

# Géométrie algébrique



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Plan du cours</b>	<b>5</b>
1.1	Variétés affines . . . . .	5
1.1.1	Premières définitions . . . . .	5
1.1.2	Nullstellensatz . . . . .	5
1.1.3	Topologie et irréductibles . . . . .	5
1.1.4	Espaces projectifs . . . . .	6
1.1.5	Fonctions régulières . . . . .	6
1.1.6	Morphismes d'ensembles algébriques . . . . .	6
1.2	Variétés affines abstraites . . . . .	6
1.2.1	Espaces annelés . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Partie III</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Partie II</b>	<b>9</b>
3.1	Premières définitions . . . . .	9
3.2	Recollement de variétés . . . . .	11
3.3	Sous-variétés . . . . .	12
3.4	Variétés quasi-projectives abstraites . . . . .	12
3.4.1	Le faisceau de fonctions régulières sur une variété projective . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Partie I</b>	<b>15</b>
4.1	Résumé . . . . .	15
4.2	Framework . . . . .	15
4.3	$k$ -algèbres et Noether . . . . .	15
4.4	Nullstellensatz . . . . .	17
4.5	Topologie et irréductibles . . . . .	17
4.6	Espaces projectifs . . . . .	18
4.7	Fonctions régulières . . . . .	18
4.8	Morphismes de variétés affines, première déf . . . . .	19

## *TABLE DES MATIÈRES*

# Chapitre 1

## Plan du cours

Ici le but c'est de faire un sommaire du cours vu qu'il est pas très clair.  
Essentiellement faut maîtriser de l'algèbre pour l'instant.

### 1.1 Variétés affines

#### 1.1.1 Premières définitions

1. Ensembles algébriques affines.
2. Correspondance avec les idéaux.
3. Lemme 1.1.10 : indice au weak nullstellensatz.
4. 1.1.11 : Énoncé du nullstellensatz et corollaires.

#### 1.1.2 Nullstellensatz

1. Normalisation de noether.
2. Nullstellensatz faible.
3. Nullstellensatz fort.
4. Preuve de la correspondance idéaux radicaux et ensembles algébriques.

#### 1.1.3 Topologie et irréductibles

1. Caractérisation des irréductibles via la correspondance.
2. Via les ouverts.

3. Décomposition unique des idéaux radicaux en idéaux premiers.
4. Décomposition unique des ensembles algébriques en irréductibles.

Y'a pleins d'exos.

#### 1.1.4 Espaces projectifs

1. Définitions de la topologie.
2. L'idéal "irrelevant".

#### 1.1.5 Fonctions régulières

1. Intuitions sur comment ça doit marcher sur les affines.
2. Définition locale.
3. Continuité.
4. Sur  $D(f)$ .

#### 1.1.6 Morphismes d'ensembles algébriques

1. Intuitions.
2. Définition intuitive.
3. Équivalence de catégorie avec les  $k$ -algèbres réduites.
4. Le corollaire : deux ensembles algébriques affines sont isomorphes ssi leurs algèbres de fonctions le sont.

Exercices.

## 1.2 Variétés affines abstraites

### 1.2.1 Espaces annelés

Ça ressemble au 1.1 au début.

1. Définition et espaces localement annelés.
2. Variétés algébriques affines abstraites.
3. Équivalence de catégorie entre variétés affines et variétés affines abstraites.

# Chapitre 2

## Partie III

On commence à defs des invariants comme la dimension.





# Chapitre 3

## Partie II

### 3.1 Premières définitions

Ducoup essentiellement maintenant on travaille avec des

$$(X, \mathcal{O}_X)$$

ou  $X$  est un ensemble algébrique affine et  $\mathcal{O}_X$  le faisceau de fonctions régulières. Plus généralement

$$X = \cup X_i$$

une union finie d'affines et  $\mathcal{O}_X$  est le faisceau qui étend les  $\mathcal{O}_{X_i}$ .

