Géométrie algébrique

Table des matières

Introduction

On est censés prouver Riemann-Roch.

Chapitre 1

Variétés algébriques

1.1 Nullstellensatz

Pas oublier de rechopper mon carnet. Y'a les preuves complètes.

Théoreme 1.1.1. *Y'a une correspondance entre points fermés de* $\mathbb{A}^n(k)$ *et idéaux maximaux dans* $Spm(k[T_1, \ldots, T_n])$.

Corollaire 1.1.2. *Si* A *est une* k*-algèbre de t.f. et* $\mathfrak{m}$ *un idéal maximal alors* $A/\mathfrak{m}$ *est une extension finie de* k.

Lemme 1.1.3. *Si* A *est une* k*-algèbre de t.f. alors* $\sqrt{I} = \cap_{\mathfrak{m} \in Spm(A), I \subset \mathfrak{m}} \mathfrak{m}$

Lemme 1.1.4. *Si* k *est algébriquement clos, c'est un homéomorphisme (entre* $\mathbb{A}^n(k)$ *et* $Spm(k[T_1, \ldots, T_n])$*).*

Démonstration. On prends le morphisme quotient, c'est l'évaluation et le noyau est de la forme $(T_i - t_i)_i$. □

Théoreme 1.1.5 (Nullstellensatz)**.** *Si* $k = \bar{k}$ *alors* $I(Z(J)) = \sqrt{J}$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} I(Z(J)) &= I(\bigcup_{x \in Z(J)} x) \\ &= \bigcap_{x \in Z(J)} I(\{x\}) \\ &= \bigcap_{x \in Z(J)} \mathfrak{m}_x \\ &= \bigcap_{\mathfrak{m} \in Spm(A), J \subset M} \mathfrak{m} \end{aligned}$$

et la dernière est $\sqrt{J}$ par le lemme. (omg, revoir la preuve dans Atiyaah) □

Remarque 1 (!). *L'endroit où on utilise le weak nullstellensatz on a besoin de k algébriquement clos. La dernière qui vient du lemme y'a pas besoin. Autrement dit, on peut utiliser Spm pour faire de la géométrie algébrique sur un corps non algébriquement clos.*

Définition 1.1.6. $A(Z) = k[T_1, \dots, T_n]/I(Z)$

Pour $f \in A(z)$ et $\tilde{f}$ t.q $p(\tilde{f}) = f$ pour $p\colon k[T_1, \dots, T_n] \to A(Z)$. Pour $z \in k^n$ on peut toujours déf $f(z) := \tilde{f}(z)$. En particulier, on peut déf

Définition 1.1.7. $D(f) = \{s \in Z : f(z) \neq 0\} = D(\tilde{f}) \cap Z$. Avec $D(\tilde{f}) = \mathbb{A}^n(k) - Z(\tilde{f})$.

Remarque 2. *Comme d'hab juste il définit pour des fonctions a priori par déf sur $\mathbb{A}^n(k)$.*

Remarque 3 (C'est super chiant). *Faut faire gaffe ducoup en fonction de la fonction que j'utilise ou de son lift pour les inclusions.*

Corollaire 1.1.8. *Si $f, g \in A(Z)$ et $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$. On a*

- *Pour $J_1, J_2 \leq A(Z)$: $Z(J_1) \subset Z(J_2) \leftrightarrow J_2 \subset \sqrt{J}_1$.*
- *$D(f) \subset D(g) \leftrightarrow \exists h \in \mathbb{A}(Z)$ t.q. $f^n = gh$.*
- *Les ouverts principaux forment une base de la topologie.*

Démonstration. Pour le premier point si $Z(J_1) \subset Z(J_2)$ alors faut lift dans $k[T_1, \dots, T_n]$ avant d'appliquer le nullstellensatz. Pour le deuxième, c'est clair. Pour le troisième, sur $\mathbb{A}^n(k)$ on prend $f \in I(Z)$,où $U = \mathbb{A}^n(k) - Z$, t.q $f(x) \neq 0$ (possible car $x \notin Z$. □

Proposition 1.1.9. *Soit Z un ensemble algébrique affine. Alors Z est irréductible ssi $I(Z)$ est premier. Si $k = \bar{k}$, $I \leq K[T_1, \dots, T_n]$ alors $Z(J)$ est irréductible ssi $\sqrt{J}$ est premier.*

Démonstration. Avec les nouvelles notations c'est direct, avec les anciennes si $Z(J)$ est irreductible $Z(f) \cup Z(g) = Z(J)$ implique $Z(J) \subset Z(f)$ ou $Z(J) \subset Z(g)$. □

Lemme 1.1.10. *Soit A un anneau noetherien, alors les idéaux radicaux sont des intersections finies d'idéaux premiers.*

Démonstration. On regarde l'ensemble des idéaux qui sont pas des intersections d'idéaux premiers. Comme A est noethérien y'a un élement maximal I qui n'est pas premier. Soit $a, b \in A - I$ t.q. $ab \in I$. On considère $I_a\sqrt{I + aA}$ et $I_b = \sqrt{I + bA}$. Ils sont plus gros que I donc intersections d'idéaux premiers. En particulier on prouve facilement que $I = I_a \cap I_b$ (I est radical). □

Proposition 1.1.11. *Si $k = \bar{k}$, on a une décomposition unique des ensembles algébriques en variétés irréductibles non contenues les unes dans les autres.*

Démonstration. $I(Z) = \bigcap_{i=1}^{m} \mathfrak{b}_i$. On retire les $\mathfrak{b}_i$ contenus dans les autres. $\square$

1.2 Espace projectif

On considère $k[T_0, \ldots, T_n] = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$.

Lemme 1.2.1. *Sur les corps infinis, $f \in S_d$ ssi $\lambda^d f(x_i, i) = f(\lambda x_i, i)$.*

Définition 1.2.2. Un idéal est homogène ssi dès que $f = f_1 + \ldots + f_n \in I$ alors $f_i \in I$. C'est équivalent à être généré par des éléments homogènes, i.e. $I = \bigoplus S_d \cap I$.

Remarque 4. *Comme en géo diff regarder ce qu'il se passe quand on regarde des polynômes homogènes dans $\mathbb{A}^{n+1}$ et qu'on les pousse (homéo?).*

Définition 1.2.3. Pour I un idéal homogène de $k[T_0, \ldots, T_n]$, on définit $Z_+(I) = \{P \in \mathbb{P}^n(k) : f(P) = 0 \ \forall f \in I \text{ f homogène}\}$ où autrement on lift P et on prends f quelconque. Si k est infini et $Z \subset \mathbb{P}^n(k)$, on définit $I_+(Z) = I(\pi^{-1}(Z))$.

Théoreme 1.2.4 (Nullsellensatz projectif)**.** *On suppose $k = \bar{k}$ et J homogène. On a*

- *$Z_+(J) = \emptyset$ ssi $(T_0, \ldots, T_n) \subset J$.*
- *Si $Z_+(J) \neq \emptyset$ alors $I_+(J_+(J)) = \sqrt{J}$.*

Démonstration. Si $Z_+(J) = \emptyset$ on lift à $\mathbb{A}^{n+1} - 0$ pour voir que $Z(J) \subset \{0\} = (T_0, \ldots, T_n)$. Sinon $I_+(Z_+(J)) = I(\pi^{-1}(Z_+(J))) = I(\pi^{-1}(Z_+(J)) \cup \{0\}) = \sqrt{J}$. $\square$

1.3 foncions régulières

Revoir que la topologie de Zariski c'est la plus petite topologie que rend continue les polynômes.

