Exercices d'algèbre homologique

Rayane Bait

Exercice 0.1

On utilise les notations de l'exercice. Soit

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \xrightarrow[f]{} \mathscr{F} \xrightarrow[g]{} \mathscr{F}'' \qquad (*)$$

une suite exacte dans $Sh(X)$ et $U \subseteq X$ un ouvert de X. On doit montrer que

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}'(U) \xrightarrow[f(U)]{} \mathscr{F}(U) \xrightarrow[g(U)]{} \mathscr{F}''(U)$$

est exacte dans Ab. Autrement dit que $\ker(f(U)) = 0$ et $\mathrm{im}(f(U)) = \ker(g(U))$ dans Ab.

On montre d'abord le premier point. Soit $s \in \ker(f(U))$ et $x \in X$. Par commutativité de

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{F}'(U) \arrow[r, "f(U)"'] \arrow[d] & \mathscr{F}(U) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F}_x \arrow[r, "f_x"'] & \mathscr{F}'_x
\end{tikzcd}$$

pour les flèches évidentes et par exactitude de la ligne du bas, on a $(U, s) = (V_x, 0) \in \mathscr{F}_x$ pour tout $x \in U$. Quitte à remplacer V_x par $U \cap V_x$, on peut supposer $V_x \subset U$. En particulier, on obtient un recouvrement de U par des ouverts V_x tels que

$$s|_{V_x} = 0$$

pour tout $x \in U$. D'où $s = 0 \in \mathscr{F}(U)$ car $\mathscr{F}$ est un faisceau. On a montré que $f(U)$ est injective pour tout ouvert U de X.

On montre maintenant le second point par double inclusion, d'abord $\ker(g(U)) \subset \mathrm{im}(f(U))$: Soit $s \in \ker(g(U))$ et $x \in U$, par commutativité de

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U) \arrow[r, "g(U)"'] \arrow[d] & \mathscr{F}''(U) \arrow[d] \\
\mathscr{F}_x \arrow[r, "g_x"'] & \mathscr{F}''_x
\end{tikzcd}$$

on a, $g_x((U,s)) = (U,0)$. Maintenant par exactitude de

$$\mathscr{F}'_x \xrightarrow[f_x]{} \mathscr{F}_x \xrightarrow[g_x]{} \mathscr{F}''_x$$

il existe $(V_x, s'_x) \in \mathscr{F}'_x$ tel que $f_x((V_x, s'_x)) = (U,s)$. Quitte à prendre $V_x \cap U = V_x$ on peut supposer $V_x \subset U$. Maintenant par commutativité de

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{F}'(U) \arrow[r, "f(U)"'] \arrow[d] & \mathscr{F}(U) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F}'(V_x) \arrow[r, "f(V_x)"'] \arrow[d] & \mathscr{F}(V_x) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F}'_x \arrow[r, "f_x"'] & \mathscr{F}_x
\end{tikzcd}$$

on obtient $f(V_x)(s'_x) = s|_{V_x}$ pour chaque $x \in U$ et $U = \cup_{x \in U} V_x$. Enfin, pour tout $x, x' \in U$, par commutativité de

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}'(V_x) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F}(V_x) \arrow[d] \\
\mathscr{F}'(V_x \cap V_{x'}) \arrow[r] & \mathscr{F}(V_x \cap V_{x'}) \\
\mathscr{F}'(V_{x'}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{F}(V_{x'}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

on a

$$f(V_x \cap V_{x'})(s'_x|_{V_x \cap V_{x'}}) = s|_{V_x \cap V_{x'}} = f(V_x \cap V_{x'})(s'_{x'}|_{V_x \cap V_{x'}})$$

d'où par injectivité de $f(V_x \cap V_{x'})$ on a

$$s'_x|_{V_x \cap V_{x'}} = s'_{x'}|_{V_x \cap V_{x'}}$$

comme $\mathscr{F}'$ est un faisceau on peut relever les s'_x en un $s' \in U$. Par commutativité du carré du haut dans l'avant dernier diagramme, comme $\mathscr{F}$ est un faisceau et $f(V_x)(s'|_{V_x}) = s|_{V_x}$ on obtient que $f(U)(s') = s$ d'où $\ker(g(U)) \subset \mathrm{im}(f(U))$.

Soit maintenant $s = f(U)(s')$ pour $s' \in \mathscr{F}'(U)$. Pour tout $x \in U$, par commutativité de

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}'(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F}''(U) \arrow[d] \\
\mathscr{F}'_x \arrow[r, "f_x"'] & \mathscr{F}_x \arrow[r, "g_x"'] & \mathscr{F}''_x
\end{tikzcd}$$

et par exactitude de la ligne du bas on a

$$(V_x, 0) = g_x(f_x((U, s'))) = g_x((U, s)).$$

On obtient un recouvrement $U = \cup_x V_x$ de U par les V_x tel que $g(U)(s)|_{V_x} = g(V_x)(s|_{V_x}) = 0$. Comme $\mathscr{F}''$ est un faisceau, on obtient $g(U)(s) = 0$ d'où $\ker(g(U)) = \mathrm{im}(f(U))$.

