout ouverts $V \subseteq U$ de X , si $s = (s_x)_{x \in V} \in C^0(\mathcal{F})(V)$ alors si on note $s' := (s'_x)_{x \in U}$ la section telle que $s'_x = s_x$ pour $x \in V$ et $s'_x = 0$ pour $x \in U - V$ on a $s'|_V = s$ d'où $C^0(\mathcal{F})$ est flasque.

2)

Soit $\mathcal{F} \in Sh(X)$. On définit $i^0(\mathcal{F}): \mathcal{F} \rightarrow C^0(\mathcal{F})$ le morphisme de faisceau défini par $i^0(\mathcal{F})(U): s \mapsto (s_x)_{x \in U}$ pour tout ouvert U de X et où $s_x \in \mathcal{F}_x$ est l'image de s dans la fibre \mathcal{F}_x induite par \mathcal{F} . On montre que $i^0(\mathcal{F})$ est injectif en montrant que $\ker(i^0(\mathcal{F})) = 0_{Sh(X)}$. Soit U un ouvert sur X et $s \in \ker(i^0(\mathcal{F}))(U)$, alors $(s_x)_{x \in U} = ((V_x, 0))_{x \in U}$, en particulier $s|_{V_x \cap U} = 0$ et $\cup V_x \cap U = U$ d'où $s = 0 \in \mathcal{F}(U)$, en particulier on a bien $\ker(i^0(\mathcal{F})) = 0_{Sh(X)}$.

3)

On définit en plus $Z^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, $d_0^0: C^0(\mathcal{F}) \rightarrow Z^1(\mathcal{F})$ et $d^0 = i^0(\mathcal{F}) \circ (d_0^0)$. On suppose maintenant défini $d_0^{i-1}: C^{i-1}(\mathcal{F}) \rightarrow Z^i(\mathcal{F})$ et

$$d^{i-1} = i^0(Z^{i-1}) \circ (d_0^{i-1}): C^{i-1}(\mathcal{F}) \rightarrow C^i(\mathcal{F})$$

pour $n \geq i \geq 1$. On pose

$$d_0^n = \text{coker}(i^0(Z^{n-1}(\mathcal{F}))) := (C^{n-1}(\mathcal{F}) \rightarrow Z^n(\mathcal{F}))$$

la flèche canonique du conoyau et $d^n = i^0(Z^n(\mathcal{F})) \circ d_0^n$.

4)

On commence par remarquer qu'un noyau est invariant par post-composition par un monomorphisme, de même une image est invariante par pré-composition par un épimorphisme dans une catégorie abélienne. On le montre en annexe.

On montre maintenant que $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow C^\bullet(\mathcal{F})$ est exacte. Par la question 2), et comme les morphismes injectifs de faisceaux sont des monomorphismes, par un exercice du cours $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow C^0(\mathcal{F})$ est exacte. On montre donc que $\mathcal{F} \rightarrow C^\bullet(\mathcal{F})$ est exacte. On utilise ici im pour désigner l'image catégorique.

Par la première partie de la remarque précédente et par la question 2) on a $\ker(d^n) = \ker(d_0^n)$. Maintenant par construction, et par le cours

$$\begin{aligned}\ker(d_0^n) &= \ker(\operatorname{coker}(i^0(Z^n))) \\ &= \ker(\operatorname{coker}(Z^n(\mathcal{F}) \rightarrow C^n(\mathcal{F}))) \\ &= \operatorname{im}(Z^n(\mathcal{F}) \rightarrow C^n(\mathcal{F})) \\ &= \operatorname{im}(C^{n-1}(\mathcal{F}) \rightarrow C^n(\mathcal{F}))\end{aligned}$$

où la dernière égalité est due à la deuxième partie de la remarque précédente car $(C^{n-1}(\mathcal{F}) \rightarrow Z^n(\mathcal{F})) = \operatorname{coker}(Z^{n-1}(\mathcal{F}) \rightarrow C^{n-1}(\mathcal{F}))$ est un épimorphisme. En particulier, $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow C^\bullet(\mathcal{F})$ est exacte.

