$\underline{\mathrm{Rep}}_B(G_K)$

1 B et C-admissibilité

La $\mathbb{Q}_p$-algèbre B est supposée commutative intègre. En plus elle est G_K-régulière, i.e. $B^{G_K} = C^{G_K} = E$ et $\{b \in B | G_K(b.\mathbb{Q}_p) = b.\mathbb{Q}_p\} \subset B^\times$.

1.1 $\dim_E \mathbb{D}_B(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$

On peut montrer que

$$\alpha_B \colon \mathbb{D}_B(\_) \otimes_E B \to V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B$$

est injective, à noter que $(d_i \otimes 1)_i$ est lin indép sur C !

Note 1. *La preuve : $x = \sum d_i \otimes c_i$ de taille minimale et $c_m = 1$ ensuite α_C est G_K-équivariant d'où $gx - x$ est dans le noyau puis on conclut via la taille.*

1.2 α_B et admissibilité

Si $\dim_E \mathbb{D}_B(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ alors α_B est un isomorphisme ! L'idée est vraiment jolie. On prends $v = (v_i)$ une base de V et $d = (d_i)$ de $\mathbb{D}_B(V)$. Puis $d = A.v$ avec $A \in M_n(B)$. Maintenant en posant $\wedge_{i=1}^n d_i = x$ et $\wedge_{i=1}^n v_i = y$ on obtient $x = \det(A).y$. Et l'action induite de G_K est celle d'un caractère η! En particulier,

$$x = g.x = g(\det(A))\eta(g).y$$

d'où $g(\det(A)) = \det(A)\eta(g)^{-1} \in \mathbb{Q}_p.\det(A)$. Puis A est inversible dans B!

Remarque 1. *Ça montre la surjectivité de α_B. Faut juste déterminer pq $g.y = \eta(g).y$ est un caractère $G_K \to \mathbb{Z}_p^\times$.*

1.3 Ce que ça dit

Cet isomorphisme dit qu'en fait on peut obtenir une base G_K-invariante de $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B$. Vu que si $\bigoplus_{i=1}^n d_i.K = \mathbb{D}_B(V)$ alors $\alpha_B(d_i) = d_i$ et $gd_i = d_i$.

En particulier, l'action est semi-linéaire mais triviale sur $\mathbb{D}_B(V)$ d'où on peut se concentrer sur l'action sur B !

Ça ressemble donc à Hilbert 90 en un sens.

2 $\underline{\textbf{Rep}}_B(G_K)$ est tannakienne.

2.1 Exactitude de $\mathbb{D}_B(\_)$

Quand on a $0 \to V' \to V \to V''$ on a tjr

$$\dim_K V \leq \dim_K V' + \dim_K V''$$

et égalité si $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ est exacte. Maintennat il s'agit juste de remarquer que si la première suite de

$$\begin{array}{ccccccccc} & 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle \otimes_{\mathbb{Q}_p} B} \Big\Downarrow & & & & & & & & & \\ & 0 & \longrightarrow & V' \otimes_{\mathbb{Q}_p} B & \longrightarrow & V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B & \longrightarrow & V'' \otimes_{\mathbb{Q}_p} B & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle (\_)^{G_K}} \Big\Downarrow & & & & & & & & & \\ & 0 & \longrightarrow & \mathbb{D}_B(V') & \longrightarrow & \mathbb{D}_B(V) & \longrightarrow & \mathbb{D}_B(V'') & & \end{array}$$

est exacte et V est B-admissible par alors les deux autres sont B-admissible ET la suite du bas devient exacte. En particulier,

$$\mathbb{D}_B(\_) \colon \underline{\mathrm{Rep}}_B(G_K) \to \mathrm{Vect}_E$$

est exact.

2.2 Admissibilité de $V' \otimes_{\mathbb{Q}_p} V''$

Étant donné V' et V'' dans $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G_K)$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_B(V' \otimes_{\mathbb{Q}_p} V'') &= (V' \otimes_{\mathbb{Q}_p} B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V'')^{(G_K)} \\ &= (\mathbb{D}_B(V') \otimes_E B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V'')^{G_K} \\ &= (\mathbb{D}_B(V') \otimes_E \mathbb{D}_B(V'') \otimes_E B)^{G_K} \end{aligned}$$

Et le truc de droite c'est $\mathbb{D}_B(V') \otimes_E \mathbb{D}_B(V'')$. D'où le résultat.

