Ax-Sen-Tate

Je suis la preuve de Colmez avec quelques détails en plus. Le but c'est de montrer que pour K un corps local de caractéristique 0 (y'a une version en char $p \geq 1$) on a

$$\mathbb{C}_K^{G_K} = K$$

et plus généralement pour $\mathbb{Q}_p \subset L \subset \mathbb{C}_p$ avec L complet :

$$\widehat{\overline{L}}^{G_L} = \widehat{\overline{L}^{G_L}}$$

Intuitivement, si $L \subset M \subset \bar{L}$ et qu'on peut montrer qu'on peut borner continûment la distance entre M et un élément $\alpha \in \bar{L}$ par un truc qui dépend de $G_M.\alpha$ et $[M(\alpha) : M]$.

1 Preuve

En notant

$$\Delta_L(\alpha) := \sup_{g \in G_L} |g\alpha - \alpha|$$

pour $\alpha \in \mathbb{C}_L$. Maintenant si $\alpha_n \to \alpha$ dans $\bar{L}$ on a $\Delta_L(\alpha) \leq \Delta_L(\alpha_n)$ pour n grand.

Le truc cool maintenant c'est que pour $x \in \bar{L}$ on peut trouver $a \in L$ tel que

$$|a - x| \leq c_p \Delta_L(x)$$

pour une constante c_p qui dépend que de p d'où si α_n est fixe par $\mathscr{G}_L$ alors α aussi puis α est dans l'adhérence (la complétion) de $L[\alpha_n]$ dans $\mathbb{C}_L$!

2 Lemme principal

2.1 Borne 0

Un truc connu pour $P(X) \in \mathcal{O}_{\bar{\mathbb{Q}}_p}[X]$ et $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ c'est la borne :

$$|a_i| \leq |Rac(P)|^{n-i}$$

2.2 Borne I : Calculs

2.2.1 Cas général

On a $P^{(q)}(X) = a_n \frac{n!}{(n-q)!} X^{n-q} + \ldots + q! a_q$ et $a_n = 1$ d'où $b = \frac{a_q}{\binom{n}{q}}$ est le produit des racines de $P^{(q)}$ au signe près. En plus pour le coeff constant un analogue de la borne 0 dit que il existe une racine $\beta \in Rac(P^{(q)})$ telle que

$$|\beta| \leq |b|^{n-q}$$

reste plus qu'à calculer $|\binom{n}{q}|^{1/(n-q)}$.

2.2.2 Ce qu'on veut

On peut prendre $q = p^{v_p(n)} = p^{k+1}$ si n est pas une puissance de p et $q = n/p$ sinon. Alors dans ces cas là on calcule bien

$$|\binom{n}{q}|^{1/(n-q)} = \begin{cases} 1, \text{ cas } 1 \\ \frac{1}{p^{\frac{1}{p^{k+1}} - \frac{1}{p^k}}}, \text{ autre cas} \end{cases}$$

parce que

$$\binom{n}{q} = \frac{n}{q} \prod_{i=1}^{q-1} \frac{n-i}{i}$$