

Théorie de Hodge p -adique

Programme: 1. ramification 2. corps perfectoides, extensions profondément ramifiées, extensions arithmétiquement profinies. 3. corps des normes 4. représentation p -adiques des corps locaux.

Fontaine 1970-1980. Généralisation par Scholze.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Corps non-archimédien

1.2 Lemme de Krasner

Soit $\alpha \in \bar{K}$ et $f = \mu_\alpha$. Soit aussi $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses racines avec $\alpha = \alpha_1$. On note $d_\alpha := \min_{i>1} \{|\alpha - \alpha_i|\}$. Supposons que pour $\beta \in \bar{K}$ on ait

$$|\beta - \alpha|_K < d_\alpha$$

alors $K(\alpha) \subset K(\beta)$.

1.3 Plus petit corps algébriquement clos complet

Étant donné K non archimédien complet. On a

$$\widehat{\bar{K}} =: \mathbb{C}_K$$

est complet et algébriquement clos. Grâce à Krasner.

1.4 Action de $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$

Avec la topologie discrète sur G_K . On a pour tout g, x , $|gx| = |x|!$ On peut l'étendre à \mathbb{C}_K . Question :

$$\mathbb{C}_K^{G_K} = K?$$

Pas trivial mais oui. On le prouve plus tard. C'est un théorème d'Ax-Tate.

1.5 Corps locaux

Un corps local est un corps complet de valuation discrète et de corps résiduel fini.

Remarque 1. *On sera souvent dans ce cas. Mais les théorèmes seront souvent vrai si le corps résiduel est seulement parfait.*

Maintenant K est local et $|k_K| = q$.

Proposition 1. *Pour tout $x \in k_K$ il existe un unique $[x]$ t.q $[x]^q = [x]$. En plus la flèche, $k_K^* \rightarrow K^*$ $x \mapsto [x]$ est un iso de $k_K^* \simeq \mu_{q-1}$.*

1.5.1 Classification, vecteurs de Witt?

Soit K un corps local. Si $\text{char}(K) = 0$, alors K est une extension finie (à iso près) de \mathbb{Q}_p . Si $\text{char}(K) = p$ alors $K \simeq k_K((X))$ avec la valuation X -adique. Sachant que $k_K = \mathbb{F}_q$ ducoup.

1.6 Filtration

Étant donné K local, on note

$$U_K^{(i)} = \begin{cases} U_K, & i = 0 \\ 1 + \pi_K^i \mathcal{O}_K, & i \geq 1 \end{cases}$$

C'est juste $U_K^{(i)} = \bar{B}(1, i)$. On a

$$U_K^{(i)} / U_K^{(i+1)} = \begin{cases} k_K^*, & i = 0 \\ k_K^+, & i \geq 1 \end{cases}$$

1.7 Vocabulaire dans le cas des corps locaux.

Si L/K est finie de corps locaux. On dit qu'elle est

- Non ramifiée si $e = 1$. (les corps résiduels sont finis!)
- Totalelement ramifiée si $e = [L : K]$.
- Totalelement modérément ramifiée si $e = [L : K]$ et $p \nmid e$.
- Totalelement sauvagement ramifiée si $e = [L : K]$ et $e = p^k = [L : K]$.

Préliminaires

Dans $K - \bar{K}$ on peut prendre K^{un} l'union/le compositum (?) des sous extensions non ramifiées. Maintenant,

$$Gal(K^{un}/K) \simeq Gal(\bar{k}_K/k_K) \simeq \hat{\mathbb{Z}}$$

est engendré par le Frobenius (ça c'est bizarre y me semble que c'est faux, neukirch class field theory première page mdr, bah c'était faux mdr). En particulier, on a $Frob_K \in Gal(K^{un}/K)$ t.q

$$Frob_K(x) = x^q \pmod{m_K}$$

pour tout $x \in \mathcal{O}_L$ t.q L/K non ramifiée. On se restreint donc à $\bar{K} - K^{un}$ et on note $I_K = Gal(\bar{K}/K^{un})$.

