Théorie des nombres algorithmique

2024-2025

Table des matières

Chapitre 1

Algorithmes

1.1 $\frac{3}{5}|0> + \frac{4}{5}|1>$

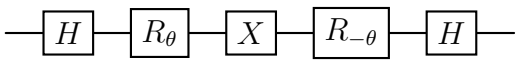
C'est un exo à la con mais c'est instructif, on regarde

$$\begin{aligned}
|0> &\to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0> + |1>) \\
&\to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0> + e^{i\theta}|1>) \\
&\to \frac{1}{2}(|0>(1+e^{i\theta}) + |1>(1-e^{i\theta})) \\
&\to \frac{1}{2}(e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}) + e^{i\theta/2}|1>(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}))
\end{aligned}$$

et là suffit d'ajuster theta puis de refaire des phases shifts.

1.2 $\frac{3}{5}|0> + \frac{4}{5}|1>$ et $\frac{5}{13}|0> - \frac{12}{13}|1>$

Déjà par rapport à la section d'avant, on aurait juste pu faire



est c'est fini, on obtient

$$|0> \mapsto cos(\theta)|0> + sin(\theta)|1>$$

et

$$|1> \mapsto -sin(\theta)|0> - cos(\theta)|1>$$

maintenant si $|0> \mapsto \frac{3}{5}|0> + \frac{4}{5}|1>$ et $|1> \mapsto \frac{5}{13}|0> - \frac{12}{13}|1>$ on peut voir que sur $|0> + |1>$ ça préserve pas la norme.

1.3 Deutsch-Josza

Donc l'algorithme permet de décider si $f\colon 2^n \to 2$ est constante ou équilibrée (Comme un morphisme de groupes $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \to \mathbb{F}_2$).

En gros le point crucial c'est que sur $|0^n> |1>$ Si on fait $H^{\otimes(n+1)}$, U_f puis $H^{\otimes n}$ on obtient :

$$\begin{aligned} |0^n>|1> &\to \sum_{x\in 2^n} |x> (|0> - |1>) \\ &\to \sum_{x\in 2^n} |x> (|f(x)> - |1\oplus f(x)> \\ &\to \sum_{y\in 2^n} |y> \sum_{x\in 2^n} (-1)^{f(x)}(-1)^{x.y} \end{aligned}$$

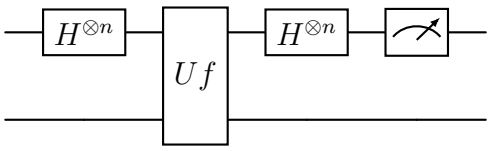
En particulier $||q_{0^n}|| = \sum_{x\in 2^n}(-1)^{f(x)}/2^n$. D'où si f est constant on obtient 0^n avec proba 1, sinon proba 0 d'avoir 0^n.

1.4 Simon

Cette fois c'est plus fun, si on prends

$$f\colon (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \to X$$

avec X un ensemble fini, et si f vérifie $f(x) = f(y)$ ssi $x = y$ ou $x = y + a$ on aimerait trouver a. Essentielemment, si f passe au quotient en $< a >$ on veut trouver le "noyau". On regarde



À nouveau on fait rentrer $|0^{n+m}>$, on obtient

$$\begin{aligned} |0^{n+m}> &\to \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{x\in 2^n} |x> |f(x)> \\ &\to \frac{1}{2^n} \sum_{y\in 2^n} |y> \sum_{x\in 2^n} (-1)^{x.y} |f(x)> \end{aligned}$$

et on à $q_y = \sum_{x\in 2^n}(-1)^{x.y}|f(x)>$. Le claim c'est qu'on obtient un vecteur $v \in \mathbb{F}_2^n$ uniformément distribué orthogonal à a en sortie. Ça se voit direct en regardant $y.a \mod 2$:

$$q_y = \sum_{\bar{x}\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n/<a>} (1+(-1)^{a.y})((-1)^{x.y}|f(x)>$$

$$\begin{aligned} a.y = 1 \mod 2 \to q_y &= \sum_{\bar{x}\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n/<a>} (1+(-1)^{a.y})((-1)^{x.y}|f(x)> \\ &= 0 \\ a.y = 0 \mod 2 \to q_y &= \sum_{\bar{x}\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n/<a>} (1+(-1)^{a.y})((-1)^{x.y}|f(x)> \\ &= \sum_{\bar{x}\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n/<a>} ((-1)^{x.y}|f(x)> \end{aligned}$$

En particulier, y'a que les $y.a = 0 \mod 2$ qui ont une proba de sortir. L'uniforme distribution est claire.

Pour obtenir a, on peut lancer l'algorithme jusqu'à obtenir une base de $< a >^T$.

Remarque 1. *La proba d'avoir une base en m étapes se calcule bien, regarder la matrice des m vecteurs colonnes. Calculer sur le rang sur les lignes! On obtient une proba* $P_{d+k} \geq 1 - \frac{1}{q^k(q-1)} = 1 - \frac{1}{2^k}$ *avec* $q = 2$ *ici et* $d = n - 1 = dim < a >^T$.

