Anneaux de Dedekind

Chapitre 1

Extensions d'anneaux de Dedekind

1.1 Annexe : Extensions entières où transmettre le spectre

J'en parle juste brièvement ici, plus dans le récap d'algèbre. Mais quand $A \to B$ est fini injectif. La dimension est préservée et

$$\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$$

est surjective avec des fibres finies.

1.2 Le cadre général

Comme on part d'un anneau de Dedekind $\mathcal{O}_K$. La première question c'est Quand est-ce que

$$\mathcal{O}_K - \tilde{\mathcal{O}}_K$$

est une extension d'anneaux de Dedekind. La question se réduit systématiquement à

$$\text{Est-ce que } \tilde{\mathcal{O}}_K \text{ est noethérien ?}$$

1.3 Se ramener au cadre

L'anneau de Dedekind est un anneau noethérien de dimension 1. Autrement dit, on est sur un schéma affine de dimension 1 :

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$$

Mais surtout, tout ses localisés à des premiers sont des anneaux de valuation discrète ! Ça ça m'intéresse pour les raisons suivantes :

1. On obtient un local-global en localisant.
2. On peut compléter et obtenir le cadre des corps locaux.

en particulier on a le pont de, si

$$K - L$$

est une extension de corps finis, on peut en faire une extension de corps valués via le processus suivant :

1. D'un premier de $\mathcal{O}_K$ on obtient $(\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{m}_K}$.
2. On obtient aussi un corps valué $(K, |.|_{\mathfrak{m}_K})$.
3. De $\mathfrak{m}_K \tilde{\mathcal{O}}_K = \prod \mathfrak{m}_i^{e_i}$ on obtient des premiers $\mathfrak{m}_i$.
4. D'un $\mathfrak{m}_i | \mathfrak{m}_K$ on obtient une extension de valeur absolue $|.|_{\mathfrak{m}_i}$ et une extension de DVR
$$\mathcal{O}_K - (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i}.$$

Géometriquement c'est l'étude de la fibre en $\mathfrak{m}_K \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Maintenant, on cherche a obtenir le e tel que $\mathfrak{m}_K = \mathfrak{m}_i^e$. On obtient la cardinalité de la fibre et l'indice de ramification des uniformisantes.

En fait maintenant le point puissant, c'est le point où on complète K en $\mathfrak{m}_K$ et L en $\mathfrak{m}_i$. Alors

$$\widehat{K} - \widehat{L}$$

a dimension $f_i e_i$.

Remarque 1. *Un point qui semble flou là c'est : mais si je complète K en $\mathfrak{m}_K$, $\widehat{L} = L.\widehat{K}$ donc il est où le choix de compléter en $\mathfrak{m}_i$ pour L ? On dirait que le choix est immédiat et les idéaux se contractent en un. En fait écrire*

$$L.\widehat{K}$$

équivaut à faire vivre L et $\widehat{K}$ au même endroit. D'où à plonger L dans une clôture de K, K^c et la regarder dans $(\widehat{K})^c$. Sinon on pourrait regarder

$$L \otimes_K \widehat{K}$$

et là son spectre est non trivial ! Choisir

$$L \otimes_K \widehat{K} \to (\widehat{K})^c$$

équivaut à choisir un idéal maximal.

On peut maintenant utiliser la théorie des corps complets et Hensel !

1.4 Les points omis

J'ai direct dit que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ était de Dedekind. En fait si L/K est finie c'est toujours vrai.

1.5 Quand est-ce que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est monogène sur $\mathcal{O}_K$?

1.6 L'étude du cas complet

1.7 Quand est-ce que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est noethérien ?

Comme d'hab on prends

$$L/K \text{ finie avec } K = Frac(\mathcal{O}_K) \text{ un anneau de valuation discrète}$$

Ensuite on regarde sa fermeture intégrale dans L, $\tilde{\mathcal{O}}_K$. On veut une extension de DVR, pour ça y faut que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ soit de Dedekind. Le problème c'est toujours de montrer que c'est noethérien.

1.7.1 Cas séparable

Étant donnée L/K finie séparable, on a tout ce qui nous faut. On a un discriminant non nul bien défini, d'où si $L = \oplus K e_i$ alors

$$(Tr(e_i e_j))_{i,j}$$

est non dégénérée. Puis on a une base duale à e_i, i.e. e_i^* telle que $Tr(e_i^* e_j) = \delta_{ij}$. Avec ça on peut

1. à partir de e_i une base de L/K dans $\tilde{\mathcal{O}}_K$, obtenir sa base duale pour la trace e_i^*.

2. montrer que tout élément entier $b = \sum \lambda_i e_i^*$ vérifie $\lambda_i \in \mathcal{O}_K$, via $Tr(be_i) = \lambda_i$!

3. D'où $\mathcal{O}_K$ est un sous $\mathcal{O}_K$-module d'un module de type fini donc noethérien.