Géométrie algébrique

Table des matières

1 Espaces annelés et localement annelés **5**

2 Variétés abstraites **7**

3 Se remémorer les schémas **9**
3.1 Topologie 9
3.2 Cas k-schéma de type fini 9

4 Recoller **11**

5 Schémas **13**

6 Le spectre maximal et le nullstellensatz **15**
6.1 Nullstellensatz 1 15
6.2 Nullstellensatz 2 15

On s'en fout si c'est pas dans le bon ordre.

Chapitre 1

Espaces annelés et localement annelés

Je viens de me rendre compte que les morphismes d'espaces localement annelés c'est clair mais pas tant que ça. Déjà

1. **Annelés** veut juste dire $\mathcal{O}_X$ est un faisceau d'anneau.
2. **Localement annelés** faut rajouter que les $\mathcal{O}_{X,x}$ sont des anneaux locaux.
3. Le morphisme $f^\sharp$ est entre $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$, sinon $f^\flat \colon f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$.

Donc si

1. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ sont des espaces annelés.
2. $(f, f^\sharp) \colon X \to Y$ un morphisme. Alors le $f^\sharp$ est juste un morphisme de faisceaux.
3. Pour avoir l'intuition habituelle, on regarde localement annelé. C'est à dire si $f(x) = y$ alors $f^\sharp \colon \mathcal{O}_{Y,y} \to (f_*\mathcal{O}_X)_y \to \mathcal{O}_{X,x}$ est local :
$$f^\sharp \mathfrak{m}_y \subset \mathfrak{m}_x.$$

Remarque 1. ***Et la !*** *En fait* $(f_*\mathcal{O}_X)_y$ *c'est la limite des* $\mathcal{O}_{X,x}$ *pour* $f(x) = y$*! J'avais jamais tilt mdr trop bizarre.*

Remarque 2. *Ducoup on a ces comparaisons,*

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_{y\in V} f_*\mathcal{O}_X(V) \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, dashed] & & \mathcal{O}_{X,x} \\
& \varinjlim_{f^{-1}y\subset U} \mathcal{O}_X(U) \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

et les colimites sont filtrantes donc existent et on peut relever. Est-ce que y'a des égalités ?

Chapitre 2

Variétés abstraites

Ducoup

1. Une variété abstraite affine c'est juste un ensemble algébrique affine X muni du faisceau

Chapitre 3

Se remémorer les schémas

Définition 3.0.1 (Schéma affine)**.** $(Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)}(Spec(A)))$ où pour $f \in A$:

$$D(f) := \{\mathfrak{p} \in Spec(A) | f \notin \mathfrak{p}\}$$

et $V(I) = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) | I \subset \mathfrak{p}\}$. Ensuite

$$\mathcal{O}_{Spec(A)}(D(f)) := A_f$$

et $\mathcal{O}_{Spec(A)}(U = \bigcup_i D(f_i))$ = recollements unique.

3.1 Topologie

Pour la topologie aller voir 2.1 du Gortz. Ensuite déf en 3.1/3.2 de la topologie des schémas.

Définition 3.1.1. Dans le cas des schémas. On

3.2 Cas k-schéma de type fini

Chapitre 4

Recoller

Chapitre 5

Schémas

Quelques questions sur les définitions de schémas.

1. Sous-schéma réduit est un sous-schéma ? (ça ca à l'air)
2. Pourquoi cette déf d'immersions ouvertes/fermés ? Simplement pour les conditions d'avoir un faisceau sur l'image compatible ?

Chapitre 6

Le spectre maximal et le nullstellensatz

6.1 Nullstellensatz 1

Comme dans les notes, le spectre maximal suffit pour les variétés parce qu'on regarde des k-algèbres et qu'on a la normalisation de Noether. Ou plutôt on a le **nullstellensatz!** Ce qui permet de voir que

- $A \to B$ définit $Spm(A) \to Spm(B)$

Dans algebraic groups de Milne il a l'air d'en parler. Faut voir avec la sobrification aussi?

6.2 Nullstellensatz 2

En fait je dis 2 parce que

$$\bigcap_{I \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \sqrt{I}$$

c'est le nullstellensatz fort qui donne

$$I(V(J)) = \sqrt{(}J)$$