Point sur le cours de corps locaux

Chapitre 1

Des choses à faire

Construire des extensions explicites! Y'a l'air d'avoir beaucoup de critères là dans le chapitre

Chapitre 2

3e point sur les cours, 21/10/2024

Dernier point avant l'exam ! Faut faire un peu plus attention en dessous.

2.1 Extensions d'anneaux de Dedekind

Y'a des propositions clés pour tout c'est que si $A \to B$ est une extensions entière d'anneaux intègres alors :

1. A est un corps ssi B est un corps.
2. $\mathfrak{p}$ un premier de B est maximal dans B ssi $\mathfrak{p} \cap A$ est premier.
3. A est de dimension 1 implique B est de dimension 1 (on est dans un cas intègre).

Ducoup ça dit directement que **si** :

- B est la clôture intégrale de A un anneau de Dedekind dans $L/Frac(A)$
- B/A est finie.

Alors B est de dimension 1 par le truc d'avant, entier sur A et intégralement clos par construction. La question c'est

$$\text{B est noethérien?}$$

C'est vrai si B/A est finie et L/K séparable.

$$\text{Et si } B/A \text{ est pas finie?}$$

Y'a un théorème de **Krull-Akizuki** qui prouve que c'est toujours vrai si L/K est juste finie.

On peut le faire dans le cas semi-local fini. I.e. y suffit de séparer en une extension séparable et une extension inséparable :

1. Cas purement inséparable : Si A est un d.v.r sa clôture est un d.v.r simplement parce qu'on peut déf $v(x) = v(x^{p^e})/p^e$.

2. Si $B_\mathfrak{m}$ est noethérien pour tout $\mathfrak{m} \subset A$ alors B est noethérien. (A semi-local noetherien) (L'argument est intéressant et montre que $\cap B_\mathfrak{m}$ ca marche pas très bien.)

Chapitre 3

2e point sur les cours, 11/10/2024

3.1 Conséquences

Ducoup comme la fermeture intégrale commute avec la localisation on a directement

Les idéaux sont tous inversibles : ça c'est direct, en particulier les idéaux fractionnaires forment un groupe.

La decomposition en idéaux premiers : avec une petite application de la noethérianité.

ensuite, si $L/K = Frac(A)$ est séparable finie, on prouve que

1. La trace $Tr(x\_)$ est non dégénérée (via le discriminant), et c'est ptet là l'hypothèse séparable.

2. La fermeture de A dans L est de Dedekind et de type fini sur A.

On obtient directement les décompositions,

$$\mathfrak{p}B = \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathfrak{P}^{e_{\mathfrak{P}}}$$

et la formule

$$[L : K] = \sum e_{\mathfrak{P}} f_{\mathfrak{P}}$$

avec le lemme chinois.

3.2 Sur les anneaux de Dedekind

Le truc cool que j'avais jamais vu c'est que si A est intègre noethérien

Équivalences. On a :

$$A \text{ est de dimension 1 et intégralement clos.}$$

équivaut à

$$\text{Tout les localisés } A_{\mathfrak{p}} \text{ sont de valuations discrètes.}$$

L'équivalence est assez directe. On obtient la déf d'anneau de Dedekind.

Remarque 1. *En fait ça prouve que localiser et passer à la fermeture intégrale commutent. I.e.* $(\mathfrak{a}.\mathfrak{b})_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}.\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}$ *et* $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} + \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}$.

Ça prouve directement que les idéaux sont tous inversibles dans un anneau de Dedekind.

Faut juste se rappeler de la correspondance entre idéaux de A et $S^{-1}A$.

3.3 Sur les anneaux de valuations discrètes

J'aimerais donner seulement des idées de preuves et équivalences. J'regarde toujours des anneaux commutatifs.

Équivalences. Dans un anneau noethérien,

$$\text{DVR} \equiv \text{local, noethérien, } \mathfrak{m} = (\pi) \text{ non nilpotent.}$$

Idées. On veut écrire $x = \pi^n u$ de manière unique. Il faut montrer que $\cap \mathfrak{m}^n = 0$! Pour ça on utilise $\mathfrak{u} = \{x | \exists n, \pi^n x = 0\}$. Ensuite c'est fini. □

Équivalences. Dans un anneau noethérien intègre,

$$\text{DVR} \equiv \text{un seul idéal premier} \neq 0\text{, intégralement clos.}$$

