La différente, À REORGANISER

Cet article de Keith est cool : .
À REORGANISER

0.1 Remarques

Ducoup y'a des nouvelles définitions : les duaux relatifs à une fonctionnelle (linéaire, i.e. $f \colon M \to M^\wedge$), comme $\{x \in L | Tr(xL) \subset \mathcal{O}_K\}$. Et les opérateurs semi-simple. I.e. les fonctionnelles qui se comportent comme on le voudrait.

0.2 Duaux

Cet autre article de Keith est cool :.

0.2.1 Cas de $M \subset K$, et $(\_ \mapsto (m \mapsto \_.m) \colon M \to M^\wedge$

Étant donné un anneau intègre R, K le corps de fractions de R et $M \subset K$ un R-module. On définit

$$\mathrm{Hom}_R(M, R) = M^\wedge$$

alors $M^\wedge \simeq_K (R, M)$ via $\varphi \mapsto \varphi(1)$ et $c \mapsto (m \mapsto c.m)$. C'est simplement que $\varphi(b/b) = b\varphi(1/b) = \varphi(1)$ d'où $\varphi(1/b) = \varphi(1)/b$. On dit que M a un dénominateur commun dans R si y'a un $c \in R$ tel que $M \subset c^{-1}R$. En gros si c'est un idéal fractionnaire.

Si R est noethérien alors M est de type fini ssi il a un dénominateur commun dans R (i.e. idéal fractionnaire). Maintenant $M^\wedge \neq 0$ ssi $_K(R, M) \neq 0$ i.e. M a un dénominateur commun dans R, c'est pas immédiat $\varphi(1) \in K$. Mais $a/bM \subset R$ équivaut à $aM \subset bR \subset R$.

0.2.2 Cas général

Si M est un R-module et $f \colon M \to M^\wedge$ une fonctionnelle on peut définir $M^\wedge := \{x \in M \otimes_R K | f(x, M) \subset R\}$ quand ça fait sens. Dans le cas où $M = \mathcal{O}_L$, $R = \mathcal{O}_K$ et $f = Tr_{L/K}(\_.\_)$ on obtient

$$\mathcal{O}_L^\wedge = \{x \in L | Tr_{L/K}(x\mathcal{O}_L) \subset \mathcal{O}_K\}$$

0.2.3 Base duale

Étant donné $f \colon M \to M^\wedge$ qui s'étend à $M \otimes_R K$ et $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ une base de M sur R on peut trouver $e_i^\wedge$ une base de $M^\wedge$ telle que $f(e_i, e_j^\wedge) = \delta_{ij}$. En plus elle est de taille n aussi. Si elle existe elle est libre vu que $\sum a_i e_i^\wedge = 0$ implique $a_j = \sum a_i f(e_j, e_i^\wedge) = 0$ pour chaque j. Ensuite si on a $v \in M^\wedge$ t.q $f(e_i, v) = a_i \in R$ alors $v - \sum a_i e_i^\wedge \in \ker(f(e_j, \_))$ pour chaque j. Sauf que par hypothèse d'existence de $(e_i^\wedge)_i$, $\ker(f(e_j, \_)) = \oplus_{i \neq j} e_i^\wedge$. Et leur intersection est 0.

Pour l'existence il faut une hypothèse de non dégénérescence je pense. En fait il faut plus ?! Le wiki dit que il faut ajouter hypothèse d'unimodularité. En gros non dégénéré au sens des corps implique pas que $M \to M^\wedge$ est un iso. Par ex $B(x, y) = 2xy$ sur $\mathbb{Z}$. Mais je pense qu'il suffit que $M \otimes_R K \to (M \otimes_R K)^\wedge$ soit non dégénérée. Vu que notre base duale est dans $M \otimes_R K$.

0.3 Calcul

Si M est libre de rang n alors $M^\wedge$ aussi via l'existence de la base duale (le point clé c'est qu'on peut définir le morphisme entier sur la base de M et qu'on a toujours les projections). Quand on est dans le cas L/K, $\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K$ et que $\mathcal{O}_K$ est principal on se retrouve dans le cas libre et on peut expliciter les calculs. Dans pour un peu plus de généralités je prends R principal et M libre de rang n. Puis $M \otimes K = K^n$. Si $f\colon (K^n)^2 \times K^n$ est bilinéaire on cherche une base de $M^\wedge = \{x \in M \otimes K = K^n | f(x, M) \subset R\}$, en écrivant ça plus explicitement avec $M = \oplus R e_i$. On veut résoudre, avec $x = \sum x_i e_i$, pour tout j : $f(x, e_j) \in R$. Ça suffit parce qu'alors $f(x, M) \subset R$. Et donc il suffit de résoudre

$$\begin{cases} x_1 f(e_1, e_1) + x_2 f_(e_1, e_2) + & \ldots + x_n f(e_1, e_n) \in R \\ x_1 f(e_2, e_1) + x_2 f_(e_2, e_2) + & \ldots + x_n f(e_2, e_n) \in R \\ & \vdots \\ x_1 f(e_n, e_1) + x_2 f_(e_n, e_2) + & \ldots + x_n f(e_n, e_n) \in R \end{cases}$$

en écrivant $A = (f(e_i, e_j))_{i,j}$ on résoud $A.X \in R^n$ et ça c'est juste $X \in A^{-1} R^n$ terme à terme on obtient un système comme d'hab.

