Cohomologie des groupes

2024-2025

Table des matières

1 Catégories et catégories abéliennes. 5
1.1 Yoneda, théorème d'isomorphisme et exactitude 5
1.2 Adjonctions 6
1.2.1 Propriétés d'exactitude 6
1.2.2 Limites, adjoints et l'axiome du choix. 6
1.2.3 Fidélité d'un foncteur ayant un adjoint 7
1.3 Exemples d'adjonctions 7

2 (co)homologie 9
2.1 (co)Homologie sur les résolutions acycliques 9
2.2 Foncteurs dérivés et limites 9

3 Cohomologies 11
3.1 Tenseur et Hom 11
3.1.1 Exactitudes 11
3.2 Ext 11
3.2.1 Localisation 11
3.3 Tor 11
3.3.1 Groupes abéliens, $Mod_{\mathbb{Z}}$ 12
3.3.2 Modules plats 12
3.3.3 Localisation 12

Chapitre 1

Catégories et catégories abéliennes.

J'veux un petit inventaire de choses cool.

1.1 Yoneda, théorème d'isomorphisme et exactitude

On applique $h\colon \mathcal{A} \to Ab$.

De $0 \to A \to B \to C \to 0$ exacte on tire

$$0 \to h_A \to h_B \to h_C$$

pour l'exactitude à gauche et

$$0 \to h^C \to h^B \to h^A$$

pour l'exactitude à droite. On voit ça comme ça :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \\ & & M \arrow[u] \arrow[ul, dashed] & \end{tikzcd}$$

pour le premier, l'exactitude de $0 \to A \to B \to C$ montre que M va dans le noyau si $(M \to B \to C) = 0$. Et on utilise $A \simeq \mathrm{im}(A \to B) = \ker(B \to C)$ et la PU du noyau pour montrer qu'on a l'exactitude sur les hom. Pour le deuxième, on utilise :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[dl, dashed] & 0 \\ & M & & \end{tikzcd}$$

et là de l'exactitude de $A \to B \to C \to 0$ et du théorème d'isomorphisme on a $coker(A \to B) \simeq coim(B \to C) \simeq C$ d'où $(A \to B \to M) = 0$ implique l'existence de la flèche vers $\mathrm{coker}(A \to B)$ est la factorisation par C.

Montrer l'inverse consiste juste à spécialiser et utiliser les PU.

1.2 Adjonctions

Étant donné $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D} \colon G$ si

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\_), \_) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, G(\_))$$

naturellement alors F est adjoint à gauche de G qui lui est adjoint à droite de F. Via Yoneda ça dit que $h^{F(\_)}(\_) \simeq h^{\_}(G(\_))$ dans

$$Nat(\widehat{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}, \widehat{\mathcal{D} \times \mathcal{C}})$$

y'a aussi la formulation $h^{FG(\_)}(\_) \simeq h^{G(\_)}(G(\_))$.

1.2.1 Propriétés d'exactitude

On déduit tout du premier isomorphisme. Un adjoint à gauche est exact à droite et inversement. Plus généralement un adjoint à gauche préserve les colimites et les limites finies (La preuve est non triviale).

Si F est adjoint à gauche de G on a

$$0 \to h^{F(C)} \to h^{F(B)} \to h^{F(A)}$$

qui est iso à

$$0 \to h^C \circ G \to h^B \circ G \to h^A \circ G$$

en particulier si $A \to B \to C \to 0$ est exacte à droite alors $F(A \to B \to C \to 0)$ est exacte à droite.

Maintenant si G est exact, alors $h^{F(P)} \simeq h^P \circ G$ d'où $h^{F(P)}$ est exact si P est projectif.

À l'inverse si F est exact, $h_{G(I)} \simeq h_I(F(\_))$ est exact dès que I est injectif.

1.2.2 Limites, adjoints et l'axiome du choix.

Quand j'ai une catégorie I-cocomplète pour I filtrante, genre Mod_R, bah y'a une adjonction cool pour les colimites

$$\varinjlim \colon \mathcal{A}^I \leftrightarrow \mathcal{A} \colon \Delta$$

où Δ c'est le foncteur constant. MAIS, bah pour définir le foncteur $\varinjlim$ faut faire un choix de colimite pour chaque foncteur! Penser le point dans Set.

