Géométrie algébrique

Table des matières

Chapitre 1

Remarques générales

Dans tous les autres chapitres. Dans le cas algébriquement clos, comme une variété algébrique abstraite est seulement isomorphe à une variété algébrique abstraite. Ça fait sens de parler de schémas ! Enfin

$$(\mathbb{A}^n(k), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n(k)}) \simeq (Spm(k[T_1, \ldots, T_n]), \mathcal{O}_{Spm(\ldots)})$$

avec la topologie de Zariski. En particulier,

$$(\mathbb{A}^0(k), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^0(k)}) \simeq (Spm(k), \mathcal{O}_{Spm(k)})$$

1.1 Variétés vers schémas

1.1.1 Fonctions vs sections

La construction de la correspondance schémas affines et anneaux, avec des fonctions sur un corps algébriquement clos c'est clair, avec des sections c'est moins clair.

Essentiellement, ça fait plus sens de dire, je prends la flèche topologique $|f|$ et le morphisme de faisceaux s'écrit :

$$s \mapsto s \circ |f|$$

On peut juste dire, $f^\sharp(X)^{-1}(\mathfrak{p}) = |f|(\mathfrak{p})$ modulo ce que ça veut dire. En conséquence de la flèche locale

$$\mathcal{O}_{Y,|f|(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

1.1.2 Ambiguité du support

Y'a un soucis avec le support de $f \in \mathcal{O}_X(X)$ c'est pas analogue vraiment à $f^{-1}(D(0))$. Quand on est nul dans une fibre en un premier $\mathfrak{p}_x$ ça a l'air plus fort parce que on est nul sur un ouvert autour de x. Ç'est quoi ducoup $f^{-1}(0)$? Déjà

1. On a un truc qui semble similaire

$$\mathcal{O}_X(U) = \mathrm{Hom}(U, \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}})$$

   mais qui l'est pas du tout, (0) est générique mais ni ouvert ni fermé!

2. Sur un k-schéma X par contre,

$$\mathcal{O}_X(U) = \mathrm{Hom}_k(U, \mathbb{A}^1_k)$$

   d'où si $k = \bar{k}$, $f^{-1}((0))$ est fermé.

Chapitre 2

Cinquième point : Séparation

Définition 2.0.1. Une variété algébrique X est séparée si

$$\Delta_X \colon X \to X \times_k X$$

est une immersion fermée.

2.1 Petit lemme

Quand la target est séparée, on a le critère usuel :

$$f, g \colon Z \to X \text{ tels que } f|_U = g|_U \text{ pour un ouvert dense } U \subset Z \text{ alors } f = g$$

Essentiellement, on a deux égalités à prouver $|f| = |g|$ qui est clair parce que X est séparée. Et $f^\sharp = g^\sharp$.

Chapitre 3

Quatrième point : produits fibrés, cas des variétés abstraites

3.1 Espace topologique sous jacent

On cherche un pullback de

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Spm(k) \end{tikzcd}$$

en tant qu'espace topologiques on peut remarquer qu'un tel produit

$$X \times_k Y$$

vérifie $|X \times Y| = |X| \times |Y|$ par le foncteur de points. On a par propriété universelle

$$\mathrm{Hom}(W, X \times_k Y) \to \mathrm{Hom}(W, X) \times_k \mathrm{Hom}(W, Y)$$

est une bijection, en particulier si $W = Spm(k)$ on sait que $|X| \approx \mathrm{Hom}(Spm(k), X)$.

Conséquence 1. L'espace topologique sous jaçent est bien le produit des espaces topologiques. À voir en fonction de la base, ici $S = Spm(k)$.

