Théorie de Hodge p-adique

Programme: 1. ramification 2. corps perfectoides, extensions profondément ramifiées, extensions arithmétiquement profinies. 3. corps des normes 4. représentation p-adiques des corps locaux.

Fontaine 1970-1980. Généralisation par Scholze.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Corps non-archimédien

1.2 Lemme de Krasner

Soit $\alpha \in \bar{K}$ et $f = \mu_\alpha$. Soit aussi $\alpha_1, ..., \alpha_n$ ses racines avec $\alpha = \alpha_1$. On note $d_\alpha := min_{i>1}\{|\alpha - \alpha_i|\}$. Supposons que pour $\beta \in \bar{K}$ on ait

$$|\beta - \alpha|_K < d_\alpha|$$

alors $K(\alpha) \subset K(\beta)$.

1.3 Plus petit corps algébriquement clos complet

Étant donné K non archimédien complet. On a

$$\hat{\bar{K}} =: \mathbb{C}_K$$

est complet et algébriquement clos. Grâce à Krasner.

1.4 Action de $G_K = Gal(\bar{K}/K)$

Avec la topologie discrète sur G_K. On a pour tout g, x, $|gx| = |x|$! On peut l'étendre à $\mathbb{C}_K$. Question :

$$\mathbb{C}_K^{G_K} = K?$$

Pas trivial mais oui. On le prouve plus tard. C'est un théorème d'Ax-Tate.

1.5 Corps locaux

Un corps local est un corps complet de valuation discrète et de corps résiduel fini.

Remarque 1. *On sera souvent dans ce cas. Mais les théorèmes seront souvent vrai si le corps résiduel est seulement parfait.*

Maintenant K est local et $|k_K| = q$.

Proposition 1. *Pour tout $x \in k_K$ il existe un unique $[x]$ t.q $[x]^q = [x]$. En plus la flèche, $k_K^* \to K^*$ $x \mapsto [x]$ est un iso de $k_K^* \simeq \mu_{q-1}$.*

1.5.1 Classification, vecteurs de Witt?

Soit K un corps local. Si $char(K) = 0$, alors K est une extension finie (à iso près) de $\mathbb{Q}_p$. Si $char(K) = p$ alors $K \simeq k_K((X))$ avec la valuation X-adique. Sachant que $k_K = \mathbb{F}_q$ ducoup.

1.6 Filtration

Étant donné K local, on note

$$U_K^{(i)} = \begin{cases} U_K, \ i = 0 \\ 1 + \pi_K^i \mathcal{O}_K, \ \geq 1 \end{cases}$$

C'est juste $U_K^{(i)} = \bar{B}(1, i)$. On a

$$U_K^{(i)}/U_K^{(i+1)} = \begin{cases} k_K^*, \ i = 0 \\ k_K^+ \ i \geq 0 \end{cases}$$

1.7 Vocabulaire dans le cas des corps locaux.

Si L/K est finie de corps locaux. On dit qu'elle est

- Non ramifiée si $e = 1$. (les corps résiduels sont finis!)
- Totalement ramifiée si $e = [L : K]$.
- Totalement modérément ramifiée si $e = [L : K]$ et $p \nmid e$.
- Totalement sauvagement ramifiée si $e = [L : K]$ et $e = p^k = [L : K]$.

Dans $K - \bar{K}$ on peut prendre K^{un} l'union/le compositum (?) des sous extensions non ramifiées. Maintenant,

$$Gal(K^{un}/K) \simeq Gal(\bar{k}_K/k_K) \simeq \hat{\mathbb{Z}}$$

est engendré par le Frobenius (ça c'est bizarre y me semble que c'est faux, neukirch class field theory première page mdr, bah c'était faux mdr). En particulier, on a $Frob_K \in Gal(K^{un}/K)$ t.q

$$Frob_K(x) = x^q \mod m_K$$

pour tout $x \in \mathcal{O}_L$ t.q L/K non ramifiée. On se restreint donc à $\bar{K} - K^{un}$ et on note $I_K = Gal(\bar{K}/K^{un})$.