Exercice 0.2

1)

Avec les notations de l'exercice, on montre que S est inductif et non vide. Par exactitude sur les fibres, pour $x \in U$ il existe (V_x, s_x) telle que $g_x((V_x, s_x)) = (V'_x, s_x)$. En particulier, (V_x, s_x) est dans S donc S est non vide. Soit maintenant $((U_i, s_i))_{i \in I}$ une chaîne donnée par un ordre total I. Alors pour $i, j \in I$ et $i \leq j$ on a

$$s_j|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i} = s_i = s_i|_{U_i \cap U_j}$$

d'où la famille se relève en un $s \in \cup_{i \in I} U_i$ tel que $s|_{U_i} = s_i$ et $U_i \subset \cup_{j \in I} U_j$ alors

$$(\cup_{i \in I} U_i, s)$$

est un majorant de $((U_i, s_i))_{i \in I}$, on montre qu'il est dans S. On a $g(\cup_{i \in I} U_i)(s)|_{U_i} = s''|_{U_i}$ pour tout $i \in I$, d'où $g(\cup_{i \in I} U_i)(s) = s''|_{\cup_{i \in I} U_i}$ par unicité du relèvement. D'où S est inductif puis en appliquant le lemme de Zorn à S le résultat.

2)

Soit (s, V) un élément maximal de S. Si $U - V$ est non vide alors on prends $x \in U - V$ et localement, (V_x, c_x) un antécédent de (U, s'') par g_x. Alors $s|_{V_x \cap V} \neq c_x|_{V_x \cap V}$ car sinon on pourrait relever c_x et s en un $c \in \mathscr{F}(V_x \cup V)$ tel que $c|_{V_x} = c_x$, $c|_V = s$ et $f(V_x \cup V)(c) = s''|_{V_x \cup V}$ ce qui contredit la maximalité de (V, s). Supposons donc que $s|_{V_x \cap V} \neq c_x|_{V_x \cap V}$. Alors

$$s|_{V_x \cap V} - c_x|_{V_x \cap V} \in \ker(g(V_x \cap V))$$

or par l'exercice 1, $0 \to \mathscr{F}'(U) \to \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}''(U)$ est exacte au milieu, d'où

$$s|_{V_x \cap V} - c_x|_{V_x \cap V} \in \mathrm{im}(f(V_x \cap V)).$$

Comme $\mathscr{F}'$ est flasque, on relève un antécédent $c' \in \mathscr{F}'(V_x \cap V)$ en $c'_x \in \mathscr{F}'(V_x)$. Alors $c_x - f(V_x)(c'_x)$ et s coincide sur $V_x \cap V$, en effet

$$(c_x - f(V_x)(c'_x))|_{V_x \cap V} = c_x|_{V_x \cap V} - c_x|_{V_x \cap V} + s|_{V_x \cap V} = s|_{V_x \cap V}$$

En plus, $g(V_x)(c_x - f(V_x)(c'_x)) = g(V_x)(c_x) = s''|_{V_x}$. D'où on peut relever $c_x + f(V_x)(c'_x)$ et s en un $c \in \mathscr{F}(V_x \cup U)$ tel que $(V_x \cup V, c) \in S$. Comme V_x n'est pas inclu dans U, on obtient $(V, s) < (V_x \cup U, c)$ ce qui contredit la maximalité de (V, s). D'où $U - V$ est vide et s est un antécédent de s'' puis l'exactitude à droite.

Exercice 0.3

On utilisera librement dans tout l'exercice que $Sh(X)$ est une catégorie abélienne avec les résultats suivants du cours :

1. Le noyau d'une flèche $f\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ dans $Sh(X)$ coincide avec le faisceau défini par
$$\ker\colon U \mapsto \ker(U) := \ker(\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}'(U))$$
2. L'image d'une flèche $f\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ dans $Sh(X)$ coincide avec le faisceautisé du préfaisceau défini par
$$\mathrm{im}\colon U \mapsto \mathrm{im}(U) := \mathrm{im}(\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}'(U))$$
3. Le conoyau d'une flèche $f\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ dans $Sh(X)$ coincide avec le faisceautisé du préfaisceau défini
$$\mathrm{coker}\colon U \mapsto \mathrm{coker}(U) := \mathrm{coker}(\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}'(U))$$
4. La coimage d'une flèche $f\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ dans $Sh(X)$ coincide avec le faisceautisé du préfaisceau défini
$$\mathrm{coim}\colon U \mapsto \mathrm{coim}(U) := \mathrm{coim}(\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}'(U))$$
5. Le faisceau $0_{Sh(X)}$ défini par $0_{Sh(X)}(U) := 0_{Ab}$ est un objet zéro dans $Sh(X)$.