Remarque 2. Exercice, si $\text{char} K = 0$, alors y'a qu'un nb fini d'extensions de degré $\leq n$. En caractéristique positive c'est faux, faut ajouter séparable de degré $\leq n$ (apparemment c dur).

1.8 La différentielle

Étant donné L/K finie séparable de corps locaux. On regarde la forme trace $L \times L \rightarrow K$. Donnée par $tr(x, y) = Tr_{L/K}(xy)$. On note

$$\mathcal{O}'_L = \{x \in L \mid tr(x, y) \in \mathcal{O}_K, \forall y \in \mathcal{O}_L\}$$

c'est un idéal fractionnaire de L qui contient \mathcal{O}_L . On note $\mathcal{D}_{L/K} = (\mathcal{O}'_L)^{-1}$, c'est un idéal de \mathcal{O}_L . Ça se définit bien dans des anneaux de Dedekind généraux. On a

$$\mathcal{D}_{L/K} = \mathcal{D}_{L/F} \mathcal{D}_{F/K}$$

et on déf/a

$$v_L(\mathcal{D}_{L/K}) = \min\{\dots\}$$

et c'est simple vu que $\mathcal{D}_{L/K} = (\pi_L^m)$. On a

Proposition 2. On a

1. Si $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\alpha]$ et $f = \mu_\alpha$. On a $\mathcal{D}_{L/K} = (f'(\alpha))!$
2. $\mathcal{D}_{L/K} = \mathcal{O}_L$ si et seulement si L/K est non ramifiée.
3. $v_L(\mathcal{D}_{L/K}) \geq e - 1$, $e = e(L/K)$.
4. $v_L(\mathcal{D}_{L/K}) = e - 1$ ssi $p \nmid e$.

1.8 La différente

1.. Étant donné α_i les racs de f . Claim : $\sum \frac{f(X)}{(X-\alpha_i)} \frac{\alpha_i^r}{f'(\alpha_i)} = X^r$ pour $0 \leq r \leq n-1$ (c'est presque la dérivée). Pour le prouver, on peut évaluer en n points. On évalue en les α_i et c'est clair. Pour une racine fixée $\alpha = \alpha_1$, on a

$$f(X)/(X-\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i$$

avec $b_i \in \mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\alpha]$. Maintenant on remarque que les termes de $\sum \frac{f(X)}{(X-\alpha_i)} \frac{\alpha_i^r}{f'(\alpha_i)} = X^r$ sont conjugués sous l'action de $G_{L/K}$ d'où on peut calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} X^k \text{Tr}_{L/K}(b_k \alpha^r / f'(\alpha)) = X^r$$

puis

$$\text{Tr}_{L/K}(b_k \alpha^r / f'(\alpha)) = \begin{cases} 1, & k = r \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

en particulier, on a une base duale de $(\alpha^i)_{i=1, \dots, n-1}$ pour la trace : $(b_k / f'(\alpha))_k$. Deuxième claim : $(b_k)_k$ engendre \mathcal{O}_L sur \mathcal{O}_K . On peut le faire en comparant les coefficients de

$$f(X) = (X - \alpha)(\sum b_i X^i)$$

et par induction(?). Du claim on déduit que $\mathcal{O}'_L = 1/f'(\alpha)\mathcal{O}_L$ puis le résultat. \square

2.. On montre non ramifiée implique $\mathcal{D}_{L/K} = \mathcal{O}_L$. On peut prendre α tq $k_K(\bar{\alpha}) = k_L$. Avec $f = \mu_\alpha$. On a $\bar{f}'(\bar{\alpha}) \neq 0$, d'où $f'(\alpha) \in \mathcal{O}_L^\times$ et le résultat. L'inverse est clair, on prouve que $[L : K] = f$. \square