Remarque 2. *Exercice, si* $charK = 0$*, alors y'a qu'un nb fini d'extensions de degré* $\leq n$*. En caractérstique positive c'est faux, faut ajouter séparable de degré* $\leq n$ *(apparemment c dur).*

1.8 La différente

Étant donné L/K finie séparable de corps locaux. On regarde la forme trace $L \times L \to K$. Donnée par $tr(x, y) = Tr_{L/K}(xy)$. On note

$$\mathcal{O}'_L = \{x \in L | tr(x, y) \in \mathcal{O}_K, \forall y \in \mathcal{O}_L\}$$

c'est un idéal fractionnaire de L qui contient $\mathcal{O}_L$. On note $\mathscr{D}_{L/K} = (\mathcal{O}'_L)^{-1}$, c'est un idéal de $\mathcal{O}_L$. Ca se définit bien dans des anneaux de Dedekind généraux. On a

$$\mathscr{D}_{L/K} = \mathscr{D}_{L/F}\mathscr{D}_{F/K}$$

et on déf/a

$$v_L(\mathscr{D}_{L/K}) = \min\{\dots\}$$

et c'est simple vu que $\mathscr{D}_{L/K} = (\pi_L^m)$. On a

Proposition 2. *On a*

1. *Si* $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\alpha]$ *et* $f = \mu_\alpha$*. On a* $\mathscr{D}_{L/K} = (f'(\alpha))$*!*
2. $\mathscr{D}_{L/K} = \mathcal{O}_L$ *si et seulement si* L/K *est non ramifiée.*
3. $v_L(\mathscr{D}_{L/K}) \geq e - 1$*,* $e = e(L/K)$*.*
4. $v_L(\mathscr{D}_{L/K}) = e - 1$ *ssi* $p \nmid e$*.*

1.. Étant donné α_i les racs de f. Claim : $\sum \frac{f(X)}{(X-\alpha_i)} \frac{\alpha_i^r}{f'(\alpha_i)} = X^r$ pour $0 \leq r \leq n-1$ (c'est presque la dérivée). Pour le prouver, on peut évaluer en n points. On évalue en les α_i et c'est clair. Pour une racine fixée $\alpha = \alpha_1$, on a

$$f(X)/(X-\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i$$

avec $b_i \in \mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\alpha]$. Maintenant on remarque que les termes de $\sum \frac{f(X)}{(X-\alpha_i)} \frac{\alpha_i^r}{f'(\alpha_i)} = X^r$ sont conjugués sous l'action de $G_{L/K}$ d'où on peut calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} X^k Tr_{L/K}(b_k \alpha^r / f'(\alpha)) = X^r$$

puis

$$Tr_{L/K}(b_k \alpha^r / f'(\alpha)) = \begin{cases} 1, & k = r \\ 0, & sinon \end{cases}$$

en particulier, on a une base duale de $(\alpha^i)_{i=1,\ldots,n-1}$ pour la trace : $(b_k / f'(\alpha))_k$. Deuxième claim : $(b_k)_k$ engendre $\mathcal{O}_L$ sur $\mathcal{O}_K$. On peut le faire en comparant les coefficients de

$$f(X) = (X-\alpha)(\sum b_i X^i)$$

et par induction(?). Du claim on déduit que $\mathcal{O}'_L = 1/f'(\alpha)\mathcal{O}_L$ puis le résultat. □

2.. On montre non ramifiée implique $\mathscr{D}_{L/K} = \mathcal{O}_L$. On peut prendre α tq $k_K(\bar{\alpha}) = k_L$. Avec $f = \mu_\alpha$. On a $\bar{f}'(\bar{\alpha}) \neq 0$, d'où $f'(\alpha) \in \mathcal{O}_L^\times$ et le résultat. L'inverse est clair, on prouve que $[L : K] = f$. □

3.. On a $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\pi_L]$. Et $\mu_{\pi_L} = f$ Eisenstein. D'où $f'(\pi_L) = \sum (e-i)\pi_L^{e-i-1}$ et $v_L(e\pi_L^{e-1}) = v_L(e) + (e-1)$ plus $v_L(a_i) \geq e$ d'où $v_L(f'(\pi_L)) \geq e-1$. □

4.. Si $p \nmid e$ on a $v_L(e\pi_L^{e-1}) = e-1 < v_L(a_i)$. Si $p \mid e$ on a $v_L(f'(\pi_L)) \geq e$. □

