Corps perfectoides

1 Préliminaires

1.1 Espaces séquentiels

Pour rappel un espace est séquentiel si les ouverts séquentiels sont ouverts et/ou les fermés séquentiels sont fermés. En particulier quand on a des bases dénombrables de voisinage on est séquentiel!

En particulier je peux tester toute les topologies grâces aux suites convergentes.

En plus comme c'est des anneaux topologiques suffit de tester en 0.

1.2 Perfections

Je note $Ring_{p,sperf}$ (resp. $Ring_{p,perf}$) la catégorie des anneaux commutatifs semi-parfaits (resp. parfaits) de caractéristique $p > 0$. Étant donné un anneau commutatif unitaire semi-parfait R, y'a deux adjonctions

$$(\_)_{perf} \colon Ring_{p,sperf} \leftrightarrows Ring_{p,perf} \colon Forget$$

et

$$Forget \colon Ring_{p,perf} \leftrightarrows Ring_{p,sperf} \colon (\_)^{perf}$$

où la première est donnée par l'universalité de $R \to (R)_{perf} := \varinjlim_{\varphi} R$ (R est le dernier terme du diagramme $\mathbb{N} \to Ring$ où $i + 1 \to i$ est donné par φ et $i \mapsto R$).

Et la deuxième par l'universalité de $R^{perf} \to R$.

1.2.1 Description usuelle

On a toujours $R^{perf} = \{(x_n)_{n\geq 0} | x_{n+1}^p = x_n\}$. Les lois sont termes à termes.

1.3 Anneaux de valuations

Une première remarque : les idéaux principaux ont valuation minorée > 0. En particulier $\mathfrak{m}_E$ est jamais principal. Ducoup de même $\alpha.\mathfrak{m}_E$ non plus pour $\alpha \in \mathfrak{m}_E$. Enfin si tu contiens α tu contiens $B(0, |\alpha|)$ de sorte que $\mathfrak{m}_E$ est le seul idéal de valuation 0 puis on a tout les idéaux !

2 Corps perfectoide

Un corps non-archimédien (NA) $(E, |.|_E)$ est perfectoide si

1. $|.|_E$ est pas discrète.
2. E est complet.
3. $\mathcal{O}_E/p$ est semi-parfait.

Y'a une prop qui dit (en char= 0) que $E = \widehat{F}$ est la complétion d'un corps profondément ramifié F.

3 Tilt

Le tilt d'un anneau commutatif semi-parfait est donné par $(R/p)^{perf}$. Dans le cas de E perfectoide de caractéristique 0, on déf $E^\flat$ comme $Frac((\mathcal{O}_E/p)^{perf})$.

3.1 $E^\flat$ est perfectoide.

Les suites de Cauchy $(x_i)_{i\geq 0} \subset \mathcal{O}_E^\flat$ vérifient $(x_{i,k})_{i\geq 0}$ est stationnaire d'où la complétude. La perfection est dûe à celle de $\mathcal{O}_E/p$. Et la valuation non discrète on le voit après.

3.2 Étude de $\mathcal{O}_{E^\flat}$

Pour $(x_n)_n \in \mathcal{O}_{E^\flat}$ on lift x_n en $\widehat{x}_n$. Alors $\lim_{m\to\infty} \widehat{x}_{n+m}^{p^m}$ converge en $x^{(n)}$ tels que

$$(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$$

Maintenant la limite ensembliste

$$\varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathcal{O}_E$$

a une structure d'anneau via

$$(x^{(n)})_n + (y^{(n)})_n = (\lim_{m\to\infty}(x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m})_n$$

et $(x^{(n)})_n(y^{(n)})_n = (x^{(n)}y^{(n)})_n$. Ça donne un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{E^\flat} \to \varprojlim_{x\to x^p} \mathcal{O}_E$$

et on définit (par extension multiplicative)

$$|x/y|_{E^\flat} := |x^{(0)}|_E/|y^{(0)}|_E$$

on a alors

$$|x|_{E^\flat} \leq |p|^{p^n} \Leftrightarrow x_n = 0$$

c'est simplement l'équivalence $x^{(n)} = 0 \mod p$ équivaut à

$$x^{(0)} = (x^{(n)})^{p^n} = 0 \mod p^{p^n}$$

3.3 Valeur absolue

On a

1. $|E^\flat| = |E|$ de manière évidente.

2. $|E|$ est p-divisible.

3. $\mathfrak{m}_E$ est plat (simple).

4. $\mathfrak{m}_E^2 = \mathfrak{m}_E$.

La première est assez claire. La troisième est parce que c'est sans torsion et la quatrième c'est juste que $(x) = \overline{B(0,|x|)}$ pour $x \in \mathfrak{m}_E$ et $\mathfrak{m}_E = B(0,1)$.

