Groupes réductifs

Table des matières

...

Soit k algébriquement clos. Un groupe algébrique sur k est une k-variété avec une structure de groupe telle que $m\colon G \times G \to G$ et $i\colon G \to G$ sont algébriques.

Remarque 1 (Cartier)**.** *Les groupes algébriques en caractéristique* 0 *sont réduits. (si on prends des variétés pas forcément réduites)*

Remarque 2. *La même définition avec des variétés complexes donne les groupes de Lie complexe.*

Exemples 0.0.1. $\mathbb{G}_a$ le groupe additif sur $\mathbb{A}^1_k$ et $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^1_k - 0$. C'est les seuls connexes de dimension 1.

Les sous-groupes fermés sont canoniquements des groupes algébriques pour $n \geq 1$.

Exemples 0.0.2. $SL_n/K \subset GL_n/k \subset M_n/k$. Et aussi $T_n \subset GL_n$ les triangulaires supèrieures et U_n telles que $M - I_n$ sont nilpotentes dans $T_n \cap SL_n$. $\mathbb{G}_m^n \simeq D_n \subset GL_n$. Aussi $O(n) \subset GL_n$ tq ${}^t gg = I_n$. Et $Sp(2n) \subset GL_n/k$ telles que ${}^t gJg = J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$. Aussi, A une k-algèbre de dimension finie (possiblement non commutative). Alors, $Aut(A) \subset GL(A)$ est fermé! Pour $A = M_n$, on a $GL_n \to GL(M_n)$ donné par la conjugaison et ca passe au quotient en PGL_n! D'où $PGL_n = Aut(M_n)$ et celui de gauche est un groupe algébrique donc, c'est non trivial à priori mdr.

Théoreme 0.0.3 (Chevalley)**.** *Tout groupe algébrique connexe est uniquement une extension d'une variété abélienne (lisse connexe propre) par un groupe algébrique affine.*

Autrement dit une unique s.e.c

$$1 \to H \to G \to A \to 1$$

dans Grp donnée par des morphismees algébriques.

Théoreme 0.0.4. *Tout les groupes algébriques affines sont linéaires.*

Théoreme 0.0.5. *Soit $G/\mathbb{C}$ un groupe algébrique affine connexe. Alors les props suivantes sont équivalentes :*

1. *G est isomorphe à un sous-groupe auto-adjoint d'un $GL_n(\mathbb{C})$, i.e. un sous-groupe fermé algébrique stable par $g \mapsto^t \bar{g}$.*

2. *G est linéairement réductif : toute représentation linéaire de G se décompose en somme directe de représentations irréductibles. (la catégorie des représentations est semi-simple)*

3. *G est réductif : admet pas de sous-groupe fermé distingué tels que tout ses éléments nilpotents sont unipotents.*

4. *G admet une forme compacte réelle.*

5. *G admet un sous-groupe compact Zariski-dense.*

6. *$\mathbb{C}[X]^G$ est de type fini sur $\mathbb{C}$ pour toute action algébrique de G sur une variété affine X.*

Exercices 0.0.6. Prouver qu'être réductif est stable sur les sous-groupes distingués fermés ou quotients.

Chapitre 1

Groupes algébriques affines réductifs

On prend tjr k algébriquement clos.

1.1 Les bases

1.1.1 La composante neutre

Proposition 1.1.2. *Soit G un groupe algébrique.*

1. *L'élément neutre est contenue dans une unique composante irréductible de G, G^0, la composante neutre.*

2. *G^0 est fermé normal dans G d'indice fini.*

3. *Les classes à gauche de G^0 dans G sont les composantes connexes ainsi que irréductibles de G.*

4. *Tout sous-groupe d'indice fini fermé contient G^0*

Démonstration. 1. il existe un point dans une unique composante puis par translation (l'image isomorphe d'un truc irréd est irréd). Sinon juste psq c'est lisse.

2. c'est un sous-groupe irréd via l'image de $G^0 \times G^0 \to G$. Ça contient G^0 donc c'est G^0, l'inversion envoie une c.c sur une c.c, et e sur e. La conjugaison est un automorphisme et envoie e sur e. $\square$

1.1.3 Noyau et image

Théoreme 1.1.4. *Étant donné $f: G \to H$ un morphisme de groupes algébriques.*

1. *Le noyau est fermé normal.*
2. *l'image est fermée.*
3. *$f(G^0) = f(G)^0$.*
4. *f est un iso ssi c'est une bijection.*

Démonstration. 1. est facile.

