Quand est-ce que $\sum e_i f_i = [L : K]$?

0.1 Manipuler

Le point c'est qu'on a toujours

$$\sum e_i f_i \leq [L : K]$$

(voir lemme 3.6 vu que dans le cas des dvrs on sait pas si $f = \infty$) avec égalité ssi $\tilde{\mathcal{O}}_K - \mathcal{O}_K$ est finie ssi $L \otimes_K \hat{K}$ est réduite. Un gros détail, les transitions de dimensions se font entre $k_K - k_L$ et $K - L$. Autrement dit on s'en fout de la finitude de $\tilde{\mathcal{O}}_K$ sur $\mathcal{O}_K$. Si $[L : K]$ est finie alors f_i aussi pour tout i.

Remarque 1. *Cette histoire de B_L réduite vient du fait que*

$$B_L \to \prod L_i$$

a un noyau nilpotent vu que c'est $\cap \mathfrak{m}_i$ et qu'on est sur une $\hat{K}$-algèbre de type fini à gauche (car de dimension finie $\to$) et à gauche c'est de dim $\dim_{\hat{K}} B_L = [L : K]$ *alors qu'à droite c'est* $\sum e_i f_i$.

0.2 Prérequis

Quelques prérequis nécessaire à l'étude : si $\mathcal{O}_K$ est de Dedekind, quand est-ce que

1. $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est de Dedekind.

2. $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est fini sur $\mathcal{O}_K$.

Pour la première question :

1. Si $\mathcal{O}_K$ est semi-local ca se fait bien parce que $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est noethérien sur $\mathcal{O}_K$ ssi $\tilde{\mathcal{O}}_K \otimes \mathcal{O}_K(\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{m}_i}$ est noethérien pour tout les premiers (faut en avoir un nb fini).

2. Plus généralement si L/K est finie par Krull-Akizuki.

Pour la deuxième : dès que $\sum e_i f_i = [L : K]$ d'où si

1. K est complet, par densité de $\sum_{i,j} e_j \pi_L^i \mathcal{O}_K$ dans $\tilde{\mathcal{O}}_K$.

2. L/K est séparable via le disriminant non nul et la trace non dégénérée.

3. Évidemment si $\tilde{\mathcal{O}}_K = \mathcal{O}_K[\alpha]$ est monogène.

Chapitre 1

Cadre

1.1 Objets

On se place **toujours** dans le cadre où on a $\mathcal{O}_K$ de valuation **discrète**. Le cadre en gros c'est

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_K & \text{——} & \tilde{\mathcal{O}}_K & \subseteq & (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}_i} =?= (\mathcal{O}_L) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ k_K & & \longrightarrow & & k_L \end{array}$$

C'est à dire qu'on prends la clôture intégrale, on regarde ses idéaux maximaux et on obtient des extensions de d.v.r. Quand K est complet ou quand on fixe une valuation (un premier $\mathfrak{m}_i$) sur L, $\mathcal{O}_L$ fait sens.

1.2 Les cadres successifs

On regarde d'abord $\mathcal{O}_K - \mathcal{O}_L$ une extension de DVR. De sorte à montrer que

$$e.f = \dim \mathcal{O}_L/\mathfrak{m}_K\mathcal{O}_L$$

à l'aide du module M. Ensuite on regarde $\mathcal{O}_K - \tilde{\mathcal{O}}_K$. Et on montre que

$$\dim_{k_K} \tilde{\mathcal{O}}_K/\mathfrak{m}_K\tilde{\mathcal{O}}_K \leq [L:K]$$

enfin on montre que dans le même cas que

$$\dim_{k_K} \tilde{\mathcal{O}}_K/\mathfrak{m}_K\tilde{\mathcal{O}}_K = \sum e_i f_i \leq [L:K]$$

avec égalité quand (de manière équivalente)

1. $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est fini sur $\mathcal{O}_K$.
2. $L \otimes_K \hat{K}$ est réduite.

1.3 Extensions de dvrs.

Étant donné une extension $\mathcal{O}_K - (\tilde{\mathcal{O}}_K)_{\mathfrak{m}} = \mathcal{O}_L$, y'a une inclusion à regarder, si $k_K - k_L$ contient une famille libre et génératrice $(e_i)_i$:

$$\mathcal{O}_L \subset \sum e_i \mathcal{O}_K + \pi_L \mathcal{O}_L$$

puis en itérant

$$\mathcal{O}_L \subset \sum e_i \pi_L^j \mathcal{O}_K + \pi_K \mathcal{O}_L$$

et même pour tout $n \geq 1$

$$\mathcal{O}_L \subset \sum_i \sum_{j=0,\dots,e-1} e_i \pi_L^j \mathcal{O}_K + \pi_K^n \mathcal{O}_L$$

car $\pi_L^e \in \mathcal{O}_K$. Donc une densité de M dans $\mathcal{O}_L$. Je note

$$M = \sum_{i=1,\dots,f} \sum_{j=0,\dots,e-1} e_i \pi_L^j \mathcal{O}_K.$$

Ça montre que $\mathcal{O}_L/\mathfrak{m}_K\mathcal{O}_L$ est de dimension au plus $e.f$. L'autre est un peu technique mais pas dur, y s'agit de jouer sur la valuation.

Remarque 2. *Là on a juste utilisé que k_L est de dimension finie sur k_K. On peut écrire des doubles inégalités même en général.*

On a construit un $\mathcal{O}_K$-module libre dense dans $\mathcal{O}_L$.

1.4 Cas canonique

On a directement $\dim_{k_K} \tilde{\mathcal{O}}_K/\mathfrak{m}_K\tilde{\mathcal{O}}_K = \sum e_i f_i$. Par le lemme chinois et le cas des dvrs.

1.5 Cas complet

On se retrouve dans le cas des dvrs. Et on a

$$M \otimes_{\mathcal{O}_K} K = L$$

parce que dense dans $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_K} K = L$ et complet donc fermé. Donc on obtient le cas d'égalité $e.f \geq [L : K]$.

Remarque 3. *Le fait que $M \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ soit un $K-$e.v dense dans L force pas de même dimension ! Ça peut arriver qu'une ligne soit dense en dimension 2. Par exemple $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ avec la norme infinie, ou toutes les v_p avec $p \neq 2$ je crois.*

1.6 Équivalences

Seulement de "égalité" équivaut à $\tilde{\mathcal{O}}_K$ fini sur $\mathcal{O}_K$. De droite à gauche c'est que $\mathcal{O}_K$ est principal donc fini implique libre ici, la dimension se voit bien d'où l'égalité. L'autre côté c'est que on obtient une base de L sur K et on fait redescendre les relations.