# Corps perfectoides

## 1 Perfections

Je note $Ring_{p,sperf}$ (resp. $Ring_{p,perf}$) la catégorie des anneaux commutatifs semi-parfaits (resp. parfaits) de caractéristique $p > 0$. Étant donné un anneau commutatif unitaire semi-parfait $R$, y'a deux adjonctions

$$(\_)_{perf} \colon Ring_{p,sperf} \leftrightarrows Ring_{p,perf} \colon Forget$$

et

$$Forget \colon Ring_{p,perf} \leftrightarrows Ring_{p,sperf} \colon (\_)^{perf}$$

où la première est donnée par l'universalité de $R \to (R)_{perf} := \varinjlim_{\varphi} R$ ($R$ est le dernier terme du diagramme $\mathbb{N} \to Ring$ où $i+1 \to i$ est donné par $\varphi$ et $i \mapsto R$).

Et la deuxième par l'universalité de $R^{perf} \to R$.

### 1.1 Description usuelle

On a toujours $R^{perf} = \{(x_n)_{n\geq 0} | x_{n+1}^p = x_n\}$. Les lois sont termes à termes.

## 2 Corps perfectoide

Un corps non-archimédien (NA) $(E, |.|_E)$ est perfectoide si

1. $|.|_E$ est pas discrète.
2. $E$ est complet.
3. $\mathcal{O}_E/p$ est semi-parfait.

Y'a une prop qui dit (en char$=0$) que $E = \widehat{F}$ est la complétion d'un corps profondément ramifié $F$.

# 3 Tilt

Le tilt d'un anneau commutatif semi-parfait est donné par $(R/p)^{perf}$. Dans le cas de $E$ perfectoide de caractéristique 0, on déf $E^\flat$ comme $Frac((\mathcal{O}_E/p)^{perf})$.

## 3.1 Étude de $\mathcal{O}_{E^\flat}$

Pour $(x_n)_n \in \mathcal{O}_{E^\flat}$ on lift $x_n$ en $\widehat{x}_n$. Alors $\lim_{m\to\infty} \widehat{x}_{n+m}^{p^m}$ converge en $x^{(n)}$ tels que

$$(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$$

Maintenant la limite ensembliste

$$\varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathcal{O}_E$$

a une structure d'anneau via

$$(x^{(n)})_n + (y^{(n)})_n = (\lim_{m\to\infty}(x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m})_n$$

et $(x^{(n)})_n(y^{(n)})_n = (x^{(n)}y^{(n)})_n$. Ça donne un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{E^\flat} \to \varprojlim_{x\to x^p} \mathcal{O}_E$$

et on définit (par extension multiplicative)

$$|x/y|_{E^\flat} := |x^{(0)}|_E/|y^{(0)}|_E$$

on a alors

$$|x|_{E^\flat} \leq |p|^{p^n} \Leftrightarrow x_n = 0$$

simplement parce que $x^{(n)} = 0 \mod p$ d'où

$$(x^{(n)})^{p^n} = 0 \mod p^{p^n}$$

## 3.2 Valeur absolue

On a

1. $|E^\flat| = |E|$ de manière évidente.
2. $|E|$ est $p$-divisible.
3. $\mathfrak{m}_E$ est plat.
4. $\mathfrak{m}_E^2 = \mathfrak{m}_E$.

### 3.2.1 Anneaux de valuations et ordre sur les idéaux

En fait si $|x| \leq |y|$, $xy^{-1} \in \mathcal{O}_E$ de sorte que

$$x = (xy^{-1})y \in y\mathcal{O}_E$$

d'où $(x) \subset (y)$. Pour les idéaux de type fini c'est facile aussi. En général ca se fait bien aussi je pense.

### 3.2.2 $p$-divisibilité

L'idée est bête on a $x = y^p + pz$ et si $|x| > |p|$ la $p$-divisibilité. Pour les autres cas voir le Bhatt.