**Résumé 1.** Pour tout définir on procède comme suit :

1. Équivalence de catégories entres variétés algébriques affines et variétés algébriques abstraites affines.
2. Les  $D(f)$  sont des variétés abstraites.
3. Définition d'une variété abstraite par réunion d'ouverts affines.
4. Les ouverts d'affines sont des variétés abstraites.
5. Les ouverts sont des variétés abstraites.
6. la bijection :

**Résumé 2.** Le détail des preuves discute :

1. Comment décrire des morphismes de variétés abstraites.
2. Bien décrire algébriquement les  $D(r)$ .

3. La bijection

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X))$$

où  $Y$  est affine.

À nouveau, on a

$$Z(I) \cap D(F(\bar{T})) = X \cap D(F) \simeq Z(I, FS - 1) \subset \mathbb{A}^{n+1}$$

en tant que variétés algébriques abstraites. La preuve du cours consiste à dire

$$i: (X \cap D(F), \mathcal{O}_X|_{D(F)}) \rightarrow Z(I, FS - 1)$$

a pour inverse la projection  $p: \mathbb{A}^{n+1} \rightarrow \mathbb{A}^n$  et il montre que c'est un homéomorphisme à la main en disant que c'est ouvert par :

1. Si on regarde  $D(h) \cap Z(I, FS - 1)$ , alors  $h(\bar{T}, S) \bmod FS - 1$  s'écrit  $h(\bar{T}, 1/F)$ .
2. On en déduit  $F^N h(\bar{T}, S) \bmod FS - 1$  a un représentant  $R$  dépendant pas de  $S$ .
3. Par déf  $p(D(h) \cap Z(I, FS - 1)) = D(R) \cap X$ .

L'isomorphisme de faisceaux, on peut vouloir conclure directement en utilisant l'équivalence de catégorie 2 puis 1. Mais ça donne juste les morphismes de sections globales et je sais pas pq il veut pas utiliser le fait que  $p$  est  $i$  sont régulières.

**Remarque 1.** *J'ai compris l'intérêt de faire la preuve comme ça.. C'est juste que pour l'iso de faisceaux, si on veut se restreindre aux carrés*

$$\begin{array}{ccc} A(X)_f & \longrightarrow & A(Z(I, FS - 1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X(D(r)) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Z(\dots)}(D(R)) \end{array}$$

*faut bien montrer que l'image d'un principal c'est un principal. Le reste de la preuve paraît tellement compliqué pour rien mdr, mais ça a l'air nécessaire : essentiellement, on peut tjr écrire  $\mathcal{O}_X(D(r)) = A(X)[W]/(rW - 1)$  et  $D(r) \subset D(f)$  implique  $f$  inversible dans  $\mathcal{O}_X(D(r))$  puis  $A_f \simeq A$  si  $f$  est inversible dans  $A$ . Je mettrai pas tjr tout les détails.*

## Partie II

On peut définir les variétés abstraites par union finie:

$$(X, \mathcal{O}_X) = \cup (X_i, \mathcal{O}_X|_{X_i})$$

On en déduit que les ouverts sont bien des variétés. Enfin on a

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X))$$

pour  $Y$  affine et  $X$  quelconque par recollement des flèches affines. La continuité c'est le point flou mais qui est en fait le plus facile, le recollement des faisceaux est clair.

### 3.2 Recollement de variétés

Étant donné des  $(X_i)_i$  est des ouverts  $U_{ij} \subset X_i$  tels que

$$\phi_{ij}: U_{ij} \simeq U_{ji}$$

et que les  $\phi_{ij}$  engendrent une relation d'équivalence sur

$$\sqcup X_i$$

alors le quotient est une variété défini par les ouverts  $X_i$ .

**Question 1.** Pourquoi les  $X_i$  sont ouverts?

**Réponse 1.** C'est **PAS** juste que la projection est ouverte pour la topologie quotient, puisque c'est pas tjr vrai. C'est plutôt que la classe d'équivalence de  $X_i$  c'est  $X_i \sqcup_j U_{ji}$  qui est ouvert.