3.. On a $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\pi_L]$. Et $\mu_{\pi_L} = f$ Eisenstein. D'où $f'(\pi_L) = \sum (e-i)\pi_L^{e-i-1}$ et $v_L(e\pi_L^{e-1}) = v_L(e) + (e-1)$ plus $v_L(a_i) \geq e$ d'où $v_L(f'(\pi_L)) \geq e-1$. \square

4.. Si $p \nmid e$ on a $v_L(e\pi_L^{e-1}) = e-1 < v_L(a_i)$. Si $p \mid e$ on a $v_L(f'(\pi_L)) \geq e$. \square

5. (?). Si $K - L_0 - L$ est tq $L_0 = K^{un}$ alors $\mathcal{D}_{L/K} = \mathcal{D}_{L/L_0}\mathcal{D}_{L_0/K} = \mathcal{D}_{L/L_0}$. Alors $\mathcal{D}_{L/K}\mathcal{O}_L \equiv L = L_0 \equiv L/K$ est non ramifiée. \square

1.9 Filtration de ramification

On regarde L/K galoisienne (G) de corps locaux. Alors pour $i \geq -1$, $G_i = \{g \in G \mid \forall x \in \mathcal{O}_L, v_L(g(x) - x) \geq i + 1\}$. On voit facilement que c'est des sous groupes distingués de G . On a en plus $G_{-1} = G$ et $G_0 = I_K$. Puis pour $i \geq 0$, on a

$$G_i = \{g \in G \mid v_L((g(\pi_L)/\pi_L) - 1) \geq i\}$$

(ça marche psq $i \geq 0$) on écrit, $\sum a_i \pi_L^i = x \in \mathcal{O}_L$ avec $a_i \in \mathcal{O}_{L_0}$ ($L - L_0$ tot ram!) d'où $g(a_j) = a_j$ pour $g \in G_i$ vu que $G_i \subset I_K$. Ensuite c'est comme d'hab. Maintenant on a

$$G_i \rightarrow U_L^{(i)} / U_L^{(i+1)}$$

via $g \mapsto g(\pi_L)/\pi_L$ qui induit un morphisme injectif G_i/G_{i+1} . En particulier

$$G_i/G_{i+1} \text{ est abélien.}$$

on en déduit que les extensions galoisiennes de corps locaux sont résolubles.

Proposition 3. $v_L(\mathcal{D}_{L/K}) = \sum_{i=0}^{\infty} (|G_i| - 1)$.

Démonstration. On prend $\alpha \in \mathcal{O}_L$ tq $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\alpha]$ et $f = \mu_\alpha$. On déf $i_G(g) = v_L(g\alpha - \alpha)$. On a

$$i_G(g) = i + 1 \equiv g \in G_i$$

puis

$$\begin{aligned} v_L(\mathcal{D}_{L/K}) &= v_L(f'(\alpha)) = \sum_{i=2}^n v_L(\alpha - \alpha_i) \\ &= \sum_{g \in G - id} v_L(\alpha - g\alpha) \\ &= \sum_{g \in G - id} i_G(g) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (|G_i| - |G_{i+1}|)(i + 1) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (|G_i| - 1) \end{aligned}$$

□

Lemme 1. Sur L/K galoisienne de corps locaux, avec $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\alpha]$. On a

$$1. \ i_{L/K}(g_1 g_2) \geq \min(i_{L/K}(g_1), i_{L/K}(g_2))$$

1.10 Ramification dans les tours d'extensions

$$2. i_{L/K}(g_2 g_1 g_2^{-1}) = i_{L/K}(g_1)$$

$$3. g \in G_i \Leftrightarrow i_{L/K}(g) \geq 1 + i$$

$$4. v_L(\mathcal{D}_{L/K}) = \sum_{i=0}^{\infty} (|G_i| - 1) = \sum_{g \neq id} i_{L/K}(g)$$

Démonstration. Pour 1. on écrit juste $g_1 g_2(\alpha) - \alpha = g_1(g_2 \alpha - \alpha) + g_1(\alpha) - \alpha$.
Le 2. est clair. \square

