Géométrie algébrique

Table des matières

Introduction

On est censés prouver Riemann-Roch.

Chapitre 1

Variétés algébriques

1.1 Nullstellensatz

Pas oublier de rechopper mon carnet. Y'a les preuves complètes.

Théoreme 1.1.1. *Y'a une correspondance entre points fermés de $\mathbb{A}^n(k)$ et idéaux maximaux dans $Spm(k[T_1, \ldots, T_n])$.*

Corollaire 1.1.2. *Si A est une k-algèbre de t.f. et $\mathfrak{m}$ un idéal maximal alors $A/\mathfrak{m}$ est une extension finie de k.*

Lemme 1.1.3. *Si A est une k-algèbre de t.f. alors $\sqrt{I} = \cap_{\mathfrak{m} \in Spm(A), I \subset \mathfrak{m}} \mathfrak{m}$*

Lemme 1.1.4. *Si k est algébriquement clos, c'est un homéomorphisme (entre $\mathbb{A}^n(k)$ et $Spm(k[T_1, \ldots, T_n])$).*

Démonstration. On prends le morphisme quotient, c'est l'évaluation et le noyau est de la forme $(T_i - t_i)_i$. □

Théoreme 1.1.5 (Nullstellensatz)**.** *Si $k = \bar{k}$ alors $I(Z(J)) = \sqrt{J}$.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} I(Z(J)) &= I(\bigcup_{x \in Z(J)} x) \\ &= \bigcap_{x \in Z(J)} I(\{x\}) \\ &= \bigcap_{x \in Z(J)} \mathfrak{m}_x \\ &= \bigcap_{\mathfrak{m} \in Spm(A), J \subset M} \mathfrak{m} \end{aligned}$$

et la dernière est $\sqrt{J}$ par le lemme. (omg, revoir la preuve dans Atiyaah) □

Remarque 1 (!). *L'endroit où on utilise le weak nullstellensatz on a besoin de k algébriquement clos. La dernière qui vient du lemme y'a pas besoin. Autrement dit, on peut utiliser Spm pour faire de la géométrie algébrique sur un corps non algébriquement clos.*

Définition 1.1.6. $A(Z) = k[T_1, \dots, T_n]/I(Z)$

Pour $f \in A(z)$ et $\tilde{f}$ t.q $p(\tilde{f}) = f$ pour $p\colon k[T_1, \dots, T_n] \to A(Z)$. Pour $z \in k^n$ on peut toujours déf $f(z) := \tilde{f}(z)$. En particulier, on peut déf

Définition 1.1.7. $D(f) = \{s \in Z : f(z) \neq 0\} = D(\tilde{f}) \cap Z$. Avec $D(\tilde{f}) = \mathbb{A}^n(k) - Z(\tilde{f})$.

Remarque 2. *Comme d'hab juste il définit pour des fonctions a priori par déf sur $\mathbb{A}^n(k)$.*

Remarque 3 (C'est super chiant). *Faut faire gaffe ducoup en fonction de la fonction que j'utilise ou de son lift pour les inclusions.*

Corollaire 1.1.8. *Si $f, g \in A(Z)$ et $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$. On a*

- *Pour $J_1, J_2 \leq A(Z)$: $Z(J_1) \subset Z(J_2) \leftrightarrow J_2 \subset \sqrt{J}_1$.*
- *$D(f) \subset D(g) \leftrightarrow \exists h \in \mathbb{A}(Z)$ t.q. $f^n = gh$.*
- *Les ouverts principaux forment une base de la topologie.*

Démonstration. Pour le premier point si $Z(J_1) \subset Z(J_2)$ alors faut lift dans $k[T_1, \dots, T_n]$ avant d'appliquer le nullstellensatz. Pour le deuxième, c'est clair. Pour le troisième, sur $\mathbb{A}^n(k)$ on prend $f \in I(Z)$,où $U = \mathbb{A}^n(k) - Z$, t.q $f(x) \neq 0$ (possible car $x \notin Z$. □

Proposition 1.1.9. *Soit Z un ensemble algébrique affine. Alors Z est irréductible ssi $I(Z)$ est premier. Si $k = \bar{k}$, $I \leq K[T_1, \dots, T_n]$ alors $Z(J)$ est irréductible ssi $\sqrt{J}$ est premier.*

Démonstration. Avec les nouvelles notations c'est direct, avec les anciennes si $Z(J)$ est irreductible $Z(f) \cup Z(g) = Z(J)$ implique $Z(J) \subset Z(f)$ ou $Z(J) \subset Z(g)$. □

