

Notes perso : Géométrie algébrique



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Morphismes d'espaces localement annelés</b>	<b>5</b>
1.1	Le cas des $k$ -algèbre de type fini . . . . .	5
1.1.1	Le morphisme sur les fibres . . . . .	6
1.2	Conséquences . . . . .	6
1.2.1	Cas affine . . . . .	6
1.3	Utilisation de la caractérisation $f^\sharp(g) = g \circ f$ . . . . .	6
1.3.1	Variétés affines vers espaces localement annelés . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Immersiones</b>	<b>9</b>
2.1	Immersiones ouvertes . . . . .	9
2.2	Immersiones fermées . . . . .	9
2.2.1	Rappel sur $f^{-1}$ . . . . .	9
2.2.2	À faire . . . . .	10
2.2.3	Étude de la déf . . . . .	10
2.2.4	Cas affine . . . . .	11
2.2.5	Cas des variétés . . . . .	11
2.2.6	Avec la définition affine et faisceau surjectif . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Morphismes affines</b>	<b>13</b>
3.0.3	Cas quasi-projectif . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Morphismes séparés</b>	<b>15</b>
4.1	Un critère . . . . .	15
4.1.1	Ligne à double point . . . . .	15
4.2	Intersections d'affines est affine . . . . .	16
4.3	Sur des $k$ -schémas . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Morphismes propres</b>	<b>17</b>
5.1	La ligne a point double est universellement fermée mais pas séparée . . . . .	17
5.2	Si $X \rightarrow Y$ est fini et $Y$ est propre alors $X$ est propre . . . . .	17

*TABLE DES MATIÈRES*

5.3	Conséquence de la propriété . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Morphismes finis</b>	<b>19</b>
6.1	Fini implique affine . . . . .	19
6.2	Surjectivité des morphismes finis . . . . .	19
6.3	Trouver un ouvert dans $f(X)$ . . . . .	19
6.4	Projections . . . . .	20

# Chapitre 1

## Morphismes d'espaces localement annelés

Le but là c'est de revoir pourquoi dans le cas localement annelé  $(f, f^\#): X \rightarrow Y$  la flèche  $f^\#$  correspond bien au pullback  $g \mapsto g \circ f$  (c'est pas tjr défini sur un Schéma affine) et l'intuition est exacte dans le cas des variétés. Ensuite de voir pourquoi les schémas affines généralisent bien les variétés et ensembles algébriques initiales.

### 1.1 Le cas des $k$ -algèbre de type fini

Dans le cas des variétés abstraites, on prends deux variétés affines  $X \simeq (Z(I) \subset \mathbb{A}^n, \mathcal{O}_X)$  et  $(Y, \mathcal{O}_Y)$ . Étant donné un morphisme d'espaces localement annelés  $(f, f^\#): X \rightarrow Y$  on a

$$\begin{array}{ccccc}
 s & f^\#: \mathcal{O}_Y(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(f^{-1}U) & f^\#(s) \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 & \mathcal{O}_{Y,f(x)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x} & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 s(f(x)) & \kappa(f(x)) = k & \xrightarrow{id} & \kappa(x) = k & f^\#(s)(x)
 \end{array}$$

Un truc qui fait tiquer c'est que ça semble pas utiliser le fait que c'est localement annelé, déjà c'est pas clair que c'est un morphisme de  $k$ -algèbres les morphismes de corps résiduels. En fait l'endroit où ça l'utilise c'est que l'existence de ce morphisme vient du fait que

$$\mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{p}_x$$

passse au quotient parce que  $f_x^\#(\mathfrak{p}_{f(x)}) \subseteq \mathfrak{p}_x$ .

### 1.1.1 Le morphisme sur les fibres

Retour sur l'adjonction entre  $f^{-1}$  et  $f_*$  pour un morphisme de faisceaux  $f: (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$ . On remarque que des deux carrés

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_Y(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(f^{-1}U) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{O}_{Y,f(x)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (f^{-1}\mathcal{O}_Y)(V) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(V) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (f^{-1}\mathcal{O}_Y)_{f(x)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x} \\
 \simeq & & \\
 \mathcal{O}_{Y,f(x)} & & 
 \end{array}$$

C'est étonnamment celui de droite qui est intuitif à prouver. On regarde la famille des  $f^{-1}\mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(V) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  ça donne une flèche de la limite des  $x \in V$  tels que  $f(V) \subseteq U$  d'où la limite des  $f(x) \in U$ !