5)

Dans cet exercice on désigne par $d(\mathcal{F})^n$ (resp. $d(\mathcal{F})_0^n$) la flèche $C^n(\mathcal{F}) \rightarrow C^{n+1}(\mathcal{F})$ (resp. $C^n(\mathcal{F}) \rightarrow Z^{n+1}(\mathcal{F})$) construite en 3).

Étant donné $f: \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$ dans $Sh(X)$ on commence par construire $C^0(f)$ et $C^\bullet(f)$ avant de montrer que $C^0(-)$ et $C^\bullet(-)$ sont des foncteurs exacts. Ça suffit à prouver le résultat, en effet si $C^\bullet(-)$ est un foncteur exact alors pour toute suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

dans $Sh(X)$ et tout ouvert $U \subset X$, comme $C^n(\mathcal{F}') = C^0(Z^n(\mathcal{F}'))$ est flasque par la question 1),

$$0 \rightarrow C^n(\mathcal{F}')(U) \rightarrow C^n(\mathcal{F})(U) \rightarrow C^n(\mathcal{F}'')(U) \rightarrow 0$$

est exacte par l'exercice 2. D'où le résultat.

On commence par montrer que $C^0(-)$ est un foncteur. On pose

$$C^0(f)(U): (s_x)_{x \in U} \mapsto (f_x s_x)_{x \in U}.$$

Par définition, le diagramme

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{F}' & \xrightarrow{f} & \mathcal{F} \\ i^0(\mathcal{F}') \downarrow & & \downarrow i^0(\mathcal{F}) \\ C^0(\mathcal{F}') & \xrightarrow{C^0(f)} & C^0(\mathcal{F})\end{array}$$

commute et $C^0(f)$ est bien un morphisme de faisceau. Maintenant si $g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$ est une autre flèche dans $Sh(X)$ alors $C^0(g \circ f) = C^0(g) \circ C^0(f)$ par définition car le foncteur fibre $(-)_x: Sh(X) \rightarrow Ab$ pour $x \in X$ est un foncteur. Enfin $C^0(id_{\mathcal{F}}) = id_{C^0(\mathcal{F})}$ pour la même raison. D'où $C^0(-)$ est un foncteur.

On construit maintenant $C^\bullet(f) = (f^n: C^n(\mathcal{F}') \rightarrow C^n(\mathcal{F}))_{n \geq 0}$ étant donné $f: \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$ dans $Sh(X)$. On pose $f^0 = C^0(f)$, il suffit de construire $Z^\bullet(f) := (f_0^n: Z^n(\mathcal{F}') \rightarrow Z^n(\mathcal{F}))$ telles que

$$\begin{array}{ccc} C^{n-1}(\mathcal{F}') & \xrightarrow{f_{n-1}} & C^{n-1}(\mathcal{F}) \\ d(\mathcal{F}')_0^{n-1} \downarrow & & \downarrow d(\mathcal{F})_0^{n-1} \\ Z^n(\mathcal{F}') & \xrightarrow{f_0^n} & Z^n(\mathcal{F}) \end{array}$$

commute pour tout $n \geq 0$ et de poser $(f^n)_{n \geq 0} = (C^0(f_0^n))$. On le fait par récurrence sur n . Pour $n = 1$ on regarde

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}' & \xrightarrow{f} & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^0(\mathcal{F}') & \xrightarrow{f^0} & C^0(\mathcal{F}) \\ d_0^0 \downarrow & & \downarrow d_0^0 \\ Z^1(\mathcal{F}') & \xrightarrow{f_0^1} & Z^1(\mathcal{F}) \end{array}$$

et on veut construire la flèche du bas. On remarque que $(\mathcal{F}' \rightarrow C^0(\mathcal{F}'))$ se factorise par $\ker(d(\mathcal{F})_0^0 \circ f^0)$. En effet par commutativité du carré du haut et exactitude de la colonne de droite on a

