

# Géométrie algébrique



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Variétés algébriques</b>	<b>7</b>
1.1	Nullstellensatz . . . . .	7
1.2	Espace projectif . . . . .	9
1.3	fonctions régulières . . . . .	9
1.4	Morphismes d'ensembles algébriques . . . . .	10
1.5	Espaces annelés . . . . .	10

## *TABLE DES MATIÈRES*

# Introduction

On est censés prouver Riemann-Roch.

## *TABLE DES MATIÈRES*

# Chapitre 1

## Variétés algébriques

### 1.1 Nullstellensatz

Pas oublier de rechopper mon carnet. Y'a les preuves complètes.

**Théoreme 1.1.1.** *Y'a une correspondance entre points fermés de  $\mathbb{A}^n(k)$  et idéaux maximaux dans  $Spm(k[T_1, \dots, T_n])$ .*

**Corollaire 1.1.2.** *Si  $A$  est une  $k$ -algèbre de t.f. et  $\mathfrak{m}$  un idéal maximal alors  $A/\mathfrak{m}$  est une extension finie de  $k$ .*

**Lemme 1.1.3.** *Si  $A$  est une  $k$ -algèbre de t.f. alors  $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in Spm(A), I \subset \mathfrak{m}} \mathfrak{m}$*

**Lemme 1.1.4.** *Si  $k$  est algébriquement clos, c'est un homéomorphisme (entre  $\mathbb{A}^n(k)$  et  $Spm(k[T_1, \dots, T_n])$ .*

*Démonstration.* On prends le morphisme quotient, c'est l'évaluation et le noyau est de la forme  $(T_i - t_i)_i$ .  $\square$

**Théoreme 1.1.5** (Nullstellensatz). *Si  $k = \bar{k}$  alors  $I(Z(J)) = \sqrt{J}$ .*

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} I(Z(J)) &= I\left(\bigcup_{x \in Z(J)} x\right) \\ &= \bigcap_{x \in Z(J)} I(\{x\}) \\ &= \bigcap_{x \in Z(J)} \mathfrak{m}_x \\ &= \bigcap_{\mathfrak{m} \in Spm(A), J \subset \mathfrak{m}} \mathfrak{m} \end{aligned}$$

et la dernière est  $\sqrt{J}$  par le lemme. (omg, revoir la preuve dans Atiyah)  $\square$

**Remarque 1 (!).** *L'endroit où on utilise le weak nullstellensatz on a besoin de  $k$  algébriquement clos. La dernière qui vient du lemme y'a pas besoin. Autrement dit, on peut utiliser Spm pour faire de la géométrie algébrique sur un corps non algébriquement clos.*

**Définition 1.1.6.**  $A(Z) = k[T_1, \dots, T_n]/I(Z)$

Pour  $f \in A(Z)$  et  $\tilde{f}$  t.q  $p(\tilde{f}) = f$  pour  $p: k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A(Z)$ . Pour  $z \in k^n$  on peut toujours déf  $f(z) := \tilde{f}(z)$ . En particulier, on peut déf

**Définition 1.1.7.**  $D(f) = \{s \in Z : f(s) \neq 0\} = D(\tilde{f}) \cap Z$ . Avec  $D(\tilde{f}) = \mathbb{A}^n(k) - Z(\tilde{f})$ .

**Remarque 2.** *Comme d'hab juste il définit pour des fonctions a priori par déf sur  $\mathbb{A}^n(k)$ .*

**Remarque 3** (C'est super chiant). *Faut faire gaffe ducoup en fonction de la fonction que j'utilise ou de son lift pour les inclusions.*

**Corollaire 1.1.8.** *Si  $f, g \in A(Z)$  et  $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$ . On a*

- *Pour  $J_1, J_2 \leq A(Z) : Z(J_1) \subset Z(J_2) \leftrightarrow J_2 \subset \sqrt{J_1}$ .*
- *$D(f) \subset D(g) \leftrightarrow \exists h \in A(Z)$  t.q.  $f^n = gh$ .*
- *Les ouverts principaux forment une base de la topologie.*

