(co)-Homologie (des faisceaux)

2023-2024

Table des matières

Introduction

Le but ca va être la cohomologie des faisceaux et les théorèmes de changement de base propres (pas comme dans [Mum70]).

Chapitre 1

Faisceaux

1.1 Définitions

On parle d'espaces topologiques. Soit X un e.t.

Définition 1.1.1 (Préfaisceau abélien)**.** Pour l'instant c'est un faisceau en groupe abélien.

Remarque 1. *Soit $\mathscr{P}$ un faisceau en groupes abéliens. Soit $U = \bigcup_i U_i$ un recouvrement ouvert on peut définir la séquence*

$$0 \to \mathscr{P}(U) \to \prod_i \mathscr{P}(U_i) \to \prod_{(i,j)} \mathscr{P}(U_i \cap U_j)$$

où la premier flèche est la restriction et la deuxième la différence $(s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j}$. C'est une suite exacte parce que si on appelle d_0 et d_1 les deux flèches :

$$(s|_{U_i}|_{U_i \cap U_j} - s|_{U_j}|_{U_i \cap U_j})$$

Ca mesure si une section est globale! En particulier ca axiomatise les faisceaux :

- *La condition* $\ker(d^1) = Im(d^0)$ *équivaut au gluing de sections locales.*
- *La condition* $\ker(d^0) = 0$ *équivaut à l'unicité des sections.*

On appelle $C(\bigcup_i U_i, \mathscr{P})$ la suite exacte du dessus.

Définition 1.1.2. On définit la fibre (stalk) en $x \in X$ pour un préfaisceau $\mathscr{P}$ par

$$\mathscr{P}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathscr{P}(U)$$

et on a

$$\mathscr{P}_x = \sqcup_{x\in U} \mathscr{P}(U)/\sim$$

où la relation c'est la relation de coincider sur une restriction. On a les germes de sections comme d'habitude qu'on note par s_x.

Théoreme 1.1.3. *Une flèche de faisceaux $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un isomorphisme ssi la flèche induite sur les fibres sont des isomorphismes.*

Preuve. **À faire!** □

Définition 1.1.4 (Support d'une section d'un faisceau)**.** Soit $\mathscr{F}$ un faisceau sur X. On définit $\mathrm{Supp}_U(s) := \{s \in U | s_x \neq 0\}$

Exercices 1.1.5. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau abélien, montrer que le support d'une section s est fermé. Faut juste montrer que s_x vaut zéro même en élargissant à un petit ouvert autour de x, c'est évident en fait.

Remarque 2. *Le foncteur d'oubli $Sh(X) \to PreSh(X)$ est pleinement fidèle. Au sens où les morphismes sont les mêmes par définition.*

1.2 Faisceautisation

Il a l'air de l'avoir fait avec l'espace étalé. Bon je peux garder ma déf habituelle.

Définition 1.2.1 (Faisceautisé)**.** Pour un préfaisceau $\mathscr{F}$ sur X on définit $\mathscr{F}^+(U) := \{f_P \in \prod_{P\in\mathscr{F}(U)} \mathscr{F}_P | \forall P \exists V_P,\ t \in \mathscr{F}(V_p)\ t_P = f_P \forall Q \in V_P\ t_Q = f_Q\}$

Remarque 3. *En ajoutant les restrictions induites le préfaisceau $\mathscr{F}^+$ est un faisceau.*

Remarque 4. *Il faut utiliser des sections non locales de $\mathscr{F}$ simplement parce que avoir les mêmes fibres à isomorphisme de permet pas nécessairement de relever de manière cohérente.*

On définit $\mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$ par la diagonale.

Théoreme 1.2.2 (Propriété universelle)**.** *Soit $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme de préfaisceaux où $\mathscr{G}$ est un faisceau. Alors le morphisme se factorise en*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathscr{F}^+ \arrow[d, dashed] \\ & \mathscr{G} \end{tikzcd}$$

et la flèche $\mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$ est unique.

