

Point sur le cours de corps locaux

## 0.1 Quand est-ce que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est de Dedekind

Comme d'hab on prends

$L/K$  finie avec  $K = \text{Frac}(\mathcal{O}_K)$  un anneau de valuation discrète

Ensuite on regarde sa fermeture intégrale dans  $L$ ,  $\tilde{\mathcal{O}}_K$ . On veut une extension de DVR, pour ça y faut que  $\tilde{\mathcal{O}}_K$  soit de Dedekind. Le problème c'est toujours de montrer que c'est noethérien. Le reste se montrer toujours directement.

### 0.1.1 Cas général

Le fait que c'est intégralement clos c'est clair. Faut montrer que c'est de dimension 1. Ça c'est l'étude des Spec.

### 0.1.2 Cas séparable

Étant donnée  $L/K$  finie séparable, on a tout ce qui nous faut. On a un discriminant non nul bien défini, d'où si  $L = \oplus K e_i$  alors

$$(Tr(e_i e_j))_{i,j}$$

est non dégénérée. Puis on a une base duale à  $e_i$ , i.e.  $e_i^*$  telle que  $Tr(e_i^* e_j) = \delta_{ij}$ . Avec ça on peut

1. à partir de  $e_i$  une base de  $L/K$  dans  $\tilde{\mathcal{O}}_K$ , obtenir sa base duale pour la trace  $e_i^*$ .
2. montrer que tout élément entier  $b = \sum \lambda_i e_i^*$  vérifie  $\lambda_i \in \mathcal{O}_K$ , via  $Tr(b e_i) = \lambda_i$ !
3. D'où  $\mathcal{O}_K$  est un sous  $\mathcal{O}_K$ -module d'un module de type fini donc noethérien.

### 0.1.3 Cas semi-local

On se place **toujours** dans le cadre où on a  $\mathcal{O}_K$  de valuation **discrète**. Le cadre en gros c'est

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_K & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{O}}_K \quad \subseteq \quad (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i} = ? = (\mathcal{O}_L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ k_K & \longrightarrow & k_L \end{array}$$

C'est à dire qu'on prends la clôture intégrale, on regarde ses idéaux maximaux et on obtient des extensions de d.v.r. Quand  $K$  est complet ou quand on fixe une valuation (un premier  $\mathfrak{m}_i$ ) sur  $L$ ,  $\mathcal{O}_L$  fait sens.

### 0.1.4 Calcul générique

Pour calculer maintenant en fait une marche à suivre c'est

*On sait le faire dans  $\mathcal{O}_K[\alpha]$ .*

On aurait besoin de critères pour que  $\tilde{\mathcal{O}}_K = \mathcal{O}_K[\alpha]$ . Si c'est le cas alors :

1. La factorisation de  $P$

dans  $k_K[X]$  donne la ramification et les idéaux maximaux de  $\tilde{\mathcal{O}}_K$ !

2. Plus précisément, si

$$\bar{P} = \prod_i p_i^{r_i} \in k_K[X]$$

alors  $\mathfrak{m}_i = (\mathfrak{m}_K, p_i(\alpha))$ .

Le point **important** c'est la ramification, on relève

$$P(\alpha) = \prod_i P_i^{r_i}(\alpha) + \epsilon(\alpha)$$

ce qui donne par le deuxième point

$$\prod_i \mathfrak{m}_i^{r_i} = \prod_i (\mathfrak{m}_K, P_i(\alpha))^{r_i} \subset \mathfrak{m}_K \tilde{\mathcal{O}}_K = \prod_i \mathfrak{m}_i^{e_i}$$

On en déduit  $r_i \geq e_i$  pour tout  $i$  et on conclut directement avec

$$\sum r_i f_i = \deg \bar{P} = \deg P = [L : K] = \sum e_i f_i$$

On a utilisé que  $\tilde{\mathcal{O}}_K$  est fini sur  $\mathcal{O}_K$  pour l'égalité  $\deg \bar{P} = \deg P$  et la dimension  $[L : K] = \sum e_i f_i$ .

### 0.1.5 Cas primitif

Un cas intéressant quand on a  $L = K(\alpha)$ , par exemple si  $L/K$  est séparable on peut dire des choses fortes. Si  $\bar{P}$  est séparable, alors  $\tilde{\mathcal{O}}_K = \mathcal{O}_K[\alpha]$  et on peut appliquer la section d'avant!