## 1.2 Conséquences

Le fait que  $f: X \rightarrow Y$  est un morphisme d'espaces localement annelés force  $f^\sharp(U)(P) = P \circ f|_U$  ça a tout de suite des conséquences. Par exemple, si  $f$  est dominant, à quelle conditions

$$P \circ f|_U = Q \circ f|_U$$

force  $(P = Q)|_U$  ? De ça on peut déduire des critères pour que le morphisme de faisceau soit surjectif ou injectif.

### 1.2.1 Cas affine

## 1.3 Utilisation de la caractérisation $f^\sharp(g) = g \circ f$

### 1.3.1 Variétés affines vers espaces localement annelés

Pour montrer que  $Z \mapsto (Z, \mathcal{O}_Z)$  est un pleinement fidèle faut montrer qu'étant donné  $f: X \rightarrow Y$ , et  $g \in \mathcal{O}_Y(V)$  alors  $g \circ f \in \mathcal{O}_X(f^{-1}V)$ .

**Remarque 1.** C'est bien une **fonction**, mais c'est pas clair qu'elle est régulière.

### *Morphismes d'espaces localement annelés*

Dans notre cas avec la définition faut prouver que  $g \circ f$  est régulière sachant qu'on a

$$f_*: A(Y) \rightarrow A(X).$$

Pour  $x_0 \in f^{-1}V$  on prends  $f(x_0) \subset V_0$  tel que  $g|_{V_0} = G/H$  avec  $H(f(x_0)) \neq 0$ , alors  $g|_{V_0} \circ f = f_*G/f_*H$  (comme fonctions) est bien une fraction avec  $f_*H(x_0) \neq 0$ .

**Remarque 2.**  $f_*$  se définit via  $\mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ .

À l'inverse faut montrer que de  $f^\sharp$  on peut trouver une fonction polynomiale  $X \rightarrow Y \subset \mathbb{A}^m$ . Typiquement via  $k[T_1, \dots, T_m] \rightarrow A(X)$  et  $f^\sharp(g) = g \circ f$  sur les coordonnées.

### *1.3 Utilisation de la caractérisation $f^\sharp(g) = g \circ f$*



# Chapitre 2

## Immersions

La page stacks sur les [immersions](#).

### 2.1 Immersions ouvertes

C'est un homéomorphisme  $f: X \rightarrow U \subset Y$  de  $X$  sur  $U$  d'espaces localement annelés tel que

$$f^\flat: f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$$

est un isomorphisme.

Dans le cas des variétés c'est pareil.  $X$  est isomorphe à un ouvert de  $Y$ .

### 2.2 Immersions fermées

On demande à ce que  $f(X)$  soit fermé et  $X \rightarrow f(X)$  soit un isomorphisme. Pour rappel on peut seulement demander à ce que ce soit un homéomorphisme et  $f^\sharp$  est surjective.

**Remarque 3.** *Dans le stacks ils disent même qu'on peut dire que c'est un morphisme affine tel que  $f^\sharp$  est surjective. C'est super intuitif ducoup. Et l'équivalence à l'air claire!*

#### 2.2.1 Rappel sur $f^{-1}$

À nouveau, on peut le voir comme un ensemble de classes d'équivalences avant de faisceautiser.

### 2.2.2 À faire

Regarder cette co-unité et la préservation des épis/mono. Les adjoints ça préserve les limites/colimites finies. Et adjoint à gauche préserve toutes les colimites.

### 2.2.3 Étude de la déf

En gros ce qu'on voudrait c'est l'équivalence entre :

1. Structure donnée par  $X$  sur  $f(X)$ , via  $f_*\mathcal{O}_X$ .
2. Structure donnée par  $Y$  sur  $f(X)$ , via  $i_{f(X)}^{-1}\mathcal{O}_Y$ .

pour  $i_{f(X)}: f(X) \hookrightarrow Y$  l'inclusion. Où la deuxième structure est la structure naturelle.