Lemme 1.1.10. *Soit A un anneau noetherien, alors les idéaux radicaux sont des intersections finies d'idéaux premiers.*

Démonstration. On regarde l'ensemble des idéaux qui sont pas des intersections d'idéaux premiers. Comme A est noethérien y'a un élement maximal I qui n'est pas premier. Soit $a, b \in A - I$ t.q. $ab \in I$. On considère $I_a\sqrt{I + aA}$ et $I_b = \sqrt{I + bA}$. Ils sont plus gros que I donc intersections d'idéaux premiers. En particulier on prouve facilement que $I = I_a \cap I_b$ (I est radical). □

Proposition 1.1.11. *Si $k = \bar{k}$, on a une décomposition unique des ensembles algébriques en variétés irréductibles non contenues les unes dans les autres.*

Démonstration. $I(Z) = \bigcap_{i=1}^{m} \mathfrak{b}_i$. On retire les $\mathfrak{b}_i$ contenus dans les autres. □

1.2 Espace projectif

On considère $k[T_0, \ldots, T_n] = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$.

Lemme 1.2.1. *Sur les corps infinis, $f \in S_d$ ssi $\lambda^d f(x_i, i) = f(\lambda x_i, i)$.*

Définition 1.2.2. Un idéal est homogène ssi dès que $f = f_1 + \ldots + f_n \in I$ alors $f_i \in I$. C'est équivalent à être généré par des éléments homogènes, i.e. $I = \bigoplus S_d \cap I$.

Remarque 4. *Comme en géo diff regarder ce qu'il se passe quand on regarde des polynômes homogènes dans $\mathbb{A}^{n+1}$ et qu'on les pousse (homéo?).*

Définition 1.2.3. Pour I un idéal homogène de $k[T_0, \ldots, T_n]$, on définit $Z_+(I) = \{P \in \mathbb{P}^n(k) : f(P) = 0 \ \forall f \in I \text{ f homogène}\}$ où autrement on lift P et on prends f quelconque. Si k est infini et $Z \subset \mathbb{P}^n(k)$, on définit $I_+(Z) = I(\pi^{-1}(Z))$.

Théoreme 1.2.4 (Nullsellensatz projectif). *On suppose $k = \bar{k}$ et J homogène. On a*

- $Z_+(J) = \emptyset$ *ssi* $(T_0, \ldots, T_n) \subset J$.
- *Si* $Z_+(J) \neq \emptyset$ *alors* $I_+(J_+(J)) = \sqrt{J}$.

Démonstration. Si $Z_+(J) = \emptyset$ on lift à $\mathbb{A}^{n+1} - 0$ pour voir que $Z(J) \subset \{0\} = (T_0, \ldots, T_n)$. Sinon $I_+(Z_+(J)) = I(\pi^{-1}(Z_+(J))) = I(\pi^{-1}(Z_+(J)) \cup \{0\}) = \sqrt{J}$. □

1.3 foncions régulières

Revoir que la topologie de Zariski c'est la plus petite topologie que rend continue les polynômes.

Définition 1.3.1 (Fonction régulière). On décrit pour $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$ l'anneau $\mathcal{O}_Z(U)$. On prend les fonctions qui sont localement des fractions rationnelles.

Note 1. *Trouver exactement où on peut écrire des polynômes, les ouverts sont quasi-compacts(!).*

Lemme 1.3.2. *$\mathcal{O}_Z$ est un faisceau pour les restrictions naturelles.*

Démonstration. C'est évident avec la déf mdr. □

Proposition 1.3.3. *Soit $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$.*

- *Les fonctions régulières sont continues.*
- *Pour tout $f \in \mathbb{A}(Z)$, la flèche $\mathbb{A}(Z) \to \mathcal{O}_Z(D(f))$ passe au quotient en un isom $\mathbb{A}(Z)_f \simeq \mathcal{O}_Z(D(f))$.*
- *$\mathbb{A}(Z) \simeq \mathcal{O}_Z(Z)$.*

Démonstration. Pour le premier point l'idée c'est que localement on peut se mettre sur un ouvert tel que $f|_U(U) = \{pt\}$. Le deuxième point c'est la surjectivité qu'y faut voir. Le troisième point c'est le plus cool, c'est l'idée que on commence par décomposer Z en une union finie $\bigcup_i D(f_i)$ où on est une fraction rationnelle. Ensuite, on obtient $(gf_i - h_i)|_{D(f_i)} = 0$, faut relever puis dérouler avec le fait que $1 \in (f_i, i)$ quelque part. □

Remarque 5. *Si on prend $\mathbb{A}^2 \backslash (0,0)$, il a les mêmes sections globales que $\mathbb{A}^2$. Ça prouve que cet ouvert est pas affine.*

1.4 Morphismes d'ensembles algébriques

Dans les ensembles algébriques on peut directement prendre des fonctions polynomiales ! C'est la preuve d'avant.

