Anneaux d'entiers monogènes et ramification

0.1 Prérequis

Quelques prérequis nécessaire à l'étude : si $\mathcal{O}_K$ est de Dedekind, quand est-ce que

1. $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est de Dedekind.
2. $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est fini sur $\mathcal{O}_K$.

Pour la première question :

1. Si $\mathcal{O}_K$ est semi-local ca se fait bien parce que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est noethérien sur $\mathcal{O}_K$ ssi $\tilde{\mathcal{O}}_K \otimes \mathcal{O}_K = (\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{m}_i}$ est noethérien pour tout les premiers (faut en avoir un nb fini).
2. Plus généralement si L/K est finie par Krull-Akizuki.

Pour la deuxième : dès que $\sum e_i f_i = [L : K]$ d'où si

1. K est complet, par densité de $\sum_{i,j} e_j \pi_L^i \mathcal{O}_K$ dans $\tilde{\mathcal{O}}_K$.
2. L/K est séparable via le disriminant non nul et la trace non dégénérée.
3. Évidemment si $\tilde{\mathcal{O}}_K = \mathcal{O}_K[\alpha]$ est monogène.

Chapitre 1

Cadre

1.1 Objets

On se place **toujours** dans le cadre où on a $\mathcal{O}_K$ de valuation **discrète**. Le cadre en gros c'est

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_K \arrow[r, dash] \arrow[d] & \tilde{\mathcal{O}}_K \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i} \arrow[r, phantom, "=?="] \arrow[d] & (\mathcal{O}_L) \\
k_K \arrow[rr] & & k_L &
\end{tikzcd}$$

C'est à dire qu'on prends la clôture intégrale, on regarde ses idéaux maximaux et on obtient des extensions de d.v.r. Quand K est complet ou quand on fixe une valuation (un premier $\mathfrak{m}_i$) sur L, $\mathcal{O}_L$ fait sens.

1.2 Pourquoi on cherche des extensions monogènes

Pour calculer en fait une marche à suivre c'est

On sait le faire dans $\mathcal{O}_K[\alpha]$.

Si c'est le cas alors :

1. La factorisation de P dans $k_K[X]$ donne la ramification et les idéaux maximaux de $\tilde{\mathcal{O}}_K$!
2. Plus précisément, si
$$\bar{P} = \prod_i p_i^{r_i} \in k_K[X]$$
alors $\mathfrak{m}_i = (\mathfrak{m}_K, p_i(\alpha))$.

Le point **important** c'est la ramification, on relève

$$P(\alpha) = \prod_i P_i^{r_i}(\alpha) + \epsilon(\alpha)$$

ce qui donne par le deuxième point

$$\prod_i \mathfrak{m}_i^{r_i} = \prod_i (\mathfrak{m}_K, P_i(\alpha))^{r_i} \subset \mathfrak{m}_K \tilde{\mathcal{O}}_K = \prod_i \mathfrak{m}_i^{e_i}$$

On en déduit $r_i \geq e_i$ pour tout i et on conclut directement avec

$$\sum r_i f_i = \deg \bar{P} = \deg P = [L : K] = \sum e_i f_i$$

On a utilisé que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est fini sur $\mathcal{O}_K$ pour l'égalité $\deg \bar{P} = \deg P$ **et** la dimension $[L : K] = \sum e_i f_i$.

Chapitre 2

Des cas où on sait que c'est monogène

D'abord un cadre intéressant.