Pour un fermé  $Z \subset Y$ . On peut d'abord regarder si

$$\mathcal{O}_Y \rightarrow (i_Z)_*i_Z^{-1}\mathcal{O}_Y$$

est surjectif. C'est marrant ça provient de la co-unité. À remarquer,

$$((i_Z)_*i_Z^{-1}\mathcal{O}_Y)_y = \begin{cases} (i_Z^{-1}\mathcal{O}_Y)_y = \mathcal{O}_{Y,y} & \text{Si } y \in Z \\ 0 & \text{sinon, car limite vide} \end{cases}$$

Maintenant la surjectivité est claire sur les fibres on a

$$i_Z^\# \begin{cases} \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,i_Z(y)} & \text{si } y \in Z \\ \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Maintenant tout se recolle, en posant  $f(X) = Z$  alors

$$\mathcal{O}_Y \rightarrow (i_{f(X)})_*\mathcal{O}_{f(X)} \simeq (i_{f(X)})_*i_{f(X)}^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

est exacte. D'où la surjectivité qu'on voulait.

**Conclusion 1.** Pour conclure, la structure naturelle sur  $Z \subset Y$  est donnée par  $i_Z^{-1}\mathcal{O}_Y$ . Et naturellement, la définition par  $X \simeq f(X)$  est la bonne. En particulier, on obtient  $i_Z^{-1}\mathcal{O}_Y \simeq f_*\mathcal{O}_X$  pour  $Z = f(X)$ .

Pour l'inverse, si  $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X \rightarrow 0$  est exacte. On note  $I$  le noyau, et si  $f$  est affine. Inversement, si  $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X \rightarrow 0$  est exacte on peut dire quelque chose.

### 2.2.4 Cas affine

Pour le cas affine c'est plus simple si  $f: X \rightarrow Y$  a une image fermée, le morphisme induit

$$f^\sharp(Y): A(Y) \rightarrow A(X)$$

est surjectif parce que  $f(X) = \overline{f(X)} = Z(\ker(f^\sharp(Y)))$  d'où ça se factorise en

$$A(Y) \rightarrow A(Y)/I(Z(\ker(f^\sharp(Y)))) \simeq A(X).$$

En fait en termes de faisceaux, si on regarde

$$0 \rightarrow I \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

on peut poser  $I: U \mapsto I(f(X))\mathcal{O}_Y(U)$ .

### 2.2.5 Cas des variétés

### 2.2.6 Avec la définition affine et faisceau surjectif

Eh ben c'est super cool parce que localement on obtient clairement la tête de l'image via la sous-section d'avant.

## *2.2 Immersions fermées*

# Chapitre 3

## Morphismes affines

Y'a un cas qui est évident que je veux traiter celui des variétés quasi-projectives. Et je crois que les variétés séparées aussi. Déjà, suffit d'avoir ça

**Définition 3.0.1.** Un morphisme  $f: X \rightarrow Y$  est affine si  $f^{-1}U$  est affine dès que  $U$  est affine ouvert de  $Y$ .

**Proposition 3.0.2.** *Un morphisme est affine ssi il existe un recouvrement  $Y = \cup U_i$  t.q  $f^{-1}U_i$  est affine pour chaque  $i$ .*

### 3.0.3 Cas quasi-projectif

Si on a  $f: X \rightarrow Y$  entre variétés quasi-projectives, faut remarquer si



# Chapitre 4

## Morphismes séparés

### 4.1 Un critère

Séparé ssi il existe un recouvrement affine  $\cup_i X_i$  t.q

1.  $X_i \cap X_j$  est affine.
2.  $X_i \cap X_j \rightarrow X_i \times X_j$  est une immersion fermée.

### Preuve

De gauche à droite c'est une section plus tard, de droite à gauche c'est que  $\Delta_X \cap X_i \times X_j = \Delta_{X_i \cap X_j}$  qui est fermé par hypothèse. Et être fermé est une condition locale sur la base. L'immersion fermée est dû au fait que la surjectivité du faisceau se voit sur les fibres.

### Applications

Application 1: Produits de variétés séparées sont séparées. Application 2 : Variétés projectives sont séparées.

#### 4.1.1 Ligne à double point

On la construit via  $T \mapsto T$  sur  $D(T) \subset \mathbb{A}^1$ . J'appelle  $L$  le recollement et ses ouverts c'est clair. Pour le faisceau ses sections globales c'est clair aussi via le critère. Pour la séparation, si  $O_1, O_2$  c'est les deux points du recollement alors  $(O_1, O_2) \notin \Delta_L$  mais tout ouvert qui contient  $(O_1, O_2)$  contient un  $D(f_1) \times D(f_2)$  et  $D(f_1) \cap D(f_2) \neq \emptyset$  d'où  $\Delta_L$  est pas fermé.