5. (?). Si $K - L_0 - L$ est tq $L_0 = K^{un}$ alors $\mathscr{D}_{L/K} = \mathscr{D}_{L/L_0}\mathscr{D}_{L_0/K} = \mathscr{D}_{L/L_0}$. Alors $\mathscr{D}_{L/K}\mathcal{O}_L \equiv L = L_0 \equiv L/K$ est non ramifiée. □

1.9 Filtration de ramification

On regarde L/K galoisienne (G) de corps locaux. Alors pour $i \geq -1$, $G_i = \{g \in G | \forall x \in \mathcal{O}_L,\ v_L(g(x) - x) \geq i + 1\}$. On voit facilement que c'est des sous groupes distingués de G. On a en plus $G_{-1} = G$ et $G_0 = I_K$. Puis pour $i \geq 0$, on a

$$G_i = \{g \in G | v_L((g(\pi_L)/\pi_L) - 1) \geq i\}$$

(ca marche psq $i \geq 0$) on écrit, $\sum a_i \pi_L^i = x \in \mathcal{O}_L$ avec $a_i \in \mathcal{O}_{L_0}$ ($L - L_0$ tot ram!) d'où $g(a_j) = a_j$ pour $g \in G_i$ vu que $G_i \subset I_K$. Ensuite c'est comme d'hab. Maintenant on a

$$G_i \to U_L^{(i)}/U_L^{(i+1)}$$

via $g \mapsto g(\pi_L)/\pi_L$ qui induit un morphisme injectif G_i/G_{i+1}. En particulier

$$G_i/G_{i+1} \text{ est abélien.}$$

on en déduit que les extensions galoisiennes de corps locaux sont résolubles.

Remarque 3. *Dans la somme, le -1 apparaît car quand $|G_{i_0}| = 1$, on fait $-i_0 - 1$ et y'a i_0 termes jusqu'ici.*

Proposition 3. $v_L(\mathscr{D}_{L/K}) = \sum_{i=0}^{\infty}(|G_i| - 1)$.

Démonstration. On prend $\alpha \in \mathcal{O}_L$ tq $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\alpha]$ et $f = \mu_\alpha$. On déf $i_G(g) = v_L(g\alpha - \alpha)$. On a

$$i_G(g) = i + 1 \equiv g \in G_i$$

puis

$$\begin{aligned}
v_L(\mathscr{D}_{L/K}) = v_L(f'(\alpha)) &= \sum_{i=2}^{n} v_L(\alpha - \alpha_i) \\
&= \sum_{g \in G - id} v_L(\alpha - g\alpha) \\
&= \sum_{g \in G - id} i_G(g) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (|G_i| - |G_{i+1}|)(i + 1) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (|G_i| - 1)
\end{aligned}$$

$\square$

Lemme 1. *Sur L/K galoisienne de corps locaux, avec $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\alpha]$. On a*

1. $i_{L/K}(g_1 g_2) \geq min(i_{L/K}(g_1), i_{L/K}(g_2))$
2. $i_{L/K}(g_2 g_1 g_2^{-1}) = i_{L/K}(g_1)$
3. $g \in G_i \Leftrightarrow i_{L/K}(g) \geq 1 + i$
4. $v_L(\mathscr{D}_{L/K}) = \sum_{i=0}^{\infty}(|G_i| - 1) = \sum_{g \neq id} i_{L/K}(g)$

Démonstration. Pour 1. on écrit juste $g_1 g_2(\alpha) - \alpha = g_1(g_2\alpha - \alpha) + g_1(\alpha) - \alpha$. Le 2. est clair. $\square$

Chapitre 2

Ramification en tours

2.1 Ramification dans les tours d'extensions

On regarde $L - F - K$ avec $H = Gal(L/F) \leq G$ normal. On a $H_i = G_i \cap H$ directement vu que $i_{L/E}$ dépend de v_L. On a en plus $\mathscr{D}_{L/K} = \mathscr{D}_{L/F}\mathscr{D}_{F/K}$ d'où $v_L(\mathscr{D}_{L/K}) = v_L(\mathscr{D}_{L/F}) + v_L(\mathscr{D}_{F/E}) = v_L(\mathscr{D}_{L/F}) + e_{L/F}v_F(\mathscr{D}_{F/K})$ où à droite on prends v_L, v_F normalisées. Maintenant

$$\begin{aligned} v_L(\mathscr{D}_{L/F}) &= \sum_{h\neq 1, h\in H} i_{L/F}(h) \\ &= \sum_{h\neq 1, h\in H} i_{L/K}(h) \end{aligned}$$

en corollaire et via $v_L(\mathscr{D}_{L/K}) = \sum_{g\neq id} i_{L/K}(g)$:

$$e_{L/F}v_F(\mathscr{D}_{F/K}) = \sum_{g\in G-H} i_{L/K}(g)$$

Proposition 4. *Pour tout $s \in G/H$, $e_{L/F}i_{F/K}(s) = \sum_{g\in sH} i_{L/K}(g)$.*