3.2 Cas affine

Dans le cas affine si $X = Z(I) \subset \mathbb{A}^n(k)$ et $Y = Z(J) \subset \mathbb{A}^m(k)$ on peut par le point de vue foncteur de point regarder

$$Z(I, J) \subset \mathbb{A}^{n+m}$$

Étant donné un couple

$$(f, g) \in \mathrm{Hom}(k[T_1, \dots, T_n]/I, \mathcal{O}_W(W)) \times \mathrm{Hom}(k[T_{n+1}, \dots, T_{n+m}]/J, \mathcal{O}_W(W))$$

on définit

$$(f, g) \in \mathrm{Hom}(k[T_1, \dots, T_n, T_{n+1}, \dots, T_{n+m}]/(I, J), \mathcal{O}_W(W))$$

par le morphisme évident $T_i \mapsto f(T_i)$ si $i \leq n$ et $g(T_i)$ sinon. Essentiellement par la flèche induite sur le produit tensoriel (adjonction).

3.3 Cas général : points techniques

Étend donné l'existence de $X \times_k Y$ c'est intéressant de montrer que si $W \subset X$ alors $W \times_k Y \hookrightarrow X \times_k Y$. Et surtout on a les identités

$$p_X^{-1}(U) \cap p_Y^{-1}(V) = U \times_k V$$

et

$$X_1 \times Y \cap X_2 \times Y = p_X^{-1}(X_1) \cap p_X^{-1}(X_2) = (X_1 \cap X_2) \times_k Y$$

On peut le dire parce que

$$\begin{tikzcd}
p_X^{-1}(X_i) \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[dr, dashed, "h_1"] & & Y \\
X_i \arrow[d, hook] & X_i \times_k Y \arrow[l] \arrow[ur] \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
X & & X \times_k Y \arrow[ll] \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

$h \circ h_1$ et l'inclusion sont deux flèches $p_X^{-1}(X_i) \to X \times_k Y$ qui font commuter le diagramme donc sont égales. Pareil $h_1 \circ h \circ h_1$ et h_1 c'est deux flèches

$$p_X^{-1}(X_i) \to X_i \times_k Y$$

. donc sont égales par unicité, mais c'est pas clair que h_1 est un mono.

Quatrième point : produits fibrés, cas des variétés abstraites

Remarque 1. *J'ai pas montré l'existence de tout les autres produits fibrés là. Juste qu'ils coincident avec ce que j'ai dit.*

Pour montrer leur existence faut juste utiliser la commutativité des flèches. Si on a

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, dashed, "g"] \arrow[ddrr, dashed, "h"] & V \arrow[r, hook] & Y \\
U \arrow[d, hook] & & \\
X & & X \times_k Y \arrow[ll] \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

suffit de voir que $h(W) \subseteq p_X^{-1}(U) \cap p_X^{-1}(V)$ via $p_X \circ h = g$ et $p_Y \circ h = f$.

C'est aussi intéressant de voir que si $U \hookrightarrow X$ est une immersion ouverte alors

$$U \times_k Y \to X \times_k Y$$

aussi (directement via les points d'avant).

3.4 Construction générale

Étant donné le fait que $X_i \times Y \cap X_j \cap Y = (X_i \cap X_j) \times Y$ on peut recoller ! Et c'est ça la construction mdr.

Proposition 3.4.1. *La dimension de $X \times_k Y$ c'est* $\dim(X) + \dim(Y)$.

Démonstration. On se ramène facilement au cas affine puis par Noether c'est clair. $\square$

Chapitre 4

Troisième point : dimension

4.1 Les définitions

4.1.1 Définition topologique

Concrètement pour $X = \cup_{i=1}^n X_i$ une variété algébrique décomposée en composantes irréductibles :

$$\dim(X) = \max(\dim(X_i)) = \sup_{U \subset X \ ouvert} \dim(U)$$

et pour une variété irréductible c'est le sup des longueurs de chaines

$$Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Y_d = X$$

4.1.2 Définition par les corps de fonctions

Ducoup dans le cas intègre, les restrictions du faisceau sont injectives et le faisceau est approximable par les ouverts principaux affines ! En particulier

$$k(X) \simeq k(U)$$

et

$$k(X) \simeq Frac(\mathcal{O}_X(U_0))$$

pour un affine ouvert $U_0 \subset X$ quelconque. On peut montrer que

$$dim(X) = degtr_k k(X)$$

et c'est bien défini :

1. Si on prends deux familles algébriquement indépendantes et K algébriques sur les deux, on peut montrer qu'elles ont la même cardinalité.

