CW-complexes

2024-2025

Table des matières

Chapitre 1

CW-complexes

1.1 Construction relative

On recolle des n-cellules selon $X^{(n-1)}$ en fait. Autrement dit $X = \cup X^{(n)}$ et

$$\sqcup_\alpha e_{\alpha,n} \bigsqcup X^{(n-1)} \simeq X^{(n)}$$

1.1.1 Vocabulaire

Étant donnés $A \to (f \colon X \to Y)$ on note

$$Z := X \cup_f Y := (X \sqcup Y)/ < x \sim f(x), x \in A >$$

muni de la topologie quotient. Si A est fermé (ce qui nous intéresse) alors $Y \hookrightarrow \bar{Y}$ est un homéo sur un fermé. Vu que $\pi^{-1}Y = Y \sqcup A$. En tant qu'ensemble si on regarde $\bar{x} \in Z$, on a

$$\pi^{-1}\bar{x} = \begin{cases} \{x\} \ si \ x \in (X - A) \sqcup (Y - f(A)) \\ f^{-1}f(x) \sqcup \{f(x)\} \ sinon \end{cases}$$

Ducoup la séparation dépend de plusieurs facteurs, je le fais pour les recollements.

1.1.2 Décomposition cellulaire relative

Ducoup, e_α c'est la notation pour une n-cellule (B^n) (j'identifie $\mathring{B}^n$ et son image dans X). et $\partial e_\alpha = \partial B^n = S^{n-1}$. Pas oublier que c'est compact.

Maintenant étant donnés $g_\alpha \colon \partial e_\alpha \to Y$. On a $\sqcup g_\alpha =: g \colon \sqcup \partial e_\alpha \to Y$ et on peut recoller $(\sqcup e_\alpha) \cup_g Y) = C$. Si $X \simeq C$ alors C est une décomposition cellulaire de X relative à Y.

Remarque 1. *On peut recoller successivement,* $(e_1 \sqcup e_2) \cup_g Y = e_1 \cup_{g_1} (e_2 \cup_{g_2} Y)$*. Ça doit se prouver directement au niveau des relations d'équivalences.*

1.1.3 Détail

Les cellules sont compactes, si Y est séparé, $im(g)$ est compact donc fermé dans Y. Ensuite, est-ce que $X := \sqcup_\alpha e_\alpha \cup_g Y$ est séparé ? Faut séparer les trois types de points :

1. Quand $x \in X - Y$, i.e. $x \in \mathring{e}_\alpha$ c'est toujours facile vu que on peut prendre $Y \cup \cup \partial e_\alpha \times]1-\epsilon, 1]$.

2. Quand $x \in X \cap Y$ et $y \in X \cap Y$, si y ont même image y sont égaux, donc on sépare les images dans Y.

3. Quand $x \in X \cap Y$ et $y \in Y$, on sépare $f(x)$ et y.

1.1.4 Se ramener au bouquet

Si on quotiente C par Y, on a $\sqcup e_\alpha / \sqcup \partial e_\alpha$. Si les e_α sont tous des n-cellules, on obtient un bouquet de sphères ! Ou au moins un bouquet de cellules. Ensuite, si $X = C$ alors $X - Y$ est une union disjointe de boules ouvertes.

1.2 Construction par le squelette

Maintenant, on dit que X est obtenu par recollement de n-sphères sur Y si on a une famille (e_α) de dimension n (potentiellement vide !) etc etc..

Maintenant X est un CW-complexe si $X = \cup_n X^{(n)}$ avec la topologie faible et $X^{(n)}$ est obtenu par recollement de n-cellules sur $X^{(n-1)}$. Un sous-CW-complexe c'est un Y tel que sa décomposition est donnée par $Y^{(n)} = Y \cap X^{(n)}$.

Remarque 2. *Ducoup* $X^{(0)}$ *c'est juste des points. Et on peut avoir* $X^{(i)} = X^{(i-1)}$ *en recollant rien. En particulier on peut obtenir la sphère via* $X^{(0)} = X^{(1)} = \{*\}$ *et* $X^{(2)} = B^2 \cup_{\{*\}} X^{(1)}$.

1.2.1 Se ramener au bouquet, partie 2

Si on quotiente $X^{(n)}$ par X^{n-1} on obtient un bouquet de n-sphères! J'imagine que ça écrase tout ce qu'y a au dessus de $X^{(n)}$? Non du tout en fait.