*Démonstration.* Pour le premier point si  $Z(J_1) \subset Z(J_2)$  alors faut lift dans  $k[T_1, \dots, T_n]$  avant d'appliquer le nullstellensatz. Pour le deuxième, c'est clair. Pour le troisième, sur  $\mathbb{A}^n(k)$  on prend  $f \in I(Z)$ , où  $U = \mathbb{A}^n(k) - Z$ , t.q  $f(x) \neq 0$  (possible car  $x \notin Z$ ).  $\square$

**Proposition 1.1.9.** *Soit  $Z$  un ensemble algébrique affine. Alors  $Z$  est irréductible ssi  $I(Z)$  est premier. Si  $k = \bar{k}$ ,  $I \leq K[T_1, \dots, T_n]$  alors  $Z(I)$  est irréductible ssi  $\sqrt{I}$  est premier.*

*Démonstration.* Avec les nouvelles notations c'est direct, avec les anciennes si  $Z(I)$  est irréductible  $Z(f) \cup Z(g) = Z(I)$  implique  $Z(I) \subset Z(f)$  ou  $Z(I) \subset Z(g)$ .  $\square$

**Lemme 1.1.10.** *Soit  $A$  un anneau noetherien, alors les idéaux radicaux sont des intersections finies d'idéaux premiers.*

*Démonstration.* On regarde l'ensemble des idéaux qui sont pas des intersections d'idéaux premiers. Comme  $A$  est noethérien y'a un élément maximal  $I$  qui n'est pas premier. Soit  $a, b \in A - I$  t.q.  $ab \in I$ . On considère  $I_a = \sqrt{I + aA}$  et  $I_b = \sqrt{I + bA}$ . Ils sont plus gros que  $I$  donc intersections d'idéaux premiers. En particulier on prouve facilement que  $I = I_a \cap I_b$  ( $I$  est radical).  $\square$



**Proposition 1.1.11.** *Si  $k = \bar{k}$ , on a une décomposition unique des ensembles algébriques en variétés irréductibles non contenues les unes dans les autres.*

*Démonstration.*  $I(Z) = \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{b}_i$ . On retire les  $\mathfrak{b}_i$  contenus dans les autres.  $\square$

## 1.2 Espace projectif

On considère  $k[T_0, \dots, T_n] = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ .

**Lemme 1.2.1.** *Sur les corps infinis,  $f \in S_d$  ssi  $\lambda^d f(x_i, i) = f(\lambda x_i, i)$ .*

**Définition 1.2.2.** Un idéal est homogène ssi dès que  $f = f_1 + \dots + f_n \in I$  alors  $f_i \in I$ . C'est équivalent à être généré par des éléments homogènes, i.e.  $I = \bigoplus S_d \cap I$ .

**Remarque 4.** *Comme en géo diff regarder ce qu'il se passe quand on regarde des polynômes homogènes dans  $\mathbb{A}^{n+1}$  et qu'on les pousse (homéo?).*

**Définition 1.2.3.** Pour  $I$  un idéal homogène de  $k[T_0, \dots, T_n]$ , on définit  $Z_+(I) = \{P \in \mathscr{P}^n(k) : f(P) = 0 \ \forall f \in I \text{ f homogène}\}$  où autrement on lift  $P$  et on prends  $f$  quelconque. Si  $k$  est infini et  $Z \subset \mathscr{P}^n(k)$ , on définit  $I_+(Z) = I(\pi^{-1}(Z))$ .

**Théoreme 1.2.4** (Nullsellensatz projectif). *On suppose  $k = \bar{k}$  et  $J$  homogène. On a*

- $Z_+(J) = \emptyset$  ssi  $(T_0, \dots, T_n) \subset J$ .
- Si  $Z_+(J) \neq \emptyset$  alors  $I_+(Z_+(J)) = \sqrt{J}$ .

