Plan hyperbolique

2024-2025

Table des matières

En écrivant $\gamma\colon I \to \mathfrak{h}$ via $\gamma(t) = z(t) = (x(t), y(t))$, la distance

$$\rho(z_0, z_1) := \inf_{\gamma} \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt$$

se réécrit $\rho(z, w) = \int_0^1 |\frac{dz(t)}{dt}|.\frac{dt}{y(t)}$ pour un chemin géodesique. Avec ça on calcule les distances hyperboliques.

0.1 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Isom}(\mathfrak{h})$

Pour ça : les $T \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ vérifient

$$dT(z)/dz = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

en plus $\mathrm{Im}(T(z)) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{(cz+d)^2}$ d'où

$$\int_0^1 |\frac{dT(z(t))}{dt}|.\frac{dt}{\mathrm{Im}(T(z(t))} = \int_0^1 |\frac{dz(t)}{dt}|.\frac{dt}{y(t)}$$

Ça dit en particulier que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{Isom}(\mathfrak{h})$.

0.2 Géodésiques

Pour une droite verticale, un chemin vertical $t \mapsto a + ib(t)$ on a $da(t)/dt = 0$ et $y(t) \geq 0$. D'où

$$\begin{aligned}\int_0^1 |\frac{db(t)}{dt}|\frac{dt}{b(t)} &\geq \int_0^1 \frac{db(t)}{dt}\frac{dt}{b(t)} \\ &= \int_{b(0)}^{b(1)} dy/y \\ &= \ln\frac{b(1)}{b(0)}\end{aligned}$$

en supposant ce qu'y faut supposer.