Définition 1.3.1 (Fonction régulière)**.** On décrit pour $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$ l'anneau $\mathcal{O}_Z(U)$. On prend les fonctions qui sont localement des fractions rationnelles.

Note 1. *Trouver exactement où on peut écrire des polynômes, les ouverts sont quasi-compacts(!).*

Lemme 1.3.2. *$\mathcal{O}_Z$ est un faisceau pour les restrictions naturelles.*

Démonstration. C'est évident avec la déf mdr. □

Proposition 1.3.3. *Soit $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$.*

- *Les fonctions régulières sont continues.*
- *Pour tout $f \in \mathbb{A}(Z)$, la flèche $\mathbb{A}(Z) \to \mathcal{O}_Z(D(f))$ passe au quotient en un isom $\mathbb{A}(Z)_f \simeq \mathcal{O}_Z(D(f))$.*
- *$\mathbb{A}(Z) \simeq \mathcal{O}_Z(Z)$.*

Démonstration. Pour le premier point l'idée c'est que localement on peut se mettre sur un ouvert tel que $f|_U(U) = \{pt\}$. Le deuxième point c'est la surjectivité qu'y faut voir. Le troisième point c'est le plus cool, c'est l'idée que on commence par décomposer Z en une union finie $\bigcup_i D(f_i)$ où on est une fraction rationnelle. Ensuite, on obtient $(gf_i - h_i)|_{D(f_i)} = 0$, faut relever puis dérouler avec le fait que $1 \in (f_i, i)$ quelque part. □

Remarque 5. *Si on prend $\mathbb{A}^2 \backslash (0,0)$, il a les mêmes sections globales que $\mathbb{A}^2$. Ça prouve que cet ouvert est pas affine.*

1.4 Morphismes d'ensembles algébriques

Dans les ensembles algébriques on peut directement prendre des fonctions polynomiales ! C'est la preuve d'avant.

Théoreme 1.4.1. *On a une équivalence de catégories entre les k-algèbres de type finies réduites et la k-variétés.*

Note 2. *Revoir vite fait la construction.*

1.5 Espaces annelés

Définition 1.5.1. Un espace annelé est un espace topologique X muni d'un faisceau de k-algèbre pour nous.

Définition 1.5.2. Un morphisme d'espaces annelés

$$(|X|, \mathcal{O}_X) \to (|Y|, \mathcal{O}_Y)$$

est un couple $(|f|, f^{\#})$. Où $|f|$ est un morphisme d'espaces topologiques et $f^{\#} \colon O_Y \to |f|_* \mathcal{O}_X$ un morphisme tels que les flèches induites sur les fibres sont des morphismes d'anneaux locaux.

Note 3. *Le faisceau* $|f|_*\mathcal{O}_X$ *est le pullback classique. Si* $y = |f|(x)$*, comme d'habitude on a*

$$f^{\#}\colon O_{Y,y} \to (|f|_*\mathcal{O}_X)_y \to \mathcal{O}_{X,x}$$

Enfin en fait comme c'est localement annelé apparemment on peut montrer que $f^{\#}$ *c'est automatiquement le pullback de fonctions.*

Théoreme 1.5.3. *Le couple* $(Z, \mathcal{O}_Z)$ *est un espace annelé.*

Démonstration. Les fibres $\mathcal{O}_{Z,z}$ sont les $\mathbb{A}(Z)_{\mathfrak{m}_z}$. □

de notre équivalence de base

$$\{\text{ensembles algébriques affines}\} \to \{k\text{-algèbre réduite de type fini}\}$$

on plonge les ensembles algébriques dans les espaces localements annelés. En fait c'est pleinement fidèle, on a pas un nouvel objet.

Proposition 1.5.4. *On a une bijection*

$$Hom_{algSets}(X, Y) \to Hom_{LocRingedSpace}((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y))$$

Démonstration. Étant donné $f\colon X \to Y$, on définit $f^{\#}(U)\colon \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}U)$ par $s \mapsto s \circ f$. Et à f on associe $(f, f^{\#}$. Maintenant si on a un $(f, f^{\#})$ un morphisme d'espaces localement annelés quelconque, faut montrer que f est un morphisme d'ensemble algébriques et que $f^{\#}$ est bien le pullback habituel. Faut se rappeler que $f^{\#}(\mathfrak{m}_y) \subset \mathfrak{m}_x$ tel que $f(x) = y$. En particulier, le grand carré de

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[r, mapsto] & f^{\#}s \\
f^{\#}\colon \mathcal{O}_Y(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(f^{-1}U) \arrow[d] \\
O_{Y,f(x)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[d] \\
k = O_{Y,f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)} \arrow[r] & O_{X,x}/\mathfrak{m}_x = k
\end{tikzcd}$$

commute, et la flèche $\mathcal{O}_Y(U) \to k$ est l'évaluation, la flèche $k \to k$ est l'identité $(1 \mapsto 1)$, i.e. $f^{\#}(s)(x) = s(f(x))$. On a montré que $f^{\#}$ est le pullback habituel. Pour montrer que c'est un morphisme, on peut regarder $\tilde{f}\colon X \to Y \to \mathbb{A}^n_k$. On obtient

$$\tilde{f}(\mathbb{A}^n(k))\colon k[T_1, :, T_n] \to \mathcal{O}_X(X)$$

qui à T_1 associe f_1. En particulier, c'est $T_1 \circ f$ par le point d'avant. De sorte que $\tilde{f}$ est défini par des polynômes et donc un morphisme. □

1.6 Recollements

1.7 Sous-variétés

On appelle variété des unions finies de variétés affines avec le faisceau structurant.

Définition 1.7.1 (Sous-variété)**.** Pour un fermé dans $Z \subset X$ une variété algébrique. On définit,

$$\mathcal{O}_Z(V) = \{f\colon V \to k | \forall z \in V \exists g \in \mathcal{O}_X(U), U \cap Z \subset V, g|_{U\cap Z} = f|_{U\cap Z}\}$$

autrement dit c'est juste $i^{-1}\mathcal{O}_X$ pour $i\colon Z \subset X$.

Lemme 1.7.2. *Soit X une variété algébrique et $Z \subset X$ fermé. Alors Z est une variété algébrique. Si X est affine alors Z aussi.*

Démonstration. On doit montrer que Z est un recouvers d'affine. Suffit de montrer que $Z \cap U$ est affine si U est affine. Suffit de le montrer dans $X = \mathbb{A}^n$ et là $\mathcal{O}_Z$ c'est littéralement le faisceau de fonction régulière donc on a fini. (Il définit une variété affine comme un fermé topologique de $\mathbb{A}^n$ plus faisceau) $\square$

1.8 Variétés projectives

Dans $\mathbb{P}^n(k)$ on définit sur $X = Z_+(I)$,

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f\colon U \to k, \text{Localement une fraction homogène}\}$$

Si on définit la localisation homogène en P homogène, avec $B = k[T_1, \ldots, T_n]/I$, via $B_{(P)}$ les fractions de degrés 0. Plus rigoureusement, via $k[T_1, \ldots, T_n]_{(P)}/I_{(P)}$ avec $I_{(P)} = \{Q/P^n | Q \in I\}$.

