

# (co)-Homologie (des faisceaux)

2023-2024



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Faisceaux</b>	<b>7</b>
1.1	Définitions . . . . .	7
1.2	Faisceautisation . . . . .	8
1.3	Faisceau localement constant . . . . .	9
1.4	Suites exactes de faisceaux . . . . .	9
1.5	Images directes et inverses de faisceaux . . . . .	10

## *TABLE DES MATIÈRES*

# Introduction

Le but ca va être la cohomologie des faisceaux et les théorèmes de changement de base propres (pas comme dans [\[Mum70\]](#)).

## *TABLE DES MATIÈRES*

# Chapitre 1

## Faisceaux

### 1.1 Définitions

On parle d'espaces topologiques. Soit  $X$  un e.t.

**Définition 1.1.1** (Préfaisceau abélien). Pour l'instant c'est un faisceau en groupe abélien.

**Remarque 1.** Soit  $\mathcal{P}$  un faisceau en groupes abéliens. Soit  $U = \bigcup_i U_i$  un recouvrement ouvert on peut définir la séquence

$$0 \rightarrow \mathcal{P}(U) \rightarrow \prod_i \mathcal{P}(U_i) \rightarrow \prod_{(i,j)} \mathcal{P}(U_i \cap U_j)$$

où la première flèche est la restriction et la deuxième la différence  $(s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j}$ . C'est une suite exacte parce que si on appelle  $d_0$  et  $d_1$  les deux flèches :

$$(s|_{U_i}|_{U_i \cap U_j} - s|_{U_j}|_{U_i \cap U_j})$$

Ca mesure si une section est globale! En particulier ça axiomatise les faisceaux :

- La condition  $\ker(d^1) = \text{Im}(d^0)$  équivaut au gluing de sections locales.
- La condition  $\ker(d^0) = 0$  équivaut à l'unicité des sections.

On appelle  $C(\bigcup_i U_i, \mathcal{P})$  la suite exacte du dessus.

**Définition 1.1.2.** On définit la fibre (stalk) en  $x \in X$  pour un préfaisceau  $\mathcal{P}$  par

$$\mathcal{P}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{P}(U)$$

et on a

$$\mathcal{P}_x = \sqcup_{x \in U} \mathcal{P}(U) / \sim$$

où la relation c'est la relation de coïncider sur une restriction. On a les germes de sections comme d'habitude qu'on note par  $s_x$ .

**Théoreme 1.1.3.** *Une flèche de faisceaux  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est un isomorphisme ssi la flèche induite sur les fibres sont des isomorphismes.*

*Preuve. À faire!* □

**Définition 1.1.4** (Support d'une section d'un faisceau). Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau sur  $X$ . On définit  $\text{Supp}_U(s) := \{s \in U \mid s_x \neq 0\}$

**Exercices 1.1.5.** Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau abélien, montrer que le support d'une section  $s$  est fermé. Faut juste montrer que  $s_x$  vaut zéro même en élargissant à un petit ouvert autour de  $x$ , c'est évident en fait.

**Remarque 2.** *Le foncteur d'oubli  $Sh(X) \rightarrow PreSh(X)$  est pleinement fidèle. Au sens où les morphismes sont les mêmes par définition.*

## 1.2 Faisceautisation

Il a l'air de l'avoir fait avec l'espace étalé. Bon je peux garder ma déf habituelle.

**Définition 1.2.1** (Faisceautisé). Pour un préfaisceau  $\mathcal{F}$  sur  $X$  on définit  $\mathcal{F}^+(U) := \{f_P \in \prod_{P \in \mathcal{F}(U)} \mathcal{F}_P \mid \forall P \exists V_P, t \in \mathcal{F}(V_P) t_P = f_P \forall Q \in V_P t_Q = f_Q\}$

**Remarque 3.** *En ajoutant les restrictions induites le préfaisceau  $\mathcal{F}^+$  est un faisceau.*

**Remarque 4.** *Il faut utiliser des sections non locales de  $\mathcal{F}$  simplement parce que avoir les mêmes fibres à isomorphisme de permet pas nécessairement de relever de manière cohérente.*

On définit  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$  par la diagonale.

