Géométrie algébrique

Table des matières

Introduction

On est censés prouver Riemann-Roch.

Chapitre 1

Variétés algébriques

1.1 Nullstellensatz

Pas oublier de rechopper mon carnet. Y'a les preuves complètes.

Théoreme 1.1.1. *Y'a une correspondance entre points fermés de* $\mathbb{A}^n(k)$ *et idéaux maximaux dans* $Spm(k[T_1, \ldots, T_n])$.

Corollaire 1.1.2. *Si* A *est une* k*-algèbre de t.f. et* $\mathfrak{m}$ *un idéal maximal alors* $A/\mathfrak{m}$ *est une extension finie de* k.

Lemme 1.1.3. *Si* A *est une* k*-algèbre de t.f. alors* $\sqrt{I} = \cap_{\mathfrak{m} \in Spm(A), I \subset \mathfrak{m}} \mathfrak{m}$

Lemme 1.1.4. *Si* k *est algébriquement clos, c'est un homéomorphisme (entre* $\mathbb{A}^n(k)$ *et* $Spm(k[T_1, \ldots, T_n])$*).*

Démonstration. On prends le morphisme quotient, c'est l'évaluation et le noyau est de la forme $(T_i - t_i)_i$. □

Théoreme 1.1.5 (Nullstellensatz)**.** *Si* $k = \bar{k}$ *alors* $I(Z(J)) = \sqrt{J}$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} I(Z(J)) &= I(\bigcup_{x \in Z(J)} x) \\ &= \bigcap_{x \in Z(J)} I(\{x\}) \\ &= \bigcap_{x \in Z(J)} \mathfrak{m}_x \\ &= \bigcap_{\mathfrak{m} \in Spm(A), J \subset M} \mathfrak{m} \end{aligned}$$

et la dernière est $\sqrt{J}$ par le lemme. (omg, revoir la preuve dans Atiyaah) □

Remarque 1 (!). *L'endroit où on utilise le weak nullstellensatz on a besoin de k algébriquement clos. La dernière qui vient du lemme y'a pas besoin. Autrement dit, on peut utiliser Spm pour faire de la géométrie algébrique sur un corps non algébriquement clos.*

Définition 1.1.6. $A(Z) = k[T_1, \ldots, T_n]/I(Z)$

Pour $f \in A(z)$ et $\tilde{f}$ t.q $p(\tilde{f}) = f$ pour $p\colon k[T_1, \ldots, T_n] \to A(Z)$. Pour $z \in k^n$ on peut toujours déf $f(z) := \tilde{f}(z)$. En particulier, on peut déf

Définition 1.1.7. $D(f) = \{s \in Z : f(z) \neq 0\} = D(\tilde{f}) \cap Z$. Avec $D(\tilde{f}) = \mathbb{A}^n(k) - Z(\tilde{f})$.

Remarque 2. *Comme d'hab juste il définit pour des fonctions a priori par déf sur $\mathbb{A}^n(k)$.*

Remarque 3 (C'est super chiant). *Faut faire gaffe ducoup en fonction de la fonction que j'utilise ou de son lift pour les inclusions.*

Corollaire 1.1.8. *Si $f, g \in A(Z)$ et $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$. On a*

- *Pour $J_1, J_2 \leq A(Z)$: $Z(J_1) \subset Z(J_2) \leftrightarrow J_2 \subset \sqrt{J}_1$.*
- *$D(f) \subset D(g) \leftrightarrow \exists h \in \mathbb{A}(Z)$ t.q. $f^n = gh$.*
- *Les ouverts principaux forment une base de la topologie.*

Démonstration. Pour le premier point si $Z(J_1) \subset Z(J_2)$ alors faut lift dans $k[T_1, \ldots, T_n]$ avant d'appliquer le nullstellensatz. Pour le deuxième, c'est clair. Pour le troisième, sur $\mathbb{A}^n(k)$ on prend $f \in I(Z)$,où $U = \mathbb{A}^n(k) - Z$, t.q $f(x) \neq 0$ (possible car $x \notin Z$. □

