

Cohomologie des groupes

2024-2025

Table des matières

1	Catégories et catégories abéliennes.	5
1.1	Yoneda, théorème d'isomorphisme et exactitude	5
1.2	Adjonctions	6
1.2.1	Propriétés d'exactitude	6
1.2.2	Limites, adjoints et l'axiome du choix.	6
1.2.3	Fidélité d'un foncteur ayant un adjoint	7
1.3	Exemples d'adjonctions	7
2	(co)homologie	9
2.1	(co)Homologie sur les résolutions acycliques	9
2.2	Foncteurs dérivés et limites	9
3	Cohomologies	11
3.1	Tenseur et Hom	11
3.1.1	Exactitudes	11
3.2	Ext	11
3.2.1	Localisation	11
3.3	Tor	11
3.3.1	Groupes abéliens, $Mod_{\mathbb{Z}}$	12
3.3.2	Modules plats	12
3.3.3	Localisation	12

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1

Catégories et catégories abéliennes.

J'veux un petit inventaire de choses cool.

1.1 Yoneda, théorème d'isomorphisme et exactitude

On applique $h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}b$.

De $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ exacte on tire

$$0 \rightarrow h_A \rightarrow h_B \rightarrow h_C$$

pour l'exactitude à gauche et

$$0 \rightarrow h^C \rightarrow h^B \rightarrow h^A$$

pour l'exactitude à droite. On voit ça comme ça :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ & & & \nearrow \text{---} & \uparrow & & \\ & & & & M & & \end{array}$$

pour le premier, l'exactitude de $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ montre que M va dans le noyau si $(M \rightarrow B \rightarrow C) = 0$. Et on utilise $A \simeq \text{im}(A \rightarrow B) = \ker(B \rightarrow C)$ et la PU du noyau pour montrer qu'on a l'exactitude sur les hom. Pour le deuxième, on utilise :

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & \nwarrow \text{---} & & & \\ & & M & & & & \end{array}$$

et là de l'exactitude de $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ et du théorème d'isomorphisme on a $\text{coker}(A \rightarrow B) \simeq \text{coim}(B \rightarrow C) \simeq C$ d'où $(A \rightarrow B \rightarrow M) = 0$ implique l'existence de la flèche vers $\text{coker}(A \rightarrow B)$ est la factorisation par C .

Montrer l'inverse consiste juste à spécialiser et utiliser les PU.

1.2 Adjonctions

Étant donné $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}: G$ si

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), -) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-))$$

naturellement alors F est adjoint à gauche de G qui lui est adjoint à droite de F . Via Yoneda ça dit que $h^{F(-)}(-) \simeq h^-(G(-))$ dans

$$\text{Nat}(\widehat{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}, \widehat{\mathcal{D} \times \mathcal{C}})$$

y'a aussi la formulation $h^{FG(-)}(-) \simeq h^{G(-)}(G(-))$.

1.2.1 Propriétés d'exactitude

On déduit tout du premier isomorphisme. Un adjoint à gauche est exact à droite et inversement. Plus généralement un adjoint à gauche préserve les colimites et les limites finies (La preuve est non triviale).

Si F est adjoint à gauche de G on a

$$0 \rightarrow h^{F(C)} \rightarrow h^{F(B)} \rightarrow h^{F(A)}$$

qui est iso à

$$0 \rightarrow h^C \circ G \rightarrow h^B \circ G \rightarrow h^A \circ G$$

en particulier si $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ est exacte à droite alors $F(A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0)$ est exacte à droite.

Maintenant si G est exact, alors $h^{F(P)} \simeq h^P \circ G$ d'où $h^{F(P)}$ est exact si P est projectif.

À l'inverse si F est exact, $h_{G(I)} \simeq h_I(F(-))$ est exact dès que I est injectif.

1.2.2 Limites, adjoints et l'axiome du choix.

Quand j'ai une catégorie I -cocomplète pour I filtrante, genre Mod_R , bah y'a une adjonction cool pour les colimites

$$\varinjlim: \mathcal{A}^I \leftrightarrow \mathcal{A}: \Delta$$

Catégories et catégories abéliennes.

où Δ c'est le foncteur constant. MAIS, bah pour définir le foncteur \varinjlim faut faire un choix de colimite pour chaque foncteur! Penser le point dans \mathbf{Set} .