2.1 Le cas canonique

Étant donné une extension $\mathcal{O}_K - (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}} = \mathcal{O}_L$, y'a une inclusion à regarder, si $k_K - k_L$ contient une famille libre et génératrice $(e_i)_i$:

$$\mathcal{O}_L \subset \sum e_i \mathcal{O}_K + \pi_L \mathcal{O}_L$$

puis en itérant

$$\mathcal{O}_L \subset \sum e_i \pi_L^j \mathcal{O}_K + \pi_K \mathcal{O}_L$$

et même pour tout $n \geq 1$

$$\mathcal{O}_L \subset \sum_i \sum_{j=0,\dots,e-1} e_i \pi_L^j \mathcal{O}_K + \pi_K^n \mathcal{O}_L$$

car $\pi_L^e \in \mathcal{O}_K$. Donc une densité de M dans $\mathcal{O}_L$. Je note

$$M = \sum_{i=1,\dots,f} \sum_{j=0,\dots,e-1} e_i \pi_L^j \mathcal{O}_K.$$

En gros, dès que $L = K[\alpha]$, par exemple : Il suffit de l'extension résiduel soit séparable, i.e.

$$\bar{P} \text{ est séparable.}$$

Remarque 1. *Là on a juste utilisé que k_L est de dimension finie sur k_K.*

2.2 Cas $\bar{P}$ séparable avec $L = K[\alpha]$

On suppose $L = K(\alpha)$. Un premier critère de monogénéité :

$$\text{Si } \bar{P} \text{ est séparable, alors } \tilde{\mathcal{O}}_K = \mathcal{O}_K[\alpha]$$

Une preuve rapide c'est que

$$\mathcal{O}_K[\alpha]_{\pi_K} = K[\alpha] = L$$

est intégralement clos et

$$\mathcal{O}_K[\alpha]/(\pi_K) = k[\alpha] = k \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K[\alpha]$$

est réduit, c'est là qu'on utilise que $\bar{P}$ est séparable. D'où

$$\mathcal{O}_K[\alpha]$$

est intégralement clos et dans $\tilde{\mathcal{O}}_K$.

2.2.1 Remarques

Ce cas arrive dans les cas où

- On est en caractéristique 0, car séparable donc primitif.
- Dans le cas non ramifié complet, via π_L.
- Dans le cas modérément ramifié complet, via π_L. (séparer en non ramifié et totalement ramifié)

Si on veut on peut aussi utiliser le cas canonique pour le prouver en montrant que $\pi_L = P(\alpha).u$ pour un P bien choisi, je le montre en section sur la ramification modérée.

2.3 Cas non ramifié complet

Définition 1. L/K est non ramifiée si $e_{L_i/\hat{K}} = 1$ et k_{L_i}/k_K sont séparables.

En gros, on sait juste pas si $L = K[\alpha]$. Dit de manière compliquée, dans le cas complet on a une équivalence entre :

1. L'extension L/K est non ramifiée (par déf non ramifiée et $k_{K(\alpha)}/k_K$ est séparable).

Des cas où on sait que c'est monogène

2. Il existe $\alpha : L = K(\alpha)$ et P le pol min de α sur K est séparable sur k_K.

L'idée c'est juste que la formule $ef = [L : K]$ est vraie et $e = 1$. On peut relever une base de l'extension résiduelle ! En gros ça donne une réciproque à la section d'avant. I.e. si L/K est non ramifiée alors

$$L = K[\alpha],\ \bar{P} \text{ est séparable d'où } \mathcal{O}_K[\alpha] = \tilde{\mathcal{O}}_K$$

En caractéristique 0, L/K finie implique séparable implique L est monogène sur K.

2.4 Cas p-adique

Dans le cas p-adique, les corps finis sont parfaits et on a toujours des extensions séparables (c'est immédiat de la déf)! En particulier, si $\bar{P}$ est inséparable c'est qu'il est scindé. Ça se voit bien par Hensel :

1. On a toujours $\bar{P} = F^d$ et en réécrivant $d \deg F = \deg P = e.f$ sachant que $\deg F \mid f$ (à vérifier mais ça se voit) on obtient $e \mid d$. (l'égalité c'est qu'on suppose P unitaire)

En fait on a beaucoup mieux mais j'en parlerai dans une autre note.

2.5 Cas où k_{L_i} séparable sur k_K

On relève la monogénéité à $\mathcal{O}_L/\mathfrak{m}_K\mathcal{O}_L$ puis CRT quand c'est possible!

