Corps locaux

(Par Qing Liu)

Introduction

Le but c'est d'abord de décrire les extensions finies de corps locaux comment dans [**cassels**].

Chapitre 1

Corps ultramétriques complets

1.1 Valuations et valeurs absolues

Le but là c'est de classifier les valuations, d'abord sur des corps premiers comme $\mathbb{Q}$. D'abord l'équivalence entre valuations et valeurs absolues.

Définition 1.1.1 (Valuation)**.** Une valuation v (de rang 1) est un morphisme de groupe (multiplicatif vers additif)

$$K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

tel que $v(x+y) \geq min\{v(x), v(y)\}$ quand $x + y \neq 0$ avec $v(x+y) = \infty$.

Définition 1.1.2 (Valeur absolue)**.** Une valeur absolue $|.|$ est un morphisme de groupes multiplicatifs $K \to \mathbb{R}$ étendu avec $0 \mapsto 0$ et qui vérifie une inégalité triangulaire.

Le passage aux valeurs absolues : étant donné un réel $0 < t < 1$ on peut déf une valeur absolue

$$x \mapsto t^{v(x)}$$

Bon ensuite la caractérisation archimédienne :

Définition 1.1.3 (Valeur absolue archimédienne)**.** Un corps valué $(K, |.|)$ est archimédien si pour tout $(x, c) \in K \times \mathbb{R}$ il existe n t.q

$$c \leq |n.x|$$

et pas $n|x|$ attention.

Ensuite la première partie de la caractérisation :

Proposition 1.1.4. *Être archimédien c'est équivalent à*

- $(|n|)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est bornée.*
- $(|n|)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est* ≤ 1.
- $|.|$ *est ultramétrique!*

Preuve. La première équivalence est directe. La deuxième aussi via $x \mapsto x^k$ et la troisième se ramène à la deuxieme en regardant $|1+x| \leq 1$ et la flèche $x \mapsto x^k$ à nouveau ! (Ca caractérise les élements inferieurs à 1) □

Proposition 1.1.5 (Valuations et valeurs absolues)**.** *Il y a une bijection entre valeurs absolues ultramétriques et valuations. L'inverse de la flèche du dessus est juste*

$$|.| \mapsto \frac{1}{\log(1/2)} \log(|.|)$$

On s'approche du théorème d'Ostrowski. Avant on déf les équivalences de valeurs absolues.

Proposition 1.1.6 (La topologie induite)**.** *On obtient une distance à partir d'une valeur absolue puis la topologie de la distance.*

Dans le cas ultramétrique c'est très bizarre.

Proposition 1.1.7. *On a les propriétés suivantes.*

- *Si* $|x| \neq |y|$ *alors* $|x+y| = max(|x|, |y|)$.
- *Avec l'inégalité ultramétrique, les boules ont un seul centre.*
- *Puis deux disques qui s'intersectent forment en fait une chaine.*

Proposition 1.1.8 (Anneau de valuation)**.** *On peut déf l'anneau de valuation de* $(K, |.|)$ *par* $\mathcal{O} := \bar{D}(0,1)$ *les éléments de valuations plus petites que* 1. *Et son idéal maximal la boule ouverte* $D(0,1)$. *Les inversibles sont dans la frontière.*

Définition 1.1.9 (Équivalence de valeurs absolues)**.** Deux valeurs absolues sont équivalentes si elles définissent la même topologie.

Lemme 1.1.10 (Caractérisation)**.** *Deux valeur sabsolues sont équivalentes ssi il existe* $s \in \mathbb{R}_+^*$ *t.q* $|.|_1 = |.|_2^s$.

Preuve. La bonne idée c'est la caractérisation de $D(0,1)$ par les trucs qui tendent vers 0 par $x \mapsto x^k$. Faut comprendre que prendre des limites dans $\mathbb{R}$ donne la même chose pour $|.|_1$ et $|.|_2$. □

Ça suffit à prouver le théorème d'Ostrowski :

Théoreme 1.1.11 (Ostrowski)**.** *Une valeur absolue non triviale sur $\mathbb{Q}$ est équivalente soit à $|.|_\infty$ ou à une valeur absolue p-adique $|.|_p$.*

Preuve. Pour la partie non archimédienne, on regarde $\mathfrak{m} \cap \mathbb{Z}$ pour obtenir un p. Ensuite, on montre via $|uk| = |1 - vp|$ que $|k| = 1$ dés que $k \wedge p = 1$, $|vp| < 1$ parce que $vp \in \mathfrak{m}$. Ensuite y reste à comparer $|p|$ et $|p|_p$. Vu que $|x| = |p|^r|k| = |p|^r$.

Pour le cas archimédien l'idée c'est d'écrire a en base b pour comparer a^n et b^l où $l \sim n$. En particulier montrer que $|a| \geq 1$ implique $b \geq 1$ dès que $a \geq 2$ ET $|a| = |b|^{\log(a)/\log(b)}$, via la comparaison et par symétrie. Puis remplacer b par 2. On a montré que seul $|2|$ détermine le lien entre $|.|$ et $|.|_\infty$. □

Définition 1.1.12 (Places)**.** On définit une place comme une classe d'équivalence de valeurs absolues. Une place est finie/infinie si elle est ultramétrique/archimédienne.

1.2 Complétions et corps complets

Dès qu'on a un corps valué $(K, |.|)$, on peut construire une distance

$$d_{|.|} : (x, y) \mapsto |x - y|$$

puis définir des suites de Cauchy.

Définition 1.2.1. Un corps valué $(K, |.|)$ est complet si les suites de Cauchy pour $d_{|.|}$ convergent dans K.

Définition 1.2.2 (Complétion)**.** Pour tout corps valué $(K, |.|)$ il existe un corps valué complet $(\hat{K}, |.|)$ tel que $|.|$ s'étend à $\hat{K}$.

Preuve. L'idée c'est de regarder l'ensemble des suites de Cauchy $\mathscr{C}(K) \subset K^{\mathbb{N}}$, de voir que c'est un anneau puis de quotienter par l'idéal maximal des suites qui convergent vers 0. □

Définition 1.2.3 (Morphismes dans la catégorie des corps valués)**.** Un morphisme de corps valués est un morphisme d'anneau et une isométrie.

On peut étendre les morphismes vers des corps complets en morphismes de corps valués unique à unique isomorphisme près.

Remarque 1. *Si $(K, |.|)$ est ultramétrique et non triviale, $\hat{K}$ peut-être construit algébriquement. On fixe $t \in K$ t.q $0 < |t| < 1$. Dans l'anneau de valuation, on regarde*

$$\widehat{O}_K = \varprojlim_n (O_K / t^n O_K)$$

C'est un anneau intègre muni d'une valuation t.q

$$\widehat{v}((x_n)_n) = v(y)$$

où $(x_n) = \pi(y)$ et $\pi \colon O_K \to \widehat{O}_K$; $x \mapsto (x)_n$. C'est une valuation par densité. On l'étend au corps de fraction de la manière évidente. On peut montrer que c'est complet ***à faire****. Pareil en général $I \subset A$.*

Exercices 1.2.4. Rayon de convergence de $exp(z) = \sum_n \frac{z^n}{n!}$ dans $\mathbb{Q}_p$? Sachant que en métrique p-adique $1/n! \to_{n\to\infty} +\infty$. Faut calculer la valuation de $n!$.

Plus généralement, si A est intègre et $\mathfrak{m}a = tA$ est maximal on peut définir la valuation t-adique associée et l'étendre au corps de fractions et c'est une valuation discrète. Je crois que l'idée c'est que

$$I = \cap t^n A = \{0\}$$

parce que $tI = I$ puis Nakayama dans un anneau noethérien.

Apparemment il fait une construction de $\mathbb{R}$ sans complétion parce que c'est tautologique? Ah bah oui les valuations c'est dans $\mathbb{R}$, mais en fait on peut d'abord juste les prendre dans $\mathbb{Q}$.

Il regarde un corps K avec un ordre total compatible archimédien et la topologie de l'ordre.

Alors on demande enfin que $\iota \colon \mathbb{Q} \to K$ soit dense, on a nécessairemment que ι est croissante. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans K, on peut remplacer toute les suites de Cauchy dans K par des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

En particulier, y'a équivalence entre les suites de Cauchy de K et $\mathbb{Q}$. On regarde maintenant $C(\mathbb{Q})$ les suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ et $I(\mathbb{Q})$ les suites qui tendent vers 0. Dans

$$\pi \colon C(\mathbb{Q}) \to C(\mathbb{Q})/I(\mathbb{Q})$$

on définit un ordre à droite via $\pi(x_n)_n \geq \pi(y_n)_n$ ssi on a égalité où il existe $r \in \mathbb{Q}_+^*$ t.q $x_n \geq y_n + r$. On obtient un corps totalement ordonné $C(\mathbb{Q})/I(\mathbb{Q})$ (totalement car $\pm\pi(x_n)_n \geq 0$). Bon maintenant faut juste conclure en montrant que le quotient est complet. **à faire?**

Remarque 2. *On a bel et bien utilisé que $\mathbb{Q}$.*

Proposition 1.2.5. *$\mathbb{R}$ est unique à unique isomorphisme près en tant que corps totalement ordonné complet archimédien où $\mathbb{Q}$ est dense.*

1.3 Espaces de Banach

Une norme K sur un espace vectoriel V est une flèche $x \mapsto ||x||$ qui est nulle qu'en 0, a une inégalité triangulaire et qui transforme l'action de K en action de $\mathbb{R}$ via $|.|$.

Définition 1.3.1. Un e.v.n est un Banach si il est complet pour sa norme.

Remarque 3. *Un k-espace vectoriel de dimension finie sur un corps complet est un Banach. L'inverse est faux!*

Définition 1.3.2. Deux normes sont équivalentes si elles définissent la même topologie. Ou immédiatemment si il existe c_1, c_2 t.q

$$c_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq c_2||x||_1$$

L'intérêt c'est maintenant qu'étant donné une extension de corps L/k et une valeur absolue sur k, qu'est-ce qu'il se passe quand on l'étend à L? En fait c'est des normes sur L en tant que k-ev, et elles sont équivalentes en tant que norme ssi elles le sont en tant que v.a par définition!

