Géométrie algébrique

Table des matières

J'vais juste prendre des notes. J'ai du mal à noter en détail.

Je me disais que ce serait bien de noter les définitions en détail pour voir exactement ce qu'il faut prouver à chaque fois.

Chapitre 1

Spectre maximal

En général, si $f\colon A \to B$ est un morphisme $f^{-1}\mathfrak{m}$ est pas forcément maximal. Par exemple $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ et l'inverse de (0).

Théoreme 1.0.1. *Si $f\colon A \to B$ est un morphisme de k-algèbres de type fini alors $f^{-1}Spm(B) \subset Spm(A)$.*

Démonstration. L'idée c'est que $k \to A/f^{-1}\mathfrak{m} \to B/\mathfrak{m}$ est finie par Noether. d'où $B/\mathfrak{m}$ est entier sur $A/f^{-1}\mathfrak{m}$ donc on obtient un corps. □

Remarque 1. *Attention au fait que B/A entier et A corps équivaut B corps c'est vrai quand les deux sont* ***intègre****. Dans le thm $f^{-1}\mathfrak{m}$ est premier donc c'est bon.*

Proposition 1.0.2. *Si $f\colon A \to B$ est entier :*

1. *$dim(B) \leq dim(A)$.*
2. *On a à nouveau $f_*\colon Spm(B) \to Spm(A)$!*
3. *Si f est injective, f_* est surjective.*
4. *Si f est injective $dim(A) = dim(B)$.*

Démonstration. Pour 1. faut montrer que f_* d'une chaine est une chaine. Ça a l'air de suggérer que deux idéaux envoyés sur le même idéal doivent être de même dimension.

On prends $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1$ et on veut m.q $f_*\mathfrak{p}_0 \not\subseteq f_*\mathfrak{p}_1$. On quotiente par $\mathfrak{p}_0$ et on doit juste montrer que $f_*\mathfrak{p}_1 \neq 0$ avec A, B intègres. Si on prends $b \in \mathfrak{p}_1 - \{0\}$. On a une relation $P(b) = 0$ minimale. Et on peut conclure.(on aurait potentiellement probablement pu faire plus simple?)

Pour 2. c'est l'argument habituel, les quotients sont intègres.

Pour 3., $B \otimes_A A_\mathfrak{p} \simeq B_\mathfrak{p} := (f(A-\mathfrak{p}))^{-1}B$ en tant que A-module. Reste à montrer que l'idéal maximal de $B_\mathfrak{p}$ s'envoie sur $\mathfrak{p}$, c'est clair car il est maximal par 2.. En gros

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{p}A_\mathfrak{p} & A_\mathfrak{p} \longrightarrow S^{-1}B & & \mathfrak{m} \\ \uparrow & \uparrow \qquad\qquad \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{p} & A \longrightarrow B & & \mathfrak{p} \end{array}$$

faut juste prouver que $(f(A-\mathfrak{p}))^{-1}B$ est non nul mdr. On utilise le produit tensoriel pour montrer que c'est entier c'est tout.

La 4. est claire. $\square$

Petite preuve que la fibre est finie maintenant : Faut utiliser que $(f_*)^{-1}(\mathfrak{p}) = (f_*)^{-1}(\cap_{\mathfrak{p}\subset\mathfrak{m}}\mathfrak{m}) = \cap(f_*)^{-1}\mathfrak{m} = \cap\mathfrak{m}_y = \mathfrak{m}_y$ pour $Z(\mathfrak{p})$ une composante de $f^{-1}y$. Là on a

$$(f_*)^{-1} \colon Spm(\mathcal{O}_X(X)) \to Spm(\mathcal{O}_Y(Y))$$

Corollaire 1.0.3 (Dimension d'hypersurface)**.** *Si $f \in k[T_1, \ldots, T_n] - k$ alors*

$$dimk[T_1, \ldots, T_n]/(f) = dimk[T_1, \ldots, T_{n-1}$$

Démonstration. Il dit que dans la preuve de Noether, $f = T_n^r + G$ à isomorphisme près avec $deg_{T_n}G \leq r-1$. D'où la flèche

$$k[T_1, \ldots, T_{n-1}] \to k[T_1, \ldots, T_n]/(f)$$

est finie et y ont la même dimension. Pour prouver que $dim(A^n) = n$, on peut le faire par induction, quotienter par $F \in$ le premier idéal. $\square$

On peut à nouveau redéfinir les fermés de X via $f^{-1}(0)$ pour $f \in \mathcal{O}_X(X)$.

1.1 k-algèbres de types finis

Il a prouvé que le degré de transcendance est bien défini. Et que

Proposition 1.1.1. *Une variété est irréductible ssi les $\mathcal{O}_X(U)$ sont intègres.*

Démonstration. L'idée c'est que irred équivaut à il existe de ouverts qui se croisent pas (à voir). D'où $\mathcal{O}_X(U \cup V) \simeq \mathcal{O}_X(U) \oplus \mathcal{O}_X(V)$. $\square$

Exercices 1.1.2. Faire toutes les preuves de ce cours.

Chapitre du Gortz sur les schémas intègres.