*Démonstration.* Si  $Z_+(J) = \emptyset$  on lift à  $\mathbb{A}^{n+1} - 0$  pour voir que  $Z(J) \subset \{0\} = (T_0, \dots, T_n)$ . Sinon  $I_+(Z_+(J)) = I(\pi^{-1}(Z_+(J))) = I(\pi^{-1}(Z_+(J)) \cup \{0\}) = \sqrt{J}$ .  $\square$

## 1.3 fonctions régulières

Revoir que la topologie de Zariski c'est la plus petite topologie que rend continue les polynômes.

**Définition 1.3.1** (Fonction régulière). On décrit pour  $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$  l'anneau  $\mathcal{O}_Z(U)$ . On prend les fonctions qui sont localement des fractions rationnelles.

**Note 1.** *Trouver exactement où on peut écrire des polynômes, les ouverts sont quasi-compacts(!).*

## 1.4 Morphismes d'ensembles algébriques

**Lemme 1.3.2.**  $\mathcal{O}_Z$  est un faisceau pour les restrictions naturelles.

*Démonstration.* C'est évident avec la déf mdr. □

**Proposition 1.3.3.** Soit  $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$ .

- Les fonctions régulières sont continues.
- Pour tout  $f \in \mathbb{A}(Z)$ , la flèche  $\mathbb{A}(Z) \rightarrow \mathcal{O}_Z(D(f))$  passe au quotient en un isom  $\mathbb{A}(Z)_f \simeq \mathcal{O}_Z(D(f))$ .
- $\mathbb{A}(Z) \simeq \mathcal{O}_Z(Z)$ .

*Démonstration.* Pour le premier point l'idée c'est que localement on peut se mettre sur un ouvert tel que  $f|_U(U) = \{pt\}$ . Le deuxième point c'est la surjectivité qu'y faut voir. Le troisième point c'est le plus cool, c'est l'idée que on commence par décomposer  $Z$  en une union finie  $\bigcup_i D(f_i)$  où on est une fraction rationnelle. Ensuite, on obtient  $(gf_i - h_i)|_{D(f_i)} = 0$ , faut relever puis dérouler avec le fait que  $1 \in (f_i, i)$  quelque part. □

**Remarque 5.** Si on prend  $\mathbb{A}^2 \setminus (0,0)$ , il a les mêmes sections globales que  $\mathbb{A}^2$ . Ça prouve que cet ouvert est pas affine.

## 1.4 Morphismes d'ensembles algébriques

Dans les ensembles algébriques on peut directement prendre des fonctions polynomiales ! C'est la preuve d'avant.

**Théoreme 1.4.1.** On a une équivalence de catégories entre les  $k$ -algèbres de type finies réduites et la  $k$ -variétés.

**Note 2.** Revoir vite fait la construction.

## 1.5 Espaces annelés

**Définition 1.5.1.** Un espace annelé est un espace topologique  $X$  muni d'un faisceau de  $k$ -algèbre pour nous.

**Définition 1.5.2.** Un morphisme d'espaces annelés

$$(|X|, \mathcal{O}_X) \rightarrow (|Y|, \mathcal{O}_Y)$$

est un couple  $(|f|, f^\#)$ . Où  $|f|$  est un morphisme d'espaces topologiques et  $f^\#: \mathcal{O}_Y \rightarrow |f|_* \mathcal{O}_X$  un morphisme tels que les flèches induites sur les fibres sont des morphismes d'anneaux locaux.

### *Variétés algébriques*

**Note 3.** Le faisceau  $|f|_*\mathcal{O}_X$  est le pullback classique. Si  $y = |f|(x)$ , comme d'habitude on a

$$f^\# : \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow (|f|_*\mathcal{O}_X)_y \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

Enfin en fait comme c'est localement annelé apparemment on peut montrer que  $f^\#$  c'est automatiquement le pullback.

**Théoreme 1.5.3.** Le couple  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  est un espace annelé.

*Démonstration.* Les fibres  $\mathcal{O}_{Z,z}$  sont les  $\mathbb{A}(Z)_{\mathfrak{m}_z}$ . □