Théoreme 1.4.1. *On a une équivalence de catégories entre les k-algèbres de type finies réduites et la k-variétés.*

Note 2. *Revoir vite fait la construction.*

1.5 Espaces annelés

Définition 1.5.1. Un espace annelé est un espace topologique X muni d'un faisceau de k-algèbre pour nous.

Définition 1.5.2. Un morphisme d'espaces annelés

$$(|X|, \mathcal{O}_X) \to (|Y|, \mathcal{O}_Y)$$

est un couple $(|f|, f^{\#})$. Où $|f|$ est un morphisme d'espaces topologiques et $f^{\#} \colon O_Y \to |f|_* \mathcal{O}_X$ un morphisme tels que les flèches induites sur les fibres sont des morphismes d'anneaux locaux.

Note 3. *Le faisceau* $|f|_*\mathcal{O}_X$ *est le pullback classique. Si* $y = |f|(x)$*, comme d'habitude on a*

$$f^{\#} \colon O_{Y,y} \to (|f|_*\mathcal{O}_X)_y \to \mathcal{O}_{X,x}$$

Enfin en fait comme c'est localement annelé apparemment on peut montrer que $f^{\#}$ *c'est automatiquement le pullback de fonctions.*

Théoreme 1.5.3. *Le couple* $(Z, \mathcal{O}_Z)$ *est un espace annelé.*

Démonstration. Les fibres $\mathcal{O}_{Z,z}$ sont les $\mathbb{A}(Z)_{\mathfrak{m}_z}$. □

de notre équivalence de base

{ensembles algébriques affines} → {k-algèbre réduite de type fini}

on plonge les ensembles algébriques dans les espaces localements annelés. En fait c'est pleinement fidèle, on a pas un nouvel objet.

Proposition 1.5.4. *On a une bijection*

$$Hom_{algSets}(X, Y) \to Hom_{LocRingedSpace}((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y))$$

Démonstration. Étant donné $f \colon X \to Y$, on définit $f^{\#}(U) \colon \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}U)$ par $s \mapsto s \circ f$. Et à f on associe $(f, f^{\#}$. Maintenant si on a un $(f, f^{\#})$ un morphisme d'espaces localement annelés quelconque, faut montrer que f est un morphisme d'ensemble algébriques et que $f^{\#}$ est bien le pullback habituel. Faut se rappeler que $f^{\#}(\mathfrak{m}_y) \subset \mathfrak{m}_x$ tel que $f(x) = y$. En particulier, le grand carré de

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[r, mapsto] & f^{\#}s \\
f^{\#} \colon \mathcal{O}_Y(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(f^{-1}U) \arrow[d] \\
O_{Y,f(x)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[d] \\
k = O_{Y,f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)} \arrow[r] & O_{X,x}/\mathfrak{m}_x = k
\end{tikzcd}$$

commute, et la flèche $\mathcal{O}_Y(U) \to k$ est l'évaluation, la flèche $k \to k$ est l'identité ($1 \mapsto 1$), i.e. $f^{\#}(s)(x) = s(f(x))$. On a montré que $f^{\#}$ est le pullback habituel. Pour montrer que c'est un morphisme, on peut regarder $\tilde{f} \colon X \to Y \to \mathbb{A}^n_k$. On obtient

$$\tilde{f}(\mathbb{A}^n(k)) \colon k[T_1, : , T_n] \to \mathcal{O}_X(X)$$

qui à T_1 associe f_1. En particulier, c'est $T_1 \circ f$ par le point d'avant. De sorte que $\tilde{f}$ est défini par des polynômes et donc un morphisme. □

1.6 Recollements

1.7 Sous-variétés

On appelle variété des unions finies de variétés affines avec le faisceau structurant.