1.10 Ramification dans les tours d'extensions

On regarde $L - F - K$ avec $H = \text{Gal}(L/F) \leq G$ normal. On a $H_i = G_i \cap H$ directement vu que $i_{L/E}$ dépend de v_L . On a en plus $\mathcal{D}_{L/K} = \mathcal{D}_{L/F} \mathcal{D}_{F/K}$ d'où $v_L(\mathcal{D}_{L/K}) = v_L(\mathcal{D}_{L/F}) + v_L(\mathcal{D}_{F/K}) = v_L(\mathcal{D}_{L/F}) + e_{L/F} v_F(\mathcal{D}_{F/K})$ où à droite on prends v_L, v_F normalisées. Maintenant

$$\begin{aligned} v_L(\mathcal{D}_{L/F}) &= \sum_{h \neq 1, h \in H} i_{L/F}(h) \\ &= \sum_{h \neq 1, h \in H} i_{L/K}(h) \end{aligned}$$

en corollaire et via $v_L(\mathcal{D}_{L/K}) = \sum_{g \neq id} i_{L/K}(g)$:

$$e_{L/F} v_F(\mathcal{D}_{F/K}) = \sum_{g \in G-H} i_{L/K}(g)$$

Proposition 4. *Pour tout $s \in G/H$, $e_{L/F} i_{F/K}(s) = \sum_{g \in sH} i_{L/K}(g)$.*

Démonstration. On note $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_F[\alpha]$ et $\mu_\alpha = f \in \mathcal{O}_F[X]$. On regarde $s(f)(X) - f(X)$, on a $s(f) - f = 0 \pmod{\pi_F^{i_{F/K}(s)}}$. D'où

$$v_L(s(f)(\alpha)) \geq e_{L/F} i_{F/K}(s)$$

maintenant si $f(X) = \prod_{h \in H} (X - h(\alpha))$ alors $s(f)(X) = \prod_{g \in sH} (X - g(\alpha))$ puis $s(f)(\alpha) = \prod_{g \in sH} (\alpha - g(\alpha))$. On en dduit que

$$\sum_{g \in sH} v_L(g(\alpha) - \alpha) \geq e_{L/K} i_{F/K}(s)$$

Préliminaires

et on utilise le dernier corollaire pour obtenir :

$$\begin{aligned} \sum_{s \neq 1} \left(\sum_{g \in \pi^{-1}s = sH} i_{L/K}(g) \right) &= \sum_{g \in G-H} i_{L/K}(g) \\ &= e_{L/F} v_F(\mathcal{D}_{F/K}) \\ &= e_{L/F} \sum_{s \neq 1} i_{F/K}(s) \end{aligned}$$

et on en déduit l'autre inégalité grâce à la première. \square

Maintenant, on considère $j(s) = \max(i_{L/K}(g); \bar{g} = s)$. Il existe $\tilde{g} \in G$ tel que $j(s) = i_{L/K}(\tilde{g})$. Maintenant $s = \tilde{g}H$ d'où $g = \tilde{g}.h$ pour $g \in sH$. On peut en déduire que

$$i_{L/K}(g) \geq \min\{i_{L/K}(\tilde{g}), i_{L/K}(h)\}$$

et

$$i_{L/K}(g) \geq \min\{i_{L/K}(\tilde{g}^{-1}) = i_{L/K}(\tilde{g}), i_{L/K}(g)\}$$

puis comme $i_{L/K}(\tilde{g}) \geq i_{L/K}(g)$ on a

$$\min\{i_{L/K}(\tilde{g}), i_{L/K}(h)\} \geq i_{L/K}(g)$$

d'où $i_{L/K}(g) = \min\{i_{L/K}(\tilde{g}), i_{L/K}(h)\}$.

Corollaire 1. $e_{L/K} i_{F/K}(s) = \sum_{h \in H} \min\{j(s), i_{L/F}(h)\}$.

