

Quand est-ce que  $\sum e_i f_i = [L : K]$ ?

## 0.1 Manipuler

Le point c'est qu'on a toujours

$$\sum e_i f_i \leq [L : K]$$

(voir lemme 3.6 vu que dans le cas des dvrs on sait pas si  $f = \infty$ ) avec égalité ssi  $\tilde{\mathcal{O}}_K - \mathcal{O}_K$  est finie ssi  $L \otimes_K \hat{K}$  est réduite. Un gros détail, les transitions de dimensions se font entre  $k_K - k_L$  et  $K - L$ . Autrement dit on s'en fout de la finitude de  $\tilde{\mathcal{O}}_K$  sur  $\mathcal{O}_K$ . Si  $[L : K]$  est finie alors  $f_i$  aussi pour tout  $i$ .

**Remarque 1.** Cette histoire de  $B_L$  réduite vient du fait que

$$B_L \rightarrow \prod L_i$$

a un noyau nilpotent vu que c'est  $\cap \mathfrak{m}_i$  et qu'on est sur une  $\hat{K}$ -algèbre de type fini à gauche (car de dimension finie  $\rightarrow$ ) et à gauche c'est de  $\dim \dim_{\hat{K}} B_L = [L : K]$  alors qu'à droite c'est  $\sum e_i f_i$ .

## 0.2 Prérequis

Quelques prérequis nécessaire à l'étude : si  $\mathcal{O}_K$  est de Dedekind, quand est-ce que

1.  $\tilde{\mathcal{O}}_K$  est de Dedekind.
2.  $\tilde{\mathcal{O}}_K$  est fini sur  $\mathcal{O}_K$ .

Pour la première question :

1. Si  $\mathcal{O}_K$  est semi-local ça se fait bien parce que  $\tilde{\mathcal{O}}_K$  est noethérien sur  $\mathcal{O}_K$  ssi  $\tilde{\mathcal{O}}_K \otimes_{\mathcal{O}_K} (\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{m}_i}$  est noethérien pour tout les premiers (faut en avoir un nb fini).
2. Plus généralement si  $L/K$  est finie par Krull-Akizuki.

Pour la deuxième : dès que  $\sum e_i f_i = [L : K]$  d'où si

1.  $K$  est complet, par densité de  $\sum_{i,j} e_j \pi_L^i \mathcal{O}_K$  dans  $\tilde{\mathcal{O}}_K$ . L'idée étant que  $M \otimes_{\mathcal{O}_K} K = L$  d'où  $M$  est un parallélogramme fermé fondamental de  $L$ , vu que  $\mathcal{O}_K = \overline{B(0,1)} \cap K$  et  $\mathcal{O}_L = \overline{B(0,1)}$  pour la métrique de  $L$ . Et  $M$  est dense dans  $\mathcal{O}_L$  (partie non triviale!)
2.  $L/K$  est séparable via le discriminant non nul et la trace non dégénérée.
3. Évidemment si  $\tilde{\mathcal{O}}_K = \mathcal{O}_K[\alpha]$  est monogène.

# Chapitre 1

## Cadre

### 1.1 Objets

On se place **toujours** dans le cadre où on a  $\mathcal{O}_K$  de valuation **discrète**. Le cadre en gros c'est

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_K & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{O}}_K \quad \subseteq \quad (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i} = ? = (\mathcal{O}_L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ k_K & \longrightarrow & k_L \end{array}$$

C'est à dire qu'on prends la clôture intégrale, on regarde ses idéaux maximaux et on obtient des extensions de d.v.r. Quand  $K$  est complet ou quand on fixe une valuation (un premier  $\mathfrak{m}_i$ ) sur  $L$ ,  $\mathcal{O}_L$  fait sens.