1.2.2 Séparation et locale contractilité.

Si c'est de dimension finie, $X^{(0)}$ est séparé donc par récurrence $X^{(n)}$ aussi pour tout n. Pour généraliser, d'abord la locale contractilité. On veut m.q que tout point x et tout voisinage V de x, il existe $x \in V_\infty \subset V$ contractile. Y suffit d'avoir $x \in V_n \subset X^{(n)} \cap V$ contractile via h_n et $V_{n+1} \cap X^{(n)} = V_n$ pareil $h_{n+1}|_{X^{(n)}\times[0,1]} = h_n$. En fait y'a un n_0 et une n_0-cellule e telle que $x \in \mathring{e}$ et on peut prendre V_{n_0} une petite boule autour dans V qui est clairement contractile. Ensuite si on a construit jusqu'à n, pour chaque $n+1$-cellule on regarde $f_i \colon e_i \to X$ et on déf

$$V_{n+1} = V_n \cup \bigcup_i \partial f_i^{-1}(V_n) \times [0 \times \epsilon_i]$$

par la topologie faible V_{n+1} est ouvert et on peut déf $h_{n+1}(f_i(x,t),s) := f_i(h_n(\partial f_i(x), st))$ dans l'intérieur des cellules c'est malin et $h_{n+1} = h_n$ dans $X^{(n)}$.

Remarque 3. *Le seul détail bizarre c'est que $f_i^{-1}V$ contient pas forcément $\partial f_i^{-1}V_n \times [0, \epsilon_i[$ si ? J'imagine qu'on peut réduire V_n pour que ce soit ok ?*

Maintenant h_∞ et V_∞ se définissent bien. Et pour la séparation, on peut séparer dans $X^{(n)}$ d'abord puis prendre des V_∞, par construction y seront disjoints.

1.2.3 Compacité des CW-complexes finis

Par déf on recolle qu'un nombre fini de cellules à chaque étapes. En particulier, $X = X^{(n)}$ est l'image de $\sqcup e_{\alpha,n} \sqcup X^{(n-1)}$ qui est compact si $X^{(n-1)}$ est compact ce qui est le cas par récurrence et l'hypothèse.

1.3 Groupes fondamentaux de CW-complexes

Là c'est fun, si $(K_i)_i$ est une famille de sous CW-complexes stable par union de X qui le recouvre alors $\pi_1(X,x) = \varinjlim \pi_1(K_i,x)$ pour le diagramme des inclusions. L'idée c'est qu'on a clairement une flèche canonique $\varinjlim \pi_1(K_i,x) \to \pi_1(X,x)$. Maintenant un petit résultat : un lacet de $\pi_1(X,x)$ est un CW-complexe fini et est donc contenu dans un K_i vu que c'est stable par union et recouvrant. D'où la flèche est surjective! Ensuite, $X \times [0,1]$ est un CW-complexe et les $K_i \times [0,1]$ le recouvrent. En particulier, toute homotopie est d'image un CW-complexe fini donc contenu dans un $K_i \times [0,1]$ d'où la flèche est injective lol. Trop beau.

1.3.1 Compacts et sous CW-complexes finis.

Étant donné un compact $K \subset X$ et X un CW-complexe. K ne croise qu'un nombre fini de cellules de K et est contenu dans un nombre fini de cellules. L'idée est simple, déjà $K \subset X^{(n)}$ pour un n, j'arrive pas à le prouver mdr Benoist a triché :sob:. J'aimerai dire que $K \subset \sqcup X^{(n+1)} - X^{(n)}$ mais c'est pas des ouverts. Et $K \subset \cup_n X - X^{(n)}$ on peut pas en dire grand chose, en plus c'est pas vrai faut prendre $n = -1$. Bon sinon si $K \subset X^{(n+1)}$, $K \cap X^{(n)}$ est compact donc récurrence et si K croise une infinité de $n+1$-cellules on peut facilement trouver un recouvrement ouvert (!) infini de K sans sous-recouvrement.

Remarque 4. *Le twist à la fin c'est que les cellules maximales sont bien ouvertes, alors que si X est pas fini les cellules sont pas forcément ouvertes.*

1.3.2 Corollaire

On a $\pi_1(X, x) = \varinjlim_i \pi_1(X^{(i)}, x)$ (!).

