Notes perso : Géométrie algébrique

Table des matières

...

Chapitre 1

Outils

ATTENTION : Il faut tout faire avec I radical.

1.1 La définition de base

Étant donné un affine $Z(I) = Z(F_1, \dots, F_m) \subset \mathbb{A}^n$ on peut définir le plan tangent via

$$(D_P I)^\perp = \{t | D_P(F)(t) = 0 \forall F \in I\}$$

1.2 Plan tangent de Zariski

Question 1. $T_{X,p} \simeq (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$

Pour rappel on a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I/I \cap \mathfrak{n}^2 \arrow[r] \arrow[d, "D_P"] & \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \arrow[r] \arrow[d, "D_P"] & \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \arrow[r] \arrow[d, dash] & 0 \\
0 \arrow[r] & D_P I \arrow[r] & E^\vee \arrow[r] & \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

qui devient en passant au dual

$$0 \longleftarrow (D_P I)^\vee \longleftarrow (E^\vee)^\vee \longleftarrow (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^\vee \longleftarrow 0$$

mais en regardant $(E^\vee)^\vee$ comme l'ensemble des morphismes d'évaluations $ev_Q \colon f \mapsto f(Q)$, le noyau a droite c'est les $ev_Q = g \in (E^\vee)^\vee$ tels que

$$g|_{D_P I} = 0$$

autrement dit tels que $D_P(F)(Q) = 0$ pour tout $F \in I$.

Réponse 1. Pour conclure le noyau à droite bah c'est exactement $T_{X,P}$ par l'identification.

1.3 Cadre de base avec la nouvelle définition

Définition 1.3.1. On définit $\dim_P X := \inf\{\dim U | P \in U \subset X\}$. En particulier si $X = \cup_i Z_i$,

$$\dim_P X = \sup_{P \in Z_i} \dim Z_i$$

vu que un ouvert qui croise Z_i est dense dedans.

Maintenant

Définition 1.3.2. On définit la lissité de X en P via $\dim_P X = \dim_P T_{P,X}$.

Note 1. *Cette définition est une conséquence de la dernière déf psq on peut dire que*

$$\dim T_{X,P} \geq \dim T_{Z_X(f),P} - 1$$

en prenant $f \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ (d'où une récurrence).

1.4 Critère jacobien

Si on identifie maintenant E a $E^\vee$ par la base canonique, i.e.

$$D_P(F_j) \sim \begin{pmatrix} \partial_1 F_j \\ \vdots \\ \partial_n F_j \end{pmatrix}$$

alors

$$J(X)_P = \begin{pmatrix} D_P(F_1) | & \dots & | D_P(F_m) \end{pmatrix}.$$

D'où

$$rk(J(X)_P) = \dim_k(D_P I)$$

et en passant à l'orthogonal

$$\dim_k(T_{X,P}) = n - rk(J(X)_P).$$

1.5 Ouvert des points non singuliers

1.5.1 Cas d'une hypersurface affine séparable

Dans le cas d'une hypersurface $Z(H)$ où H est séparable pour l'une des variables :

1. On peut montrer que $Z(H)$ a un point lisse. On note $H(T_1, \ldots, T_n)(S)$ séparable en S.

2. $\Delta \in k[T_1, \ldots, T_n]$ le discriminant en S.

3. $Z(H) \subset \mathbb{A}^n \times A^1$ et si $(q, s) \in D(\Delta) \times p_S(Z(H))$ alors

$$\frac{\partial H}{\partial S}(q, s) = (H(q)')(s) \neq 0$$

   d'où H est lisse en (q, s). $(D(\Delta) \cap p_T(Z(H))$ est non vide.

1.5.2 Cas général

Toute variété de dim r est birationnelle a une hypersurface de $\mathbb{P}^{r+1}$. I.e. $k(X) \simeq k(T_1, \ldots, T_r, z)$ avec z séparable sur $k(T_1, \ldots, T_n)$. Comme on doit juste montrer que tout les ouverts contiennent un point lisse c'est fini.

1.5.3 Autre approche : via le critère jacobien

On se ramène au cas affine irréductible et on montre que l'ensemble des points ou le plan tangent est de dim $\geq k$ est fermé via le jacobien. Et contient un ouvert, via la birationalité avec l'hypersurface!

Chapitre 2

Utilisations et cadre

2.1 En résumé

De $T_{X,P} \simeq (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^\vee$ de manière fonctorielle on peut faire de l'algèbre pour obtenir des injections/surjections de $T_{X,P}$ dans d'autres espaces tangents. Je pense qu'on a un foncteur donc

$$k\text{-Var}_* \to \mathrm{Mod}_k$$

où à gauche c'est les variétés pointées.

2.1.1 Si $\dim X = n$ alors $\dim T_{X,P} \leq n$

on peut se ramener au cas affine. Alors $X \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ donne $\mathfrak{n}_P/\mathfrak{n}_P^2 \to \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \to 0$ est exacte avec $\mathfrak{m}_P \subset A(X)$ et $\mathfrak{n}_P \subset A(\mathbb{A}^m)$ $(m \leq n)$. Ça donne

$$0 \to T_{X,P} \hookrightarrow T_{\mathbb{A}^m,P}$$

avec celui de droite de dimension $m \leq n$.

2.1.2 Singularités aux intersections des composantes

Si on a $X = \cup_i Z_i$ alors un point P est non singulier seulement si une seule composante passe par lui. Pour le prouver, plusieurs approches :

1. Via le critère jacobien : On peut supposer X affine $dim_p X = dim X$ et garder que les composantes qui passent par P.

2. Alors $I(X) = \cap I(Z_i)$. Idée : si on montre que X pas irred implique son idéal est engendré par des produits. Alors on a fini car y'a des colonnes nulles en plus sur l'intersection. Problème : c'est faux.

3. Directement : on se met à nouveau dans le cas affine $Z(I) = Z(\cap_i \mathfrak{p}_i)$:

$$\mathfrak{m}_{\cap_i \mathfrak{p}_i}/\mathfrak{m}^2_{\cap_i \mathfrak{p}_i} \to \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{m}^2_{\mathfrak{p}_i} \to 0$$

   qui est exacte et un noyau non trivial : suffit de prendre $Q \in \mathfrak{p}_i - \cup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$ irréductible, alors $Q \notin \mathfrak{m}^2_{\cap_i \mathfrak{p}_i}$ et $Q \in \mathfrak{m}_{\cap \mathfrak{p}_i}$. Donc dans le noyau. Enfin en passant au dual :

$$0 \to T_{Z(\mathfrak{p}_i),P} \to T_{X,P}$$

   est une injection stricte !

Remarque 1. *Pas besoin de considérer* $T_{P,\cap Z(\mathfrak{p}_i)}$.