Démonstration. On note $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_F[\alpha]$ et $\mu_\alpha = f \in \mathcal{O}_F[X]$. On regarde $s(f)(X) - f(X)$, on a $s(f) - f = 0 \mod \pi_F^{i_{F/K}(s)}$. D'où

$$v_L(s(f)(\alpha)) \geq e_{L/F}i_{F/K}(s)$$

maintenant si $f(X) = \prod_{h\in H}(X - h(\alpha))$ alors $s(f)(X) = \prod_{g\in sH}(X - g(\alpha))$ puis $s(f)(\alpha) = \prod_{g\in sH}(\alpha - g(\alpha))$. On en dduit que

$$\sum_{g\in sH} v_L(g(\alpha) - \alpha) \geq e_{L/K}i_{F/K}(s)$$

et on utilise le dernier corollaire pour obtenir :

$$\begin{aligned}\sum_{s\neq 1}(\sum_{g\in\pi^{-1}s=sH} i_{L/K}(g)) &= \sum_{g\in G-H} i_{L/K}(g)\\ &= e_{L/F}v_F(\mathscr{D}_{F/K})\\ &= e_{L/F}\sum_{s\neq 1} i_{F/K}(s)\end{aligned}$$

et on en déduit l'autre inégalité grâce à la première. □

Maintenant, on considère $j(s) = \max(i_{L/K}(g); \bar{g} = s)$. Il existe $\tilde{g} \in G$ tel que $j(s) = i_{L/K}(\tilde{g})$. Maintenant $s = \tilde{g}H$ d'où $g = \tilde{g}.h$ pour $g \in sH$. On peut en déduire que

$$i_{L/K}(g) \geq \min\{i_{L/K}(\tilde{g}), i_{L/K}(h)\}$$

et

$$i_{L/K}(g) \geq \min\{i_{L/K}(\tilde{g}^{-1}) = i_{L/K}(\tilde{g}), i_{L/K}(g)\}$$

puis comme $i_{L/K}(\tilde{g}) \geq i_{L/K}(g)$ on a

$$\min\{i_{L/K}(\tilde{g}), i_{L/K}(h)\} \geq i_{L/K}(g)$$

d'où $i_{L/K}(g) = \min\{i_{L/K}(\tilde{g}), i_{L/K}(h)\}$.

Corollaire 1. $e_{L/K}i_{F/K}(s) = \sum_{h\in H}\min\{j(s), i_{L/F}(h)\}$.

On note $G_x = G_{[x]+1}$ pour $x \in [-1, +\infty[$. Puis

$$\varphi_{L/K}(x) = \begin{cases} x, \ x \in [-1, 0] \\ \int_0^x \frac{dt}{(G_0:G_t)}, \ x \geq 0 \end{cases}$$

qui est la première fonction de Herbrand. En notant $g_m = |G_m|$ on a

$$\varphi_{L/K}(x) = \frac{1}{g_0}(g_1 + \ldots + g_m + g_{m+1}(x - m))$$

pour $m < x \leq m + 1$.

Lemme 2. $\varphi_{L/K}(x) = \frac{1}{g_0}\sum_{g\in G, g\neq 1}\min\{i_{L/K}(g), x + 1\} - 1$

Démonstration. La fonction à droite est continue et vaut

$$\frac{1}{g_0}\sum_{g\neq 1}\min\{i_{L/K}(g), 0\} - 1 = -1$$

en -1 donc coincide avec $\varphi_{L/K}(-1)$. En plus en comparant leurs dérivées on voit qu'elles sont égales. À gauche on a $\varphi'_{L/K}(x) = \frac{1}{(G_0:G_x)}$ et si $m < x < m+1$ alors $\varphi_{L/K}(x) = g_{m+1}/g_0$. Et à droite la dérivée c'est 1 ou 0 en fonction de g, et surtout $i_{L/K}(g) \geq m + 2$ implique $g \in G_{m+1}$ donc via la somme on est bon. La dérivée compte les g dans G_{m+1} entre $m + 1 < x + 1 < m + 2$. □