3.3.1 p-divisibilité $\to$ ramification sauvage

L'idée est simple on a $x = y^p + pz$ et si $|x| > |p|$ la p-divisibilité. Maintenant si $|x| \leq |p|$ y'a un plus petit n tel que

$$|p|^n < |x| \leq |p|^{n-1}$$

puis $|p| < |x/p^{n-1} \leq 1$. Enfin si $|x| > |p|$ on a $p = x(p/x)$ d'où y'a un élément de valuation $|p|^{1/p}$ et de la ramification sauvage (même une infinité).

3.3.2 Plus sur la ramification sauvage

En fait de $p = x(p/x)$ si y_1, y_2 sont tels que $y_1^p = x \mod p$ et $y_2^p = p/x \mod p$ puis $\pi = y_1 y_2 \mod p$ alors l'élément

$$x = (\varphi^{-n}(\pi))_{n \geq 0} \in \mathcal{O}_E^\flat$$

engendre presque une $\mathbb{Z}_p$-extension. Faut remplacer π par un élément de $\bar{E}$ ayant la même valuation et regarder

$$K_{n,cyc} := K(\zeta_p, x^{(n)})$$

3.3.3 Topologie sur le Tilt (complétude)

Via un $g \in \mathcal{O}_E^\flat$ tel que $|g| = |p|^{1/p}$ on pose $t = g^p$. On a naturellement la flèche surjective

$$\mathcal{O}_E^\flat \to \mathcal{O}_E/p$$

et on prouve aussi naturellement que le noyau est (t) simplement en en remarquant que $g^{(0)} \in (p)$ implique

$$g^{(0)} = a^{(0)}.p$$

puis via $t^{(0)} = u^{(0)}p$ pour une unité on a

$$g^{(0)} = \frac{a^{(0)}}{u^{(0)}} t^{(0)}$$

et de la même manière $g^{(n)} = \frac{a^{(n)}}{u^{(n)}} t^{(n)}$. On a montré que

$$\mathcal{O}_{E^\flat}/t \simeq \mathcal{O}_E/p$$

4 Théorème de presque-pureté

4.1 Untilt

4.1.1 $\theta_E \colon A_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_E) \to \mathcal{O}_E$

Une manière de relever canoniquement $\mathcal{O}_E^\flat$ c'est via

$$W(\mathcal{O}_E^\flat)$$

et on peut construire via le morphisme (par déf) naturel

$$w_n \colon W_n(\mathcal{O}_E) \to \mathcal{O}_E$$

le morphisme $\theta_E\colon W(\mathcal{O}_E^\flat) \to \mathcal{O}_E$ par commutatitivité de

$$\begin{tikzcd}
 & & W_n(\mathcal{O}_E) \arrow[r, "w_n"] \arrow[d] & \mathcal{O}_E \arrow[d] \\
W_n(\mathcal{O}_E^\flat) \arrow[r, "\varphi^{-n}"'] & W_n(\mathcal{O}_E^\flat) \arrow[r, "pr_0"'] & W_n(\mathcal{O}_E/p) \arrow[r, "\eta_n"'] & \mathcal{O}_E/p^{n+1}
\end{tikzcd}$$

Remarque 1. *Attention au φ^{-n} au début.*

À la fin on a

$$\theta_E(\sum_{n\geq 0} p^n[a_n]) = \sum_{n\geq 0} p^n a_n^{(0)}$$

Remarque 2. *Vérifier que $\theta_E \mod n$ coincide bien avec la composition ! (déjà réduire à droite modulo p^{n+1} se factorise bien par $p^{n+1}W(\mathcal{O}_E^\flat)$.*

en particulier si $x \in \ker(\theta_E)$ alors

$$|x_0^{(0)}|_E \leq |p|_E$$

et en fait si $|x_0^{(0)}|_E = |p|$ alors il engendre (!!) le noyau. La preuve est juste par approximation successive (voir Fontaine si jamais).

Remarque 3. *Via une pseudo-uniformisante du tilt, t, si $t^{(0)} = u^{(0)}.p$ alors $[t] - p[u]$ engendre le noyau. En particulier dans $\mathbb{C}_p$ on peut prendre $t^{(0)} = p$ et $t = (0, p^{1/p}, p^{1/p^2}, \ldots)$ d'où $[t] - p = \ker(\theta_{\mathbb{C}_p})$.*

4.1.2 Topologie de A_{inf}

On prend les vecteurs de Witt d'un anneau parfait de caractéristique p qui est parfait (mais pas d'un corps). Ducoup on obtient un anneau de valuation (mais pas forcément discrète) p-adiquement complet.