**Remarque 2.** *La topologie finale pour la projection, par déf la topologie la plus fine sur le quotient qui rend la projection continue, en particulier la projection devient ouverte quand*

$$p^{-1}p(U)$$

*est ouvert autrement dit la classe d'équivalence d'un ouvert est ouvert. C'est le cas ici, ce serait le cas avec des groupes/ananneaux topologiques j'imagine et pour toute topologie "équilibrée".*

### 3.3 Sous-variétés

Concrètement, les sous variétés c'est immersions ouvertes ou fermées, le cas des ouverts est clair. Pour les fermés, la version faiscautique :

On prends un fermé  $Z$  de  $X$  et le pullback  $i^*\mathcal{O}_X$

La traduction c'est que les fonctions sur  $Z$  c'est localement des restrictions de fonctions sur  $X$ .

**Remarque 3.** *Sur les affines c'est même pas localement ça se recolle bien. On peut regarder les fibres, si  $Z$  et  $X$  sont affines on a*

$$i^{-1}\mathcal{O}_X(Z)_x = \mathcal{O}_{X,i(x)} = A(X)_{\mathfrak{m}_x}$$

*et en tensorisant par  $\mathcal{O}_Z(Z) = A(Z)$  on obtient que  $i^*\mathcal{O}_X$  a les mêmes fibres que  $\mathcal{O}_Z$  avec un isomorphisme naturel.*

**Question 2.** Cas où  $X$  est un recollement de deux affines ?

### 3.4 Variétés quasi-projectives abstraites

On définit sur  $Z \subset \mathbb{P}^n(k)$  le faisceau donné par le faisceau de fonctions régulières muni des recollements donnés par les cartes affines. En gros, avec le Proj : à faire,

1. En gros le faisceau du Proj est bien un faisceau.
2. Ducoup revoir un peu le Proj.
3. C'est bien le faisceau de fonctions régulières.
4. Les  $Z^+(I)$  avec le faisceau  $\mathcal{O}_X$  de fonctions régulières est une variété.

Ducoup il se passe un truc marrant

Les ouverts du type  $D^+(P)$  sont affines !

L'idée c'est simplement d'utiliser le Veronese puis de montrer que  $D^+(H) \simeq D^+(T_i)$  est affine. Pour ça suffit de montrer que les morphismes de pullbacks

$$(\phi_i)_*(U) : \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n}(U) \rightarrow \mathcal{O}_{D^+(T_i)}(\phi_i^{-1}(U))$$

sont bien définis, c'est clair via la définition locale.

## Partie II

### 3.4.1 Le faisceau de fonctions régulières sur une variété projective

J'ai eu une idée ducoup, si on prends une variété projective  $X = Z^+(I)$  et  $P = p \bmod I$  alors si  $U = D^+(p)$  :

$$\mathcal{O}_X(U) = (k[T_0, \dots, T_n]/I)_{(p)}$$

Mon idée pour justifier la preuve c'est : si  $g \in \mathcal{O}_X(U)$  et

$$g|_{U_i} = P_i/Q_i$$

alors où est-ce qu'on peut regarder  $gP_i = Q_i$ ? Je me disais on peut regarder dans

$$S(X) = A(X')$$

avec  $X'$  le cone de  $X$  dans  $\mathbb{A}^{n+1}$ . Mon guess c'est :

$$\mathcal{O}_X(U) = A(X')_{(p)}$$

et dans ce cas, l'identité  $gQ_i^2 = P_iQ_i$  fait sens dans  $A(X')$  parce que  $D(p)$  est dense  $Z(gQ_i^2 - P_iQ_i)$ .

### *3.4 Variétés quasi-projectives abstraites*

# Chapitre 4

## Partie I

### 4.1 Résumé

### 4.2 Framework

Quand y s'agit de trouver des fermés projectifs ou des relations :

1. Ajouter des relations adaptées à la situation jusqu'à obtenir le vide.
2. Utiliser le nullstellensatz projectif.
3. Faire de l'algèbre linéaire.

pour le premier point une utilisation cool c'est de prouver que des morphismes sont finis. Typiquement les projections linéaires.