$$0_{\mathcal{F}', Z^1(\mathcal{F})} = 0_{\mathcal{F}, Z^1(\mathcal{F})} \circ f = (d(\mathcal{F})_0^0 \circ i^0(\mathcal{F})) \circ f = d(\mathcal{F})_0^0 \circ f^0 \circ i^0(\mathcal{F}')$$

d'où $\mathcal{F}' \rightarrow C^0(\mathcal{F}')$ se factorise par le noyau. On écrit maintenant

$$\begin{aligned} Z^1(\mathcal{F}') &= \text{coker}(\mathcal{F}' \rightarrow C^0(\mathcal{F}')) \\ &= \text{coim}(C^0(\mathcal{F}') \rightarrow Z^1(\mathcal{F}')) \end{aligned}$$

où la dernière égalité est par construction. Par le point précédent, en notant

$$\mathcal{F}' = \ker(C^0(\mathcal{F}) \rightarrow \text{coim}(C^0(\mathcal{F}') \rightarrow Z^1(\mathcal{F}')))$$

on obtient une flèche

$$\ker(C^0(\mathcal{F}') \rightarrow \text{coim}(C^0(\mathcal{F}') \rightarrow Z^1(\mathcal{F}'))) \rightarrow \ker(d_0^0 \circ f^0)$$

d'où une flèche induite

$$\mathrm{coim}(C^0(\mathcal{F}') \rightarrow \mathrm{coim}(C^0(\mathcal{F}') \rightarrow Z^1(\mathcal{F}')) \rightarrow \mathrm{coim}(d_0^0 \circ f^0)$$

en particulier, le membre de gauche est $\mathrm{coim}(C^0(\mathcal{F}') \rightarrow Z^1(\mathcal{F}')) = Z^1(\mathcal{F}')$. Finalement, on obtient une flèche induite

$$f_0^1: Z^1(\mathcal{F}') \rightarrow \mathrm{coim}(d(\mathcal{F})_0^0 \circ f^0) \rightarrow \mathrm{im}(d(\mathcal{F})_0^0 \circ f^0) \rightarrow Z^1(\mathcal{F})$$

ce qui conclut le cas $n = 1$. La commutativité étant par construction. Le cas $n \geq 2$ se fait de manière identique en remplaçant $\mathcal{F} = Z^0(\mathcal{F})$ par $Z^{n-1}(\mathcal{F})$, $C^0(\mathcal{F})$ par $C^n(\mathcal{F})$ et $Z^1(\mathcal{F})$ par $Z^n(\mathcal{F})$.

On suppose maintenant que C^\bullet est un foncteur, une preuve est en annexe si elle était demandée.

On montre maintenant que C^\bullet est exact. Supposons d'abord que $C^0(-)$ est exact et soit

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0 \quad (*)$$

une suite exacte dans $Sh(X)$. On montre que le morphisme de complexe induit $0 \rightarrow C^\bullet(\mathcal{F}') \rightarrow C^\bullet(\mathcal{F}) \rightarrow C^\bullet(\mathcal{F}'') \rightarrow 0$ est exact. Il suffit de montrer pour tout $n \geq 0$ la suite

$$0 \rightarrow C^n(\mathcal{F}') \rightarrow C^n(\mathcal{F}) \rightarrow C^n(\mathcal{F}'') \rightarrow 0$$

est exacte dans $Sh(X)$. En plus on a supposé que $C^0(-)$ était exact, il suffit donc de montrer que la suite

$$0 \rightarrow Z^n(\mathcal{F}') \rightarrow Z^n(\mathcal{F}) \rightarrow Z^n(\mathcal{F}'') \rightarrow 0$$

est exacte. On le montre par récurrence sur n . En posant $Z^0(\mathcal{F}) := \mathcal{F}$ on obtient le cas $n = 0$ par l'hypothèse (*). Supposons maintenant le résultat vrai pour $0 \leq i \leq n-1$. On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z^{n-1}(\mathcal{F}') & \xrightarrow{f_0^{n-1}} & Z^{n-1}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{f_0^{n-1}} & Z^{n-1}(\mathcal{F}'') \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C^{n-1}(\mathcal{F}') & \xrightarrow{C^0(f_0^{n-1})} & C^{n-1}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{C^0(g_0^{n-1})} & C^{n-1}(\mathcal{F}'') \longrightarrow 0 \end{array}$$

