

Intérêts du cours de corps locaux



# Chapitre 1

## Les questions auxquelles le cours réponds?

### 1.1 But

Essentiellement, le but c'est de comprendre le morphisme

$$\mathrm{Spec}(\tilde{\mathcal{O}}_K) \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$$

provenant de  $\mathcal{O}_K \subset \tilde{\mathcal{O}}_K$  la clôture intégrale de  $\mathcal{O}_K$  dans  $L$  une extension de  $K$ . Surtout dans le cas où l'extension est finie.

### 1.2 Motiver le cadre

On se restreint au cas où  $\mathcal{O}_K$  est de valuation discrète. Quand on a un anneau de Dedekind quelconque, on peut s'y ramener en remplaçant

$$\mathcal{O}_K$$

par

$$(\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{m}}$$

maintenant les localisés d'anneaux de Dedekind sont des anneaux de valuation discrète !

### 1.3 Le cadre général

Comme on part d'un anneau de Dedekind  $\mathcal{O}_K$ . La première question c'est Quand est-ce que

$$\mathcal{O}_K = \tilde{\mathcal{O}}_K$$

## 1.4 Ésthetique des anneaux de Dedekind

est une extension d'anneaux de Dedekind. La question se réduit systématiquement à

Est-ce que  $\tilde{\mathcal{O}}_K$  est noethérien ?

## 1.4 Ésthetique des anneaux de Dedekind

L'anneau de Dedekind est un anneau noethérien de dimension 1. Autrement dit, on est sur un schéma affine de dimension 1 :

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$$

Mais surtout, tout ses localisés à des premiers sont des anneaux de valuation discrète ! Ça ça m'intéresse pour les raisons suivantes :

1. On obtient un local-global en localisant.
2. On peut compléter et obtenir le cadre des corps locaux.

en particulier on a le pont de, si

$$K - L$$

est une extension de corps finis, on peut en faire une extension de corps valués via le processus suivant :

1. D'un premier de  $\mathcal{O}_K$  on obtient  $(\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{m}_K}$ .
2. On obtient aussi un corps valué  $(K, |\cdot|_{\mathfrak{m}_K})$ .
3. De  $\mathfrak{m}_K \tilde{\mathcal{O}}_K = \prod \mathfrak{m}_i^{e_i}$  on obtient des premiers  $\mathfrak{m}_i$ .
4. D'un  $\mathfrak{m}_i | \mathfrak{m}_K$  on obtient une extension de valeur absolue  $|\cdot|_{\mathfrak{m}_i}$  et une extension de DVR

$$\mathcal{O}_K - (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i}.$$

Géométriquement c'est l'étude de la fibre en  $\mathfrak{m}_K \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ . Maintenant, on cherche à obtenir le  $e$  tel que  $\mathfrak{m}_K = \mathfrak{m}_i^e$ . On obtient la cardinalité de la fibre et l'indice de ramification des uniformisantes.

En fait maintenant le point puissant, c'est le point où on complète  $K$  en  $\mathfrak{m}_K$  et  $L$  en  $\mathfrak{m}_i$ . Alors

$$\hat{K} - \hat{L}$$

a dimension  $f_i e_i$ .

*Les questions auxquelles le cours réponds?*

**Remarque 1.** *Un point qui semble flou là c'est : mais si je complète  $K$  en  $\mathfrak{m}_K$ ,  $\widehat{L} = L.\widehat{K}$  donc il est où le choix de compléter en  $\mathfrak{m}_i$  pour  $L$  ? On dirait que le choix est immédiat et les idéaux se contractent en un. En fait écrire*

$$L.\widehat{K}$$

*équivalait à faire vivre  $L$  et  $\widehat{K}$  au même endroit. D'où à plonger  $L$  dans une clôture de  $K$ ,  $K^c$  et la regarder dans  $(\widehat{K})^c$ . Sinon on pourrait regarder*

$$L \otimes_K \widehat{K}$$

*et là son spectre est non trivial ! Choisir*

$$L \otimes_K \widehat{K} \rightarrow (\widehat{K})^c$$

*équivalait à choisir un idéal maximal.*

On peut maintenant utiliser la théorie des corps complets et Hensel !

## 1.5 Les points omis

J'ai direct dit que  $\tilde{\mathcal{O}}_K$  était de Dedekind. En fait si  $L/K$  est finie c'est toujours vrai.

## 1.6 Quand est-ce que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est monogène sur $\mathcal{O}_K$ ?

## 1.7 L'étude du cas complet

## 1.8 Quand est-ce que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est noethérien ?

Comme d'hab on prends

$L/K$  finie avec  $K = \text{Frac}(\mathcal{O}_K)$  un anneau de valuation discrète

Ensuite on regarde sa fermeture intégrale dans  $L$ ,  $\tilde{\mathcal{O}}_K$ . On veut une extension de DVR, pour ça y faut que  $\tilde{\mathcal{O}}_K$  soit de Dedekind. Le problème c'est toujours de montrer que c'est noethérien.

1.8 Quand est-ce que  $\tilde{\mathcal{O}}_K$  est noethérien ?

### 1.8.1 Cas séparable

Étant donnée  $L/K$  finie séparable, on a tout ce qui nous faut. On a un discriminant non nul bien défini, d'où si  $L = \oplus K e_i$  alors

$$(Tr(e_i e_j))_{i,j}$$

est non dégénérée. Puis on a une base duale à  $e_i$ , i.e.  $e_i^*$  telle que  $Tr(e_i^* e_j) = \delta_{ij}$ . Avec ça on peut

1. à partir de  $e_i$  une base de  $L/K$  dans  $\tilde{\mathcal{O}}_K$ , obtenir sa base duale pour la trace  $e_i^*$ .
2. montrer que tout élément entier  $b = \sum \lambda_i e_i^*$  vérifie  $\lambda_i \in \mathcal{O}_K$ , via  $Tr(b e_i) = \lambda_i$ !
3. D'où  $\mathcal{O}_K$  est un sous  $\mathcal{O}_K$ -module d'un module de type fini donc noethérien.