Démonstration. L'idée c'est qu'on $\mathscr{G} \simeq \mathscr{G}^+$ et on a tjr une flèche $\mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}^+$. $\square$

Remarque 5. *Le foncteur de faisceautisation est exact.*

Remarque 6. *Ce serait bien de refaire les preuves rien qu'une fois**1**.*

Remarque 7 (Traduction en terme d'espace étalé)**.** *En gros l'espace étalé c'est les fonctions de U dans $\bigsqcup_P \mathscr{F}_P$. Autrement dit $\prod_{P\in U} \mathscr{F}_P$. Et on demande de la continuité. En gros y'a une fonction continue force des conditions de recollement.*

1.3 Faisceau localement constant

Soit X un espace topologique et A un *"objet abélien"*. On définit le préfaisceau constant par

$$A_X^{pre}(U) = A$$

pour tout ouvert $U \subset X$. On définit ensuite le faisceau localement constant associé à A par A_X.

Remarque 8. ***(1)*** *L'exemple canonique du fait que A_X^{pre} c'est pas un faisceau c'est $A_X(\emptyset) = A$.*
(2) *On peut prendre $U_1 \sqcup U_2$ et regarder la section $(0, p_2)$. Elle lift pas vu que les restrictions sont par déf l'identité.*

Proposition 1.3.1. *On a $A_X(U) = A^{\pi_0(U)}$! Où $\pi_0(U)$ compte les composantes connexes. (Attention faut quand même qu'elles soient ouvertes?!)*

Démonstration. Soit $\mathscr{P} = A_X^{pre}$. On a $\mathscr{P}_P = \varinjlim_{P\in U} P(U) = \varinjlim_{P\in U} A = A$. Ensuite faut écrire $X = \bigsqcup X_i$. Puis montrer que $\mathscr{P}^+(X_i) = A$. Ensuite clairement par propriété universelle du produit on a fini. $\square$

1.4 Suites exactes de faisceaux

On considère $\alpha\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme de faisceaux abéliens.

Proposition 1.4.1 (Faisceau noyau)**.** *Le préfaisceau donné par* $\ker(\alpha)(U) = \ker(\alpha\colon \mathscr{F}U \to \mathscr{G}U)$ *est un faisceau.*

Définition 1.4.2 (Faisceau image)**.** On définit le préfaisceau image par $U \mapsto \mathrm{Im}^{pre}(\alpha\colon \mathscr{F}U \to \mathscr{G}U)$.

Remarque 9. *En général c'est pas un faisceau donc on déf Im(α) le faisceau associé.*

Remarque 10. ***À faire!*** *Injection canonique des faisceaux Im et ker.*

Définition 1.4.3 (Faisceau quotient)**.** À nouveau on faisceautise le préfaisceau quotient.

Remarque 11. *La faisceautisation commute avec les fibres. De sorte que le quotient des fibres est la fibre des quotients.*

Définition 1.4.4 (Suite exacte de faisceaux abéliens)**.** Une suite

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F} \xrightarrow{\rho} \mathscr{F}'' \longrightarrow 0$$

est exacte si on a les conditions habituelles **d'égalités** en tant que faisceaux.

Proposition 1.4.5. *Suffit d'avoir des suites exactes sur les fibres avec les flèches induites.*

Maintenant on arrive au croustillant. Si on a une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F} \xrightarrow{\rho} \mathscr{F}'' \longrightarrow 0$$

on peut montrer que $0 \to \mathscr{F}'(X) \to \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}''(X)$ est exacte. Mais la dernière flèche est pas nécessairement surjective.

Exemple 1.4.6. Soit $X = \mathbb{C}^\times$ et $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes. Alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow (2i\pi\mathbb{Z})_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{exp} \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow 0$$

où la première flèche est celle donnant les fonctions constantes. La deuxième est la post-composition avec l'exponentielle.

Remarque 12. *Dans la suite exacte de faisceaux on a pas besoin de la surjectivité de la dernière flèche.*

1.5 Images directes et inverses de faisceaux

Soit $f\colon X \to Y$ une application continue. On a

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} & & \mathscr{G} \arrow[dd, bend left] \\
f\colon X \arrow[rr] & & Y \\
f^*\mathscr{G} \arrow[uu, bend left] & & f_*\mathscr{F}
\end{tikzcd}$$

Définition 1.5.1 (Image directe)**.**

$$f_*\mathscr{F} : Ouv(Y)^{op} \to Ab$$

t.q $f_*\mathscr{F}(V) = \mathscr{F}(f^{-1}V)$.