2. On peut se réduire au cas affine.

3. On conclut par l'injection de Noether dans $A(X)$ qui fixe la dimension en passant au corps de fractions!

4.2 Hypersurfaces

4.2.1 Cas affine

Essentiellement, y'a cette suite d'arguments :

1. La dimension est invariante par extension d'anneaux entiers. (Y'a pas mal d'algèbre là dedans, j'en parlerai ailleurs)

2. Par Noether si $F \in k[T_1, \ldots, T_n] - k$ alors
$$\dim k[T_1, \ldots, T_n]/(F) = \dim k[T_1, \ldots, T_{n-1}]$$

3. Ensuite $\dim k[T_1, \ldots, T_n] = n$ par récurrence et l'argument d'avant (faut faire un tout petit peu attention).

4. Automatiquement, si $F \in k[T_1, \ldots, T_n]$ alors $\dim(Z(F)) = n - 1$.

4.2.2 Cas intègre

Ça c'était le cas affine, maintenant le cas intègre : Étant donné $f \in \mathcal{O}_X(X)$ on a
$$\dim(Z(f)) = \dim(X) - 1$$
La preuve consiste à dire

1. $\dim(U) = \dim(X)$ en utilisant $k(U) \simeq k(X)$ d'où on se ramène au cas affine.

2. On à une injection entière finie
$$k[T_1, \ldots, T_n]/fA \cap k[T_1, \ldots, T_n] \hookrightarrow A(X)/fA(X)$$
où $fA \cap k[T_1, \ldots, T_n]$ c'est juste en identifiant avec l'image.

3. Puis on a
$$fA \cap k[T_1, \ldots, T_n] \subset \sqrt{N_{k(X)/k(\mathbb{A}^n)}(f)} \subset \sqrt{fA \cap k[T_1, \ldots, T_n]}$$
et on conclut par Noether.

Remarque 2. *Les anneaux de polynômes sont factoriels donc intégralement clos. D'où la norme fonctionne bien là.*

Remarque 3. *Je sais vraiment pas si on est obligés d'utiliser $k(U) \simeq k(X)$ mdr. À méditer. Si $F_1 \cap U \subsetneq F_2 \cap U$ et U dense dans X, alors $\bar{F_1} = \bar{F_2}$ implique F_1 dense dans F_2 d'où y sont égaux dans U car fermés ?*

4.2.3 Nombre d'équations d'un fermé

Tout irréductible affine Z de dimension s dans $\mathbb{A}^n$ est une composante d'un

$$Z \subseteq Z(f_1, \ldots, f_{n-s})$$

dont toutes les composantes ont dimension s.

À l'inverse

$$Z(f_1, \ldots, f_s) \subset \mathbb{A}^n(k)$$

est de dimension $\geq n - s$.

4.2.4 Dimension des fibres

On en déduit que si $f \colon X \to Y$ est dominant alors

$$\dim(f^{-1}(y)) \geq \dim(X) - \dim(Y)$$

parce que $f^{-1}(y) \subseteq Z(f_* \mathfrak{m}_y)$ et $\mathfrak{m}_y$ est défini par $\dim(Y)$ équations !

Chapitre 5

Deuxième point sur les cours : Variétés abstraites à la Weil

5.1 Premières définitions

Ducoup essentiellement maintenant on travaille avec des

$$(X, \mathcal{O}_X)$$

ou X est un ensemble algébrique affine et $\mathcal{O}_X$ le faisceau de fonctions régulières. Plus généralement

$$X = \cup X_i$$

une union finie d'affines et $\mathcal{O}_X$ est le faisceau qui étend les $\mathcal{O}_{X_i}$.

