Complétions

C'est pas mal du chapitre 10 de Atiyaah-McDonald.

Chapitre 1

Récap

Chapitre 2

Complétions de corps

J'prends K un corps.

2.1 Complété de $(K, |.|)$

On suppose $\mathbb{R}$ construit (pas dur). On peut prendre $C(K)/\mathfrak{m}$ où $\mathfrak{m}$ définit la relation d'équivalence

$$(x_n) \sim (y_n) \equiv |x_n - y_n| \to 0$$

alors via

$$-|x_n - x_m| \leq |x_n| - |x_m| \leq |x_n - x_m|$$

on sait que $(|x_n|)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ d'où on déf

$$|(x_n)|_{\hat{K}} := \lim |x_n|$$

Remarque 1. $\mathfrak{m}$ *est maximal c'est pas si évident, le fait que le quotient est un corps faut définir l'ordre et ça se voit bien.*

Remarque 2. *On peut remarquer que si* $|.|$ *est ultramétrique et* $a = (x_n)_n \in \hat{K}$*, alors* $|a - x_n + x_n| = |x_n|$*. On a pas besoin de faire tendre par "au dessus". Mais on pourrait peut être le faire dès qu'il existe une suite qui tend vers 0 dans* K *je pense. Par exemple* $(p^n)_n$ *dans* $\mathbb{Q}$*, alors si* (x_n) *tend vers* a *on prend* $(x_n + p^{k_n})$ *de sorte que* $|x_n + p^{k_n}| > |x|$*.*

2.2 Structure d'anneau

C'est un quotient d'un sous-anneaux de $K^{\mathbb{N}}$ donc multiplication et addition terme à terme. Tout se passe bien car valeur absolue.

2.3 Étude sur $\mathbb{Z}_p$ (inversibles et via Cauchy)

Un élément de $\mathbb{Z}_p$ on peut le voir comme une suite $(x_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, parce que si on prends une suite $(u_n p^{k_n})$, avec $v_p(u_n) = 0$. Bah le dénominateur de la fraction irréductible est une unité dans $\mathbb{Z}_p$ au sens de la valuation. Y suffit donc de remarquer que si $u \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}$ alors $(1/u) \in \mathbb{Z}_p$ s'écrit comme une série à coeffs dans $\mathbb{Z}$. Ça sera la suite.

Remarque 3. *Ça éclaircit le flou que $\mathbb{Z}$ est bien dense dans $\mathbb{Z}_p$, pas besoin de $\mathbb{Z}_{(p)}$.*

Remarque 4. *C'est le pont primordial aussi pour parler de la limite projective comme si c'était la complétion. Parce que ducoup ça fait sens de réduire mod p^n.*

2.3.1 Densité de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}_p$

Ducoup plus concrètement. On veut approcher pour $u \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}$, la fraction $1/u$. On peut prendre

$$ua + pv = 1$$

alors $1/u = \frac{a}{1-pv}$ puis

$$1/u = a. \sum v^i p^i$$

où ici la somme est vraiment une somme. Pas une écriture du développement. Donc faut étudier la convergence de

$$\sum_{i=0}^{n} a(vp)^i$$

et dans les p-adiques il suffit que

$$\lim a(vp)^n = 0$$

et ça c'est clair.

Remarque 5. *À LIRE. Ce qui est étonnant c'est que $1/u$ et $\sum a(vp)^i$ ont a priori rien à voir dans $\mathbb{Q}$. Genre cette somme tend vers l'infini en métrique réel. Mais faut bien se rappeler qu'on est en métrique p-adique!!*

Remarque 6. *Un truc un peu frustrant c'est que là j'utilise le trick que $1 = ua+pv$. En fait le a et le v qui apparaissent peuvent provenir de manipulation du développement p-adique de u.*

Je pense qu'une approche plus claire c'est que via ce développement $u = \sum_{i=0}^{\log_p(u)} a_i p^i$, on multiplie par l'inverse de u modulo p, ce sera a. Et alors

$$au = 1 - pv!$$

La manière de Borcherds est strictement équivalente. Ça veut dire quoi diviser modulo p ? Ou plutôt être divisible ? Prendre l'inverse de $1 = \sum p^n$

Bon qu'est-ce qu'il s'est passé ? Le point flou que j'essaierai de me raisonner c'est de remplacer $1/u$ par $1/u = \frac{a}{1-pv}$.

Remarque 7. *On peut le voir comme juste remplacer* $1/u \mod p$ *par* $1 \mod p$.

