Propriétés de base

2024-2025

Table des matières

1 Revêtements

Un revêtement de X est la donnée d'un ensemble F, et pour chaque $x \in X$ de l'existence d'un ouvert $x \in U \subset X$ d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
U \times F \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[dr] & p^{-1}U \arrow[r, hook] \arrow[d, "p|_{p^{-1}U}"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\
& U \arrow[r, hook] & X
\end{tikzcd}$$

tel que $x \in U$ dans Top où F est discret. Ducoup U **trivialise** le revêtement.

Je note U_x un ouvert trivialisant qui contient x.

1.1 Degré

Le degré est donné par

$$\deg \colon X \to \mathbb{N} \cup \infty$$

via $\deg(x) := \#p^{-1}x$. Avec la topologie discrète sur $\mathbb{N}$ le degré est continu. En général c'est localement constant ducoup et si X est connexe le degré est constant.

Remarque 1. *La continuité c'est que pour x tel que* $\deg(x) = n$ *alors* $U_x \subset \deg^{-1} n$. *En fait* $\deg^{-1} n = \cup_{\deg(y)=n} U_y$.

2 Relèvement des homotopies

Étant donné une homotopie $F\colon Y \times I \to X$ et un relèvement $\widetilde{F_0}\colon Y \times \{0\} \to \widetilde{X}$ y'a un unique relèvement

$$\begin{tikzcd}
Y \times \{0\} \arrow[r, "\widetilde{F}|_{Y\times\{0\}}"] \arrow[d, hook] & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed] & X
\end{tikzcd}$$

Je fais un outline de la preuve et un peu de détail après.

2.1 Outline de la preuve

Ça se fait comme ça :

Démonstration. Y'a 3 étapes, pour la première : à chaque y on peut attacher un voisinage N et une partition $0 = t_0 < \ldots < t_n = 1$ tels que pour chaque i, $F(N \times [t_i, t_{i+1}])$ est dans un ouvert trivialisant avec $p\colon (\tilde{U_i}) \simeq U_i$ et $\tilde{F}(y_0, t_i) \in \tilde{U_i}$ qui fait le lien (je parle après de la condition initiale) maintenant le lift est calculé via

$$F|_{N\times[t_i,t_{i+1}]} \circ p^{-1}\colon N \times [t_i, t_{i+1}] \to U_i \to \tilde{U_i}$$

Pour la deuxième étape (unicité sur $N \times I$), on regarde juste le lift en chaque $\{y\} \times I$ et le fait que $\tilde{F}(\{y\} \times [t_i, t_{i+1}])$ est connexe donc dans un seul $\tilde{U_i}$. En particulier la dessus p est injective un monomorphisme d'où unicité.

Pour la dernière, les lifts locaux sont uniques sur chaque $\{y\} \times I$ donc partout. La continuité est claire. □

2.2 Détail

Pour lifter sur un $\{y\} \times I$, il faut un choisir un point dans $\tilde{x} \in p^{-1}(F(y,t))$, pour pouvoir choisir la copie de $\tilde{U_i}$. Par compacité de $\{y\} \times I$, on peut partitionner I en $\cup_{i=0}^{n}[t_i, t_{i+1}]$ de telle sorte que si U est trivialisant pour y et en restreignant p à $\tilde{U} \ni \tilde{x}$ alors $F \circ p^{-1}$ est un lift unique qui se recoupe aux t_i.

2.3 Relèvement des chemins et homotopies de chemins

Y'a le joli résultat maintenant : étant donné un point base $x_0 \in X$ et un lacet γ dans $\pi_1(X, x_0)$, pour tout $\tilde{x}_0 \in p^{-1}x_0$,

- Il existe un unique relèvement de γ, $\tilde{\gamma}$ t.q $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$.

Ensuite pour toute homotopie de chemins ($f_t(1) = f_t(0)$ pour tout t), $f_t \colon I \to Y$ de γ à γ' on peut les relever uniquement en $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}'$ commençant en $\tilde{x}_0$. Et maintenant

- Il existe un unique relèvement de f_t, $\tilde{f}_t$ entre $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}'$.

La preuve est un corollaire direct de la section d'avant ducoup.

Remarque 2. *Le point clé à remarquer c'est le choix du point $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$.*