Théoreme 1.3.3. *Si k est complet, et V est un k-ev de dimension finie, alors toutes les normes sur V sont équivalentes et V est un Banach.*

Démonstration. La norme du max donne une structure de Banach grâce à la convergence normale. Il reste à montrer que toutes les normes sont équivalentes à la norme du max $||.||_\infty$. Un côté est simple, l'autre par induction **Faire? Ah la preuve est non triviale mdr**. □

1.4 Lemme de Hensel

Soit $(K, |.|)$ un corps complet ultramétrique. On note $k = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}$ le corps résiduel.

Lemme 1.4.1 (Lemme de Hensel)**.** *Soit $P(X) \in \mathcal{O}_K[X]$, on suppose que $P \equiv f.g \mod \mathfrak{m}$ tels que $gcd(f, g) = 1$. Alors il existe $F, G \in \mathcal{O}_K[X]$ tels que*

$$P = F.G$$

et $F \equiv f \mod \mathfrak{m}$, $G \equiv g \mod \mathfrak{m}$, avec $\deg(F) = \deg(f)$. La décomposition est unique à inversible près.

Démonstration. On commence par prendre un lift F_0 de f et G_0 de g de degrés minimaux. On a $(f,g) = k[X]$ d'où $1 \in (F_0, G_0) + \mathfrak{m}[X]$, il existe donc $t \in K$ t.q $0 < |t| < 1$ et $\begin{cases} P - F_0G_0 \in t\mathcal{O}_K[X] \\ 1 \in (F_0, G_0) + t\mathcal{O}_K[X] \end{cases}$. On a déjà augmenté la précision. Soit $F_1 = F_0 + tV_1$ et $G_1 = G_0 + tU_1$. On veut $P - F_1G_1 \in t^2\mathcal{O}_K[X]$ t.q $\deg(F_1) = m$ et $\deg(G_1) \leq d - m$. On regarde

$$\begin{aligned} P - (F_0 + tV_1)(G_0 + tU_1) &= P - (F_0G_0 + t(F_0U_1 + G_0V_1) + t^2U_1V_1) \\ &= (P - F_0G_0) + t(F_0U_1 + G_0V_1) + t^2* \\ &= tE_0 + t(\_) + t^2* \\ &= t(E_0 + F_0U_1 + G_0V_1) + t^2* \end{aligned}$$

On prends $E_0 = H_0F_0 + R_0G_0 + t*$. **Revoir la preuve ailleurs.** □

Corollaire 1.4.2. *On garde les hypothèses sur K. Étant donné un polynôme irréductible $P \in K[X]$, on a*

$$max_i|a_i| = max\{|a_0|, |a_d|\}.$$

En particulier si $a_d = 1$ et $a_0 \in \mathcal{O}_K$ alors $P \in \mathcal{O}_K[X]$.

Démonstration. Supp $|a_{i_0}| > |a_0|, |a_d|$. Alors $P' = P/a_{i_0} \in \mathcal{O}_K[X]$. On a

$$P' = X^r g(X) \mod \mathfrak{m}_K$$

avec $r > 0$ et $g(0) \neq 0$. On a $r \leq \deg(P' \mod \mathfrak{m}_K) < d$ et par le lemme de Hensel $P(X) = FG$ avec $0 < \deg(F) = r < d$ par déf, c'est contradictoire. □

Corollaire 1.4.3 (Lemme de Hensel)**.** *Si $P \in \mathcal{O}_K[X]$ a une racine simple modulo $\mathfrak{m}_K$. Alors P a une unique racine congrue à elle modulo $\mathfrak{m}_K$.*

Démonstration. Clair par l'unicité du relèvement. □

Corollaire 1.4.4 (Lemme de Newton)**.** *Pour $P \in \mathcal{O}_K[X]$, on suppose qu'il existe $\alpha \in \mathcal{O}_K$ tel que*

$$|P(\alpha)| < |P'(\alpha)|^2$$

alors il existe un unique $\tilde{\alpha} \in \mathcal{O}_K$ tel que

$$\begin{cases} P(\tilde{\alpha}) = 0, \\ |\tilde{\alpha} - \alpha| < |P'(\alpha) \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\lambda = P'(\alpha)$, l'expansion de taylor de P en α est

$$P(X+\alpha) = P(\alpha) + P'(\alpha)X + X^2R(X)$$

avec $R(X) \in \mathcal{O}_K[X]$. Soit $H(X) = \lambda^{-2}P(\lambda X + \alpha)$, on a

$$P(\lambda X + \alpha)/\lambda^2 = P(\alpha)/\lambda^2 + X + X^2R_1(X)$$

et $|P(\alpha)/\lambda^2| < 1$ par hypothèse. Donc on a $H(X) \in \mathcal{O}_K[X]$ et $\bar{H}(X) = X(1+XG(X))$ pour un G. Et 0 est une racine simple de $\bar{H}$. Par le corollaire précédent on a une unique racine t de H telle que $|t| < 1$. D'où $\lambda t + \alpha$ est une racine de P et c'est la seule dans $D(\alpha, |\lambda|)$. □

Exemple 1. Dans $\mathbb{Q}_p$, si $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ et $|\alpha|_p < 1$ alors $1+\alpha$ a une racine n-ème dans $\mathbb{Z}_p$ si n est premier à p. On peut considérer $X^n - (1+\alpha) \in \mathbb{Z}_p[X]$, dans $\mathbb{F}_p$: $X^n - (1+\alpha) = X^n - 1$ a une racine simple $X = 1$ puis lemme de Hensel.

Exemple 2. Si $n = p-1$, $P = X^{p-1} - 1$ est décomposé dans $\mathbb{F}_p$ d'où on a les racines $p-1$-èmes de l'unité dans $\mathbb{Z}_p$.

Exemple 3. Si $n = p$, $(1+p\alpha)^p = 1 + p^2\alpha*$ et $(1+X)^p = 1 + pX + p(p-1)/2X^2\_ + pX^{p-1} + X^p$ et $p \mid \binom{p}{k}$ pour $1 \leq k \leq p-1$. Enfin

$$(1+p\alpha)^p = 1 + p^2\alpha*$$

et $(1+p) \neq (1+\alpha)^p, \alpha \in \mathbb{Z}_p$.

Exemple 4. Enfin par exemple $X^2 - p$ peut pas avoir de racines dans $\mathbb{Z}_p$ parce que $\equiv X^2 \mod p$ et $v_p(\alpha^2) = 2v_p(\alpha) \neq 1 = v_p(p)$.

Théoreme 1.4.5 (Lemme de Hensel multivarié)**.** *Soit $F(X,Y) \in \mathcal{O}_K[X,Y]$. On suppose que $\bar{F}$ a un zéro (a,b). On suppose que $\bar{F}'_X(a,b) \neq 0$. Alors*

$$\{(x,y) \in \mathcal{O}_K^2 \mid F(x,y) = 0, \bar{x} = a, \bar{y} = b\}$$

est en bijection avec

$$\{t \in \mathcal{O}_K \mid |t| < 1\}.$$

Démonstration. Soit $t \in \mathfrak{m}_K$. On considère $P = F(X, \tilde{b} + t) \in \mathcal{O}_K[X]$ où $\tilde{b} \equiv b$ et $\bar{P}(X) = \bar{F}(X,b)$, $\bar{P}'(X) = \bar{F}'_X(X,b)$. Par le lemme de Hensel, P a une unique racine $\alpha(t) \in \mathcal{O}_K$, telle que $\bar{\alpha}(t) \equiv a$. Alors

$$\{|t| < 1\} \to \{(x,y) \in \mathcal{O}_K^2 | F(x,y) = 0, \bar{x} = a, \bar{y} = b\}$$

est injective car $t \mapsto b + t$ est injective.

Inversement, si (x, y) est dans l'ensemble de droite. On pose $t = y - b$ d'où $P_t(x) = 0$, $\bar{x} = a$ implique $x = \alpha(t)$. En fait,

$$\{|t| < 1\} \to \{F^{-1}(0) \ldots\}$$

est continue et même analytique. □

Exemple 5. Soit E: $y^2 = x^3+1$ sur $\mathbb{Q}_p$, $p > 3$. On regarde $F = Y^2-(X+1)^3$. On a $F_X = 3X^2$ et $F_Y = 2Y$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{F}_p^2$ tel que $b^2 = a^3 + 1$, au moins l'un des $\bar{F}_X(a, b)$ et $\bar{F}_Y(a, b)$ est non nul. Alors $E(\mathbb{Z}_p)$ est une union disjointe de disques ouvert de $\mathbb{Z}_p$ indexés par $E(\mathbb{F}_p)$.

1.5 Extension de valeurs absolues

On considère L/K une extension finie de corps quelconques. Pour rappel la norme

$$N_{L/K}(\alpha)\colon L \to K$$

est définie comme le déterminant de $x \mapsto \alpha x$ dans L.

Proposition 1.5.1. *Pour $\alpha \in L$,*

- $N(\alpha) = \alpha^{[}L : K]$ *si* $\alpha \in K$.
- *La norme est multiplicative.*
- *Étant donné $L/E/K$, on a $N_{L/K}(\alpha) = N_{E/K}(N_{L/E}(\alpha))$. (dur)*
- *Si $P(X) = X^d + \ldots + a_0$est le polynôme minimal de α sur K, alors, $N_{K[\alpha]/K}(\alpha) = (-1)^d a_0$.*

  En particulier, le cas $E = K[\alpha]$ est intéressant.