On note $(\_)^\sharp\colon PSh(X) \to Sh(X)$ le foncteur de faisceautisation. Enfin, si $\mathscr{F}$ est un faisceau sur un espace topologique on pourra décrire une section $\bar{s}\colon U \to Et(\mathscr{F})$ de l'espace étalé de $\mathscr{F}$ au dessus de U comme un tuple $(s_x)_{x\in U} = (\bar{s}(x))_{x\in U}$.

1)

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau dans $Sh(X)$. Pour tout $x \in X$, on a $0 = 0_{F_x} \in \mathscr{F}_x$ un élément neutre car $\mathscr{F}_x$ est un groupe. En particulier, pour tout ouverts $V \subseteq U$ de X, si $s = (s_x)_{x \in V} \in C^0(\mathscr{F})(V)$ alors si on note $s' := (s'_x)_{x \in U}$ la section telle que $s'_x = s_x$ pour $x \in V$ et $s'_x = 0$ pour $x \in U - V$ on a $s'|_V = s$ d'où $C^0(\mathscr{F})$ est flasque.

2)

Soit $\mathscr{F} \in Sh(X)$. On définit $i^0(\mathscr{F})\colon \mathscr{F} \to C^0(\mathscr{F})$ le morphisme de faisceau défini par $i^0(\mathscr{F})(U)\colon s \mapsto (s_x)_{x \in U}$ pour tout ouvert U de X et où $s_x \in \mathscr{F}_x$ est l'image de s dans la fibre $\mathscr{F}_x$ induite par $\mathscr{F}$. On montre que $i^0(\mathscr{F})$ est injectif en montrant que $\ker(i^0(\mathscr{F})) = 0_{Sh(X)}$. Soit U un ouvert sur X et $s \in \ker(i^0(\mathscr{F}))(U)$, alors $(s_x)_{x \in U} = ((V_x, 0))_{x \in U}$, en particulier $s|_{V_x \cap U} = 0$ et $\cup V_x \cap U = U$ d'où $s = 0 \in \mathscr{F}(U)$, en particulier on a bien $\ker(i^0(\mathscr{F})) = 0_{Sh(X)}$.

3)

On définit en plus $Z^0(\mathscr{F}) = \mathscr{F}$, $d_0^0\colon C^0(\mathscr{F}) \to Z^1(\mathscr{F})$ et $d^0 = i^0(\mathscr{F}) \circ (d_0^0)$. On suppose maintenant défini $d_0^{i-1}\colon C^{i-1}(\mathscr{F}) \to Z^i(\mathscr{F})$ et

$$d^{i-1} = i^0(Z^{i-1}) \circ (d_0^{i-1})\colon C^{i-1}(\mathscr{F}) \to C^i(\mathscr{F})$$

pour $n \geq i \geq 1$. On pose

$$d_0^n = \operatorname{coker}(i^0(Z^{n-1}(\mathscr{F}))) := (C^{n-1}(\mathscr{F}) \to Z^n(\mathscr{F}))$$

la flèche canonique du conoyau et $d^n = i^0(Z^n(\mathscr{F})) \circ d_0^n$.

4)

On commence par remarquer qu'un noyau est invariant par post-composition par un monomorphisme, de même une image est invariante par pré-composition par un épimorphisme dans une catégorie abélienne. On le montre en annexe.

On montre maintenant que $0 \to \mathscr{F} \to C^\bullet(\mathscr{F})$ est exacte. Par la question 2), et comme les morphismes injectifs de faisceaux sont des monomorphismes, par un exercice du cours $0 \to \mathscr{F} \to C^0(\mathscr{F})$ est exacte. On montre donc que $\mathscr{F} \to C^\bullet(\mathscr{F})$ est exacte. On utilise ici im pour désigner l'image catégorique.

Par la première partie de la remarque précédente et par la question 2) on a $\ker(d^n) = \ker(d_0^n)$. Maintenant par construction, et par le cours

$$\begin{aligned}\ker(d_0^n) &= \ker(\operatorname{coker}(i^0(Z^n)))\\ &= \ker(\operatorname{coker}(Z^n(\mathscr{F}) \to C^n(\mathscr{F})))\\ &= \operatorname{im}(Z^n(\mathscr{F}) \to C^n(\mathscr{F}))\\ &= \operatorname{im}(C^{n-1}(\mathscr{F}) \to C^n(\mathscr{F}))\end{aligned}$$

où la dernière égalité est dûe à la deuxième partie de la remarque précédente car $(C^{n-1}(\mathscr{F}) \to Z^n(\mathscr{F})) = \operatorname{coker}(Z^{n-1}(\mathscr{F}) \to C^{n-1}(\mathscr{F}))$ est un épimorphisme. En particulier, $0 \to \mathscr{F} \to C^\bullet(\mathscr{F})$ est exacte.

