

Notes perso : Géométrie algébrique



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Morphismes d'espaces localement annelés</b>	<b>5</b>
1.1	Le cas des $k$ -algèbre de type fini . . . . .	5
1.1.1	Le morphisme sur les fibres . . . . .	6
1.2	Conséquences . . . . .	6
1.2.1	Cas affine . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Immersiones</b>	<b>7</b>
2.1	Immersiones ouvertes . . . . .	7
2.2	Immersiones fermées . . . . .	7
2.2.1	Rappel sur $f^{-1}$ . . . . .	7
2.2.2	À faire . . . . .	8
2.2.3	Étude de la déf . . . . .	8
2.2.4	Cas affine . . . . .	9
2.2.5	Cas des variétés . . . . .	9
2.2.6	Avec la définition affine et faisceau surjectif . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Morphismes affines</b>	<b>11</b>
3.0.3	Cas quasi-projectif . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Morphismes séparés</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Morphismes finis</b>	<b>15</b>
5.1	Fini implique affine . . . . .	15
5.2	Surjectivité des morphismes finis . . . . .	15
5.3	Trouver un ouvert dans $f(X)$ . . . . .	15
5.4	Projections . . . . .	15

## *TABLE DES MATIÈRES*

# Chapitre 1

## Morphismes d'espaces localement annelés

Le but là c'est de revoir pourquoi dans le cas localement annelé  $(f, f^\#): X \rightarrow Y$  la flèche  $f^\#$  correspond bien au pullback  $g \mapsto g \circ f$  (c'est pas tjr défini sur un Schéma affine) et l'intuition est exacte dans le cas des variétés. Ensuite de voir pourquoi les schémas affines généralisent bien les variétés et ensembles algébriques initiales.

### 1.1 Le cas des $k$ -algèbre de type fini

Dans le cas des variétés abstraites, on prends deux variétés affines  $X \simeq (Z(I) \subset \mathbb{A}^n, \mathcal{O}_X)$  et  $(Y, \mathcal{O}_Y)$ . Étant donné un morphisme d'espaces localement annelés  $(f, f^\#): X \rightarrow Y$  on a

$$\begin{array}{ccccc}
 s & f^\#: \mathcal{O}_Y(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(f^{-1}U) & f^\#(s) \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 & \mathcal{O}_{Y,f(x)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x} & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 s(f(x)) & \kappa(f(x)) = k & \xrightarrow{id} & \kappa(x) = k & f^\#(s)(x)
 \end{array}$$

Un truc qui fait tiquer c'est que ça semble pas utiliser le fait que c'est localement annelé, déjà c'est pas clair que c'est un morphisme de  $k$ -algèbres les morphismes de corps résiduels. En fait l'endroit où ça l'utilise c'est que l'existence de ce morphisme vient du fait que

$$\mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{p}_x$$

passse au quotient parce que  $f_x^\#(\mathfrak{p}_{f(x)}) \subseteq \mathfrak{p}_x$ .

### 1.1.1 Le morphisme sur les fibres

Retour sur l'adjonction entre  $f^{-1}$  et  $f_*$  pour un morphisme de faisceaux  $f: (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$ . On remarque que des deux carrés

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_Y(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(f^{-1}U) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{O}_{Y,f(x)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (f^{-1}\mathcal{O}_Y)(V) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(V) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (f^{-1}\mathcal{O}_Y)_{f(x)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x} \\
 \simeq & & \\
 \mathcal{O}_{Y,f(x)} & & 
 \end{array}$$

C'est étonnamment celui de droite qui est intuitif à prouver. On regarde la famille des  $f^{-1}\mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(V) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  ça donne une flèche de la limite des  $x \in V$  tels que  $f(V) \subseteq U$  d'où la limite des  $f(x) \in U$ !

## 1.2 Conséquences

Le fait que  $f: X \rightarrow Y$  est un morphisme d'espaces localement annelé force  $f^\sharp(U)(P) = P \circ f|_U$  ça a tout de suite des conséquences. Par exemple, si  $f$  est dominant, à quelle conditions

$$P \circ f|_U = Q \circ f|_U$$

force  $(P = Q)|_U$  ? De ça on peut déduire des critères pour que le morphisme de faisceau soit surjectif ou injectif.

### 1.2.1 Cas affine

si  $Y$  est affine,

# Chapitre 2

## Immersions

La page stacks sur les [immersions](#).

### 2.1 Immersions ouvertes

C'est un homéomorphisme  $f: X \rightarrow U \subset Y$  de  $X$  sur  $U$  d'espaces localement annelés tel que

$$f^\flat: f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$$

est un isomorphisme.

Dans le cas des variétés c'est pareil.  $X$  est isomorphe à un ouvert de  $Y$ .

### 2.2 Immersions fermées

On demande à ce que  $f(X)$  soit fermé et  $X \rightarrow f(X)$  soit un isomorphisme. Pour rappel on peut seulement demander à ce que ce soit un homéomorphisme et  $f^\sharp$  est surjective.