Théoreme 1.5.2. *Si K est complet ultramétrique. Soit L/K une extension finie. Alors $|.|$ s'étend uniquement en une valeur absolue sur L via*

$$|\alpha| = |N_{L/K}(\alpha)|^{1/[L:K]}.$$

Démonstration. L'existence consiste à vérifier que c'est bien une valeur absolue. On supp $|\alpha|_L \leq 1$. On doit vérifier que

$$|1 + \alpha|_L \leq 1$$

mais $|\alpha|_L \leq 1$ dit que $|N_{L/K}(\alpha)| \leq 1$. Si P est le polynôme minimal de α alors $|a_0| \leq 1$ d'où par le corollaire de Hensel $P \in \mathcal{O}_K[X]$. En plus, $P(X - 1)$

est le pol minimal de $1+\alpha$. D'où $|N_{K[\alpha]/K}(1+\alpha)| = |1+\alpha|_L \leq 1$. Enfin l'unicité est dûe à l'unicité des normes sur L en tant que K-ev. (**regarder**)

Si $|.|$ est triviale les extensions définissent des topologies discrètes donc sont triviales. □

Ça c'est pour les extensions finies.

Corollaire 1.5.3. *Une valeur absolue sur un corps ultramétrique complet K s'étend uniquement en une valeur absolue sur $\bar{K}$!*

Démonstration. L'idée c'est de définir

$$|\alpha| := |N_{K[\alpha]/K}(\alpha)^{1/[K[\alpha]:K]}$$

et tout se vérifie localement. En fait dès que $\alpha \in L$, on a $|N_{K[\alpha]/K}(\alpha)|^{1/[K[\alpha]:K]} = |\alpha|_L$. □

Proposition 1.5.4. *Soit $(K,|.|)$ un corps ultramétrique et L/K une extension finie. Alors il existe au plus $[L:K]$ extensions de $|.|$ à L.*

Sans les valeurs absolues, on a tjr un diagramme

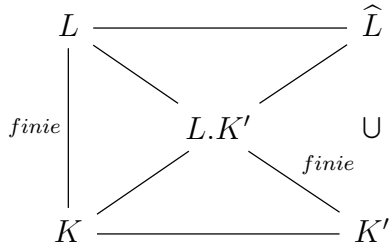
$$\begin{array}{ccccc} L & & & & \\ | & \searrow & & & \\ K & \longrightarrow & \widehat{K} & \longrightarrow & \widehat{K}^c \\ |.| & & |.| & & |.|_c \end{array}$$

Démonstration. On commence par remarquer qu'on en a une manière d'en avoir $[L:K]$ via $x \mapsto |\sigma(x)|_c$ et qu'on a $|Aut(L/K)| \leq [L:K]$. On montre que toute extension est donnée par un plongement $\sigma\colon L \to \widehat{K}^c$. Étant donné le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (L,|.|_L) & \longrightarrow & \widehat{L} & & \\ | & & \cup & & \\ (K,|.|) & \longrightarrow & K' & \xrightarrow{\sim} & \widehat{K} \end{array}$$

où K' est la cloture topologique de K dans $\widehat{L}$, on obtient un isomorphisme $K' \to \widehat{K}$. On veut maintenant montrer que $\widehat{L}$ est finie sur K'. Si c'est le cas alors on a un τ tel que $|\tau(x)|' := |x|_{\widehat{L}}$ pour tout $x \in \widehat{L}$. C'est une valeur absolue sur $\tau(\widehat{L}) \subset \widehat{K}^c$ qui étend celle de $\widehat{K}$! L'unicité sur $\widehat{K}^c$ implique que $|.|' = |.|_c$ d'où $|.|_{\widehat{L}} = |.|_c \circ \tau$.

On prouve maintenant que $\widehat{L}$ est finie sur K'.



On remarque que $L.K'$ est complet donc fermé dans $\widehat{L}$. On conclut en remarquant que c'est dense parce que L est dense dans $\widehat{L}$. □

1.6 Extension de |.| à une extension quelconque

Il suffit de savoir étendre à une extension purement transcendante. On regarde dans

$$K(x_i)_{i\in I} = \bigcup_{J\subset I;\#J<\infty} K(x_j)_{j\in J}$$

si on a une manière de définir des normes de manières canoniques sur les extensions finiment générées. On a sur $K[X_1,\dots,X_n]$ la norme de Gauss

$$||\sum \lambda_{k_1\dots k_n} X_1^{k_1}\dots X_n^{k_n}|| = max|\lambda_{k_1\dots k_n}| \in \mathbb{R}$$

est multiplicative! Et s'étend donc en une valeur absolue de $K(X_1,\dots,X_n)$.

Remarque 4. *En analyse p-adique on a besoin de corps algébriquement clos. Mais $\mathbb{Q}_p^c$ n'est pas complet mdr, donc on complète à nouveau en $\widehat{\mathbb{Q}}_p^c$, et cette fois c'est complet et clos.*

Théoreme 1.6.1. *Soit $(K,|.|)$ un corps ultramétrique. Alors*

$$\widehat{\widehat{K}^c}$$

est complet et algébriquement clos.

On prouve d'abord une proposition, comme dans le cas réel ou complexe, soit $(K,|.|)$ un corps valué. On ajoute la norme 1 (au cas où c'est archimédien) sur $K[X]$. On étend $|.|$ à K^c ($\mathbb{C}$ si archimédien).

Proposition 1.6.2 (Continuité des racines)**.** *Soit $P\in K[X]$ un polynôme unitaire de degré n, alors pour tout $\epsilon>0$, $\exists\delta>0$ dépendant uniquement de P est ϵ tel que pour tout $Q\in K[X]$ unitaire de degré n avec $||P-Q||_1<\delta$ on a, pour toute racine $\alpha\in K^c$ de P il existe $|\alpha-\beta|<\epsilon$.*

Démonstration du théorème. On peut supposer K complet. Soit $P \in \widehat{K^c}[X]$ et α une racine dans une extension finie. Pour tout $m \geq 1$ et $\epsilon = 1/m$, on a $Q_m \in K^c[X]$ tel que

$$||P - Q_m|| < \delta_m$$

implique qu'il existe une racine β_m de $Q_m(X)$ telle que $|\alpha - \beta_m| \leq 1/m$. Clairement, $(\beta_m)_m$ est de Cauchy et $\beta_m \in K^c$ d'où $\alpha = \lim_m \beta_m \in \widehat{K^c}$ et on a fini. □

Démonstration de la proposition. On peut noter que $||P|| \geq 1$ implique $|\alpha| \leq ||P||$ si $|\alpha| \leq 1$. On suppose donc $||\alpha|| \geq 1$. On a

$$|\alpha^n| = |-a_{n-1}\alpha^{n-1} - \ldots - a_0| \leq \left(\sum_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|\right) |\alpha|^{n-1}$$

puis

$$\leq ||P||.|\alpha|^{n-1} \implies |\alpha| \leq ||P||.$$

Maintenant $|Q(\alpha)| \leq ||Q - P|| max\{1, |\alpha|^n\}$ et $Q(X) = \prod(X - \beta_i) \implies \prod |\alpha - \beta_i| \leq ||Q - P|| max\{1, |\alpha|^n\}$ c'est équivalent à ce qu'il existe $\beta - \beta_{i_0}$ t.q

$$|\alpha - \beta|^n \leq ||Q - P||.||P||^n \implies |\alpha - \beta| \leq ||Q - P||^{1/n}.||P||.$$

□

1.7 À l'aide d'anneaux artiniens

On peut commencer à discuter les propriétés du point de vue topologique. Si on considère $\widehat{K}$ on peut regarder la $\widehat{K}$-algèbre $B_L = L \otimes_K \widehat{K}$. En tant qu'ev, c'est de dimension $[L : K]$. Elle a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux, $\leq [L : K]$ car si on prends une suite décroissante $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2, \ldots, \cap_{j=1}^{i} \mathfrak{m}_i$ alors c'est une suite décroissante d'espaces vectoriels! D'où la finitude.

On voudrait maintenant construire une bijection entre

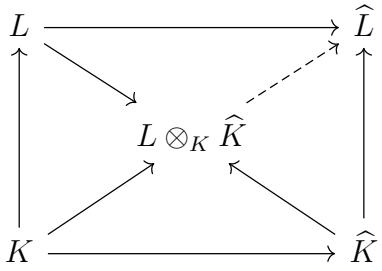
$$\{\text{Idéaux maximaux de } B_L\} \leftrightarrow \{\text{extensions de } |.|_K \text{ à } L\}$$

Démonstration. On commence avec $\mathfrak{m}_0 \subset B_L$, alors $B_L/\mathfrak{m}_0$ est une extension finie de $\widehat{K}$. Il existe une unique extension $|.|_{\mathfrak{m}_0}$ de $|.|_K$ à $B_L/\mathfrak{m}_0$. Via le morphisme canonique

$$L \to L \otimes_K \widehat{K} \to B_L/\mathfrak{m}_0$$

le pullback de $|.|_{\mathfrak{m}_0}$ à L est une extension de $|.|_K$ à L. On montre maintenant que si $\mathfrak{m}_1$ en est un autre on obtient une extension différente. L'espace $L \otimes_K \widehat{K}$

est un Banach dans lequel L est dense c'est assez clair. Si $\hat{x} \in \mathfrak{m}_0 \backslash \mathfrak{m}_1$ et $L \ni a \sim \hat{x}$ alors $|a|_{\mathfrak{m}_0} \sim 0$ dans le quotient car $\hat{x} \mapsto 0$ mais $|a|_{\mathfrak{m}_1} \neq 0$ parce que $\hat{x} \mapsto \neq 0$ dans $B_L/\mathfrak{m}_1$. On a montré que $\mathfrak{m} \mapsto |.|_{\mathfrak{m}}$ est injective. À l'inverse si on regarde $\widehat{L} = \widehat{(L, |.|_L)}$ où $|.|_L$ étend $|.|_K$. On regarde



Où $B_L \to L$ est le produit. Faut montrer que c'est bien défini, on sait que l'image est dense car L est dense, et l'image est fermée, simplement par example parce que e.v. de dim finie sur $\widehat{K}$ donc Banach donc complet donc fermé. On déf ensuite $\mathfrak{m} = \ker(L \otimes_K \widehat{K} \to \widehat{L})$ alors $\widehat{L} = B_L/\mathfrak{m}$. ($\mathfrak{m}$ dépend de la clôture choisie donc c'est bon) □

Exemple 6. Si on pose $L = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et qu'on regarde $|.|_p$, on a

$$L \otimes_K \widehat{K} = \mathbb{Q}_p[X]/(X^2 - 2)$$

dans $\mathbb{Q}_2$, $X^2 - 2$ est irréductible (regarder la valuation), de sorte que $|.|_2$ s'étend de manière unique à $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$! Dans $\mathbb{Q}_7$ ça split et on à deux extensions de $|.|_7$ a $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

1.8 Cas archimédien

On appelle $r_1, 2r_2$ le nombre de plongement rééls, complexes de $L/\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. Si $L = \mathbb{Q}[\theta]$ et P est le polynome minimal de θ alors r_1 est le nombre de racines réelles et $2r_2$ le nombre de racines complexes de P.

