# Homotopie et homologies

2024-2025

# Table des matières

## 0.1 Homologie singulière et cohomologie des faisceaux

https://math.stackexchange.com/questions/1794725/detail-in-the-proof-that-sheaf-cohomology-singular-cohomology dit qu'en gros sur des espaces localement contractile (ceux qui m'intéressent) le complexe d'homologie singulière à coefficients entiers est acyclique et une résolution de $\mathbb{Z}$ d'où calcule

$$H^i(X, \mathbb{Z}) = H^i(X, \mathbb{Z}_X)$$

l'homologie du faisceau constant.

## 0.2 Homotopie, connexité et faisceau constant.

Petite étude du faisceau constant $A_X$ sur un $X$ tel que les composantes connexes soient ouvertes.

## 0.3 Cadre de base de l'homotopie

On se place sur $C(X, Y)$ les fonctions continues munies de la topologie compacte-ouverte.

**Remarque 1.** *C'est donné par la base d'ouverts $V(K, U)$ t.q $f \in V(K, U) := \{f(K) \subset U\}$.*

Alors une homotopie c'est un $H \colon [0, 1] \to C(X, Y)$. Parce que

$$h \colon C([0, 1] \times X, Y) \simeq C([0, 1], C(X, Y))$$

canonique via

$$H \mapsto (a \mapsto H(a, \_))$$

C'est injectif et continu mais pour que ce soit un surjectif faut demander que $X$ soit localement compact et séparé. Ce qui est pas évident à montrer c'est que $H$ est continue ssi $h(H)$ est continue, on utilise la locale compacité pour comparer la continuité de $h(H)$ à la continuité de $h$ (ça revient à montrer la surjectivité aussi! Tu peux regarder que c'est pas clair! Je suis soulagé d'avoir compris mdr.

Une fois qu'on sait ça c'est clair que

$$h(V(K_1 \times K_2, U)) = V(K_1, V(K_2, U))$$

et inversement comme c'est bijectif. Y'a une preuve là.

# Chapitre 1

# CW-complexes

# Chapitre 2

# Groupes d'homotopies

## 2.1 Homotopies

Faudra toujours penser à une homotopie de plusieurs points de vues. De $H\colon [0,1] \times X \to Y$ on remarque que $h^x := (t \mapsto H(t,x))$ est un chemin entre $f(x)$ et $g(x)$. Et si $X$ est un segment. Alors $h_t := s \mapsto H(t,s)$ est aussi un chemin. On peut se balader sur $[0,1]^2$.

### 2.1.1 Défs

**$\sim$ sur $C(X,Y)$**

On déf $\sim$ sur $C(X,Y)$ par $f \sim g$ si y sont homotopes. C'est facilement une relation d'équivalences!

**Remarque 2.** *Montrer que la composée d'homotopies est continue. C'est facile quand on prend la déf $[0,1] \to C(X,Y)$!! En fait c'est juste $H_3^{-1}(U) = H_2^{-1}U \cup H_1^{-1}U$ vraiment.*

#### Par rapport à une partie

Si $f, g$ coincident sur $A$, on peut demander à ce que l'homotopie fixe $A$. I.e. $H(\_, A)$ un point et on note $f \sim_A g$.

#### Contractile

On est contractile si $id_X \sim (x \mapsto x_0)$ (plus non vide).

#### Équivalence d'homotopie

C'est $f\colon X \rightleftarrows Y\colon g$ t.q. $f \circ g \sim id_Y$ et $g \circ f \sim id_X$.

**Rétract**

$i\colon Z \subset X$ est un rétract si on a $r\colon X \to Z$ t.q $r \circ i = id_Z$.

**Rétract par déformation**

En plus $i \circ r \sim id_X$. En particulier $X$ et $Z$ sont homotopiquement équivalents.

**Rétract par déformation forte**

En plus $i \circ r \sim_Z id_X$.