5)

Dans cet exercice on désigne par $d(\mathscr{F})^n$ (resp. $d(\mathscr{F})_0^n$) la flèche $C^n(\mathscr{F}) \to C^{n+1}(\mathscr{F})$ (resp. $C^n(\mathscr{F}) \to Z^{n+1}(\mathscr{F})$) construite en 3).

Étant donné $f\colon \mathscr{F}' \to \mathscr{F}$ dans $Sh(X)$ on commence par construire $C^0(f)$ et $C^\bullet(f)$ avant de montrer que $C^0(\_)$ et $C^\bullet(\_)$ sont des foncteurs exacts. Ça suffit à prouver le résultat, en effet si $C^\bullet(\_)$ est un foncteur exact alors pour toute suite exacte

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$$

dans $Sh(X)$ et tout ouvert $U \subset X$, comme $C^n(\mathscr{F}') = C^0(Z^n(\mathscr{F}'))$ est flasque par la question 1),

$$0 \to C^n(\mathscr{F}')(U) \to C^n(\mathscr{F})(U) \to C^n(\mathscr{F}'')(U) \to 0$$

est exacte par l'exercice 2. D'où le résultat.

On commence par montrer que $C^0(\_)$ est un foncteur. On pose

$$C^0(f)(U)\colon (s_x)_{x\in U} \mapsto (f_x s_x)_{x\in U}.$$

Par définition, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i^0(\mathscr{F}')"'] & \mathscr{F} \arrow[d, "i^0(\mathscr{F})"] \\ C^0(\mathscr{F}') \arrow[r, "C^0(f)"'] & C^0(\mathscr{F}) \end{tikzcd}$$

commute et $C^0(f)$ est bien un morphisme de faisceau. Maintenant si $g\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}''$ est une autre flèche dans $Sh(X)$ alors $C^0(g \circ f) = C^0(g) \circ C^0(f)$ par définition car le foncteur fibre $(\_)_x\colon Sh(X) \to Ab$ pour $x \in X$ est un foncteur. Enfin $C^0(id_{\mathscr{F}}) = id_{C^0(\mathscr{F})}$ pour la même raison. D'où $C^0(\_)$ est un foncteur.

On construit maintenant $C^\bullet(f) = (f^n\colon C^n(\mathscr{F}') \to C^n(\mathscr{F}))_{n\geq 0}$ étant donné $f\colon \mathscr{F}' \to \mathscr{F}$ dans $Sh(X)$. On pose $f^0 = C^0(f)$, il suffit de construire $Z^\bullet(f) := (f_0^n\colon Z^n(\mathscr{F}') \to Z^n(\mathscr{F}))$ telles que

$$\begin{tikzcd}
C^{n-1}(\mathscr{F}') \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d, "d(\mathscr{F}')_0^{n-1}"'] & C^{n-1}(\mathscr{F}) \arrow[d, "d(\mathscr{F})_0^{n-1}"] \\
Z^n(\mathscr{F}') \arrow[r, "f_0^n"'] & Z^n(\mathscr{F})
\end{tikzcd}$$

commute pour tout $n \geq 0$ et de poser $(f^n)_{n\geq 0} = (C^0(f_0^n))$. On le fait par récurrence sur n. Pour $n = 1$ on regarde

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}' \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathscr{F} \arrow[d] \\
C^0(\mathscr{F}') \arrow[r, "f^0"] \arrow[d, "d_0^0"'] & C^0(\mathscr{F}) \arrow[d, "d_0^0"] \\
Z^1(\mathscr{F}') \arrow[r, "f_0^1"'] & Z^1(\mathscr{F})
\end{tikzcd}$$

et on veut construire la flèche du bas. On remarque que $(\mathscr{F}' \to C^0(\mathscr{F}'))$ se factorise par $\ker(d(\mathscr{F})_0^0 \circ f^0)$. En effet par commutatitivité du carré du haut et exactitude de la colonne de droite on a

$$0_{\mathscr{F}',Z^1(\mathscr{F})} = 0_{\mathscr{F},Z^1(\mathscr{F})} \circ f = (d(\mathscr{F})_0^0 \circ i^0(\mathscr{F})) \circ f = d(\mathscr{F})_0^0 \circ f^0 \circ i^0(\mathscr{F}')$$

d'où $\mathscr{F}' \to C^0(\mathscr{F}')$ se factorise par le noyau. On écrit maintenant

$$\begin{aligned}
Z^1(\mathscr{F}') &= \operatorname{coker}(\mathscr{F}' \to C^0(\mathscr{F}')) \\
&= \operatorname{coim}(C^0(\mathscr{F}') \to Z^1(\mathscr{F}'))
\end{aligned}$$

où la dernière égalité est par construction. Par le point précédent, en notant

$$\mathscr{F}' = \ker\big(C^0(\mathscr{F}) \to \operatorname{coim}(C^0(\mathscr{F}') \to Z^1(\mathscr{F}'))\big)$$