Remarque 13. *C'est un faisceau si $\mathscr{F}$ est un faisceau, suffit de voir que $f^{-1}V = \cup f^{-1}V_i$ si $V = \cup V_i$.*

Définition 1.5.2 (Image inverse)**.**

$$f^p\mathscr{F} : Ouv(X)^{op} \to Ab$$

t.q $f^p\mathscr{G}(U) = \varinjlim_{f(U)\subset V} \mathscr{G}(V)$. On déf ensuite $f^* = (f^p)^+$ le faisceau associé.

Exemple 1.5.3 (Contre exemple pour f^P est un faisceau)**.** Si on pullback un faisceau constant sur le singleton $\{*\}$ on obtient un préfaisceau constant!

Exercices 1.5.4. Revoir l'adjonction entre $(\_)^*$ et $(\_)_*$ et revoir le fait que c'est des foncteurs.

Note 1. *Revoir comment obtenir les flèches de stalks.*

Proposition 1.5.5. *Pour tout $x \in X$,*

$$(f^*\mathscr{G})_x \simeq \mathscr{G}_{f(x)}$$

Démonstration. Soit $x \in X$,

$$\begin{aligned}
(f^*\mathscr{G})_x &\simeq (f^P\mathscr{G})_x \\
&\simeq \varinjlim_{x\in U\subset X} (f^P\mathscr{G})(U) \\
&\simeq \varinjlim_{x\in U\subset X} \varinjlim_{f(U)\subset V\subset Y} \mathscr{G}(V) \\
&\simeq \varinjlim_{f(x)\in V\subset Y} \mathscr{G}(V) \\
&\simeq \mathscr{G}_{f(x)}
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque 14. ***Rappel :*** *On peut regarder explicitement les limites et colimites on est dans Ab. Via des quotients!*

Remarque 15. *On peut voir un faisceau $f^*\mathscr{G}$ sur X comme un espace étalé sur X. On considère $\tilde{\mathscr{G}}$ l'espace étalé*

$$\tilde{\mathscr{G}} \to Y$$

on peut regarder le produit fibré

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y \tilde{\mathscr{G}} \arrow[r] \arrow[d, "\text{Homéo local}"'] & \tilde{\mathscr{G}} \arrow[d, "\text{Homéo local}"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Alors $\widetilde{f^*\mathscr{G}} \simeq X \times_Y \tilde{\mathscr{G}}$ au dessus de X.

Corollaire 1.5.6. *$f^*\colon Sh_{Ab}(Y) \to Sh_{Ab}(X)$ est exact.*

Démonstration. Étant donné $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ une suite exacte. On peut regarder directement sur les stalks et c'est clair. □

Remarque 16. *Étant donné $X = \{*\}$, un faisceau $\mathscr{F}$ sur X est de la forme A_X un faisceau constant. On a alors une équivalence de catégorie*

$$Sh_{Ab}(X) \simeq Ab$$

et même un isomorphisme. On a un pont pour envoyer des objets abéliens dans des faisceaux.

Corollaire 1.5.7. *Soit X un e.t, $x \in X$ et $\mathscr{F}$ un faisceau abélien sur X. On note $\iota_x\colon \{x\} \to X$, alors $\iota_x^*\mathscr{F}$ est le faisceau constant associé à $\mathscr{F}_x$ sur $\{x\}$.*

Exercices 1.5.8 (Faisceau gratte-ciel)**.** Sur un e.t X et $x \in X$, $A \in Ab$. On définit

$$A_{\bar{x}}(U) = \begin{cases} A \text{ si } x \in U \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrer que c'est un faisceau avec les restrictions évidentes.
Montrer que

$$(A_{\bar{x}})_y = \begin{cases} A \text{ si } y \in \bar{\{x\}} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Soit $A_{\bar{\{x\}}}$ le faisceau constant sur $\bar{\{x\}}$. Montrer que $\iota_* A_{\bar{\{x\}}} \simeq A_{\bar{x}}$.
D'après Fabrice le faisceau gratte ciel est une co-unité.

Définition 1.5.9. On regarde $f_P\colon PSh_{Ab}(X) \to PSh_{Ab}(Y)$ qui à $\mathscr{F}$ associe $(V \mapsto \mathscr{F} f^{-1}V)$.

