Théorie de Hodge p-adique

Programme: 1. ramification 2. corps perfectoides, extensions profondément ramifiées, extensions arithmétiquement profinies. 3. corps des normes 4. représentation p-adiques des corps locaux.

Fontaine 1970-1980. Généralisation par Scholze.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Corps non-archimédien

1.2 Lemme de Krasner

Soit $\alpha \in \bar{K}$ et $f = \mu_\alpha$. Soit aussi $\alpha_1, ..., \alpha_n$ ses racines avec $\alpha = \alpha_1$. On note $d_\alpha := min_{i>1}\{|\alpha - \alpha_i|\}$. Supposons que pour $\beta \in \bar{K}$ on ait

$$|\beta - \alpha|_K < d_\alpha|$$

alors $K(\alpha) \subset K(\beta)$.

1.3 Plus petit corps algébriquement clos complet

Étant donné K non archimédien complet. On a

$$\hat{\bar{K}} =: \mathbb{C}_K$$

est complet et algébriquement clos. Grâce à Krasner.

1.4 Action de $G_K = Gal(\bar{K}/K)$

Avec la topologie discrète sur G_K. On a pour tout g, x, $|gx| = |x|$! On peut l'étendre à $\mathbb{C}_K$. Question :

$$\mathbb{C}_K^{G_K} = K?$$

Pas trivial mais oui. On le prouve plus tard. C'est un théorème d'Ax-Tate.

1.5 Corps locaux

Un corps local est un corps complet de valuation discrète et de corps résiduel fini.

Remarque 1. *On sera souvent dans ce cas. Mais les théorèmes seront souvent vrai si le corps résiduel est seulement parfait.*

Maintenant K est local et $|k_K| = q$.

Proposition 1. *Pour tout* $x \in k_K$ *il existe un unique* $[x]$ *t.q* $[x]^q = [x]$*. En plus la flèche,* $k_K^* \to K^*$ $x \mapsto [x]$ *est un iso de* $k_K^* \simeq \mu_{q-1}$.

1.5.1 Classification, vecteurs de Witt?

Soit K un corps local. Si $\Gamma(K) = 0$, alors K est une extension finie (à iso près) de $\mathbb{Q}_p$. Si $\Gamma(K) = p$ alors $K \simeq k_K((X))$ avec la valuation X-adique. Sachant que $k_K = \mathbb{F}_q$ ducoup.

1.6 Filtration

Étant donné K local, on note

$$U_K^{(i)} = \begin{cases} U_K, \ i = 0 \\ 1 + \pi_K^i \mathcal{O}_K, \ \geq 1 \end{cases}$$

C'est juste $U_K^{(i)} = \bar{B}(1, i)$. On a

$$U_K^{(i)} / U_K^{(i+1)} = \begin{cases} k_K^*, \ i = 0 \\ k_K^+ \ i \geq 0 \end{cases}$$

1.7 Vocabulaire dans le cas des corps locaux.

Si L/K est finie de corps locaux. On dit qu'elle est

- Non ramifiée si $e = 1$. (les corps résiduels sont finis!)
- Totalement ramifiée si $e = [L : K]$.
- Totalement modérément ramifiée si $e = [L : K]$ et $p \nmid e$.
- Totalement sauvagement ramifiée si $e = [L : K]$ et $e = p^k = [L : K]$.

Dans $K - \bar{K}$ on peut prendre K^{un} l'union/le compositum (?) des sous extensions non ramifiées. Maintenant,

$$Gal(K^{un}/K) \simeq Gal(\bar{k}_K/k_K) \simeq \hat{\mathbb{Z}}$$

est engendré par le Frobenius (ça c'est bizarre y me semble que c'est faux, neukirch class field theory première page mdr, bah c'était faux mdr). En particulier, on a $Frob_K \in Gal(K^{un}/K)$ t.q

$$Frob_K(x) = x^q \mod m_K$$

pour tout $x \in \mathcal{O}_L$ t.q L/K non ramifiée. On se restreint donc à $\bar{K} - K^{un}$ et on note $I_K = Gal(\bar{K}/K^{un})$.

Remarque 2. *Exercice, si $\Gamma K = 0$, alors y'a qu'un nb fini d'extensions de degré $\leq n$. En caractérstique positive c'est faux, faut ajouter séparable de degré $\leq n$ (apparemment c dur).*

1.8 La différente

Étant donné L/K finie séparable de corps locaux. On regarde la forme trace $L \times L \to K$. Donnée par $tr(x, y) = Tr_{L/K}(xy)$. On note

$$\mathcal{O}'_L = \{x \in L | tr(x, y) \in \mathcal{O}_K, \forall y \in \mathcal{O}_L\}$$

c'est un idéal fractionnaire de L qui contient $\mathcal{O}_L$. On note $\mathscr{D}_{L/K} = (\mathcal{O}'_L)^{-1}$, c'est un idéal de $\mathcal{O}_L$. Ca se définit bien dans des anneaux de Dedekind généraux. On a

$$\mathscr{D}_{L/K} = \mathscr{D}_{L/F}\mathscr{D}_{F/K}$$

et on déf/a

$$v_L(\mathscr{D}_{L/K}) = \min\{\ldots\}$$

et c'est simple vu que $\mathscr{D}_{L/K} = (\pi_L^m)$. On a

Proposition 2. *On a*

1. *Si $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\alpha]$ et $f = \mu_\alpha$. On a $\mathscr{D}_{L/K} = (f'(\alpha))$!*
2. *$\mathscr{D}_{L/K} = \mathcal{O}_L$ si et seulement si L/K est non ramifiée.*
3. *$v_L(\mathscr{D}_{L/K}) \geq e - 1$, $e = e(L/K)$.*
4. *$v_L(\mathscr{D}_{L/K}) = e - 1$ ssi $p \nmid e$.*