Théoreme 1.1.5 (Chevalley)**.** *Les images de flèches algébriques contiennent des ouverts dense.*

Lemme 1.1.6. *Si U, V sont deux ouverts denses distincts de G.*

Démonstration. On a pour tout g, $U \cap g.i(V) \neq \emptyset$ d'où le résultat lol. En particulier $U^2 = G$ lol. □

Proposition 1.1.7. *Si H est un sous-groupe (abstrait) de G alors $\bar{H}$ est un sous-groupe fermé de G. Si en plus H contenait un ouvert dense de $\bar{H}$ alors H était fermé.*

Démonstration. On a direct que $i(\bar{H}) = \bar{i(H)} = \bar{H}$ lol. En plus $h.\bar{H} = \bar{hH} = \bar{H}$ car L_h est un automorphisme d'où $H.\bar{H} = \bar{H}$, maintenant pour $h \in \bar{H}$ on a $\bar{H}.h = \bar{H.h}$ car le truc de gauche est fermé d'où $\bar{H}.h \subset \bar{H}$. I.e. $\bar{H}.\bar{H} \subset \bar{H}$. Si H contient U dense ouvert, $H \supset U^2 = \bar{H}$ par le lemme (omg). □

Remarque 3. *Les localement fermés sont fermés.*

2. Grâce à Chevalley, $f(G)$ contient un ouvert dense d'où $\bar{}(f(G)) = f(G)$ vu que $f(G)$ est un groupe. □

1.2 Actions et représentations

Définition 1.2.1. Une action d'un groupe algébrique G sur une variété algébrique X est un morphisme $G \times X \to X$ tel que $G \to Aut(X)$ (à droite les bijections) est un morphisme de groupe.

Définition 1.2.2. Soit $G \curvearrowright X$. Et Y un fermé de X. Le normalisateur de Y dans G, $N_G(Y)$ est le groupe des g qui préservent Y. Le centralisateur fixe Y, $C_G(Y)$. Le noyau de l'action de $N_G(Y) \curvearrowright Y$ est $C_G(Y)$. L'action est fidèle si $G \to Aut(X)$ est injective, $C_G(X) = e$. $X^G \subset X$ les points fixes par G. Quand $Y = \{x\}$, $N_G(x) = C_G(x) = G_x$ est la ifbre en x de $G \to X$.

Proposition 1.2.3 ($G \curvearrowright X$)**.** *On a*

1. *Toutes les orbites sont localement fermés et lisses.*
2. *Toute les orbites de dimension minimale sont fermées. (donc il en existe)*

Démonstration. Soit $O = G.x = im(G \times \{x\} \to X)$, ça contient un ouvert dense de $\bar{O}$. Comme O est $\bar{O}$ sont stable par G et via $U \subset O \subset \bar{O}$, pour $o \in O$ on a un $g.o \in U$ d'où $g^{-1}U \cap O$ est un ouvert qui contient o dans O. En plus $\bar{O} - O$ est G-stable d'où une union de G-orbites de même dimension plus petite que $\bar{O}$ pas forcément un nb fini.

Exemple 1.2.4. $GL_n \curvearrowright k^n \times k^n$ via l'action diagonale a une infinité d'orbites.

□

Définition 1.2.5. Soit G un groupe algébrique. Un G-module (rationnel) est un k-ev V muni d'une action linéaire de G, $G \to GL(V)$ algébrique, tel que tout $v \in V$ est contenu dans un G-sous module de dimension finie stable par l'action induite.

Exemple 1.2.6. Toute action algébrique $G \curvearrowright X$ fournit une action de G sur $k[X]$ donné par $(g.f)(x) = f(g^{-1}(x))$ pour $g \in G$, $f \in k[X]$ et $x \in X$ lisse.

Proposition 1.2.7. *Soit G un groupe affine agissant sur une variété algébrique X via la définition précédente. Alors $k[X]$ est un G-module.*

Démonstration. Soit $f \in k[X]$, on a $a \colon G \times X \to X$ d'où $a^* \colon k[X] \to k[G \times X] = k[G] \otimes_k k[X]$. On a $a^*(f)(g, x) = \sum a_i(g) f_i(x)$, par déf c'est $f(g^{-1}.x)$. L'espace vectoriel engendré par les $x \mapsto f_i(g^{-1}.x)$ est de dimension finie. D'où les $g.f_i$ aussi pour tout $g \in G$ qui est le résultat. □

Exemple 1.2.8. L'action par translation à gauche $G \times G \to G$ si G est affine donne un G-module $k[G]$ qui est appelé la représentation régulière.

Exemple 1.2.9. On a $\mathbb{C}[\mathbb{G}_m] = \mathbb{C}[T, T^{-1}]$ un $\mathbb{G}_m$-module qui se décompose en modules irreductibles.