Proposition 1.1.9. *Soit Z un ensemble algébrique affine. Alors Z est irréductible ssi $I(Z)$ est premier. Si $k = \bar{k}$, $I \leq K[T_1, \ldots, T_n]$ alors $Z(J)$ est irréductible ssi $\sqrt{J}$ est premier.*

Démonstration. Avec les nouvelles notations c'est direct, avec les anciennes si $Z(J)$ est irreductible $Z(f) \cup Z(g) = Z(J)$ implique $Z(J) \subset Z(f)$ ou $Z(J) \subset Z(g)$. □

Lemme 1.1.10. *Soit A un anneau noetherien, alors les idéaux radicaux sont des intersections finies d'idéaux premiers.*

Démonstration. On regarde l'ensemble des idéaux qui sont pas des intersections d'idéaux premiers. Comme A est noethérien y'a un élement maximal I qui n'est pas premier. Soit $a, b \in A - I$ t.q. $ab \in I$. On considère $I_a\sqrt{I + aA}$ et $I_b = \sqrt{I + bA}$. Ils sont plus gros que I donc intersections d'idéaux premiers. En particulier on prouve facilement que $I = I_a \cap I_b$ (I est radical). □

Proposition 1.1.11. *Si $k = \bar{k}$, on a une décomposition unique des ensembles algébriques en variétés irréductibles non contenues les unes dans les autres.*

Démonstration. $I(Z) = \bigcap_{i=1}^{m} \mathfrak{b}_i$. On retire les $\mathfrak{b}_i$ contenus dans les autres. □

1.2 Espace projectif

On considère $k[T_0, \ldots, T_n] = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$.

Lemme 1.2.1. *Sur les corps infinis, $f \in S_d$ ssi $\lambda^d f(x_i, i) = f(\lambda x_i, i)$.*

Définition 1.2.2. Un idéal est homogène ssi dès que $f = f_1 + \ldots + f_n \in I$ alors $f_i \in I$. C'est équivalent à être généré par des éléments homogènes, i.e. $I = \bigoplus S_d \cap I$.

Remarque 4. *Comme en géo diff regarder ce qu'il se passe quand on regarde des polynômes homogènes dans $\mathbb{A}^{n+1}$ et qu'on les pousse (homéo?).*

Définition 1.2.3. Pour I un idéal homogène de $k[T_0, \ldots, T_n]$, on définit $Z_+(I) = \{P \in \mathbb{P}^n(k) : f(P) = 0 \ \forall f \in I \text{ f homogène}\}$ où autrement on lift P et on prends f quelconque. Si k est infini et $Z \subset \mathbb{P}^n(k)$, on définit $I_+(Z) = I(\pi^{-1}(Z))$.

Théoreme 1.2.4 (Nullsellensatz projectif)**.** *On suppose $k = \bar{k}$ et J homogène. On a*

- *$Z_+(J) = \emptyset$ ssi $(T_0, \ldots, T_n) \subset J$.*
- *Si $Z_+(J) \neq \emptyset$ alors $I_+(J_+(J)) = \sqrt{J}$.*

Démonstration. Si $Z_+(J) = \emptyset$ on lift à $\mathbb{A}^{n+1} - 0$ pour voir que $Z(J) \subset \{0\} = (T_0, \ldots, T_n)$. Sinon $I_+(Z_+(J)) = I(\pi^{-1}(Z_+(J))) = I(\pi^{-1}(Z_+(J)) \cup \{0\}) = \sqrt{J}$. □

1.3 foncions régulières

Revoir que la topologie de Zariski c'est la plus petite topologie que rend continue les polynômes.

Définition 1.3.1 (Fonction régulière)**.** On décrit pour $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$ l'anneau $\mathcal{O}_Z(U)$. On prend les fonctions qui sont localement des fractions rationnelles.

