

La différence

Cet article de Keith est cool : .

0.1 Remarques

Ducoup y'a des nouvelles définitions : les duals relatifs à une fonctionnelle (linéaire, i.e. $f: M \rightarrow M^\wedge$), comme $\{x \in L | \text{Tr}(xL) \subset \mathcal{O}_K\}$. Et les opérateurs semi-simple. I.e. les fonctionnelles qui se comportent comme on le voudrait.

0.2 Duals

Cet autre article de Keith est cool : .

0.2.1 Cas de $M \subset K$, et $(_ \mapsto (m \mapsto _m): M \rightarrow M^\wedge$

Étant donné un anneau intègre R , K le corps de fractions de R et $M \subset K$ un R -module. On définit

$$\text{Hom}_R(M, R) = M^\wedge$$

alors $M^\wedge \simeq_K (R, M)$ via $\varphi \mapsto \varphi(1)$ et $c \mapsto (m \mapsto c.m)$. C'est simplement que $\varphi(b/b) = b\varphi(1/b) = \varphi(1)$ d'où $\varphi(1/b) = \varphi(1)/b$. On dit que M a un dénominateur commun dans R si y'a un $c \in R$ tel que $M \subset c^{-1}R$. En gros si c'est un idéal fractionnaire.

Si R est noethérien alors M est de type fini ssi il a un dénominateur commun dans R (i.e. idéal fractionnaire). Maintenant $M^\wedge \neq 0$ ssi ${}_K(R, M) \neq 0$ i.e. M a un dénominateur commun dans R , c'est pas immédiat $\varphi(1) \in K$. Mais $a/bM \subset R$ équivaut à $aM \subset bR \subset R$.

0.2.2 Cas général

Si M est un R -module et $f: M \rightarrow M^\wedge$ une fonctionnelle on peut définir $M^\wedge := \{x \in M \otimes_R K | f(x, M) \subset R\}$ quand ça fait sens. Dans le cas où $M = \mathcal{O}_L$, $R = \mathcal{O}_K$ et $f = \text{Tr}_{L/K}(-)$ on obtient

$$\mathcal{O}_L^\wedge = \{x \in L | \text{Tr}_{L/K}(x\mathcal{O}_L) \subset \mathcal{O}_K\}$$

0.2.3 Base duale

Étant donné $f: M \rightarrow M^\wedge$ qui s'étend à $M \otimes_R K$ et $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ une base de M sur R on peut trouver e_i^\wedge une base de M^\wedge telle que $f(e_i, e_j^\wedge) = \delta_{ij}$. En

plus elle est de taille n aussi. Si elle existe elle est libre vu que $\sum a_i e_i^\wedge = 0$ implique $a_j = \sum a_i f(e_j, e_i^\wedge) = 0$ pour chaque j . Ensuite si on a $v \in M^\wedge$ t.q $f(e_i, v) = a_i \in R$ alors $v - \sum a_i e_i^\wedge \in \ker(f(e_j, -))$ pour chaque j . Sauf que par hypothèse d'existence de $(e_i^\wedge)_i$, $\ker(f(e_j, -)) = \oplus_{i \neq j} e_i^\wedge$. Et leur intersection est 0.

Pour l'existence il faut une hypothèse de non dégénérescence je pense. En fait il faut plus ?! [Le wiki](#) dit que il faut ajouter hypothèse d'unimodularité. En gros non dégénéré au sens des corps implique pas que $M \rightarrow M^\wedge$ est un iso. Par ex $B(x, y) = 2xy$ sur \mathbb{Z} . Mais je pense qu'il suffit que $M \otimes_R K \rightarrow (M \otimes_R K)^\wedge$ soit non dégénérée. Vu que notre base duale est dans $M \otimes_R K$.

0.3 Calcul

Si M est libre de rang n alors M^\wedge aussi via l'existence de la base duale (le point clé c'est qu'on peut définir le morphisme entier sur la base de M et qu'on a toujours les projections). Quand on est dans le cas L/K , $\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K$ et que \mathcal{O}_K est principal on se retrouve dans le cas libre et on peut expliciter les calculs. Dans pour un peu plus de généralités je prends R principal et M libre de rang n . Puis $M \otimes K = K^n$. Si $f: (K^n)^2 \times K^n$ est bilinéaire on cherche une base de $M^\wedge = \{x \in M \otimes K = K^n | f(x, M) \subset R\}$, en écrivant ça plus explicitement avec $M = \oplus R e_i$. On veut résoudre, avec $x = \sum x_i e_i$, pour tout $j: f(x, e_j) \in R$. Ça suffit parce qu'alors $f(x, M) \subset R$. Et donc il suffit de résoudre