Remarque 1. *Pour I filtrante, $\mathcal{A}^I$ est abélienne si $\mathcal{A}$ l'est. Pour prouver que y'a les noyaux, via $C, D \colon I \to \mathcal{A}$ et $C \to D$, on prend $K^0 \colon I^0 \to \mathcal{A}$ la donnée des noyaux termes à termes et on montre que ça s'étend naturellement en $K \colon I \to \mathcal{A}$ (on trouve juste un foncteur) tel que les flèches de noyaux termes à termes ça fait une transformation naturelle $K \to C$. C'est bien le noyau parce que ça l'est terme à terme.*

1.2.3 Fidélité d'un foncteur ayant un adjoint

On déduit tout du deuxième isomorphisme, i.e. la counité. Et c'est clair que G est pleinement fidèle ssi la counité est un isomorphisme.

1.3 Exemples d'adjonctions

Les foncteurs $Free$ qu'ont peut définir comme les adjoints à gauche de foncteurs d'oublis $C \to Set$. Et les foncteurs d'oublis plus généraux $(\_)^\times \colon Ring \to Grp$ par exemple.

Chapitre 2

(co)homologie

2.1 (co)Homologie sur les résolutions acycliques

Le Weibel dit qu'en tronquant une résolution projective et de proche en proche on montre qu'une résolution acyclique calcule la cohomologie. I.e. via

$$0 \to \ker(d_{-1}) \to P \to A \to 0$$

puis

$$0 \to \ker(d_{m-1}) \to\to P_m \to \ldots \to P_0 \to A \to 0$$

avec les P_i acycliques et la suite exacte courte de proche en proche que $L_{m+1}F(A) \simeq \ker(F(\ker(d_{m-1})) \to F(P_m))$. Pour faire de proche en proche faut utiliser que $L_iF(A) \simeq L_{i-(m-1)}F(\ker(d_{m-1}))$ et ça c'est la suite exacte longue et l'acyclicité.

2.2 Foncteurs dérivés et limites

Sur une catégorie AB5 ($\varinjlim\colon \mathcal{A}^I \to \mathcal{A}$ est exact et $\mathcal{A}$ est cocomplète.) on a

$$\varinjlim_j L_iF(C(j)) \simeq L_iF(\varinjlim_j C(j))$$

Chapitre 3

Cohomologies

J'prends que des bi-modules pour les preuves.

3.1 Tenseur et Hom

Y'a une adjonction :

$$h^{\text{-}\otimes_R A}(\_) \simeq h^A(h^{\text{-}}(\_))$$

c'est juste qu'à une application R-linéaire $B \otimes_R A \to C$ à gauche on associe l'application vers le dual $A \to (\mathrm{Hom}(B, C))$ via la propriété universelle des produits tensoriels.

3.1.1 Exactitudes

On a $\otimes_R A$ qui est adjoint à gauche d'où est exact à droite.

3.2 Ext

On déf $Ext^n(A, \_) = R^n h^A(\_)$ et $Ext^n(\_, B) = R^n h_B(\_)$.

3.2.1 Localisation

3.3 Tor

On déf $Tor_n^R(A, B) = L_n A \otimes_R (B)$. La notation est symétrique!

3.3.1 Groupes abéliens, $Mod_{\mathbb{Z}}$

On sé réduit à $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où on a la résolution

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

alors en appliquant $\otimes_R B$, $Tor_*^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B)$ est l'homologie

$$0 \to B \to B \to 0$$

où on multiplie par n, d'où $Tor_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) = B/nB$, $Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) =_n B$ et le reste est nul.

Ensuite page 66 du weibel mais ca consiste tjr à écrire $A = \varinjlim A_i$ pour les sous groupes de types finis puis dans ce cas $A_i \simeq \mathbb{Z}^m \oplus_i \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ et de tjr faire tout commuter avec Tor.

3.3.2 Modules plats

C'est les modules $\otimes_R B$ acycliques. Une liste :

- Les modules libres. Parce qu'alors l'injectivité se vérifie terme à terme. (C'est direct que $R^{(I)} \otimes N \simeq \oplus_I N$).
- Si R est un pid, les modules sans torsion.
- $S^{-1}R$. En particulier $Frac(R)$.

3.3.3 Localisation

La localisation marche. Si R est commutatif et A, B des R-modules quelconques, $Tor_n^R(A, B) = 0$ ssi pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ on a

$$Tor_n^{R_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}}, B_{\mathfrak{m}})$$