Résumé 1. Pour tout définir on procède comme suit :

1. Équivalence de catégories entres variétés algébriques affines et variétés algébriques abstraites affines.
2. Les $D(f)$ sont des variétés abstraites.
3. Définition d'une variété abstraite par réunion d'ouverts affines.
4. Les ouverts d'affines sont des variétés abstraites.
5. Les ouverts sont des variétés abstraites.
6. la bijection :

Résumé 2. Le détail des preuves discute :

1. Comment décrire des morphismes de variétés abstraites.

2. Bien décrire algébriquement les $D(r)$.

3. La bijection
$$\mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X))$$
où Y est affine.

À nouveau, on a

$$Z(I) \cap D(F(\bar{T})) = X \cap D(F) \simeq Z(I, FS - 1) \subset \mathbb{A}^{n+1}$$

en tant que variétés algébriques abstraites. La preuve du cours consiste à dire

$$i \colon (X \cap D(F), \mathcal{O}_X|_{D(F)}) \to Z(I, FS - 1)$$

a pour inverse la projection $p \colon \mathbb{A}^{n+1} \to \mathbb{A}^n$ et il montre que c'est un homéomorphisme à la main en disant que c'est ouvert par :

1. Si on regarde $D(h) \cap Z(I, FS - 1)$, alors $h(\bar{T}, S) \mod FS - 1$ s'écrit $h(\bar{T}, 1/F)$.

2. On en déduit $F^N h(\bar{T}, S) \mod FS - 1$ a un représentant R dépendant pas de S.

3. Par déf $p(D(h) \cap Z(I, FS - 1) = D(R) \cap X$.

L'isomorphisme de faisceaux, on peut vouloir conclure directement en utilisant l'équivalence de catégorie 2 puis 1. Mais ça donne juste les morphismes de sections globales et je sais pas pq il veut pas utiliser le fait que p et i sont régulières.

Remarque 4. *J'ai compris l'intérêt de faire la preuve comme ça.. C'est juste que pour l'iso de faisceaux, si on veut se restreindre aux carrés*

$$\begin{tikzcd} A(X)_f \arrow[r] \arrow[d] & A(Z(I, FS-1)) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_X(D(r)) \arrow[r] & \mathcal{O}_{Z(\dots)}(D(R)) \end{tikzcd}$$

faut bien montrer que l'image d'un principal c'est un principal. Le reste de la preuve paraît tellement compliqué pour rien mdr, mais ça a l'air nécessaire : essentiellement, on peut tjr écrire $\mathcal{O}_X(D(r)) = A(X)[W]/(rW - 1)$ *et* $D(r) \subset D(f)$ *implique* f *inversible dans* $\mathcal{O}_X(D(r))$ *puis* $A_f \simeq A$ *si* f *est inversible dans* A. *Je mettrai pas tjr tout les détails.*

On peut définir les variétés abstraites par union finie:

$$(X, \mathcal{O}_X) = \cup(X_i, \mathcal{O}_X|_{X_i})$$

On en déduit que les ouverts sont bien des variétés. Enfin on a

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X))$$

pour Y affine et X quelconque par recollement des flèches affines. La continuité c'est le point flou mais qui est en fait le plus facile, le recollement des faisceaux est clair.

5.2 Recollement de variétés

Étant donné des $(X_i)_i$ est des ouverts $U_{ij} \subset X_i$ tels que

$$\phi_{ij} \colon U_{ij} \simeq U_{ji}$$

et que les ϕ_{ij} engendrent une relation d'équivalence sur

$$\sqcup X_i$$

alors le quotient est une variété définit par les ouverts X_i.

Question 1. Pourquoi les X_i sont ouverts?