Démonstration. Le point c'est de montrer que $\mathfrak{m}$ est inversible, alors $\mathfrak{m}$ est principal. On note $\mathfrak{m}' = \{x \in K | x\mathfrak{m} \subset A\}$. On a

$$\mathfrak{m}\mathfrak{m}' \subset A \text{ et } A \subset \mathfrak{m}' \text{ implique } \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}\mathfrak{m}'.$$

d'où $\mathfrak{m}\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}$ ou A. Maintenant en fait

$$\text{si } \mathfrak{m}\mathfrak{m}' = A \text{ alors } \sum x_i y_i = 1 \text{ d'où } u = x_{i_0} y_{i_0} \in A - \mathfrak{m} = A^{\times}$$

en particulier tout $z \in \mathfrak{m}$ se réécrit $z = x_{i_0}(u^{-1}yz)$. Le reste est page 20 du Corps locaux. $\square$

Je veux mentionner la deuxième partie de la preuve, où $\mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} = \mathfrak{m}$ implique $\mathfrak{m}^{-1} = A$. On prend $x \in \mathfrak{m}^{-1}$, si $x \notin A$ alors on a pas nécessairemment $x^n \in \mathfrak{m}^{-1}$. Faut le montrer avant de regarder les A-module $[1, x, \ldots, x^n]$ dans $\mathfrak{m}^{-1}$ de type fini.

Je veux aussi mentionner la troisème, la preuve est assez instructive sur les méthodes au final. L'idée c'est de montrer que y'a une fraction dans $\mathfrak{m}^{-1}$ si A a un seul idéal premier non nul (dans le 1.). Pour ça

1. On montre que $K = A_x$ pour un $x \in \mathfrak{m}$. $(1/z = y/x^n)$
2. Alors si $z \in A - 0$, $\mathfrak{m} \subset \sqrt{zA}$. On peut prendre $z \in \mathfrak{m}$.
3. Prendre $y \in \mathfrak{m}^{n-1} - \mathfrak{m}^n$ avec $\mathfrak{m}^n \subset zA$ minimal.

Chapitre 4

1er point sur les cours, 04/10/2024

4.1 Extensions sur corps non complets

Si $(K, |.|_K)$ est ultramétrique et E/K finie. On peut regarder $Aut(L/K)$ pour construire

$$|.|_L \mapsto |\sigma(.)|_L$$

elles étendent toutes $|.|_K$ et on en a $\#Aut(L/K)/ef$ dans le cas galoisien par exemple. À l'inverse, étant donné $|.|_L$ qui étend $|.|_K$ on peut obtenir un σ en trouvant $\tau\colon \widehat{L} \to (\widehat{K})^c$ d'où $|.|_{\widehat{L}} = |.|_c \circ \tau$. En fait on regarde

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r] & L.\overline{K} = \widehat{L} \arrow[dr, dashed] & \\
K \arrow[u] \arrow[r, hook] & \overline{K} \simeq \widehat{K} \arrow[u] \arrow[r, hook] & (\widehat{K})^c
\end{tikzcd}$$

où $\overline{K}$ est l'adhérence de K dans $\widehat{L}$. L'égalité montre que $\widehat{L}$ est de dimension finie sur $\widehat{K}$. En particulier on obtient $\tau\colon \widehat{L} \to (\widehat{K})$. Ensuite, $\tau(\widehat{L}) \ni \tau(x) \mapsto |x|_{\widehat{L}}$ est une valeur absolue sur $\tau(\widehat{L}) \subset (\widehat{K})^c$ qui étend celle de $\overline{K} \simeq \widehat{K}$ d'où par unicité sur la clôture on a

$$|x|_{\widehat{L}} = |\tau(x)|_c$$

et on peut faire redescendre sur $\tau|_L \colon L \to K^c$.

Remarque 2. *Y'a plusieurs plongements en général $\widehat{L} \to (\widehat{K})^c$ penser au groupe de galois sur $\mathbb{Q}$ qui devient le groupe de décomposition sur $\mathbb{Q}_p$. Et y définissent tous la même valeur absolue sur $\widehat{L}$.*

4.2 Avec les anneaux artiniens

Là y'a un truc cool qui montre clairement la décomposition des premiers dans des extensions! On a une correspondance entre

$$\{\text{Idéaux maximaux de } L \otimes_K \widehat{K}\} \leftrightarrow \{\text{extensions de } |.|_K \text{ à } L\}$$

Pour la surjectivité on utilise

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr] \arrow[dr] & & \widehat{L} \\
& L \otimes_K \widehat{K} \arrow[ur, dashed] & \\
K \arrow[uu] \arrow[rr] \arrow[ur] & & \widehat{K} \arrow[uu] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

et on pose $\mathfrak{m}_{|.|_L} = \ker(L \otimes_K \widehat{K}) \to \widehat{L}$. Pour l'injectivité c'est assez direct.

4.3 Extensions de valuations et corps complets

Le cas archimédien est assez particulier puisque y'a que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. C'est l'exercice 8 de la feuille où on peut montrer que tout corps archimédien complet qui contient i est isomorphe à $\mathbb{C}$. Je vais regarder surtout le cas non archimédien.