**Théoreme 1.2.2** (Propriété universelle). *Soit  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  un morphisme de préfaisceaux où  $\mathcal{G}$  est un faisceau. Alors le morphisme se factorise en*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}^+ \\ & \searrow & \downarrow \text{---} \\ & & \mathcal{G} \end{array}$$

*et la flèche  $\mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$  est unique.*



## Faisceaux

*Démonstration.* L'idée c'est qu'on  $\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}^+$  et on a tjr une flèche  $\mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$ .  $\square$

**Remarque 5.** *Le foncteur de faisceautisation est exact.*

**Remarque 6.** *Ce serait bien de refaire les preuves rien qu'une fois!*

**Remarque 7** (Traduction en terme d'espace étalé). *En gros l'espace étalé c'est les fonctions de  $U$  dans  $\bigsqcup_P \mathcal{F}_P$ . Autrement dit  $\prod_{P \in U} \mathcal{F}_P$ . Et on demande de la continuité. En gros y'a une fonction continue force des conditions de recollement.*

## 1.3 Faisceau localement constant

Soit  $X$  un espace topologique et  $A$  un "objet abélien". On définit le préfaisceau constant par

$$A_X^{pre}(U) = A$$

pour tout ouvert  $U \subset X$ . On définit ensuite le faisceau localement constant associé à  $A$  par  $A_X$ .

**Remarque 8. (1)** *L'exemple canonique du fait que  $A_X^{pre}$  c'est pas un faisceau c'est  $A_X(\emptyset) = A$ .*

**(2)** *On peut prendre  $U_1 \sqcup U_2$  et regarder la section  $(0, p_2)$ . Elle lift pas vu que les restrictions sont par déf l'identité.*

**Proposition 1.3.1.** *On a  $A_X(U) = A^{\pi_0(U)}$ ! Où  $\pi_0(U)$  compte les composantes connexes. (Attention faut quand même qu'elles soient ouvertes?!)*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{P} = A_X^{pre}$ . On a  $\mathcal{P}_P = \varinjlim_{P \in U} P(U) = \varinjlim_{P \in U} A = A$ . Ensuite faut écrire  $X = \bigsqcup X_i$ . Puis montrer que  $\mathcal{P}^+(X_i) = A$ . Ensuite clairement par propriété universelle du produit on a fini.  $\square$

## 1.4 Suites exactes de faisceaux

On considère  $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  un morphisme de faisceaux abéliens.

**Proposition 1.4.1** (Faisceau noyau). *Le préfaisceau donné par  $\ker(\alpha)(U) = \ker(\alpha: \mathcal{F}U \rightarrow \mathcal{G}U)$  est un faisceau.*

**Définition 1.4.2** (Faisceau image). On définit le préfaisceau image par  $U \mapsto \text{Im}^{pre}(\alpha: \mathcal{F}U \rightarrow \mathcal{G}U)$ .

## 1.5 Images directes et inverses de faisceaux

**Remarque 9.** En général c'est pas un faisceau donc on déf  $\text{Im}(\alpha)$  le faisceau associé.

**Remarque 10. À faire!** Injection canonique des faisceaux  $\text{Im}$  et  $\text{ker}$ .

**Définition 1.4.3** (Faisceau quotient). À nouveau on faisceautise le préfaisceau quotient.

**Remarque 11.** La faisceautisation commute avec les fibres. De sorte que le quotient des fibres est la fibre des quotients.

**Définition 1.4.4** (Suite exacte de faisceaux abéliens). Une suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\rho} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

est exacte si on a les conditions habituelles **d'égalités** en tant que faisceaux.

**Proposition 1.4.5.** Suffit d'avoir des suites exactes sur les fibres avec les flèches induites.

Maintenant on arrive au croustillant. Si on a une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\rho} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

on peut montrer que  $0 \rightarrow \mathcal{F}'(X) \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}''(X)$  est exacte. Mais la dernière flèche est pas nécessairement surjective.

**Exemple 1.4.6.** Soit  $X = \mathbb{C}^\times$  et  $\mathcal{O}_X$  le faisceau des fonctions holomorphes. Alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow (2i\pi\mathbb{Z})_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow 0$$

où la première flèche est celle donnant les fonctions constantes. La deuxième est la post-composition avec l'exponentielle.

**Remarque 12.** Dans la suite exacte de faisceaux on a pas besoin de la surjectivité de la dernière flèche.

## 1.5 Images directes et inverses de faisceaux

Soit  $f: X \rightarrow Y$  une application continue. On a

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \mathcal{G} \\ & \uparrow & \downarrow \\ f: X & \longrightarrow & Y \\ & \downarrow & \uparrow \\ & f^*\mathcal{G} & f_*\mathcal{F} \end{array}$$

## Faisceaux

**Définition 1.5.1** (Image directe).

$$f_*\mathcal{F}: \text{Ouv}(Y)^{op} \rightarrow \text{Ab}$$

$$\text{t.q. } f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}V).$$

**Remarque 13.** C'est un faisceau si  $\mathcal{F}$  est un faisceau, suffit de voir que  $f^{-1}V = \cup f^{-1}V_i$  si  $V = \cup V_i$ .