## 4.2 Intersections d'affines est affine

Si  $X \rightarrow k$  est séparé, alors pour tout  $U, V$  affines :

$$U \cap V \rightarrow U \cap V \times U \cap V \rightarrow U \times V$$

est une immersion fermée vers un affine! Parce que

$$\Delta_X \cap (U \times V) = \Delta_{U \cap V}.$$

Ça donne une réciproque au truc d'avant.

## 4.3 Sur des $k$ -schémas

On veut que

$$\Delta_S(X): X \rightarrow X \times_S X$$

soit une immersion fermée. Alors  $X \rightarrow S$  est séparé.

**Remarque 4.** *Pour rappel, on prends  $X \times_S Y = (i_X, i_Y)^{-1}(\Delta_k(S))$  où  $i_X$  et  $i_Y$  sont les morphismes structurants.*



# Chapitre 5

## Morphismes propres

On dit que  $X \rightarrow S$  est propre si  $X$  est universellement fermé dans  $Sch/S$  et séparé (y'a une condition de finitude aussi).

### 5.1 La ligne a point double est universellement fermée mais pas séparée

Petit exercice.

### 5.2 Si $X \rightarrow Y$ est fini et $Y$ est propre alors $X$ est propre

Pour la séparation : on écrit

$$X \times_Y X = \cup f^{-1}Y_i \times_{Y_i} f^{-1}Y_i$$

et  $X = \cup f^{-1}Y_i$  est un recouvrement affine. Là  $\Delta(f^{-1}f^{-1}Y_i)$  est fermé car affine. Pour montrer que  $X$  est universellement fermée, on écrit

$$X \times Z \rightarrow Z \leftrightarrow X \times Z \rightarrow Y \times Z \rightarrow Z$$

sachant le premier est fini (clair) donc fermé.

### 5.3 Conséquence de la propriété

Soit  $X$  est propre :

1. Si  $Y$  est séparée, tout morphisme  $X \rightarrow Y$  est fermé.

### *5.3 Conséquence de la propriété*

# Chapitre 6

## Morphismes finis

### 6.1 Fini implique affine

Je crois que c'est pas définition. Pas besoin d'aller chercher pourquoi là je pense.

### 6.2 Surjectivité des morphismes finis

Ducoup si on regarde la condition  $x \in f^{-1}(y)$ , ça se traduit par  $f_*\mathfrak{m}_y \subset \mathfrak{m}_x$ . Inversement, si  $f^{-1}(y)$  est vide alors  $f_*\mathfrak{m}_y k[X] = k[X]$  et on applique le lemme de Nakayama car  $\mathfrak{m}_y \neq k[Y]$ . **Faudrait essayer de voir plus concrètement comment trouver une racine.**

### 6.3 Trouver un ouvert dans $f(X)$

L'idée c'est de décomposer  $f : X \rightarrow Y \times \mathbb{A}^r \rightarrow Y$  défini par  $k[Y] \subset k[Y][u_1, \dots, u_r] \subset k[X]$  où  $k(X) = k(Y)(u_1, \dots, u_r, z)$ . La première flèche faut juste choisir  $u_i \in k[X]$ , rendre l'extension entière avec la technique habituelle puis tout dérouler en utilisant le fait que les morphismes finis sont surjectifs. La deuxième c'est juste que la première projection on peut trouver un ouvert dans l'image d'un ouvert facilement.

**Remarque 5.** *Y'a quand même un petit truc intéressant, le morphisme induit par l'inclusion*

$$k[Y][u_1, \dots, u_r] \subset k[X]$$

*on l'interprète en  $X \rightarrow Y \times \mathbb{A}^r$ , en disant que  $k[\mathbb{A}^r] = k[u_1, \dots, u_r]$  sauf que y'a une subtilité pour que ça marche. Vaudrait mieux dire*

$$k[Y][T_1, \dots, T_r] \hookrightarrow f_*k[Y][u_1, \dots, u_r]$$

pour que ce soit plus clair. Autrement dit, le statut de  $u_1, \dots, u_r$  comme fonctions sur  $\mathbb{A}^r$  est pas clair, c'est pas le même que celui de  $u_1, \dots, u_r$  sur  $X$  ? Aussi, ça marche parce que être algébriquement indépendant sur  $k(Y)$  implique l'être sur  $k$  ! Et ça c'est peut-être non trivial, au sens où on a une flèche dominante  $X \supset U \rightarrow \mathbb{A}^r$  ( $U$  un ouvert de définition des  $u_i$ ).

