Notes perso : Géométrie algébrique

Table des matières

Introduction

En suivant le I. R. Shafarevich.

Chapitre 1

Premières propriétés

1.1 Variété produit

Ce qui est assez clair c'est le produit de variétés affines. L'idée en général c'est de construire

$$X \times Y \to \mathbb{P}^n(k)$$

un isomorphisme sur son image qu'on peut reconstruire localement de sorte à ce qu'il soit unique.

Note 1. *Page 54.*

Concrètement dans le cas affine, les fermés de $\mathbb{A}^{n+m}$ qui sont fermés de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ c'est les fermés du type $V(F(X_1, \dots, X_n)), G(X_{n+1}, \dots, X_m))$. Pour le projectif c'est assez similaire. Le truc c'est que brutalement définir

$$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{n+1+m+1-1}$$

ca marche pas. Un tuple du produit $(u_0, \dots, u_n, v_0, \dots, v_m)$ est doublement homogène donc définit pas un point de $\mathbb{P}^{n+m+1}$. Ducoup faut déf plutôt

$$\begin{aligned} \phi \colon \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m &\to \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1} \\ ([u_0, \dots, u_n], [v_0, \dots, v_m]) &\mapsto (u_i v_j)_{i,j} \end{aligned}$$

Et là on a clairement

$$\phi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) = \bigcap_{i,j} V\left(\begin{vmatrix} X_{ij} & X_{il} \\ X_{kj} & X_{kl} \end{vmatrix} \right)$$

En fait ce qui est cool c'est la remarque suivante.

Remarque 1. *Si on regarde les mineures 2x2 de* (X_{ij}) *et le lieu de leur zéros communs. On peut prouver que* ϕ *se surjecte dedans. En particulier la matrice* $(w_{ij}) = (u_i v_j)$ *est de rang* 1 *et en plus c'est un produit de matrices* $1 \times (n+1)$ *par* $(m+1) \times 1$.

En fait c'est non trivial le produit projectif mdr. Déjà à faire :

Exercices 1.1.1. Les fermés de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ sont les zéros de polynômes bihomogènes. Réponse : L'idée c'est que si on prend un polynôme homogènes en (X_{ij}) et qu'on regarde

$$X_{ij} \mapsto X_i Y_j$$

. On obtient un polynôme bihomogène en les X_i et les Y_j de mêmes degrés. En fait inversement si on a un polynôme bihomogène G de degré r en X_i et s en Y_j avec $r > s$, on peut remarquer que $V(G)$ dans $\mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{A}^{m+1}$ est égal à à

$$\bigcap V(Y_j^{r-s} G)$$

(à vérifier, ça a l'air de marcher justement parce qu'on regarde dans $\mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{A}^{m+1}$ et pas $\mathbb{A}^{n+1+m+1}$.) **Meilleure réponse** : Si on regarde $Z(G) \subset \varphi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ on peut montrer que G est bihomogène de mêmes degré. À l'inverse pour def des fermés de $\mathbb{P}^n$ on doit utiliser des générateurs homogènes et donc $\bigcap_i V(Y_j^{r-s} G)$ c'est des générateurs homogènes.

Pour $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^n$ on peut prendre les homogènes pour les premières.

1.2 Graphes

En gros étant donné la structure d'une variété projective X on peut se demander si la diagonale dans $X \times X$ est fermée. C'est assez clair si on remarque que dire que deux points projectifs $u = [u_0 : \ldots :_n]$ et $v = [v_0 : \ldots : v_n]$ sont égaux ssi ils sont proportionnels. Autrement dit si

$$u_i/u_j = v_i/v_j$$

ou

$$u_i v_j = u_j v_i.$$

Ensuite étant donné une fonction

$$f \colon Y \to X$$

on peut regarder

$$id \times f \colon X \times Y \to X \times X$$

d'où le graphe est fermé.

1.3 Les variétés projectives sont complètes

Y'a la preuve de Shafarevich et la preuve de Dat qui a l'air plus parlante et qui dit qu'on peut "compléter" les courbes ponctionnées d'un point sur une variété complète.