Par hypothèse de récurrence, les lignes sont exactes. En plus, par fonctorialité de $C^0(-)$ et par construction, le diagramme commute. Comme $Sh(X)$ est abélienne, on applique le lemme du serpent pour obtenir la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \ker(i^0(Z^{n-1}(\mathcal{F}')) & \xrightarrow{\ker(f_0^{n-1})} & \ker(i^0(Z^{n-1}(\mathcal{F}))) & \xrightarrow{\ker(g_0^{n-1})} & \ker(i^0(Z^{n-1}(\mathcal{F}''))) \\
& & & & & & \swarrow \\
& & \text{coker}(i^0(Z^{n-1}(\mathcal{F}')) & \longrightarrow & \text{coker}(i^0(Z^{n-1}(\mathcal{F}))) & \longrightarrow & \text{coker}(i^0(Z^{n-1}(\mathcal{F}''))) \longrightarrow 0
\end{array}$$

or $i^0(\mathcal{F})$ est un monomorphisme de faisceaux pour tout $\mathcal{F} \in Sh(X)$, d'où on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{coker}(i^0(Z^{n-1}(\mathcal{F}')) \longrightarrow \text{coker}(i^0(Z^{n-1}(\mathcal{F}))) \longrightarrow \text{coker}(i^0(Z^{n-1}(\mathcal{F}''))) \longrightarrow 0$$

mais par définition $\text{coker}(i^0(Z^{n-1}(\mathcal{F}))) = Z^n(\mathcal{F})$ pour tout faisceau \mathcal{F} . D'où le résultat, enfin la preuve du lemme du serpent permet de placer la suite du dessus dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & C^{n-1}(\mathcal{F}') & \xrightarrow{C^0(f_0^{n-1})} & C^{n-1}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{C^0(g_0^{n-1})} & C^{n-1}(\mathcal{F}'') \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow d(\mathcal{F}')_0^{n-1} & & \downarrow d(\mathcal{F})_0^{n-1} & & \downarrow d(\mathcal{F}'')_0^{n-1} \\
0 & \longrightarrow & Z^n(\mathcal{F}') & \longrightarrow & Z^n(\mathcal{F}) & \longrightarrow & Z^n(\mathcal{F}'') \longrightarrow 0
\end{array}$$

d'où par commutativité des carrés, les flèches du bas sont bien f_0^n et g_0^n en appliquant le lemme de l'annexe sur la fonctorialité de C^\bullet sachant que $d(\mathcal{F}')_0^{n-1}$ et $d(\mathcal{F})_0^{n-1}$ sont des épimorphismes.

On montre enfin que $C^0(-): Sh(X) \rightarrow Sh(X)$ est exact. Soit $f: \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$ dans $Sh(X)$. La flèche $C^0(f)$ est donnée par

$$C^0(f)(U): (s'_x)_{x \in U} \mapsto (f_x(s'_x))_{x \in U}$$

où $f_x: \mathcal{F}'_x \rightarrow \mathcal{F}_x$ est la flèche induite par f sur les fibres. Il suffit de montrer que $C^0(\ker(\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F})) = \ker(C^0(\mathcal{F}') \rightarrow C^0(\mathcal{F}))$ et $C^0(\text{im}(\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F})) = \text{im}(C^0(\mathcal{F}') \rightarrow C^0(\mathcal{F}))$. Si c'est le cas, alors comme $C^0(0_{Sh(X)}) = 0_{Sh(X)}$, car tout produit d'objets terminaux est terminal, on obtient directement pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0 \quad (*)$$

dans $Sh(X)$ que

$$0 \longrightarrow C^0(\mathcal{F}') \xrightarrow{C^0(f)} C^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{C^0(g)} C^0(\mathcal{F}'') \longrightarrow 0 \quad (*)$$

est exacte par fonctorialité de $C^0(_)$.