Proposition 1.8.1. *Si $X = Z_+(I) \subset \mathbb{P}^n(k)$ et $U = X \cap D_+(p)$ ($\bar{P} = p$). On a $B_{(p)} \simeq \mathcal{O}_X(U)$.*

Proposition 1.8.2. *Si P est non constant homogène alors $D_+(P)$ est une variété affine. Si $P \in \mathcal{O}_Z(Z) = B$ de degré ≥ 1 pareil.*

Définition 1.8.3. Les variétés quasi-projectives sont les localement fermées dans $\mathbb{P}^n(k)$.

Chapitre 2

Dimension

Définition 2.0.1. On prend la dimension de Krull avec le sup des chaines de fermés irréductibles.

Chapitre 3

Produits fibrés

Y'a des choses à rattraper, comme l'immersion fermée.

3.1 Séparation et propreté

Définition 3.1.1. Une variété algébrique sur k est séparée si l'image de

$$\delta = (id, id) \colon X \to X \times_k X$$

est fermée.

Exemple 3.1.2. Les variétés algébriques affine sont séparée, parce que $A(X) \otimes A(X)$ est surjective, en effet $im(\delta) = Z(ker\delta_*)$.

Comme la séparation imite le fait d'être Hausdorff, en ajoutant la quasi-compacité on obtient la "compacité"?

Définition 3.1.3. Une variété algébrique X sur k est propre/complète si elle est séparée et pour toute variété Z :

$$X \times Z \to Z$$

est fermée (on dit qu'elle est universellement fermée).

Exemple 3.1.4. $\mathbb{A}^1_k$ n'est pas propre mais pourtant est séparée et quasi-compacte. On regarde $\mathbb{A}^2 \simeq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$, et dans $\mathbb{A}^2$ on regarde $Z(XY - 1)$, d'image $\mathbb{A}^1 - 0$! Le problème vient du point à l'infini qu'il manque.

Remarque 6. *Les fermées de variétés séparée (resp. propres) sont séparées (resp. propres). Et les ouverts de variétés séparées sont séparées.*

Proposition 3.1.5. *Les variétés projectives sont propres.*

Remarque 7. *Voir la preuve dans les notes sur Nakayama, sinon dans les notes sur Shafarevich.*

Démonstration. Il suffit de le prouver pour $\mathbb{P}_k^n$. On montre que c'est séparé, on peut restreindre $\mathbb{P}_k^n \to \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^n$ à $D(T_i) \cap D(T_j) \to D(T_i) \times D(T_j)$ qui a une diagonale fermée car affine (le fait d'être une immersion fermée est local, check). Soit Y une variété algébrique, on doit prouver que $\mathbb{P}_k^n \times Y \to Y$ est fermée, on peut le montrer localement puis supposer Y affine et même $= \mathbb{A}^n$. En fait c'est la preuve de Shafarevich. Y'a un twist, il dit pour $y \in \mathbb{A}^n - p_2(Z)$ on a

$$(T_0, \dots, T_n)^N \subset I + \mathfrak{m}_y k[T_0, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m]$$

puis $B_N \subset I_N + \mathfrak{m}_y B_N$ avec $B_N = k[T_0, \dots, T_n]_N$ le module des polynomes de degré N. D'où par Nakayama, il existe $P \notin \mathfrak{m}_y$ homogène dans I t.q. $PB_N \subset I_N$ et $y \in D^+(P)$ (on veut les monomes dans I et P est en Y d'où dans $D^+(P)$, $P(y) \neq 0$ et les monomes sont dans I_y, (penser au quotient pas $\mathfrak{m}_y$). □

Définition 3.1.6. On définit le graphe comme l'image inverse de la diagonale δ_Y par $(f, id_Y)\colon X \times Y \to Y \times Y$.

Remarque 8. *Si Y est séparée, Γ_f est fermé dans $X \times Y$. En effet, $(id_X, f)\colon X \to X \times Y$ est un isomorphisme vers Γ_f.*

Lemme 3.1.7. *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de variétés algébriques avec X propre et Y séparée. Alors f est fermée.*

Démonstration. On regarde $X \to X \times Y \to Y$. □

Proposition 3.1.8. *Soit X une variété algébrique connexe et propre. Alors $\mathcal{O}_X(X) = k$.*

Démonstration. Étant donné $f\colon X \to \mathbb{A}^1$, l'image est connexe et fermée dans $\mathbb{P}^1$ et incluse dans $\mathbb{A}^1$ donc est un point. □

Corollaire 3.1.9. *Une variété affine connexe est propre ssi $X = \mathbb{A}_k^0$.*

Chapitre 4

Espace tangent

La première définition à partir d'équations/d'un plongement affine.

Définition 4.0.1. Soit $X = Z(I)$ une variété algébrique et $P = (a_1, \ldots, a_n) \in X$. On définit

$$T_{X,P} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n_k | \sum_i T_i \partial_i F(P) = 0, \ \forall F \in I\}$$

c'est un espace vectoriel.

Remarque 9. *Penser $T_i = X_i - a_i$, pour que ce soit un espace vectoriel.*

Exemple 4.0.2. Pour $Z(T_1 - T_2^2) = Z$ et $P = (1, 1)$ on a $T_P Z = \{(t_1, t_2) | t_1 - 2t_2 = 0\}$.

Soit maintenant $E = k^n$ et $P \in \mathbb{A}^n(k)$. On regarde

$$D_p \colon k[T_1, \ldots, T_n] \to E^\wedge$$

donné par $F \mapsto D_p(F) = \sum T_i \delta_i F(P)$. On remarque que $D_p(\mathfrak{m}_P^2) = 0$ car si $f, g \in \mathfrak{m}_P$ alors $\partial_i(fg)(P) = f(P)\partial_i g(P) + g(P)\partial_i f(P) = 0$. D'où ça passe au quotient en

$$\mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2 \to E^\wedge$$

maintenant c'est des k-espaces vectoriels de dimensions n d'où il suffit de montrer la surjectivité ce qui est clair.

Proposition 4.0.3. *Soit X une variété affine et $P \in X$. Alors*

$$(\mathfrak{m}_P)^\wedge \simeq T_{X,P}$$

Démonstration. Par définition $T_{X,P}$ est l'orthogonal de $D_P(I)$ ou l'ensemble des $v \in E$ tels que pour tout $\phi \in D_P(I)$, $\phi(v) = 0$. On note $\mathfrak{m}$ l'idéal de $k[T_1, \ldots, T_n]$ tel que $\mathfrak{m}_P = \mathfrak{m}/I$. Alors $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ rentre dans un diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I/I \cap \mathfrak{m}^2 \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \arrow[r] \arrow[d, hook, "D_P"] & \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \arrow[r] \arrow[d, phantom, "="] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D_P I \arrow[r] & E^\wedge \arrow[r] & \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

la flèche du bas montre bien le résultat en passant aux duaux (ça inverse les flèches). □

Lemme 4.0.4. *Soit A un anneau et $\mathfrak{m} \leq A$ maximal. Y'a un isomorphisme $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \simeq \mathfrak{m}A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 A_\mathfrak{m}$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathfrak{m}$ t.q $x \in \mathfrak{m}^2 A_\mathfrak{m}$. Alors il existe $s \in A - \mathfrak{m}$ tel que $s.x \in \mathfrak{m}^2 A$. En plus il existe $t \in A$ t.q $st - 1 \in \mathfrak{m}$ car $A/\mathfrak{m}$ est un corps. Ensuite

$$(st - 1)x \in \mathfrak{m}^2$$

mais $stx \in \mathfrak{m}^2$ car $sx \in \mathfrak{m}^2$ d'où $x \in \mathfrak{m}^2$ et la flèche est injective.

