Notes perso : Géométrie algébrique

Table des matières

1 Caractérisation **5**
- 1.1 Localisation et cloture intégrale 5
- 1.2 Cas affine 5
- 1.3 Cas général 5

2 Normalisation **7**
- 2.1 Clôture intégrale dans une extension finie, cas des k-algèbres . 7
- 2.2 Construction 7

...

Chapitre 1

Caractérisation

On dit qu'une variété algébrique intègre X est normale si pour tout ouvert $U \subset X$, $\mathcal{O}_X(U)$ est intégralement clos.

1.1 Localisation et cloture intégrale

À savoir que la localisation commute avec clôture intégrale. À prouver (c'est pas dur).

Pour S une partie multiplicative, si A est intégralement clos, et $x^n + \sum a_i x^i = 0$ avec $a_i \in S^{-1}A$. Il existe s tel que $sx \in A$ puis $x \in S^{-1}A$. Si A est pas intégralement clos c'est pareil en fait.

1.2 Cas affine

Il suffit que $A(X)$ soit intégralement clos ! Car pour tout $U = \cup D(f_i)$ on a

$$\mathcal{O}_X(U) = \cap_i A(D(f_i))$$

et que cette intersection est intégralement close car les $A(X)_{f_i}$ sont intégralement clos par la propriété de commutativité du dessus.

1.3 Cas général

Remarque 1. *Étant donné un ouvert affine U, on a $\mathcal{O}_{X,x} = A(U)_{\mathfrak{p}_x}$, en particulier par propriété de commutativité du dessus c'est encore intégralement clos.*

On peut prouver que dans une variété intègre on a toujours

$$\mathcal{O}_X(U) = \cap_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}$$

en particulier toutes les sous-variétés de X sont normales si X est normale. Ce sera utile pour la normalisation.

Chapitre 2

Normalisation

Une/la normalisation c'est un

$$\pi \colon X' \to X$$

birationnel fini avec X' normale. On peut aussi normaliser dans une extension L de $k(X)$. La première est la normalisation dans $k(X)$. C'est unique à isomorphisme canonique près.

2.1 Clôture intégrale dans une extension finie, cas des k-algèbres

Théoreme 2.1.1. *Si A est une k-algèbre de t.f intègre, typiquement $A(X)$, et $L/k(X)$ finie. Alors $\tilde{A} = B$ dans L est finie sur A.*

C'est étonnant ducoup vu qu'on assume rien sur l'extension et la caractéristique. Faut utiliser la normalisation de Noether pour la partie purement inséparable.

2.2 Construction

Étant donné une k-algèbre de type fini intègre, suffit de savoir que sa clôture intégrale dans un corps est de type fini sur k intègre. Puis on trouve une variété affine ! Ensuite on peut recoller.

Cas affine

C'est direct.

Unicité

Donc en gros de
$$\mathcal{O}_{X'}(\pi^{-1}U) = \cap_{x\in\pi^{-1}U}\mathcal{O}_{X',x}$$
car X' normale implique intègre par déf. On déduit que
$$\pi^{-1}U$$
est normale, en plus par finitude de π. C'est affine si U est affine et c'est forcément la clôture de $A(U)$ dans $k(X')$. D'où l'unicité canonique.

Cas général

Y suffit de prendre les normalisations affines
$$\pi_i \colon X'_i \to X_i$$
et de remarquer que $\pi_i^{-1}(X_i \cap X_j)$ et $\pi_j^{-1}(X_i \cap X_j)$ sont deux normalisations de $X_i \cap X_j$ d'où par l'unicité on peut recoller les X'_i!

Normalisation simple

Donc si on normalise dans $k(X)$, on peut remarquer que la birationalité est pas trop dure. Car
$$A(X) \subset A(\tilde{X}) \subset k(X)$$
et $A(\tilde{X})$ de type fini sur k force
$$A(\tilde{X}) = k[f_i/g_i, i = 1, \dots, r]$$
avec $f_i, g_i \in A(X)$. En particulier,
$$A(X)_{g_1\dots g_r} = A(\tilde{X}).$$
Ça montre que pour tout $x \in D(g_1 \dots g_r)$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est intégralement clos. D'où $D(g_1 \dots g_r)$ est normale puis la birationalité par unicité.