Penser avec les catégories

2024-2025

Table des matières

0.1 Yoneda et foncteurs représentables

0.2 Résumé

0.2.1 Chapitre I et II

Une catégorie additive est une catégorie avec un objet 0, ayant les produits finis qui implique que les Hom sont des monoides abéliens auxquel on demande en plus que ce soit des groupes.

Une catégorie abélienne est additive + noyaux et conoyaux + théorème d'isomorphisme. En admettant que Ab est abélienne, une catégorie abélienne est une catégorie telle que les foncteurs noyaux et conoyaux soient représentables dans A de sorte que tautologiquement h_I et h^P aient les propriétés d'exactitudes voulues. Ça force le théorème d'isomorphisme et l'existence de conoyaux et noyaux.

À comparer avec les catégories AB5.

Remarque 1. *En fait les catégories abéliennes A ont une unique théorie cohomologique canonique associée à chaque foncteur $F\colon A \to B$ où est B est abélienne.*

0.3 Cohomologie

Chapitre 1

Objets universels dans les catégories abéliennes

1.1 Remarques sur la variance

Le bi-foncteur $h_{\_}(\_)$ est celui qu'on a besoin pour la cohomologie. Et on a $h_M(A) = h^A(M)$.

1.1.1 Le plongement de Yoneda

Le foncteur $I \mapsto h_I$ est covariant et pleinement fidèle, via $I \to I'$ et $M \to I$ fournit $M \to I \to I'$. Mais ca c'est Yoneda. À l'inverse $P \mapsto h^P$ est contravariant vu que étendre naturellement $P' \to M$ c'est par pullback.

1.1.2 Spécialisation, foncteur représentable

Donc une fois I fixé, h_I est contravariant, vu que $M \to I$ s'étend par pullback. Et h^P est covariant vu que $P \to A$ s'étend par pushforward. Et surtout que $h_I(M) \to h_I(M') = h^M(I) \to h^{M'}(I)$ donc on a la variance de $h^{\_}$.

1.2 Exactitude du foncteur Hom

Ducoup, l'exactitude de $A \to B \to C \to 0$ via h_M est toujours vraie. On obtient

$$0 \to h_M(C) \to h_M(B) \to h_M(A)$$

et pour obtenir l'exactitude à droite, il faut que $M = I$ soit un injectif.

On a deux suites exactes à traiter

$$0 \to A \to B \to C$$

et

$$A \to B \to C \to 0$$

c'est la deuxième qui m'interesse pour la cohomologie via h_I. Je regarde que

$$A \to B \to C \to 0$$

On en déduit deux suites exactes

$$0 \to h_I(C) \to h_I(B) \to h_I(A)$$

et

$$0 \to h^C \to h^B \to h^A$$

la deuxième donne pas la propriété des injectifs. L'exactitude de la deuxième se vérifie terme à terme donc c'est équivalent l'autre.

1.2.1 Preuves du deuxième cas

Injectivité et surjectivité sur les côtés

Le cas $0 \to h^C \to h^B$ est clair l'injectivité c'est le fait que un épi $B \to C \to 0$ vient de $(C \to M) \mapsto (B \to C \to M)$ est injectif. Et ça se traduit en mono dans la catégorie opposée où cette fois un mono $0 \to A \to B$ fournit un mono

$$0 \to h_A \to h_B$$

par la variance et $M \to A \mapsto M \to A \to B$ uniquement.

Remarque 2. *Marrant y'a ptet un truc philosophique sur cette asymétrie ?*

Exactitude au milieu où $\ker$ et coker

Remarque 3. *Pour rappel un noyau K est donné par une injection exacte :*

$$0 \to h_K \to h_B \to h_C$$

et un conoyau par

$$0 \to h^{coK} \to (h^B \to h^A) = \ker(h^B \to h^A)$$

l'image elle c'est

$$0 \to h_{Im} \to h_B \to h_{coK(A \to B)} = \ker(h_B \to h_{coK(A \to B)})$$

Maintenant on veut pas exactement montrer que $h_K = h_{\mathrm{im}}$ sachant $K = \mathrm{im}$ vu que c'est immédiat. On veut montrer que $\ker(h_I(B) \to h_I(A)) = \mathrm{im}(h_I(C) \to h_I(B))$ pour tout I mais le problème c'est que ça se traduit en

$$\ker(h^B \to h^A) = \mathrm{im}(h^C \to h^B)$$

et donc on a pas a priori la propriété universelle direct. Le fait que ce soit pas intuitif c'est que on demande que de $B \to M$ on ait $A \to B \to M = 0$ ssi $A \to B \to M$ se factorise par $A \to B \to C \to M$ i.e.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[dl, dashed] \\ & M & \end{tikzcd}$$