Lemme 3. *Pour tout $s \in G/H - id$, $\varphi_{L/F}(j(s)-1) = i_{F/K}(s) - 1$.*

Démonstration. On a $e_{L/F} i_{F/K}(s) = \sum_{h \in H} \min\{j(s), i_{L/K}(h)\}$ et

$$\varphi_{L/F}(j(s)-1) = \frac{1}{h_0 = e_{L/F}} \sum_{h \in H - \{id\}} \min\{i_{L/K}(h), j(s)\} - 1$$

d'où le résultat en comparant. □

Théoreme 1 (Théorème de Herbrand)**.** *Pour tout $x \geq 1$ on a $(G/H)_{\varphi_{L/K}(x)} = G_x H/H (= G_x/H \cap G_x = G_x/H_x)$.*

Remarque 4. *Au sens des groupes de ramifications pas des coinvariants mdr.*

Démonstration. Pour $s \in (G/H)_{\varphi_{L/K}(x)}$ équivaut à $i_{F/K}(s) \geq \varphi_{L/F}(x) + 1$ d'où par le dernier lemme ça équivaut à

$$\varphi_{L/F}(j(s)-1) \geq \varphi_{L/F}(x)$$

mais la fonction de herbrand est strictement croissante d'où $j(s) \geq x+1$, i.e. $\max\{i_{L/K}(g) | \bar{g} = s\}$, et il existe $\tilde{g}$ qui atteint le max. Ça se traduit en $i_{L/K}(\tilde{g}) \in G_x$ et $\bar{\tilde{g}} = s$. D'où le résultat. □

On note maintenant $\psi_{L/K} \colon [-1, \infty[\to \mathbb{R}$ ($[-1, \infty[\to [-1, \infty[$ même) l'inverse de $\varphi_{L/K}$.

Théoreme 2. *$\varphi_{L/K} = \varphi_{F/K} \circ \varphi_{L/F}$ et $\psi_{L/K} = \psi_{L/F} \circ \psi_{F/K}$.*

Démonstration. On montre que la première. Elles ont la même valeur à gauche et à droite. On calcule la dérivée. On a

$$\begin{aligned}
\varphi_{F/K} \circ \varphi'_{L/F}(x) &= \varphi'_{F/K}(x) . \varphi'_{L/F}(x) \\
&= \frac{1}{((G/H)_0 \colon (G/H)_{\varphi_{L/F}(x)})} . \frac{1}{(H_0 : H_x)} \\
&= \frac{1}{((G/H)_0 : (G_x/H_x))} . \frac{1}{(H_0 : H_x)} \\
&= \frac{1}{(G_0 : G_x)} \\
&= \varphi'_{L/K}(x)
\end{aligned}$$

□

Définition 1. On définit les groupes d'énumération supérieurs comme

$$G^{(x)} = G_{\psi_{L/K}=(x)}$$

de manière équivalente

$$G^{(\varphi_{L/K}(x))} = G_x$$

Théoreme 3 (Hasse-Herbrand)**.** *On a $(G/H)^{(x)} = G^{(x)}H/H$.*

Démonstration. La preuve est directe : $(G/H)^{(x)} = (G/H)_{\psi_{F/K}}(x)$. Comme $(G/H)_{\varphi_{L/F}(x)} = G_x H/H$ on remplace x par $\varphi_{L/F}^{-1} \circ \psi_{F/K}(x) = \psi_{L/F} \circ \psi_{F/K}(x) = \psi_{L/K}(x)$. D'où le résultat. On a utilisé le théorème 2! $\square$

On a $G_K = Gal(K^{sep}/K) = \varprojlim_{L/K\ finie} Gal(L/K)$. Maintenant le théorème de Hasse-Herbrand la projection

$$Gal(L/K) \to Gal(F/K)$$

induit une surjection $Gal(L/K)^{(x)} \to Gal(F/K)^{(x)}$. Et même

$$G_K^{(x)} = \varprojlim_{L/K} Gal(L/K)^{(x)}$$

une filtration de G_K!! On définit maintenant les sauts de ramification.

