Notes perso : Géométrie algébrique

Table des matières

Introduction

En suivant le I. R. Shafarevich.

Chapitre 1

Premières propriétés

1.1 Variété produit

Ce qui est assez clair c'est le produit de variétés affines. L'idée en général c'est de construire

$$X \times Y \to \mathbb{P}^n(k)$$

un isomorphisme sur son image qu'on peut reconstruire localement de sorte à ce qu'il soit unique.

Note 1. *Page 54.*

Concrètement dans le cas affine, les fermés de $\mathbb{A}^{n+m}$ qui sont fermés de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ c'est les fermés du type $V(F(X_1, \ldots, X_n)), G(X_{n+1}, \ldots, X_m))$. Pour le projectif c'est assez similaire. Le truc c'est que brutalement définir

$$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{n+1+m+1-1}$$

ca marche pas. Un tuple du produit $(u_0, \ldots, u_n, v_0, \ldots, v_m)$ est doublement homogène donc définit pas un point de $\mathbb{P}^{n+m+1}$. Ducoup faut déf plutôt

$$\begin{aligned} \phi \colon \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m &\to \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1} \\ ([u_0, \ldots, u_n], [v_0, \ldots, v_m]) &\mapsto (u_i v_j)_{i,j} \end{aligned}$$

Et là on a clairement

$$\phi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) = \bigcap_{i,j} V\left(\begin{vmatrix} X_{ij} & X_{il} \\ X_{kj} & X_{kl} \end{vmatrix}\right)$$

En fait ce qui est cool c'est la remarque suivante.

Remarque 1. *Si on regarde les mineures 2x2 de* (X_{ij}) *et le lieu de leur zéros communs. On peut prouver que* ϕ *se surjecte dedans. En particulier la matrice* $(w_{ij}) = (u_i v_j)$ *est de rang* 1 *et en plus c'est un produit de matrices* $1 \times (n+1)$ *par* $(m+1) \times 1$*.*

En fait c'est non trivial le produit projectif mdr. Déjà à faire :

Exercices 1.1.1. Les fermés de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ sont les zéros de polynômes bihomogènes. Réponse : L'idée c'est que si on prend un polynôme homogènes en (X_{ij}) et qu'on regarde

$$X_{ij} \mapsto X_i Y_j$$

. On obtient un polynôme bihomogène en les X_i et les Y_j de mêmes degrés. En fait inversement si on a un polynôme bihomogène G de degré r en X_i et s en Y_j avec $r > s$, on peut remarquer que $V(G)$ dans $\mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{A}^{m+1}$ est égal à à

$$\bigcup V(Y_j^{r-s} G)$$

(à vérifier, ça a l'air de marcher justement parce qu'on regarde dans $\mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{A}^{m+1}$ et pas $\mathbb{A}^{n+1+m+1}$.) **Meilleure réponse** : Si on regarde $Z(G) \subset \varphi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ on peut montrer que G est bihomogène de mêmes degré. À l'inverse pour def des fermés de $\mathbb{P}^n$ on doit utiliser des générateurs homogènes et donc $\bigcup_i V(Y_j^{r-s} G)$ c'est des générateurs homogènes.

1.2 Images de variétés projectives