### 2.1.2 Étendre $S^1$ en $B^2$, topologie quotient et finale.

Là d'un coup y'a plusieurs notions. La simple connexité c'est que tout les lacets s'étendent en $B^2$. Donc y'a pas de trous. La contractilité implique la simple connexité via le fait que si $id_X \sim x_0$ par $H$ et $S^1 \to X$ est un lacet alors on obtient

$$[0,1] \times S^1 \to [0,1] \times X \to X$$

et que $\{1\} \times S^1 \mapsto x_0$. D'où ça passe au quotient en $B_2 \to X$.

### 2.1.3 La continuité

Donc la propriété universelle de $X/\sim_A$ ca doit être que pour tout $X \to Y$ continue t.q. $f(A) = \{*\}$ alors on a une unique $X/\sim_A \to Y$ continue pour la topologie quotient à gauche qui fait commuter. En particulier,

$$[0,1] \times S^1 \to X$$

est continue. Plus en détail, si on a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & Y \\ X/A \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

alors $\bar{f}$ est continue vu que $\bar{f}^{-1}V$ est ouvert ssi $\pi^{-1}\bar{f}^{-1}V = f^{-1}V$ l'est.

**Commentaire sur la topologie quotient**

C'est le petit twist sur l'incertitude de $\pi^{-1}\pi U = U$ ou $U \cup A$ et $A$ par forcément ouvert. Là, $f^{-1}V$ est ouvert et contient $A$ OU ne contient pas $A$. Alors que $U \cup A$ ca peut déborder.

## 2.2 Groupe fondamental

Le lemme 2.1 donne toutes les homotopies pour que $\pi_1(X, x)$ soit un groupe (composition, associativité, inverse,...). Y'a plusieurs points de vues à retenir.

### 2.2.1 Homotopies de chemins

On est dans le cas où une homotopie c'est un chemin dans

$$C([0,1], X)$$

On peut écrire les homotopies de chemins/lacets :

$$H\colon [0,1] \times [0,1] \to X$$

comme pour l'associativité, où par déf $(\alpha.\beta).\gamma$ on va 4 fois plus vite sur les deux premiers et 2 fois plus vite sur $\gamma$. Et faut aller vers $\alpha.(\beta.\gamma)$ où ça va 4 fois plus vite sur les deux derniers. Conseil :

Faire ce qui marche au niveau des bords mdr

### 2.2.2 $\pi_1$ est un groupe

Faut juste vérifier que tout est vrai à homotopie près

### 2.2.3 Propriétés du foncteur

Dans une composante connexe par arc on peut changer à isomorphisme près le point base par

$$\phi_l\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y); [c] \mapsto [\bar{l}.c.l]$$

avec $l(0) = x$ et $l(1) = y$. C'est un isomorphisme unique à homotopie relative de $l$ près. Et si $l'$ est un autre chemin, alors $\phi_l$ et $\phi_l'$ sont conjugués via $[l.\bar{l}']$ (dans ce sens).

**Remarque 3.** *Ça veut dire quoi que le $\pi_1$ est abélien ?! Genre le tore.*

Étant donné $f\colon X \to Y$, $[c] \mapsto [f \circ c]$ est bien déf, i.e. préserve les homotopies par $H \mapsto f \circ H$, et préserve les compositions (par définition des compos! écrire) donc est un m.d.g. En plus $\pi_1$ est additif via $c \times c'$ (c'est clairement un lacet, pas de pb de continuité ni de définition). On obtient un foncteur covariant additif

$$Top_* \to Grp$$

donné par $(X, x) \mapsto \pi_1(X, x)$. Et pour $(X, x) \to (Y, y)$ on a

$$\pi_1(f)\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x) = y)$$

## 2.3 Homotopie et $\pi_1$

Si $f, g\colon X \to Y$ sont homotopes, on obtient un chemin $f(x) \to g(x)$ via $c(t) := h_x(t) := H(t, x)$. D'où un iso $u\colon \pi_1(Y, g(x)) \to \pi_1(Y, f(x))$. Et en fait