Proposition 1.8.1. *Il y'a exactement $r_1 + r_2$ extensions de $|.|_\infty$ à L.*

Exemple 7. Si $L = \mathbb{Q}[i]$ alors $r_2 = 1$ et $r_1 = 0$. Faut montrer que la conjugaison complexe change pas la valeur absolue dans ce cas, on dirait qu'il faut étendre à $\mathbb{C}$ puis remarquer que la restriction à $\mathbb{R}$ n'est est invariante. Faut aussi utiliser que $z \mapsto \bar{z}$ est linéaire donc continue (**à faire**).

1.9 Corps local

Si $(K, |.|)$ est complet ultramétrique. On veut montrer que si le corps résiduel est fini alors K est localement compact, i.e. $\mathcal{O}_K$ est compact. On suppose $|.|$ non triviale.

Démonstration. Soit $0 < |t| < 1$, on considère $\mathcal{O}_K$ comme d'hab et $\Sigma \subset \mathcal{O}_K$ un système de représentants de $\mathcal{O}_K/t\mathcal{O}_K$. On considère l'ensemble $\mathcal{E} \subset \Sigma^{\mathbb{Z}}$ des suites éventuellement nulle à gauche. On met la topologie discrète sur Σ et produit sur $\Sigma^{\mathbb{Z}}$.

Proposition 1.9.1. *On a un homéomorphisme*

$$f \colon \mathcal{E} \to K; (x_n)_n \mapsto \sum x_n t^n$$

Preuve de la proposition. Faut montrer que c'est bien déf, suffit de voir que $|x_n||t|^n \leq |t|^n \to 0$. Ensuite la "norme" de f, si $x \neq y \in \mathcal{E}$ on déf $|f(x)-f(y)|$ comme le plus petit entier t.q $x_{n_0} \neq y_{n_0}$. On montre que $|f(x)-f(y)| = |x_{n_0} - y_{n_0}||t|^{n_0}$, on peut pas supposer $y = 0$ parce que $x_{n_i} - y_{n_i}$ est pas nécessairement un représentant. Il suffit de remarquer que comme $x_{n_0} - y_{n_0} \neq 0$ dans le quotient, alors $|x_{n_0} - y_{n_0}| > |t|$. Ensuite on factorise, $(x_{n_0} - y_{n_0})t^{n_0}$ et on conclut.

Soit maintenant $\alpha \in K^*$, on a un n_0 t.q. $|t|^{n_0+1} < |\alpha| \leq |t|^{n_0}$. On a $|t| < |\alpha/t^{n_0} \leq 1$ d'où dans $\mathcal{O}_K$, il existe $x_{n_0} \in \Sigma$ t.q

$$|\alpha/t^{n_0} - x_{n_0}| \leq |t|$$

d'où

$$|\alpha - x_{n_0} t^{n_0}| \leq |t|^{n_0+1}$$

on peut alors construire de manière inductive α. On a montré la bijection. Enfin, l'histoire des normes montre que c'est continu et même un homéo par la topologie produit (faire). □

Corollaire 1.9.2. *Si $\mathcal{O}_K/t\mathcal{O}_K$ est fini, alors $\mathcal{O}_K$ est compact et K est localement compact.*

Démonstration. On a $\mathcal{E}_0 = \Sigma^{\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$. On doit étudier les suites de $\mathcal{E}_0 = f^{-1}\mathcal{O}_K$. On a $|f(x)| = |x_{n_0}||t|^{n_0} > |t|^{n_0+1}$ si $x_{n_0} \neq 0$ car $|x_{n_0}| > |t|$ d'où $1 \geq |f(x)| > |t|^{n_0+1} \implies n_0 \geq 0$. Maintenant, Σ est compact puis $\Sigma^{\mathbb{N}}$ est compact. Enfin $K = \cup(\lambda + \mathcal{O}_K)$. □

□

Chapitre 2

Théorie algébrique

On utilise des anneaux de valuations discrètes plutôt que des valeurs absolues.

2.1 Anneaux de Dedekind

Si on prends deux anneaux intègres $A \subset B$, B intégralement clos alors la clôture intégrale de A dans B est intégralement close. Si on note $\tilde{A}$ la clôture intégral de A dans B et $\lambda \in Frac(\tilde{A})$, entier sur $\tilde{A} \subset B$ alors entier sur A. Maintenant, $\lambda \in Frac(B)$ entier sur B implique $\lambda \in B \cap \tilde{A} = \tilde{A}$.

Proposition 2.1.1. *Si $b \in B$ algébrique sur $Frac(A) = K$ et P son polynôme minimal est unitaire. Alors b est entier sur A si $P[X] \in A[X]$. L'inverse est vrai si A est intégralement clos.*

Démonstration. On prouve l'inverse, si b est entier sur A alors toute les racines sont entières sur A par galois sur l'équation. D'où les coefficients sont entiers sur A et dans $Frac(A)$ on conclut avec l'hyptothèse en plus sur A. □

Corollaire 2.1.2. *Si $b \in B$ est entier sur A intégralement clos, $N_{L/K}(b), Tr_{L/K}(b) \in A$ où L est juste une extension finie tq $b \in L$ et $K = Frac(A)$.*

Démonstration. On regarde $N_{K[b]/K}(b)^{[L:K[b]]}, Tr(...)$. □

Théoreme 2.1.3. *Soit A un anneau noethérien intègralement clos. Et soit une extension séparable finie L de $Frac(A) = K$. Alors la clôture intégrale de A dans L, B, est un A-module de type fini, en particulier noethérien.*

Démonstration. On regarde les traces $Tr_{L/K} : L \times L \to K$ qui sont bilinéaires sur K. Maintenant si L/K est séparable alors $Tr_{L/K}$ est non dégénérée (voir dans le Samuel). Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de L sur K. On peut prendre $e_i \in B$

via le coefficient dominant de leur polynôme minimal. On prend les bases duales **pour L** $e_i^* \in L$ et on regarde

$$Tr_{L/K}(e_i e_j^*) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0 \end{cases}$$

Maintenant soit $b \in B$, on a $b = \sum \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in K$. En plus, $\lambda_i = Tr_{L/K}(be_i^*)$ et e_i^* étant algébrique il existe $t \in A\backslash 0$ t.q $te_i^* \in B$ pour chaque i. Maintenant,

$$\lambda_i = (1/t)Tr_{L/K}(b(te_i^*)) \in (1/t)A$$

d'où $b \in \sum_{i=1}^n (1/t)Ae_i$ qui est un A-module de type fini, or A est noethérien donc ce truc est noethérien donc B est de type fini sur A car inclut dedans. □

2.2 Anneaux de Dedekind

Définition 2.2.1. Un anneau de dedekind A est un anneau t.q

- A est noethérien.
- A est intégralement clos.
- A est de dimension 1.

Théoreme 2.2.2 (Décomposition en idéaux premiers)**.** *Il existe une décomposition unique de* $(0) \neq I \subset A$ *en idéaux premiers*

$$I = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{m}_i^{r_i}$$

où les $r_i \geq 1$.

Comment on obtient des anneaux de Dedekind maintenant ? On peut localiser un anneau de Dedekind. Ca reste un anneau de Dedekind.

Remarque 5. *Si on regarde topologiquement,* $Spec(S^{-1}A) \subset Spec(A)$ *d'où la dimension est* $\leq$.

Corollaire 2.2.3. *Si A est de dedekind, la localisation en* $\mathfrak{p}$ *est un anneau de valuation discrète.*

Définition 2.2.4. Un anneau de valuation discrète est un anneau de Dedekind local qui n'est pas un corps.

Proposition 2.2.5. *Un anneau de valuation discrète est un anneau local principal qui n'est pas un corps.*

Démonstration. Comme on admet le théorème de décomposition : si $\mathfrak{m} \neq 0$ alors $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$ par Nakayama. Ensuite si $t \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ alors $tA = \mathfrak{m}^k$ par le théorème de décomposition mdr, $t \notin \mathfrak{m}^2$ implique $k \leq 1$. □

on peut construire une valuation sur $(A, \mathfrak{m})$ puis sur $Frac(A)^*$. On réobtient $A = \{v(K^*) \geq 0\}$.

Théoreme 2.2.6. *Soit A un anneau de Dedekind et $L/K = Frac(A)$ finie séparable. Alors la cloture de A dans L, B, est un anneau de Dedekind fini sur A.*

Démonstration. Via l'exo du td B est entier sur A implique tout. □

Exemple 8. Si on prends $L/k(T)$, la clôture intégrale dans L de $k[T]$ fournit un morphisme fini $C \to \mathbb{P}^1$. Pareil, si on prends $k((t))$ c'est transcendant sur $k(t)$. Si $k = \mathbb{F}_q$ alors $k(t)$ est dénombrable contrairement à $k((t))$. On prends s transcendant et la valuation t-adique. On regarde

$$k(t) \subset K = k(t, s^p) \subset L = k(t, s) \subset k((t))$$

On a $[L : K] = p$, $\mathfrak{m}_K = t\mathcal{O}_K$ et $\mathfrak{m}_L = t\mathcal{O}_L$ de corps résiduels k avec les valuations restreintes. Alors,

$$\mathcal{O}_L \text{ est un a.v.d, pas fini sur} \mathcal{O}_K$$

On verra la preuve plus tard. Le point c'est que c'est inséparable donc la dimension est pas finie.

