Produits tensoriels

Je veux discuter à nouveau les produits tensoriels. Une très grande remarque, bilinéaire implique pas linéaire ! Et inversement.

1 Cadre

On se place toujours dans le cadre où on a des R-modules M et N ou des R-algèbres

$$R \to A$$

et

$$R \to B$$

dans le cas d'anneaux $M = A$ et $N = B$ bah c'est des R-algèbres.

2 Construction

Comme d'hab, on prends un gros quotient de $A \times B$.

3 Propriété universelle

Voir produits fibrés.

4 Codiagonale, ou pas

Étant donné $id_{A\times B}$, on pourrait dire qu'on obtient $c\colon A \otimes_C B \to A \times B$ tel que $c \circ \otimes = id_{A\times B}$. Mais en fait ça aurait pas de sens vu que $c(a \otimes b) = (a, b)$ voudrait dire que $(ra, b) = r(a, b) = (a, rb)$. Le problème c'est que $id_{A\times B}$ est pas bilinéaire, vu que

$$(a + a', 2b) = (a, b) + (a', b) \neq (a + a', b)$$

mais elle est bien linéaire.

Remarque 1. *De cette manière on voit que la bilinéarité c'est vachement différent de la linéarité en un sens.*

5 Exactitude

Là c'est croustillant. On regarde

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\quad f \quad} D \xrightarrow{\quad g \quad} E \longrightarrow 0$$

$$A \otimes_R B \xrightarrow{f \otimes id_B} D \otimes_R B \xrightarrow{f \otimes id_B} E \otimes_R B \longrightarrow 0$$

La surjectivité à droite est immédiate ! Pour l'exactitude au milieu, pour un élément du noyau $g \otimes id_B(\sum d_i \otimes b_i) = 0$ on remarque que la flèche bilinéaire (!!)

$$D \times B \to E \times B \to E$$

se factorise en

$$\begin{tikzcd} D \times B \arrow[r] & E \times B \arrow[r, "p_1"] \arrow[d] & E \\ & E \otimes_C B \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

d'où le noyau de $D \otimes_C B \to E \otimes_C B$ est contenu dans $\ker(D \to E) \otimes_C B$. Et l'inverse est clair.

Remarque 2. *Pas besoin de parler de R-algèbre, on aurait juste pu raccourcir la preuve en regardant les $(d, 1)$ quoi.*

Maintenant pourquoi c'est pas nécessairement injectif à gauche? En fait la propriété universelle pour $A \otimes_R B$ est pas entièrement vérifiée. C'est à dire que $\sum f(a_i) \times b_i$ est d'image nulle pour tout $D \times B \to F$, mais c'est pas assez pour que ça implique que $v = \sum(a_i, b_i)$ soit nul. Simplement parce que v est d'image nulle seulement pour les $A \times B \to F$ qui se factorisent par $A \times B \to D \times B \to F$. Il en manque.

6 Produits de corps

Un jour je regarderai bien ça sur MO. Apparemment étant donné $L/k, E/k$ deux extensions de k. On a

$$\dim_{Krull}(L \otimes_k K) = \min(dimtr_k(L), dimtr_k(K))$$

c'est trop marrant. Donc pour que le produit soit un corps y faut forcément que l'un des deux corps soit algébrique sur k. Ça discute une condition suffisante aussi!

7 Produits d'algèbres

Si on remplace $A \times B \to F$ un morphisme bilinéaire de R-modules. Par un morphisme de R-algèbres en plus d'être bilinéaire. Le morphisme $A \otimes_R B \to F$ devient un morphisme de R-algèbres.

7.1 Polynomes

En particulier si on a $R \to A$ alors

$$R[X] \otimes_R A = A[X]$$

parce que $A[X]$ représente $B \mapsto B$ le foncteur

$$Mod_A \to Set$$

c'est à dire que suffit de connaître l'image de X. Je détaille parce que c'est pas entièrement clair. Faut aussi montrer que étant donné $b \in B$ on peut toujours définir entièrement $f\colon R[X] \times A \to B$ à partir de $f(X,1)$. Mais on les envoie où les $(1,a)$? Bah B a forcément une structure de A-algèbre ici. D'où

$$f(1,a) = af(1,1) = a$$

dans A-Alg.

8 Remarques

Si on étudie plus en détail des familles génératrices dans $A \times B$ comparées à $A \otimes_C B$ on se rend compte de plusieurs trucs. On "perd" des éléments dans $A \otimes_C B$ mais ça force la dimension à augmenter ! Je parle du fait qu'on perd après parce que c'est bizarre.

8.1 "On perd"

On a une flèche surjective $A \times B \to A \otimes_C B$ ce qui est étonnant vu les histoires de dimension. On a un noyau qui contient $0 \times B$ et $A \times 0$ par exemple. Le truc c'est que c'est une flèche bilinéaire mais pas linéaire! $(f(ra, rb) = r^2 f(a,b))$

8.2 Ça force la dimension à augmenter!

Par exemple si on a $(a_i) \in A$ et $(b_j) \in B$ des familles alors

$$(a_i, b_j)$$

sont engendrés par les $(a_i, 0)$ et $(0, b_j)$. Sauf que par bilinéarité $a_i \otimes 0 = 0 \otimes b_j = 0$. On est obligés de considérer les

$$a_i \otimes b_j$$

d'où si $C = k$ un corps par exemple on a

$$\dim_k A \times B = \dim_k(A) + \dim_k(B)$$

tandis que

$$\dim_k A \otimes_k B = \dim_k(A). \dim_k(B)!$$

Pour prouver le deuxième on peut juste remarque que les $(a_i \otimes b_j)_j$ sont libres en indexant à droite. D'où la liberté se ramène à une liberté terme à terme.

9 Résumé

Pour la construction, on peut le voir comme le quotient du R-module libre sur $A \times B$, E, où on quotiente par les conditions nécessaires à ce que toute $f \colon A \times B \to F$ bilinéaire s'étende en $E \to F$ par $\bar{f}(e_{(a,b)}) = f(a, b)$. En particulier c'est engendré par

$$e_{ax+by,z} - ae_{x,z} - be_{y,z} = e_{x,az+bt} - ae_{x,z} - be_{x,t} = 0$$

c'est là qu'on voit que le produit est engendré par les

$$x \otimes y$$

9.1 Même définitions

Donc la construction en tant que R-module est exactement la même que la construction en tant que R-algèbres, juste on rajoute le produit terme à terme (loi de composition pas quotient).

9.2 Deux propriétés universelles

En tant que R-modules : les R-flèche bilinéaires

$$A \times B \to C$$

se factorisent par $A \otimes_R B \to F$ en flèche linéaire de manière unique une fois $\otimes$ fixé. En tant que R-algèbres : Toutes deux R-flèches d'algèbres

$$A \to C, B \to C$$

fournissent une unique flèche $A \times_R B \to C$ de R-algèbres. C'est le produit fibré.

Remarque 3. *La dernière remarque c'est que les R-flèches doivent coincider, faut donc former le carré du push-out. La flèche bilinéaire fait rentrer ça dans sa définition. La différence c'est qu'un R-module c'est pas qu'un morphisme $R \to A$ nécessairemment! C'est plutôt $R \to End(A, A)$ (qui a une structure d'anneau via celle de A) j'ai l'impression.*