Réponse 1. C'est **PAS** juste que la projection est ouverte pour la topologie quotient, puisque c'est pas tjr vrai. C'est plutôt que la classe d'équivalence de X_i c'est $X_i \sqcup_j U_j i$ qui est ouvert.

Remarque 5. *La topologie finale pour la projection, par déf la topologie la plus fine sur le quotient qui rend la projection continue, en particulier la projection devient ouverte quand*

$$p^{-1}p(U)$$

est ouvert autrement dit la classe d'équivalence d'un ouvert est ouvert. C'est le cas ici, ce serait le cas avec des groupes/anneaux topologiques j'imagine et pour toute topologie "équilibrée".

5.3 Sous-variétés

Concrètement, les sous variétés c'est immersions ouvertes ou fermées, le cas des ouverts est clair. Pour les fermés, la version faiscautique :

On prends un fermé Z de X et le pullback $i^*\mathcal{O}_X$

La traduction c'est que les fonctions sur Z c'est localement des restrictions de fonctions sur X.

Remarque 6. *Sur les affines c'est même pas localement ça se recolle bien. On peut regarder les fibres, si Z et X sont affines on a*

$$i^{-1}\mathcal{O}_X(Z)_x = \mathcal{O}_{X,i(x)} = A(X)_{\mathfrak{m}_x}$$

et en tensorisant par $\mathcal{O}_Z(Z) = A(Z)$ on obtient que $i^*\mathcal{O}_X$ a les mêmes fibres que $\mathcal{O}_Z$ avec un isomorphisme naturel.

Question 2. Cas ou X est un recollement de deux affines ?

5.4 Variétés quasi-projectives abstraites

On définit sur $Z \subset \mathbb{P}^n(k)$ le faisceau donné par le faisceau de fonctions régulières muni des recollements donnés par les cartes affines. En gros, avec le Proj : à faire,

1. En gros le faisceau du Proj est bien un faisceau.
2. Ducoup revoir un peu le Proj.
3. C'est bien le faisceau de fonctions régulières.
4. Les $Z^+(I)$ avec le faisceau $\mathcal{O}_X$ de fonctions réguières est une variété.

Ducoup il se passe un truc marrant

Les ouverts du type $D^+(P)$ sont affines !

L'idée c'est simplement d'utiliser le Veronese puis de montrer que $D^+(H) \simeq D^+(T_i)$ est affine. Pour ça suffit de montrer que les morphismes de pullbacks

$$(\phi_i)_*(U)\colon \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_k}(U) \to \mathcal{O}_{D^+(T_i)}(\phi_i^{-1}(U))$$

sont bien définis, c'est clair via la définition locale.

5.4.1 Le faisceau de fonctions régulières sur une variété projective

J'ai eu une idée ducoup, si on prends une variété projective $X = Z^+(I)$ et $P = p \mod I$ alors si $U = D^+(p)$:

$$\mathcal{O}_X(U) = (k[T_0, \ldots, T_n]/I)_{(p)}$$

Mon idée pour justifier la preuve c'est : si $g \in \mathcal{O}_X(U)$ et

$$g|_{U_i} = P_i/Q_i$$

alors où est-ce qu'on peut regarder $gP_i = Q_i$? Je me disais on peut regarder dans

$$S(X) = A(X')$$

avec X' le cone de X dans $\mathbb{A}^{n+1}$. Mon guess c'est :

$$\mathcal{O}_X(U) = A(X')_{(p)}$$

et dans ce cas, l'identité $gQ_i^2 = P_iQ_i$ fait sens dans $A(X')$ parce que $D(p)$ est dense $Z(gQ_i^2 - P_iQ_i)$.

Chapitre 6

Point sur le chapitre I : Variétés algébriques classiques

6.1 Résumé

6.2 Framework

Quand y s'agit de trouver des fermés projectifs ou des relations :

1. Ajouter des relations adaptées à la situation jusqu'à obtenir le vide.
2. Utiliser le nullstellensatz projectif.
3. Faire de l'algèbre linéaire.

pour le premier point une utilisation cool c'est de prouver que des morphismes sont finis. Typiquement les projections linéaires.

