Approximation p-adiques(Hensel)

0.1 Relever des facteurs

Y'a trois théorèmes, dans K ultramétrique, si

$$P \in \mathcal{O}_K[X]$$

et

$$\bar{P} = f.g \in k_K[X]$$

avec $(f, g) = 1$ alors il existe d'uniques (à unités près) $\bar{F} = f$, $\bar{G} = g$ avec $\deg(f) = \deg(F)$ (on peut fixer un des deux degrés) et

$$P = F.G \in \mathcal{O}_K[X]$$

Note 1. *On peut relever des facteurs premiers entre eux de manière unique.*

Remarque 1. *La preuve consiste à approximer F et G par (F_n) et (G_n) et dire que $||P - F_nG_n||$ tend vers 0 en norme de Gauss. En particulier on obtient les coefficients des facteurs!*

La deuxième version dit que si il existe $\alpha \in \mathcal{O}_K$ tel que

$$|P(\alpha)| < |P'(\alpha)|^2$$

alors il existe un unique zéro $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{O}_K$ proche de α, i.e. telque

$$|\alpha - \tilde{\alpha}| < |P'(\alpha)|$$

Note 2. *Le point c'est de dire que si la pente est suffisamment grande et $P(\alpha)$ est suffisamment petit devant la pente. On va pouvoir se rapprocher assez de 0 pour avoir un zéro! Penser au cas réel.*

Remarque 2. *En notant $P(\alpha) = \lambda$ le tricks c'est de considérer l'expansion de Taylor $P(X + \alpha) = P(\alpha) + \lambda X + X^2 R(X)$ d'où*

$$\lambda^{-2} P(\lambda X + \alpha) = \lambda^{-2}(P(\alpha) + \lambda^2 X + X^2 S(X))$$

puis en réduisant modulo $\mathfrak{m}$ le résultat.

0.2 Critère nécessaire à l'irréducibilité

On sait que si $P \in \mathcal{O}_K[X]$, alors $\max |a_i| = \max |a_0|, |a_d|$. Le point c'est que sinon si $|a_i| > |a_0|, |a_d|$ alors $Q = a_i^{-1} P \in \mathcal{O}_K[X]$ et $\bar{Q} = X^r Q' \mod \mathfrak{m}$ avec $r < d$ (important) et $Q' \wedge X = 1$. D'où on conclut avec Hensel.