On a un problème quand l'extension résiduelle est inséparable, on se place dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 K & \longrightarrow & K(\alpha) & \longrightarrow & L \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{O}_K & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{O}}'_K & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{O}}_K \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 k_K & \longrightarrow & k_{K(\alpha)} & \longrightarrow & k_L
 \end{array}$$

### 0.1.6 Cas complet

On a une équivalence entre :

1. L'extension  $L/K$  est non ramifiée (par déf non ramifiée et  $k_{K(\alpha)}/k_K$  est séparable).
2. Il existe  $\alpha : L = K(\alpha)$  et  $P$  le pol min de  $\alpha$  sur  $K$  est séparable sur  $k_K$ .

L'idée c'est juste que la formule  $ef = [L : K]$  est vraie. Et on peut relever une base de l'extension résiduelle ! En gros ça donne une réciproque à la section d'avant.

Dans le cas  $p$ -adique, les corps finis sont parfaits et on a toujours des extensions séparables (c'est immédiat de la déf)! En particulier, si  $\bar{P}$  est inséparable c'est qu'il est scindé. Ça se voit bien par Hensel :

1. On a toujours  $\bar{P} = F^d$  et en réécrivant  $d \deg F = \deg P = e.f$  sachant que  $\deg F \mid f$  (à vérifier mais ça se voit) on obtient  $e \mid d$ . (l'égalité c'est qu'on suppose  $P$  unitaire)

Conclure là dessus, ajouter une discussion des cassages d'extensions de  $\mathbb{Q}_p$  est totalement ramifiée et non ramifiée (le faire). Et aussi faire le lien entre ramification sur  $\mathbb{Q}$  est sur des complétions  $\mathbb{Q}_p$ . Aussi conclure le cas primitif avec des divisibilités.

## 0.2 Ramification 1

J'veais parler de ramification ici. Le lemme clé c'est que dans une extensions de d.v.r  $\mathcal{O}_K \rightarrow \mathcal{O}_L$ . Si

$$k_K = k_L$$

est de dimension  $f \in \mathbb{N} \cup \infty$ . Alors

$$\dim_k \mathcal{O}_L / \mathfrak{m}_K \mathcal{O}_L = e.f$$

avec  $\mathfrak{m}_K = \mathfrak{m}_L^e$ . Ensuite, si  $\tilde{\mathcal{O}}_K$  est la fermeture intégrale de  $\mathcal{O}_K$  dans  $L$  alors

$$\sum_i e_i f_i \leq [L : K]$$

où on écrit  $\mathfrak{m}_K \tilde{\mathcal{O}}_K = \prod_i \mathfrak{m}_i^{e_i}$  et  $f_i = [\tilde{\mathcal{O}}_K / \mathfrak{m}_i : k_K]$ . Ça c'est par le lemme chinois! Pour utiliser le résultat de juste avant faut aussi montrer que

$$(\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i} / \mathfrak{m}_i^r (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i} \simeq \tilde{\mathcal{O}}_K / \mathfrak{m}_i^r \tilde{\mathcal{O}}_K$$

Pour  $\mathfrak{m}$  maximal (ça se fait à la main). On a l'égalité dans plusieurs cas :

1.  $K$  est complet, car alors  $\tilde{\mathcal{O}}_K = \mathcal{O}_L$ .
2.  $L/K$  est séparable, car alors  $\tilde{\mathcal{O}}_K$  est fini sur  $\mathcal{O}_K$ .
3. Plus généralement, si  $\tilde{\mathcal{O}}_K$  est fini sur  $\mathcal{O}_K$ .
4.  $L \otimes_K \hat{K}$  est réduite. Regarder le lien entre les nilpotents et la séparabilité.

Maintenant faut la calculer.

## *0.2 Ramification 1*

# Chapitre 1

## 3e point sur les cours, 21/10/2024

Faut faire un peu plus attention qu'au 2e point.

### 1.1 Extensions de valuations bis

En conséquence de l'autre section on peut reformuler la bijection

$$\{\text{Ideaux maximaux de } L \otimes_K \widehat{K}\} \leftrightarrow \{\text{Extensions de } |\cdot|_K \text{ à } L\}$$

en