On dirait que M est un projectif. Ça s'éclaircit en rappelant que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[dl, dashed] & 0 \\ & M & & \end{tikzcd}$$

et là on peut définir $C \to M$ parce que $B \to C$ est un épi intuitivement. Plus concrètement l'idée c'est une extension de celle du théorème d'iso. Étant donné *coim* comment je déf *coim* $\to$ *im*! Là c'est l'inverse! En fait on prouve que

$$C = \mathrm{coker}(A \to B)$$

via $coim(B \to C) \simeq C$ dans la catégorie abélienne et

$$\mathrm{coker}(A \to B) = \mathrm{coker}(\mathrm{im}(A \to B) \to B) = \mathrm{coker}(\ker(B \to C) \to B) = \mathrm{coim}(B \to C)$$

par exactitude au milieu.

Exactitude au milieu en bref

On veut que $\ker(h^B \to h^A) = \mathrm{im}(h^C \to h^B)$, ça revient à dire que $C = \mathrm{coker}(A \to B)$. Et on utilise l'exactitude pour voir que $\mathrm{coker}(A \to B) = \mathrm{coim}(B \to C) = \mathrm{im}(B \to C) = C$. En termes de foncteurs. La coimage vérifie

$$0 \to h^{\mathrm{coim}(B\to C)} \to h^B \to h^{\ker(B\to C)}$$

$$h^{\mathrm{coim}(B\to C)}$$

et on a un pont $h^{\mathrm{coim}(B\to C)} = h_{\mathrm{im}(B\to C)}$.

Le théorème d'iso est un pont entre $h^{\_}$ et $h_{\_}$

1.2.2 Preuves du premier cas

Pour l'exactitude au milieu, on utilise seulement que

$$0 \to A \to B$$

exact implique $A \simeq \mathrm{im}(A \to B)$ en particulier, $M \to B$ tel que $M \to B \to C = 0_{M,C}$ implique $M \to B = M \to \mathrm{im}(A \to B) \to B$ et via l'isomorphisme on obtient naturellement $M \to A$ tel que $M \to B$ et $M \to A \to B$.

1.3 Injectifs et projectifs

Pour rappel $h_I(\_) := \mathrm{Hom}(\_, I)$ et $h^P(\_) := \mathrm{Hom}(P, \_)$. Être injectif I ça revient à ce que l'exactitude de

$$0 \to M' \to M$$

devienne l'exactitude de $h_I(M) \to h_I(M') \to 0$. C'est un peu bizarre à intuiter au sens où le diagramme est

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, hook] \arrow[d] & M \arrow[dl, dashed] \\ I & \end{tikzcd}$$

et que de $M' \to I$ on a une flèche qui induit l'existence de $M \to M$. C'est une condition de surjectivité! I.e. h_I est exacte à droite (en passant à la catégorie opposée). À l'inverse pour les projectifs

$$\begin{tikzcd} M' & M \arrow[l, two heads] \\ P \arrow[u] \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

1.4 Monomorphismes et épimorphismes

En résumé $A \to B$ est un mono veut dire que

$$h_A \to h_B$$

est injectif via $i_* = h_i := (M \to A) \mapsto (M \to A \to B)$. (ca se vérif bien terme à terme) et pour la remarque, h_A est un foncteur de $\mathcal{A}$ dans Ab dans le cadre des catégories abéliennes donc c'est une catégorie abélienne et l'injectivité se traduit en $0 \to h_A \to h_B$.

1.4.1 Détail

On a $0 \to A \to B$ est exacte c'est pareil que

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, B)$$

est injective via le pushforward : $i \circ f = i \circ g \implies f = g$. En passant à la catégorie opposée dans $\mathcal{C}$, on obtient les épis par $B \to A \to 0$ et les flèches c'est :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(B, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, M) \to 0$$

est surjective via i_*^{op}. D'où

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, A) \to 0$$

est surjective.

Remarque 4. *C'est comme ça que les flèches s'inversent! La condition*

$$Hom_{\mathcal{C}}(B, M) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, M) \to 0$$

via le pullback est bizarre. Ça veut dire que toutes les flèches $A \to M$ proviennent de $B \to M$ sachant que $A \hookrightarrow B$ s'injecte dans B. C'est pas exactement tout de suite en lien avec les injectifs.

