Corps locaux

(Par Qing Liu)

Introduction

Le but c'est d'abord de décrire les extensions finies de corps locaux comment dans [**cassels**].

Chapitre 1

Corps complets

1.1 Valuations et valeurs absolues

Le but là c'est de classifier les valuations, d'abord sur des corps premiers comme $\mathbb{Q}$. D'abord l'équivalence entre valuations et valeurs absolues.

Définition 1.1.1 (Valuation)**.** Une valuation v (de rang 1) est un morphisme de groupe (multiplicatif vers additif)

$$K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

tel que $v(x+y) \geq min\{v(x), v(y)\}$ quand $x+y \neq 0$ avec $v(x+y) = \infty$.

Définition 1.1.2 (Valeur absolue)**.** Une valeur absolue $|.|$ est un morphisme de groupes multiplicatifs $K \to \mathbb{R}$ étendu avec $0 \mapsto 0$ et qui vérifie une inégalité triangulaire.

Le passage aux valeurs absolues : étant donné un réel $0 < t < 1$ on peut déf une valeur absolue

$$x \mapsto t^{v(x)}$$

Bon ensuite la caractérisation archimédienne :

Définition 1.1.3 (Valeur absolue archimédienne)**.** Un corps valué $(K, |.|)$ est archimédien si pour tout $(x, c) \in K \times \mathbb{R}$ il existe n t.q

$$c \leq |n.x|$$

et pas $n|x|$ attention.

Ensuite la première partie de la caractérisation :

Proposition 1.1.4. *Être archimédien c'est équivalent à*

- $(|n|)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est bornée.*
- $(|n|)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est* ≤ 1.
- $|.|$ *est ultramétrique!*

Preuve. La première équivalence est directe. La deuxième aussi via $x \mapsto x^k$ et la troisième se ramène à la deuxieme en regardant $|1+x| \leq 1$ et la flèche $x \mapsto x^k$ à nouveau ! (Ca caractérise les élements inferieurs à 1) $\square$

Proposition 1.1.5 (Valuations et valeurs absolues)**.** *Il y a une bijection entre valeurs absolues ultramétriques et valuations. L'inverse de la flèche du dessus est juste*

$$|.| \mapsto \frac{1}{\log(1/2)} \log(|.|)$$

On s'approche du théorème d'Ostrowski. Avant on déf les équivalences de valeurs absolues.

Proposition 1.1.6 (La topologie induite)**.** *On obtient une distance à partir d'une valeur absolue puis la topologie de la distance.*

Dans le cas ultramétrique c'est très bizarre.

Proposition 1.1.7. *On a les propriétés suivantes.*

- *Si* $|x| \neq |y|$ *alors* $|x+y| = max(|x|, |y|)$.
- *Avec l'inégalité ultramétrique, les boules ont un seul centre.*
- *Puis deux disques qui s'intersectent forment en fait une chaine.*

Proposition 1.1.8 (Anneau de valuation)**.** *On peut déf l'anneau de valuation de* $(K, |.|)$ *par* $\mathcal{O} := \bar{D}(0,1)$ *les éléments de valuations plus petites que* 1*. Et son idéal maximal la boule ouverte* $D(0,1)$*. Les inversibles sont dans la frontière.*

Définition 1.1.9 (Équivalence de valeurs absolues)**.** Deux valeurs absolues sont équivalentes si elles définissent la même topologie.

Lemme 1.1.10 (Caractérisation)**.** *Deux valeur sabsolues sont équivalentes ssi il existe* $s \in \mathbb{R}_+^*$ *t.q* $|.|_1 = |.|_2^s$.

Preuve. La bonne idée c'est la caractérisation de $D(0,1)$ par les trucs qui tendent vers 0 par $x \mapsto x^k$. Faut comprendre que prendre des limites dans $\mathbb{R}$ donne la même chose pour $|.|_1$ et $|.|_2$. $\square$

Ça suffit à prouver le théorème d'Ostrowski :

Théoreme 1.1.11 (Ostrowski)**.** *Une valeur absolue non triviale sur $\mathbb{Q}$ est équivalente soit à $|.|_\infty$ ou à une valeur absolue p-adique $|.|_p$.*

Preuve. Pour la partie non archimédienne, on regarde $\mathfrak{m} \cap \mathbb{Z}$ pour obtenir un p. Ensuite, on montre via $|uk| = |1 - vp|$ que $|k| = 1$ dés que $k \wedge p = 1$, $|vp| < 1$ parce que $vp \in \mathfrak{m}$. Ensuite y reste à comparer $|p|$ et $|p|_p$. Vu que $|x| = |p|^r|k| = |p|^r$.