On commence par montrer que $C^0(\ker(\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F})) = \ker(C^0(\mathcal{F}') \rightarrow C^0(\mathcal{F}))$. Par la description donnée en 1. on a

$$\ker(C^0(\mathcal{F}') \rightarrow C^0(\mathcal{F}))(U) = \ker\left(\prod_{x \in U} f_x : \prod_{x \in U} \mathcal{F}'_x \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x\right)$$

et de plus $C^0(\ker(\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}))(U) = \prod_{x \in U} \ker(\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F})_x$, il suffit donc de montrer que si

$$(s_x)_{x \in U} \in \ker\left(\prod_{x \in U} f_x : \prod_{x \in U} \mathcal{F}'_x \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x\right)$$

alors pour tout $x \in U$ on a $s_x \in \ker(f_x)$ et inversement. Mais c'est immédiat par définition du noyau dans Ab .

On montre maintenant que $C^0(\operatorname{im}(\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}))^\# = \operatorname{im}(C^0(\mathcal{F}') \rightarrow C^0(\mathcal{F}))^\#$. Par la description donnée en 2. on peut écrire

$$\operatorname{im}(C^0(\mathcal{F}') \rightarrow C^0(\mathcal{F}))(U) = \{(f_x s'_x)_{x \in U} \mid s'_x \in \mathcal{F}'_x\}$$

et on remarque que c'est déjà un faisceau par définition des restrictions. En plus $C^0(\operatorname{im}(\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}))^\# = C^0(\operatorname{im}(\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}))$ car un préfaisceau et son faisceautisé ont les mêmes fibres, en particulier $C^0(\operatorname{im}(\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}))$ et $\operatorname{im}(C^0(\mathcal{F}') \rightarrow C^0(\mathcal{F}))$ ont la même description donc coïncident. On en déduit de $C^0(_)$ est exact.

6)

La preuve est exactement identique à celle du cours en remplaçant la définition de $H^n(\mathcal{F}, U)$ du cours par la notre.

7)

On remarque que pour tout $n \geq 0$, $Z^n(\mathcal{F})$ est flasque si \mathcal{F} est flasque. En effet, c'est clair pour $n = 0$, maintenant si $n \geq 1$ on a une suite exacte

$$0 \rightarrow Z^{n-1}(\mathcal{F}) \rightarrow C^n(\mathcal{F}) \rightarrow Z^n(\mathcal{F}) \rightarrow 0$$

et par récurrence $Z^{n-1}(\mathcal{F})$ est flasque de même, $C^n(\mathcal{F}) = C^0(Z^{n-1}(\mathcal{F}))$ est flasque par la question 1), d'où par le cours $Z^n(\mathcal{F})$ est flasque. Maintenant, par l'exercice 2 pour tout ouvert $U \subseteq X$

$$0 \rightarrow Z^{n-1}(\mathcal{F})(U) \rightarrow C^n(\mathcal{F})(U) \rightarrow Z^n(\mathcal{F})(U) \rightarrow 0 \quad (**)$$

est exacte dans Ab or par définition

$$H^n(C^\bullet(\mathcal{F}), U) := \ker(d(\mathcal{F})^n(U)) / \operatorname{im}(d(\mathcal{F})^{n-1}(U))$$

d'où par $(**)$ et par les annexes 1.1 et 1.2 on a

1. $\ker(d(\mathcal{F})^n(U)) = \ker(d(\mathcal{F})_0^n(U)) = Z^{n-1}(\mathcal{F})(U)$.
2. $Z^{n-1}(\mathcal{F})(U) = \operatorname{im}(i^0(Z^{n-1})(U)) = \operatorname{im}(d(\mathcal{F})^{n-1}(U))$.

Puis $H^n(C^\bullet(\mathcal{F}), U) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

8)

On commence par remarquer qu'un faisceau abélien \mathcal{G} sur X^δ est de la forme $\mathcal{G}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{G}_x$ pour tout ouvert U de X^δ .