En résumé,

1.5 Ker et coker

Un ker c'est ça :

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] & A \arrow[r] & B \\
M \arrow[u, dashed] \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "0_{M,B}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Maintenant, on peut le traduire en

$$h_K \to h_A \to h_B$$

est exacte. En plus, $K \to A$ est un mono par le propriété universelle. D'où

$$0 \to h_K \to h_A \to h_B$$

est exacte.

1.6 Snake Lemma

Avec élément c'est assez clair comment on construit δ la flèche de connexion. Sans élément ça l'es moins. J'ai eu une idée et je me suis spoil la suite. On peut faire comme ça, donc on regarde $\ker(w) \to C \to B \to B' \to A \to \mathrm{coker}(u)$. Et l'idée c'est que on regarde des éléments dans B tels que $B \to C \to C'$ est nulle, et pour qu'y soient bien définis, on les regarde modulo A. En résumé, on regarde

$$\ker(B \to C \to C') = B''$$

on sait que $(B'' \to B \to B') \to C' = 0$ donc on obtient $B'' \to A'$. Pour conclure on a clairement $A \to B''$ et ça fournit

$$B''/A \to A'/A = \mathrm{coker}(u)$$

en plus comme $B \to C$ est un épi, $B'' \to B$ est un mono, et $A \to B \to C$ est exacte, on obtient que

$$B''/A = B''/\ker(B \to C) \simeq \mathrm{im}(B'' \to B \to C) = \ker(w)$$

d'où

$$\ker(w) \to \mathrm{coker}(u)$$

1.7 Obtenir des flèches

Quelques tricks pour obtenir des flèches. Étant donné $A \to B \to C$, on a $\ker(A \to B) \to \ker(A \to B \to C)$. Parce que

$$\ker(A \to B) \to A \to B \to C = (\ker(A \to B) \to A \to B) \to C$$

est nulle d'où la flèche. À l'inverse on a

$$\mathrm{coker}(A \to B \to C) \to \mathrm{coker}(B \to C)$$

via

$$A \to B \to C \to \mathrm{coker}(B \to C) = A \to (B \to C \to \mathrm{coker}(B \to C)) = 0$$

d'où la flèche. Aussi, on a

$$\mathrm{coker}(A \to B) \to \mathrm{coker}(A \to B \to C)$$

via

$$A \to B \to (C \to \mathrm{coker}(A \to B \to C)) = (A \to B \to C \to \mathrm{coker}(A \to B \to C)) = 0$$

d'où la flèche. En particulier on obtient la flèche du théorème d'isomorphisme.

1.8 Obtenir des flèches, version 2

En fait on peut regarder

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g\circ f"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \mathrm{coker}(f) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "id"'] & Z \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

et on obtient d'un coup

$$0 \to \ker(g \circ f) \to \ker(g) \to \mathrm{coker}(f) \to \mathrm{coker}(g \circ f) \to \mathrm{coker}(g) \to 0$$

1.9 Théorème d'isomorphisme

On regarde $\ker(A \to B) \to A \to B$, alors

$\mathrm{coim}(A \to B) = \mathrm{coker}(\ker(A \to B) \to A) \to \mathrm{coker}((\ker(A \to B) \to A) \to B) = \mathrm{coker}(0 \to B) = B$

et la flèche est bien induite pas $A \to B$.

Chapitre 2

Catégories abéliennes

On demande à avoir un objet zéro, les produits finis et que les Hom soient des groupes. Ça donne une catégorie additive. Ensuite on ajoute les noyaux. Grâce

2.1 Codiagonale, produit = coproduit

Ducoup juste un point, étant donné les produits à deux éléments on a tout les produits finis. Et si on des flèches nulles on peut voir $A \times B$ comme un coproduit via i_A et i_B. Puis

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i_A"] & A \times B \arrow[u, dashed, "h"] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "i_B"']
\end{tikzcd}$$

où $h = f \circ p_A + g \circ p_B$ fait de $A \times B$ un coproduit. On définit ensuite δ_B la codiagonale

$$\begin{tikzcd}
 & B & \\
B \arrow[ur, "id_B"] \arrow[r, "i_{B,1}"'] & B \times B \arrow[u, dashed] & B \arrow[ul, "id_B"'] \arrow[l, "i_{B,2}"]
\end{tikzcd}$$

ça donne une somme de $f \colon A \to B$ via

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] \arrow[r, dashed, "{(f,g)}"] & B \times B \arrow[u, dashed, "p_{B,1}"] \arrow[d, dashed, "p_{B,2}"'] \arrow[r, "\delta_B"] & B \\
 & B \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Bon ducoup, si on a des produits on a des coproduits.