Pour le cas archimédien l'idée c'est d'écrire a en base b pour comparer a^n et b^l où $l \sim n$. En particulier montrer que $|a| \geq 1$ implique $b \geq 1$ dès que $a \geq 2$ ET $|a| = |b|^{\log(a)/\log(b)}$, via la comparaison et par symétrie. Puis remplacer b par 2. On a montré que seul $|2|$ détermine le lien entre $|.|$ et $|.|_\infty$. □

Définition 1.1.12 (Places)**.** On définit une place comme une classe d'équivalence de valeurs absolues. Une place est finie/infinie si elle est ultramétrique/archimédienne.

1.2 Complétions et corps complets

Dès qu'on a un corps valué $(K, |.|)$, on peut construire une distance

$$d_{|.|} \colon (x, y) \mapsto |x - y|$$

puis définir des suites de Cauchy.

Définition 1.2.1. Un corps valué $(K, |.|)$ est complet si les suites de Cauchy pour $d_{|.|}$ convergent dans K.

Définition 1.2.2 (Complétion)**.** Pour tout corps valué $(K, |.|)$ il existe un corps valué complet $(\hat{K}, |.|)$ tel que $|.|$ s'étend à $\hat{K}$.

Preuve. L'idée c'est de regarder l'ensemble des suites de Cauchy $\mathscr{C}(K) \subset K^{\mathbb{N}}$, de voir que c'est un anneau puis de quotienter par l'idéal maximal des suites qui convergent vers 0. □

Définition 1.2.3 (Morphismes dans la catégorie des corps valués)**.** Un morphisme de corps valués est un morphisme d'anneau et une isométrie.

On peut étendre les morphismes vers des corps complets en morphismes de corps valués unique à unique isomorphisme près.

Remarque 1. *Si $(K, |.|)$ est ultramétrique et non triviale, $\hat{K}$ peut-être construit algébriquement. On fixe $t \in K$ t.q $0 < |t| < 1$. Dans l'anneau de valuation, on regarde*

$$\widehat{O}_K = \varprojlim_n (O_K/t^n O_K)$$

C'est un anneau intègre muni d'une valuation t.q

$$\widehat{v}((x_n)_n) = v(y)$$

*où $(x_n) = \pi(y)$ et $\pi\colon O_K \to \widehat{O}_K;\ x \mapsto (x)_n$. C'est une valuation par densité. On l'étend au corps de fraction de la manière évidente. On peut montrer que c'est complet **à faire**. Pareil en général $I \subset A$.*

Exercices 1.2.4. Rayon de convergence de $exp(z) = \sum_n \frac{z^n}{n!}$ dans $\mathbb{Q}_p$? Sachant que en métrique p-adique $1/n! \to_{n\to\infty} +\infty$. Faut calculer la valuation de $n!$.

Plus généralement, si A est intègre et $\mathfrak{m}a = tA$ est maximal on peut définir la valuation t-adique associée et l'étendre au corps de fractions et c'est une valuation discrète. Je crois que l'idée c'est que

$$I = \cap t^n A = \{0\}$$

parce que $tI = I$ puis Nakayama dans un anneau noethérien.

Apparemment il fait une construction de $\mathbb{R}$ sans complétion parce que c'est tautologique? Ah bah oui les valuations c'est dans $\mathbb{R}$, mais en fait on peut d'abord juste les prendre dans $\mathbb{Q}$.

Il regarde un corps K avec un ordre total compatible archimédien et la topologie de l'ordre.