**Remarque 1.** *Dans le stacks ils disent même qu'on peut dire que c'est un morphisme affine tel que  $f^\sharp$  est surjective. C'est super intuitif ducoup. Et l'équivalence à l'air claire!*

#### 2.2.1 Rappel sur $f^{-1}$

À nouveau, on peut le voir comme un ensemble de classes d'équivalences avant de faisceautiser.

### 2.2.2 À faire

Regarder cette co-unité et la préservation des épis/mono. Les adjoints ça préserve les limites/colimites finies. Et adjoint à gauche préserve toutes les colimites.

### 2.2.3 Étude de la déf

En gros ce qu'on voudrait c'est l'équivalence entre :

1. Structure donnée par  $X$  sur  $f(X)$ , via  $f_*\mathcal{O}_X$ .
2. Structure donnée par  $Y$  sur  $f(X)$ , via  $i_{f(X)}^{-1}\mathcal{O}_Y$ .

pour  $i_{f(X)}: f(X) \hookrightarrow Y$  l'inclusion. Où la deuxième structure est la structure naturelle.

Pour un fermé  $Z \subset Y$ . On peut d'abord regarder si

$$\mathcal{O}_Y \rightarrow (i_Z)_*i_Z^{-1}\mathcal{O}_Y$$

est surjectif. C'est marrant ça provient de la co-unité. À remarquer,

$$((i_Z)_*i_Z^{-1}\mathcal{O}_Y)_y = \begin{cases} (i_Z^{-1}\mathcal{O}_Y)_y = \mathcal{O}_{Y,y} & \text{Si } y \in Z \\ 0 & \text{sinon, car limite vide} \end{cases}$$

Maintenant la surjectivité est claire sur les fibres on a

$$i_Z^\# \begin{cases} \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,i_Z(y)} & \text{si } y \in Z \\ \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Maintenant tout se recolle, en posant  $f(X) = Z$  alors

$$\mathcal{O}_Y \rightarrow (i_{f(X)})_*\mathcal{O}_{f(X)} \simeq (i_{f(X)})_*i_{f(X)}^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

est exacte. D'où la surjectivité qu'on voulait.

**Conclusion 1.** Pour conclure, la structure naturelle sur  $Z \subset Y$  est donnée par  $i_Z^{-1}\mathcal{O}_Y$ . Et naturellement, la définition par  $X \simeq f(X)$  est la bonne. En particulier, on obtient  $i_Z^{-1}\mathcal{O}_Y \simeq f_*\mathcal{O}_X$  pour  $Z = f(X)$ .

Pour l'inverse, si  $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X \rightarrow 0$  est exacte. On note  $I$  le noyau, et si  $f$  est affine. Inversement, si  $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X \rightarrow 0$  est exacte on peut dire quelque chose.



### 2.2.4 Cas affine

Pour le cas affine c'est plus simple si  $f: X \rightarrow Y$  a une image fermée, le morphisme induit

$$f^\sharp(Y): A(Y) \rightarrow A(X)$$

est surjectif parce que  $f(X) = \overline{f(X)} = Z(\ker(f^\sharp(Y)))$  d'où ça se factorise en

$$A(Y) \rightarrow A(Y)/I(Z(\ker(f^\sharp(Y)))) \simeq A(X).$$

En fait en termes de faisceaux, si on regarde

$$0 \rightarrow I \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

on peut poser  $I: U \mapsto I(f(X))\mathcal{O}_Y(U)$ .

### 2.2.5 Cas des variétés

### 2.2.6 Avec la définition affine et faisceau surjectif

Eh ben c'est super cool parce que localement on obtient clairement la tête de l'image via la sous-section d'avant.

## *2.2 Immersions fermées*

# Chapitre 3

## Morphismes affines

Y'a un cas qui est évident que je veux traiter celui des variétés quasi-projectives. Et je crois que les variétés séparées aussi. Déjà, suffit d'avoir ça

**Définition 3.0.1.** Un morphisme  $f: X \rightarrow Y$  est affine si  $f^{-1}U$  est affine dès que  $U$  est affine ouvert de  $Y$ .