Définition 1. Une catégorie additive c'est produits finis, coproduits finis, objet O, d'où les Hom sont des monoides abéliens puis on dit qu'en fait des groupes.

2.2 Catégories abéliennes

On ajoute les noyaux et conoyaux à une catégorie additive puis on dit que $\mathrm{coim}(A \to B) \to \mathrm{im}(A \to B)$ est un isomorphisme.

Remarque 5. *Attention c'est pas évident que $A \to im(A \to B)$ soit un épi. Mais c'est vrai je crois.*

2.2.1 Splitting

Dans une catégorie additive, on a un splitting, ssi $B \simeq A \oplus C$. L'idée c'est que p_C et $p \circ f$ sont des flèches universelles $A \oplus C \to C$ donc par unicité puis par le five lemma avoir une section implique splitter.

2.3 Foncteurs entre catégories abéliennes

On veut montrer que préserver les produits à deux éléments implique être additif. En gros faut montrer que c'est équivalent à préserver les coproduits pour la codiagonale. L'idée c'est de montrer que pour $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ on a

1. $F(O_{\mathcal{C}} \times A) = F(0_{\mathcal{C}}) \times F(A)$ d'où $h_{F(O_{\mathcal{C}})}(D)$ est réduit à un point via la prop universelle $h_{F(O_{\mathcal{C}})} \times h_{F(A)} = h_{O_{\mathcal{C}} \times F(A)}$.

2. Ensuite faut montrer que $i_A \colon A \to A \sqcup B$ est préservée. Parce que préserver un coproduit c'est préserver les flèches avec. Suffit d'utiliser que id_A et $O_{A,B}$ sont préservés ! On sait déjà que $F(A) \times F(B) \simeq F(A) \sqcup F(B)$.

3. Maintenant on peut montrer que c'est additif simplement via la codiagonale.

4. Additif implique produit c'est juste de montrer directement que c'est un produit.

À noter sur additif implique préserve les produits, on cherche $D \to F(A \times B)$ et on peut définir $i_A \circ f + i_B \circ g$! Tout commute et l'unicité est donnée par

$$h = id_{F(A \times B)} h = F(i_A)F(p_A)h + F(i_B)F(p_B)h$$

2.4 Foncteurs exacts

Y se passe un truc marrant.

2.4.1 Suites exactes splittées

C'est clair que $0 \to A \to A \oplus B \to B \to 0$ est exacte. Pour à droite on peut regarder $0 \to h^C \to h^A \times h^B \to h^B$ qui est exacte dans Ab et $0 \to h_A \to h_{A \sqcup B} = h_A \sqcup h_B = h_A \oplus h_B \to h_B$.

2.4.2 Foncteurs exacts sont additifs.

En gros F exact à gauche implique

$$0 \to F(A) \to F(A \oplus B) \to F(B)$$

exacte et F préserve la section $F(i_B)$ d'où c'est un épi à droite ! Maintenant

$$0 \to F(A) \to F(A \oplus B) \to F(B) \to 0$$

split d'où $F(A \oplus B) \simeq F(A) \oplus F(B)$. En particulier, la codiagonale est préservée.

2.5 Injectifs et projectifs

Ducoup via la section d'avant on peut montrer que $I \oplus J$ est injectif si I et J le sont via

$$0 \to I \to I \oplus J \to J \to 0$$

en utilisant $h_{I \oplus J} = h_I \oplus h_J$ grâce à la section d'avant. Ça devient clair parce que ça traduit la prop universelle du produit cet iso.

2.5.1 Adjonctions, exactitude et injectifs/projectifs

On regarde $F \colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} \colon G$ des adjoints, pour connaître le sens on regarde

$$h_{\_}(F(\_)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\_), \_) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, G(\_)) = h_{G(\_)}(\_)$$

Là, F est adjoint à gauche et G à droite. On a

1. F exact à droite implique G exact à gauche. Et inversement.

2. F exact implique G préserve les injectifs.

On regarde

$$0 \to G(A) \to G(B) \to G(C)$$

alors

$$0 \to h_{G(A)} \to h_{G(B)} \to h_{G(C)}$$

est exacte car isomorphe à

$$0 \to h_A(F(\_)) \to h_B(F(\_)) \to h_C(F(\_))$$

qui exact pour pleins de raisons mdr. Pour préserver les injectifs c'est juste que

$$h_{G(I)} = h_I \circ F$$

qui sont deux foncteurs exacts.