on obtient une flèche

$$\ker\big(C^0(\mathscr{F}') \to \operatorname{coim}(C^0(\mathscr{F}') \to Z^1(\mathscr{F}'))\big) \to \ker(d_0^0 \circ f^0)$$

d'où une flèche induite

$$\mathrm{coim}\left(C^0(\mathscr{F}') \to \mathrm{coim}(C^0(\mathscr{F}') \to Z^1(\mathscr{F}'))\right) \to \mathrm{coim}(d_0^0 \circ f^0)$$

en particulier, le membre de gauche est $\mathrm{coim}(C^0(\mathscr{F}') \to Z^1(\mathscr{F}')) = Z^1(\mathscr{F}')$. Finalement, on obtient une flèche induite

$$f_0^1 \colon Z^1(\mathscr{F}') \to \mathrm{coim}(d(\mathscr{F})_0^0 \circ f^0) \to \mathrm{im}(d(\mathscr{F})_0^0 \circ f^0) \to Z^1(\mathscr{F})$$

ce qui conclut le cas $n = 1$. La commutativité étant par construction. Le cas $n \geq 2$ se fait de manière identique en remplaçant $\mathscr{F} = Z^0(\mathscr{F})$ par $Z^{n-1}(\mathscr{F})$, $C^0(\mathscr{F})$ par $C^n(\mathscr{F})$ et $Z^1(\mathscr{F})$ par $Z^n(\mathscr{F})$.

On suppose maintenant que $C^\bullet$ est un foncteur, une preuve est en annexe si elle était demandée.

On montre maintenant que $C^\bullet$ est exact. Supposons d'abord que $C^0(\_)$ est exact et soit

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \xrightarrow[f]{} \mathscr{F} \xrightarrow[g]{} \mathscr{F}'' \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

une suite exacte dans $Sh(X)$. On montre que le morphisme de complexe induit $0 \to C^\bullet(\mathscr{F}') \to C^\bullet(\mathscr{F}) \to C^\bullet(\mathscr{F}'') \to 0$ est exact. Il suffit de montrer pour tout $n \geq 0$ la suite

$$0 \to C^n(\mathscr{F}') \to C^n(\mathscr{F}) \to C^n(\mathscr{F}'') \to 0$$

est exacte dans $Sh(X)$. En plus on a supposé que $C^0(\_)$ était exact, il suffit donc de montrer que la suite

$$0 \to Z^n(\mathscr{F}') \to Z^n(\mathscr{F}) \to Z^n(\mathscr{F}'') \to 0$$

est exacte. On le montre par récurrence sur n. En posant $Z^0(\mathscr{F}) := \mathscr{F}$ on obtient le cas $n = 0$ par l'hypothèse $(*)$. Supposons maintenant le résultat vrai pour $0 \leq i \leq n-1$. On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z^{n-1}(\mathscr{F}') \arrow[r, "f_0^{n-1}"] \arrow[d] & Z^{n-1}(\mathscr{F}) \arrow[r, "f_0^{n-1}"] \arrow[d] & Z^{n-1}(\mathscr{F}'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{n-1}(\mathscr{F}') \arrow[r, "C^0(f_0^{n-1})"] & C^{n-1}(\mathscr{F}) \arrow[r, "C^0(g_0^{n-1})"] & C^{n-1}(\mathscr{F}'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse de récurrence, les lignes sont exactes. En plus, par fonctorialité de $C^0(\_)$ et par construction, le diagramme commute. Comme $Sh(X)$ est abélienne, on applique le lemme du serpent pour obtenir la suite exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker(i^0(Z^{n-1}(\mathscr{F}'))) \arrow[r, "\ker(f_0^{n-1})"] & \ker(i^0(Z^{n-1}(\mathscr{F}))) \arrow[r, "\ker(g_0^{n-1})"] & \ker(i^0(Z^{n-1}(\mathscr{F}''))) \arrow[dll] & \\ & \operatorname{coker}(i^0(Z^{n-1}(\mathscr{F}'))) \arrow[r] & \operatorname{coker}(i^0(Z^{n-1}(\mathscr{F}))) \arrow[r] & \operatorname{coker}(i^0(Z^{n-1}(\mathscr{F}''))) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

or $i^0(\mathscr{F})$ est un monomorphisme de faisceaux pour tout $\mathscr{F} \in Sh(X)$, d'où on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker}(i^0(Z^{n-1}(\mathscr{F}'))) \longrightarrow \operatorname{coker}(i^0(Z^{n-1}(\mathscr{F}))) \longrightarrow \operatorname{coker}(i^0(Z^{n-1}(\mathscr{F}''))) \longrightarrow 0$$