Pour rappel si $S_n = \sum_{i=0}^{n} q^i$, alors

$$(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$$

2.4 Les 10-adiques

La vidéo de Borcherds est super instructive VIDEO. Il mentionne par exemple que pour $x \in \mathbb{Z}$, x^n quand il converge peut converger vers z tel que $z^2 = z$. Ça montre que la série voit ses premiers termes fixé petits à petit.

Remarque 8. *Attention, le x choisit c'est* 5. *Le point clé je pense c'est que* $10 \mid 5^2 - 5$. *Puis* $100 \mid 5^3 - 25$.

2.5 Expansion t-adique

Dans le cas p-adique en fait dire qu'il existe une expansion

$$x = \sum a_i p^i$$

où $0 \leq a_i < p$ c'est juste trouver une série qui converge vers x.

2.6 Densité de $\mathcal{O}_K$ dans $\mathcal{O}_{\hat{K}}$ et corps résiduel.

Simplement parce que (x_n) stationne toujours par l'inégalité ultramétrique. Ducoup on peut prendre les suites dans $\mathcal{O}_K$. Ensuite réduire modulo $\mathfrak{m}$ dans $\mathcal{O}_{\hat{K}}$ ça veut dire quoi ? L'idéal c'est $B(0,1)$ ouvert. On peut simplement prendre $x \in \mathcal{O}_K$ tel que

$$|a - x| < 1$$

par densité. En particulier, $x = a \mod B(0,1)$ par définition.

Chapitre 3

Groupes abéliens topologiques

Les opérations du groupes sont continues de sorte que si U est un voisinage de 0, alors $x + U$ un voisinage de x.

3.1 Séparation

Étant donné $H = \cap_{0 \in U} U$, on a $H = \{0\}$, et si $x \in H$, alors

$$0 \in U - x$$

pour tout $0 \in U$. D'où $-x \in H$. Pareil si $x, y \in H$, alors pour tout voisinage de 0 :

$$x \in U - y$$

d'où $x + y \in U$. D'où H est un sous-groupe de G. On déduit rapidement que $x + H$ est fermé pour tout x d'où

$$G/H$$

est séparé. Alors

$$G \text{ est séparé ssi } H = 0$$

Chapitre 4

Complétions via les suites de Cauchy

On se met dans un groupe abélien topologique. Étant donné une base de voisinage dénombrable de 0. On peut construire les suites de Cauchy en disant

$$\text{Pour tout } U \ni 0 \text{ il existe un entier } s(U)$$

tel que

$$x_n - x_m \in U \text{ dés que} n, m \geq s(U)$$

Remarque 9. *La limite est définie à l'adhérence près!*

4.1 Complété de G

Deux suites de Cauchy sont équivalentes si $x_n - y_n$ tend vers 0. Au sens défini d'avant. Maintenant on quotiente comme d'hab et la somme est bien définie. On obtient

$$\hat{G} := C(G)/\mathfrak{m}.$$

Maintenant un point intéressant, on a

$$i \colon G \to \hat{G}$$

donné par les suites constantes. Mais

$$\ker i = H$$

ça c'est rigolo.

Remarque 10. *Dans le cas d'un corps ou d'un anneau de valuation discrète $H = 0$. En fait par le chapitre d'avant, quand G est séparé.*

Chapitre 5

Complétions algébriques

J'aimerai bien aller jusqu'à Artin-Rees.

5.1 Cadre

On suppose qu'on a une base de voisinages de 0 qui sont des groupes. Ca évince $\mathbb{R}$ et la topologie habituelle. Par contre pas $\mathbb{Q}$ et ses topologies p-adiques.

Remarque 11. *Automatiquement, les ouverts de la base sont ouverts fermés. Car si $g \in G_n$, comme $g + G_n \subset G_n$ est un ouvert G_n est ouvert. À l'inverse, pour $h \notin G_n$, $h + G_n \cap G_n = \emptyset$ et $h + G_n$ est ouvert d'où*

$$\cup h \in G - G_n h + G_n = G - G_n$$

est ouvert puis G_n est fermé.

Remarque 12. *Je me suis rendu compte de deux trucs vraiment marrant. La condition $G_m \cup G_n = G_m$ c'est la condition ultramétrique ! Aussi, le faisceau associé au préfaisceau tel que $x + G_i \mapsto G/G_i$ est flasque! Et sa fibre en 0 est $\hat{G}$.*

5.2