2.5.2 Dans Mod_R

Je serai bref, en gros on veut que $0 \to A \to B$ implique $h_I(B) \to h_I(A) \to 0$. Y suffit de le vérifier pour tout les idéaux $A = I \subset R = B$! Maintenant, on montre que

- Injectif implique divisible.
- R est principal implique l'inverse.

En particulier dans $\mathbb{Z}$.

Ab a assez d'injectifs

On prends $A \in Ab$ et $S \subset A$ une famille génératrice. Alors $p\colon \bigoplus_{s\in S} s\mathbb{Z} \to A \to 0$ via $s\mathbb{Z} \to A$ donnée par $s \mapsto s.1_A$. Puis

$$(\bigoplus_{s\in S} s\mathbb{Z})/K \simeq A$$

et maintenant on regarde

$$(\bigoplus_{s\in S} s\mathbb{Z}) \hookrightarrow (\bigoplus_{s\in S} s\mathbb{Q})$$

puis

$$(\bigoplus_{s\in S} s\mathbb{Z}) \to (\bigoplus_{s\in S} s\mathbb{Q}) \to (\bigoplus_{s\in S} s\mathbb{Q})/K$$

qui passe au quotient et le truc c'est que $K \to (\bigoplus_{s\in S} s\mathbb{Q})$ c'est bien déf c'est juste

$$\operatorname{coker}(K \to (\bigoplus_{s\in S} s\mathbb{Z}) \to (\bigoplus_{s\in S} s\mathbb{Q}))$$

d'où

$$A \hookrightarrow (\bigoplus_{s\in S} s\mathbb{Q})/K$$

et le truc de droite est divisible donc injectif.

Mod_R a assez d'injectifs

L'idée c'est que

$$Res\colon Mod_R \rightleftarrows Ab\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \_)$$

sont adjoints et Res est exact d'où

$$\mathrm{Hom}_R(\_, G(I)) = h_I \circ Res$$

est la composition de deux foncteurs exacts. Où Res c'est juste le foncteur d'oubli.

Remarque 6. *Comme f^* est exact de $Sh(Y) \to Sh(X)$, f_* préserve les injectifs.*

Chapitre 3

Cohomologie

J'écris $A^{n-1} \to A^n \to A^{n+1}$ de manière croissante (cohomologie). On déf pour $A^\bullet \in Ch(\mathcal{C})$, $Z^n(A) := \ker(A^n \to A^{n+1})$ et $I^n(A) = \mathrm{im}(A^{n-1} \to A^n)$. Et on note $d^n = A^n \to A^{n+1}$. Comme $d^n d^{n-1} = 0$ on obtient $I^n \to Z^n$. Puis on déf

$$H^n(A^\bullet) := \mathrm{coker}(I^n(A) \to Z^n(A))$$

3.1 Fonctorialité et additivité de $H^n(\_)$

3.1.1 Construction

Ducoup faut commencer par définir $H^n(A^\bullet)$. C'est juste qu'on a un carré

$$\begin{tikzcd}
I^n(A) \arrow[r] \arrow[d] & I^n(B) \arrow[d] \\
Z^n(A) \arrow[r] \arrow[d] & Z^n(B) \arrow[d] \\
H^n(A) \arrow[r, dashed] & H^n(B)
\end{tikzcd}$$

d'où les flèches de coker en bas. Et ce carré c'est comme d'hab eux mêmes via

$$\begin{tikzcd}
\ker(d^{n-1}) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \ker(d^{n-1}) \arrow[d] \\
A^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & B^{n-1} \arrow[d] \\
A^n \arrow[r] \arrow[d] & B^n \arrow[d] \\
\mathrm{coker}(d^{n-1}) \arrow[r, dashed] & \mathrm{coker}(d^{n-1})
\end{tikzcd}$$

pour les Z^n, et le coker on en a besoin pour

$$\begin{tikzcd}
A^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & B^{n-1} \arrow[d] \\
I^n(A) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & I^n(B) \arrow[d] \\
A^n \arrow[r] \arrow[d] & B^n \arrow[d] \\
\mathrm{coker}(A^{n-1} \to A^n) \arrow[r] & \mathrm{coker}(B^{n-1} \to B^n)
\end{tikzcd}$$

3.1.2 Fonctorialité

La fonctorialité c'est juste que la construction est induite par $A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet$.