2.3 V est B-admissible ssi V^* aussi

Soit $V \in \underline{\mathrm{Rep}}_B(G_K)$ alors $\mathbb{D}_B(V) \otimes_E B \simeq V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B$ d'où

$$\begin{aligned}(V^* \otimes_{\mathbb{Q}_p} B)^{G_K} &= (\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B)^{G_K} \\ &= (\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, B))^{G_K} \\ &= (\mathrm{Hom}_B(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B, B))^{G_K} \\ &= (\mathrm{Hom}_B(\mathbb{D}_B(V) \otimes_E B, B))^{G_K} \\ &= (\mathrm{Hom}_E(\mathbb{D}_B(V), B))^{G_K} \\ &= \mathrm{Hom}_E(\mathbb{D}_B(V), E) \\ &= \mathbb{D}_B(V)^*\end{aligned}$$

où l'avant dernière égalité est dûe au fait que les G_K-invariant du Hom c'est les flèches G_K-équivariantes et que $\mathbb{D}_B(V)$ est G_K-invariant.

2.4 Admissibilité de $\mathbf{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V', V'')$

Il suffit de remarquer que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V', V'') \simeq (V' \otimes_{\mathbb{Q}_p} (V'')^*)^*$$

3 Les premiers exemples

On peut regarder $B = \bar{K}, K^{un}, \mathbb{C}_K, B_{dR}, B_{crys}, B_{ht}, B_{st}$ et encore d'autres. Ici je regarde juste $\bar{K}$ et $\mathbb{C}_K$.

3.1 $\bar{K}$-admissibilité

Les représentations $\bar{K}$-admissibles sont les $\rho\colon G_K \to GL_n(\mathbb{Q}_p)$ telles que ρ est d'image finie. Si $V \in \underline{\mathrm{Rep}}_{\bar{K}}(G_K)$ et $d = (d_i)_i$ engendre $\mathbb{D}_{\bar{K}}(V)$, $v = (v_i)_i$ engendre V. Alors $d_i = \sum a_{ij} \otimes v_j$ et l'idée c'est que A est dans $GL_n(L)$ pour L/K finie puis G_L agit triv sur v. D'où

$$G_K \to Gal(L/K) \to Aut_{\mathbb{Q}_p}(V)$$

3.2 $\mathbb{C}_K$-admissibilité

Un peu le seum de pas l'avoir vu en cours : c'est la théorie de Sen. En gros on a

Théoreme 1 (Sen). *$\rho\colon G_K \to Aut_{\mathbb{Q}_p}(V)$ est $\mathbb{C}_K$-admissible ssi $\rho(I_K)$ est fini. finie.*

Un très bon non-exemple c'est $\mathbb{Q}_p(\chi_K) = \mathbb{Q}_p(1)$ où χ_K est le caractère cyclotomique. Comme y'a une infinité de ramification cette représentation est pas $\mathbb{C}_K$-admissible.

4 B_{HT}-admissibilité

On pose $B_{HT} := \mathbb{C}_K[t, t^{-1}]$ avec l'action :

$$g \sum a_i t^i = \sum g(a_i)\chi_K^i(g) t^i$$

i.e. t est la période de $\mathbb{G}_m$.

Remarque 2. *Pour rappel sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} - 0$ est de genre 1 et à homotopie près le π_1 est engendré par S^1. D'où $t = 2\pi i$ ici !*

4.1 B_{HT} est régulière

D'abord $B_{HT} \subset \mathbb{C}_K(t) \subset \mathbb{C}_K((t))$ et à droite on sait que la G_K-invariance est sur les monômes ! Or $\mathbb{C}_K(\chi_K^i)^{G_K} = 0$ si $i \neq 0$ et K sinon. Faut prouver que B_{HT} est régulière. L'idée est qu'un b t.q la ligne $\mathbb{Q}_p.b$ est G_K-stable est un monôme $a_i t^i$. Faut utiliser $\mathbb{C}_K(\chi_K^i)^{G_K} = 0$.

