Adèles et idèles

2024-2025

Table des matières

1 Cas des corps locaux **5**
- 1.1 Mesure de Haar, valuations discrètes et modules . . . 5

2 Théorie de la mesure et mesures de Haar **7**
- 2.1 Résumé après lectures . . . 7
- 2.2 Mesures de Jordan et intégrale de Riemann . . . 7
  - 2.2.1 Exemples . . . 7
  - 2.2.2 Critère . . . 8
  - 2.2.3 Lien avec l'intégrale de Riemann . . . 8
  - 2.2.4 Preuve . . . 9
  - 2.2.5 Unicité de l'intégrale de Riemann comme Fonctionnelle 9
- 2.3 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ . . . 9
- 2.4 Mesure de Lebesgue abstraite . . . 9
  - 2.4.1 Catégorie des espaces mesurés . . . 9
  - 2.4.2 $f_*\mu$ et changement de variable! . . . 9
  - 2.4.3 $\mu|_E$ . . . 10
  - 2.4.4 σ-algèbres finies . . . 10
  - 2.4.5 Engendrer, étendre, comparer des σ-algèbres . . . 10
  - 2.4.6 Théorème de Carathéodory . . . 10
  - 2.4.7 Construction de la mesure de lebesgue et les mesurables 11
  - 2.4.8 Intégrale de Lebesgue . . . 11
- 2.5 Théorème de convergence (page 105) . . . 11
- 2.6 Ou regarder . . . 11
- 2.7 Formes volumes . . . 11

3 à faire **13**
- 3.1 Mesures . . . 13
  - 3.1.1 Lien mesure et f mesurable . . . 13

Chapitre 1

Cas des corps locaux

J'ai trouvé ça : lien. Apparemment $p^{v_p(\cdot)}$ c'est la valeur absolue naturelle grâce à la mesure de Haar! Wah en fait c'est joli proposition 12.14. ET c'est Weil qui a fait la preuve générale sur les groupes localement compacts de l'existence et unicité de la mesure de Haar.

1.1 Mesure de Haar, valuations discrètes et modules

Ce que Weil définit comme un module, en fait c'est une valeur absolue lol. Genre d'après le lien $\mu(xS) = (k_K)^{v(x)}\mu(S)$. Et l'argument clé qui me paraissait mystique c'est qu'on normalise μ avec $\mu(\mathcal{O}_K) = 1$ comme c'est compact puis :

$$\mu(\mathcal{O}_K) = [\mathcal{O}_K : x\mathcal{O}_K]\mu(x\mathcal{O}_K) = (k_K)^{v(x)}\mu(x\mathcal{O}_K)$$

vu que $\mathcal{O}_K = \sqcup y\mathcal{O}_K$ sur un système de représentants de k_K c'est ouf mdr. D'où $\mu(x\mathcal{O}_K) = (1/k_K)^{v(x)}$!! DOnc y'a qu'une valeur absolue compatible avec la mesure de Haar.

Chapitre 2

Théorie de la mesure et mesures de Haar

Je fais un petit chap sur ça juste parce que ça me branche. La source c'est ça. Le cours de tao! Je regarde aussi le cours de Villani qui est très bien.

2.1 Résumé après lectures

Concrètement pour les constructions et théorèmes d'existences Villani utilise le théorème de Carathéodory à gogo à partir de constructions naturelles! Il construit la mesure de Lebesgue et la mesure produit facilement grâce à ça.

2.2 Mesures de Jordan et intégrale de Riemann

On a les boites $:= \prod I_i$ des produits d'intervalles. Les ensembles élémentaires qui en sont des unions finies. Puis la mesure de Jordan ceux ci défini de manière évidente. On dit que $E \subset \mathbb{R}^d$ est jordan mesurable si

1. $m_o(E) := inf_{B \supset E \text{élémentaire}} m(B) < \infty$.
2. $m_i(E) := sup_{B \subset E \text{élémentaire}} m(B) < \infty$.
3. $m_o(E) = m_i(E) =: m(E)$.