Note 1. *Trouver exactement où on peut écrire des polynômes, les ouverts sont quasi-compacts(!).*

Lemme 1.3.2. *$\mathcal{O}_Z$ est un faisceau pour les restrictions naturelles.*

Démonstration. C'est évident avec la déf mdr. □

Proposition 1.3.3. *Soit $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$.*

- *Les fonctions régulières sont continues.*
- *Pour tout $f \in \mathbb{A}(Z)$, la flèche $\mathbb{A}(Z) \to \mathcal{O}_Z(D(f))$ passe au quotient en un isom $\mathbb{A}(Z)_f \simeq \mathcal{O}_Z(D(f))$.*
- *$\mathbb{A}(Z) \simeq \mathcal{O}_Z(Z)$.*

Démonstration. Pour le premier point l'idée c'est que localement on peut se mettre sur un ouvert tel que $f|_U(U) = \{pt\}$. Le deuxième point c'est la surjectivité qu'y faut voir. Le troisième point c'est le plus cool, c'est l'idée que on commence par décomposer Z en une union finie $\bigcup_i D(f_i)$ où on est une fraction rationnelle. Ensuite, on obtient $(gf_i - h_i)|_{D(f_i)} = 0$, faut relever puis dérouler avec le fait que $1 \in (f_i, i)$ quelque part. □

Remarque 5. *Si on prend $\mathbb{A}^2 \backslash (0,0)$, il a les mêmes sections globales que $\mathbb{A}^2$. Ça prouve que cet ouvert est pas affine.*

1.4 Morphismes d'ensembles algébriques

Dans les ensembles algébriques on peut directement prendre des fonctions polynomiales ! C'est la preuve d'avant.

Théoreme 1.4.1. *On a une équivalence de catégories entre les k-algèbres de type finies réduites et la k-variétés.*

Note 2. *Revoir vite fait la construction.*

1.5 Espaces annelés

Définition 1.5.1. Un espace annelé est un espace topologique X muni d'un faisceau de k-algèbre pour nous.

Définition 1.5.2. Un morphisme d'espaces annelés

$$(|X|, \mathcal{O}_X) \to (|Y|, \mathcal{O}_Y)$$

est un couple $(|f|, f^\#)$. Où $|f|$ est un morphisme d'espaces topologiques et $f^\# \colon O_Y \to |f|_* \mathcal{O}_X$ un morphisme tels que les flèches induites sur les fibres sont des morphismes d'anneaux locaux.

Note 3. *Le faisceau* $|f|_*\mathcal{O}_X$ *est le pullback classique. Si* $y = |f|(x)$, *comme d'habitude on a*

$$f^\#\colon O_{Y,y} \to (|f|_*\mathcal{O}_X)_y \to \mathcal{O}_{X,x}$$

Enfin en fait comme c'est localement annelé apparemment on peut montrer que $f^\#$ *c'est automatiquement le pullback de fonctions.*

Théoreme 1.5.3. *Le couple* $(Z, \mathcal{O}_Z)$ *est un espace annelé.*

Démonstration. Les fibres $\mathcal{O}_{Z,z}$ sont les $\mathbb{A}(Z)_{\mathfrak{m}_z}$. □

de notre équivalence de base

{ensembles algébriques affines} → {k-algèbre réduite de type fini}

on plonge les ensembles algébriques dans les espaces localements annelés. En fait c'est pleinement fidèle, on a pas un nouvel objet.