Pour la preuve de Shafarevich, on peut regarder $Z(G) \subset X \times Y \to Y$ et donner des conditions pour que $y \in p_2(Z(G))$ pour G un polynôme bihomogène. Déjà on peut se ramener à $X = \mathbb{P}^n$ car X est projective et $Y = \mathbb{A}^n$. En fait, $y \in p_2(Z(G))$ ça veut juste dire que $G(\bar{U}, y)$ a un zéro projectif. Autrement dit, $I_s \not\subseteq (G(\bar{U}, y))$. Par cette condition, en notant $(M_a)_a$ les monômes de degrés s on obtient

$$M_a(\bar{U}) = F_a(\bar{U})G(\bar{U}, y)$$

avec $\deg(F_a) = s - \deg(G)$. Enfin si on écrit F_a en somme monomes de degré $s - \deg(G)$ disons en N_b. Alors les M_a sont combinaisons linéaires des N_bG. Et on obtient une matrices entre la base canonique des monômes de degré s et les N_bG à coefficients des polynomes en y à coefficient dans k! La condition $y \in p_2(Z(G))$ équivaut alors au fait que le rang de la matrice soit $<$ au nombre de monôme de degré s en n variables. On prend y qui annule les mineures de taille cette dimension!

Corollaire 1.3.1. *L'image d'une variété projective est fermée.*

Suffit de factoriser $X \to Y$ en $X \to X \times Y \to Y$, la première flèche est $x \mapsto (x, f(x))$ et envoie X sur son graphe.

1.4 Un peu de birationnalité (exo 5 (1.3)

Si on prend $f_d, f_{d-1} \in k[X_1, \ldots, X_n]$ de degrés d et $d-1$ tels que $f_d + f_{d-1}$ est irréductible, alors $Z(f_d + f_{d-1})$ est birationnelle à $\mathbb{A}^{n-1}$.

Mon idée c'est que f_d/f_{d-1} est de degré 1, d'où $f_d/f_{d-1} + 1$ définit un hyperplan. Ducoup faut trouver un isomorphisme de $k(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n)$ vers $k(X_1, \ldots, X_{n-1})$. Pour ça deux manières de faire, si f_d a un monôme qui étend f_{d-1} on peut juste le factoriser en haut et en haut de la fraction. On obtient une expression de la forme

$$F_0.(X_k + F_1)$$

où F_0 est de degré 0 et F_1 de degré 1 qui a seulement pour dénominateur le monôme. On peut faire le changement de variable $X_k \mapsto X_k/F_0$, on obtient $X_k + F_1(F_0, X_1, \ldots, X_n)$.

Meilleure manière : En fait on peut écrire f_d/f_{d-1} comme $1/F_0(f_d/M)$ où F_0 est une fraction rationnelle de degré 0 et M un monôme. En gros on a factorisé en bas et en haut par M. Ensuite, en notant $M(i) = \{M \in S_{d_1} | X_i \mid M\}$ et

$$f_{d,i} = f_{d,i-1} - X_{i-1} \sum_{M \in M(f_{d,i-1}, i-1)} a_{M,i-1} M$$

et $M(f_{d,i}, i) = \{M \in M(i) | M \in Monome(f_{d,i})\}$ on peut écrire

$$f_d/M = \left(\sum_i X_i \sum_{N \in M(f_{d,i},i)} a_{N,i} N \right) /M$$

en particulier les N/M ont degré 0. Enfin si on note I le support de la somme de gauche, on peut déf

$$\varphi \colon K[T_1, \ldots, T_n] \to K[Z(f_d + f_{d-1})]_{f_{d-1},M}$$

par $T_i \mapsto X_i \sum_{N \in M(f_{d,i},i)} a_{N,i} N/M$ si $i \in I$ et $T_i \mapsto X_i$ sinon. On peut remarquer que la flèche préserve la graduation, i.e. $\ker(\varphi)$ est engendré par des polynômes de degré 1. On obtient une flèche rationnelle dominante injective

$$Z(f_d + f_{d-1}) \to Z(\ker(\varphi))$$

où $\ker(\varphi)$ définit un hyperplan de $\mathbb{A}^n$ d'où le résultat.

Bien meilleure manière! En fait, déjà pour rappel la petite section **??**. Puis on obtient la preuve suivante.

