Produits tensoriels

Je veux discuter à nouveau les produits tensoriels.

1 Cadre

On se place toujours dans le cadre où on a des R-modules M et N ou des R-algèbres

$$R \to A$$

et

$$R \to B$$

dans le cas d'anneaux $M = A$ et $N = B$ bah c'est des R-algèbres.

2 Construction

Comme d'hab, on prends un gros quotient de $A \times B$.

3 Propriété universelle

Voir produits fibrés.

4 Codiagonale, ou pas

Étant donné $id_{A\times B}$, on pourrait dire qu'on obtient $c\colon A \otimes_C B \to A \times B$ tel que $c \circ \otimes = id_{A\times B}$. Mais en fait ça aurait pas de sens vu que $c(a \otimes b) = (a, b)$ voudrait dire que $(ra, b) = r(a, b) = (a, rb)$. Le problème c'est que $id_{A\times B}$ est pas bilinéaire, vu que

$$(a + a', 2b) = (a, b) + (a', b) \neq (a + a', b)$$

mais elle est bien linéaire.

Remarque 1. *De cette manière on voit que la bilinéarité c'est vachement différent de la linéarité en un sens.*

5 Exactitude

Là c'est croustillant. On regarde

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\quad f \quad} D \xrightarrow{\quad g \quad} E \longrightarrow 0$$

$$A \otimes_R B \xrightarrow{f \otimes id_B} D \otimes_R B \xrightarrow{f \otimes id_B} E \otimes_R B \longrightarrow 0$$

La surjectivité à droite est immédiate ! Pour l'exactitude au milieu, pour un élément du noyau $g \otimes id_B(\sum d_i \otimes b_i) = 0$ on remarque que la flèche bilinéaire (!!)

$$D \times B \to E \times B \to E$$

se factorise en

$$\begin{tikzcd} D \times B \arrow[r] & E \times B \arrow[r, "p_1"] \arrow[d] & E \\ & E \otimes_C B \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

d'où le noyau de $D \otimes_C B \to E \otimes_C B$ est contenu dans $\ker(D \to E) \otimes_C B$. Et l'inverse est clair.

Remarque 2. *Pas besoin de parler de R-algèbre, on aurait juste pu raccourcir la preuve en regardant les $(d, 1)$ quoi.*

Maintenant pourquoi c'est pas nécessairement injectif à gauche? En fait la propriété universelle pour $A \otimes_R B$ est pas entièrement vérifiée. C'est à dire que $\sum f(a_i) \times b_i$ est d'image nulle pour tout $D \times B \to F$, mais c'est pas assez pour que ça implique que $v = \sum(a_i, b_i)$ soit nul. Simplement parce que v est d'image nulle seulement pour les $A \times B \to F$ qui se factorisent par $A \times B \to D \times B \to F$. Il en manque.

6 Produits de corps

Un jour je regarderai bien ça sur MO. Apparemment étant donné $L/k, E/k$ deux extensions de k. On a

$$\dim_{Krull}(L \otimes_k K) = \min(dimtr_k(L), dimtr_k(K))$$

c'est trop marrant. Donc pour que le produit soit un corps y faut forcément que l'un des deux corps soit algébrique sur k. Ça discute une condition suffisante aussi!