Remarque 1. *Pour I filtrante, \mathcal{A}^I est abélienne si \mathcal{A} l'est. Pour prouver que y'a les noyaux, via $C, D: I \rightarrow \mathcal{A}$ et $C \rightarrow D$, on prend $K^0: I^0 \rightarrow \mathcal{A}$ la donnée des noyaux termes à termes et on montre que ça s'étend naturellement en $K: I \rightarrow \mathcal{A}$ (on trouve juste un foncteur) tel que les flèches de noyaux termes à termes ça fait une transformation naturelle $K \rightarrow C$. C'est bien le noyau parce que ça l'est terme à terme.*

1.2.3 Fidélité d'un foncteur ayant un adjoint

On déduit tout du deuxième isomorphisme, i.e. la counité. Et c'est clair que G est pleinement fidèle ssi la counité est un isomorphisme.

1.3 Exemples d'adjonctions

Les foncteurs *Free* qu'on peut définir comme les adjoints à gauche de foncteurs d'oubli $C \rightarrow \mathbf{Set}$. Et les foncteurs d'oubli plus généraux $(-)^{\times}: \mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Grp}$ par exemple.

1.3 Exemples d'adjonctions

Chapitre 2

(co)homologie

2.1 (co)Homologie sur les résolutions acycliques

Le Weibel dit qu'en tronquant une résolution projective et de proche en proche on montre qu'une résolution acyclique calcule la cohomologie. I.e. via

$$0 \rightarrow \ker(d_{-1}) \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow 0$$

puis

$$0 \rightarrow \ker(d_{m-1}) \rightarrow P_m \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

avec les P_i acycliques et la suite exacte courte de proche en proche que $L_{m+1}F(A) \simeq \ker(F(\ker(d_{m-1})) \rightarrow F(P_m))$. Pour faire de proche en proche faut utiliser que $L_iF(A) \simeq L_{i-(m-1)}F(\ker(d_{m-1}))$ et ça c'est la suite exacte longue et l'acyclicité.

2.2 Foncteurs dérivés et limites

Sur une catégorie AB5 ($\varinjlim: \mathcal{A}^I \rightarrow \mathcal{A}$ est exact et \mathcal{A} est cocomplète.) on a

$$\varinjlim_j L_iF(C(j)) \simeq L_iF(\varinjlim_j C(j))$$

2.2 Foncteurs dérivés et limites

Chapitre 3

Cohomologies

J'prends que des bi-modules pour les preuves.

3.1 Tenseur et Hom

Y'a une adjonction :

$$h^{\otimes_R A}(-) \simeq h^A(h^*(-))$$

c'est juste qu'à une application R -linéaire $B \otimes_R A \rightarrow C$ à gauche on associe l'application vers le dual $A \rightarrow (\text{Hom}(B, C))$ via la propriété universelle des produits tensoriels.

3.1.1 Exactitudes

On a $\otimes_R A$ qui est adjoint à gauche d'où est exact à droite.

3.2 Ext

On déf $\text{Ext}^n(A, -) = R^n h^A(-)$ et $\text{Ext}^n(-, B) = R^n h_B(-)$.

3.2.1 Localisation

3.3 Tor

On déf $\text{Tor}_n^R(A, B) = L_n A \otimes_R (B)$. La notation est symétrique!

3.3.1 Groupes abéliens, $Mod_{\mathbb{Z}}$

On se réduit à $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où on a la résolution

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

alors en appliquant $\otimes_R B$, $Tor_*^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B)$ est l'homologie

$$0 \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow 0$$

où on multiplie par n , d'où $Tor_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) = B/nB$, $Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) =_n B$ et le reste est nul.

Ensuite page 66 du weibel mais ça consiste tjr à écrire $A = \varinjlim A_i$ pour les sous groupes de types finis puis dans ce cas $A_i \simeq \mathbb{Z}^m \oplus_i \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ et de tjr faire tout commuter avec Tor.

3.3.2 Modules plats

C'est les modules $\otimes_R B$ acycliques. Une liste :

- Les modules libres. Parce qu'alors l'injectivité se vérifie terme à terme. (C'est direct que $R^{(I)} \otimes N \simeq \oplus_I N$).
- Si R est un pid, les modules sans torsion.
- $S^{-1}R$. En particulier $Frac(R)$.

3.3.3 Localisation

La localisation marche. Si R est commutatif et A, B des R -modules quelconques, $Tor_n^R(A, B) = 0$ ssi pour tout idéal maximal \mathfrak{m} on a

$$Tor_n^{R_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}}, B_{\mathfrak{m}})$$