Définition 2. La filtration de ramification a un saut en $v \geq -1$ si $G_K^{v+\epsilon} \subsetneq G_K^{(v)}$ pour tout $\epsilon \geq 0$.

Remarque 5. *Dans cette notation v est rationnel aux sauts. Et apparemment en fait y'a des sauts à TOUT les rationnels ptdr. Donc la filtration est très compliquée.*

Exemple 1. On regarde

$$\begin{tikzcd} K := \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}) \arrow[d, bend left=60, "G=Gal(K/\mathbb{Q}_p)"] \\ \mathbb{Q}_p \arrow[u] \end{tikzcd}$$

et on a $\chi \colon G \simeq (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ via le caractère cyclotomique, donné par $g(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n}^{\chi(g)}$. On a une filtration naturelle $\Gamma[m] = \ker((\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times)$. On sait que $K/\mathbb{Q}_p$ est totalement ramifiée et $\pi = \zeta_{p^n} - 1$ est une uniformisante de K car racine d'un polynôme d'eisenstein (!!!). On a

$$g\pi - \pi = g\zeta_{p^n} - \zeta_{p^n} = \zeta_{p^n}(\zeta_{p^n}^{\chi(g)-1} - 1)$$

d'où $g \in G_m$ ssi $v_K(\zeta_{p^n}^{\chi(g)-1} - 1) \geq m + 1$. En traduisant : via

$$\chi(g) \equiv 1 \mod p^m \Leftrightarrow \chi(g) \in \Gamma[m]$$

on a

$$\zeta_{p^n}^{\chi(g)-1} - 1 = \zeta_{p^n}^{p^m.u} - 1 \equiv v((\zeta_{p^n} - 1)^{p^m}) = 0 \mod (\zeta_{p^{n-m}} - 1)$$

pour des unités u, v. En particulier $\chi(G_m) = \Gamma(k]$ tel que $p^{k-1} \leq m < p^k$. On peut maintenant calculer la fonction de Hasse-Herbrand : on a des sauts en $p^i - 1$ et elle vaut $\varphi_{K/\mathbb{Q}_p}(p^i - 1) = i$. En énumération supèrieure on a $G^{(x)} = \Gamma[x]$!

Proposition 5. *$v_K(\mathscr{D}_{L/K}) = \int_{-1}^{+\infty}(1 - \frac{1}{|G^{(v)}|})dv$ avec v_K normalisée.*

Démonstration. Preuve formelle. □

Étant donné G_K le groupe de galois absolu de K, on définit pour L/K tq $Gal(\bar{K}/L) = H$: $G^{(v)} := G_K^{(v)}H/H$ puis $\bar{K}^{(v)} = (\bar{K})^{G^{(v)}}$. Pour L/K, on définit $L^{(v)} = L \cap \bar{K}^{(v)} = L^{G^{(v)}}$. Alors $|G^{(v)}| = [L : L^{(v)}]$ et on a

$$v_K(\mathscr{D}_{L/K}) = \int_{-1}^{\infty}(1 - \frac{1}{[L : L^{(v)}]})dv$$

qui fait sens même si L/K est pas galoisienne, on utilise seulement que $\bar{K}/L$ est galoisienne.

Remarque 6. *C'est vrai pour toute extension séparable L/K.*

Chapitre 3

Groupes de galois de corps locaux

On étudie toujours $Gal(\bar{K}/K)$ pour K local. On a une correspondance groupes corps pour certains groupes/corps. En premier K^{un}/K tq $Gal(K^{un}/K) \simeq Gal(\bar{k}_K/k_K) \simeq \hat{Z}$. Aussi, $K^{tam} = \cup_{e\wedge p=1} K^{un}[\pi_K^{1/e}]$. Et on a via la théorie de Kummer que

$$Gal(K^{tam}/K^{un}) \simeq \varprojlim_{e\wedge p=1} (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) \simeq \prod_{l\neq p} \mathbb{Z}_l$$

maintenant $Gal(\bar{K}/K^{tam}) = P_K$ est une limite projective de p-groupes finis. On sait apparemment donner générateurs et relations. Mais ça définit pas le corps uniqument.