**Proposition 3.0.2.** *Un morphisme est affine ssi il existe un recouvrement  $Y = \cup U_i$  t.q  $f^{-1}U_i$  est affine pour chaque  $i$ .*

### 3.0.3 Cas quasi-projectif

Si on a  $f: X \rightarrow Y$  entre variétés quasi-projectives, faut remarquer si



## Chapitre 4

### Morphismes séparés



# Chapitre 5

## Morphismes finis

### 5.1 Fini implique affine

### 5.2 Surjectivité des morphismes finis

Ducoup si on regarde la condition  $x \in f^{-1}(y)$ , ça se traduit par  $f_*\mathfrak{m}_y \subset \mathfrak{m}_x$ . Inversement, si  $f^{-1}(y)$  est vide alors  $f_*\mathfrak{m}_y k[X] = k[X]$  et on applique le lemme de Nakayama car  $\mathfrak{m}_y \neq k[Y]$ . **Faudrait essayer de voir plus concrètement comment trouver une racine.**

### 5.3 Trouver un ouvert dans $f(X)$

L'idée c'est de décomposer  $f : X \rightarrow Y \times \mathbb{A}^r \rightarrow Y$  défini par  $k[Y] \subset k[Y][u_1, \dots, u_r] \subset k[X]$  où  $k(X) = k(Y)(u_1, \dots, u_r, z)$ . La première flèche faut juste choisir  $u_i \in k[X]$ , rendre l'extension entière avec la technique habituelle puis tout dérouler en utilisant le fait que les morphismes finis sont surjectifs. La deuxième c'est juste que la première projection on peut trouver un ouvert dans l'image d'un ouvert facilement.

### 5.4 Projections

Ça c'était cool, et plus deep que prévu. Ducoup, on considère des "e.v" de  $\mathbb{P}^n$  (juste les regarder dans  $\mathbb{P}^{n+1}$ ). Donnés par  $E = Z(L_1, \dots, L_{n-d})$ , et on déf

$$\pi : \mathbb{P}^n - E \rightarrow \mathbb{P}^{n-d-1}; (\bar{x}) \mapsto (L_i(\bar{x}))_i$$

L'idée géométrique c'est que si on prend  $\mathbb{P}^{n-d-1} \simeq H \subset \mathbb{P}^n - E$ , alors  $H \cap E = \emptyset$  et  $H \oplus E = \mathbb{A}^{n+1}$  ce qui définit un projecteur. En particulier, si  $x \in \mathbb{P}^n - E$

alors

$$E \oplus \langle x \rangle \cap H \text{ est de dimension } 1.$$

Donc on a un point d'intersection dans  $\mathbb{P}^n$ , et il est donné par  $\pi$ . C'est pas entièrement clair, mais c'est clair que c'est une projection au sens où  $H \oplus E = \mathbb{A}^{n+1}$  a des projecteurs associés.

Maintenant pour prouver que c'est une flèche finie, c'est plutôt cool, déjà on regarde  $\pi: D(L_j) \cap X \rightarrow \mathbb{A}^{n-d-1} \cap \pi(X)$  et on veut montrer que  $\pi^*: k[\mathbb{A}^{n-d-1}] \rightarrow k[D(L_j) \cap X]$  est finie, et  $g \in \mathcal{O}_X(D(L_j))$  est de la forme  $g = G/L_i^m$  ( $\mathbb{P}^n - E = \cup D(L_i)$ ). Maintenant  $\pi^*(T_i) = L_i/L_j$  donc on doit trouver une relation algébrique unitaire entre  $g$  et les  $\pi^*(T_i)$ . C'est là que c'est fort. On remarque que l'image de

$$\pi_m: X \rightarrow \mathbb{P}^{n-d}; (\bar{x}) \mapsto (L_1^m, \dots, L_{n-d}^m, G)$$

est fermée. On obtient  $F_1, \dots, F_s$  des polynômes qui annulent l'image ! Mais ça suffit pas encore, j'ai l'impression qu'on peut montrer au plus qu'on a seulement une relation du type  $X \circ (L_i)^\alpha G^k - \dots$  pas unitaire et qu'on devra localiser à trop de  $L_i$ . Le deuxième point important c'est que

$$[0 : \dots : 0 : 1] \notin \pi_m(X)$$

parce que les  $L_i$  s'annulent pas simultanément, en particulier,

$$V(F_1, \dots, F_s, z_0, \dots, z_{n-d-1}) = \emptyset$$

D'où ... il existe  $k$  t.q.  $z_{n-d}^k \in (F_1(\bar{z}), \dots, F_s(\bar{z})) + (z_i, i) \subset k[z_0, \dots, z_{n-d}]$ . Tu vois le truc venir ? En particulier, si on regarde dans  $\pi_m(X)$  on obtient

$$\psi(z_1, \dots, z_{n-d}) = z_{n-d} - \sum z_j H_j = 0 \pmod{I(\pi_m(X))}$$

En regardant dans  $z_i \neq 0$  on obtient

$$k[\mathbb{A}^{n-d} \cap D(z_i)] = k[z_0, \dots, z_{n-d}]_{z_i} \rightarrow \mathcal{O}_X(D(z_i \circ \pi_m) \cap X)$$

la flèche  $z_j \mapsto L_j^m/L_i^m$  et  $z_{n-d} \mapsto G/L_i^m$ . De sorte que dans  $\mathcal{O}_X(D(z_i \circ \pi_m) \cap X)$  on ait

$$\psi(G_i/L_i^m) = 0; \psi \in k[\pi(X) \cap D(T_i)][T] \text{ unitaire.}$$