Si on prends $x \in \mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$ il existe $s \in A - \mathfrak{m}$ tq $sx \in \mathfrak{m}$. On prends t comme avant. Alors $tsx = x \mod \mathfrak{m}^2 A_\mathfrak{m}$. D'où $tsx \mapsto x$. □

Remarque 10. *D'où l'espace tangent provient du stalk du faisceau.*

Définition 4.0.5. Soit X une variété algébrique. L'espace tangent de Zariski en P est le k-espace vectoriel

$$(\mathfrak{m}\mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}^2\mathcal{O}_{X,P})$$

4.1 Variétés lisses

Définition 4.1.1. On note $dim_P X = min\{dimU | P \in U\}$ pour les ouverts de X. (Oui la déf marche)

Remarque 11. *C'est aussi le maximum des dimensions des composantes irréductibles qui passent par P.*

Proposition 4.1.2. *Soit X une variété algébrique, alors pour tout $P \in X$ on a*

$$dim_P X \leq dim T_{X,P}$$

Définition 4.1.3. On dit que X est lisse/non singulière en P si $dim_P X = dim T_{X,P}$.

Démonstration. Par récurrence sur $dimT_{X,P}$. Si $dimT_{X,P} = 0$, en passant au cas affine, $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = 0$ d'où

$$\mathfrak{m}_P = \mathfrak{m}_P^2.$$

Par le lemme de Nakayama il existe $f \in A - \mathfrak{m}_P$ tel que $f\mathfrak{m}_P = 0$ avec $f \in D(f)$. En se plaçant sur $D(f)$ on remplace $\mathcal{O}_X(X)$ par A_f d'où f inversible et $\mathfrak{m}_P = 0$ puis $A_f = k$. En particulier, $dim_P X = 0$.

Maintenant si $dimT_{X,P} \geq 1$. Soit Z une composante irréductible de X passant par P et de dimension $dim_P X$. On a $\mathcal{O}(Z) = \mathcal{O}(X)/I$ puis $\mathfrak{m}_{P,Z} = \mathfrak{m}_{P,X}/I$ puis $\mathfrak{m}_{P,X}/\mathfrak{m}_{P,X}^2$ se surjecte dans $\mathfrak{m}_{P,Z}/\mathfrak{m}_{P,Z}^2$. D'où $dimT_{P,X} \geq dimT_{P,Z}$. On peut supposer X irréductible. Supp $dim_P X \neq 0$. Alors il existe $f \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ et $Y = Z(f) \subset X$. En plus

$$dimT_{X,P} \geq dimT_{Y,P} + 1$$

car $T_{Y,P} \simeq (\mathfrak{m}/f)/(\mathfrak{m}/f)^2$. Avec $dimY = dimX-1$, par récurrence $dimT_{P,Y} \geq dim_P Y$ et on conclut. □

Étant donnés des générateurs de I, $(f_1, \ldots, f_r)$, on déf la jacobienne en P par

$$J(P) = (\partial_j f_i(P))_{i,j}$$

alors on a

$$\ker(J(P)) = T_p X$$

on a alors le critère jacobien :

Proposition 4.1.4. *On a :*

$$X \textit{ est lisse en } P$$

ssi

$$J(P) \textit{ est de rang } n - \dim_P(X)$$

avec $f_i \in k[T_1, \ldots, T_n]$.

Démonstration. Directement on a $\dim T_P X = \dim_k \ker(J(X)_P) = n - rk(J(X)_P)$. □

Corollaire 4.1.5. *Si $X = Z(F) \subset \mathbb{A}^n(k)$ alors P est lisse si au moins un des $\partial_i F(P)$ est non nulle.*

Démonstration. On a $\dim_P(X) = n - 1$ et la jacobienne est une ligne. Donc de rang 1 ssi y'en a un qu'est non nul. □

Exercices 4.1.6. L'ensemble des points lisse est ouvert.

Proposition 4.1.7. *Soit $k(X)$ un corps de fonctions. Alors $k(X)$ est finie séparable d'un $k(T_1, \ldots, T_n)$.*

Démonstration. Par la normalisation de Noether on trouve

$$K = k(T_1, \ldots, T_n) \subset k(X)$$

supposons que l'extension n'est pas séparable. On note L la clôture séparable de K dans $k(X)$. On a $car(k) = p > 0$. On prends $\theta \in k(X) - L$ t.q. $\theta^p \in L$. On montre que $L(\theta)$ est séparable finie sur un $k(S_1, \ldots, S_n)$.

Soit $H(S) = S^r + f_{r-1}S^{r-1} + \ldots + f_0 \in K[S]$ le pol min de θ^p sur K. Supposons que $f_i \in k(T_1^p, \ldots, T_n^p)$ alors $H(S^p) = G(S)^p$ et G est un polynôme minimal séparable de θ. D'où l'un des $f_i \notin k(T_1^p, \ldots, T_n^p)$.

Remarque 12. *On peut pas dire directement que H est séparable donc $H(S^p)$ est une puissance p-ème. Parce que $S^p - S$ par exemple.*

Si une puissance d'un T_i non divisible par p apparaît dans un f_i, alors T_i est algébrique sur $K_1 = k(\theta, T_2, \ldots, T_n)$. (en prenant $T_i = T_1$)

Et en plus $L(\theta)$ est séparable sur $K_1(T_1)$ qui est séparable sur K_1. Mais K_1 a le degré de transcendance de $L(\theta)$ qui est n. D'où $\theta, T_2, \ldots, T_n$ sont algébriquement indépendants. $\square$

Remarque 13. *Comparer avec la preuve de Sha.*

Soit R un anneau intègre et $K = Frac(R)$. On pose $H \in R[S]$ et $\Delta(H) = \prod(s_i - s_j)^2 \in R$ son discriminant. Alors H est séparable ssi $\Delta(H) \neq 0$.

Maintenant si on note $\varphi\colon R \to F$ (un morphisme de corps quelconque) et

$$\tilde{\varphi}\colon R[S] \to F(S)$$

alors $\Delta(\tilde{\varphi}(H)) = \varphi(\Delta)$.

Lemme 4.1.8. *Étant donné $H \in k[T_1, \ldots, T_n][S]$. Soit $X \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1$ la variété associée. Si $\Delta = disc(H) \in k[T_1, \ldots, T_n]$ alors*

$$X \cap D(\Delta)$$

est non vide et est l'ensemble des points lisses.