$$\begin{cases} x_1 f(e_1, e_1) + x_2 f(e_1, e_2) + \dots + x_n f(e_1, e_n) \in R \\ x_1 f(e_2, e_1) + x_2 f(e_2, e_2) + \dots + x_n f(e_2, e_n) \in R \\ \vdots \\ x_1 f(e_n, e_1) + x_2 f(e_n, e_2) + \dots + x_n f(e_n, e_n) \in R \end{cases}$$

en écrivant $A = (f(e_i, e_j))_{i,j}$ on résoud $A.X \in R^n$ et ça c'est juste $X \in A^{-1}R^n$ terme à terme on obtient un système comme d'hab.

0.3.1 Calcul d'inverse

Si I est un idéal fractionnaire de K et $I = \sum R x_i$, on veut calculer ${}_K(R : I)$, on résoud $yI \subset R$. Autrement dit $y x_i \in R$ pour chaque i , i.e. $y \in \cap_i x_i^{-1} R$.

0.4 La différentielle

Elle est donnée par

$$\mathcal{D}_{L/K} := (\mathcal{O}_L^\wedge)^{-1} = (\{x \in L \mid \text{Tr}_{L/K}(x\mathcal{O}_L) \subset \mathcal{O}_K\})^{-1}$$

avec $I^{-1} =_L (\mathcal{O}_L : I)$.

0.4.1 Base duale de $(\alpha^i)_i$ pour la trace

Pour trouver la base duale de $\mathcal{D}_{L/K}^{-1}$ avec $L = K[\alpha]$ et $\alpha \in \mathcal{O}_L$ on a en notant $P(T) = (T - \alpha)(\sum_{i=1}^{n-1} c_i(\alpha)T^i)$ que

$$\sum_i \alpha_i^k \frac{P(T)}{P'(\alpha_i)(T - \alpha_i)} = T^k$$

d'où en développant $\sum_i \alpha_i^k \frac{c_j(\alpha_i)}{P'(\alpha_i)} = \delta_{ij}$. Et ça c'est $\text{Tr}_{L/K}(\alpha \frac{c_j(\alpha)}{P'(\alpha)})$ d'où $(\frac{c_j(\alpha)}{P'(\alpha)})_j$ est duale pour $(\alpha^k)_k$. En plus vu que on peut réécrire

$$([P(T) - P(\alpha)]/(T - \alpha)) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{(T^i - \alpha^i)}{T - \alpha}$$

et en développant on trouve $\sum_{i=j+1}^n a_i \alpha_{i-1-j} = c_j(\alpha)$. De $\alpha \in \mathcal{O}_L$ on a $a_n = 1$ d'où la matrice de transition de $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ vers $(c_j(\alpha))_j$ est triangulaire inférieure avec une diagonale faite de 1 d'où inversible dans \mathcal{O}_K .

En conclusion la base duale pour la trace de $(\alpha^i)_i$ est $(c_j(\alpha)/f'(\alpha))_j$. Mais quand $\alpha \in \mathcal{O}_L$, $\mathcal{O}_K[\alpha]^\wedge = \frac{1}{P'(\alpha)}\mathcal{O}_K[\alpha]$.

0.4.2 La différentielle quand $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\alpha]$

Par exemple dans des corps locaux de caractéristique 0 un tel α existe toujours via $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\theta, \pi_L]$ et le fait que l'extension résiduelle est séparable.

Maintenant $\mathcal{D}_{L/K} = ((\mathcal{O}_L)^\wedge)^{-1} = \frac{1}{P'(\alpha)}\mathcal{O}_L$.

Remarque 1. Directement si $L = K[\alpha]/K$ est non ramifiée, $P'(\alpha) \in \mathcal{O}_L^\times$ car $\bar{P}'(\bar{\alpha}) \neq 0 \pmod{\pi_L}$. d'où $\mathcal{D}_{L/K} = \mathcal{O}_L$.

0.5 Transitivité

Étant donné $L/F/K$, on a $\mathcal{D}_{L/K} = \mathcal{D}_{L/F}\mathcal{D}_{F/K}$. Suffit de montrer que, $\mathcal{O}_{L/K}^\wedge = \mathcal{O}_{L/F}^\wedge(\mathcal{O}_{F/K}^\wedge)$ vu que $(IJ)^{-1} = I^{-1}J^{-1}$ c'est un calcul terme à terme. Et pour ça le seul cas pas évident c'est $x \in \mathcal{O}_{L/K}^\wedge$ implique est un produit.

0.5.1 Base produit

Dans le cas complet ça va, c'est que des dvrs d'où on a une base produit.