Définition 1.7.1 (Sous-variété)**.** Pour un fermé dans $Z \subset X$ une variété algébrique. On définit,

$$\mathcal{O}_Z(V) = \{f : V \to k | \forall z \in V \exists g \in \mathcal{O}_X(U), U \cap Z \subset V, g|_{U \cap Z} = f|_{U \cap Z}\}$$

autrement dit c'est juste $i^{-1}\mathcal{O}_X$ pour $i : Z \subset X$.

Lemme 1.7.2. *Soit X une variété algébrique et $Z \subset X$ fermé. Alors Z est une variété algébrique. Si X est affine alors Z aussi.*

Démonstration. On doit montrer que Z est un recouvers d'affine. Suffit de montrer que $Z \cap U$ est affine si U est affine. Suffit de le montrer dans $X = \mathbb{A}^n$ et là $\mathcal{O}_Z$ c'est littéralement le faisceau de fonction régulière donc on a fini. (Il définit une variété affine comme un fermé topologique de $\mathbb{A}^n$ plus faisceau) □

1.8 Variétés projectives

Dans $\mathbb{P}^n(k)$ on définit sur $X = Z_+(I)$,

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \to k, \text{Localement une fraction homogène}\}$$

Si on définit la localisation homogène en P homogène, avec $B = k[T_1, \dots, T_n]/I$, via $B_{(P)}$ les fractions de degrés 0. Plus rigoureusement, via $k[T_1, \dots, T_n]_{(P)}/I_{(P)}$ avec $I_{(P)} = \{Q/P^n | Q \in I\}$.

Proposition 1.8.1. *Si $X = Z_+(I) \subset \mathbb{P}^n(k)$ et $U = X \cap D_+(p)$ ($\bar{P} = p$). On a $B_{(p)} \simeq \mathcal{O}_X(U)$.*

Proposition 1.8.2. *Si P est non constant homogène alors $D_+(P)$ est une variété affine. Si $P \in \mathcal{O}_Z(Z) = B$ de degré ≥ 1 pareil.*

Définition 1.8.3. Les variétés quasi-projectives sont les localement fermées dans $\mathbb{P}^n(k)$.

Chapitre 2

Dimension

Définition 2.0.1. On prend la dimension de Krull avec le sup des chaines de fermés irréductibles.

Chapitre 3

Produits fibrés

Y'a des choses à rattraper, comme l'immersion fermée.

3.1 Séparation et propreté

Définition 3.1.1. Une variété algébrique sur k est séparée si l'image de

$$\delta = (id, id) \colon X \to X \times_k X$$

est fermée.

Exemple 3.1.2. Les variétés algébriques affine sont séparée, parce que $A(X) \otimes A(X)$ est surjective, en effet $im(\delta) = Z(ker\delta_*)$.

Comme la séparation imite le fait d'être Hausdorff, en ajoutant la quasi-compacité on obtient la "compacité"?

Définition 3.1.3. Une variété algébrique X sur k est propre/complète si elle est séparée et pour toute variété Z :

$$X \times Z \to Z$$

est fermée (on dit qu'elle est universellement fermée).

Exemple 3.1.4. $\mathbb{A}^1_k$ n'est pas propre mais pourtant est séparée et quasi-compacte. On regarde $\mathbb{A}^2 \simeq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$, et dans $\mathbb{A}^2$ on regarde $Z(XY - 1)$, d'image $\mathbb{A}^1 - 0$! Le problème vient du point à l'infini qu'il manque.

Remarque 6. *Les fermées de variétés séparée (resp. propres) sont séparées (resp. propres). Et les ouverts de variétés séparées sont séparées.*

Proposition 3.1.5. *Les variétés projectives sont propres.*

Remarque 7. *Voir la preuve dans les notes sur Nakayama, sinon dans les notes sur Shafarevich.*

Démonstration. Il suffit de le prouver pour $\mathbb{P}^n_k$. On montre que c'est séparé, on peut restreindre $\mathbb{P}^n_k \to \mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^n_k$ à $D(T_i) \cap D(T_j) \to D(T_i) \times D(T_j)$ qui a une diagonale fermée car affine (le fait d'être une immersion fermée est local, check). Soit Y une variété algébrique, on doit prouver que $\mathbb{P}^n_k \times Y \to Y$ est fermée, on peut le montrer localement puis supposer Y affine et même $= \mathbb{A}^n$. En fait c'est la preuve de Shafarevich. Y'a un twist, il dit pour $y \in \mathbb{A}^n - p_2(Z)$ on a

$$(T_0, \ldots, T_n)^N \subset I + \mathfrak{m}_y k[T_0, \ldots, T_n, S_1, \ldots, S_m]$$

puis $B_N \subset I_N + \mathfrak{m}_y B_N$ avec $B_N = k[T_0, \ldots, T_n]_N$ le module des polynomes de degré N. D'où par Nakayama, il existe $P \notin \mathfrak{m}_y$ homogène dans I t.q. $PB_N \subset I_N$ et $y \in D^+(P)$ (on veut les monomes dans I et P est en Y d'où dans $D^+(P)$, $P(y) \neq 0$ et les monomes sont dans I_y, (penser au quotient pas $\mathfrak{m}_y$). □