Remarque 14. *Il suppose H unitaire.*

Démonstration. Soit $q \in (\emptyset \neq) D(\Delta) \subseteq \mathbb{A}^n$. On note $\phi_q\colon k[T_1, \ldots, T_n] \to k$ t.q. $\phi_q(F) = F(q)$. Alors si $s \in k$ est une racine de

$$\tilde{\phi}_q(H)(S)$$

on a $P = (q, s) \in X \cap D(\Delta) \neq \emptyset$. On regarde la jacobienne de H en P. On a

$$\tilde{\phi}_q(H)(S) = \phi_q(\Delta) = \Delta(q) \neq 0$$

d'où $\tilde{\phi}_q(S)$ est séparable puis

$$\partial_S H(P)) = \tilde{\phi}(H)'(S)(s) \neq 0$$

□

Proposition 4.1.9. *Le smooth locus est dense dans X.*

Démonstration. On prouve que tout les ouverts non vides contiennent un point lisse. On peut supposer X affine intègre. On peut donc prendre le corps de fonctions $k(X)$ et une extension séparable

$$k(T_1, \ldots, T_n) \subset k(X).$$

On a donc $k(T_1, \ldots, T_n)(S) = k(T_1, \ldots, T_n)[S]/H(\bar{T}, S)$. avec H séparable en S. On se place sur un ouvert ou y'a pas de dénominateurs. On a $\tilde{H} = g^{\deg(H)} H \in k[T_1, \ldots, T_n][gS]$ unitaire puis $k(\tilde{H}) = k(X)$ d'où on peut appliquer le résultat à $\tilde{H}$. □

4.2 Variétés normales

Théoreme 4.2.1. *Soit X une variété algébrique lisse en P. Alors*

1. *Il n'y a qu'une seule composante de X passant par P.*
2. *Soit U est ouvert affine connexe (implique intègre) de X alors $\mathcal{O}_X(U)$ est intégralement clos. (dans $Frac(\mathcal{O}_X(U))$ qui est pas forcément $Frac(\mathcal{O}_X(X))$.)*
3. *$\mathcal{O}_{X,P}$ est factoriel.*

Remarque 15. *On a*

1. *Lisse + connexe implique intègre.*
2. *Si $\dim U = 1$ alors $\mathcal{O}_X(U)$ est de Dedekind.*

Proposition 4.2.2. *Soit $P \in X$ et $d = \dim_P X$. Alors X est lisse en P ssi pour tout voisinage ouvert petit affine de P, l'idéal $\mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}_X(U)$ est généré par d éléments. (Plus précisément $\mathfrak{m}_P \mathcal{O}_{X,P}$)*

Démonstration. Supposons que $\mathfrak{m}$ est généré par d éléments. Alors

$$\mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$$

est généré par d éléments en tant que $\mathcal{O}_X(X)$-module d'où en tant que $\mathcal{O}_X(X)/\mathfrak{m}$-module. Puis $\dim T_p X = d$. À l'inverse si X est lisse en P. On suppose X affine. On note $\mathfrak{m} \subset A(X)$ l'idéal de P. On sait que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est de dimension d sur $A(X)/\mathfrak{m}$, disons généré par $(\bar{e}_i)_i$. D'où $\mathfrak{m} = (e_1, \ldots, e_d) + \mathfrak{m}^2$ puis $\mathfrak{m}/(e_1, \ldots, e_d) + \mathfrak{m}(\mathfrak{m}/(e_1, \ldots, e_d)$. Par Nakayama il existe $f \notin \mathfrak{m}$ tel que $f\mathfrak{m} = (e_1, \ldots, e_d)$. D'où $\mathfrak{m}A_f = (e_1, \ldots, e_d)A_f$. En particulier, $\mathfrak{m}A_f$ est l'idéal maximal qui correspond à $P \in D(f)$. D'où dans tout ouvert $U \subseteq D(f)$. □

Corollaire 4.2.3. *Si X est une courbe affine intègre. ALors X est lisse ssi $A(X)$ est de Dedekind.*

Démonstration. C'est juste que tout les localisés sont des DVR et on applique le corollaire. □

Définition 4.2.4. X est dite normale si pour tout les U affine ouverts

$$\mathcal{O}_X(U) \text{ est intégralement clos}$$

Proposition 4.2.5. *Si X est affine, $A(X)$ intégralement clos implique X normale.*

Démonstration. Étant donné $s \in k(X)$, on a $\mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow A(X)_f$. D'où $f^r s$ est entier sur $A(X)$ donc $s \in A(X)_f$. Maintenant en prenant un recouvrement on a $s \in A(X)_{f_i}$. D'où par la propriété du faisceau $s \in \mathcal{O}_X(U)$. □

Remarque 16. *La preuve rigoureuse doit utiliser la flèche canonique $\mathcal{O}_X(U) \to k(X)$.*

Définition 4.2.6. Une morphisme $X \to Y$ est affine si pour tout affine ouvert V de Y, $f^{-1}(V)$ est affine. Le morphisme est fini si il est affine et pour tout ouvert affine $V \subseteq Y$ on a

$$\mathcal{O}_X(f^{-1}V) \text{ est fini sur } \mathcal{O}_Y(V)$$

Remarque 17. *On peut montrer que si il existe un recouvrement affine $Y = \cup_i V_i$ tq pour tout i, $f^{-1}V_i$ est affine (resp. $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}V)$ est fini) alors f est affine (resp. fini).*

Définition 4.2.7. Soit X une variété intègre. La normalisation de X est une variété normale X' muni d'un morphisme fini birationnel

$$X' \to X$$

Soit $\phi\colon k(X) \to L$ une extension finie, la normalisation de X dans L est un morphisme fini dominant

$$\pi\colon X' \to X$$

t.q $k(X') = L$, X' est normal et $k(X) \to L$ est induit par π.

Proposition 4.2.8. *Soit A une k-algèbre intègre de type fini et $K = Frac(A)$. Soit B la clôture intégrale de A dans L, L une extension finie de K. Alors $Frac(B) = L$ et B est finie sur A.*

Remarque 18. *Si $L = K$, la normalisation est $Spm(\tilde{A}) \to Spm(A)$.*

Exemple 4.2.9. Si $X = Z(T_1^2 - T_2^3) \subseteq \mathbb{A}^2_k$. Alors

$$\mathbb{A}^1 \to X$$

donné par $t \mapsto (t^3, t^2)$ est la normalisation.

Chapitre 5

Courbes algébriques

Une courbe algébrique est une variété séparée de dimension pure 1.

Remarque 19. *Un morphisme fini est fermé. Y'a la preuve du td, ou y'a la preuve générale de Spec.*

Définition 5.0.1. Pour rappel, f est fini si $\mathcal{O}_Y(V_i) \to \mathcal{O}_Y(f^{-1}V_i)$ est fini pour un recouvrement affine de Y.

Démonstration. Le point c'est que f est surjective et $f(Z(f^\sharp(I(Z))))$ est dense dans Z là ou ca fait sens. □

Lemme 5.0.2. *Si $f\colon X \to Y$ est fini et Y est séparée (resp. propre) alors X est séparée (resp. propre).*

Démonstration. On doit checker que X est séparée et universellement close. On regarde $X \times_Y \hookrightarrow X \times_k X$, on a

$$X \times_Y X = (f \times f)^{-1}(\Delta(Y))$$

est fermée car Y est séparée. On a clairement

$$\Delta(X) \subset X \times_Y X$$

il suffit de montrer que $\Delta(X)$ est fermée dedans. On prend un recouvrement affine $\cup V_i = Y$. Maintenant $X \times_Y X$ est recouverte par les ouverts (check) $U_i \times_{V_i} U_i$ avec $U_i = f^{-1}V_i$. Il suffit de montrer que $\Delta(U_i)$ est fermée dans $U_i \times_{V_i} U_i$. Maintenant,

$$U_i \to \Delta(U_i) \hookrightarrow U_i \times_{V_i} U_i \hookrightarrow U_i \times_k U_i$$

est fermée. D'où X est séparée. (on a pas utilisé la finitude)

