Trace normalisée

On prends K un corps local de caractéristique 0 et K_∞/K une $\mathbb{Z}_p$-extension qui est pas de conducteur fini (en gros on peut se ramener à une $\mathbb{Z}_p$-extension totalement ramifiée). Je note $\Gamma = G_K/G_{K_\infty} \simeq \mathbb{Z}_p$ et γ un générateur topologique, puis $\gamma_n := \gamma^{p^n}$.

1 Idée

L'idée c'est que K_∞/K est alors profondément ramifiée d'où on a Ax-Sen-Tate :

$$\mathbb{C}_K^{G_{K_\infty}} = \widehat{K}_\infty$$

puis $\mathbb{C}_K^{G_K} = \widehat{K_\infty}^\Gamma$.

1.1 Première partie

C'est Ax-Sen-Tate pour les extensions profondéments ramifiées.

1.2 Deuxième cas

Si $Tr_{K_\infty/K}(x) := \frac{1}{p^n} Tr_{K_n/K}(x)$ alors :

1. $|Tr_{K_\infty/K}(x)| \leq c|\gamma.x - x|_K$
2. $Tr_{K_\infty/K}(.)$ est continue et s'étend à $\widehat{K_\infty}$.
3. On obtient $\widehat{K}_\infty = K \oplus \widehat{K}_\infty^\circ$ où le deuxième terme c'est $\ker(Tr_{K_\infty/K})$.
4. $\gamma - 1$ est bijectif d'inverse continu sur $\widehat{K}_\infty^\circ$.

Le dernier point permet de montrer que $\widehat{K_\infty}^\Gamma = K^\Gamma = K$ par injectivité de $\gamma - 1$.

1.3 Extension : $\mathbb{C}_K(\eta)^{G_K} = 0$

On peut ensuite étendre le résultat et prouver que

1. Si $\tau = \gamma - \lambda$ où $\lambda \in U_K^{(1)}$ est pas une racine de l'unité alors τ est bijectif d'inverse continu sur $\widehat{K_\infty}$.

En particulier étant donné un caractère non trivial de G_K, η, si $\eta(\gamma) = \lambda$ alors $\widehat{K_\infty(\eta)}^{\Gamma} = 0$ par injectivité de $\gamma - \lambda$. On prouve ensuite que

$$\mathbb{C}_K(\eta)^{G_K} = 0$$

parce que $\mathbb{C}_K(\eta)^{G_{K_\infty}} = \mathbb{C}_K^{G_{K_\infty}}(\eta)$. (directement via la déf)

2 Preuves

2.1 (1.2.1.)

2.1.1 Idée de la récurrence

On fait une récurrence sur n pour montrer que si $x \in K_n$ alors

$$|Tr_{K_\infty/K}(x) - x| \leq c_n |\gamma(x) - x|_K$$

l'idée c'est que si $y = \frac{1}{p} Tr_{K_n/K_{n-1}}(x)$ alors $Tr_{K_\infty/K}(x) = Tr_{K_\infty/K}(y)$. D'où

$$|Tr_{K_\infty/K}(x) - x|_K = |Tr_{K_\infty/K}(y) - y + \frac{1}{p} Tr_{K_n/K_{n-1}}(x) - x|_K$$

Maintenant le terme de droite se majore facile via 3. et le terme de gauche c'est plus dur on a

$$Tr_{K_\infty/K}(y) - y = \frac{1}{p} Tr_{K_n/K_{n-1}}(\gamma(x) - x)$$

et faut utiliser les formules de comparaisons de valuations de traces.

2.1.2 Les preuves

Dans l'ordre pour 1.2.1. on a :

1. $v_K(Tr_{K_n/K_{n-1}}) \geq v_K(x) + v_K(D_{K_n/K_{n-1}}) - \frac{1}{p^{n-1}}$ par les formules d'estimation de valuations de traces.

2. En déroulant avec le théorème de Tate
$$|Tr_{K_n/K_{n-1}}(x)| \leq |p|_K^{1-\frac{b}{p^{n-1}}} |x|_K$$
3. Via $Tr_{K_n/K_{n-1}}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \gamma_{n-1}^k(x)$, $\gamma_n = \gamma^{p^n}$:
$$|\frac{1}{p} Tr_{K_n/K_{n-1}}(x) - x|_K \leq |p|_K^{-1} |\gamma.x - x|_K$$

Remarque 1. *Faut penser* $\alpha^k - 1 = (1 + \alpha + \ldots + \alpha^{k-1})(\alpha - 1)$*).*

Le 3. est assez direct

on a une récurrence via si $y = \frac{1}{p} Tr_{K_n/K_{n-1}}(x)$ alors
$$Tr_{K_\infty/K}(x) = Tr_{K_\infty/K}(y)$$
et
$$|Tr_{K_\infty/K}(x) - x|_K = |(Tr_{K_\infty/K}(y) - y) + \left(\frac{1}{p} Tr_{K_n/K_{n-1}}(x) - x\right)|_K$$
Y faut juste estimer la constante c via les $p^{-b/p^{n-1}}$.

2.2 (1.2.2.)

On a
$$|Tr_{K_\infty/K}(x)|_K \leq c.|x|_K$$
d'où la continuité en 0 puis la continuité partout par linéarité de la trace.

2.3 (1.2.3.)

Direct.

2.4 (1.2.4.)

Y s'agit juste de montrer que l'inverse est continu. Son existence est facile, je l'appelle ρ. On a
$$|x|_K = |x - Tr_{K_\infty/K}(x) + Tr_{K_\infty/K}(x)|_K \leq c.|(\gamma - 1)x|_K$$
pour tout $x \in \widehat{K_\infty^\circ}$ par les sections d'avant. En particulier comme $\rho(\widehat{K_\infty^\circ}) = \widehat{K_\infty^\circ}$ on a
$$|\rho(x)|_K \leq c.|x|_K$$
puis la continuité.

3 Extension

Pour $\lambda \in U_K^{(1)}$ l'idée c'est que

$$(\gamma - 1 + 1 - \lambda)\rho = 1 + (1 - \lambda).\rho$$

et $|1 - \lambda|_K < 1$. Le truc de droite est de la forme $1 - a$ et donc ça suggère de regarder l'opérateur

$$\sum_{i=0}^{\infty}(1-a)^i$$

Maintenant si $|1 - \lambda|_K < c^{-1}$ la série

$$\sum_{i=0}^{+\infty}(\lambda - 1)^i \rho^i$$

converge absolument ! Dans le cas général il existe n tel que $|1 - \lambda^{p^n}|_K < c^{-1}$ d'où on peut conclure si λ est pas une racine de l'unité.

4 Cohomologie

On a montré que

$$H^0(\Gamma, \widehat{K_\infty(\eta)}) = \begin{cases} K, & \eta = 1 \\ 0, & \eta(\gamma) \notin \mu_K \end{cases}$$

En fait on voit aussi directement que

$$H^1(\Gamma, \widehat{K_\infty(\eta)}) = \begin{cases} K, & \eta = 1 \\ 0, & \eta(\gamma) \notin \mu_K \end{cases}$$

en remarquant qu'un cocycle f est

1. entièremeent determiné par $f(\gamma)$,
2. $\gamma - \eta(\gamma) = \eta(\gamma)(\rho(\gamma) - 1)$ dans $End(\widehat{K_\infty(\eta)})$.

En particulier

$$H^1(\Gamma, \widehat{K_\infty(\eta)}) \simeq \frac{\widehat{K_\infty(\eta)}}{im(\gamma - \eta(\gamma))}$$

d'où le résultat par les parties d'avant.