Définition 3.1.6. On définit le graphe comme l'image inverse de la diagonale δ_Y par $(f, id_Y) \colon X \times Y \to Y \times Y$.

Remarque 8. *Si Y est séparée, Γ_f est fermé dans $X \times Y$. En effet, $(id_X, f) \colon X \to X \times Y$ est un isomorphisme vers Γ_f.*

Lemme 3.1.7. *Soit $f \colon X \to Y$ un morphisme de variétés algébriques avec X propre et Y séparée. Alors f est fermée.*

Démonstration. On regarde $X \to X \times Y \to Y$. □

Proposition 3.1.8. *Soit X une variété algébrique connexe et propre. Alors $\mathcal{O}_X(X) = k$.*

Démonstration. Étant donné $f \colon X \to \mathbb{A}^1$, l'image est connexe et fermée dans $\mathbb{P}^1$ et incluse dans $\mathbb{A}^1$ donc est un point. □

Corollaire 3.1.9. *Une variété affine connexe est propre ssi $X = \mathbb{A}^0_k$.*

Chapitre 4

Espace tangent

La première définition à partir d'équations/d'un plongement affine.

Définition 4.0.1. Soit $X = Z(I)$ une variété algébrique et $P = (a_1, \ldots, a_n) \in X$. On définit

$$T_{X,P} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}_k^n | \sum_i T_i \partial_i F(P) = 0, \ \forall F \in I\}$$

c'est un espace vectoriel.

Remarque 9. *Penser $T_i = X_i - a_i$, pour que ce soit un espace vectoriel.*

Exemple 4.0.2. Pour $Z(T_1 - T_2^2) = Z$ et $P = (1, 1)$ on a $T_P Z = \{(t_1, t_2) | t_1 - 2t_2 = 0\}$.

Soit maintenant $E = k^n$ et $P \in \mathbb{A}^n(k)$. On regarde

$$D_p \colon k[T_1, \ldots, T_n] \to E^\wedge$$

donné par $F \mapsto D_p(F) = \sum T_i \delta_i F(P)$. On remarque que $D_p(\mathfrak{m}_P^2) = 0$ car si $f, g \in \mathfrak{m}_P$ alors $\partial_i(fg)(P) = f(P)\partial_i g(P) + g(P)\partial_i f(P) = 0$. D'où ça passe au quotient en

$$\mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2 \to E^\wedge$$

maintenant c'est des k-espaces vectoriels de dimensions n d'où il suffit de montrer la surjectivité ce qui est clair.

Proposition 4.0.3. *Soit X une variété affine et $P \in X$. Alors*

$$(\mathfrak{m}_P)^\wedge \simeq T_{X,P}$$

Démonstration. Par définition $T_{X,P}$ est l'orthogonal de $D_P(I)$ ou l'ensemble des $v \in E$ tels que pour tout $\phi \in D_P(I)$, $\phi(v) = 0$. On note $\mathfrak{m}$ l'idéal de $k[T_1, \ldots, T_n]$ tel que $\mathfrak{m}_P = \mathfrak{m}/I$. Alors $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ rentre dans un diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I/I \cap \mathfrak{m}^2 \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \arrow[r] \arrow[d, hook, "D_P"] & \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \arrow[r] \arrow[d, phantom, "="] & 0 \\
0 \arrow[r] & D_P I \arrow[r] & E^\wedge \arrow[r] & \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

la flèche du bas montre bien le résultat en passant aux duaux (ça inverse les flèches). □

Lemme 4.0.4. *Soit A un anneau et $\mathfrak{m} \leq A$ maximal. Y'a un isomorphisme $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \simeq \mathfrak{m}A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2A_\mathfrak{m}$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathfrak{m}$ t.q $x \in \mathfrak{m}^2A_\mathfrak{m}$. Alors il existe $s \in A - \mathfrak{m}$ tel que $s.x \in \mathfrak{m}^2A$. En plus il existe $t \in A$ t.q $st - 1 \in \mathfrak{m}$ car $A/\mathfrak{m}$ est un corps. Ensuite

$$(st-1)x \in \mathfrak{m}^2$$

mais $stx \in \mathfrak{m}^2$ car $sx \in \mathfrak{m}^2$ d'où $x \in \mathfrak{m}^2$ et la flèche est injective.