1.4 Van Kampen sur les CW-complexes

Donc si $K_1 \cup K_2 = X$ pour deux sous CW-complexes connexes tels que $K_0 = K_1 \cap K_2$ est connexe alors

$$\pi_1(K_1, x) *_{\pi_1(K_0, x)} \pi_1(K_2, x)$$

1.4.1 Lemme

Étant donné deux sous CW-complexes K, K' de X un CW-complexe, on peut trouver $V(K), V(K')$ des voisinages respectifs qui se contractent par déformation fortes sur K, K' respectivements et tels que $V(K \cap K') = V(K) \cap V(K')$. Pour ça on peut construire des voisinages de proche en proche comme avant, ça se fait très bien. Faut juste bien remarquer que $K \cap \sqcup_{\alpha \in A} e_\alpha = \sqcup_{\alpha \in B} e_\alpha$ avec $B \subset A$. Ducoup, suffit d'ajouter $\partial e_\alpha \times [0, \epsilon[$ pour tout $\alpha \in A - B$.

1.4.2 Preuve

On a $\pi_1(K_i, x) = \pi_1(V(K_i), x)$ et $V(K_1 \cap K_2) = V(K_1) \cap V(K_2)$ comme c'est rétractions par déformation fortes ça reste connexe!

1.5 Remarques sur la topologie

1.5.1 Union disjointe de cellules ouvertes

J'avais du mal à remarquer, X est l'union disjointe (!) de ses cellules ouvertes, disjointe parce que on recolle les $n+1$-cellules selon leur bord, en particulier l'intérieur de e_α^n croise ∂e_α^{n+1} mais pas $\mathring{e}_\alpha^{n+1}$. En particulier si $x \in X^{(n)}$ soit $x \in \mathring{e}_\alpha^n$ soit $x \in X^{(n-1)}$ etc.. de manière disjointe. Sauf les 0-cellules, ou là y'a pas d'intérieur.

Remarque 5. *Mais Hatcher aussi dit que X est l'union des cellules ouvertes. J'ai l'impression que c'est juste que, AH, $\{*\}$ est ouvert dans lui même donc $\mathring{e}_\alpha^0 = e_\alpha^0$. C'est pour ça :E.*

1.5.2 Compacts et sous-CW-complexes

Croiser un nombre fini de cellules ouvertes

Si $K \subset X$ alors $K \subset X^{(n)}$. En montrant d'abord que K croise qu'un nombre fini de cellules ouvertes. Sinon on prend $(x_i) \in K^{\mathbb{N}}$ tels que $x_i \in \mathring{e}_{\alpha_i}$ et $\mathring{e}_{\alpha_i} \cap \mathring{e}_{\alpha_j} = \emptyset$. EN particulier, $S = \{x_i\}_i$ est compact car fermé dans K. Pour voir que c'est fermé, on fait par récurrence pour dire que $S \cap X^{(n-1)}$ est fermé puis en n, on regarde la topologie sur $(\sqcup e_\alpha^n \bigsqcup X^{(n-1)})/\sim$, comme S est dans l'union disjointe de gauche. Et que dans la topologie de l'union disjointe, l'union disjointe de points est fermée? Oui c'est con en fait, donc les points sont strictements dans $\sqcup \mathring{e}_\alpha$ et y'a un point par cellule. Maintenant $(\sqcup \mathring{e}_\alpha) - S = \sqcup \overset{\circ}{(e_\alpha - \{*\})}$ qui est une union d'ouverts. D'où S est fermé $X^{(n)}$ pour tout n et dans K donc compact. Maintenant sa topologie est discrète parce que chaque sous-ensemble de S est fermé dans $X^{(n)}$. Donc S est fini (!!).

$K \subset X \implies K \subset X^{(n)}$

Maintenant si on note e la cellule de plus grande dimension (n) bah $e \subset X^{(n)}$ d'où $K \subset X^{(n)}$.

$K \subset X$ implique K contenu dans un CW-complexe fini

Y suffit de monter que un nombre fini de cellules est contenu dans un sous-CW-complex fini. Par induction, si e une cellule de dimension n alors ∂e est dans un sous-CW-complexe fini de dimension $n-1$, A. Maintenant $e \subset A \cup e$!