Soit Z une variété algébrique. On regarde

$$\begin{tikzcd} Z \times_k X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z \\ & Z \times_k Y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

il suffit de montrer que $Z \times X \to Z \times Y$ est fermée, c'est clairement un morphisme fini car localement, les morphismes finis sont affines d'où on peut supposer Z, X, Y affines et en regardant

$$\begin{tikzcd} A(Y) \arrow[r] \arrow[d] & A(X) \arrow[d] \\ A(Y) \otimes A(Z) \arrow[r] & A(X) \otimes A(Z) \end{tikzcd}$$

on obtient le résultat. □

Lemme 5.0.3. *Soit K un corps de fonction de degré de transcendance 1. Il existe une courbe intègre lisse et propre telle que $K = k(X)$.*

Démonstration. C'est un gros sketch de preuve. Soit K une extension finie de $k(X)$, alors $K = k(X)[T]/(P) = Frac(k[X][T]/(P))$ est le corps de fonction d'une k-algèbre réduite de type fini. On prends une variété affine associée Z et on obtient $\bar{Z} \subseteq \mathrm{Pr}^n$. Maintenant $\bar{Z}$ est intègre propre. Il reste à normaliser. On prends $X \to \bar{Z}$ sa normalisation. Alors la flèche est finie d'où X est intègre propre et normale. □

Note 4. *Pour rappel, si Y est séparée et X intègre alors si $f, g\colon X \to Y$ et $g|_U = f|_U$ alors $f = g$.*

Note 5. *La propreté permet d'étendre uniquement de U à X dans le cas des courbes.*

Note 6. *Dans le cas lisse, les composantes connexes coincident avec les irréductibles.*

Théoreme 5.0.4. *Si U est une courbe algébrique lisse. Soit Y une variété algébrique propre et $V \subseteq U$ ouvert. Alors toute flèche $f\colon V \to Y$ il existe un unique $g\colon U \to Y$ qui étend f.*

Démonstration. Il suffit de prouver l'existence, $U - V$ est un nombre fini de point. On montre qu'on peut l'étendre en chaque point. On prends $P \in W \subset$

U affine. On étend comme suit

$$\begin{tikzcd} W \cap V \arrow[r, hook] \arrow[d] & W \arrow[dl, dashed] \\ Y & \end{tikzcd}$$

On peut supposer U affine et $V = U - \{P\}$. Soit $A = A(U)$, et soit $\mathfrak{m} \leq A$ maximal. Comme U est lisse on peut supposer

$$\mathfrak{m} = (t).$$

On considère

$$f \colon V \to Y$$

et $V \simeq \Gamma_f \subseteq V \times Y \subseteq U \times Y$ fermé car Y est séparée. Soit $Z = \bar{\Gamma}_f \subseteq U \times Y$, alors Z est birationnel à U. On va prover que $Z \to U$ est un isomorphisme. Si c'est le cas, $U \to Z \to Y$ étend f donc on est bon.

On a $U \times Y \to U$ est fermée car Y est propre. D'où $h \colon Z \to U$ est fermée donc surjective. On note $z \in h^{-1}(P)$. Soit $B = \mathcal{O}_Z(W)$ un voisinage ouvert W de z. Il y a une flèche $A(U) \hookrightarrow B = A(W) \hookrightarrow A(W) \hookrightarrow K = Frac(A)$. Soit $b \in B$ et $b = t^n a/u$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $a, u \notin \mathfrak{m}$. On obtient $bu = t^n a$ d'où $0 = (bu)(z) = t^n(z)a(z)$ d'où $t^n(z) = 0$ car $a(z) \neq 0$. D'où $n \geq 1$ et $b \in A[1/u]$. Comme B est finiment générée, $A \subset B \subset A[1/u_0]$ pour un $u_0 \notin \mathfrak{m}$. D'où $B[1/u_0] = A[1/u_0]$. On prouve que

$$h \colon h^{-1}(D(u_0)) \cap W \simeq D(u_0)$$

On prends $\{z_1, \ldots, z_r\} = h^{-1}(P)$ t.q pour tout $i = 1, \ldots, r$ il existe $P \in U_0$ et $g_i \colon W_i \simeq U_0$ contenu dans $h \colon Z \to U$. Ca implique que $r = 1$ sinon g_1^{-1} et g_2^{-1} sont deux morphismes différents qui coincident avec l'inverse de $\Gamma_f \to V$.

$$\begin{tikzcd} \Gamma_f \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, hook] & V \arrow[d, hook] \\ Z \arrow[r, "h"] & U \\ W_0 \arrow[u, hook] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & U_0 \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

$\square$

Corollaire 5.0.5. *Soit X, Y deux courbes entières lisses propres et birationnelles. Alors elles sont isomorphes.*

Démonstration. Simplement, la flèche entre les ouverts, $f|_U$, et son inverse, $g|_U$ s'étendent à X, Y. Puis $g \circ f|_U = id|_U$. Pareil de l'autre côté. $\square$

Exemple 5.0.6. En général c'est faux, $\mathrm{Pr}^2 \simeq_{bir} \mathrm{Pr}^1 \times \mathrm{Pr}^1$ sont birationnels mmais pas isomorphes.

Lemme 5.0.7. *Un morphisme de courbe propres lisses intègres est constant ou fini.*

Démonstration. COmme X est propre, f est fermé. Alors $f(X)$ est Y ou un point. On suppose que c'est Y, alors on a $k(Y) \to k(X)$ est finie. On normalise Y en $\pi\colon X' \to Y$ dans $k(X)$. On a que π est finie et X' est normale avec $k(X') = k(X)$. On a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "g\simeq"'] & Y \\ X' \arrow[ur, "\pi"] & \end{tikzcd}$$

et X', X induisent la même $k(Y) \hookrightarrow k(X) = k(X')$. D'où $f = \pi \circ g^{-1}$. Comme π est finie f est finie. $\square$

Théoreme 5.0.8. *Il existe une équivalence de catégorie entre*

les corps de fonction de degré de transcendance 1

et

Les courbes algébriques intègre propre lisse

Corollaire 5.0.9. *Toute courbe intègre lisse propre admet un morphisme fini*

$$X \to \overset{1}{\mathrm{Pr}}$$

Théoreme 5.0.10. *Toute courbe intègre lisse propre est projective.*

Démonstration. On prends un recouvrement affine $(V_i)_i$ fini. On étend un des V_i à Pr^n en X_i. Maintenant, X_i est pas forcément lisse, et on prend $P = \prod X_i$ le produit, qui est projective. On regarde l'extension

$$\begin{tikzcd} & \prod U_i \arrow[d] \\ \cap U_i \arrow[ur] \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & \prod \overline{U_i} \\ X \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

comme f s'étend car P est propre. Et on pose $g(X) = Z$. Alors Z est projective et intègre. On montre qu'elle est lisse et propre. On montre que tout point $z \in Z$ admet un voisinage affine normal. Alors $z = g(x)$ pour un $x \in U_i$

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[r] \arrow[dr, hook] & Z \arrow[d] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

g est une inclusion car $\cap U_i \hookrightarrow X_i$ est une inclusion et X_i est séparée. On prends un voisinage affine de z contenu dans $f(U)$ (Les $Z - f(U) \subseteq f(X - U_i)$ sont finis). On a

$$\begin{tikzcd} f^{-1}W \arrow[r, two heads] \arrow[dr, "id"'] & W \arrow[d] & \\ & f^{-1}W & \subseteq \quad X_i \end{tikzcd}$$

ce qui implique que $\mathcal{O}_Z(W) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}W)$ d'où $f^{-1}W \simeq W$. Maintenant $f^{-1}W$ est lisse connectée. Donc normale. D'où Z est lisse et birationnelle à X donc isomorphe. □

5.1 Diviseurs

Les diviseurs sur une courbe intègre lisse sont des sommes formelles

$$D = \sum n_P(P) \in Z[|X|] = Z^1(X)$$

pour $P \in X$, on a $v_P \colon k(X)^\times \to \mathbb{Z}$ une valuation discrète, via $k(X) = Frac(\mathcal{O}_{X,P})$ comme X est lisse.