mais par définition $\operatorname{coker}(i^0(Z^{n-1}(\mathscr{F}))) = Z^n(\mathscr{F})$ pour tout faisceau $\mathscr{F}$. D'où le résultat, enfin la preuve du lemme du serpent permet de placer la suite du dessus dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C^{n-1}(\mathscr{F}') \arrow[r, "C^0(f_0^{n-1})"] \arrow[d, "d(\mathscr{F}')_0^{n-1}"] & C^{n-1}(\mathscr{F}) \arrow[r, "C^0(g_0^{n-1})"] \arrow[d, "d(\mathscr{F})_0^{n-1}"] & C^{n-1}(\mathscr{F}'') \arrow[r] \arrow[d, "d(\mathscr{F}'')_0^{n-1}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z^n(\mathscr{F}') \arrow[r] & Z^n(\mathscr{F}) \arrow[r] & Z^n(\mathscr{F}'') \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

d'où par commutativité des carrés, les flèches du bas sont bien f_0^n et g_0^n en appliquant le lemme de l'annexe sur la fonctorialité de $C^\bullet$ sachant que $d(\mathscr{F}')_0^{n-1}$ et $d(\mathscr{F})_0^{n-1}$ sont des épimorphismes.

On montre enfin que $C^0(\_)\colon Sh(X) \to Sh(X)$ est exact. Soit $f\colon \mathscr{F}' \to \mathscr{F}$ dans $Sh(X)$. La flèche $C^0(f)$ est donnée par

$$C^0(f)(U)\colon (s'_x)_{x\in U} \mapsto (f_x(s'_x))_{x\in U}$$

où $f_x\colon \mathscr{F}'_x \to \mathscr{F}_x$ est la flèche induite par f sur les fibres. Il suffit de montrer que $C^0(\ker(\mathscr{F}' \to \mathscr{F})) = \ker(C^0(\mathscr{F}') \to C^0(\mathscr{F}))$ et $C^0(\operatorname{im}(\mathscr{F}' \to \mathscr{F})) = \operatorname{im}(C^0(\mathscr{F}') \to C^0(\mathscr{F}))$. Si c'est le cas, alors comme $C^0(0_{Sh(X)}) = 0_{Sh(X)}$, car tout produit d'objets terminaux est terminal, on obtient directement pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \xrightarrow[f]{} \mathscr{F} \xrightarrow[g]{} \mathscr{F}'' \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

dans $Sh(X)$ que

$$0 \longrightarrow C^0(\mathscr{F}') \xrightarrow[C^0(f)]{} C^0(\mathscr{F}) \xrightarrow[C^0(g)]{} C^0(\mathscr{F}'') \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

est exacte par fonctorialité de $C^0(\_)$.

On commence par montrer que $C^0(\ker(\mathscr{F}' \to \mathscr{F})) = \ker(C^0(\mathscr{F}') \to C^0(\mathscr{F}))$. Par la description donnée en 1. on a

$$\ker(C^0(\mathscr{F}') \to C^0(\mathscr{F}))(U) = \ker(\prod_{x\in U} f_x \colon \prod_{x\in U} \mathscr{F}'_x \to \prod_{x\in U} \mathscr{F}_x)$$

et de plus $C^0(\ker(\mathscr{F}' \to \mathscr{F}))(U) = \prod_{x\in U} \ker(\mathscr{F}' \to \mathscr{F})_x$, il suffit donc de montrer que si

$$(s_x)_{x\in U} \in \ker(\prod_{x\in U} f_x \colon \prod_{x\in U} \mathscr{F}'_x \to \prod_{x\in U} \mathscr{F}_x)$$

alors pour tout $x \in U$ on a $s_x \in \ker(f_x)$ et inversement. Mais c'est immédiat par définition du noyau dans Ab.

On montre maintenant que $C^0(\mathrm{im}(\mathscr{F}' \to \mathscr{F})^\sharp) = \mathrm{im}(C^0(\mathscr{F}') \to C^0(\mathscr{F}))^\sharp$. Par la description donnée en 2. on peut écrire

$$\mathrm{im}(C^0(\mathscr{F}') \to C^0(\mathscr{F}))(U) = \{(f_x s'_x)_{x\in U} | s'_x \in \mathscr{F}'_x\}$$

et on remarque que c'est déjà un faisceau par définition des restrictions. En plus $C^0(\mathrm{im}(\mathscr{F}' \to \mathscr{F})^\sharp) = C^0(\mathrm{im}(\mathscr{F}' \to \mathscr{F}))$ car un préfaisceau et son faisceautisé ont les mêmes fibres, en particulier $C^0(\mathrm{im}(\mathscr{F}' \to \mathscr{F}))$ et $\mathrm{im}(C^0(\mathscr{F}') \to C^0(\mathscr{F}))$ ont la même description donc coincident. On en déduit de $C^0(\_)$ est exact.

6)

La preuve est exactement identique à celle du cours en remplaçant la définition de $H^n(\mathscr{F}, U)$ du cours par la notre.