$$f_* = ug_*$$

faut montrer que $[f \circ a] = [\bar{c}.(g \circ a).c]$. Et pour ça, par déf de $c$, on peut redéfinir $c = c_1$ et $c_s(t) := h_x(st)$. En particulier $(s, t) \mapsto \bar{c}_s.(h_s \circ a).c_s(t)$ c'est une homotopie entre les deux classes. En détail $c_s$ c'est un chemin entre $f(x)$ et $H(s, x)$, puis $h_s \circ a$ c'est un lacet en $h_s(x)$ puis $\bar{c}_s$ c'est un chemin entre $h_s(x)$ et $f(x)$. Ça fixe bien les extremités.

**Remarque 4.** *Pour chaque $x$, $t \mapsto h_t(x) = H(t, x)$ est un chemin entre $f(x)$ et $g(x)$.*

## 2.4 Invariance de $\pi_1$

Ducoup on en déduit direct que $\pi_1$ est invariant par équivalence d'homotopie.

## 2.5 Indice à Van Kampen

### 2.5.1 Découper des chemins

Étant donné $X = U \cup V$, on peut découper un chemin $a = \prod a_i$ de telle sorte à ce que $a_i$ soit dans $U$ ou $V$. On peut regarder $a^{-1}U \cup a^{-1}V = [0, 1]$, le piège c'est que c'est des ouverts mais pas connexes nécessairemment. Donc c'est une union infinie d'intervalles. On peut écrire

$$\cup ]u_{i1}, u_{i2}[ \cup ]v_{i1}, v_{i2}[$$

et par compacité on a une union finie de trucs soit dans $a^{-1}U$ soit dans $a^{-1}V$. Ensuite $a(]u_{i1}, u_{i2}[) \subset a(a^{-1}(U)) \subset U$. Maintenant on peut raffiner dans $[0, 1]$ en une union type $\cup ]i/n, (i + 1)/n[$.

### 2.5.2 Lemme

Étant donné $X = U \cup V$ avec $U, V, U \cap V$ connexes par arcs, alors pour tout $x \in U \cap V$,

$$< \pi_1(U, x), \pi_1(V, x) >= \pi_1(X, x)$$

En particulier si $U$ et $V$ sont simplements connexes, $X$ aussi. La différence avec Van Kampen c'est la précision de l'énoncé. Donc concrètement, on découpe $a$ en $\prod a_i$ avec

$$a_i(t) = a((i+t)/n)$$

ensuite on prends $c_i$ un chemin entre $x$ et $a_i(0)$ contenu dans $U, V, U \cap V$ en fonction de $a_i(0)$. Alors

$$\bar{c}_i.a_i.c_{i+1} \in \pi_1(W, x)$$

(!) avec $W = U, V$ ou $U \cap V$ en fonction de $a_i(0), a_i(1)$. Enfin

$$a = \prod_{i=0}^{n} \bar{c}_i.a_i.c_{i+1}$$

D'où

$$< \pi_1(U, x), \pi_1(V, x) >= \pi_1(X, x)$$

# Chapitre 3

# Exemples

## 3.1 Exemples de contractions/rétractions

### 3.1.1 Convexe métrique

Dans un espace vectoriel topologique $V$ si on a un convexe non vide $C$ :

$$(s, x) \mapsto (1 - s)x + sx_0$$

contracte $C$ sur $x_0$. C'est vraiment agréable!

### 3.1.2 $n - 1$-sphère et $R^n - 0$

On regarde $(s, x) \mapsto (1 - s)x + sx/||x||$. En particulier $x \mapsto x/||x||$ est un rétract par déformation forte!