Proposition 5.1.1. *Soit $f \in k(X) - 0$, alors $v_x(f) = 0$ sauf en un nombre fini de x.*

Démonstration. On a $f = a/b \in \mathcal{O}_X(U)$ U affine. Alors $v_x(f) = 0$ si $x \notin Z(a) \cup Z(b)$, mais c'est un nombre fini de points et $X - U$ est fini. □

Exemple 5.1.2. Sur $X = \mathrm{Pr}^1$, $t \in k(t)$ alors, $div(t) = (0) - (\infty)$. Y'a plusieurs remarques, $k(t) = k(\mathrm{Pr}^1)$ c'est via une écriture dans une carte. Le cgt de carte c'est $t \mapsto 1/t$, i.e. $(U_1, 1/t) \sim (U_0, t)$.

Définition 5.1.3. On définit $Pic(X) = Z^1(X)/div(k(X)^\times)$.

On a $div(f) = div_0(f) - div_\infty(f)$.

Définition 5.1.4. On définit aussi le degré $\deg\colon Z^1(C) \to \mathbb{Z}$

On veut montrer que ça passe au quotient.

Définition 5.1.5. On déf

$$f_*\colon Z^1(X) \to Z^1(Y)$$

par $f_*(\sum n_P(P) = \sum n_P(f(P)) = \sum_{Q\in Y}(\sum_{P\in f^{-1}P} n_P)(Q)$.

Si f est constante, alors $f_* = 0$. Pour tout $y \in Y$ et $x \in f^{-1}(y)$, on a une extension de DVR

$$f_x\colon \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

Définition 5.1.6. On déf la ramification $e_{x,y} := e_{\mathfrak{m}_x,\mathfrak{m}_y} = v_{\mathfrak{m}_x}(f_x(\pi_y))$.

Définition 5.1.7. On définit ensuite $f^*\colon Z^1(Y) \to Z^1(X)$ par

$$\sum n_y(y) \mapsto \sum_x e_{x,f(x)} n_{f(x)}(x)$$

Exemple 5.1.8. Pour $f \in K(X)$, on a $f\colon U \to \mathbb{A}^1$ régulière. Elle s'étend en $f\colon U \to \mathbb{P}^1$ puis $f\colon X \to \mathbb{P}^1$ car X est projective. On a alors $div(f) = f^*((0) - (\infty))$

Définition 5.1.9. Si $f\colon X \to Y$ est un morphisme fini de courbes. On déf $\deg(f) = [K(Y) : K(X)]$.

Corollaire 5.1.10. *Comme $k = \bar{k}$, pour tout $y \in Y$ on a*

$$\deg(f) = \sum_{f(x)=y} e_{x,y}$$

La preuve c'est juste que le degré résiduel est tjr 1!

Corollaire 5.1.11. *Soit $f\colon X \to Y$ fini de courbes, alors pour tout $D \in Z^1(Y)$*

$$f_* f^* D = \deg(f) D$$

Démonstration. Suffit de le montrer pour les diviseurs $(y) \in Z^1(Y)$. On a

$$\begin{aligned} f_* f^*(y) &= f_*(\sum_{x\in f^{-1}(y)} e_{x,y} n_y(x)) \\ &= f_*(\sum_{x\in f^{-1}(y)} e_{x,y}(x)) \\ &= (\sum_{x\in f^{-1}(y)} e_{x,y})(y) \\ &= \deg(f)(y) \end{aligned}$$

□

Lemme 5.1.12. *Si* $X = \mathbb{P}^1(k)$ *alors* $\deg(div(K(X)^\times)) = 0$.

Démonstration. Suffit de le montrer pour $t - a$ si $f \in k(t)$. Mais

$$div(t-a) = (a) - (\infty)$$

d'où le résultat. □

Proposition 5.1.13. *Soit* $f\colon X \to Y$ *un morphisme fini de courbes lisses propre. Si* $D \in Z^1(Y)$, *alors*

$$\deg(f^*(D)) = \deg(f)\deg(D)$$

Démonstration. $\deg(f^*D) = \deg(f_*f^*D) = \deg(\deg(f)D) = \deg(f)\deg(D)$ □

Corollaire 5.1.14. *Pour toute courbe lisse propre intègre :*

$$\deg(div(K(X)^\times)) = 0$$

On obtient un morphisme

$$\deg\colon Pic(X) \to \mathbb{Z}$$

Proposition 5.1.15. *Si* $X = \mathbb{P}^1(k)$, $\deg$ *est un isomorphisme.*

Proposition 5.1.16. *Soit* X *une courbe intègre lisse projective. Si il existe* $x_0, x_1 \in X$ *t.q* $(x_0) \sim (x_1)$, *alors*

$$X \simeq \mathbb{P}^1(k)$$

Démonstration. Il existe $f \in K(X)^*$ t.q. $div(f) = (x_0) - (x_1) = f^*((0) - (\infty))$ d'où $f^*(0) = (x_1)$ puis $\deg(f) = 1$ et f est un isomorphisme

$$X \simeq \mathbb{P}^1(k)$$

□

5.2 Espaces de Riemann-Roch

Soit D un diviseur sur X. On pose

$$L(D) := \{f \in K(X)^* | div(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

avec $D \geq 0$ si $n_x \geq 0$ pour tout x. En plus on pose aussi

$$|D| := \mathbb{P}_-(L(D)) = \{D' \in Z^1(X) | D' \sim D, D' \geq 0\}$$

Exemple 5.2.1. $L(0) = \mathcal{O}_X(X) = k$.

Remarque 20. *$L(D)$ est un espace vectoriel.*

Proposition 5.2.2. *On note $l(D) = dim_k L(D)$.*

1. *Si $D \sim E$, $l(D) = l(E)$.*
2. $\deg(D) < 0 \implies l(D) = 0$.
3. *Si $D' \leq D$ alors $l(D') \leq l(D) \leq l(D') + \deg(D) - \deg(D')$.*
4. *Si $\deg(D) \geq 0$ alors $l(D) \leq \deg(D) + 1$.*
5. *Si $\deg(D) = 0$, alors $l(D) > 0$ ssi $D \sim 0$.*

Démonstration. Pour 1. si $D \sim E$ alors $|D| = |E|$, d'où $l(D) - 1 = l(E) - 1$. Pour 2., $|D| = \emptyset$, psq si $D' \sim D$ alors $\deg(D') = \deg(D)$ et si $D' \geq 0$, $\deg(D') \geq 0$.

Pour 3., si $D' < D$, alors $l(D') \leq l(D)$ car on a

$$|D'| \hookrightarrow |D|$$

via $E \mapsto E + D - D'$ (car $D - D' \geq 0$).

Y suffit de montrer pour $D = D' + (x)$ que $l(D) \leq l(D') + 1$ par récurrence. Soit t_x une coordonnée locale en x. Si $f \in L(D) - 0$ alors $v_x(f_* t_x^{n_x}) \geq 0$ où $n_x = v_x(D)$. On a

$$v_x(f t_x^{n_x}) = v_x(f) + n_x \geq 0$$

et on pose

$$\rho \colon L(D) \to k$$

donnée par $f \mapsto (f t_x^{n_x})(x)$.
Et là on fait de l'algèbre linéaire, omg d'où ça sort.
On a $\ker(\rho) = \{f \in K(X)^* | div(f t_x^{n_x - 1}) \geq 0\} = L(D)$. D'où $l(D') \leq l(D) - 1$.