## 6.4 Projections

Ça c'était cool, et plus deep que prévu. Ducoup, on considère des "e.v" de  $\mathbb{P}^n$  (juste les regarder dans  $\mathbb{P}^{n+1}$ ). Donnés par  $E = Z(L_1, \dots, L_{n-d})$ , et on déf

$$\pi: \mathbb{P}^n - E \rightarrow \mathbb{P}^{n-d-1}; (\bar{x}) \mapsto (L_i(\bar{x}))_i$$

L'idée géométrique c'est que si on prend  $\mathbb{P}^{n-d-1} \simeq H \subset \mathbb{P}^n - E$ , alors  $H \cap E = \emptyset$  et  $H \oplus E = \mathbb{A}^{n+1}$  ce qui définit un projecteur. En particulier, si  $x \in \mathbb{P}^n - E$  alors

$$E \oplus \langle x \rangle \cap H \text{ est de dimension } 1.$$

Donc on a un point d'intersection dans  $\mathbb{P}^n$ , et il est donné par  $\pi$ . C'est pas entièrement clair, mais c'est clair que c'est une projection au sens où  $H \oplus E = \mathbb{A}^{n+1}$  a des projecteurs associés.

Maintenant pour prouver que c'est une flèche finie, c'est plutôt cool, déjà on regarde  $\pi: D(L_j) \cap X \rightarrow \mathbb{A}^{n-d-1} \cap \pi(X)$  et on veut montrer que  $\pi^*: k[\mathbb{A}^{n-d-1}] \rightarrow k[D(L_j) \cap X]$  est finie, et  $g \in \mathcal{O}_X(D(L_j))$  est de la forme  $g = G/L_i^m$  ( $\mathbb{P}^n - E = \cup D(L_i)$ ). Maintenant  $\pi^*(T_i) = L_i/L_j$  donc on doit trouver une relation algébrique unitaire entre  $g$  et les  $\pi^*(T_i)$ . C'est là que c'est fort. On remarque que l'image de

$$\pi_m: X \rightarrow \mathbb{P}^{n-d}; (\bar{x}) \mapsto (L_1^m, \dots, L_{n-d}^m, G)$$

est fermée. On obtient  $F_1, \dots, F_s$  des polynômes qui annulent l'image ! Mais ça suffit pas encore, j'ai l'impression qu'on peut montrer au plus qu'on a seulement une relation du type  $X \circ (L_i)^\alpha G^k - \dots$  pas unitaire et qu'on devra localiser à trop de  $L_i$ . Le deuxième point important c'est que

$$[0 : \dots : 0 : 1] \notin \pi_m(X)$$

parce que les  $L_i$  s'annulent pas simultanément, en particulier,

$$V(F_1, \dots, F_s, z_0, \dots, z_{n-d-1}) = \emptyset$$

D'où ... il existe  $k$  t.q.  $z_{n-d}^k \in (F_1(\bar{z}), \dots, F_s(\bar{z})) + (z_i, i) \subset k[z_0, \dots, z_{n-d}]$ . Tu vois le truc venir ? En particulier, si on regarde dans  $\pi_m(X)$  on obtient

$$\psi(z_1, \dots, z_{n-d}) = z_{n-d} - \sum z_j H_j = 0 \pmod{I(\pi_m(X))}$$

### *Morphismes finis*

En regardant dans  $z_i \neq 0$  on obtient

$$k[\mathbb{A}^{n-d} \cap D(z_i)] = k[z_0, \dots, z_{n-d}]_{z_i} \rightarrow \mathcal{O}_X(D(z_i \circ \pi_m) \cap X)$$

la flèche  $z_j \mapsto L_j^m/L_i^m$  et  $z_{n-d} \mapsto G/L_i^m$ . De sorte que dans  $\mathcal{O}_X(D(z_i \circ \pi_m) \cap X)$  on ait

$$\psi(G_i/L_i^m) = 0; \quad \psi \in k[\pi(X) \cap D(T_i)][T] \text{ unitaire.}$$