7)

On remarque que pour tout $n \geq 0$, $Z^n(\mathscr{F})$ est flasque si $\mathscr{F}$ est flasque. En effet, c'est clair pour $n = 0$, maintenant si $n \geq 1$ on a une suite exacte

$$0 \to Z^{n-1}(\mathscr{F}) \to C^n(\mathscr{F}) \to Z^n(\mathscr{F}) \to 0$$

et par récurrence $Z^{n-1}(\mathscr{F})$ est flasque de même, $C^n(\mathscr{F}) = C^0(Z^{n-1}(\mathscr{F}))$ est flasque par la question 1), d'où par le cours $Z^n(\mathscr{F})$ est flasque. Maintenant, par l'exercice 2 pour tout ouvert $U \subseteq X$

$$0 \to Z^{n-1}(\mathscr{F})(U) \to C^n(\mathscr{F})(U) \to Z^n(\mathscr{F})(U) \to 0 \qquad (**)$$

est exacte dans Ab or par définition

$$H^n(C^\bullet(\mathscr{F}), U) := \ker(d(\mathscr{F})^n(U))/\mathrm{im}(d(\mathscr{F})^{n-1}(U))$$

d'où par $(**)$ et par les annexes 1.1 et 1.2 on a

1. $\ker(d(\mathscr{F})^n(U)) = \ker(d(\mathscr{F})^n_0(U)) = Z^{n-1}(\mathscr{F})(U)$.

2. $Z^{n-1}(\mathscr{F})(U) = \mathrm{im}(i^0(Z^{n-1})(U)) = \mathrm{im}(d(\mathscr{F})^{n-1}(U))$.

Puis $H^n(C^\bullet(\mathscr{F}), U) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

8)

On commence par remarquer qu'un faisceau abélien $\mathscr{G}$ sur X^δ est de la forme $\mathscr{G}(U) = \prod_{x\in U} \mathscr{G}_x$ pour tout ouvert U de X^δ.

En effet pour tout ouvert $U \subseteq X^\delta$ et pour toute section $s \in \mathscr{G}(U)$ on peut relever la collection $(s|_{\{x\}})_{x\in U}$ de manière unique car $\{x\} \cap \{x'\} = \emptyset$ pour tout deux points distincts x et x' de X d'où la condition de recollement sur les intersections est vide. De même, on peut relever toute famille

$$(s_x)_{x\in U} \in \prod_{x\in U} \mathscr{G}(\{x\})$$

en un unique $s \in \mathscr{G}(U)$ tel que $s|_{\{x\}} = s_x$. En particulier, $\mathscr{G}(U) \simeq \prod_{x\in U} \mathscr{G}(\{x\})$.

Il reste à montrer que $\mathscr{G}(\{x\}) = \mathscr{G}_x$ pour tout $x \in X^\delta$. Mais $\mathscr{G}(\{x\})$ est un majorant du diagramme filtrant donné par $(\mathscr{G}(U))_{x\in U}$ muni des restrictions, qui appartient au diagramme. En particulier on obtient directement $\varinjlim_{x\in U} \mathscr{G}(U) = \mathscr{G}(\{x\})$ et le résultat.

Enfin, on pose $\mathscr{G} = f^*\mathscr{F}$ pour $\mathscr{F}$ un faisceau abélien sur X. Alors pour tout ouvert $U \subseteq X^\delta$ on a

$$f^*\mathscr{F}(U) = \prod_{x\in U} (f^*\mathscr{F})_x = \prod_{x\in U} \mathscr{F}_x$$

où la dernière égalité est par le cours et le fait que $f(x) = x$. On conclut en remarquant que $f_*f^*\mathscr{F}$ est le faisceau

$$U \mapsto \prod_{x\in U} \mathscr{F}_x$$

de $\mathrm{Ouv}(X)$ dans Ab et qu'il coincide exactement avec $C^0(\mathscr{F})$ d'où le premier résultat de l'exercice.

Pour le second, soit $\mathscr{F} \in Sh(X)$, on doit montrer qu'il existe un injectif I de $Sh(X)$ et une flèche $\mathscr{F} \to I$ telle que

$$0 \to \mathscr{F} \to I$$

est exacte. On commence par montrer que $Sh(X^\delta)$ a assez d'injectifs. Soit $\mathscr{G}$ un objet de $Sh(X^\delta)$, on a par le point précédent que $\mathscr{G}(U) = \prod_{x\in U}\mathscr{G}_x$. On sait par le cours que Ab a assez d'injectifs, pour tout $x \in X$ soit donc $0 \to \mathscr{G}_x \to I_x$ une suite exacte telle que I_x^δ est injectif dans Ab. Le préfaisceau

$$I^\delta \colon U \mapsto \prod_{x\in U} I_x^\delta$$

est clairement un faisceau pour les restrictions données par les projections. C'est un injectif de $Sh(X^\delta)$ car les flèches de de faisceaux sur X^δ sont déterminées sur les singletons. Enfin, on obtient une flèche injective $\mathscr{G} \to I^\delta$ où l'injectivité peut-être vue directement terme à terme. D'où $Sh(X^\delta)$ a assez d'injectifs.