Théoreme 4 (Mochizuki,Abrashkin)**.** *K équivaut à G_K muni de la filtration de ramification.*

Exercices 1. Montrer que

$$P_K = Gal(\bar{K}/K^{tam}) = \overline{\cup_{\epsilon>0} G_K^{(\epsilon)}}$$

3.1 Corps de classe local (Hasse, Artin-Tate)

Une extension L/K est abélienne si galoisienne de groupe de galois abélien. On note K^{ab} le compositum des extensions abéliennes finies. On a

$$Gal(K^{ab}/K) = G_K/[G_K : G_K]$$

l'abéllianisé topologique (faut prendre la clôture des commutateurs).

Théoreme 5. *Il existe un morphisme injectif*

$$\theta_K \colon K^\times \to Gal(K^{ab}/K)$$

de groupes topologiques tel que

1. *θ_K est continu d'image dense. Pour remarque, ça peut pas être surj car compact à droite et pas compact à gauche.*

2. *Soit L/K une extension finie abélienne et soit $N_{L/K} \colon L^\times \to K^\times$ la norme. On a un carré (!)*

$$\begin{tikzcd} K^\times \arrow[r, hook, "\theta_K"] \arrow[d, two heads] & Gal(K^{ab}/K) \arrow[d, two heads] \\ K^\times/N_{L/K}(L^\times) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & Gal(L/K) \end{tikzcd}$$

3. *Le carré*

$$\begin{tikzcd} K^\times \arrow[r, hook, "\theta_K"] \arrow[d, two heads, "v_K"'] & Gal(K^{ab}/K) \arrow[d, two heads] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, phantom, "\simeq"] & Gal(K^{un}/K) \end{tikzcd}$$

$$1 \longmapsto Frob_K$$

commute.

On avait définit $U_K^{(i)} = \ker(\mathcal{O}_K^\times \to (\mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K^i)^\times)$. On définit

$$U_K^{(x)} := U_K^{(x)} = U_K^{(i)}, i - 1 < x \leq i$$

alors (!)

$$\theta_K(U_K^{(x)}) = Gal(K^{ab}/K)^{(x)}$$

Remarque 7. *il y'a 3 preuves apparemment :*

1. *via les corps globaux (?!) et le corps de classe global.*

2. *preuves locales difficiles. (dwork)*

3. *Lubin-Tate theory (!). (donne explicitement une construction K^{ab})*

Si L/K est abélienne (potentiellement infinie) alors $G = Gal(L/K) \simeq G_K^{ab}/H$ et $G^{(x)} \simeq (G_K^{ab})^{(x)}H/H$. Maintenant G a un saut de ramification en v si pour tout $\epsilon > 0$, $G^{(v+\epsilon)} \neq G^{(v)}$. La filtration $U_K^{(i)}$ sur U_K a des sauts a tout entiers $i \geq 0$ d'où G_K^{ab} aussi par le théorème. En particulier, $G^{(x)}$ saute aussi qu'aux entiers (Hasse-Arf). Maintenant,

$$U_K^{(i)}/U_K^{(i+1)}$$

est p-élémentaire pour $i \geq 1$, d'où pareil pour $(G_K^{ab})^{(i)}/(G_K^{ab})^{(i+1)}$ (!) pour $i \geq 1$. On note $v_0, v_1, \ldots$ les sauts de ramifications de $G = Gal(L/K)$ alors $G = G^{(v_0)} \supset G^{(v_1)} \supset \ldots$ et $G^{(v_i)}/G^{(v_{i+1})}$ sont p-élementaires.

3.2 Ramification dans les $\mathbb{Z}_p$-extensions

Définition 3. Une $\mathbb{Z}_p$-extension est galoisienne de groupe de galois $\mathbb{Z}_p$.

Note 1. *On note K_∞/K une $\mathbb{Z}_p$-extension totalement ramifiée de corps locaux de caractéristique 0. Et $\Gamma = Gal(K_\infty/K) \simeq \mathbb{Z}_p$. On note $\Gamma(n) \simeq p^n\mathbb{Z}_p$. On note $K_n = K_\infty^{\Gamma(n)}$.*

Théoreme 6 (Tate)**.** *Soit $e_K = e(K/\mathbb{Q}_p)$*

1. *Il existe $i_0 \in \mathbb{Z}$ tq $v_{i+1} = v_i + e_K$ pour $i \geq i_0$.*

2. *Il existe c tq pour tout $n \geq 1$*

$$v_K(\mathscr{D}_{K_n/K}) = c + e_K n + \frac{a_n}{p^n}$$

où $(a_n)_n$ est bornée.