En effet pour tout ouvert $U \subseteq X^\delta$ et pour toute section $s \in \mathcal{G}(U)$ on peut relever la collection $(s|_{\{x\}})_{x \in U}$ de manière unique car $\{x\} \cap \{x'\} = \emptyset$ pour tout deux points distincts x et x' de X d'où la condition de recollement sur les intersections est vide. De même, on peut relever toute famille

$$(s_x)_{x \in U} \in \prod_{x \in U} \mathcal{G}(\{x\})$$

en un unique $s \in \mathcal{G}(U)$ tel que $s|_{\{x\}} = s_x$. En particulier, $\mathcal{G}(U) \simeq \prod_{x \in U} \mathcal{G}(\{x\})$.

Il reste à montrer que $\mathcal{G}(\{x\}) = \mathcal{G}_x$ pour tout $x \in X^\delta$. Mais $\mathcal{G}(\{x\})$ est un majorant du diagramme filtrant donné par $(\mathcal{G}(U))_{x \in U}$ muni des restrictions, qui appartient au diagramme. En particulier on obtient directement $\varprojlim_{x \in U} \mathcal{G}(U) = \mathcal{G}(\{x\})$ et le résultat.

Enfin, on pose $\mathcal{G} = f^* \mathcal{F}$ pour \mathcal{F} un faisceau abélien sur X . Alors pour tout ouvert $U \subseteq X^\delta$ on a

$$f^* \mathcal{F}(U) = \prod_{x \in U} (f^* \mathcal{F})_x = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

où la dernière égalité est par le cours et le fait que $f(x) = x$. On conclut en remarquant que $f_* f^* \mathcal{F}$ est le faisceau

$$U \mapsto \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

de $\operatorname{Ouv}(X)$ dans Ab et qu'il coïncide exactement avec $C^0(\mathcal{F})$ d'où le premier résultat de l'exercice.

Pour le second, soit $\mathcal{F} \in Sh(X)$, on doit montrer qu'il existe un injectif I de $Sh(X)$ et une flèche $\mathcal{F} \rightarrow I$ telle que

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow I$$

est exacte. On commence par montrer que $Sh(X^\delta)$ a assez d'injectifs. Soit \mathcal{G} un objet de $Sh(X^\delta)$, on a par le point précédent que $\mathcal{G}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{G}_x$. On sait par le cours que Ab a assez d'injectifs, pour tout $x \in X$ soit donc $0 \rightarrow \mathcal{G}_x \rightarrow I_x$ une suite exacte telle que I_x^δ est injectif dans Ab . Le préfaisceau

$$I^\delta: U \mapsto \prod_{x \in U} I_x^\delta$$

est clairement un faisceau pour les restrictions données par les projections. C'est un injectif de $Sh(X^\delta)$ car les flèches de faisceaux sur X^δ sont déterminées sur les singletons. Enfin, on obtient une flèche injective $\mathcal{G} \rightarrow I^\delta$ où l'injectivité peut-être vue directement terme à terme. D'où $Sh(X^\delta)$ a assez d'injectifs.

On montre enfin que $Sh(X)$ a assez d'injectifs. Si \mathcal{F} est un faisceau abélien sur X , soit

$$0 \rightarrow f^* \mathcal{F} \rightarrow I^\delta$$

une suite exacte dans $Sh(X^\delta)$ où I^δ est injectif. On pose $I := f_* I^\delta$. Par le cours le foncteur f_* d'image directe préserve les injectifs et est exact. En plus par la question 2) et la première partie de la question 8) si on note

$$i: \mathcal{F} \rightarrow C^0(\mathcal{F}) \simeq f_* f^* \mathcal{F} \rightarrow I$$

alors i est injective et I est injectif dans $Sh(X)$ d'où $Sh(X)$ a assez d'injectifs.