2.5.1 $\mathcal{O}_{L_i}/\mathfrak{m}_K\mathcal{O}_{L_i}$ est monogène sur k_K

On regarde L/K finie. Si

1. les k_{L_i}/k_K sont séparables.

alors

$$(\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i}/\mathfrak{m}_K(\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i}$$

est monogène sur k_K. On peut réécrire M, via $e_i \in \mathcal{O}_K[\alpha]$, d'où

$$M \subset \sum \mathcal{O}_K[\alpha]\pi_i^j$$

alors y suffit de montrer que $\pi_i \in \mathcal{O}_K[\alpha]$. Si

$$k_L = k_K(\bar{\alpha})$$

et $\bar{P}$ le pol min de $\bar{\alpha}$ alors $(P(\alpha)) = \mathfrak{m}_i$ ou $(P(\alpha + \pi_i)) = \mathfrak{m}_i$. Via $\bar{P}$ est séparable d'où $\bar{P}' \neq 0$:

$$P(\alpha + \pi_i) - P(\alpha) = \pi_i(P'(\alpha) + \pi_i \beta)$$

maintenant petit détail : $P(\alpha + \pi_i), P(\alpha) \in \pi_i$ par déf d'où ce qu'on veut et

$$k(\bar{\alpha}) = (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i} / \mathfrak{m}_K (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i}.$$

2.5.2 Se ramener au cas pas local

On demande à ce que $\prod k_{L_i}$ soit monogène sur k_K. C'est la forme réduite de $\tilde{\mathcal{O}}_K / \mathfrak{m}_K \tilde{\mathcal{O}}_K$. Et non on aurait pas pu le déduire directement du cas local (presque). En fait je comprends pas parce que, étant donné que c'est la forme réduite et que c'est monogène, pas besoin de s'embêter à montrer que $\mathcal{O}_{L_i} / \mathfrak{m}_K \mathcal{O}_{L_i}$ est monogène ? En tout cas ça fournit une preuve du cas local en utilisant la séparabilité. À nouveau si k_{L_i} est monogène juste et pas forcément séparable, d'après le lemme $\mathcal{O}_{L_i} / \mathfrak{m}_K \mathcal{O}_{L_i}$ est monogène? (Post-localisation)

2.6 Cas modérément ramifié général

Dans le cas $\mathcal{O}_K - \tilde{\mathcal{O}}_K$, si on part du principe que

1. Les $k_K - k_i$ sont séparables.
2. $\prod k_i = \prod \tilde{\mathcal{O}}_K / \mathfrak{m}_i \tilde{\mathcal{O}}_K$ est monogène sur k. (Ça se déduit du 1. dans plusieurs cas)
3. $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est fini sur $\mathcal{O}_K$.

Remarque 2. *Pour* 2. *c'est* 2. *puis* 3. *(k fini, card*$(k) > max(n, 3)$ *avec* n *le nombre d'idéaux) ou* 1. *(k infini) du lemme 3.18.*

Donc on utilise que un produit d'algèbres monogènes finies est monogène fini ssi sa version réduite l'est (2. du lemme 3.18) d'où

$$\tilde{\mathcal{O}}_K / \mathfrak{m}_K \tilde{\mathcal{O}}_K$$

est monogène sur k (CRT) si le produit de corps l'est disons

$$\tilde{\mathcal{O}}_K / \mathfrak{m}_K \tilde{\mathcal{O}}_K = k_K(\theta)$$

Maintenant si

Des cas où on sait que c'est monogène

2. $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est fini sur $\mathcal{O}_K$

alors il est monogène via Nakayama parce que $\tilde{\mathcal{O}}_K \subset \mathcal{O}_K[\theta] + \mathfrak{m}_K\tilde{\mathcal{O}}_K$.

Définition 2. Petit rappel de définition, L/K est non ramifiée si toutes les extensions de DVRS ont $e \wedge char(k_K) = 1$ et $k_K - k_{L_i}$ est séparable.