2.2.1 Exemples

Maintenant deux bons exemples peut-être c'est les rationnels t.q :

1. $m_o(\mathbb{Q}) = \infty$. Alros que la mesure de Lebesgue est nulle.
2. $m_i(\mathbb{Q}) = 0$ car on l'approche par unions finies de points.

et le graphe de $f \colon B \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue avec B une boite fermée, alors

1. $m_o(E) = 0$ parce que f est uniformément continue sur B.
2. La preuve c'est qu' on a un δ et ϵ t.q $\Gamma \subset \cup B_\delta \times B_\epsilon$ un nombre linéaire de copies du truc de droite d'où

$$m(B_\delta \times B_\epsilon).m(B)/\delta \geq m(\Gamma)$$

en particulier $\delta\epsilon.m(B)/\delta \geq m(\Gamma)$ d'où le résultat. Le point c'est que B_δ bouge en même temps que B_ϵ vu que c'est pas pointé. Penser aux recouvrements de $X \times_Y X$ recouverts diagonalement! Ca fait une dépendance linéaire sur le nombre de multiple de $B_\delta \times B_\epsilon$ nécessaires.

2.2.2 Critère

Être Jordan mesurable c'est facilement équivalent à ce que pour tout $\epsilon > 0$ on puisse trouver $A \subset E \subset B$ tels que $m(B - A) \leq \epsilon$. Parce que

$$m(A) \leq m_i(E) \leq m_o(E) \leq m(B) \leq m(A) + \epsilon$$

2.2.3 Lien avec l'intégrale de Riemann

Pour le lien avec l'intégrale de Riemann. On prends $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ et une partition pointée $P = ((x_0, \ldots, x_n), (x_1^*, \ldots, x_n^*))$ avec $x_i^* \subset [x_{i-1}, x_i]$. Ensuite on définit

$$R(f, P) := \sum f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

et $\Delta(P) := sup_i |x_i - x_{i-1}|$ puis

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\Delta(P) \to 0} R(f, P)$$

On peut maintenant définir l'intégrale comme une aire via la mesure de Jordan. On regarde

$$E^+ = \{(x, t) | x \in [a, b], 0 \leq t \leq f(x)\}$$

la partie au dessus de $0 \times \mathbb{R}$ et

$$E^- = \{(x, t) | x \in [a, b], f(x) \leq t \leq 0\}$$

la partie en dessous. Alors f est Riemann intégrable si et seulement si E^+ et E^- sont Jordan mesurables. Alors $\int_a^b f = E^+ - E^-$!

2.2.4 Preuve

En prenant f positive, le point c'est que si E^+ est Jordan mesurable on peut construire $R(f,P)$ comme suit : On regarde une union disjointe de boites qui tend vers E^+. C'est des rectangles donc on peut supposer qu'elle collent $0\times\mathbb{R}$. Ensuite elle contiennent les $(x, f(x))$ en particulier $(x, \sup(f(x')))$ dans une petite boule. Puis on enchaine...

2.2.5 Unicité de l'intégrale de Riemann comme Fonctionnelle

Une fonctionnelle c'est une application linéaire de $C(X,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Les propriétés c'est la valeur en les indicatrices est la mesure.

2.3 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

On peut redéfinir l'intégration habituelle. La mesure est pas si facile à construire. C'est la complétion de celle donnée sur les intervalles par la longueur en dimension 1. Et la mesure produit en dimension d.

2.4 Mesure de Lebesgue abstraite

Page 93, il y parle de choses familières, convergence d'ensembles! Via la convergence de 1_{E_n} en tout point. Intersections et unions d'ensembles imbriqués et convergence de mesure (si mesure finie).

2.4.1 Catégorie des espaces mesurés

Une fonction mesurable $f\colon (X,\tau)\to(Y,\theta)$ est telle que $f^{-1}(E)$ est θ-mesurable si E est θ-mesurable. Et ca se compose!

2.4.2 $f_*\mu$ et changement de variable!

Étant donné $\varphi\colon X\to Y$ mesurable on peut définir $\varphi_*\mu(E) := \mu(\varphi^{-1}E)$! En particulier si on a aussi $f\colon Y\to\mathbb{R}$ on peut montrer que

$$\int_X f\circ\varphi d\mu = \int_Y f d\varphi_*\mu!$$

Apparemment faut un théorème de convergence dominée.