Remarque 17. *On a un carré commutatif de catégories (foncteurs diagonaux isomorphes)*

$$\begin{tikzcd}
Sh_{Ab}(X) \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[d, "f_*"'] & PSh_{Ab}(X) \arrow[d, "f_P"] \\
Sh_{Ab}(Y) \arrow[r, "\iota_Y"'] & PSh_{Ab}(Y)
\end{tikzcd}$$

Proposition 1.5.10. *On a une adjonction $f^P\colon PSh(Y) \leftrightarrow PSh(X)\colon f_P$.*

Démonstration. On doit donner un isomorphisme (d'ensembles)

$$\mathrm{Hom}_{PSh(X)}(f^P\mathscr{G};\mathscr{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{PSh(Y)}(\mathscr{G}; f_P\mathscr{F})$$

fonctoriel en $\mathscr{F} \in PSh(X)$ et $\mathscr{G} \in PSh(Y)$ (l'adjoint à gauche est à gauche). Étant donné $\alpha\colon \mathscr{G} \to f_P\mathscr{F}$, on a pour tout V

$$\alpha(V)\colon \mathscr{G}(V) \to \mathscr{F} f^{-1}V$$

et pour tout U tel que $f(U) \subset V$ on a une flèche

$$\mathscr{G}(V) \to \mathscr{F}(f^{-1}V) \to \mathscr{F}(U)$$

et on cherche $f^P\mathscr{G}U \to \mathscr{F}U$. Suffit de prendre la limite du diagramme du haut pour l'obtenir, on peut car $U \subset f^{-1}V$.

À l'inverse si on a $\beta\colon f^P\mathscr{G} \to \mathscr{F}$ et qu'on veut des $\mathscr{G}V \to \mathscr{F}f^{-1}V$, on pose $U = f^{-1}V$, on a

$$\varinjlim_{f(f^{-1}V)\subset W} \mathscr{G}W \to \mathscr{F}f^{-1}V$$

puis comme $f(f^{-1}V) \subset V$ on a

$$\mathscr{G}V \to \varinjlim_{f(f^{-1}V)\subset W} \mathscr{G}W$$

d'où $\mathscr{G}V \to \mathscr{F}^{-1}V$. □

Par la remarque plus haut et celle juste en dessou on obtient la même adjonction sur les faisceaux.

Remarque 18. *La faisceautisation est adjointe à l'inclusion! (c'est la propriété universelle directement)*

Proposition 1.5.11. *On a une adjonction* $f^*\colon Sh(Y) \leftrightarrow Sh(X)\colon f_*$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{Sh(X)}(f^*\mathscr{G}, \mathscr{F}) &= \mathrm{Hom}_{Sh(X)}((f^p\mathscr{G})^+, \mathscr{F}) \\
&= \mathrm{Hom}_{PSh(X)}(f^p\mathscr{G}, \iota_X\mathscr{F}(= \mathscr{F})) \\
&= \mathrm{Hom}_{PSh(Y)}(\mathscr{G}, f_P\mathscr{F}) \\
&= \mathrm{Hom}_{Sh(Y)}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.5.12. *Soit* $f\colon X \to Y$ *et* $g\colon Y \to Z$. *Alors on a des isomorphismes canoniques* $(g \circ f)_* \simeq g_* \circ f_*$ *et* $(g \circ f)^* \simeq f^* \circ g^*$.

$$\begin{tikzcd}
Sh_{Ab}(X) \arrow[r, bend right, "f_*"'] \arrow[dr, "(g\circ f)_*"] & Sh_{Ab}(Y) \arrow[l, bend right, "f^*"'] \arrow[d, bend right, "g_*"'] \arrow[d, bend left, "g^*"] \\
 & Sh_{Ab}(Z) \arrow[ul, bend left, "(g\circ f)^*"]
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Pour $(\_)_*$ c'est clair via $(g \circ f)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$. Ensuite on peut faire $(\_)^*$ via l'adjonction mdr. L'adjoint à gauche de $g_* \circ f_*$ est $f^* \circ g^*$ puis unicité. □

Bibliographie

[Mum70] D. Mumford. *Abelian Varieties*. Biblioteka Sbornika "Matematika". Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970. isbn : 9780195605280.