1.4.1 Une nouvelle preuve

On peut regarder $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ la flèche

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (t_1, t_1 t_2, \ldots, t_1 t_n)$$

on obtient un isomorphisme

$$k[T_1, \ldots, T_n]_{T_1} \simeq k[T_1, \ldots, T_n]$$

d'inverse $T_1 \mapsto T_1;\ T_i \mapsto T_i/T_1$. Maintenant on peut regarder

$$f_d(T_1, T_2/T_1, \ldots, T_n/T_1) + f_{d-1}(\ldots) = 0$$

qu'on obtient via l'isomorphisme induit

$$k[Z(f_d(T_i,i)+f_{d-1}(T_i,i)]_{T_1} \simeq k[Z(f_d(T_1, T_1T_2, \ldots, T_1T_n)+f_{d-1}(T_1, T_1 l T_2, \ldots, T_1T_n))]_{T_1}$$

Mais le membre de droite est égal à $k[Z(T_1 f_d + f_{d-1})_{T_1}]$ en particulier $Z(f_d + f_{d-1})$ est birationnel à $Z(T_1 f_d + f_{d-1})$. Maintenant si $f_{d-1} \neq 0$ on peut définir

$$k[T_1, \dots, T_n] \to k[Z(T_1 f_d + f_{d-1})]_{f_{d-1}}$$

via $T_1 \mapsto T_1 f_d / f_{d-1}$ et $T_i \mapsto T_i$. Le noyau a l'air d'être clairement $T_1 + 1$ d'où on a fini.

1.5 Surjectivité des morphismes finis

Ducoup si on regarde la condition $x \in f^{-1}(y)$, ça se traduit par $f_* \mathfrak{m}_y \subset \mathfrak{m}_x$. Inversement, si $f^{-1}(y)$ est vide alors $f_* \mathfrak{m}_y k[X] = k[X]$ et on applique le lemme de Nakayama car $\mathfrak{m}_y \neq k[Y]$. **Faudrait essayer de voir plus concrètement comment trouver une racine.**

1.6 Trouver un ouvert dans $f(X)$

L'idée c'est de décomposer f : $f \colon X \to Y \times \mathbb{A}^r \to Y$ défini par $k[Y] \subset k[Y][u_1, \dots, u_r] \subset k[X]$ où $k(X) = k(Y)(u_1, \dots, u_r, z)$. La première flèche faut juste choisir $u_i \in k[X]$, rendre l'extension entière avec la technique habituelle puis tout dérouler en utilisant le fait que les morphismes finis sont surjectifs. La deuxième c'est juste que la première projection on peut trouver un ouvert dans l'image d'un ouvert facilement.

1.7 Projections

Ça c'était cool, et plus deep que prévu. Ducoup, on considère des "e.v" de $\mathbb{P}^n$ (juste les regarder dans $\mathbb{P}^{n+1}$). Donnés par $E = Z(L_1, \dots, L_{n-d})$, et on déf

$$\pi \colon \mathbb{P}^n - E \to \mathbb{P}^{n-d-1}; (\bar{x}) \mapsto (L_i(\bar{x}))_i$$

L'idée géometrique c'est que si on prend $\mathbb{P}^{n-d-1} \simeq H \subset \mathbb{P}^n - E$, alors $H \cap E = 0$ et $H \oplus E = \mathbb{A}^{n+1}$ ce qui définit un projecteur. En particulier, si $x \in \mathbb{P}^n - E$ alors

$$E \oplus < x > \cap H \text{ est de dimension 1.}$$

Donc on a un point d'intersection dans $\mathbb{P}^n$, et il est donné par π. C'est pas entièrement clair, mais c'est clair que c'est une projection au sens où $H \oplus E = \mathbb{A}^{n+1}$ a des projecteurs associés.

Maintenant pour prouver que c'est une flèche finie, c'est plutôt cool, déjà on regarde $\pi \colon D(L_j) \cap X \to \mathbb{A}^{n-d-1} \cap \pi(X)$ et on veut montrer que

$\pi^*\colon k[\mathbb{A}^{n-d-1}] \to k[D(L_j) \cap X]$ est finie, et $g \in \mathcal{O}_X(D(L_j))$ est de la forme $g = G/L_i^m$ ($\mathbb{P}^n - E = \cup D(L_i)$). Maintenant $\pi^*(T_i) = L_i/L_j$ donc on doit trouver une relation algébrique unitaire entre g est les $\pi^*(T_i)$. C'est là que c'est fort. On remarque que l'image de

$$\pi_m\colon X \to \mathbb{P}^{n-d}; (\bar{x}) \mapsto (L_1^m, \ldots, L_{n-d}^m, G)$$

est fermée. On obtient $F_1, \ldots, F_s$ des polynômes qui annulent l'image ! Mais ça suffit pas encore, j'ai l'impression qu'on peut montrer au plus qu'on a seulement une relation du type $X \circ (L_i)^\alpha G^k - \ldots$ pas unitaire et qu'on devra localiser à trop de L_i. Le deuxième point important c'est que