4.2 $\underline{\mathbf{Rep}}_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \to \mathbf{Grad}_K$

On a

$$(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K[t, t^{-1}])^{G_K} = (\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V \otimes \mathbb{C}_K t^i)^{G_K} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} (V \otimes \mathbb{C}_K t^i)^{G_K}$$

parce que les $:= V \otimes \mathbb{C}_K t^i$ sont G_K-stables. On peut déf

$$gr^i(\mathbb{D}_{B_{HT}}(V)) := (V \otimes \mathbb{C}_K t^i)^{G_K}$$

et obtenir

$$\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \to \mathrm{Grad}_K$$

exact à gauche. Puis exact et fidèle en restreignant à $\underline{\mathrm{Rep}}_{B_{\mathrm{HT}}}(G_K)$ par la théorie générale.

4.3 Graduation et critère d'admissibilité

En gros il suffit de prouver l'isomorphisme en degré 0. Étant donné $V \in \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ on forme $V(i) \subset V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K$ les v tels que $g.v = \chi_K(g)^i v$ pour tout $g \in G_K$. Puis on a via $v \mapsto vt^{-i} \otimes t^i$

$$V(i) \simeq gr^{-1}\mathbb{D}_{HT}(V) \otimes_K Kt^i$$

ensuite si $V\{i\} := V(i) \otimes_K \mathbb{C}_K$ alors

$$V\{i\} \simeq gr^{-i}\mathbb{D}_{HT}(V) \otimes_K \mathbb{C}_K t^i$$

puis

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V\{i\} \simeq gr^0(\mathbb{D}_{HT}(V) \otimes_K B_{HT})$$

et le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V\{i\} \arrow[r, hook] \arrow[d, dash] & V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K \arrow[d, dash] \\
gr^0(\mathbb{D}_{HT}(V) \otimes_K B_{HT}) \arrow[r] \arrow[d] & V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K \arrow[d] \\
\mathbb{D}_{HT}(V) \otimes_K B_{HT} \arrow[r, "\alpha_{HT}"'] & V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{HT}
\end{tikzcd}$$

Où la flèche du haut est la restriction au degré 0 ducoup. En particulier l'iso en haut induit l'iso en bas qui est l'admissibilité vu que α_{HT} respecte la graduation.

4.4 Poids de Hodge-Tate

Dans la décomposition $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V\{i\}$ les i tels que $V\{i\} \neq 0$ sont les poids de Hodge-Tate. Maintenant $m_i := \dim_{\mathbb{C}_K} V\{i\}$ est la multiplicité du poids et $V\{i\} \simeq \mathbb{C}_K(\chi_K^i)^{m_i}$. D'où

$$V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}_K(i)^{m_i}.$$

5 B_{dR}-admissibilité

6 B_{crys}-admissibilité

7 Hiérarchie

8 Trucs sur les modules

8.1 Relation de taille minimale

Étant donné M un R-module et

$$\pi \colon R^{(I)} \to M \to 0$$

avec π la flèche de gauche on peut regarder $r \in \pi^{-1}(m)$ pour $m \in M$. Puis $|supp(r)|$ est fini par déf. D'où on peut regarder une relation de taille minimale pour m. Par déf si $\sum_{j \in J} a_j m_j = m$ pour $n = |J|$ minimal et un des a_j est inversible bah $(m_j)_j$ est libre ! Sinon le $j = j_0$ t.q a_{j_0} est inversible, m_{j_0}, se réécrit en fonction des autres !!

Remarque 3. *Donc quand y'a un corps en jeu c'est direct une famille libre.*

Par contre on voit aussi que passer au corps de fraction peut réduire la taille des relations logique.

8.2 Dans un sous-module

On peut pareil demander pour $N \leq M$ un élément de N d'écriture de taille minimale non nul. Vu que N contient pas forcément de générateur $m \in M$ c'est intéressant, pour le calcul de noyau par exemple.

8.3 Applications aux produits tensoriels

On peut donc prendre des écritures de taille minimales $\sum d_i \otimes c_i$. Ça permet par exemple de faire le trick d'Artin !

8.4 Modules libres sont plats

On a

$$R^n \otimes_R B \simeq B^n$$

via

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_R(R^n \otimes_R B, C) &= \mathrm{Hom}_R(R^n, \mathrm{Hom}_R(B, C)) \\
&= (\mathrm{Hom}_R(R, \mathrm{Hom}_R(B, C)))^n \\
&= (\mathrm{Hom}_R(B, C)^n) \\
&= \mathrm{Hom}_R(B^n, C)
\end{aligned}$$

D'où l'isomorphisme puis le résultat vu que on peut calculer des antécédents terme à terme pour la surjectivité à droite.