**Définition 1.5.2** (Image inverse).

$$f^p\mathcal{F}: \text{Ouv}(X)^{op} \rightarrow \text{Ab}$$

$$\text{t.q. } f^p\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{f(U) \subset V} \mathcal{G}(V). \text{ On déf ensuite } f^* = (f^p)^+ \text{ le faisceau associé.}$$

**Exemple 1.5.3** (Contre exemple pour  $f^p$  est un faisceau). Si on pullback un faisceau constant sur le singleton  $\{*\}$  on obtient un préfaisceau constant!

**Exercices 1.5.4.** Revoir l'adjonction entre  $(-)^*$  et  $(-)_*$  et revoir le fait que c'est des foncteurs.

**Note 1.** Revoir comment obtenir les flèches de stalks.

**Proposition 1.5.5.** Pour tout  $x \in X$ ,

$$(f^*\mathcal{G})_x \simeq \mathcal{G}_{f(x)}$$

*Démonstration.* Soit  $x \in X$ ,

$$\begin{aligned} (f^*\mathcal{G})_x &\simeq (f^p\mathcal{G})_x \\ &\simeq \varinjlim_{x \in U \subset X} (f^p\mathcal{G})(U) \\ &\simeq \varinjlim_{x \in U \subset X} \varinjlim_{f(U) \subset V \subset Y} \mathcal{G}(V) \\ &\simeq \varinjlim_{f(x) \in V \subset Y} \mathcal{G}(V) \\ &\simeq \mathcal{G}_{f(x)} \end{aligned}$$

□

**Remarque 14. Rappel :** On peut regarder explicitement les limites et colimites on est dans  $\text{Ab}$ . Via des quotients!

## 1.5 Images directes et inverses de faisceaux

**Remarque 15.** On peut voir un faisceau  $f^*\mathcal{G}$  sur  $X$  comme un espace étalé sur  $X$ . On considère  $\tilde{\mathcal{G}}$  l'espace étalé

$$\tilde{\mathcal{G}} \rightarrow Y$$

on peut regarder le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y \tilde{\mathcal{G}} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{G}} \\ \text{Homéo local} \downarrow & & \downarrow \text{Homéo local} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Alors  $f^*\tilde{\mathcal{G}} \simeq X \times_Y \tilde{\mathcal{G}}$  au dessus de  $X$ .

**Corollaire 1.5.6.**  $f^*: Sh_{Ab}(Y) \rightarrow Sh_{Ab}(X)$  est exact.

*Démonstration.* Étant donné  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  une suite exacte. On peut regarder directement sur les stalks et c'est clair.  $\square$

**Remarque 16.** Étant donné  $X = \{*\}$ , un faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $X$  est de la forme  $A_X$  un faisceau constant. On a alors une équivalence de catégorie

$$Sh_{Ab}(X) \simeq Ab$$

et même un isomorphisme. On a un pont pour envoyer des objets abéliens dans des faisceaux.

**Corollaire 1.5.7.** Soit  $X$  un e.t,  $x \in X$  et  $\mathcal{F}$  un faisceau abélien sur  $X$ . On note  $\iota_x: \{x\} \rightarrow X$ , alors  $\iota_x^*\mathcal{F}$  est le faisceau constant associé à  $\mathcal{F}_x$  sur  $\{x\}$ .

**Exercices 1.5.8** (Faisceau gratte-ciel). Sur un e.t  $X$  et  $x \in X$ ,  $A \in Ab$ . On définit

$$A_{\bar{x}}(U) = \begin{cases} A & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que c'est un faisceau avec les restrictions évidentes.

Montrer que

$$(A_{\bar{x}})_y = \begin{cases} A & \text{si } y \in \{\bar{x}\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit  $A_{\{\bar{x}\}}$  le faisceau constant sur  $\{\bar{x}\}$ . Montrer que  $\iota_* A_{\{\bar{x}\}} \simeq A_{\bar{x}}$ .  
D'après Fabrice le faisceau gratte ciel est une co-unité.