Proposition 1.5.4. *On a une bijection*

$$Hom_{algSets}(X, Y) \to Hom_{LocRingedSpace}((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y))$$

Démonstration. Étant donné $f\colon X \to Y$, on définit $f^\#(U)\colon \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}U)$ par $s \mapsto s \circ f$. Et à f on associe $(f, f^\#$. Maintenant si on a un $(f, f^\#)$ un morphisme d'espaces localement annelés quelconque, faut montrer que f est un morphisme d'ensemble algébriques et que $f^\#$ est bien le pullback habituel. Faut se rappeler que $f^\#(\mathfrak{m}_y) \subset \mathfrak{m}_x$ tel que $f(x) = y$. En particulier, le grand carré de

$$s \longmapsto f^\# s$$

$$\begin{tikzcd}
f^\#\colon \mathcal{O}_Y(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(f^{-1}U) \arrow[d] \\
O_{Y,f(x)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[d] \\
k = O_{Y,f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)} \arrow[r] & O_{X,x}/\mathfrak{m}_x = k
\end{tikzcd}$$

commute, et la flèche $\mathcal{O}_Y(U) \to k$ est l'évaluation, la flèche $k \to k$ est l'identité $(1 \mapsto 1)$, i.e. $f^\#(s)(x) = s(f(x))$. On a montré que $f^\#$ est le pullback habituel. Pour montrer que c'est un morphisme, on peut regarder $\tilde{f}\colon X \to Y \to \mathbb{A}^n_k$. On obtient

$$\tilde{f}(\mathbb{A}^n(k))\colon k[T_1, :, T_n] \to \mathcal{O}_X(X)$$

qui à T_1 associe f_1. En particulier, c'est $T_1 \circ f$ par le point d'avant. De sorte que $\tilde{f}$ est défini par des polynômes et donc un morphisme. □

1.6 Recollements

1.7 Sous-variétés

On appelle variété des unions finies de variétés affines avec le faisceau structurant.

Définition 1.7.1 (Sous-variété)**.** Pour un fermé dans $Z \subset X$ une variété algébrique. On définit,

$$\mathcal{O}_Z(V) = \{f : V \to k | \forall z \in V \exists g \in \mathcal{O}_X(U), U \cap Z \subset V, g|_{U \cap Z} = f|_{U \cap Z}\}$$

autrement dit c'est juste $i^{-1}\mathcal{O}_X$ pour $i : Z \subset X$.

Lemme 1.7.2. *Soit X une variété algébrique et $Z \subset X$ fermé. Alors Z est une variété algébrique. Si X est affine alors Z aussi.*

Démonstration. On doit montrer que Z est un recouvers d'affine. Suffit de montrer que $Z \cap U$ est affine si U est affine. Suffit de le montrer dans $X = \mathbb{A}^n$ et là $\mathcal{O}_Z$ c'est littéralement le faisceau de fonction régulière donc on a fini. (Il définit une variété affine comme un fermé topologique de $\mathbb{A}^n$ plus faisceau) □

1.8 Variétés projectives

Dans $\mathbb{P}^n(k)$ on définit sur $X = Z_+(I)$,

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \to k, \text{Localement une fraction homogène}\}$$

Si on définit la localisation homogène en P homogène, avec $B = k[T_1, \ldots, T_n]/I$, via $B_{(P)}$ les fractions de degrés 0. Plus rigoureusement, via $k[T_1, \ldots, T_n]_{(P)}/I_{(P)}$ avec $I_{(P)} = \{Q/P^n | Q \in I\}$.

Proposition 1.8.1. *Si $X = Z_+(I) \subset \mathbb{P}^n(k)$ et $U = X \cap D_+(p)$ ($\bar{P} = p$). On a $B_{(p)} \simeq \mathcal{O}_X(U)$.*

Proposition 1.8.2. *Si P est non constant homogène alors $D_+(P)$ est une variété affine. Si $P \in \mathcal{O}_Z(Z) = B$ de degré ≥ 1 pareil.*

Définition 1.8.3. Les variétés quasi-projectives sont les localement fermées dans $\mathbb{P}^n(k)$.

Chapitre 2

Dimension

Définition 2.0.1. On prend la dimension de Krull avec le sup des chaines de fermés irréductibles.