Si on prends $x \in \mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$ il existe $s \in A - \mathfrak{m}$ tq $sx \in \mathfrak{m}$. On prends t comme avant. Alors $tsx = x \mod \mathfrak{m}^2A_\mathfrak{m}$. D'où $tsx \mapsto x$. □

Remarque 10. *D'où l'espace tangent provient du stalk du faisceau.*

Définition 4.0.5. Soit X une variété algébrique. L'espace tangent de Zariski en P est le k-espace vectoriel

$$(\mathfrak{m}\mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}^2\mathcal{O}_{X,P})$$

4.1 Variétés lisses

Définition 4.1.1. On note $dim_PX = min\{dimU|P \in U\}$ pour les ouverts de X. (Oui la déf marche)

Remarque 11. *C'est aussi le maximum des dimensions des composantes irréductibles qui passent par P.*

Proposition 4.1.2. *Soit X une variété algébrique, alors pour tout $P \in X$ on a*

$$dim_PX \leq dimT_{X,P}$$

Définition 4.1.3. On dit que X est lisse/non singulière en P si $dim_PX = dimT_{X,P}$.

Démonstration. Par récurrence sur $dimT_{X,P}$. Si $dimT_{X,P} = 0$, en passant au cas affine, $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = 0$ d'où

$$\mathfrak{m}_P = \mathfrak{m}_P^2.$$

Par le lemme de Nakayama il existe $f \in A - \mathfrak{m}_P$ tel que $f\mathfrak{m}_P = 0$ avec $f \in D(f)$. En se plaçant sur $D(f)$ on remplace $\mathcal{O}_X(X)$ par A_f d'où f inversible et $\mathfrak{m}_P = 0$ puis $A_f = k$. En particulier, $dim_P X = 0$.

Maintenant si $dimT_{X,P} \geq 1$. Soit Z une composante irréductible de X passant par P et de dimension $dim_P X$. On a $\mathcal{O}(Z) = \mathcal{O}(X)/I$ puis $\mathfrak{m}_{P,Z} = \mathfrak{m}_{P,X}/I$ puis $\mathfrak{m}_{P,X}/\mathfrak{m}_{P,X}^2$ se surjecte dans $\mathfrak{m}_{P,Z}/\mathfrak{m}_{P,Z}^2$. D'où $dimT_{P,X} \geq dimT_{P,Z}$. On peut supposer X irréductible. Supp $dim_P X \neq 0$. Alors il existe $f \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ et $Y = Z(f) \subset X$. En plus

$$dimT_{X,P} \geq dimT_{Y,P} + 1$$

car $T_{Y,P} \simeq (\mathfrak{m}/f)/(\mathfrak{m}/f)^2$. Avec $dimY = dimX - 1$, par récurrence $dimT_{P,Y} \geq dim_P Y$ et on conclut. □

Étant donnés des générateurs de I, $(f_1, \dots, f_r)$, on déf la jacobienne en P par

$$J(P) = (\partial_j f_i(P))_{i,j}$$

alors on a

$$\ker(J(P)) = T_p X$$

on a alors le critère jacobien :

Proposition 4.1.4. *On a :*

$$X \textit{ est lisse en } P$$

ssi

$$J(P) \textit{ est de rang } n - \dim_P(X)$$

avec $f_i \in k[T_1, \dots, T_n]$.

Démonstration. Directement on a $\dim T_P X = \dim_k \ker(J(X)_P) = n - rk(J(X)_P)$. □

Corollaire 4.1.5. *Si* $X = Z(F) \subset \mathbb{A}^n(k)$ *alors* P *est lisse si au moins un des* $\partial_i F(P)$ *est non nulle.*

Démonstration. On a $\dim_P(X) = n - 1$ et la jacobienne est une ligne. Donc de rang 1 ssi y'en a un qu'est non nul. □

Exercices 4.1.6. L'ensemble des points lisse est ouvert.