Lemme 4. *Dans $K/\mathbb{Q}_p$, $e_K = e(K/\mathbb{Q}_p)$. On note*

1. $\log(1+x) := \sum_{m\geq 1}(-1)^{m+1}\frac{x^m}{m}$ *converge si $x \in \mathfrak{m}_K$ et a valeur dans K (!).*

2. $\exp(x) := \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n!}$ *converge sur $\mathfrak{m}_K^r$ avec $r > e_K/(p-1)$ entier.*

3. *Pour tout r comme avant,* $\log(1+x)$ *et* $\exp(x)$ *sont des homomorphismes*

$$\log\colon U_K^{(r)} \to \mathfrak{m}_K^r$$

et

$$\exp\colon \mathfrak{m}_K^r \to U_K^{(r)}$$

inverses l'un de l'autre.

Démonstration. Exercice (!). $\square$

Corollaire 2. *Pour tout $r > \frac{e_K}{p-1}$,*

$$(U_K^{(r)})^p = U_K^{(r+e_K)}$$

Démonstration. $\log((U_K^{(r)})^p) = p\mathfrak{m}_K^r = \mathfrak{m}_K^{r+e_K} = \log(U_K^{(r+e_K)})$. (!) $\square$

Théorème 6, (i). Cours. Dans

$$\begin{tikzcd}
K^{ab} & & & K^{ab} \\
K^{ab,tam} \arrow[u] \arrow[u, phantom, "\curvearrowright U_K^{(1)}"'] & & & K_\infty \arrow[u] \arrow[u, phantom, "\curvearrowright G"'] \\
K^{un} \arrow[u] \arrow[u, phantom, "\curvearrowright U_K/U_K^{(1)}"'] & & & K \arrow[u] \arrow[u, phantom, "\curvearrowright \mathbb{Z}_p"'] \\
K \arrow[u] \arrow[u, phantom, "\curvearrowright \hat{\mathbb{Z}}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

et $K_\infty \cap K^{ab,tam} = K$ (wild a gauche). L'idée pour les groupes de galois : via θ_K, $U_K^{(0)}$ correspond à l'inertie (car K^un correspond à l'inertie), et $U_K^{(1)}$ est maximal pro-p via les quotients :

$$\begin{tikzcd}
 & U_K^{(1)} \arrow[d, phantom, "\simeq" description] & & & \\
0 \arrow[r] & Gal(K^{ab}/K^{ab,tam}) \arrow[r] \arrow[d] & G_K^{ab} \arrow[r] \arrow[d] & Gal(K^{ab,tam})/K \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cup" description] & 0 \\
\exists N \subset U_K^{(1)} : & U_K^{(1)}/N \arrow[r, "\simeq"] & \Gamma \arrow[r] & 1 &
\end{tikzcd}$$

ensuite $\Gamma^{(v)}$ correspond à $U_K^{(v)}N/N \simeq U_K^{(v)}/(U_K^{(v)} \cap H)$. La suite on prends $\overline{<\gamma>} = \Gamma$ et i_0 tq $\gamma^{p^{i_0}} \in \Gamma(i_0)$ s'envoie dans $U_K^{(m)}/(U_K^{(m)} \cap H)$ pour $m > e_K/(p-1)$(!). On prends le plus petit $m = m_0$. Alors $\gamma_0 := \gamma^{p^{i_0}}$ engendre $\Gamma^{(m_0)}$, d'où $\Gamma(i_0) = \Gamma^{(m_0)}$. Maintenant $\overline{<\gamma_0^{p^n}>} = \Gamma(i_0+n)$, aussi $\gamma_0^{p^n}$ s'envoie dans $(U_K^{(m_0)})^{p^n}/(U_K^{(m_0)})^{p^n} \cap H$ qui est $U_K^{(m_0+e_K n)}/U_K^{(m_0+e_K n)} \cap H$ par le corollaire. Le résultat tombe ensuite via $\Gamma^{(v_{i_0}+n)} = \Gamma^{(m_0+e_K n)}$ d'où $v_i - v_{i_0} = e_K(i-i_0)$ pour $i \geq i_0$. $\square$