Théoreme 1. *Si $C(K)$ est l'ensemble des suites de Cauchy sur K et $\mathfrak{m}(K)$ celles qui tendent vers 0 alors $\mathfrak{m}(K)$ est maximal et $C(K)/\mathfrak{m}(K)$ est un corps complet minimal où K est dense.*

Pour les extensions maintenant on a besoin de Hensel et du fait que

Corollaire 1. *Si K est complet ultramétrique, le max des coefficients de $P(X)$ irréductible sur K est atteint par $P^*(0)$ (coeff dominant) ou $P(0)$. En particulier si $P^*(0) = 1$ et $|P(0)| \leq 1$ alors P est dans $\mathcal{O}_K[X]$.*

mais j'en parlerai a un autre moment. Donc maintenant qu'on sait c'est quoi les corps complets premiers en caractéristique 0 on regarde leurs extensions finies. L'idée c'est que c'est des Banach de dimension finie sur un $\mathbb{Q}_p$ donc

- Toutes les normes sont équivalentes.

en particulier les valeurs absolues sont équivalentes, donc y'en a qu'une qui étend $|.|_p$.

Construction de la valeur absolue. Étant donné $x \in L/K$ on regarde l'endomorphisme de multiplication sur L par x, $m_x \in End_K(L)$. On déf

$$N_{L/K}(x) = \det(m_x)$$

comme $N_{L/K}(y \in K) = y^{[L:K]}$ on déf

$$|.|_L := |N_{L/K}(.)^{1/[L:K]}|$$

pour vérifier qu'elle est ultramétrique, on se rappelle que $\det(m_x)$ est le coefficient constant de $\chi_{m_x}(X)$ le polynôme caractéristique de m_x à coefficient dans K. En plus $x \mapsto m_x$ est un homomorphisme d'anneau. D'où

$$N_{L/K}(x) = (-1)^{[L:K]}\chi_{m_x}(0)$$

si on remarque que m_x est diagonale par bloc avec $[L : K(x)]$ blocs. On peut affiner en remarquant que

$$\chi_{m_x} = \mu_x^{[L:K(x)]}$$

avec μ_x le polynôme minimal de x. Maintenant pour montrer que c'est ultramétrique faut montrer que

$$|1 + \alpha|_L \leq 1$$

Mais $\mu_{1+x}(X) = \mu_x(X - 1)$ et $\mu_x \in \mathcal{O}_K$ par le corollaire puis $\mu_x(-1) \in \mathcal{O}_K$ d'où le résultat. Les autres propriétés sont claires. □

On peut maintenant l'étendre a une clôture algébrique K^c via

$$x \mapsto |N_{K(x)/K}(x)^{1/[K(x):K]}|$$

et il y'a unicité.

4.4 Classification sur $\mathbb{Q}$

En théorie des nombres, on a regardé grosso modo Ostrowski et les équivalences de valeurs absolues ($|.|^s$) pour définir la même topologie.

$$\begin{tikzcd}
& & & \mathbb{R} & & & \\
& & & (\mathbb{Q}, |.|) \arrow[u] \arrow[dlll] \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & & & \\
\mathbb{Q}_2 & \mathbb{Q}_3 & \mathbb{Q}_5 & \mathbb{Q}_7 & \mathbb{Q}_{11} & \mathbb{Q}_{13} & \cdots
\end{tikzcd}$$

Les grosses idées a retenir pour moi : étant donné une $|.|$, si elle est non archimédienne $\to$ on regarde la valuation associée v. Ensuite $\mathfrak{m} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$, et ensuite sur $\mathbb{Z}$ si $x \wedge p = 1$ $|ux| = |1 - yp| = 1$ d'où suffit de regarder $|p|$. Le cas archimédien est un peu plus compliqué mais assez étonnant. En fait si on regarde un corps archimédien complet dont la v.a. étend celle de $\mathbb{Q}$ contenant i. Alors on peut plonger $\mathbb{C}$, disons $i \colon \mathbb{C} \to K$. L'idée c'est de regarder pour $a \in K$ l'inf de,

$$f_a \colon z \mapsto |z - a|_K$$

si c'est $r > 0$ on peut faire bouger r comme on veut. Ensuite faut regarder pour $|\gamma_0 - a| = r$ et $|\gamma - \gamma_0| < r$ on peut calculer

$$(\gamma_0 - \gamma)^n - (\gamma_0 - a)^n$$

le spécificité de $\mathbb{C}$ analytiquement c'est alors d'avoir toutes les racines de l'unités. Ce qui permet de factoriser le truc du dessus.