Quand y s'agit de montrer des isomorphismes. La partie homéomorphisme est souvent claire :

1. Tel point est dans tel ouvert ssi il vérifie telle ou telle relations.

La partie isomorphisme est moins claire, faut montrer que la flèche inverse est régulière et là c'est assez ad hoc.

### 4.3 $k$ -algèbres et Noether

J'ai essayé de prouver la normalisation de Noether qui dit que

**Théoreme 4.3.1** (Normalisation de Noether). *Une  $k$ -algèbre de type fini  $A$  est entière sur un  $k[T_1, \dots, T_d]$ .*

Et en fait y'a un truc intéressant. Ma stratégie c'était:

1. On suppose  $k[T_1, \dots, T_n]/I$  avec  $n$  minimal alors  $I$  petit.
2. On peut supp  $I$  premier, on se ramène au cas réduit trivialement et au cas intègre avec le lemme chinois.

Maintenant on peut regarder dans le corps de fractions une famille alg indép maximale, enfin c'est ce que j'aurai aimé. Mais c'est pas clair que elle est de taille  $n - 1$  ! C'est là tout le pb. La raison c'est que :

Les variétés, par exemple les courbes ont pas nécessairement de modèles dans  $\mathbb{P}^2$  non singuliers. D'où on peut rien dire sur le nombre de générateurs de  $I$  facilement (si  $n$  minimal implique  $I$  minimal et  $\dim(C) = 1$  alors  $I$  est engendré par un élément et on est dans  $\mathbb{P}^2$ ).

Bon la vraie preuve mtn :

- Essentiellement, on veut juste montrer que pour chaque générateur  $P$  on a un automorphisme qui le rend unitaire en une des variables. D'où le résultat par récurrence.

Deux questions maintenant :

1. Pq à automorphisme près ça suffit ?
2. Quel automorphisme ?

Pour la première question ducoup y'a un ou deux petit trick mentaux qu'il mentionne pas.

1. Quand on obtient une relation unitaire pour  $P$ , on fait une récurrence pour trouver l'injection entière  $k[T_1, \dots, T_d]$ .
2. L'injection ça peut être  $T_1 \mapsto L_1(T_1, \dots, T_d)$  avec les  $L_i$  de degré 1 pas nécessairement  $T_i$  !

Pour la deuxième question : on commence par regarder comment rendre  $T_1 \dots T_n$  unitaire en  $T_n$  par exemple. On peut regarder l'automorphisme

$$T_i \mapsto T_i + T_1; T_n \mapsto T_n$$

C'est clair que le résultat est unitaire en  $T_n$  ! Post-automorphisme l'injection de  $k[T_1, \dots, T_n]$  est **l'inclusion**, pré-automorphisme faut composer avec l'automorphisme inverse. Bon maintenant en général ça marche pas forcément ça faut tricker un peu, parce qu'on a plusieurs monomes. On peut prendre

$$T_i \mapsto T_i + T_n^{m_i}$$

et jouer sur le tuple  $m = (m_1, \dots, m_{n-1}, 1)$ , mais c'est juste de l'écriture.

Maintenant le nullstellensatz !



## 4.4 Nullstellensatz

**Corollaire 4.4.1** (Nullstellensatz faible). *Si  $A$  est une  $k$ -algèbre tf et  $\mathfrak{m}$  est maximal. Alors  $A/\mathfrak{m}$  est une extension finie de  $k$ .*

La preuve consiste à simplement se rendre compte que

$$k[T_1, \dots, T_d] \hookrightarrow A$$

entier implique  $k[T_1, \dots, T_d]$  est un corps d'où  $d = 0$ .