1 Résultats annexes

1.1 Noyau et post-composition par un monomorphisme

On doit montrer que si $(i_K: K \rightarrow X) = \ker(f: X \rightarrow Y)$ et $j: Y \rightarrow Z$ est un monomorphisme, alors $\ker(X \rightarrow Y \rightarrow Z) = (i_K: K \rightarrow X)$ pour X, Y, Z, K dans une catégorie abélienne quelconque.

En effet si on note $(i'_K: K' \rightarrow X) = \ker(X \rightarrow Y \rightarrow Z)$ alors

$$j \circ 0_{K',Y} = j \circ f \circ i'_K = 0_{K',Z}$$

d'où $f \circ i'_K = 0_{K',Y}$ car j est un monomorphisme. On obtient $k': K' \rightarrow K$ une flèche telle que $K' \rightarrow K \rightarrow X = i'_K$. À l'inverse on a $j \circ (f \circ i_K) = j \circ 0_{K,Y} = 0_{K,Z}$ d'où on obtient $k': K \rightarrow K'$ une flèche telle que $K \rightarrow K' \rightarrow X = i_K$, en particulier,

$$i_K \circ id_K = i'_K \circ k = i_K \circ k' \circ k$$

et

$$i'_K \circ id'_K = i_K \circ k' = i'_K \circ k \circ k'$$

or comme i_K et i'_K sont des monomorphismes par le cours, k est un isomorphisme d'inverse k' .

1.2 Image et pré-composition par un épimorphisme

On doit montrer que dans une catégorie abélienne quelconque, si $e: Z \rightarrow X$ est un épimorphisme et $f: X \rightarrow Y$ une flèche quelconque, alors $\text{im}(f) = \text{im}(f \circ e)$. Par le cours, $\text{im}(f) = (\text{im}(f) \rightarrow Y) = \ker(Y \rightarrow \text{coker}(X \rightarrow Y))$. Il suffit donc de montrer que $C := \text{coker}(X \rightarrow Y) = \text{coker}(Z \rightarrow X \rightarrow Y) =: C'$. En regardant dans la catégorie opposée, on obtient les mêmes hypothèse que dans la section 1.1 d'où le résultat.

1.3 Fonctorialité de C^\bullet

Pour montrer la fonctorialité de C^\bullet il faut montrer que si $g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$ est une autre flèche dans $Sh(X)$ alors dans la construction de 5) on a $(g \circ f)_0^n = g_0^n \circ f_0^n$ pour tout $n \geq 0$. On prouve par récurrence sur n que

$$(g \circ f)_0^n = g_0^n \circ f_0^n$$

alors

$$(g \circ f)^n = g^n \circ f^n$$

par fonctorialité de C^0 . Le cas $n = 0$ est immédiat par définition. On suppose $n \geq 1$. On conclut à l'aide du lemme suivant en remplaçant

- A par $C^{n-1}(\mathcal{F}')$,
- C par $C^{n-1}(\mathcal{F}'')$,
- D par $Z^n(\mathcal{F}')$,
- F par $Z^n(\mathcal{F}'')$
- f par $(g \circ f)^{n-1} = g^{n-1} \circ f^{n-1}$ par récurrence,
- d_A par $d(\mathcal{F}')_0^{n-1}$ qui bien un épimorphisme car un conoyau.
- d_C par $d(\mathcal{F}'')_0^{n-1}$
- h_1 par $g_0^n \circ f_0^n$ et h_2 par $(g \circ f)_0^n$.

Lemme 1.4. *Soit deux diagrammes commutatifs*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ \downarrow d_A & & \downarrow d_C \\ D & \xrightarrow{h_1} & F \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ \downarrow d_A & & \downarrow d_C \\ D & \xrightarrow{h_2} & F \end{array}$$

dans une catégorie abélienne \mathcal{C} tels que d_A est un épimorphisme. Alors $h_1 = h_2$.

Démonstration. La preuve consiste à dire que $h_1 \circ d_A = d_C \circ f = h_2 \circ d_A$. D'où $h_1 = h_2$ car d_A est un épimorphisme. \square