Dans l'idée la complétude provient de l'écriture $\sum_{i=1}^{+\infty} p^i[a_i]$ qui elle même provient de la perfection (je crois). La valuation est donnée par $i_0.v_p(a_{i_0})$ pour le premier indice non nul ?

4.1.3 Application

De

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \xi A_{\text{inf}}(\mathcal{O}_E) \arrow[r] \arrow[d, hook] & A_{\text{inf}}(\mathcal{O}_E) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}_E \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \xi W(\mathcal{O}_{\mathscr{F}}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & W(\mathcal{O}_{\mathscr{F}}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}_{\mathscr{F}^\sharp} \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \xi A_{\text{inf}}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_E}) \arrow[r] & A_{\text{inf}}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_E}) \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{C}_E} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

on construit $\mathscr{F}^\sharp$.

4.1.4 $\mathscr{F}^\sharp$ est perfectoide

Pour la perfection, ça découle de $(\xi, p) = ([\xi_0], p)$ et $|\xi_0| = |p| < 1$.

À voir : complétude et anneau de valuation.

4.1.5 $(\_)^{\sharp\flat} = Id$ et $(\_)^{\flat\sharp} = Id$

Vu que $|\xi_0|_{E^\flat} = |p|$ on a

$$\mathcal{O}_{\mathscr{F}^\sharp}/p\mathcal{O}_{\mathscr{F}^\sharp} = \mathcal{O}_{\mathscr{F}}/\xi_0\mathcal{O}_{\mathscr{F}}$$

puis

$$\varprojlim_{\varphi} \mathcal{O}_{\mathscr{F}}/\xi_0\mathcal{O}_{\mathscr{F}} = \mathcal{O}_{\mathscr{F}}$$

parce qu'on applique $(\_)^{perf}$ en remplaçant p par ξ_0. On obtient l'iso

$$(\_)^{perf} \simeq (\_/\xi_0)^{perf}$$

sauf qu'en caractéristique p l'iso change pas la structure d'anneau à gauche et la projection fournit l'iso voulu par unicité de la racine p-ème. En particulier on a montré que $\mathscr{F}^{\sharp\flat} = \mathscr{F}$.

4.2 $\mathbb{C}_E^\flat = \mathbb{C}_{E^\flat}$

On a $\mathbb{C}_{E^\flat} \subset \mathbb{C}_E^\flat$ d'où si $\mathscr{F} = \mathbb{C}_{E^\flat}$ on a $\mathscr{F}^\sharp$ qui est perfectoide et algébriquement clos (par d'autres sections) d'où contient $\mathbb{C}_E$ puis

$$\mathbb{C}_E^\flat \subset (\mathscr{F}^\sharp)^\flat = \mathscr{F}$$

d'où le résultat.

4.3 $G_{E^\flat} \simeq G_E$

On construit $G_E \to G_{E^\flat}$ via

$$G_E \curvearrowright \mathcal{O}_{\mathbb{C}_E}/p$$

d'où terme à terme

$$G_E \curvearrowright \mathcal{O}_{\mathbb{C}_E^\flat}$$

puis la flèche $i^\flat\colon G_E \to Aut(\mathbb{C}_E^\flat/E^\flat) = G_{E^\flat}$ en remarquant que par déf l'action fixe $E^\flat$.

Remarque 4. *À chaque fois on utilise* $\mathbb{C}_E^\flat = \mathbb{C}_{E^\flat}$*.*

À l'inverse,

$$\xi \in W(\mathcal{O}_E^\flat)$$

d'où est fixé par l'action induite $G_{E^\flat} \curvearrowright W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_{E^\flat}})$. Alors l'action passe au quotient

$$G_{E^\flat} \curvearrowright W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_{E^\flat}})/\xi W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_{E^\flat}}) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}_E}(!)$$

D'où on a $i^\sharp \colon G_{E^\flat} \to Aut(\mathbb{C}_E/E)$.

Remarque 5. *De la même manière que via* $(E^\flat)^\sharp = E$ *et* $\mathscr{F}^{\sharp^\flat} = \mathscr{F}$ *on peut voir que les flèches sont inverses l'une de l'autre !!*

Remarque 6. *IMPORTANT : C'est important de remarquer que les actions sont continues, pour l'équivalence de catégorie.*

4.4 Presque-pureté

Les preuves complètes consistent à utiliser Ax-Sen-Tate en caractéristique p et 0 et de la cohomologie (de base). Mais en gros $\mathscr{F}^\sharp = \mathbb{C}_E^{G_\mathscr{F}}$ et $F^\flat = \mathbb{C}_{E^\flat}^{G_F}$ d'où l'équivalence de catégorie.

Le papier de Colmez a une très jolie preuve de Ax-Sen-Tate en caractéristique 0.