3.1.3 Additivité

On montre que Z^n et I^n sont additifs parce qu'y préservent les sommes directes! (limites commutent avec les limites et inversement) Ça se fait bien à la main en plus. Maintenant on peut montrer que

$$I^n(A) \oplus I^n(B) = I^n(A \oplus B) \to Z^n(A \oplus B) = Z^n(A) \oplus Z^n(B)$$

a pour conoyau $(I^n(A) \oplus I^n(B))/(Z^n(A) \oplus Z^n(B))$ et on peut montrer la propriété universelle dessus facilement. En particulier, $H^n(A \oplus B) \simeq H^n(A) \oplus H^n(B)$ est donnée par $Z^n(A) \oplus Z^n(B) \to H^n(A) \oplus H^n(B)$.

3.2 Suite exacte longue

L'idée c'est d'appliquer le lemme du serpent sur

$$\begin{tikzcd} & A^{n+1}/I^{n+1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & B^{n+1}/I^{n+1}(B) \arrow[d] & C^{n+1}/I^{n+1}(C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z^{n+1}(A) \arrow[r] & Z^{n+1}(B) \arrow[r] & Z^{n+1}(C) & \end{tikzcd}$$

et pour montrer que les lignes sont exactes on peut utiliser le lemme du serpent sur la rangée du dessus. Les flèches verticales c'est pas dur. Ensuite c'est juste que le noyau c'est un H^n et le conoyau c'est un H^{n+1} (ça parait clair).

3.3 Homotopies

Un morphisme $f^\bullet$ tel que on ait $h^n \colon A^n \to B^{n-1}$ pour tout n tel que

$$f^n = d^{n-1}h^n + h^{n+1}d^n$$

est dit contractile. En gros homotope à zéro. Et deux flèches sont homotopes si $f^\bullet - g^\bullet$ est contractile. La flèche induite sur les H^n est nulle ! Parce que

$$d^{n-1}h^n(x) \in I^n.$$

et

$$h^{n+1}d^n(x) \in h^{n+1}d^n((Z^n)(A)) = 0.$$

Le deuxième truc $d^n(x)$ est déjà nul. En termes de catégories abéliennes, c'est que on regarde

$$H^n(A) \xrightarrow{(d^{n-1}h^n, h^{n+1}d^n)} H^n(B) \oplus H^n(B)) \xrightarrow{\delta_B} H^n(B)$$

d'où onpeut regarder termes à termes. Puis le premier termes se factorise en

$$\begin{tikzcd} H^n(A) \arrow[rr] & & H^n(B) \\ Z^n(A) \arrow[u] \arrow[r, dashed, "d^{n-1}h^n"] & I^n(B) \arrow[r] & Z^n(B) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

et le deuxième en

$$\begin{tikzcd}
H^n(A) \arrow[rr] & & H^n(B) \\
Z^n(A) \arrow[u] \arrow[r, "d^n"] \arrow[rr, bend right, "O_{Z^n(A),Z^n(B)}"'] & A^{n+1} \arrow[r, "h^{n+1}"] & Z^n(B) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

d'où le résultat.

3.4 Résolutions

3.4.1 Assez d'injectifs et résolutions

Avoir assez d'injectif ça fait que on peut construire $0 \to A \to I^0$ puis $0 \to I^0/A\ I^1$ d'où $\ker(A \to I^0/A \to I^1) = A$. Et on continue par récurrence.

3.4.2 $H^n(A)$ ne dépend pas de la résolution.

En gros le plan c'est de

1. $f \colon A \to B$, on obtient une extension $f^\bullet \colon I^\bullet \to J^\bullet$.

Pour la construire on utilise la même idée que pour construire des résolutions injectives via les conoyaux.

1. Elle est unique à homotopie près car O s'étend en un contractile. Ça c'est un poil compliqué, mais intéressant y'a un décalage dans les flèches de la résolution.

2. En particulier étant donné deux résolutions $I^\bullet$ et $J^\bullet$ et deux extensions $f^\bullet, g^\bullet \colon I^\bullet \to J^\bullet$ comme F est exact il est additif et donc préserve les homotopies! Pareil H^n est additif d'où $H^n \circ F$ est additif et le résultat.