### 3.1.3 Tore privé d'un point et cercles

Je peux pas faire de desseins, mais l'idée c'est de regarde le tore comme le recollement de côtés opposés dans le même sens

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] & \bullet \\
\bullet \arrow[r] \arrow[u] & \bullet \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

et si au lieu de regarder le carré on écrit un cercle à 4-points, on a un rétract par déformation forte via $x/||x||$. Ensuite, on obtient juste les bords du carrés avec les côtés opposés identifiés. Ça c'est pareil que

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] & \bullet \\
\bullet \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

où on identifie les 3 points. D'où le bouquet de deux cercles.

### 3.1.4 Ruban de moebius et $S^1$

On définit $[0,1]^2 \to ([0,1]/(1 \sim 0)) \times \{1/2\}$, ça passe au quotient pour $(0,s) \sim (1, 1-s)$. Plus précisément

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]^2} \arrow[r] \arrow[d] & {[0,1] \times \{1/2\}} \arrow[d] \\
{[0,1]^2/((0,s) \sim (1,1-s))} \arrow[r, dashed] & {[0,1]/(1 \sim 0) \times \{1/2\}}
\end{tikzcd}$$

Ensuite, en haut c'est un rétract par déformation forte et l'homotopie descend en bas, on le voit par propriété universelle. En particulier ça reste un rétract par déformation forte. D'où un isomorphisme de $\pi_1$.

## 3.2 Peigne, pas de rétract par déformation forte

Si on regarde

$$P = [0,1] \times 0 \bigcup 0 \times [0,1] \bigcup \cup_i 2^{-i} \times [0,1]$$

dans $\mathbb{R}^2$ avec la **topologie induite** (c'est tout le pb) c'est contractile parce que y'a un rétract par déformation forte sur $[0,1] \times 0$. Par contre $(0,1)$ est pas un rétract par déformation forte. Et ça je pense que c'est parce que pour converger de manière connexe par arc vers $(0,1)$ on peut pas facilement vu que $B(x_0, 1/2)$ est une union disjointe infinie. Mais j'arrive pas à le prouver

## 3.3 Bouquet de $n$-Sphère et plan moins $n$-points

On peut prendre $x_i = (i, 0)$. Et on sépare le plan en $n$-bandes verticales. À homotopie près on peut couper le reste. Ensuite en gros on définit

$$(s,x) \mapsto (1-s)(x - x_i) + s(x - x_i)/||x - x_i|| + x_i$$

si $x$ est dans la $i$-ème bande. Le fait de faire $-x_i$ ça pousse dans la première bande. Ensuite, ça met sur le cercle, comme la bande est convexe et contient pas 0 c'est bon. Ensuite on renvoie sur la $i$-ème sphère. Pour que ce soit continu faut que les bords des sphères soient collées intuitivement. D'où $n$-sphères collées, puis ça c'est homotope au bouquet.

**Remarque 5.** *Pour le faire formellement dans $\mathbb{R}^n$ ça a l'air faisable. Faut juste revoir la définition avec les suites convergentes je pense.*

### 3.3.1 Groupe fondamentaux de groupes topologiques

Là y se passe un truc vraiment drôle. Si on déf sur $G$ un groupe topologique $fg\colon t \mapsto f(t)g(t)$ ça fait un lacet pour $f, g \in \pi_1(G, e)$. Et maintenant on peut montrer que

$$fg \sim f.g$$

sauf que ducoup on peut en déduire que le $\pi_1$ est abélien!! En fait l'idée c'est que

$$[fg] = [(f.c_e)(c_e.g)] = [f.g]$$

et

$$[fg] = [(c_e.f)(g.c_e)] = [g.f]$$

et ça c'est drôle (et vrai par définition en fait). Attention $f(g.c_e) \neq fg.f$ à cause des vitesses! On aurait que $f$ de 0 à 1/2 sur la première partie en fait.

## 3.4 Variétés topologiques et locale contractilité

En gros tout ce qu'on regarde et l'endroit où la cohomologie des faisceaux est la cohomologie singulière c'est sur les espaces localements contractiles.

# Chapitre 4

# Revêtements