On note $G_x = G_{[x]+1}$ pour $x \in [-1, +\infty[$. Puis

$$\varphi_{L/K}(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1, 0] \\ \int_0^x \frac{dt}{(G_0:G_t)}, & x \geq 0 \end{cases}$$

qui est la première fonction de Herbrand. En notant $g_m = |G_m|$ on a

$$\varphi_{L/K}(x) = \frac{1}{g_0} (g_1 + \dots + g_m + g_{m+1}(x - m))$$

pour $m < x \leq m+1$.

Lemme 2. $\varphi_{L/K}(x) = \frac{1}{g_0} \sum_{g \in G, g \neq 1} \min\{i_{L/K}(g), x+1\} - 1$

Démonstration. La fonction à droite est continue et vaut

$$\frac{1}{g_0} \sum_{g \neq 1} \min\{i_{L/K}(g), 0\} - 1 = -1$$

en -1 donc coïncide avec $\varphi_{L/K}(-1)$. En plus en comparant leurs dérivées on voit qu'elles sont égales. À gauche on a $\varphi'_{L/K}(x) = \frac{1}{(G_0:G_x)}$ et si $m < x < m+1$ alors $\varphi_{L/K}(x) = g_{m+1}/g_0$. Et à droite la dérivée c'est 1 ou 0 en fonction de g , et surtout $i_{L/K}(g) \geq m+2$ implique $g \in G_{m+1}$ donc via la somme on est bon. La dérivée compte les g dans G_{m+1} entre $m+1 < x+1 < m+2$. \square

1.10 Ramification dans les tours d'extensions

Lemme 3. *Pour tout $s \in G/H - id$, $\varphi_{L/F}(j(s) - 1) = i_{F/K}(s) - 1$.*

Démonstration. On a $e_{L/F}i_{F/K}(s) = \sum_{h \in H} \min\{j(s), i_{L/K}(h)\}$ et

$$\varphi_{L/F}(j(s) - 1) = \frac{1}{h_0 = e_{L/F}} \sum_{h \in H - \{id\}} \min\{i_{L/K}(h), j(s)\} - 1$$

d'où le résultat en comparant. \square

Théoreme 1 (Théorème de Herbrand). *Pour tout $x \geq 1$ on a $(G/H)_{\varphi_{L/K}(x)} = G_x H/H (= G_x/H \cap G_x = G_x/H_x)$.*

Remarque 3. *Au sens des groupes de ramifications pas des coinvariants mdr.*

Démonstration. Pour $s \in (G/H)_{\varphi_{L/K}(x)}$ équivaut à $i_{F/K}(s) \geq \varphi_{L/F}(x) + 1$ d'où par le dernier lemme ça équivaut à

$$\varphi_{L/F}(j(s) - 1) \geq \varphi_{L/F}(x)$$

mais la fonction de herbrand est strictement croissante d'où $j(s) \geq x + 1$, i.e. $\max\{i_{L/K}(g) | \bar{g} = s\}$, et il existe \tilde{g} qui atteint le max. Ça se traduit en $i_{L/K}(\tilde{g}) \in G_x$ et $\tilde{g} = s$. D'où le résultat. \square

On note maintenant $\psi_{L/K} : [-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ($[-1, \infty[\rightarrow [-1, \infty[$ même) l'inverse de $\varphi_{L/K}$.

Théoreme 2. $\varphi_{L/K} = \varphi_{F/K} \circ \varphi_{L/F}$ et $\psi_{L/K} = \psi_{L/F} \circ \psi_{F/K}$.