Enfin, on étend l'identité id_A de deux manières

$$f \colon I^\bullet \to J^\bullet$$

et

$$g \colon J^\bullet \to I^\bullet$$

en particulier $(g \circ f)^\bullet$ est homotope à $id_{I^\bullet}$ et $(f \circ g)^\bullet$ est homotope à $id_{J^\bullet}$. D'où l'isomorphisme canonique!

3.5 Foncteurs dérivés

Là on définit $R^n F(A) := H^n(F(I^\bullet))$ pour n'importe quelle résolution de A. C'est un foncteur additif parce que H^n l'est. $R^n F(I) = 0$ pour $n > 0$ via la résolution triviale. On a une suite exacte longue qui est fonctorielle.

Remarque 7. *Apparamment dans la preuve pour la suite exacte longue, y faut prendre une résolution somme directe sur B. AH, c'est parce que si on a juste une suite exacte courte c'est pas clair que B est un produit d'où* $0 \to F(I^\bullet) \to F(J^\bullet) \to F(K^\bullet) \to 0$ *est exacte!!*

Chapitre 4

Cohomologie des faisceaux

4.1 $Sh(X)$ est abélienne.

Faut montrer que $Sh(X)$ est abélienne. On peut montrer que $PSh(X)$ l'est facilement. Puis si i est le foncteur d'oubli on a l'adjonction

$$\mathrm{Hom}_{Sh(X)}((\mathscr{F})^\sharp, \mathscr{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{PSh(X)}(\mathscr{F}, i(\mathscr{G}))$$

pas la propriété universelle. Maintenant étant donné un diagramme $(F_i)_i$ dans $Sh(X)$ on le pousse dans $PSh(X)$ et là

$$0 \to i(\mathscr{F}_i)(U \cup V) \to i(\mathscr{F}_i(U)) \oplus i(\mathscr{F}_i(V)) \to i(\mathscr{F}_i(U \cap V))$$

passe à la limite ! Vu que les limites commutent avec les limites. En particulier la limite est un faisceau. Et on récupère tout par faisceautisation en fait.

4.2 Résolution de Godemont 1

L'idée c'est que les faisceaux flasques sont acycliques. Pour deux raisons, si

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$$

est exacte alors, si $\mathscr{F}'$ est flasque, Γ_U est exact à droite sur cette s.e.s. On en déduit que si $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{F}$ sont flasques, alors $\mathscr{F}''$ aussi en utilisant la surjection

$$\mathscr{F}(U)(\to \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}''(V) \to 0$$

et la surjection $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}''(U) \to 0$. Maintenant ça permet de dire que si on pose

$$0 \to \mathscr{F} \to C^0(\mathscr{F}) \to (Z^1(\mathscr{F}) \to C^0(Z^1(\mathscr{F})) =: C^1(\mathscr{F}))$$

etc.. $Z^i(\mathscr{F}) = C^{i-1}(\mathscr{F})/Z^{i-1}(\mathscr{F})$ et $C^i(\mathscr{F}) := C^0(Z^i(\mathscr{F}))$. Alors si $\mathscr{F}$ est flasque $Z^n(\mathscr{F})$ aussi par récurrence puis $C^n(\mathscr{F})$. Ensuite la résolution est Γ_U acyclique ! Puis elle calcule la bonne cohomologie.

Chapitre 5

Hypercohomologie

Donc là ça se corse y'a plusieurs défs.

5.1 Résolutions de complexes bornés par le bas

Étant donné $f\colon A^\bullet \to B^\bullet$ et deux résolutions $A^\bullet \to I^\bullet$, $B^\bullet \to J^\bullet$ on peut étendre f en $I^\bullet \to J^\bullet$ de manière unique à homotopie près. L'idée c'est de regarder f sur les H^0 puis de l'étendre comme d'habitude. La commutativité des petits carrés est claire et celle des grands est simplement parce que celle sur les $H^0(I^\bullet) \to H^0(J^\bullet)$ est celle induite par f. En particulier, on a

$$[A^\bullet, J^\bullet] \simeq [I^\bullet, J^\bullet]$$

on a aussi

$$[A^\bullet, I^\bullet] \simeq [B^\bullet, I^\bullet]$$

pour tout complexe d'injectif.

5.2 Catégories dérivée

On remarque que les flèches contractiles forment un sous-groupe! En particulier on peut regarder

$$K^+(\mathcal{C}) := (Ch^+(\mathcal{C}), \text{flèches modulo homotopies})$$

et

$$D^+(\mathcal{C}) := (Ch^+(\mathbb{I}), \text{flèches modulo homotopies})$$

où le deuxième c'est des complexes bornés par le bas d'injectifs.