Quand y s'agit de montrer des isomorphismes. La partie homéomorphisme est souvent claire :

1. Tel point est dans tel ouvert ssi il vérifie telle ou telle relations.

La partie isomorphisme est moins claire, faut montrer que la flèche inverse est régulière et là c'est assez ad hoc.

6.3 k-algèbres et Noether

J'ai essayé de prouver la normalisation de Noether qui dit que

Théoreme 6.3.1 (Normalisation de Noether)**.** *Une k-algèbre de type fini A est entière sur un $k[T_1, \ldots, T_d]$.*

Et en fait y'a un truc intéressant. Ma stratégie c'était:

1. On suppose $k[T_1, \ldots, T_n]/I$ avec n minimal alors I petit.
2. On peut supp I premier, on se ramene au cas réduit trivialement et au cas intègre avec le lemme chinois.

Maintenant on peut regarder dans le corps de fractions une famille alg indép maximale, enfin c'est ce que j'aurai aimé. Mais c'est pas clair que elle est de taille $n - 1$! C'est là tout le pb. La raison c'est que :

Les variétés, par exemple les courbes ont pas nécessairement de modèles dans $\mathbb{P}^2$ non singuliers. D'où on peut rien dire sur le nombre de générateurs de I facilement (si n minimal implique I minimal et $dim(C) = 1$ alors I est engendré par un élément et on est dans $\mathbb{P}^2$).

Bon la vraie preuve mtn :

- Essentiellement, on veut juste montrer que pour chaque générateur P on a un automorphisme qui le rend unitaire en une des variables. D'où le résultat par récurrence.

Deux questions maintenant :

1. Pq à automorphisme près ça suffit ?
2. Quel automorphisme ?

Pour la première question ducoup y'a un ou deux petit trick mentaux qu'il mentionne pas.

1. Quand on obtient une relation unitaire pour P, on fait une récurrence pour trouver l'injection entière $k[T_1, \ldots, T_d]$. Et surtout être entier c'est transitif.
2. L'injection ça peut être $T_1 \mapsto L_1(T_1, \ldots, T_d)$ avec les L_i de degré 1 pas nécessairement T_i!

Pour la deuxième question : on commence par regarder comment rendre $T_1 \ldots T_n$ unitaire en T_n par exemple. On peut regarder l'automorphisme

$$T_i \mapsto T_i + T_1; T_n \mapsto T_n$$

C'est clair que le résultat est unitaire en T_n ! Post-automorphisme l'injection de $k[T_1, \ldots, T_n]$ est **l'inclusion**, pré-automorphisme faut composer avec l'automorphisme inverse. Bon maintenant en général ça marche pas forcément ça faut tricker un peu, parce qu'on a plusieurs monomes. On peut prendre

$$T_i \mapsto T_i + T_n^{m_i}$$

et jouer sur le tuple $m = (m_1, \ldots, m_{n-1}, 1)$, mais c'est juste de l'écriture.

Maintenant le nullstellensatz !

6.4 Nullstellensatz

Corollaire 6.4.1 (Nullstellensatz faible)**.** *Si A est une k-algèbre tf et $\mathfrak{m}$ est maximal. Alors $A/\mathfrak{m}$ est une extension finie de k.*

La preuve consiste à simplement se rendre compte que

$$k[T_1, \dots, T_d] \hookrightarrow A$$

entier implique $k[T_1, \dots, T_d]$ est un corps d'où $d = 0$.