Théoreme 2.2.7 (Krull-Akizuki)**.** *Si A est de Dedekind et $L/K = Frac(A)$ finie. Alors la clôture de A dans L est de Dedekind.*

Théoreme 2.2.8. *Si A est un a.v.d avec les hyp du dessus. ALors la clôture est d'Artin.*

Lemme 2.2.9. *Si L/K est purement insép finie. Alors on obtient un anneau de valuation discrète.*

Démonstration. Soit $p = char(K) > 0$. Il existe $e > 0$, $L^{p^e} \subset K$. On note $A = \mathcal{O}_K$ et $\mathcal{O}_L$ la clôture dans L. On construit une valuation sur L^* via $v(x^{p^e})/p^e$. C'est une valuation. Et maintenant $v_L(x) \geq 0$ est équivalent à $x^{p^e} \in \mathcal{O}_K$ est entier sur $\mathcal{O}_K$. À l'inverse si $x \in \mathcal{O}_L$ t.q. $x^{p^e} \in K$ est entier sur $\mathcal{O}_K$ comme $\mathcal{O}_K$ est de dedekind on a fini. □

Chapitre 3

Ramification

On étudie les extensions d'anneaux de valuations discrètes. On prends $\mathcal{O}_K$ un d.v.r, k son corps résiduel, K son corps de fractions. Et π_K une uniformisante.

3.1 Définitions

Définition 3.1.1. Une extension de d.v.r est un morphisme d'anneaux locaux.

Définition 3.1.2 (Indice de ramification)**.** C'est l'exposant $e_{L/K}$ tel que $\mathfrak{m}_K\mathcal{O}_L = \mathfrak{m}_L^{e_{L/K}}$. On peut le voir sur les uniformisantes.

On définit, pour $|.|_K$ associée à $\mathcal{O}_K$ et étendue à L. La valuation normalisée $v_K \colon K^* \to \mathbb{Z}$ via $v_K(\pi_K) = 1$. Alors

$$v_L(\pi_K) = e$$

.

Définition 3.1.3 (Degré résiduel)**.** On déf $f_{L/K} := [\mathcal{O}_L/\mathfrak{m}_L : \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K]$ la dimension de l'extension résiduelle.

Exemple 9. Si on pose $K = \mathbb{C}(z)$ et $L = K[t]$ avec $t^d = z$. Alors $\mathbb{C}[t]$ est entier sur $\mathbb{C}[z]$ et un PID donc la clôture intégrale de $\mathbb{C}[z]$ dans L. Les idéaux au dessus, $(z-c)\mathbb{C}[z]$, y'a deux cas :

- $c \neq 0$ et la le polynôme se scinde à racines simples et indice de ramification 1.
- $c = 0$, les racines de l'unité sont inversibles. Donc seulement (t) contient (z) et indice de ramification d.

Si c est proche de 0, les branches se "ramifient".

Exemple 10. Si on regarde $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ avec d sans facteurs carrés. On peut voir avec la trace que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est d'indice au plus 2 dans $\mathcal{O}_K$.

Proposition 3.1.4. *L'indice de ramification et le degré résiduel sont multiplicatifs pour les sous-extensions.*

Proposition 3.1.5. *L'indice de ramification et le degré résiduel sont invariants par complétions.*

Théoreme 3.1.6. *Pour une extension finie L/K. Avec $\tilde{\mathcal{O}}_K$ la clôture de $\mathcal{O}_K$ dans L. En notant $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ les idéaux maximaux de $\tilde{\mathcal{O}}_K$, $\mathcal{O}_K \to (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i}$ est une extension de d.v.r. Alors*

$$\sum_i e_i f_i \leq [L : K]$$

et les propriétés suivantes sont équivalentes

1. *l'inégalité est une égalité.*
2. *$\tilde{\mathcal{O}}_K$ est fini sur $\mathcal{O}_K$.*
3. *$L \otimes_K \widehat{K}$ est réduite.*

En particulier, on a une égalité si L/K est séparable ou si K est complet.

Lemme 3.1.7. *Si $\mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_L$ est une extension de d.v.r alors*

$$dim_k \mathcal{O}_L/\mathfrak{m}_K\mathcal{O}_L = e.f \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

Démonstration. Voir cours. En gros on considère la famille $\{\pi_L^i b_j | 0 \leq i \leq e-1, 1 \leq j \leq r\}$ pour $b_1, \dots, b_r \in \mathcal{O}_L$ une famille libre dans le quotient. On montre que la famille est libre puis que $r = f$ quand les quantités sont finies. Pour ça on lift une base de k_L, $b_1, \dots, b_f$, et on a $\mathcal{O}_L \subset \sum_j b_j \mathcal{O}_K + \pi_L \mathcal{O}_L$. On a plus qu'à itérer e fois. On obtient

$$\mathcal{O}_L \subset \left(\sum_{0 \leq i \leq e-1; 1 \leq j \leq f} b_j \pi_L^i \mathcal{O}_K \right) + \pi_K \mathcal{O}_L$$

. Si on appelle M le gros truc à gauche. En quotientant par $\pi_K \mathcal{O}_L$ on obtient une famille génératrice du quotient de taille ef. □

Remarque 6. *Si $\mathcal{O}_L$ est fini sur $\mathcal{O}_K$ alors $\mathcal{O}_L = M$ par Nakayama!*

Lemme 3.1.8.

$$dim_k \tilde{\mathcal{O}}_K/\mathfrak{m}_K\tilde{\mathcal{O}}_K \leq [L:K]$$

Note 1. *Dans le premier lemme, on regarde qu'un idéal, là on les regarde tous.*

Démonstration. Voir cours. Je crois que c'est juste qu'une famille libre dans le quotient doit être libre au dessus. D'où le résultat. □

Lemme 3.1.9. *Si K est complet :*

$$dim_k \tilde{\mathcal{O}}_K/\mathfrak{m}_K\tilde{\mathcal{O}}_K = [L:K]$$

Démonstration. Faut faire attention, $\mathcal{O}_L$ est pas nécessairement fini sur $\mathcal{O}_K$. Mais on a $\mathcal{O}_L \subset M + \pi_K\mathcal{O}_L$ et en itérant, $\mathcal{O}_L \subset M + \pi_K^N\mathcal{O}_L$ pour tout N. Donc M est dense dans $\mathcal{O}_L$. Donc $M \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ est dense dans L de dimension finie sur K complet donc fermé + complet dans L. D'où on a l'égalité. □

Lemme 3.1.10. *La flèche induite $A/\mathfrak{m}^r \to A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^r A_\mathfrak{m}$ est un isomorphisme dès que $\mathfrak{m}$ est maximal.*

Théoreme 3.1.11. *On se place dans L/K finie, $\mathcal{O}_K$ un d.v.r et $\tilde{\mathcal{O}}_K$ la clôture de $\mathcal{O}_K$ dans L. On considère $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ les idéaux maximaux de $\tilde{\mathcal{O}}_K$. Puis via les $(\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i}/\mathcal{O}_K$ on à les e_i, f_i et alors*

$$\sum_i e_i f_i \leq [L:K]$$

En plus on a égalité ssi $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est fini sur $\mathcal{O}_K$ ssi $L \otimes_K \widehat{K}$ est réduite.

Preuve de l'inégalité. Comme on est dans un anneau de Dedekind on a

$$\mathfrak{m}_K\tilde{\mathcal{O}}_K = \prod_i \mathfrak{m}_i^{r_i}$$

et par localisation on voit que $r_i = e_i$. Enfin par CRT et le dernier lemme on a $\tilde{\mathcal{O}}_K/\mathfrak{m}_K \simeq \prod(\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i}/\mathfrak{m}_i^{e_i}(\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i}$. avec $\mathfrak{m}_i^{e_i}(\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i} = \mathfrak{m}_K(\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i}$. D'où par le premier lemme et le deuxième lemme on obtient l'inégalité. □

Preuve des équivalences. Si maintenant on a l'égalité on veut montrer que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est fini sur $\mathcal{O}_K$. Il montre qu'une base relevée de $\tilde{\mathcal{O}}_K/\mathfrak{m}_K$ est libre sur $\mathcal{O}_K$ et K, donc une base de L. En plus par unicité de la décomposition et via l'écriture dans le quotient c'est une base de $\tilde{\mathcal{O}}_K$ sur $\mathcal{O}_K$. Si $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est fini à l'inverse, alors il est libre car d.v.r sont principaux et son rang est le même après $\otimes K$. □

3.2 Trouver les indices de ramification/degrés résiduels

Proposition 3.2.1. *On suppose que $\tilde{\mathcal{O}_K} = \mathcal{O}_K[\alpha]$ pour un α. Soit $P \in K[X]$ le polynôme minimal unitaire de α. Alors $P \in \mathcal{O}_K[X]$ et soit $\bar{P}(X) = \prod_i p_i(X)^{r_i} \mod \tilde{\mathfrak{m}}_K$ la décomposition irréductible dans $k[X]$. Soit $P_i = p_i \mod \tilde{\mathfrak{m}}_K$ des lifts alors*

1. *Les idéaux maximaux de $\tilde{\mathcal{O}_K}$ sont exactement les $\mathfrak{m}_i$ où $\mathfrak{m}_i = (\mathfrak{m}_K, P_i(\alpha))$.*
2. *$(\tilde{\mathcal{O}_K})_{\mathfrak{m}_i}/(\mathfrak{m}_i) \simeq k[X]/(P_i(X))$.*
3. *$e_i = e_{(\tilde{\mathcal{O}_K})_{\mathfrak{m}_i}/\mathcal{O}_K} = r_i$.*

Démonstration. Les idéaux maximaux de $(\tilde{\mathcal{O}_K})$ contiennent tous $\mathfrak{m}_K$ d'où on a une bijection avec les idéaux du quotient $\tilde{k}$. On conclut en prenant les images inverses qui sont maximales parce que le quotient par elles est un corps. Ça prouve 1. et 2., pour 3. on a $P(X) = \prod P_i(X)^{r_i} + \epsilon(X)$ avec $\epsilon(X) \in \mathfrak{m}_K[X]$. Alors $0 = P(\alpha) = \prod P_i(X)^{r_i} + \epsilon(\alpha)$. D'où $\prod_i P_i(\alpha)^{r_i} = -\epsilon(X) \in \mathfrak{m}_K\tilde{\mathcal{O}_K}$. Ensuite

$$\prod \mathfrak{m}_i^{r_i} \subset \mathfrak{m}_k\tilde{\mathcal{O}_K} + P_i(\alpha)^{r_i}\tilde{\mathcal{O}_K}$$

d'où $\prod \mathfrak{m}_i^{r_i} \subset \mathfrak{m}_K\tilde{\mathcal{O}_K}$. Comme on est dans un anneau de Dedekind $e_i \leq r_i$. Ensuite comme $\sum r_i f_i \geq \sum e_i f_i = [L : K]$, et qu'à gauche on a le degré de $\bar{P}$ qui est monique donc pareil que le degré de $P = [K[\alpha] : K]$. □

Note 2. *Voir pq y contiennent tous $\mathfrak{m}_K$ c'était dans le dernier cours.*

On suppose tjr maintenant que $\tilde{\mathcal{O}_K}$ est finie sur $\mathcal{O}_K$.