$$[0 : \ldots : 0 : 1] \notin \pi_m(X)$$

parce que les L_i s'annulent pas simultanément, en particulier,

$$V(F_1, \ldots, F_s, z_0, \ldots, z_{n-d-1}) = \emptyset$$

D'où ... il existe k t.q. $z_{n-d}^k \in (F_1(\bar{z}), \ldots, F_s(\bar{z})) + (z_i, i) \subset k[z_0, \ldots, z_{n-d}]$. Tu vois le truc venir ? En particulier, si on regarde dans $\pi_m(X)$ on obtient

$$\psi(z_1, \ldots, z_{n-d}) = z_{n-d} - \sum z_j H_j = 0 \mod I(\pi_m(X))$$

En regardant dans $z_i \neq 0$ on obtient

$$k[\mathbb{A}^{n-d} \cap D(z_i)] = k[z_0, \ldots, z_{n-d}]_{z_i} \to \mathcal{O}_X(D(z_i \circ \pi_m) \cap X)$$

la flèche $z_j \mapsto L_j^m/L_i^m$ et $z_{n-d} \mapsto G/L_i^m$. De sorte que dans $\mathcal{O}_X(D(z_i \circ \pi_m) \cap X)$ on ait

$$\psi(G_i/L_i^m) = 0;\ \psi \in k[\pi(X) \cap D(T_i)][T] \text{ unitaire.}$$

Chapitre 2

Traductions variétés vers k-algèbres

2.1 L'équivalence de catégorie de base

Quand on a $\varphi\colon k[Y] \to k[X]$; $(\overline{Y_i})_i \mapsto (g_i(\overline{X_j}, j)_i$. Les Y_i vérifient les équations de Y donc par définition les $g_i(\overline{X}_j, j)$ aussi! D'où, la flèche $\varphi^a\colon X \to Y$ telle que

$$(x_j)_{j=1,\dots,n} \mapsto (g_i(x_j, j))_{j=1,\dots,m}$$

est bien définie et régulière! Maintenant, si on regarde $\ker(\varphi)$, c'est un idéal qui contient $I(Y)$ et dont les g_i vérifient les équations ! D'où l'image de φ^a est contenue dans

$$Z(\ker(\varphi)) \subset Y$$

en particulier, φ^a **est dominante** si et seulement si φ **est injective** !

À l'inverse, si φ **est surjective** on obtient un isomorphisme et donc une injection

$$k[Y]/\ker(\varphi) \simeq k[X]$$

mais $k[Y] \to k[Y]/\ker(\varphi)$ est par définition l'injection $Z(\ker(\varphi)) \subset Y$. En particulier, X **s'injecte dans** Y.

2.2 Parler des fibres

En fait la fibre $f^{-1}(y)$ vérifie des équations $f^*\mathfrak{m}_y$ et $f(x) = y$ veut dire que $f^*\mathfrak{m}_y \subset \mathfrak{m}_x$. On peut obtenir des conditions de surjectivité.

2.3 Nakayama

Bon encore et toujours, le Nakayama, j'ai vu une preuve un peu en détail. En gros, si M est un A-module de type fini. Et si $IM = M$, on peut dire que plusieurs choses : soit $(m_0, \ldots, m_n)$ une base de M, on a

$$m_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} m_i$$

avec $\alpha_{ij} \in I$. D'où la matrice $A = (\alpha_{ij})$ vérifie, $\ker(A - I_n) = M$ en tant qu'endomorphisme du A-module M. Ensuite, par la formule de Cramer, on a $\det(A - I_n).M = d.M = 0$. Avec $d \in 1 + I$, ça ca se vérifie en développant la diagonale.

On a des objets maintenant il reste juste à trouver des critères sur $1 + I$ et d.

Si $A \subset B = M$ est un sur-anneau de A, on a $1_A \in M = B$, d'où $aB = 0$ seulement si $a = 0$. On peut en déduire via $0 \in 1 + I$ ssi $I = (1)$ que

$$I \subset A \implies IB \subset B$$

où les inclusions sont strictes.

Maintenant pareil, si $1 + I$ ne contient que des inversibles, on obtient le critère avec $I = \bigcap_{\mathfrak{m} \in Specm(A)} \mathfrak{m}$ que $I.M = M$ implique $M = 0$, ici car d est inversible. Plus généralement ducoup si $1 + I$ ne contient que des inversible, si $M' + IM = M$ pour un M' quelconque alors $M = M'$, y suffit d'appliquer la méthode à M/M'.

À faire, le dernier critère : espace vectoriel sur le quotient implique générateur d'idéal.