0.3.1 Calcul d'inverse

Si I est un idéal fractionnaire de K et $I = \sum R x_i$, on veut calculer ${}_K(R : I)$, on résoud $yI \subset R$. Autrement dit $y x_i \subset R$ pour chaque i, i.e. $y \in \cap_i x_i^{-1} R$.

0.4 La différente

Elle est donnée par

$$\mathscr{D}_{L/K} := (\mathcal{O}_L^\wedge)^{-1} = (\{x \in L | Tr_{L/K}(x\mathcal{O}_L) \subset \mathcal{O}_K\})^{-1}$$

avec $I^{-1} =_L (\mathcal{O}_L : I)$.

0.4.1 Base duale de $(\alpha^i)_i$ pour la trace

Pour trouver la base duale de $\mathscr{D}_{L/K}^{-1}$ avec $L = K[\alpha]$ et $\alpha \in \mathcal{O}_L$ on a en notant $P(T) = (T-\alpha)(\sum_{i=1}^{n-1} c_i(\alpha)T^i)$ que

$$\sum_i \alpha_i^k \frac{P(T)}{P'(\alpha_i)(T-\alpha_i)} = T^k$$

d'où en développant $\sum_i \alpha_i^k \frac{c_j(\alpha_i)}{P'(\alpha_i)} = \delta_{ij}$. Et ça c'est $Tr_{L/K}(\alpha \frac{c_j(\alpha)}{P'(\alpha)})$ d'où $(\frac{c_j(\alpha)}{P'(\alpha)})_j$ est duale pour $(\alpha^k)_k$. En plus vu que on peut réécrire

$$([P(T) - P(\alpha))/(T-\alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{(T^i - \alpha^i)}{T-\alpha}$$

et en développant on trouve $\sum_{i=j+1}^{n} a_i \alpha_{i-1-j} = c_j(\alpha)$. De $\alpha \in \mathcal{O}_L$ on a $a_n = 1$ d'où la matrice de transition de $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ vers $(c_j(\alpha))_j$ est triangulaire inférieure avec une diagonale faite de 1 d'où inversible dans $\mathcal{O}_K$.

En conclusion la base duale pour la trace de $(\alpha^i)_i$ est $(c_j(\alpha)/f'(\alpha))_j$. Mais quand $\alpha \in \mathcal{O}_L$, $\mathcal{O}_K[\alpha]^\wedge = \frac{1}{P'(\alpha)}\mathcal{O}_K[\alpha]$.

0.4.2 La différente quand $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\alpha]$

Par exemple dans des corps locaux de caractéristique 0 un tel α existe toujours via $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\theta, \pi_L]$ et le fait que l'extension résiduelle est séparable.

Maintenant $\mathscr{D}_{L/K} = ((\mathcal{O}_L)^\wedge)^{-1} = \frac{1}{P'(\alpha)}\mathcal{O}_L$.

Remarque 1. *Directement si $L = K[\alpha]/K$ est non ramifiée, $P'(\alpha) \in \mathcal{O}_L^\times$ car $\bar{P}'(\bar{\alpha}) \neq 0 \mod \pi_L$. d'où $\mathscr{D}_{L/K} = \mathcal{O}_L$.*

0.5 Transitivité

Étant donné $L/F/K$, on a $\mathscr{D}_{L/K} = \mathscr{D}_{L/F}\mathscr{D}_{F/K}$. Suffit de montrer que, $\mathcal{O}_{L/K}^\wedge = \mathcal{O}_{L/F}^\wedge(\mathcal{O}_{F/K}^\wedge)$ vu que $(IJ)^{-1} = I^{-1}J^{-1}$ c'est un calcul terme à terme. Et pour ça le seul cas pas évident c'est $x \in \mathcal{O}_{L/K}^\wedge$ implique est un produit.

0.5.1 Base produit

Dans le cas complet ça va, c'est que des dvrs d'où on a une base produit.

0.6 Caractérisation

On a $Tr(D_{L/K}^{-1}) = \mathcal{O}_K$ et c'est le plus grand idéal fractionnaire tel que c'est vrai. Faut penser à la base duale pour le voir!

Chapitre 1

Résumé

On a $Tr_{L/K}(D_{L/K}^{-1}) = \mathcal{O}_K$, la surjectivité vient de la base duale. L'autre inclusion est par déf.

La transitivité on peut prouver que $Tr_{L/F}(D_{L/K}^{-1}) = D_{F/K}^{-1}$ sachant que si $x \in F$ et v_i^* est dans la base duale de L sur F alors xv_i^* est dans $D_{L/K}^{-1}$, la raison c'est que $Tr_{F/K}(x) \in \mathcal{O}_K$.Par déf.

L'autre côté est simple.

L'existence de la base duale c'est que $Hom(L, K)$ est de dimension $\leq [L : K]$ et $x \mapsto Tr(\_x)$ est injective par non dégénérescence.