Chapitre 2

Graphes

En fait on aura que

$$\pi_1(X,x) = \pi_1(X^{(2)},x) = N((r_\alpha)_\alpha)\backslash\pi_1(X^{(1)},x)$$

avec $x \in X^{(0)}$ (on suppose X connexe) et ou on note $\partial g_\alpha \colon \partial e_\alpha \to X^{(1)}$ chaque recollement de 2-cellules et $r_\alpha = [cg_\alpha\bar{c}]$ la classe de $cg_\alpha\bar{c}$ dans $\pi_1(X^{(1)},x)$ pour c un chemin entre x et $g_\alpha(1)$. Ensuite $N(\ldots)$ est le normalisateur. Parce que r_α est défini qu'à conjugaison et inverse près (voir dans homotopie 1 pourquoi).

2.1 Définitions

Un graphe topologique c'est un CW-complexe de dimension ≤ 1. Un cycle c'est un plongement de S^1 (pas exactement un lacet). Un chemin c'est un chemin topologique.

2.2 Groupe fondamental d'un graphe

2.2.1 Limites de groupes libres

Si on prendre $(S_i)_i$ une famille de partie de S un ensemble stable par union telles que $S = \cup S_i$. Alors

$$\varinjlim_i L(S_i) = L(\sqcup S_i)/ < s_i s_j^{-1},\ s_i, s_j \in S_i \cap S_j >$$

d'où la flèche canonique $\varinjlim_i L(S_i) \to L(S)$ est injective. La surjectivité c'est que $\cup S_i = S$.

2.2.2 Arbres

Y'a quelques conditions équivalentes à être un arbre X :

1. Pas de plongements de S^1.

2. $X - \mathring{e}$ est pas connexe pour toute 1-cellule e.

3. X est simplement connexe.

4. X est contractile.

La connexité implique la connexité par arc ici. Si $X - \mathring{e}$ est connexe on prend un chemin injectif entre les extremités de e. Ça fait un plongement de S^1. Son existence on peut le faire de proche en proche, le chemin est de taille finie par définition, et entre deux 0-cellules y'a un chemin injectif, cqfd. À l'inverse, si y'a un plongement de S^1 bah $S^1 - \mathring{e}$ est connexe. Pour 2. implique 3., si c'est pas simplement connexe on peut trouver un lacet injectif. 3. implique 4. c'est parce que de dimension ≤ 1. 4. implique 3. c'est vrai en général.

2.2.3 Groupe fondamental d'un graphe

On peut utiliser la famille des sous-graphes finis et 2.2.1 pour se ramener à un graphe fini. Ensuite par la dernière sous-section soit X est un arbre donc contractile et on est bon soit X contient $S^1 = C$. Puis $X = X - \mathring{e} \cup C$ d'intersections $C - \mathring{e}$ connexe par arc. D'où

$$\pi_1(X, x) = \pi_1(X - \mathring{e}, x) * \mathbb{Z}$$

Note 1. *Wouah.*

2.2.4 $c(X) = 1 - \chi(X)$, $rk(\pi_1(X, x)) = c(X)$

La connectivité de X : plus grand n tel que $X - \cup\mathring{e}$ est connexe. Et $\chi(X) = n_0 - n_1$ le nombre de sommets moins le nombre d'arrête (caractéristique d'Euler). En enlevant une arrête, si c'est plus connexe alors on a deux sous-graphes et $c(X) = c(X_1) + c(X_2)$. En plus $n_{01} + n_{02} = n_0$ et $n_{11} + n_{12} = n_1 - 1$. Si $c(X_i) = 0$ alors X_i est un point d'où $n_{11} = n_1 - 1$ et $n_{01} = n_0 - 1$. Et on peut faire une double récurrence sur le nombre d'arrête et de sommets. Sinon on fait une récurrence sur la connectivité?

2.3 Application des graphes aux groupes fondamentaux de CW-complexes

Donc maintenant on peut prouver que $\pi_1(X,x) = \pi_1(X^{(2)},x)$ et $\pi_1(X,x) = N(r_\alpha,\alpha)\backslash\pi_1(X^{(1)},x)$.

2.4 Applications en théorie des groupes

2.4.1 Sous groupes des groupes libres

Étant donné un groupe libre on a un graphe X. Et un sous-groupe est donné par un revêtement $B \to X$. Sauf qu'un revêtement d'un graphe est un graphe et $\pi_1(B,b)$ est le sous-groupe.