2.4.3 $\mu|_E$

On peut restreindre la mesure à un espace mesurable E! Par exemple $GL_n(K) \subset K^{n^2}$ avec K muni d'une valeur absolue par exemple d'où une mesure. À l'inverse si K est muni d'une mesure de Haar, on peut définir une valeur absolue à la Weil. Ensuite $GL_n(K)$ est ouvert dans K^{n^2} d'où on peut restreindre μ.

2.4.4 σ-algèbres finies

Si (X, τ, μ) est mesuré et τ est finie, X est partitionné en un nombre fini d'atomes (simplement union disjointe de trucs mesurables $X = \cup A_i$, via l'indicatrice, l'union,... Ça donne une algèbre booléenne). Maintenant là dessus une fonction mesurable $f\colon X \to [0, +\infty]$ c'est juste une somme finie d'indicatrices :

$$f := \sum_{i=1}^{n} c_i 1_{A_i}$$

On peut définir ensuite l'intégrale via

$$\int_X f := \sum_i c_i \mu(A_i)$$

Inversement, si f est une somme finie d'indicatrice

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i 1_{A_i}$$

Alors on peut prendre la σ-algèbre engendrée par les $f^{-1}(c_i)$.

2.4.5 Engendrer, étendre, comparer des σ-algèbres

C'est juste indicatif cette section, en fait on peut prendre des σ-algèbres plus fines et ça laisse invariantes les intégrales de fonctions simples!

2.4.6 Théorème de Carathéodory

Y'a un certain Théorème de Carathéodory (généralisé) qui permet de construire des mesures à partir d'une fonction $\mu\colon \mathscr{F} \to [0, +\infty]$ où $F \subset P(X)$ est une famille de partie stable par intersection (faut des conditions sur $\mathscr{F}$, μ et X). C'est intéressant. En particulier on peut prendre les pavés $A \times B$ par exemple.

L'extension μ^* est complète! Avec complet qui veut dire $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$ implique A mesurable.

2.4.7 Construction de la mesure de lebesgue et les mesurables

On utilise le théorème du dessus à plusieurs reprises sur les pavés pour construire la mesure sur $\mathbb{R}$ puis les mesures produits. En particulier, la mesure de lebesgue est une complétion et un truc mesurable c'est un E tel que $A \subset E \subset B$ avec A, B boréliens tels que $\mu(A) = \mu(B)$.

2.4.8 Intégrale de Lebesgue

Étant donné $f\colon X \to [0, +\infty]$ mesurable. On peut définir

$$\int_X f d\mu := \sup_{0 \leq g \leq f; g \ simple} \int_X g d\mu$$

Remarque 1. *Si on a une mesure sur GL_n, par exemple celle de lebesgue sur $GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ la continuité du déterminant rend mesurable $GL_n(\mathbb{R})$ et le det. D'où on peut calculer des intégrales là dessus.*

Pour l'étendre à $f\colon X \to \mathbb{R}$ mesurable on doit avoir l'absolue intégrabilité

$$||f||_{L^1(X,f,\mu)} := \int_X |f| d\mu$$

ensuite on peut définir $f^{\pm} := \max(0, \pm f)$. Puis si f est absolument intégrable :

$$\int_X f := ||f^+|| - ||f^-||$$

Enfin, pour $f\colon X \to \mathbb{C}$ on déf via la partie imaginaire et réelle. Page 100 y'a pleins de propriétés de l'intégrale. Notamment les propriétés vraies μ-presque partout. Vu que les ensembles de mesures 0 sont invisible du point de vue de l'intégrale. Aussi des découpages via $f.1_{E_n}$.

2.5 Théorème de convergence (page 105)

2.6 Ou regarder

Page 100-103 y'a pleins de choses très cool et intuitives sur le calcul d'intégrales!

2.7 Formes volumes

Woh, le cours de variété algébrique va me servir.

Chapitre 3

à faire

3.1 Mesures

Continuité sur un compact métrique implique uniforme continuité.

3.1.1 Lien mesure et f mesurable

Étant donné X et une mesure finie. La mesurabilité de f force des choses sur f ? Étant donné des tribus particulières?