Vecteurs de Witt

1 Définitions

Pour p un premier et A un anneau commutatif unitaire déf

$$w_n(X_0,\ldots,X_n) := X_0^{p^n} + pX_1^{p^{n-1}} + \ldots + p^n X_n$$

dans $R = \mathbb{Z}[X_0,\ldots,X_n,\ldots]$.

On peut prouver que pour tout $F(X,Y) \in \mathbb{Z}[X,Y]$ il existe

$$(f_i(\bar{X},\bar{Y}))_{i\in\mathbb{N}} \in (R\times R)^{\mathbb{N}}$$

tel que

$$w_n(f_0(\bar{X},\bar{Y}),\ldots,f_n(\bar{X},\bar{Y})) = F(w_n(\bar{X}),w_n(\bar{Y}))$$

en particulier pour $F(X,Y) = X+Y$ ou $X.Y$. Je note $\Phi(F) = (f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ les polynômes associés à F. Les p,n-vecteurs de Witt maintenant c'est

$$W_n(A) := A^n$$

muni de l'addition

$$x +_{W(A)} y := (\Phi(X+Y)_i(x,y))_{i\in n}$$

et

$$x ._{W(A)} y := (\Phi(X.Y)_i(x,y))_{i\in n}$$

. Puis les p-vecteurs de Witt c'est $W(A) := W_\omega(A)$.

2 Calcul

En pratique pour le passage à la caractéristique p faut calculer d'abord dans $\mathbb{Z}$ les w_n puis réduire modulo p.

2.1 Preuve de l'identité : congruences

L'unicité et la construction de $\Phi(F(X,Y))$ est directe par récurrence. A priori

$$\Phi(F(X,Y)) \in \mathbb{Z}[p^{-1}][\overline{X}]^{\mathbb{N}}$$

et on veut

$$\Phi(F(X,Y)) \in \mathbb{Z}[\overline{X}]^{\mathbb{N}}$$

et pour ça faut montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$

$$F(w_n(\bar{X}), w_n(\bar{Y})) = w_n(\Phi(F(X,Y))) \mod p^n$$

L'idée c'est déjà que

$$w_{n-1} \circ \varphi(x) = w_n(x) \mod p^n \tag{1}$$

puis que pour $f \in (X_0, \ldots, X_n)$ on a

$$f^{p^m} \equiv f^{p^{m-1}} \circ \varphi \mod p^m \tag{2}$$

d'où si

$$F(w_{n-1}(\bar{X}), w_{n-1}(\bar{Y})) = w_{n-1}(\Phi(F(X,Y))) \tag{3}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
F(w_n(\bar{X}), w_n(\bar{Y})) &= F(w_{n-1} \circ \varphi(\bar{X}), w_{n-1} \circ \varphi(\bar{Y})) \mod p^n \\
&= w_{n-1}(h_0 \circ \varphi, \ldots, h_{n-1} \circ \varphi) \mod p^n \\
&= w_{n-1}(h_0^p, h_1^p, \ldots, h_{n-1}^p) \mod p^n \\
&= w_n(h_0, \ldots, h_n) \mod p^n
\end{aligned}$$

où la première égalité est dûe à (3) la deuxième à (1) et la troisième à (2). La dernière c'est à nouveau (1)

2.2 Preuve de (2)

L'équation (2) est obtenue simplement parce que si $A = B \mod p$ alors

$$A^{p^m} - B^{p^m} = (A^{p^{m-1}} - B^{p^{m-1}}) \left(\sum_{i=0}^{p-1} A^{p^{m-1}i} B^{p^{m-1}(p-1-i)} \right)$$

sauf que par récurrence le premier terme est divisible par p^{m-1} et le deuxième vaut 0 modulo p via la congruence $A = B \mod p$ d'où le résultat.

3 A parfait de caractéristique $p > 0$

Dans ces conditions $W(A)$ est muni de la topologie p-adique et $p^n.x = V^n\varphi^n(x)$. Ça se voit au moment du calcul si $x \in V^n(W(A))$ au moment du calcul de x^2 par exemple on voit que $\Phi(X.Y)_n(x,x) = p^n x_n^2$ qui se réduit en $0 \mod p$. Et la suite aussi.

3.1 Topologie

Ducoup on peut munir $W(A)$ de la topologie p-adique via les $p^nW(A) =: I_n(A) = \ker(W(A) \to W_n(A))$.

3.2 Lift de Teichmüller

Le lift de Teichmüller est donné par

$$[\_] \colon a \mapsto (a, 0, \ldots)$$

et c'est clairement multiplicatif.

3.3 Verschiebung et Frobenius

L'opérateur Verschiebung (shift) de dual le Frobenius vérifie $V\varphi = \varphi V = p$ et on a

$$p.x = (0, x_0^p, x_1^p, \ldots)$$

via l'identité

$$w_n(\Phi(p.X)) = pw_n(X)$$

et une récurrence.

3.4 Écriture canonique et propriété universelle

De $p = \varphi.V$ on obtient la caractéristique 0 et l'écriture canonique

$$x = \sum_{i\in\mathbb{N}} p^n[x_n^{p^{-n}}]$$

qui montre la p-complétude et la caractéristique 0. Pour la propriété universelle, l'idée c'est que un anneau p-adiquement complet R avec $R/p = A$ comme anneau résiduel vérifie que tout élément $x \in R$ s'écrit comme $x = \sum p^i a_i$ avec a_i un représentant. Puis $W(A) \to R$ est défini terme à terme. Ça marche parce que $\Phi(F(X,Y))$ est dans $\mathbb{F}_p[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathbb{N}}$ ou $\mathbb{Z}[\ldots]^{\mathbb{N}}$. D'où $w_n(\varphi(a + a'))$

3.5 Racines de l'unité, $W(\mathbb{F}_p)$

Vincent pense que l'idée c'est de canoniser le lift de teichmüller. Ce qui est plutôt cohérent, i.e. le système de représentants du corps résiduel est donné par les $([i])_{i \in A}$.

Mais en fait il y'a une suite intéressante à cette histoire. Voir l'article de M. Hazewinkel