Définition 3.2.2. $\mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_L$ une extension de d.v.r est non ramifiée si $\begin{cases} e = 1 \\ k_L/k \text{ est finie séparable} \end{cases}$ Dans le cas général, L/K est non ramifiée si $\mathcal{O}_K \to (\tilde{\mathcal{O}_K})_{\mathfrak{m}_i}$ est non ramifiée pour tout $\mathfrak{m} \subset \tilde{\mathcal{O}_K}$.

Topologiquement, ca ressemble à un revêtement.

Corollaire 3.2.3. *On suppose que $L = K[\alpha]$ et P le polynôme minimal de α est dans $\mathcal{O}_K[X]$ ainsi que $\bar{P}$ est séparable. Alors $\tilde{\mathcal{O}_K} = \mathcal{O}_K[\alpha]$ et L/K est non ramifiée (si k est parfait).*

Démonstration. On pose $B = \mathcal{O}_K[X]/(P(X)) \simeq \mathcal{O}_K[\alpha] \subset \tilde{\mathcal{O}}_K$. Alors $B \otimes_{\mathcal{O}_K} K = K[\alpha] = L$ est intégralement clos, le quotient $B/\mathfrak{m}_K B = k[X]/(\bar{P}(X))$ est réduit car $\bar{P}(X)$ est séparable. Par l'exercice 1 du td4, $B = \mathcal{O}_K[\alpha]$ est intégralement clos d'où l'égalité. Enfin par la prop précédente la séparabilité de $\bar{P}$ force $e_i = 1$. □

Exemple 11. On considère pour $p > 2 : \mathbb{Q}_p \to L = \mathbb{Q}_p[\zeta_p]$ avec $\zeta_p \in \mathbb{C}_p$. On note $\tilde{\mathbb{Q}}_p$ la clôture de $\mathbb{Z}_p$ dans L, c'est un d.v.r $\mathcal{O}_L$. On a $\lambda_p = \zeta_p - 1 \in \mathfrak{m}_L$ puis

$$(\lambda_p + 1)^p = 1$$

et

$$\mathfrak{m}_L^{p-1} \ni \lambda_p^{p-1} = p(-1 - \lambda_p c) \in \mathfrak{m}_L^e$$

avec $c \in \mathcal{O}_L$. Comme $\lambda_p \in \mathfrak{m}_L$, le terme à droite est inversible, on obtient $e_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}_p} \geq p - 1$. Comme $ef \leq [L : \mathbb{Q}_p] \leq p - 1$, $f = 1$ et on a pas de racines p-èmes de l'unité dans $\mathbb{Q}_p$.

Exemple 12. Si p est premier et n est premier à p. En notant $\phi_n(X)$ le n-ème polynôme cyclotomique et F_n le polynôme minimal de ζ_n sur $\mathbb{Q}_p$ on a $F_n \mid \phi_n$ d'où F_n est dans $\mathbb{Z}_p[X]$ monique car $\phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ est monique. En plus, $\bar{F}_n$ est séparable car ϕ_n l'est. En particulier $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}_p[\zeta_n]$ et est non ramifiée sur $\mathbb{Z}_p$ par le corollaire précédent.

3.3 Extensions monogènes

À rattraper : étant donné $K - L$ finie de corps valués discrets. Supp. $\mathcal{O}_K - \tilde{\mathcal{O}}_K$ est finie. Sous des hypothèses modestes, $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est monogène sur $\mathcal{O}_K$. Par exemple,

1. Si K est complet et L est totalement ramifiée ($[L : K] = e$, et l'extension résiduelle est triviale.). Alors $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\alpha]$ pour un α annulé par un polynôme d'Eisenstein ($v(a_i) > 0, v(a_0) = 1$). Si en plus L/K est modérée, ($e_{L/K} \wedge char(k) = 1$ ou $char(k) = 0$. On peut prendre $\alpha^n - \pi_K = 0$).

Lemme 3.3.1. *Si K est complet, et on a une extension*

$$\begin{array}{ccccc} K & \longrightarrow & & & L \\ \big| & & & & \big| \\ k & \longrightarrow & k' & \longrightarrow & k_L \end{array}$$

avec k'/k séparable. Alors il existe une unique extension $L/K'/K$ t.q $k_{K'} = k'$. Avec K'/K non ramifiée.

Lemme 3.3.2. *On prends maintenant $e'|e_{L/K}$, avec e' premier à $char(k)$. Avec $k_K - k_L$ purement inséparable. Alors il existe un lift unique $L/K'/K$ t.q. $k_K = k_{K'}$ et K'/K est de degré e' totalement ramifiée.*

Théoreme 3.3.3. *Soit K un corps complet et L/K finie. On considère*

$$\begin{array}{ccccc} K & & \longrightarrow & & L \\ | & & & & | \\ k & \xrightarrow[sep]{} & k' & \longrightarrow & k_L \end{array}$$

On a

1. *Pour tout $k' \subset k_L$ séparable sur k il existe une unique $K - K' - L$ une unique sous extension non ramifiée $K - K' - L$ de corps résiduel $= k'$.*

2. *Il existe une plus grande sous-extension non ramifiée $K \subset K^u \subset L$ de K.*

3. *Il existe une plus grande sous-extension modérément ramifiée de L.*

On obtient $K - K^{un} - K^{tam} - L$ avec $[L : K^{tam}]$ une puissance de p.

Preuve de 1.. **Existence** : on trouve un élément primitif de k'/k séparable finie. D'où $k' = k(\theta)$, on trouve $P \in \mathcal{O}_K[X]$ t.q θ est une racine de $\bar{P}$. Comme P irréd sur k. Alors irréd sur $\mathcal{O}_K$ (TD6). Comme $\bar{P}$ est séparable, en regardant $P \in \mathcal{O}_L[X]$ on peut lift θ par Hensel. Disons en α. On a en plus $K' = K[\alpha]/K$ et $\mathcal{O}_K[\alpha] = \mathcal{O}_{K'}$ car non ramifiée et $k' = k(\theta) = k_{K'}$.

Unicité : Si K''/K est une autre extension t.q $k_{K''} = k' = k(\theta)$. Alors θ lift en une racine $\alpha' \in K'' \subset L$. Le lemme dans Hensel dans L fournit le même $\alpha' = \alpha$. Maintenant K' et K'' ont la même dimension,

$$[K' : K] = [k' : k] = [K'' : K]$$

□

Preuve de 2.. Soit $k' = k^s$ la clôture séparable de k dans k_L. Alors on pose K^{un} l'unique extension non ramifiée t.q. $k_{K^{un}} = k^s$. Si $K - K' - L$ est une extension non ramifiée, alors $k \subset k_{K'} \subset k^s \subset k_L$. Il existe

$$K \subset K'' \subset K^{un}$$

t.q. $k_{K''} = k_{K'}$. On obtient deux sous-extensions non ramifiée de corps résiduels $k_{K'}$ on conclut par 1.. □

Preuve de 3.. On a tjr $e_{L/K} = e_{L/K^{un}}$. On supp $char(k) > 0$ sinon $K^{tam} = L$. Soit e' le plus grand diviseur de e non divisible par p. Par le lemme précédent on a

$$\begin{array}{ccccc} K^{un} & -e' \to & K^{tam} & \longrightarrow & L \\ \Big| & & & & \Big| \\ k^s & \longrightarrow & k^s & \longrightarrow & k_L \end{array}$$

On a K^{tam}/K^{un} est totalement modérément ramifiée. Et K^{un}/K est non ramifiée sur K. D'où K^{tam}/K est modérément ramifiée. On montre que c'est la plus grande, si on a F/K modérée et $F \subset L$ on considère F^{un}/K non ramfiée et remplacer F par F^{un}. On a $k_F = k^s$ et par 1. on obtient

$$K^{un} \subset F \subset L$$

par la preuve précédente le lift de θ le générateur K^{un} est dans F (on peut prendre le pol a coeff dans $\mathcal{O}_F[X]$.)

Maintenant la preuve découle de l'unicité dans le lemme précédent. □

Corollaire 3.3.4. *Soit L/K finie et K complet. On a*

$$\begin{array}{ccccccc} K & \xrightarrow[non\ ramifiee]{} & K^{un} & \xrightarrow[mod+tot]{} & K^{tam} & \xrightarrow[[L:K^{tam}]=p^r]{} & L \\ & & & & \Big| & & \Big| \\ & & & & k_{K^{tam}} & -tot\ insep \to & k_L \end{array}$$

Exemple 13. Soit $K = \mathbb{Q}_p$,$L = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})$ et $r \geq 1$. On a $\mathbb{Q}_p - \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ est modérément totalement ramifiée de degré $p-1$. Maintenant par l'exam

$$[L : \mathbb{Q}_p(\zeta_p)] = p^{r-1}$$

est sauvagement totalement ramifiée. On pouvait écrire explicitement $\lambda_{p^r}^{p^{r-1}} = \lambda_p(1+\epsilon)$ avec $1+\epsilon$ une unité.

