

Courbes géométriquement intègres propres  
lisses?



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Courbes intègres lisses propres et corps de fonctions.</b>	<b>5</b>
1.1	Courbe associée à un corps. . . . .	5
1.2	Étendre des morphismes . . . . .	5
1.2.1	Candidat pour l'extension . . . . .	6
1.2.2	Extension . . . . .	6
1.2.3	Explication résumée . . . . .	7
1.3	L'équivalence de catégorie . . . . .	7
1.3.1	Isomorphismes de courbes intègres propres lisses . . . . .	7
1.3.2	Morphismes de courbes intègres propres lisses . . . . .	8
1.4	Les courbes propres intègres propres lisses sont projectives. . . . .	8
<b>2</b>	<b>Ramification</b>	<b>9</b>
2.1	. . . . .	9
<b>3</b>	<b>Questions de définitions</b>	<b>11</b>
3.1	$f \in \mathcal{O}_C(C - \text{Supp}_\infty(f))$ . . . . .	11
3.1.1	$D(1/f)?$ . . . . .	11
3.1.2	$f \in \mathcal{O}_C(D(1/f))$ . . . . .	11
3.1.3	Définition . . . . .	12

...

On prends la convention qu'une courbe est une variété séparée de dimension pure 1 (ses composantes sont de dimension 1).

## *TABLE DES MATIÈRES*

# Chapitre 1

## Courbes intègres lisses propres et corps de fonctions.

Le but c'est de montrer l'équivalence de catégorie entre

1. Corps de fonctions de degré de transcendance 1,
2. Courbes intègres lisses propres (munies de morphismes non constants).

### 1.1 Courbe associée à un corps.

Étant donné un corps  $K$  :

1. On prends  $U$  intègre affine t.q  $k(U) = K$ .
2. On prends une clôture projective  $\bar{U}$ .
3. On normalise  $\pi: X \rightarrow \bar{U}$ .

Alors  $X$  est lisse car normale, birationnelle à  $U$  donc  $K = k(U) = k(X)$  et propre car  $\pi$  est fini et  $\bar{U}$  est propre.

### 1.2 Étendre des morphismes

Étant donné  $C$  une courbe lisse. On peut étendre tout morphisme  $C \supset U \rightarrow Y$  avec  $U$  dense en  $C \rightarrow Y$  dès que  $Y$  est propre! C'est unique puisque  $Y$  est séparée.

### 1.2.1 Candidat pour l'extension

On peut se ramener au cas  $C$  affine irréductible et  $U = C - \{p\}$ . Faut trouver un candidat pour le morphisme étendu :

1. De  $f: U \rightarrow Y$  on identifie

$$\Gamma_f \subset U \times Y$$

et  $U$ .

2. L'idée est que en notant

$$Z = \overline{\Gamma_f} \subset C \times Y$$

alors  $Z \rightarrow C$  est surjective car  $C \times Y$  est fermée (**hypothèse de Y propre**) et  $U \subset \text{im}(Z \rightarrow C)$ .

3. Le candidat est maintenant

$$(p_1|_Z)^{-1} \circ p_2: C \rightarrow Z \rightarrow Y.$$

Ce qu'on montre c'est que  $p_1: C \times Y \supset Z \rightarrow C$  est un isomorphisme.

### 1.2.2 Extension

À noter  $p_1|_Z = g$  est un morphisme fermé car  $Y$  est propre et l'image contient  $U$  donc est surjective. C'est aussi birationnel car un isomorphisme sur  $U$ . Et là donc on construit un morphisme autour de  $z \in g^{-1}p$ .

1. On prends  $z \in W$  ouvert affine. On obtient  $A(C) \hookrightarrow A(W) \hookrightarrow k(C)$ .
2. À noter  $A(W)$  est de type fini sur  $k$ .
3. Maintenant,  $C$  est lisse en  $p$  donc on peut réduire  $C$  en  $V$  avec  $p \in V = D(f)$  tel que  $\mathfrak{m}_p = (t)$ . (Nakayama donne  $f \in 1 + \mathfrak{m}_p$ .)
4. Les générateurs  $b_i$  de  $A(W)$  vérifient  $b_i(z) = t^{n_i}(z)a_i/u_i(z)$  avec  $a_i, u_i \in A(C)$ . Via

$$u_i(z)b_i(z) = t^{n_i}(z)a_i(z)$$

ça force  $n_i \geq 0$  car  $v_p(u_i) = v_p(a_i) = 0$  et  $b_i$  est régulière. (pas oublier l'identification de  $A(C)$  à son image,  $u_i(z) = u_i(p)$ .)