*Faisceaux*

**Définition 1.5.9.** On regarde  $f_P: PSh_{Ab}(X) \rightarrow PSh_{Ab}(Y)$  qui à  $\mathcal{F}$  associe  $(V \mapsto \mathcal{F}f^{-1}V)$ .

**Remarque 17.** On a un carré commutatif de catégories (foncteurs diagonaux isomorphes)

$$\begin{array}{ccc} Sh_{Ab}(X) & \xrightarrow{\iota_X} & PSh_{Ab}(X) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_P \\ Sh_{Ab}(Y) & \xrightarrow{\iota_Y} & PSh_{Ab}(Y) \end{array}$$

**Proposition 1.5.10.** On a une adjonction  $f^P: PSh(Y) \leftrightarrow PSh(X): f_P$ .

*Démonstration.* On doit donner un isomorphisme (d'ensembles)

$$\text{Hom}_{PSh(X)}(f^P\mathcal{G}; \mathcal{F}) \simeq \text{Hom}_{PSh(Y)}(\mathcal{G}; f_P\mathcal{F})$$

fonctoriel en  $\mathcal{F} \in PSh(X)$  et  $\mathcal{G} \in PSh(Y)$  (l'adjoint à gauche est à gauche). Étant donné  $\alpha: \mathcal{G} \rightarrow f_P\mathcal{F}$ , on a pour tout  $V$

$$\alpha(V): \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}f^{-1}V$$

et pour tout  $U$  tel que  $f(U) \subset V$  on a une flèche

$$\mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

et on cherche  $f^P\mathcal{G}U \rightarrow \mathcal{F}U$ . Suffit de prendre la limite du diagramme du haut pour l'obtenir, on peut car  $U \subset f^{-1}V$ .

À l'inverse si on a  $\beta: f^P\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  et qu'on veut des  $\mathcal{G}V \rightarrow \mathcal{F}f^{-1}V$ , on pose  $U = f^{-1}V$ , on a

$$\lim_{f(f^{-1}V) \subset W} \mathcal{G}W \rightarrow \mathcal{F}f^{-1}V$$

puis comme  $f(f^{-1}V) \subset V$  on a

$$\mathcal{G}V \rightarrow \lim_{f(f^{-1}V) \subset W} \mathcal{G}W$$

d'où  $\mathcal{G}V \rightarrow \mathcal{F}f^{-1}V$ . □

Par la remarque plus haut et celle juste en dessous on obtient la même adjonction sur les faisceaux.

## 1.5 Images directes et inverses de faisceaux

**Remarque 18.** *La faisceautisation est adjointe à l'inclusion! (c'est la propriété universelle directement)*

**Proposition 1.5.11.** *On a une adjonction  $f^*: Sh(Y) \leftrightarrow Sh(X): f_*$ .*

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
 \mathrm{Hom}_{Sh(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) &= \mathrm{Hom}_{Sh(X)}((f^p\mathcal{G})^+, \mathcal{F}) \\
 &= \mathrm{Hom}_{PSh(X)}(f^p\mathcal{G}, \iota_X \mathcal{F} (= \mathcal{F})) \\
 &= \mathrm{Hom}_{PSh(Y)}(\mathcal{G}, f_P \mathcal{F}) \\
 &= \mathrm{Hom}_{Sh(Y)}(\mathcal{G}, f_* \mathcal{F})
 \end{aligned}$$

□

**Proposition 1.5.12.** *Soit  $f: X \rightarrow Y$  et  $g: Y \rightarrow Z$ . Alors on a des isomorphismes canoniques  $(g \circ f)_* \simeq g_* \circ f_*$  et  $(g \circ f)^* \simeq f^* \circ g^*$ .*

$$\begin{array}{ccc}
 Sh_{Ab}(X) & \xleftarrow{f^*} & Sh_{Ab}(Y) \\
 & \xrightarrow{f_*} & \\
 & \searrow (g \circ f)_* & \downarrow g_* \quad \downarrow g^* \\
 & \swarrow (g \circ f)^* & Sh_{Ab}(Z)
 \end{array}$$

*Démonstration.* Pour  $(-)_*$  c'est clair via  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$ . Ensuite on peut faire  $(-)^*$  via l'adjonction mdr. L'adjoint à gauche de  $g_* \circ f_*$  est  $f^* \circ g^*$  puis unicité. □

# Bibliographie

- [Mum70] D. MUMFORD. *Abelian Varieties*. Biblioteka Sbornika "Matematika". Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970. ISBN : 9780195605280.