Théoreme 6.4.2 (Nullstellensatz fort)**.** *Soit A une k-algèbre tf, alors pour tout I*

$$\sqrt{I} = \cap_{I \subset \mathfrak{m}} \mathfrak{m}$$

Une idée de preuve c'est de remarquer que si $\cap \mathfrak{m}$ contient des non nilpotents, disons f. Alors pour $\mathfrak{m}' \subset A_f$ avec $\delta \colon A \to A_f$ non nul :

$$k \mapsto A/\delta^{-1}\mathfrak{m}' \to A_f/\mathfrak{m}'$$

est algébrique d'où la deuxième flèche est entière d'où $\delta^{-1}\mathfrak{m}'$ est maximal contenant pas f ce qui est contradictoire. À noter qu'on utilise $A_f \simeq A[T]/(fT - 1)$ pour montrer que c'est tf.

Question 3. De manière constructive? Déjà, les localisés $A_\mathfrak{m}$ sont pas t.f sur k mdr.

En particulier on obtient la correspondance avec le spectre maximal muni de sa topologie de Zariski. On en déduit direct :

Théoreme 6.4.3 (Nullstellensatz fort 2)**.** *Sur un corps algébriquement clos, $I(Z(J)) = \sqrt{J}$ pour tout idéal J de $k[T_1, \dots, T_n]$.*

On a maintenant une correspondance entre ensembles algébriques et idéaux radicaux quand k est **algébriquement clos**.

6.5 Topologie et irréductibles

Essentiellement, dans un anneau noethérien, on a

Tout idéal radical I est intersection finie d'idéaux premiers.

En particulier, on déduit la décomposition finie unique en irréductible avec la correspondance de la section d'avant. La preuve se fait bien par contradication et maximalité vu qu'on est dans le cas Noethérien.

Remarque 7. *Un critère d'irréducibilité c'est que les ouverts s'intersectent tout court.*

Remarque 8. *La topologie induite sur un* ***sous-ensemble*** *existe toujours.*

6.6 Espaces projectifs

Ducoup les définitions à retenir :

1. Un idéal homogène c'est un truc de la forme $\oplus A_d \cap I$. C'est à dire que toute les composantes homogènes d'un $f \in I$ sont dans I.

2. Les $Z^+(I)$ sont défs par les zéros de polynômes homogènes. De manière équivalentes par la projection de $Z(I) \subset \mathbb{A}^{n+1}$.

3. À l'inverse $I^+(Z) = I(\pi^{-1}Z)$.

Maintenant le nullstellensatz devient :

Les idéaux homogènes différents de $(T_0, \ldots, T_n)$ correspondent aux variétés projectives.

un idéal définit le vide si et seulement si il contient

$$(T_0, \ldots, T_n)^s$$

pour un s.

On obtient le générateur de relation (ce nullstellensatz)! À détailler un peu plus avec la preuve que les projections sont entières !

6.7 Fonctions régulières

On prends toujours la définition locale sur les variétés quasi-projectives et même algébriques. Y'a toujours un élément de preuve intéressant dans

$$A(Z)_f \simeq \mathcal{O}_Z(D(f))$$

sur les variétés affines pour $f \in A(Z)$. On recouvre $D(f)$ par des $D(f_i) = D(f_i^2)$ avec $g \in \mathcal{O}_Z(D(f))$ et $g|_{U_i} = g_i/f_i$. En particulier,

$$f^r = \sum a_i f_i^2$$

puis $gf^r = \sum a_i g_i f_i$ d'où la surjectivité de $A(Z)_f \to \mathcal{O}_Z(D(f))$!

6.8 Morphismes de variétés affines, première déf

Dans le cas des variétés affines : on définit littéralement via

Des restrictions de morphismes $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$.

On obtient directement les flèches

$$S_j \longmapsto \phi_i(T_j, j)$$

$$\begin{tikzcd}
k[S_1, \ldots, S_m] \arrow[r] \arrow[d] & k[T_1, \ldots, T_n] \arrow[d] \\
A(Y) \arrow[r] & A(X)
\end{tikzcd}$$

de l'équivalence de catégorie. Il faut juste prouver que de $A(Y) \to A(X)$ on peut relever un morphismes de variétés.