Trace normalisée

On prends K un corps local de caractéristique 0 et K_∞/K une $\mathbb{Z}_p$-extension qui est pas de conducteur fini (en gros on peut se ramener à une $\mathbb{Z}_p$-extension totalement ramifiée). Je note $\Gamma = G_K/G_{K_\infty} \simeq \mathbb{Z}_p$ et γ un générateur topologique, puis $\gamma_n := \gamma^{p^n}$.

1 Idée

L'idée c'est que K_∞/K est alors profondément ramifiée d'où on a Ax-Sen-Tate :

$$\mathbb{C}_K^{G_{K_\infty}} = \widehat{K}_\infty$$

puis $\mathbb{C}_K^{G_K} = \widehat{K_\infty}^\Gamma$.

1.1 Première partie

C'est Ax-Sen-Tate pour les extensions profondéments ramifiées.

1.2 Deuxième cas

Si $Tr_{K_\infty/K}(x) := \frac{1}{p^n} Tr_{K_n/K}(x)$ alors :

1. $|Tr_{K_\infty/K}(x)| \leq c|\gamma.x - x|_K$
2. $Tr_{K_\infty/K}(.)$ est continue et s'étend à $\widehat{K_\infty}$.
3. On obtient $\widehat{K}_\infty = K \oplus \widehat{K}_\infty^\circ$ où le deuxième terme c'est $\ker(Tr_{K_\infty/K})$.
4. $\gamma - 1$ est bijectif d'inverse continu sur $\widehat{K}_\infty^\circ$.

Le dernier point permet de montrer que $\widehat{K_\infty}^\Gamma = K^\Gamma = K$ par injectivité de $\gamma - 1$.

1.3 Extension : $\mathbb{C}_K(\eta)^{G_K} = 0$

On peut ensuite étendre le résultat et prouver que

1. Si $\tau = \gamma - \lambda$ où $\lambda \in U_K^{(1)}$ est pas une racine de l'unité alors τ est bijectif d'inverse continu sur $\widehat{K_\infty}$.

En particulier étant donné un caractère non trivial de G_K, η, si $\eta(\gamma) = \lambda$ alors $\widehat{K_\infty(\eta)}^{\Gamma} = 0$ par injectivité de $\gamma - \lambda$. On prouve ensuite que

$$\mathbb{C}_K(\eta)^{G_K} = 0$$

parce que $\mathbb{C}_K(\eta)^{G_{K_\infty}} = \mathbb{C}_K^{G_{K_\infty}}(\eta)$. (directement via la déf)

2 Preuves

2.1 (1.2.1.)

Dans l'ordre pour 1.2.1. on a :

1. $v_K(Tr_{K_n/K_{n-1}}) \geq v_K(x) + v_K(D_{K_n/K_{n-1}}) - \frac{1}{p^{n-1}}$ par les formules d'estimation de valuations de traces.

2. En déroulant avec le théorème de Tate

$$|Tr_{K_n/K_{n-1}}(x)| \leq |p|_K^{1-\frac{b}{p^{n-1}}} |x|_K$$

et (en pensant $\alpha^k - 1 = (1 + \alpha + \ldots + \alpha^{k-1}(\alpha - 1))$:

1. Via $Tr_{K_n/K_{n-1}}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \gamma_{n-1}^k(x)$, $\gamma_n = \gamma^{p^n}$:

$$|Tr_{K_n/K_{n-1}}(x) - px|_K \leq |\gamma.x - x|_K$$

on a une récurrence via si $y = \frac{1}{p} Tr_{K_n/K_{n-1}}(x)$ alors

$$Tr_{K_\infty/K}(x) = Tr_{K_\infty/K}(y)$$

et

$$|Tr_{K_\infty/K}(x) - x|_K = |(Tr_{K_\infty/K}(y) - y) + \left(\frac{1}{p} Tr_{K_n/K_{n-1}}(x) - x\right)|_K$$

Y faut juste estimer la constante c via les $p^{-b/p^{n-1}}$.

2.2 (1.2.2.)