1.5 Transormée de Fourier quantique

On a une nouvelle porte,

$$QFT(|x>) = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{y\in 2^n} \zeta_{2^n}^{x.y}|y> .$$

Et on peut l'utiliser pour trouver la période d'une fonction! Y'a une nuance dans la suite :

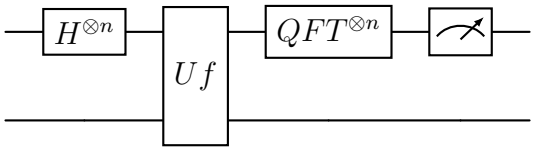
On part de $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ et pas $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, puis xy est le produit dans $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ pas le produit scalaire.

1.5.1 Cas $r = 2^d$

Problème 1. $f : \mathbb{F}_2^n \to X$ telle qu'il existe $d \leq n$ t.q :

1. f est 2^d-périodique.
2. $f(x) = f(y)$ ssi $2^d \mid x - y$.

Le circuit



mesure un $|y>$ uniforme divisible par 2^{n-d}. En particulier, on a une manière de chopper une période de la forme 2^d en itérant. Donc en gros comme d'hab on regarde :

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}} |x> |f(x)>$$

et on applique QFT cette fois pour obtenir :

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}} \sum_{y \in \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}} \zeta_{2^n}^{xy} |y> |f(x)>$$

et on pose

$$q_y = 1/2^n \sum_{x \in \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}} \zeta_{2^n}^{xy} |f(x)>$$

puis on écrit $x = a + 2^d b$, alors $f(x) = f(a)$. On peut montrer que

1. si $2^{n-d} \mid y$ alors $||q_y||^2 = 1/2^d$.
2. sinon $||q_y||^2 = 0$.

Fait : En gros, en prenant la QFT comme boite noire, j'ai revu deutsh josza et simon. Puis Shor pour trouver les périodes de la forme 2^k. Ensuite pour une période de la forme r générale, on peut l'estimer à partir du circuit du dessus. **À faire :** Comprendre l'estimation d'abord, via les fractions continues. Puis comprendre la QFT sans boite noire mais ca c'est moins important. Faut savoir construire $|x> \mapsto |0> + \zeta_{2^n}^x |1>$.

Finalement : Ça vaut le coup de comprendre comment marche la QFT pour le td ? Ou au moins pour l'algorithmique.

1.5.2 Construire la porte QFT

En gros on utilise la factorisation :

$$\begin{aligned} QFT(|x>) &= \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{y \in 2^n} \zeta_{2^n}^{xy} |y> \\ &= \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{y_0,\ldots,y_{n-1} \in \{0,1\}} \prod_{i=0,\ldots,n-1} \zeta_{2^n}^{x 2^i y_i} |y_i> \\ &= \frac{1}{2^{n/2}} \prod_{i=0,\ldots,n-1} (|0> + \zeta_{2^n}^{x 2^i} |1>) \end{aligned}$$

en particulier, y suffit de savoir construire

$$\frac{|0> + \zeta_{2^{n-i}}^{x} |1>}{\sqrt{2}}$$

Mais ça on peut le faire avec un controlled phase shift :

$$\begin{aligned} \frac{|0> + \zeta_{2^{n-i}}^{x} |1>}{\sqrt{2}} &= \frac{|0> + \zeta_{2^{n-i}}^{x_0 + \ldots + 2^{n-i} x_i} |1>}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{|0> + \prod_{j=0}^{n-i} \zeta_{2^{n-i-j}}^{x_j} |1>}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Au sens où la c'est juste une suite de phase shifts là où $x_j = 1$.

Conclusion 1. *Là on a construit un circuit Q_i qui créé le qbit du dessus qui agit que sur la $n - i - 1$-ème entrée. En particulier pour appliquer la QFT, on fait successivement Q_0 puis Q_1, ...*

1.5.3 Le cas r général

Bon là on savait trouver une période de la forme 2^d. Maintenant on veut trouver une période quelconque. On va faire exactement la même chose et voir ce qu'y se passe.

Résumé 1. *En gros, la sortie de Shor est une approximation de k/r une fraction proche à 2^{n+1}, i.e. :*

$$|y/2^n - j/r| < 1/2^{n+1}$$

On connaît par j/r mais on peut montrer avec une telle approximation que il existe un convergent de y, p_n/q_n tel que $p_n/q_n = j/r$!

On peut montrer avec des théorèmes sur les fractions continues que pour une sortie de Shor y, il existe j tel que $|y/2^n - j/r| < 1/2^{n+1}$ et par la théorie des fractions continues, j/r est un convergent de y! I.e. y'a dans la fraction continue on peut trouver p_n/q_n t.q $p_n/q_n = j/r$, wow.

Stratégie 1. *Ducoup la stratégie c'est :*

1. *Lancer Shor et obtenir y.*
2. *Calculer les convergents de $y/2^n$, (p_i/q_i).*
3. *Vérifier si $f(0) = f(q_i)$ pour un i, si oui retourner q_i.*

À la dernière étape ce sera vrai par la théorie parce que une condition c'est $2^n > r^2$ et on le choisit comme ça.

1.6 Factorisation et log discret

Pour la factorisation, la page wiki explique bien!

Stratégie 2. *En gros*

1. *Prendre un entier plus petit que n premier à N, disons a (si il est pas premier on a fini).*
2. *Calculer son ordre avec l'algo de Shor (on a besoin de l'ordre.*
3. *Si r est pair, alors $N|(a^{r/2} - 1)(a^{r/2} + 1)$ mais peut diviser aucun des deux donc a deux facteurs !*
4. *Il doit y avoir un r pair, parce que sinon $N = 2^k$. Donc itérer.*