On montre enfin que $Sh(X)$ a assez d'injectifs. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau abélien sur X, soit

$$0 \to f^*\mathscr{F} \to I^\delta$$

une suite exacte dans $Sh(X^\delta)$ où I^δ est injectif. On pose $I := f_*I^\delta$. Par le cours le foncteur f_* d'image directe préserve les injectifs et est exact. En plus par la question 2) et la premiere partie de la question 8) si on note

$$i \colon \mathscr{F} \to C^0(\mathscr{F}) \simeq f_*f^*\mathscr{F} \to I$$

alors i est injective et I est injectif dans $Sh(X)$ d'où $Sh(X)$ a assez d'injectifs.

1 Résultats annexes

1.1 Noyau et post-composition par un monomorphisme

On doit montrer que si $(i_K \colon K \to X) = \ker(f \colon X \to Y)$ et $j \colon Y \to Z$ est un monomorphisme, alors $\ker(X \to Y \to Z) = (i_K \colon K \to X)$ pour X, Y, Z, K dans une catégorie abélienne quelconque.

En effet si on note $(i'_K \colon K' \to X) = \ker(X \to Y \to Z)$ alors

$$j \circ 0_{K',Y} = j \circ f \circ i'_K = 0_{K',Z}$$

d'où $f \circ i'_K = 0_{K',Y}$ car j est un monomorphisme. On obtient $k' \colon K' \to K$ une flèche telle que $K' \to K \to X = i'_K$. À l'inverse on a $j \circ (f \circ i_K) = j \circ 0_{K,Y} = 0_{K,Z}$ d'où on obtient $k' \colon K \to K'$ une flèche telle que $K \to K' \to X = i_K$, en particulier,

$$i_K \circ id_K = i'_K \circ k = i_K \circ k' \circ k$$

et

$$i'_K \circ id'_K = i_K \circ k' = i'_K \circ k \circ k'$$

or comme i_K et i'_K sont des monomorphismes par le cours, k est un isomorphisme d'inverse k'.

1.2 Image et pré-composition par un épimorphisme

On doit montrer que dans une catégorie abélienne quelconque, si $e\colon Z \to X$ est un épimorphisme et $f\colon X \to Y$ une flèche quelconque, alors $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(f \circ e)$. Par le cours, $\mathrm{im}(f) = (\mathrm{im}(f) \to Y) = \ker(Y \to \mathrm{coker}(X \to Y))$. Il suffit donc de montrer que $C := \mathrm{coker}(X \to Y) = \mathrm{coker}(Z \to X \to Y) =: C'$. En regardant dans la catégorie opposée, on obtient les mêmes hypothèse que dans la section 1.1 d'où le résultat.

1.3 Fonctorialité de $C^\bullet$

Pour montrer la fonctorialité de $C^\bullet$ il faut montrer que si $g\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}''$ est une autre flèche dans $Sh(X)$ alors dans la construction de 5) on a $(g \circ f)_0^n = g_0^n \circ f_0^n$ pour tout $n \geq 0$. On prouve par récurrence sur n que

$$(g \circ f)_0^n = g_0^n \circ f_0^n$$

alors

$$(g \circ f)^n = g^n \circ f^n$$

par fonctorialité de C^0. Le cas $n = 0$ est immédiat par définition On suppose $n \geq 1$. On conclut à l'aide du lemme suivant en remplaçant

- A par $C^{n-1}(\mathscr{F}')$,
- C par $C^{n-1}(\mathscr{F}'')$,
- D par $Z^n(\mathscr{F}')$,
- F par $Z^n(\mathscr{F}'')$
- f par $(g \circ f)^{n-1} = g^{n-1} \circ f^{n-1}$ par récurrence,
- d_A par $d(\mathscr{F}')_0^{n-1}$ qui bien un épimorphisme car un conoyau.
- d_C par $d(\mathscr{F}'')_0^{n-1}$
- h_1 par $g_0^n \circ f_0^n$ et h_2 par $(g \circ f)_0^n$.

Lemme 1.4. *Soit deux diagrammes commutatifs*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_A"] & C \arrow[d, "d_C"] \\ D \arrow[r, "h_1"] & F \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_A"] & C \arrow[d, "d_C"] \\ D \arrow[r, "h_2"] & F \end{tikzcd}$$

dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ tels que d_A est un épimorphisme. Alors $h_1 = h_2$.

Démonstration. La preuve consiste à dire que $h_1 \circ d_A = d_C \circ f = h_2 \circ d_A$. D'où $h_1 = h_2$ car d_A est un épimorphisme. $\square$