Démonstration. On montre que la première. Elles ont la même valeur à gauche et à droite. On calcule la dérivée. On a

$$\begin{aligned} \varphi_{F/K} \circ \varphi'_{L/F}(x) &= \varphi'_{F/K}(x) \cdot \varphi'_{L/F}(x) \\ &= \frac{1}{((G/H)_0 : (G/H)_{\varphi_{L/F}(x)})} \cdot \frac{1}{(H_0 : H_x)} \\ &= \frac{1}{((G/H)_0 : (G_x/H_x))} \cdot \frac{1}{(H_0 : H_x)} \\ &= \frac{1}{(G_0 : G_x)} \\ &= \varphi'_{L/K}(x) \end{aligned}$$

\square

Préliminaires

Définition 1. On définit les groupes d'énumération supérieurs comme

$$G^{(x)} = G_{\psi_{L/K}(x)}$$

de manière équivalente

$$G^{(\varphi_{L/K}(x))} = G_x$$

Théoreme 3 (Hasse-Herbrand). On a $(G/H)^{(x)} = G^{(x)}H/H$.

Démonstration. La preuve est directe : $(G/H)^{(x)} = (G/H)_{\psi_{F/K}(x)}$. Comme $(G/H)_{\varphi_{L/F}(x)} = G_xH/H$ on remplace x par $\varphi_{L/F}^{-1} \circ \psi_{F/K}(x) = \psi_{L/F} \circ \psi_{F/K}(x) = \psi_{L/K}(x)$. D'où le résultat. On a utilisé le théorème 2! \square

On a $G_K = \text{Gal}(K^{\text{sep}}/K) = \varprojlim_{L/K \text{ finie}} \text{Gal}(L/K)$. Maintenant le théorème de Hasse-Herbrand la projection

$$\text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(F/K)$$

induit une surjection $\text{Gal}(L/K)^{(x)} \rightarrow \text{Gal}(F/K)^{(x)}$. Et même

$$G_K^{(x)} = \varprojlim_{L/K} \text{Gal}(L/K)^{(x)}$$

une filtration de G_K !! On définit maintenant les sauts de ramification.

Définition 2. La filtration de ramification a un saut en $v \geq -1$ si $G_K^{v+\epsilon} \subsetneq G_K^{(v)}$ pour tout $\epsilon \geq 0$.

Remarque 4. Dans cette notation v est rationnel aux sauts. Et apparemment en fait y'a des sauts à TOUT les rationnels ptdr. Donc la filtration est très compliquée.

Exemple 1. On regarde

$$\begin{array}{c} K := \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}) \\ \uparrow \\ \mathbb{Q}_p \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q}_p) \end{array}$$

et on a $\chi: G \simeq (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ via le caractère cyclotomique, donné par $g(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n}^{\chi(g)}$. On a une filtration naturelle $\Gamma[m] = \ker((\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \rightarrow (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times)$. On sait que K/\mathbb{Q}_p est totalement ramifiée et $\pi = \zeta_{p^n} - 1$ est une uniformisante de K car racine d'un polynôme d'eisenstein (!!!). On a

$$g\pi - \pi = g\zeta_{p^n} - \zeta_{p^n} = \zeta_{p^n}(\zeta_{p^n}^{\chi(g)-1} - 1)$$

1.10 Ramification dans les tours d'extensions

d'où $g \in G_m$ ssi $v_K(\zeta_{p^n}^{\chi(g)-1} - 1) \geq m + 1$. En traduisant : via

$$\chi(g) \equiv 1 \pmod{p^m} \Leftrightarrow \chi(g) \in \Gamma[m]$$

on a

$$\zeta_{p^n}^{\chi(g)-1} - 1 = \zeta_{p^n}^{p^m \cdot u} - 1 \equiv v((\zeta_{p^n} - 1)^{p^m}) = 0 \pmod{(\zeta_{p^{n-m}} - 1)}$$

pour des unités u, v . En particulier $\chi(G_m) = \Gamma[k]$ tel que $p^{k-1} \leq m < p^k$. On peut maintenant calculer la fonction de Hasse-Herbrand : on a des sauts en $p^i - 1$ et elle vaut $\varphi_{K/\mathbb{Q}_p}(p^i - 1) = i$. En énumération supérieure on a $G^{(x)} = \Gamma[x]!$