1.. Étant donné α_i les racs de f. Claim : $\sum \frac{f(X)}{(X-\alpha_i)} \frac{\alpha_i^r}{f'(\alpha_i)} = X^r$ pour $0 \leq r \leq n-1$ (c'est presque la dérivée). Pour le prouver, on peut évaluer en n points. On évalue en les α_i et c'est clair. Pour une racine fixée $\alpha = \alpha_1$, on a

$$f(X)/(X-\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i$$

avec $b_i \in \mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\alpha]$. Maintenant on remarque que les termes de $\sum \frac{f(X)}{(X-\alpha_i)} \frac{\alpha_i^r}{f'(\alpha_i)} = X^r$ sont conjugués sous l'action de $G_{L/K}$ d'où on peut calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} X^k Tr_{L/K}(b_k \alpha^r / f'(\alpha)) = X^r$$

puis

$$Tr_{L/K}(b_k \alpha^r / f'(\alpha)) = \begin{cases} 1, & k = r \\ 0, & sinon \end{cases}$$

en particulier, on a une base duale de $(\alpha^i)_{i=1,\ldots,n-1}$ pour la trace : $(b_k/f'(\alpha))_k$. Deuxième claim : $(b_k)_k$ engendre $\mathcal{O}_L$ sur $\mathcal{O}_K$. On peut le faire en comparant les coefficients de

$$f(X) = (X-\alpha)(\sum b_i X^i)$$

et par induction(?). Du claim on déduit que $\mathcal{O}_L' = 1/f'(\alpha)\mathcal{O}_L$ puis le résultat. $\square$

2.. On montre non ramifiée implique $\mathscr{D}_{L/K} = \mathcal{O}_L$. On peut prendre α tq $k_K(\bar{\alpha}) = k_L$. Avec $f = \mu_\alpha$. On a $\bar{f}'(\bar{\alpha}) \neq 0$, d'où $f'(\alpha) \in \mathcal{O}_L^\times$ et le résultat. L'inverse est clair, on prouve que $[L:K] = f$. $\square$

3.. On a $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\pi_L]$. Et $\mu_{\pi_L} = f$ Eisenstein. D'où $f'(\pi_L) = \sum (e-i)\pi_L^{e-i-1}$ et $v_L(e\pi_L^{e-1}) = v_L(e) + (e-1)$ plus $v_L(a_i) \geq e$ d'où $v_L(f'(\pi_L)) \geq e-1$. $\square$

4.. Si $p \nmid e$ on a $v_L(e\pi_L^{e-1}) = e-1 < v_L(a_i)$. Si $p \mid e$ on a $v_L(f'(\pi_L)) \geq e$. $\square$

5. (?). Si $K - L_0 - L$ est tq $L_0 = K^{un}$ alors $\mathscr{D}_{L/K} = \mathscr{D}_{L/L_0}\mathscr{D}_{L_0/K} = \mathscr{D}_{L/L_0}$. Alors $\mathscr{D}_{L/K}\mathcal{O}_L \equiv L = L_0 \equiv L/K$ est non ramifiée. $\square$

1.9 Filtration de ramification

On regarde L/K galoisienne (G) de corps locaux. Alors pour $i \geq -1$, $G_i = \{g \in G | \forall x \in \mathcal{O}_L,\ v_L(g(x) - x) \geq i + 1\}$. On voit facilement que c'est des sous groupes distingués de G. On a en plus $G_{-1} = G$ et $G_0 = I_K$. Puis pour $i \geq 0$, on a

$$G_i = \{g \in G | v_L((g(\pi_L)/\pi_L) - 1) \geq i\}$$

(ca marche psq $i \geq 0$) on écrit, $\sum a_i \pi_L^i = x \in \mathcal{O}_L$ avec $a_i \in \mathcal{O}_{L_0}$ ($L - L_0$ tot ram!) d'où $g(a_j) = a_j$ pour $g \in G_i$ vu que $G_i \subset I_K$. Ensuite c'est comme d'hab. Maintenant on a

$$G_i \to U_L^{(i)}/U_L^{(i+1)}$$

via $g \mapsto g(\pi_L)/\pi_L$ qui induit un morphisme injectif G_i/G_{i+1}. En particulier

$$G_i/G_{i+1} \text{ est abélien.}$$

on en déduit que les extensions galoisiennes de corps locaux sont résolubles.

Proposition 3. $v_L(\mathscr{D}_{L/K}) = \sum_{i=0}^{\infty}(|G_i| - 1)$.

Démonstration. On prend $\alpha \in \mathcal{O}_L$ tq $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\alpha]$ et $f = \mu_\alpha$. On déf $i_G(g) = v_L(g\alpha - \alpha)$. On a

$$i_G(g) = i + 1 \equiv g \in G_i$$

puis

$$\begin{aligned} v_L(\mathscr{D}_{L/K}) = v_L(f'(\alpha)) &= \sum_{i=2}^{n} v_L(\alpha - \alpha_i) \\ &= \sum_{g \in G - id} v_L(\alpha - g\alpha) \\ &= \sum_{g \in G - id} i_G(g) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(|G_i| - |G_{i+1}|)(i + 1) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(|G_i| - 1) \end{aligned}$$

□