On obtient $\mathbb{Q}_p^{un} = \mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{Q}_p^{tam} = \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$. Le polynôme d'Eisenstein est donné par

$$1 + \lambda_p = (1 + \lambda_{p^r})^{r-1}$$

3.4 Théorie de Galois

Si on a $L/F/K$ avec L/F galoisienne alors F/K est galoisienne ssi $Gal(L/K).F \subset F$. Et cette dernière condition fournie la suite exacte

$$1 \to Gal(L/F) \to Gal(L/K) \to Gal(F/K) \to 1$$

Maintenant L/K est normale ssi K^s/K est galoisienne. Et $Aut_K(L) = Gal(K^s/K)$. Aussi $K \subset L \subset \tilde{L}$ avec $\tilde{L}/K$ normale est galoisienne si L/K est séparable. Il existe de telles extensions minimales.

Maintenant si on regarde une extension galoisienne finie L/K et K de valuation discrète. Alors

$$\mathcal{O}_K \to \tilde{\mathcal{O}}_K$$

et finie et $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est semi-local de Dedekind. Maintenant $G = Gal(L/K)$ agit sur $Spm(\tilde{\mathcal{O}}_K)$ et on a

Proposition 3.4.1. *G agit transitivement sur $\tilde{\mathcal{O}}_K$.*

Lemme 3.4.2 (Lemme d'évitement)**.** *Soit A un anneau commutatif et $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ des idéaux premiers. Supp $\mathfrak{p}_1 \nsubseteq \mathfrak{p}_i$ pour tout $i \geq 2$. Alors $\mathfrak{p}_1 \nsubseteq \cup_i \mathfrak{p}_i$.*

Preuve du lemme. Dans le cas des idéaux maximaux, c'est un CRT direct. Le cas $n = 3$ est plutôt simple ? Sinon, par induction. □

Preuve de la proposition. On fixe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ et on suppose qu'il existe $\mathfrak{m}'$ t.q. $\mathfrak{m} \neq \sigma(\mathfrak{m}')$ pour tout σ. On obtient $x \in \mathfrak{m} - \cup\sigma(\mathfrak{m}')$. Maintenant $N_{L/K}(x) \in \mathfrak{m}_K \subset \mathfrak{m} \cap \sigma(\mathfrak{m}')$ d'où on a pour un $\mathfrak{m}'$, $\sigma_0(x) \in \mathfrak{m}'$ d'où $x \in \sigma_0^{-1}(\mathfrak{m}')$. Ce qui contredit l'hyptohèse. □

Définition 3.4.3. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $\tilde{\mathcal{O}}_K$, on définit $D_\mathfrak{m} = \{\sigma(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}\}$ le groupe de décom- position de $\mathfrak{m}$.

On remarque que $D_\mathfrak{m}$ agit sur $(\tilde{\mathcal{O}}_K)_\mathfrak{m}$ d'où sur le corps résiduel $\tilde{\mathcal{O}}_K/\mathfrak{m} =: k_\mathfrak{m}$. Si $\sigma \in D_\mathfrak{m}$ et $\alpha \in \tilde{\mathcal{O}}_K$ alors

$$\sigma(\bar{\alpha}) = \bar{(}\sigma(\alpha))$$

est bien défini. On obtient $D_\mathfrak{m} \to Aut_k(k_\mathfrak{m})$ et on note $I_\mathfrak{m}$ le noyau tel que

$$1 \to I_\mathfrak{m} \to D_\mathfrak{m} \to Aut_k(k_\mathfrak{m})$$

c'est le groupe d'inertie en $\mathfrak{m}$.

Corollaire 3.4.4. *Il existe une bijection entre les idéaux maximaux et les coset $G/D_\mathfrak{m}$ donnée par*

$$G \to Spm(\tilde{\mathcal{O}}_K)$$
$$\sigma \mapsto \sigma(\mathfrak{m})$$

Remarque 7. *Si $\sigma_0(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}'$ alors*

$$D_{\mathfrak{m}'} = \sigma_0 D_\mathfrak{m} \sigma_0^{-1}$$

et

$$I_{\mathfrak{m}'} = \sigma_0 I_\mathfrak{m} \sigma_0^{-1}$$

Corollaire 3.4.5. *Les indices de ramifications et les degrés résiduels sont égaux à tout les premiers.*

On va montrer qu'en fait

$$1 \to I_{\mathfrak{m}} \to D_{\mathfrak{m}} \to Aut_k(k_{\mathfrak{m}})$$

s'étend en

$$1 \to I_{\mathfrak{m}} \to D_{\mathfrak{m}} \to Aut_k(k_{\mathfrak{m}}) \to 1$$

Lemme 3.4.6. *L'extension $k_{\mathfrak{m}}/k$ est normale.*

Démonstration. On montre que pour tout $\theta \in k_{\mathfrak{m}}$, ses conjugués sont dans $k_{\mathfrak{m}}$. On lift en un α dans $\tilde{\mathcal{O}}_K$. G agit sur le polynôme min P d'où $P \in \mathcal{O}_K[X]$. Puis $\bar{P} \in k[X]$ (car unitaire). D'où le polynome minimal de θ divise P qui est split dans $k_{\mathfrak{m}}$ par réduction. □

Proposition 3.4.7. *On montre que la s.e.c est exacte.*

Démonstration. On a vu que $k_{\mathfrak{m}}/k$ est normale. On note $k_{\mathfrak{m}}^s$ la clôture séparable. Alors $k_{\mathfrak{m}}^s/k$ est galoisienne et $Aut_k(k_{\mathfrak{m}}) = Gal(k_{\mathfrak{m}}^s/k)$. On écrit $k_{\mathfrak{m}}^s = k[\theta]$. Soit $\tau \in Gal(k_{\mathfrak{m}}^s/k)$, τ est déterminé par $\tau(\theta)$. On note $r\colon D_{\mathfrak{m}} \to Aut_k(k_{\mathfrak{m}})$, on montre qu'il existe $\sigma \in D_{\mathfrak{m}}$ tq

$$r(\sigma)(\theta) = \tau(\theta)$$

. On lift θ en $\alpha \in \tilde{\mathcal{O}}_K$. Alors $r(\sigma)(\alpha) = \overline{\sigma(\alpha)}$.

On prends $P = \prod(X - \sigma(\alpha)) \in \mathcal{O}_K[X]$, et on a $\bar{P}(\theta) = 0$. Maintenant les conjugués de θ sont des racines de $\bar{P}$, qui sont des conjugués de α. On a $\tau(\theta) = \sigma(\alpha)$ pour un $\sigma \in G$, reste à trouver $\sigma \in D_{\mathfrak{m}}$. On peut le trouver en choisissant α mieux.

Plutôt que la flèche du haut dans

$$\tilde{\mathcal{O}}_K \longrightarrow k_{\mathfrak{m}}$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_K \longrightarrow \prod_{\mathfrak{m}} \tilde{\mathcal{O}}_K/\mathfrak{m}$$

on la factorise par la flèche du bas. Et on prends α tel que $\alpha = 0$ modulo les autres premiers. Reste à voir que les $\sigma \in G$ tels que $\overline{\sigma(\alpha)} = \tau(\theta)$ sont dans $D_{\mathfrak{m}}$. Par construction, $\alpha \in \mathfrak{m}'$ pour $\mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m}$. D'où si $\sigma \notin D_{\mathfrak{m}}$ alors $\sigma^{-1}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m}$ puis $\sigma^{-1}\sigma\alpha \in \mathfrak{m}'$, d'où $\sigma(\alpha) = 0 \mod \mathfrak{m}$. Ce qui est contradictoire si $k_{\mathfrak{m}}^s \neq k$. □

Maintenant on peut regarder la tour

$$K - L^{D_{\mathfrak{m}}} - L^{I_{\mathfrak{m}}} - L$$

et $\mathfrak{m}$ correspond a une valeur absolue de K à L, $|.|_{\mathfrak{m}}$. On note les deux restrictions par $|.|_D$ et $|.|_I$.

Théoreme 3.4.8. *On a*

1. $(K, |.|_K) - (L^D, |.|_D)$ *a indice de ramification* 1 *et une extension de corps résiduels trivial.*

2. $(L^D, |.|_D) - (L^I, |.|_I)$ *est non ramifiée et d'extension de corps résiduels* $k - k_{\mathfrak{m}}$.

3. $(L^I, |.|_I) - (L, |.|_L)$ *est d'indice de ramification* $|D_{\mathfrak{m}}|$ *et l'extension de corps résiduels est purement inséparable.*

Remarque 8. *L^I/K est alors non ramifiée et L^I/L^D est galoisienne non ramifiée.*

Théoreme 3.4.9. *On a les résultats suivants :*

1. $|.|_{\mathfrak{m}}$ *est l'unique extension de* $|.|_D$ *à* L *et*

$$L \otimes_{L^D} \widehat{(L^D, |.|_D)} \simeq \widehat{(L, |.|_{\mathfrak{m}})}$$

   en plus $\widehat{(L, |.|_{\mathfrak{m}})}$ *est galoisienne sur* $\widehat{(L^D, |.|_D)}$ *de groupe de Galois* D.

2. $(K, |.|_K) - (L^D, |.|_D)$ *a indice de ramification* 1 *et extension résiduelle triviale. Puis,*

$$\widehat{(K, |.|_K)} \simeq \widehat{(L^D, |.|_D)}$$

   c'est un exercice.

3. $(L^D, |.|_D) - (L^I, |.|_I)$ *est galoisienne, non ramifiée, d'extension résiduelle galoisienne de groupe de galois* D/I.

4. *L'extension résiduelle de* $(L^I, |.|_I) - (L, |.|_{\mathfrak{m}})$ *est purement inséparable et*

$$e_{(L,|.|_{\mathfrak{m}})/(L^I,|.|_I)} = e_{(L,|.|_{\mathfrak{m}})/K}$$

Démonstration. Pour 1., on sait que $L^D - L$ est de groupe de galois D et que D fixe $\mathfrak{m}_0$ par déf. On a prouvé que D agit transitivement sur les extensions de $|.|_D$ à L. D'où il y'a une seule extension $|.|_{\mathfrak{m}_0}$. Maintenant, la surjection canonique

$$L \otimes_K \to \prod L_i$$

où $L_i = \widehat{(L, |.|_i)}$. Maintenant par le point d'avant y'a qu'un seul $L_i = L_0$ pour :

$$L \otimes_{L^D} \widehat{L^D} \to \widehat{(L, |.|_{\mathfrak{m}})}$$

d'où à gauche c'est local, puis L est séparable sur L^D d'où c'est réduit. Maintenant à gauche c'est de dimension finie réduit et local sur un corps complet. Donc c'est un corps.