### 1.2 Les cadres successifs

On regarde d'abord  $\mathcal{O}_K - \mathcal{O}_L$  une extension de DVR. De sorte à montrer que

$$e.f = \dim \mathcal{O}_L / \mathfrak{m}_K \mathcal{O}_L$$

à l'aide du module  $M$ . Ensuite on regarde  $\mathcal{O}_K - \tilde{\mathcal{O}}_K$ . Et on montre que

$$\dim_{k_K} \tilde{\mathcal{O}}_K / \mathfrak{m}_K \tilde{\mathcal{O}}_K \leq [L : K]$$

enfin on montre que dans le même cas que

$$\dim_{k_K} \tilde{\mathcal{O}}_K / \mathfrak{m}_K \tilde{\mathcal{O}}_K = \sum e_i f_i \leq [L : K]$$

avec égalité quand (de manière équivalente)

1.  $\tilde{\mathcal{O}}_K$  est fini sur  $\mathcal{O}_K$ .
2.  $L \otimes_K \hat{K}$  est réduite.

### 1.3 Extensions de dvrs.

Étant donné une extension  $\mathcal{O}_K - (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}} = \mathcal{O}_L$ , y'a une inclusion à regarder, si  $k_K - k_L$  contient une famille libre et génératrice  $(e_i)_i$  :

$$\mathcal{O}_L \subset \sum e_i \mathcal{O}_K + \pi_L \mathcal{O}_L$$

puis en itérant

$$\mathcal{O}_L \subset \sum e_i \pi_L^j \mathcal{O}_K + \pi_K \mathcal{O}_L$$

et même pour tout  $n \geq 1$

$$\mathcal{O}_L \subset \sum_i \sum_{j=0, \dots, e-1} e_i \pi_L^j \mathcal{O}_K + \pi_K^n \mathcal{O}_L$$

car  $\pi_L^e \in \mathcal{O}_K$ . Donc une densité de  $M$  dans  $\mathcal{O}_L$ . Je note

$$M = \sum_{i=1, \dots, f} \sum_{j=0, \dots, e-1} e_i \pi_L^j \mathcal{O}_K.$$

Ça montre que  $\mathcal{O}_L / \mathfrak{m}_K \mathcal{O}_L$  est de dimension au plus  $e.f$ . L'autre est un peu technique mais pas dur, y s'agit de jouer sur la valuation.

**Remarque 2.** Là on a juste utilisé que  $k_L$  est de dimension finie sur  $k_K$ . On peut écrire des doubles inégalités même en général.

On a construit un  $\mathcal{O}_K$ -module libre dense dans  $\mathcal{O}_L$ .

### 1.4 Cas canonique

On a directement  $\dim_{k_K} \tilde{\mathcal{O}}_K / \mathfrak{m}_K \tilde{\mathcal{O}}_K = \sum e_i f_i$ . Par le lemme chinois et le cas des dvrs.

### 1.5 Cas complet

On se retrouve dans le cas des dvrs. Et on a

$$M \otimes_{\mathcal{O}_K} K = L$$

parce que dense dans  $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_K} K = L$  et complet donc fermé. Donc on obtient le cas d'égalité  $e.f \geq [L : K]$ .

**Remarque 3.** Le fait que  $M \otimes_{\mathcal{O}_K} K$  soit un  $K$ -e.v dense dans  $L$  force pas de même dimension ! Ça peut arriver qu'une ligne soit dense en dimension 2. Par exemple  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  avec la norme infinie, ou toutes les  $v_p$  avec  $p \neq 2$  je crois.

*Cadre*

## 1.6 Équivalences

Seulement de "égalité" équivaut à  $\tilde{\mathcal{O}}_K$  fini sur  $\mathcal{O}_K$ . De droite à gauche c'est que  $\mathcal{O}_K$  est principal donc fini implique libre ici, la dimension se voit bien d'où l'égalité. L'autre côté c'est que on obtient une base de  $L$  sur  $K$  et on fait redescendre les relations.

## 1.7 Remarques sur $B_L$ et les $\mathfrak{m}_i$

Dans  $L \otimes_K \hat{K}$  si on note  $\pi_i$  une uniformisante pour  $\mathfrak{m}_i$  chaque idéaux de  $\tilde{\mathcal{O}}_K$  alors à mon avis  $\langle \pi_i, i \neq j \rangle$  est l'idéal maximal de  $L \otimes_K \hat{K}$  qui correspond à  $L_j$ .