# Devoir maison de théorie de Hodge p-adique

Rayane Bait

## Exercice 1

### 1)

On note $R := \{\alpha\zeta_p^i\}_{i=0,\ldots,p-1}$. Alors $R$ est l'ensemble des racines de $f$. En effet,

$$(\alpha\zeta_p^i)^p = \alpha^p(\zeta_p^p)^i = p$$

et $\alpha\zeta_i \neq \alpha\zeta_p^j$ pour $i \neq j \mod p$ car dans ce cas $\frac{\alpha\zeta_p^i}{\alpha\zeta_p^j} = \zeta_p^{i-j} \neq 1$, d'où $|R| = p = \deg(f)$ et l'assertion sur $R$.

En particulier, on en déduit que $K \subset Q(\alpha, \zeta_p^i)$. En plus, $\zeta_p = \alpha\zeta_p/\alpha \in K$ d'où $\mathbb{Q}_p(\zeta_p, \alpha) \subset K$.

### 2)

On assume pour l'instant que $\mathbb{Q}_p(\zeta_p)/\mathbb{Q}_p$ est galoisienne de degré $p-1$ et que $\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p$ est de degré $p$. On remarque alors que $\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{Q}_p(\zeta_p)/\mathbb{Q}_p$ sont linéairement disjointes car $p \wedge p-1 = 1$. En particulier

$$\begin{aligned}[K : \mathbb{Q}_p] &= [K : \mathbb{Q}_p(\zeta_p)][\mathbb{Q}_p(\zeta_p) : \mathbb{Q}_p] \\ &= [\mathbb{Q}_p(\alpha) : \mathbb{Q}_p][\mathbb{Q}_p(\zeta_p) : \mathbb{Q}_p] \\ &= p(p-1)\end{aligned}$$

et $H = Gal(K/\mathbb{Q}_p(\zeta_p))$ est normal dans $G$ car $\mathbb{Q}_p(\zeta_p)/\mathbb{Q}_p$ est galoisienne. Enfin $H$ est d'indice $|G/H| = |Gal(\mathbb{Q}_p(\zeta_p)/\mathbb{Q}_p)| = p-1$ qui est le résultat voulu.

On prouve maintenant les assertions. On note $X^p - 1 = (X-1)\phi_p(X)$ et on a

$$(X+1)^p - 1 = X(\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k+1} X^k + p) = X\phi_p(X+1)$$

d'où on déduit que $\phi_p(X+1)$ est $p\mathbb{Z}_p$-Eisenstein donc irréductible dans $\mathbb{Z}_p[X]$. Maintenant $\mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ est le corps de décomposition de $\phi_p(X)$ sur $\mathbb{Q}_p$ d'où $\mathbb{Q}_p(\zeta_p)/\mathbb{Q}_p$ est galoisienne de degré $[\mathbb{Q}_p(\zeta_p):\mathbb{Q}_p] = \deg(\phi_p) = p-1$. De même $X^p - p$ est $p\mathbb{Z}_p$-Eisenstein de degré $p$ et $\mathbb{Q}_p(\alpha)$ en est un corps de rupture d'où le résultat.

## 3)

Dans la partie 2) on a montré que $\phi_p(X+1)$ est $p\mathbb{Z}_p$-Eisenstein. On en déduit directement que $\mathbb{Q}_p(\zeta_p - 1)/\mathbb{Q}_p$ est totalement ramifiée et que $\zeta_p - 1$ ,qui est une racine de $\phi_p(X+1)$, en est une uniformisante. De la même manière, $\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p$ est totalement ramifiée et $\alpha$ en est une uniformisante. Enfin on a

$$e_{K/\mathbb{Q}_p} = e_{K/\mathbb{Q}_p(\zeta_p)} e_{\mathbb{Q}_p(\zeta_p)/\mathbb{Q}_p} = e_{\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p} e_{\mathbb{Q}_p(\zeta_p)/\mathbb{Q}_p} = p(p-1)$$

ce qui prouve que $K/\mathbb{Q}_p$ est totalement ramifiée et

$$v_p\left(\frac{\alpha}{\zeta_p - 1}\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} = \frac{p-(p-1)}{p(p-1)} = \frac{1}{p(p-1)}$$

si on note $v_p$ la valuation sur $K$ qui étend la valuation $p$-adique normalisée. On a prouvé que $\frac{\alpha}{\zeta_p - 1}$ est une uniformisante de $K/\mathbb{Q}_p$.

## 4) A REFAIRE YA ERREUR

Le groupe de Galois $G$ est formé des automorphismes

$$\{s_{ij}\}_{i=1,\ldots,p-1; j=0,\ldots,p-1}$$

définis par $s_{ij}(\zeta_p) = \zeta_p^i$ et $s_{ij}(\alpha) = \alpha\zeta_p^j$. De la ramification totale de $K/\mathbb{Q}_p$ on déduit que $\mathbb{Z}_p[\lambda] = \mathcal{O}_K$ si l'on pose $\lambda = \frac{\alpha}{\zeta_p - 1}$. Soit maintenant $s_{ij}$ un élément de $G$. Pour $g \in G$ si $i_G(g)$ désigne le plus grand entier $i$ tel que $g \in G_{i-1}$, on a

$$i_G(g) = e_{K/\mathbb{Q}_p} v_p(g\lambda - \lambda).$$

Pour $g = s_{ij}$ on distingue deux cas, le cas $i = j$ et $i \neq j$. En général on a

$$\begin{aligned} s_{ij}\lambda - \lambda &= \frac{\alpha\zeta_p^j}{\zeta_p^i - 1} - \frac{\alpha}{\zeta_p - 1} \\ &= \frac{\alpha(\zeta_p^j - \zeta_p^i + 1)}{(\zeta_p^i - 1)(\zeta_p - 1)} \end{aligned}$$

et dans tout les cas, $i > 0$ assure que

$$v_p(\frac{\alpha}{(\zeta_p^i - 1)(\zeta_p - 1)}) = \frac{1}{p(p-1)} - \frac{1}{p-1} = \frac{-(p-1)}{p(p-1)} = \frac{-1}{p}.$$

Il reste à déterminer $v_p(\zeta_p^j - \zeta_p^i + 1)$. Si $i = j$, alors $v_p(\zeta_p^j - \zeta_p^i + 1) = v_p(1) = 0$ et si $i \neq j$, alors $v_p(\zeta_p^j - (1 - \zeta_p^i)) = \min(v_p(\zeta_p^j), v_p(\zeta_p^i - 1)) = 0$. On déduit dans tout les cas $i_G(s_{ij}) = p(p-1)$

# Exercice 2