Pour 4. si $D \geq 0 =: D'$, alors

$$l(D) \leq l(0) + \deg(D) \leq \deg(D) + 1$$

Pour 5., si $\deg(D) = 0$, alors $l(D) > 0$ d'où $|D| \neq \emptyset$ puis il existe $E \geq 0$ t.q $E \sim D$ mais si $E \geq 0$ et $\deg(E) = 0$ alors $E = 0$ d'où $D \sim 0$. $\square$

Corollaire 5.2.3. *$L(D)$ est un k-espace vectoriel de dimension finie !!*

Par exemple, sur $\mathbb{P}^1(k)$, $l([0]) = 2$. Et $L(D) = < t^{-i}, i = 0, \ldots, \deg(D) >$.

5.3 Théorème de Riemann-Roch

Soit X une courbe intègre lisse propre. Il existe $g \geq 0$ et un diviseur K_X t.q. pour tout $D \in Z^1(X)$

$$l(D) - l(K_X - D) = \deg(D) + 1 - g$$

Définition 5.3.1. On appelle g le genre de X.

Lemme 5.3.2. *On a* $\deg(K_X) = 2g - 2$ *et* $l(K_X) = g$.

Lemme 5.3.3. K_X *est unique à équivalence linéaire.*

Démonstration. Si il existe un autre K_X qui marche, K'_X, alors

$$\deg(K_X - K'_X) = 0$$

puis

$$l(K'_X) - l(K_X - K'_X) = g - 1$$

implique que $l(K_X - K'_X) = 1$, d'où $K_X \sim K'_X$. □

Corollaire 5.3.4. *Si* $\deg(D) > 2g - 2$, *alors*

$$l(D) = \deg(D) + 1 - g$$

5.4 Différentielles de Kahler

Il dit que le livre de Qing Liu est une bonne source.

Définition 5.4.1. Soit B une k-algèbre et F la B-algèbre libre générée par les symboles db pour $b \in B$. On note E le sous-module de F généré par $d\lambda$ pour $\lambda \in k$, $d(b_1 + b_2) - d(b_1) - d(b_2)$ et $d(b_1 b_2) - b_1 d(b_2) - b_2 d(b_1)$. On pose

$$\Omega^1_{B/k} := F/E$$

Remarque 21. *C'est un module pas un anneau là.*

Exemple 5.4.2. On remarque que si $B = k[T]$ alors $d(P(T)) = P'(T)dT$ et

$$\Omega_{k[T]/k} = k[T]dT$$

Exercices 5.4.3. $S^{-1}\Omega^1_{B/k} \simeq \Omega^1_{S^{-1}B/k}$.

Définition 5.4.4. Soit X une variété algébrique, on définit un $\mathcal{O}_X$-module $\Omega^1_{X/k}$ par

$$\Omega^1_{X/k}(U) := \Omega^1_{\mathcal{O}_X(U),k}$$

pour tout ouvert affine.

Par l'exercice, $(\Omega^1_{X/k})_x = \Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x},k}$.

Proposition 5.4.5. *Si X est une courbe algébrique lisse, alors $(\Omega^1_{X/k})_x$ est un $\mathcal{O}_{X,x}$ − module libre de rang 1.*

Démonstration. On peut supposer $X \hookrightarrow \mathbb{A}^n(k)$ affine donnée par $F_1, \dots, F_m$ dans $k[T_1, \dots, T_n]$. Le rang de $J(X)_x$ est $n-1$ d'où on peut garder que $F_1, \dots, F_{n-1}$ dans la jacobienne. Puis $X \subset Z(F_1, \dots, F_{n-1})$ d'où égalité. Maintenant la jacobienne est de taille $n-1 \times n$, on la complète en ajoutant la ligne $(1, 0, \dots, 0)$ la matrice devient inversible en x. On multiplie la nouvelle matrice par la colonne $(\partial T_1, \dots, \partial T_n)$. On obtient $(d(T_1), dF_1, \dots, dF_n)$. Maintenant,

$$A(X) = k[T_1, \dots, T_n]/(F_1, \dots, F_n)$$

d'où dans $\Omega^1_{A(X),k}$, $dF_i = 0$ pour tout i. Puis $(dT_1, dF_1, \dots, dF_n) = (dT_1, 0, \dots, 0)$ dans les différentielles. En particulier,

$$\Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}/k} = \mathcal{O}_{X,x} dT_1$$

□

Exemple 5.4.6. Soit K un corps de fonctions. Alors $\Omega^1_{K,k}$ est de dimension 1 sur K. En effet, K est une extension finie séparable de $k(t)$. D'où $K = k(t)[X]/P(X)$. Puis

$$\Omega^1_{K,k} =< dt, dX >$$

Mais $0 = dP(X) = P'(X)dX$ et $P'(X) \neq 0$. D'où $dX = 0$ puis

$$\Omega^1_{K,k} = K dt = \Omega^1_{k(t),k} \otimes_k K$$

Soit X une courbe lisse propre intègre. Et soit $\omega \in \Omega^1_{K(X),k}$. Soit $x \in X$, alors

$$\omega = f dt_x$$

pour $f \in K(X)$. On définit alors

$$ord_x \omega := v_x(f)$$

Exemple 5.4.7. Pour $\mathbb{P}^1(k)$, on a $ord_a dt = ord_a d(t-a) = 0$ pour $a \in \mathbb{A}^1(k)$. À l'infini, la coordonnée locale est $s = 1/t$. D'où $dt = d(1/s) = -(1/s^2)ds$ d'où $ord_\infty dt = -2$.

Si $\omega \in \Omega^1_{K(X),k}$, on définit

$$div(w) = \sum_{x\in X}(ord_x\omega)(x)$$

faut montrer que le support est fini, il le fait pas, il dit que ça se fait bien.

Comme $\Omega^1_{K(X),k}$ est de dimension 1, le diviseur est unique.

Définition 5.4.8. On définit $K_X = div(\omega)$ pour toute forme différentielle $\Omega^1_{K(X),k}$.

Exemple 5.4.9. On a $\deg(K_{\mathbb{P}^1(k)}) = -2 = -2 + 2.g$ d'où $g = 0$ pour $\mathbb{P}^1(k)$.

Théoreme 5.4.10 (Riemann-Hurwitz)**.** *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme fini séparable de courbes lisses propres intègres. Alors*

$$2g(X) - 2 \geq \deg(f)(2g(Y) - 2) + \sum_{x\in X}(e_{x,f(x)} - 1)$$

avec égalité si

1. *$char(k) = 0$*
2. *$char(k) = p > 0$ et $p \nmid e_{x,f(x)}$ pour tout x t.q $e_{x,f(x)} \neq 0$.*

Remarque 22. *Si $f\colon X \to Y$ et $\omega = gdt$ sur Y, alors*

$$f^*\omega = f^*gd(f^*t)$$

Corollaire 5.4.11. *Soit $f\colon \mathbb{P}^1(k) \to Y$ avec Y lisse propre connectée. Alors Y est de genre 0. Puis on peut montrer que Y est isomorphe à $\mathbb{P}^1(k)$.*