Remarque 3. *Donc ca a pas exactement attrait à la ramification? Je vois pas où on utilise tame et pas juste que les extensions résiduelles sont séparables. Après relecture j'ai vraiment l'impression que ça se précise.*

Donc maintenant si L/K est modérément ramifiée, d'où les extensions résiduelles sont séparables (ça c'est vraiment nécessaire pour $(P(\alpha)) = \mathfrak{m}_L$) d'où $\prod k_{L_i}$ est monogène dans les cas adéquats, par exemple

1. $\tilde{\mathcal{O}}_K$ local (par ex complet), par exemple cas totalement ramifié. ($\tilde{\mathcal{O}}_K$ local par déf et $e = [L : K]$)

2. Cas où k_K est infini.

Remarque 4. *Quasi-sur que les conditions sont loin d'être optimales.*

2.7 Cas modérément ramifié complet

Dans le cas L/K est modérément ramifiée, si K est complet alors $\tilde{\mathcal{O}}_K = \mathcal{O}_L$ est local et on a l'hypothèse, si k_K est infini alors $\prod k_i$ est monogène et on a l'hypothèse.

Remarque 5. *On est pas dans le cas $\bar{P}$ séparable là. Pas exactement.*

2.8 Cas totalement modérément ramifié

On a $k_{L_i} = k_L = k_K$ est finie séparable, puis on suppose par définition que $[L : K] = e$ donc $\mathcal{O}_L$ est fini sur $\mathcal{O}_K$. Alors on a toute les hypothèses.

2.8.1 Engendré par l'uniformisante

En fait on a $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\pi_L]$, dans les deux directions, si c'est totalement ramifié π_L vérifie un pol d'Eisenstein et inversement un pol d'eisenstein a pour racine une unif et c'est totalement ramifiée. Le deuxième point est technique, mais si on prend $P(\alpha) = 0$ avec P d'eisenstein. On utilise que $P(0)(1 + Q(\alpha)) = -\alpha^d$ et $P(0) = a_0$ est une uniformisante tout du long pour montrer que $\mathcal{O}_K[\alpha] = B$ est la clôture intégrale de $\mathcal{O}_K$ dans L en montrant que son seul idéal maximal est (α).

À l'inverse, si $P(\pi_L) = 0$, $a_0 \in (\pi_L) \cap \mathcal{O}_K$ puis on continue par l'absurde pour montrer que P est d'eisenstein. Puis on utilise le point d'avant pour la monogénéité.

2.9 Cas totalement modérément ramifié complet

Dans ce cas, $\mathcal{O}_L$ est fini sur $\mathcal{O}_K$ car on a le cas d'égalité $[L : K] = e$ à nouveau.

2.9.1 $X^e - \pi_K$

L'idée est claire, $\pi_L^e.u = \pi_K$ donc y suffit d'avoir une racine a $X^e - u$, mais le fait que $X^e - u$ est séparable mod $\mathfrak{m}_K$ ça suffit pas y faut une racine. Comme $f = 1$ on a $u = v(1+\epsilon)$ avec $v \in \mathcal{O}_K^\times$ et $\epsilon \in \mathfrak{m}_K$ ($0 \neq u = v \mod \mathfrak{m}_K$). Via

$$\mathcal{O}_K^\times \to \mathcal{O}_L^\times \to k_L^\times$$

maintenant $1+\epsilon$ a une racine e-ème par Hensel, c'est là l'hypothèse modérée. D'où on remplace π_K par π_K/v.

2.10 Cas galoisien et corps locaux

On a $ef = [L : K]$ et $M = \mathcal{O}_L$, d'où vu que $k_L - k_K$ est séparable et θ est un lift de $k_K(\bar{\theta}) = k_L$, comme $M = \sum \theta^i \pi_L^j \mathcal{O}_K$: $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\theta, \pi_L]$. En plus, comme $\bar{\theta}$ est séparable, un lift bien choisi du polynôme minimal de $\bar{\theta}$ est séparable et $P(\theta)$ ou $P(\theta + \pi_L)$ est une uniformisante. D'où en fait $\mathcal{O}_K[\theta] = \mathcal{O}_L$ (!!).

2.11 Corps de fonctions