**Théoreme 4.4.2** (Nullstellensatz fort). *Soit  $A$  une  $k$ -algèbre tf, alors pour tout  $I$*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{I \subset \mathfrak{m}} \mathfrak{m}$$

Une idée de preuve c'est de remarquer que si  $\bigcap \mathfrak{m}$  contient des non nilpotents, disons  $f$ . Alors pour  $\mathfrak{m}' \subset A_f$  avec  $\delta: A \rightarrow A_f$  non nul :

$$k \mapsto A/\delta^{-1}\mathfrak{m}' \rightarrow A_f/\mathfrak{m}'$$

est algébrique d'où la deuxième flèche est entière d'où  $\delta^{-1}\mathfrak{m}'$  est maximal contenant pas  $f$  ce qui est contradictoire. À noter qu'on utilise  $A_f \simeq A[T]/(fT - 1)$  pour montrer que c'est tf.

**Question 3.** De manière constructive? Déjà, les localisés  $A_{\mathfrak{m}}$  sont pas t.f sur  $k$  mdr.

En particulier on obtient la correspondance avec le spectre maximal muni de sa topologie de Zariski. On en déduit direct :

**Théoreme 4.4.3** (Nullstellensatz fort 2). *Sur un corps algébriquement clos,  $I(Z(J)) = \sqrt{J}$  pour tout idéal  $J$  de  $k[T_1, \dots, T_n]$ .*

On a maintenant une correspondance entre ensembles algébriques et idéaux radicaux quand  $k$  est **algébriquement clos**.

## 4.5 Topologie et irréductibles

Essentiellement, dans un anneau noethérien, on a

Tout idéal radical  $I$  est intersection finie d'idéaux premiers.

En particulier, on déduit la décomposition finie unique en irréductible avec la correspondance de la section d'avant.

**Remarque 4.** *Un critère d'irréductibilité c'est que les ouverts s'intersectent tout court.*

## 4.6 Espaces projectifs

Ducoup les définitions à retenir :

1. Un idéal homogène c'est un truc de la forme  $\oplus A_d \cap I$ . C'est à dire que toute les composantes homogènes d'un  $f \in I$  sont dans  $I$ .
2. Les  $Z^+(I)$  sont défs par les zéros de polynômes homogènes. De manière équivalentes par la projection de  $Z(I) \subset \mathbb{A}^{n+1}$ .
3. À l'inverse  $I^+(Z) = I(\pi^{-1}Z)$ .

Maintenant le nullstellensatz devient :

Les idéaux homogènes différents de  $(T_0, \dots, T_n)$  correspondent aux variétés projectives.

un idéal définit le vide si et seulement si il contient

$$(T_0, \dots, T_n)^s$$

pour un  $s$ .

On obtient le générateur de relation (ce nullstellensatz)! À détailler un peu plus avec la preuve que les projections sont entières !

## 4.7 Fonctions régulières

On prends toujours la définition locale sur les variétés quasi-projectives et même algébriques. Y'a toujours un élément de preuve intéressant dans

$$A(Z)_f \simeq \mathcal{O}_Z(D(f))$$

sur les variétés affines pour  $f \in A(Z)$ . On recouvre  $D(f)$  par des  $D(f_i) = D(f_i^2)$  avec  $g \in \mathcal{O}_Z(D(f))$  et  $g|_{U_i} = g_i/f_i$ . En particulier,

$$f^r = \sum a_i f_i^2$$

puis  $gf^r = \sum a_i g_i f_i$  d'où la surjectivité de  $A(Z)_f \rightarrow \mathcal{O}_Z(D(f))$ !

## 4.8 Morphismes de variétés affines, première déf

Dans le cas des variétés affines : on définit littéralement via

Des restrictions de morphismes  $\mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ .

On obtient directement les flèches

$$\begin{array}{ccc} S_j & \longmapsto & \phi_i(T_j, j) \\ \\ k[S_1, \dots, S_m] & \longrightarrow & k[T_1, \dots, T_n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A(Y) & \longrightarrow & A(X) \end{array}$$

de l'équivalence de catégorie. Il faut juste prouver que de  $A(Y) \rightarrow A(X)$  on peut relever un morphisme de variétés.