Point sur le cours de corps locaux

Chapitre 1

Hauteurs

C'est un petit récap rapide des hauteurs. Déjà les cent milles définitions, si on a $(K, |.|_v)$
$$||x||_v = |.|_v^{\lambda_v}$$
et on étend $|.|_v$ en $(L, |.|_w)$, on a
$$|N_{L_w/K_v}(.)|^{1/[L_w/K_v]} = |.|_w$$
puis on veut que la formule du produit soit préservée sur L, i.e. sur $L/K/E$ si $x \in K$, on a
$$\prod_{w|u} ||x||_w = \prod_{v|u} \prod_{w|v} ||x||_w = \prod_{v|u} ||x||_v$$
la formule clée c'est
$$N_{L/K}(x) = \prod_{w|v} N_{L_w/K_v}(x) \qquad (*)$$
d'où
$$\prod_{w|v} ||x||_w = ||x||_v$$
et
$$\prod_{w|v} |x|_w^{\lambda_w} = |x|_v^{\lambda_v}$$
puis comme
$$\prod_{w|v} |N_{L_w/K_v}(x)|_v^{\lambda_w/[L_w/K_v]} = |x|_v^{\lambda_v}$$
on obtient $\sum_{w|v} \lambda_w = \lambda_v$ en prenant $x \in K$. Ensuite en général on a mieux, en essayant d'appliquer la formule $(*)$, on peut poser $\lambda_w = \lambda_v [L_w/K_v]/[L : K]$.

Ça donne

$$\prod_{w|v} |N_{L_w/K_v}(x)|_v^{\lambda_w/[L_w/K_v]} = \prod_{w|v} |N_{L_w/K_v}(x)|_v^{\lambda_v/[L:K]} = |N_{L/K}(x)|_v^{\lambda_v/[L:K]}$$

et le dernier terme vaut $|x|_v$ si $x \in K$.

1.1 Résumé

On pose

$$||x||_v = |x|_v$$

et sur $(L, w) - (K, v)$:

$$||x||_w = ||N_{L_w/K_v}(x)||_v^{1/[L:K]}$$

puis

$$\lambda_w = \lambda_v[L_w : K_v]/[L : K].$$

1.2 Norme de Gauss

Le théorème de Northcott montre semble bien montrer un lien avec la norme de Gauss. Simplement le fait que $||X - a|| = max(1, ||a||) = H([1, a])$. C'était le sujet du td du jour.