Les extensions de corps résiduels et conséquences

0.1 Cas générique

On se place **toujours** dans le cadre où on a $\mathcal{O}_K$ de valuation **discrète**. Le cadre en gros c'est

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_K \arrow[r, dash] \arrow[d] & \tilde{\mathcal{O}}_K & \subseteq & (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i} \arrow[d] & =?= & (\mathcal{O}_L) \\ k_K \arrow[rrr] & & & k_L & & \end{tikzcd}$$

C'est à dire qu'on prends la clôture intégrale, on regarde ses idéaux maximaux et on obtient des extensions de d.v.r. Quand K est complet ou quand on fixe une valuation (un premier $\mathfrak{m}_i$) sur L, $\mathcal{O}_L$ fait sens.

0.1.1 Calcul dans le cas monogène

Pour calculer maintenant en fait une marche à suivre c'est

On sait le faire dans $\mathcal{O}_K[\alpha]$.

Si c'est le cas alors :

1. La factorisation de P dans $k_K[X]$ donne la ramification et les idéaux maximaux de $\tilde{\mathcal{O}}_K$!
2. Plus précisément, si
$$\bar{P} = \prod_i p_i^{r_i} \in k_K[X]$$
alors $\mathfrak{m}_i = (\mathfrak{m}_K, p_i(\alpha))$.

Le point **important** c'est la ramification, on relève

$$P(\alpha) = \prod_i P_i^{r_i}(\alpha) + \epsilon(\alpha)$$

ce qui donne par le deuxième point

$$\prod_i \mathfrak{m}_i^{r_i} = \prod_i (\mathfrak{m}_K, P_i(\alpha))^{r_i} \subset \mathfrak{m}_K \tilde{\mathcal{O}}_K = \prod_i \mathfrak{m}_i^{e_i}$$

On en déduit $r_i \geq e_i$ pour tout i et on conclut directement avec

$$\sum r_i f_i = \deg \bar{P} = \deg P = [L : K] = \sum e_i f_i$$

On a utilisé que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est fini sur $\mathcal{O}_K$ pour l'égalité $\deg \bar{P} = \deg P$ **et** la dimension $[L : K] = \sum e_i f_i$.

0.1.2 Cas primitif

On suppose $L = K(\alpha)$ (par exemple si L/K est séparable).

Si $\bar{P}$ est séparable, alors $\tilde{\mathcal{O}}_K = \mathcal{O}_K[\alpha]$ et on peut appliquer la section d'avant!

On a un problème quand l'extension résiduelle est inséparable, on se place dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & K(\alpha) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & L \arrow[d, dash] \\
\mathcal{O}_K \arrow[r, dash] \arrow[d] & \tilde{\mathcal{O}}'_K \arrow[r, dash] \arrow[d] & \tilde{\mathcal{O}}_K \arrow[d] \\
k_K \arrow[r, dash] & k_{K(\alpha)} \arrow[r, dash] & k_L
\end{tikzcd}$$

0.1.3 Cas complet

On a une équivalence entre :

1. L'extension L/K est non ramifiée (par déf non ramifiée et $k_{K(\alpha)}/k_K$ est séparable).

2. Il existe $\alpha : L = K(\alpha)$ et P le pol min de α sur K est séparable sur k_K.

L'idée c'est juste que la formule $ef = [L : K]$ est vraie. Et on peut relever une base de l'extension résiduelle ! En gros ça donne une réciproque à la section d'avant.

Dans le cas p-adique, les corps finis sont parfaits et on a toujours des extensions séparables (c'est immédiat de la déf)! En particulier, si $\bar{P}$ est inséparable c'est qu'il est scindé. Ça se voit bien par Hensel :

1. On a toujours $\bar{P} = F^d$ et en réécrivant $d \deg F = \deg P = e.f$ sachant que $\deg F \mid f$ (à vérifier mais ça se voit) on obtient $e \mid d$. (l'égalité c'est qu'on suppose P unitaire)

Conclure là dessus, ajouter une discussion des cassages d'extensions de $\mathbb{Q}_p$ est totalement ramifiée et non ramifiée (le faire). Et aussi faire le lien entre ramification sur $\mathbb{Q}$ est sur des complétions $\mathbb{Q}_p$. Aussi conclure le cas primitif avec des divisibilités.

0.2 Ramification 1

J'vais parler de ramification ici. Le lemme clé c'est que dans une extensions de d.v.r $\mathcal{O}_K - \mathcal{O}_L$. Si

$$k_K - k_L$$

est de dimension $f \in \mathbb{N} \cup \infty$. Alors

$$dim_k \mathcal{O}_L / \mathfrak{m}_K \mathcal{O}_L = e.f$$

avec $\mathfrak{m}_K = \mathfrak{m}_L^e$. Ensuite, si $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est la fermeture intégrale de $\mathcal{O}_K$ dans L alors

$$\sum_i e_i f_i \leq [L : K]$$

où on écrit $\mathfrak{m}_K \tilde{\mathcal{O}}_K = \prod_i \mathfrak{m}_i^{e_i}$ et $f_i = [\tilde{\mathcal{O}}_K / \mathfrak{m}_i : k_K]$. Ça c'est par le lemme chinois! Pour utiliser le résultat de juste avant faut aussi montrer que

$$(\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i} / \mathfrak{m}_i^r (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i} \simeq \tilde{\mathcal{O}}_K / \mathfrak{m}_i^r \tilde{\mathcal{O}}_K$$

Pour $\mathfrak{m}$ maximal (ça se fait à la main). On a l'égalité dans plusieurs cas :

1. K est complet, car alors $\tilde{\mathcal{O}}_K = \mathcal{O}_L$.
2. L/K est séparable, car alors $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est fini sur $\mathcal{O}_K$.
3. Plus généralement, si $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est fini sur $\mathcal{O}_K$.
4. $L \otimes_K \widehat{K}$ est réduite. Regarder le lien entre les nilpotents et la séparabilité.

Maintenant faut la calculer.