5.3 Et adjonctions dans le cas des faisceaux

5.3.1 Cadre

On définit $Sh(X) \to D^+(X)$ par $\mathscr{F}$ associe une résolution injective $I^\bullet$, c'est pleinement fidèle.

Maintenant étant donné $f\colon X \to Y$ et $f_*\colon Sh(X) \rightleftarrows Sh(Y)\colon f^*$, on construit

$$Lf^*\colon D^+(Y) \to D^+(X)\colon Rf_*$$

la deuxième est facile vu que f_* préserve les injectifs. L'autre faut juste avoir $\rho\colon K^+(X) \to D^+(X)$ ou on associe une résolution injective.

Remarque 8. *C'est bien déf à unique isomorphisme près! Suffit d'étendre l'identité des deux côtés.*

En plus $R(g \circ f)_* = Rg_* Rf_*$. Pareil pour L par adjonction.

5.4 Adjonctions encore?

Étant donné $f_X\colon X \to \{*\}$ on a une adjonction

$$(f_X)_*\colon Sh(X) \to Sh(\{*\})\colon f_X^*$$

où dans ce cas particulier $(f_X)_* = \Gamma_X$ et $f_X^* = (A \mapsto (A_X))$ le faisceau constant!

5.5 Hypercohomologie et complexe total.

Étant donné un complexe de faisceaux $\mathscr{F}^\bullet \in Ch^+(Sh(X))$, on peut avoir une double résolution

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^2(\mathscr{F}^0) \arrow[r] & C^2(\mathscr{F}^1) \arrow[r] & C^2(\mathscr{F}^2) \\
0 \arrow[r] & C^1(\mathscr{F}^0) \arrow[r] \arrow[u, "d_{0,1}"] & C^1(\mathscr{F}^1) \arrow[r] \arrow[u, "d_{1,1}"] & C^1(\mathscr{F}^2) \arrow[u, dashed, "d_{2,1}"] \\
0 \arrow[r] & C^0(\mathscr{F}^0) \arrow[r] \arrow[u, "d_{0,0}"] & C^0(\mathscr{F}^1) \arrow[r] \arrow[u, "d_{1,0}"] & C^0(\mathscr{F}^2) \arrow[u, dashed, "d_{2,0}"] \\
& 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où les résolutions verticales c'est les résolutions de Godement en dimension 1. Et les flèches horizontales c'est celles **presque** induites par la fonctorialité de la résolution de Godement. On les notes

$$\delta^{i,j} := (-1)^j C^i(\delta^j)$$

où $\delta^j : \mathscr{F}^j \to \mathscr{F}^{j+1}$. Et on considère le complexe

$$Tot^n(C^\bullet(\mathscr{F}^\bullet)) := \bigoplus_{i+j=n} C^i(\mathscr{F}^j)$$

muni de la différentielle $d_n := \oplus_{i+j=n}\delta^{i,j} + d^{i,j}$. C'est une différentielle grâce à l'anticommutativité de $\delta^{i,j}$. Enfin, on a

$$\mathscr{F}^j \to Tot^j(C^\bullet(\mathscr{F}^\bullet))$$

en envoyant dans le premier terme!

Théoreme 1.

$$\mathscr{F}^\bullet \to Tot^\bullet(C^\bullet(\mathscr{F}^\bullet))$$

est une résolution flasque quasi-isomorphe!

5.5.1 Définition

Maintenant étant donné $\mathscr{F}^\bullet \to I^\bullet$ une résolution injective, ou flasque comme avant on déf

$$H^n(X, \mathscr{F}^\bullet) := H^n(I^\bullet(X))$$

Remarque 9. *C'est bien une cohomologie sur un complexe simple.*

5.6 Application et récap

On a

$$Rf_*\colon D^+(X) \to D^+(Y)$$

On remplace Γ_X par $(f_X)_*$ avec $f_X\colon X \to \{*\}$. D'où $R(f_X)_*\mathscr{F} = (f_X)_*I^\bullet = I^\bullet(X) = \Gamma(X, I^\bullet)$.

Remarque 10. *La cohomologie de $I^\bullet(X)$ est pas triviale hein.*

Maintenant $R^if_*\mathscr{F} = H^i(Rf_*\mathscr{F}) = H^i(f_*I^\bullet)$.

5.7 Catégorie dérivées et adjonctions

5.8 Mayer-Vietoris