$\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_p,B}(G_K)$

1 Trucs sur les modules

1.1 Relation de taille minimale

Étant donné M un R-module et

$$\pi\colon R^{(I)} \to M \to 0$$

avec π la flèche de gauche on peut regarder $r \in \pi^{-1}(m)$ pour $m \in M$. Puis $|supp(r)|$ est fini par déf. D'où on peut regarder une relation de taille minimale pour m. Par déf si $\sum_{j\in J} a_j m_j = m$ pour $n = |J|$ minimal et un des a_j est inversible bah $(m_j)_j$ est libre ! Sinon le $j = j_0$ t.q a_{j_0} est inversible, m_{j_0}, se réécrit en fonction des autres !!

Remarque 1. *Donc quand y'a un corps en jeu c'est direct une famille libre.*

Par contre on voit aussi que passer au corps de fraction peut réduire la taille des relations logique.

1.2 Dans un sous-module

On peut pareil demander pour $N \leq M$ un élément de N d'écriture de taille minimale non nul. Vu que N contient pas forcément de générateur $m \in M$ c'est intéressant, pour le calcul de noyau par exemple.

1.3 Applications aux produits tensoriels

On peut donc prendre des écritures de taille minimales $\sum d_i \otimes c_i$. Ça permet par exemple de faire le trick d'Artin !

1.4 Modules libres sont plats

On a

$$R^n \otimes_R B \simeq B^n$$

via

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(R^n \otimes_R B, C) &= \mathrm{Hom}_R(R^n, \mathrm{Hom}_R(B, C)) \\ &= (\mathrm{Hom}_R(R, \mathrm{Hom}_R(B, C)))^n \\ &= (\mathrm{Hom}_R(B, C)^n) \\ &= \mathrm{Hom}_R(B^n, C)\end{aligned}$$

D'où l'isomorphisme puis le résultat vu que on peut calculer des antécédents terme à terme pour la surjectivité à droite.

2 B et C-admissibilité

La $\mathbb{Q}_p$-algèbre B est supposée commutative intègre. En plus elle est G_K-régulière, i.e. $B^{G_K} = C^{G_K} = E$ et $\{b \in B | G_K(b.\mathbb{Q}_p) = b.\mathbb{Q}_p\} \subset B^\times$.

2.1 $\dim_E D_B(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$

On peut montrer que

$$\alpha_B \colon D_B(\_) \otimes_E B \to V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B$$

est injective, à noter que $(d_i \otimes 1)_i$ est lin indép sur C !

2.2 α_B et admissibilité

Si $\dim_E D_B(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ alors α_B est un isomorphisme ! L'idée est vraiment jolie. On prends $v = (v_i)$ une base de V et $d = (d_i)$ de $D_B(V)$. Puis $d = A.v$ avec $A \in M_n(B)$. Maintenant en posant $\wedge_{i=1}^n d_i = x$ et $\wedge_{i=1}^n v_i = y$ on obtient $x = \det(A).y$. Et l'action induite de G_K est celle d'un caractère η! En particulier,

$$x = g.x = g(\det(A))\eta(g).y$$

d'où $g(\det(A)) = \det(A)\eta(g)^{-1} \in \mathbb{Q}_p. \det(A)$. Puis A est inversible dans B!

Remarque 2. *Ça montre la surjectivité de α_B. Faut juste déterminer pq $g.y = \eta(g).y$ est un caractère $G_K \to \mathbb{Z}_p^\times$.*

3 $\underline{\mathbf{Rep}}_{\mathbb{Q}_p,B}(G_K)$ est tannakienne.

3.1 Exactitude de $D_B(\_)$

Quand on a $0 \to V' \to V \to V''$ on a tjr

$$\dim_K V \leq \dim_K V' + \dim_K V''$$

et égalité si $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ est exacte. Maintennat il s'agit juste de remarquer que si la première suite de

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle \otimes_{\mathbb{Q}_p} B} \Big\Downarrow & & & & & & & & & \\
 & 0 & \longrightarrow & V' \otimes_{\mathbb{Q}_p} B & \longrightarrow & V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B & \longrightarrow & V'' \otimes_{\mathbb{Q}_p} B & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle (_)^{G_K}} \Big\Downarrow & & & & & & & & & \\
 & 0 & \longrightarrow & D_B(V') & \longrightarrow & D_B(V) & \longrightarrow & D_B(V'') & &
\end{array}$$

est exacte et V est B-admissible par alors les deux autres sont B-admissible ET la suite du bas devient exacte. En particulier,

$$D_B(\_) \colon \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_p,B}(G_K) \to \mathrm{Vect}_E$$

est exact.

3.2 Admissibilité de $V' \otimes_{\mathbb{Q}_p} V''$

Étant donné V' et V'' dans $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_p,B}(G_K)$ on a

$$\begin{aligned}
D_B(V' \otimes_{\mathbb{Q}_p} V'') &= (V' \otimes_{\mathbb{Q}_p} B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V'')^{(G_K)} \\
&= (D_B(V') \otimes_E B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V'')^{G_K} \\
&= (D_B(V') \otimes_E D_B(V'') \otimes_E B)^{G_K}
\end{aligned}$$

Et le truc de droite c'est $D_B(V') \otimes_E D_B(V'')$. D'où le résultat.

3.3 V est B-admissible ssi V^* aussi

Soit $V \in \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_p,B}(G_K)$ alors $D_B(V) \otimes_E B \simeq V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B$ d'où

$$\begin{aligned}(V^* \otimes_{\mathbb{Q}_p} B)^{G_K} &= (\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B)^{G_K} \\ &= (\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, B))^{G_K} \\ &= (\mathrm{Hom}_B(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B, B))^{G_K} \\ &= (\mathrm{Hom}_B(D_B(V) \otimes_E B, B))^{G_K} \\ &= (\mathrm{Hom}_E(D_B(V), B))^{G_K} \\ &= \mathrm{Hom}_E(D_B(V), E) \\ &= D_B(V)^*\end{aligned}$$

où l'avant dernière égalité est dûe au fait que les G_K-invariant du Hom c'est les flèches G_K-équivariantes et que $D_B(V)$ est G_K-invariant.

3.4 Admissibilité de $\mathbf{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V', V'')$

Il suffit de remarquer que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V', V'') \simeq (V' \otimes_{\mathbb{Q}_p} (V'')^*)^*$$

4 Les bons exemples

On peut regarder $B = \bar{K}, K^{un}, \mathbb{C}_K, B_{dR}, B_{crys}, B_{ht}, B_{st}$ et encore d'autres.

5 À faire

Comprendre les représentations $\mathbb{Z}_p(1), \mathbb{Z}_p(i) := \mathbb{Z}_p(1)^{\otimes i}$ et leur lien avec les twists de faisceaux. Ducoup comprendre les représentation de dimension 1/abéliennes.

Voir quelques représentations de dimension 2, genre courbes elliptiques. Juste se donner une idée des méthodes.

Capter Ax-Sen-Tate qui est un des plus importants, appliquer à la correspondance de galois entre E et $E^\flat$.

Capter Hilbert 90 et ses applications, accessoirement

6 Représentations p-adiques