Alors on demande enfin que $\iota\colon \mathbb{Q} \to K$ soit dense, on a nécessairement que ι est croissante. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans K, on peut remplacer toute les suites de Cauchy dans K par des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

En particulier, y'a équivalence entre les suites de Cauchy de K et $\mathbb{Q}$. On regarde maintenant $C(\mathbb{Q})$ les suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ et $I(\mathbb{Q})$ les suites qui tendent vers 0. Dans

$$\pi\colon C(\mathbb{Q}) \to C(\mathbb{Q})/I(\mathbb{Q})$$

on définit un ordre à droite via $\pi(x_n)_n \geq \pi(y_n)_n$ ssi on a égalité où il existe $r \in \mathbb{Q}_+^*$ t.q $x_n \geq y_n + r$. On obtient un corps totalement ordonné $C(\mathbb{Q})/I(\mathbb{Q})$ (totalement car $\pm\pi(x_n)_n \geq 0$). Bon maintenant faut juste conclure en montrant que le quotient est complet. **à faire?**

Remarque 2. *On a bel et bien utilisé que $\mathbb{Q}$.*

Proposition 1.2.5. *$\mathbb{R}$ est unique à unique isomorphisme près en tant que corps totalement ordonné complet archimédien où $\mathbb{Q}$ est dense.*

1.3 Espaces de Banach

Une norme K sur un espace vectoriel V est une flèche $x \mapsto ||x||$ qui est nulle qu'en 0, a une inégalité triangulaire et qui transforme l'action de K en action de $\mathbb{R}$ via $|.|$.

Définition 1.3.1. Un e.v.n est un Banach si il est complet pour sa norme.

Remarque 3. *Un k-espace vectoriel de dimension finie sur un corps complet est un Banach. L'inverse est faux!*

Définition 1.3.2. Deux normes sont équivalentes si elles définissent la même topologie. Ou immédiatemment si il existe c_1, c_2 t.q

$$c_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq c_2||x||_1$$

L'intérêt c'est maintenant qu'étant donné une extension de corps L/k et une valeur absolue sur k, qu'est-ce qu'il se passe quand on l'étend à L? En fait c'est des normes sur L en tant que k-ev, et elles sont équivalentes en tant que norme ssi elles le sont en tant que v.a par définition!

Théoreme 1.3.3. *Si k est complet, et V est un k-ev de dimension finie, alors toutes les normes sur V sont équivalentes et V est un Banach.*

Démonstration. La norme du max donne une structure de Banach grâce à la convergence normale. Il reste à montrer que toutes les normes sont équivalentes à la norme du max $||.||_\infty$. Un côté est simple, l'autre par induction **Faire? Ah la preuve est non triviale mdr**. $\square$

Soit $(K, |.|)$ un corps complet ultramétrique. On note $k = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}$ le corps résiduel.

Lemme 1.3.4 (Lemme de Hensel)**.** *Soit $P(X) \in \mathcal{O}_K[X]$, on suppose que $P \equiv f.g \mod \mathfrak{m}$ tels que $gcd(f, g) = 1$. Alors il existe $F, G \in \mathcal{O}_K[X]$ tels que*

$$P = F.G$$

et $F \equiv f \mod \mathfrak{m}$, $G \equiv g \mod \mathfrak{m}$, avec $\deg(F) = \deg(f)$. La décomposition est unique à inversible près.

Démonstration. On commence par prendre un lift F_0 de f et G_0 de g de degrés minimaux. On a $(f, g) = k[X]$ d'où $1 \in (F_0, G_0) + \mathfrak{m}[X]$, il existe donc $t \in K$ t.q $0 < |t| < 1$ et $\begin{cases} P - F_0G_0 \in t\mathcal{O}_K[X] \\ 1 \in (F_0, G_0) + t\mathcal{O}_K[X] \end{cases}$. On a déjà augmenté la précision. Soit $F_1 = F_0 + tV_1$ et $G_1 = G_0 + tU_1$. On veut $P - F_1G_1 \in t^2\mathcal{O}_K[X]$ t.q $\deg(F_1) = m$ et $\deg(G_1) \leq d - m$. On regarde

$$\begin{aligned} P - (F_0 + tV_1)(G_0 + tU_1) &= P - (F_0G_0 + t(F_0U_1 + G_0V_1) + t^2U_1V_1) \\ &= (P - F_0G_0) + t(F_0U_1 + G_0V_1) + t^2* \\ &= tE_0 + t(\_) + t^2* \\ &= t(E_0 + F_0U_1 + G_0V_1) + t^2* \end{aligned}$$

On prends $E_0 = H_0F_0 + R_0G_0 + t*$. **Revoir la preuve ailleurs.** $\square$