Exercices 3.4.10. Soit L/K galoisienne, et Ω une extension de K t.q. $L_\Omega := L \otimes_K \Omega$ est un corps. Alors

1. L_Ω/Ω est galoisienne et la flèche canonique

   $$\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(L_\Omega/\Omega)$$

   est un isomorphisme. Où $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ agit via $x \otimes y \mapsto \sigma(x) \otimes y$.

2. Pour toute extensions $K \subset F \subset L$:

   $$F \to F \otimes_K \Omega \subset L \otimes_K \Omega$$

   est une bijection entre

   $$\{\text{Sous-extensions de } L\} \leftrightarrow \{\text{Sous-extensions de } L \otimes_K \Omega\}$$

   t.q $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mathrm{Gal}(L \otimes_K \Omega / F \otimes_K \Omega)$.

   en admettant l'exercice on obtient

   $$D \simeq \mathrm{Gal}(L \otimes_{L^D} \widehat{L^D} / \widehat{L^D})$$

et $\widehat{L^D} - L \otimes_{L^D} \widehat{L^D}$.

Pour 2., on a $[L : K] = \sum e_i f_i$ et quand c'est galoisien $= (|G|/|D|) e_{L/K} f_{L/K}$. D'où pour $L^D - L$, on obtient $e_{L/K} f_{L/K} = |D| = [L : L^D] = e_{(L,|.|_{\mathfrak{m}})/L^D} f_{(L,|.|_{\mathfrak{m}})/L^D}$. En regardant $K - L^D - L$ et $e_{L/K} f_{L/K} = e_{L/L^D} e_{L^D/K} f_{L/L^D} f_{L^D/K}$ d'où $e_{L^D/K} f_{L^D/K} = 1$.

Pour 3./4., $L^I - L$ est galoisienne et dessus, $I = D$ d'où $Aut(k_{\mathfrak{m}}/k_I) = 1$ et $k_I - k_{\mathfrak{m}}$ est purement inséparable. Pareil $L^D - L^I$ est galoisienne de groupe

de galois $D/I \simeq Gal(k_{\mathfrak{m}}^s/k) = Aut(k_{\mathfrak{m}}/k)$ (avec $k_{\mathfrak{m}}^s$ la cloture de k dans $k_{\mathfrak{m}}$). Maintenant comme $k_I - k_{\mathfrak{m}}$ est purement inséparable d'où $k_{\mathfrak{m}}^s \subset k_I$. On a

$$[k_I : k] \geq [k_{\mathfrak{m}}^s : k] = |D/I| = [L^I : L^D] = e_{L^I/L^D}[k_I : k_D] = e_{L^I/L^D}[k_I : k]$$

d'où $e_{L^I/L^D} = 1$ puis $k_{\mathfrak{m}}^s = k_I$. On obtient 3.. Enfin pour 4., on a vu que l'extension résiduelle est purement inséparable et $e_{L/L^I} = e_{L/K}$. □

Remarque 9. *Garder $1 \to I \to D \to Aut(k_{\mathfrak{m}}/k) \to 1$ en tête.*

Remarque 10. *Dans le cas galoisien, $L^I = K^{un}$ dans $(L, |.|_{\mathfrak{m}})$ (pas facile). Aussi, si k est parfait alors $k_{\mathfrak{m}} = k_{\mathfrak{m}}^s$.*

Remarque 11. *Si D est distingué dans $Gal(L/K)$ alors $L^D - L^I$ est inerte et $K - L^D$ est split ($e = f = 1$)! Enfin, $K - L^I$ est la plus grande extension non ramifiée.*

Corollaire 3.4.11. *$K - (L, |.|_{\mathfrak{m}})$ est modérément ramifiée ssi $|I|$ est premier à $p = car(k)$. Ça implique que*

$$(L^I, |.|_I) - (L, |.|_{\mathfrak{m}})$$

est totalement ramifiée.

Démonstration. Dans

$$K - (L^I, |.|_I) - (L, |.|_{\mathfrak{m}})$$

l'extensio est modérément ramifiée ssi $(L^I, |.|_I) - L$ est modérément ramifiée et on conclut avec le dernier thm. □

Sachant qu'il donne les pdfs, jsp si ca vaut le coup de noter. Jvais commenter. Et noter les thms.

Théoreme 3.4.12. *Avec les notations d'avant,*

1. *si $char(k) = 0$, alors I est cyclique.*
2. *si $p = char(k) > 0$, on a*

$$1 \to P \to I \to T \to 1$$

avec T cyclique, $|T|$ premier à p est $|P| = p^m$ maximal.

en conséquence, P est l'unique p-Sylow de I. Unique car normal.

Ramification

Il utiliser le cas complet et $K - K^{tam} - L$. Critère galoisiens à revoir ! je calcule pas du tout assez. ni exos concrets.

Remarque 12. *Si L/K est galoisienne on a la décomposition :*

$$K - L^D - L^I - L^P - L$$

avec $L^I - L^P$ modérée et $L^P - L$ sauvage.

Maintenant c'est l'étude de P. On regarde une filtration

$$P = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots$$

Il suppose k parfait. D'où $L^D - L$ a extension résiduelle séparable. Et

$$\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_{L^D}[\alpha]$$

.

Définition 3.4.13. $G_{-1} = D$, $\mathfrak{m}_L \subset \mathcal{O}_L$. On pose

$$G_i := \ker(D \to Aut(\mathcal{O}_L/\mathfrak{m}_L^{i+1}))$$

on a $G_i = \{\sigma \in D | \sigma(x) - x \in \mathfrak{m}_L^{i+1}\}$. Par déf $G_0 = I$.

Lemme 3.4.14. *$\sigma \in G_i$ ssi $\sigma(\alpha) - \alpha \in \mathfrak{m}_L^{i+1}$.*

On définit

Définition 3.4.15. $U^{(0)} = \mathcal{O}_L^*$ et $U^{(i)} = 1 + \mathfrak{m}_L^i$.

Proposition 3.4.16. *Pour tout $i \geq 0$,*

$$G_i/G_{i+1} \hookrightarrow U^{(i)}/U^{(i+1)} \simeq k$$

Corollaire 3.4.17. *On a*

1. *G_0/G_1 est cyclique d'ordre premier à p.*
2. *$G_i/G_{i+1} \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_i}$ pour tout $i \geq 1$.*

Proposition 3.4.18. *On a $G_i = \{1\}$ pour $i >> 1$.*

Note 3. *On note $i_G(\sigma) = v_L(\sigma(\alpha) - \alpha)$. Pour $K = L^I$ et $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\alpha]$. Avec $\sigma \neq 1$.*

Chapitre 4

Deux applications au cas global

IL va parler de

1. Hauteurs sur $\mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{Q}})$.
2. Riemann-Hurwitz.

4.1 Hauteurs sur $\mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{Q}})$

On peut écrire $x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ comme un tuple primitif dans $\mathbb{Z}$. On définit ensuite

$$x = [x_1, \ldots, x_n] \mapsto H(x) = \max |x_i| > 0$$

On fixe $B \in \mathbb{R}$, alors

$$\{P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q}) | H(P) \leq B\}$$

est fini.

Remarque 13. *Pour $r \in \mathbb{Q}^*$, on a la formule du produit*

$$|r|_\infty \prod_p |r|_p = 1$$

pour les valeurs absolues normalisées.

Soit maintenant $M_\mathbb{Q}$ les places normalisées de $\mathbb{Q}$, on déf

$$H(P) = \prod_{v \in M_\mathbb{Q}} sup_i\{|P_i|_v\}$$

avec cette fois $P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$. Alors $H(P)$ est bien défini. On veut étendre la définition à d'autres corps.

Définition 4.1.1. Pour un corps K, un ensemble de valeurs absolues M_K non équivalentes, et un ensemble $\lambda_v > 0$ on dit que $(K, M_K, \{\lambda_v\}_v)$ vérifie la formule du produit si

1. $|x|_v = 1$ pour tout $v \in M_K$ sauf un nb fini.
2. Il y'a qu'un nombre fini de valeurs absolues archimédiennes $v \in M_K$.
3. $\forall x \in K^*$, $\prod_{v \in M_K} ||x||_v = 1$ où $||x||_v = |x|_v^{\lambda_v}$.

Étend donné $(K, M_K, \{\lambda_v\}_v)$ qui satisfait la formule du produit, et L/K finie séparable. On peut définir naturellement $(L, M_L, \{\lambda_w\}_w)$ satisfaisant la formule du produit via

1. Pour tout $v \in M_v$, on prends les $w_i|v$.
2. On modifie $|.|_w$ via

$$L \otimes_K \widehat{(K, v)} \simeq \prod_{i=1}^{r} \widehat{(L, w_i)}$$

et sur L_{w_i}/K_v on déf

$$||x||_w := ||N_{L_w/K_v}(x)||_v^{1/d}$$

où $d = [L : K]$ et $||.||_v$ c'est $|.|_v^{\lambda_v}$. Pour rappel on avait $|x|_w = |N_{L_w/K_v}(x)|_v^{1/[L_w:K_v]}$. On obtient

$$||x||_w = (|x|_w^{[L_w:L_v]/d})^{\lambda_v} = |x|_w^{\lambda_w}$$

Lemme 4.1.2. *On a*

1. *Pour $x \in L$, $v \in M_K$:*

$$\prod_{w|v} ||x||_w = ||N_{L/K}(x)||_v^{1/d}$$

2. $\prod_{w \in M_L} ||x||_w = 1$.
3. $(L, M_L, \{\lambda_w\}_w)$ *satisfait la formule du produit.*