Proposition 4.1.7. *Soit $k(X)$ un corps de fonctions. Alors $k(X)$ est finie séparable d'un $k(T_1, \ldots, T_n)$.*

Démonstration. Par la normalisation de Noether on trouve

$$K = k(T_1, \ldots, T_n) \subset k(X)$$

supposons que l'extension n'est pas séparable. On note L la clôture séparable de K dans $k(X)$. On a $car(k) = p > 0$. On prends $\theta \in k(X) - L$ t.q. $\theta^p \in L$. On montre que $L(\theta)$ est séparable finie sur un $k(S_1, \ldots, S_n)$.

Soit $H(S) = S^r + f_{r-1}S^{r-1} + \ldots + f_0 \in K[S]$ le pol min de θ^p sur K. Supposons que $f_i \in k(T_1^p, \ldots, T_n^p)$ alors $H(S^p) = G(S)^p$ et G est un polynôme minimal séparable de θ. D'où l'un des $f_i \notin k(T_1^p, \ldots, T_n^p)$.

Remarque 12. *On peut pas dire directement que H est séparable donc $H(S^p)$ est une puissance p-ème. Parce que $S^p - S$ par exemple.*

Si une puissance d'un T_i non divisible par p apparaît dans un f_i, alors T_i est algébrique sur $K_1 = k(\theta, T_2, \ldots, T_n)$. (en prenant $T_i = T_1$)

Et en plus $L(\theta)$ est séparable sur $K_1(T_1)$ qui est séparable sur K_1. Mais K_1 a le degré de transcendance de $L(\theta)$ qui est n. D'où $\theta, T_2, \ldots, T_n$ sont algébriquement indépendants. □

Remarque 13. *Comparer avec la preuve de Sha.*

Soit R un anneau intègre et $K = Frac(R)$. On pose $H \in R[S]$ et $\Delta(H) = \prod(s_i - s_j)^2 \in R$ son discriminant. Alors H est séparable ssi $\Delta(H) \neq 0$.

Maintenant si on note $\varphi\colon R \to F$ (un morphisme de corps quelconque) et

$$\tilde{\varphi}\colon R[S] \to F(S)$$

alors $\Delta(\tilde{\varphi}(H)) = \varphi(\Delta)$.

Lemme 4.1.8. *Étant donné $H \in k[T_1, \ldots, T_n][S]$. Soit $X \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1$ la variété associée. Si $\Delta = disc(H) \in k[T_1, \ldots, T_n]$ alors*

$$X \cap D(\Delta)$$

est non vide et est l'ensemble des points lisses.

Remarque 14. *Il suppose H unitaire.*

Démonstration. Soit $q \in (\emptyset \neq) D(\Delta) \subseteq \mathbb{A}^n$. On note $\phi_q\colon k[T_1, \ldots, T_n] \to k$ t.q. $\phi_q(F) = F(q)$. Alors si $s \in k$ est une racine de

$$\tilde{\phi}_q(H)(S)$$

on a $P = (q, s) \in X \cap D(\Delta) \neq \emptyset$. On regarde la jacobienne de H en P. On a

$$\tilde{\phi}_q(H)(S) = \phi_q(\Delta) = \Delta(q) \neq 0$$

d'où $\tilde{\phi}_q(S)$ est séparable puis

$$\partial_S H(P)) = \tilde{\phi}(H)'(S)(s) \neq 0$$

□

Proposition 4.1.9. *Le smooth locus est dense dans X.*

Démonstration. On prouve que tout les ouverts non vides contiennent un point lisse. On peut supposer X affine intègre. On peut donc prendre le corps de fonctions $k(X)$ et une extension séparable

$$k(T_1, \ldots, T_n) \subset k(X).$$

On a donc $k(T_1, \ldots, T_n)(S) = k(T_1, \ldots, T_n)[S]/H(\bar{T}, S)$. avec H séparable en S. On se place sur un ouvert ou y'a pas de dénominateurs. On a $\tilde{H} = g^{\deg(H)} H \in k[T_1, \ldots, T_n][gS]$ unitaire puis $k(\tilde{H}) = k(X)$ d'où on peut appliquer le résultat à $\tilde{H}$. □

4.2 Variétés normales

Théoreme 4.2.1. *Soit X une variété algébrique lisse en P. Alors*

1. *Il n'y a qu'une seule composante de X passant par P.*
2. *Soit U est ouvert affine connexe (implique intègre) de X alors $\mathcal{O}_X(U)$ est intégralement clos. (dans $Frac(\mathcal{O}_X(U))$ qui est pas forcément $Frac(\mathcal{O}_X(X))$.)*
3. *$\mathcal{O}_{X,P}$ est factoriel.*

