Anneaux de Dedekind

Chapitre 1

Manipuler

Donc là les outils comme d'hab c'est les extensions entières et les clôtures intégrales. La première on montre comme transmettre la dimension, la deuxième transmettre le fait d'être intégralement clos. Pour la noethérianité, ici on manipule des localisations pour la cas semi-local (corollaire 2.26) et des DVRS. La preuve d'extensions de valuations par les idéaux (Prop 2.28). (Le cas séparable c'est (théorème 2.20)

1.0.1 Extension d'anneaux de Dedekind, cas semi-local

Il existe k t.q. $L^{p^k} \subset K$ puis on déf

$$v_L(\theta) := v_K(\theta^{p^k})/p^k$$

tout marche bien.

1.0.2 Extensions de valuation par les idéaux

On regarde $\tilde{\mathcal{O}}_K$ de Dedekind, et d'un idéal on obtient un DVR, d'une valuation un DVR.

Chapitre 2

Extensions d'anneaux de Dedekind

2.1 Annexe : Extensions entières où transmettre le spectre

J'en parle juste brièvement ici, plus dans le récap d'algèbre. Mais quand $A \to B$ est fini injectif. La dimension est préservée et

$$\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$$

est surjective avec des fibres finies.

2.2 Le cadre général

Comme on part d'un anneau de Dedekind $\mathcal{O}_K$. La première question c'est Quand est-ce que

$$\mathcal{O}_K - \tilde{\mathcal{O}}_K$$

est une extension d'anneaux de Dedekind. La question se réduit systématiquement à

$$\text{Est-ce que } \tilde{\mathcal{O}}_K \text{ est noethérien ?}$$

2.3 Se ramener au cadre

L'anneau de Dedekind est un anneau noethérien de dimension 1. Autrement dit, on est sur un schéma affine de dimension 1 :

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$$

Mais surtout, tout ses localisés à des premiers sont des anneaux de valuation discrète ! Ça ça m'intéresse pour les raisons suivantes :

1. On obtient un local-global en localisant.
2. On peut compléter et obtenir le cadre des corps locaux.

en particulier on a le pont de, si

$$K - L$$

est une extension de corps finis, on peut en faire une extension de corps valués via le processus suivant :

1. D'un premier de $\mathcal{O}_K$ on obtient $(\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{m}_K}$.
2. On obtient aussi un corps valué $(K, |.|_{\mathfrak{m}_K})$.
3. De $\mathfrak{m}_K \tilde{\mathcal{O}}_K = \prod \mathfrak{m}_i^{e_i}$ on obtient des premiers $\mathfrak{m}_i$.
4. D'un $\mathfrak{m}_i | \mathfrak{m}_K$ on obtient une extension de valeur absolue $|.|_{\mathfrak{m}_i}$ et une extension de DVR
$$\mathcal{O}_K - (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i}.$$

Géometriquement c'est l'étude de la fibre en $\mathfrak{m}_K \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Maintenant, on cherche a obtenir le e tel que $\mathfrak{m}_K = \mathfrak{m}_i^e$. On obtient la cardinalité de la fibre et l'indice de ramification des uniformisantes.

En fait maintenant le point puissant, c'est le point où on complète K en $\mathfrak{m}_K$ et L en $\mathfrak{m}_i$. Alors

$$\widehat{K} - \widehat{L}$$

a dimension $f_i e_i$.

Remarque 1. *Un point qui semble flou là c'est : mais si je complète K en $\mathfrak{m}_K$, $\widehat{L} = L.\widehat{K}$ donc il est où le choix de compléter en $\mathfrak{m}_i$ pour L ? On dirait que le choix est immédiat et les idéaux se contractent en un. En fait écrire*

$$L.\widehat{K}$$

équivaut à faire vivre L et $\widehat{K}$ au même endroit. D'où à plonger L dans une clôture de K, K^c et la regarder dans $(\widehat{K})^c$. Sinon on pourrait regarder

$$L \otimes_K \widehat{K}$$

et là son spectre est non trivial ! Choisir

$$L \otimes_K \widehat{K} \to (\widehat{K})^c$$

équivaut à choisir un idéal maximal. Voir notes.

On peut maintenant utiliser la théorie des corps complets et Hensel !

2.4 Les points omis

J'ai direct dit que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ était de Dedekind. En fait si L/K est finie c'est toujours vrai.

2.5 Quand est-ce que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est noethérien ?

Comme d'hab on prends

$$L/K \text{ finie avec } K = Frac(\mathcal{O}_K) \text{ un anneau de valuation discrète}$$

Ensuite on regarde sa fermeture intégrale dans L, $\tilde{\mathcal{O}}_K$. On veut une extension de DVR, pour ça y faut que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ soit de Dedekind. Le problème c'est toujours de montrer que c'est noethérien.

2.5.1 Cas séparable

Étant donnée L/K finie séparable, on a tout ce qui nous faut. On a un discriminant non nul bien défini, d'où si $L = \oplus K e_i$ alors

$$(Tr(e_i e_j))_{i,j}$$

est non dégénérée. Puis on a une base duale à e_i, i.e. e_i^* telle que $Tr(e_i^* e_j) = \delta_{ij}$. Avec ça on peut

1. à partir de e_i une base de L/K dans $\tilde{\mathcal{O}}_K$, obtenir sa base duale pour la trace e_i^*.
2. montrer que tout élément entier $b = \sum \lambda_i e_i^*$ vérifie $\lambda_i \in \mathcal{O}_K$, via $Tr(be_i) = \lambda_i$!
3. D'où $\mathcal{O}_K$ est un sous $\mathcal{O}_K$-module d'un module de type fini donc noethérien.

2.5.2 Cas semi-local

On sépare en une extension séparable et une purement inséparable. Ensuite d'une extension purement inséparable d'une valuation discrète v, on obtient directement une valuation discrète w.