*Courbes intègres lisses propres et corps de fonctions.*

5. Maintenant pas finitude on obtient

$$A(C) \hookrightarrow A(W) \hookrightarrow A(C)_{u_0}$$

d'où on obtient

$$g^{-1}D(u_0) \cap W \rightarrow D(u_0)$$

est un isomorphisme qui coïncide avec  $A(C) \rightarrow A(W)$  sur les intersections.

6. Enfin, il est défini en  $p!$

### 1.2.3 Explication résumée

En points clés :

1.  $W$  et  $C$  sont birationnelles : Ça force le sens de  $b$  s'écrit  $t^n a/u$  localement, car  $A(W) \hookrightarrow \text{Frac}(A(C))$ .
2.  $b$  est régulière d'où  $b \in A(C)_u$ .

Je sais pas si l'écrire via l'uniformisante c'est pas overkill? C'est pour sûr pour faire apparaître la régularité en  $P$ .

Maintenant

1. Ce "localement" est commun à tout les générateurs via  $\mathfrak{m}_P = (t)$  sur un ouvert.
2. On obtient  $A(W)_{u_0} \simeq A(C)_{u_0}$  via le morphisme induit  $A(W) \hookrightarrow k(C)$ .

**Conclusion 1.** On sait étendre les morphismes  $C - \{p\} \rightarrow Y$  si  $C$  est lisse et  $Y$  est propre.

## 1.3 L'équivalence de catégorie

### 1.3.1 Isomorphismes de courbes intègres propres lisses

On sait qu'un morphisme birationnel  $X \supset U \rightarrow V \subset Y$  s'étend en  $X \rightarrow Y$  un isomorphisme.

*1.4 Les courbes propres intègres propres lisses sont projectives.*

### **1.3.2 Morphismes de courbes intègres propres lisses**

Un tel morphisme est soit constant soit fini surjectif !

1. La surjectivité est claire.
2. La finitude c'est juste que si

$$\pi: X' \rightarrow Y$$

est la normalisation de  $Y$  dans  $k(X)$  alors  $X \simeq X'$  par l'identité de  $k(X) \simeq k(X')$ . Alors  $X \rightarrow Y$  coïncide avec  $X \rightarrow X' \rightarrow Y$  est fini.

## **1.4 Les courbes propres intègres propres lisses sont projectives.**

Comme le résultat de la section!



## Chapitre 2

# Ramification

### 2.1



# Chapitre 3

## Questions de définitions

### 3.1 $f \in \mathcal{O}_C(C - \text{Supp}_\infty(f))$

La question est non triviale, au sens des définitions. Ça revient à dire que  $D(f) \cup D(1/f) = C$ . Le but c'est de dire que

1.  $f \in \mathcal{O}_C(D(1/f))$ .
2. Pour tout  $P \in C$ ,  $P \in D(f)$  ou  $P \in D(1/f)$  d'où on regarde en  $P$ ,  $(f, D(1/f)) = (u_p t_p, V_p)$  et inversement.

Bon bah faut faire deux choses :

1. Dire ce que c'est que  $D(1/f), D(f)$ .
2. Montrer que  $f \in \mathcal{O}_C(D(1/f))$ .

#### 3.1.1 $D(1/f)?$

On a deux manières de le voir, en fait la bonne et qui me "déçoit" un peu c'est de recouvrir par des affines. Et là on sait comment étendre  $1/f$  au maximum. L'autre c'est par zorn et par exemple :

$$f \cdot 1/f = 1 \in k(X)$$

sauf qu'à droite ça s'étend partout donc à gauche aussi puis  $D(f) \cup D(1/f) = X$ .

#### 3.1.2 $f \in \mathcal{O}_C(D(1/f))$

En fait c'est un peu con quand on y pense. Faut vraiment juste recouvrir par des affines et étendre au maximum sur un recouvrement. C'est clair quand  $C$  est affine!

$$3.1 \ f \in \mathcal{O}_C(C - \text{Supp}_\infty(f))$$

### 3.1.3 Définition

Maintenant pour l'étendre :

1.  $C - \text{Supp}_\infty(f)$  est fini.
2. Pour chaque point  $p \in C - \text{Supp}_\infty(f) = D(1/f)$ , on a

$$(t_p u, U_p) = (f, D(1/f))$$

d'où  $f(p) := t_p(p)u_p(p)$  est défini, si t'es toujours pas convaincu, dans une carte affine c'est évident que  $t_p u$  a une valeur en  $p$ . Et pour être vraiment rigoureux on voit qu'on peut relever ces trucs locaux partout et recoller !

Un petit détail, ducoup si c'est pas des fonctions, faut utiliser cette histoire de rigueur.

**Note 1.** *Sur un schéma, tout se passe comme la version recollement.*