Remarque 15. *On a*

1. *Lisse + connexe implique intègre.*
2. *Si $\dim U = 1$ alors $\mathcal{O}_X(U)$ est de Dedekind.*

Proposition 4.2.2. *Soit $P \in X$ et $d = \dim_P X$. Alors X est lisse en P ssi pour tout voisinage ouvert petit affine de P, l'idéal $\mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}_X(U)$ est généré par d éléments. (Plus précisément $\mathfrak{m}_P \mathcal{O}_{X,P}$)*

Démonstration. Supposons que $\mathfrak{m}$ est généré par d éléments. Alors

$$\mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$$

est généré par d éléments en tant que $\mathcal{O}_X(X)$-module d'où en tant que $\mathcal{O}_X(X)/\mathfrak{m}$-module. Puis $\dim T_pX = d$. À l'inverse si X est lisse en P. On suppose X affine. On note $\mathfrak{m} \subset A(X)$ l'idéal de P. On sait que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est de dimension d sur $A(X)/\mathfrak{m}$, disons généré par $(\bar{e}_i)_i$. D'où $\mathfrak{m} = (e_1, \ldots, e_d) + \mathfrak{m}^2$ puis $\mathfrak{m}/(e_1, \ldots, e_d) + \mathfrak{m}(\mathfrak{m}/(e_1, \ldots, e_d)$. Par Nakayama il existe $f \notin \mathfrak{m}$ tel que $f\mathfrak{m} = (e_1, \ldots, e_d)$. D'où $\mathfrak{m}A_f = (e_1, \ldots, e_d)A_f$. En particulier, $\mathfrak{m}A_f$ est l'idéal maximal qui correspond à $P \in D(f)$. D'où dans tout ouvert $U \subseteq D(f)$. □

Corollaire 4.2.3. *Si X est une courbe affine intègre. ALors X est lisse ssi $A(X)$ est de Dedekind.*

Démonstration. C'est juste que tout les localisés sont des DVR et on applique le corollaire. □

Définition 4.2.4. X est dite normale si pour tout les U affine ouverts

$$\mathcal{O}_X(U) \text{ est intégralement clos}$$

Proposition 4.2.5. *Si X est affine, $A(X)$ intégralement clos implique X normale.*

Démonstration. Étant donné $s \in k(X)$, on a $\mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow A(X)_f$. D'où $f^r s$ est entier sur $A(X)$ donc $s \in A(X)_f$. Maintenant en prenant un recouvrement on a $s \in A(X)_{f_i}$. D'où par la propriété du faisceau $s \in \mathcal{O}_X(U)$. □

Remarque 16. *La preuve rigoureuse doit utiliser la flèche canonique $\mathcal{O}_X(U) \to k(X)$.*

Définition 4.2.6. Une morphisme $X \to Y$ est affine si pour tout affine ouvert V de Y, $f^{-1}(V)$ est affine. Le morphisme est fini si il est affine et pour tout ouvert affine $V \subseteq Y$ on a

$$\mathcal{O}_X(f^{-1}V) \text{ est fini sur } \mathcal{O}_Y(V)$$

Remarque 17. *On peut montrer que si il existe un recouvrement affine $Y = \cup_i V_i$ tq pour tout i, $f^{-1}V_i$ est affine (resp. $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}V)$ est fini) alors f est affine (resp. fini).*

Définition 4.2.7. Soit X une variété intègre. La normalisation de X est une variété normale X' muni d'un morphisme fini birationnel

$$X' \to X$$

Soit $\phi\colon k(X) \to L$ une extension finie, la normalisation de X dans L est un morphisme fini dominant

$$\pi\colon X' \to X$$

t.q $k(X') = L$, X' est normal et $k(X) \to L$ est induit par π.

Proposition 4.2.8. *Soit A une k-algèbre intègre de type fini et $K = Frac(A)$. Soit B la clôture intégrale de A dans L, L une extension finie de K. Alors $Frac(B) = L$ et B est finie sur A.*

Remarque 18. *Si $L = K$, la normalisation est $Spm(\tilde{A}) \to Spm(A)$.*

Exemple 4.2.9. Si $X = Z(T_1^2 - T_2^3) \subseteq \mathbb{A}_k^2$. Alors

$$\mathbb{A}^1 \to X$$

donné par $t \mapsto (t^3, t^2)$ est la normalisation.