Lemme de Krasner

1 Preuve

Théorie de Galois et invariance de la valeur absolue.

2 Un exemple : $\mathbb{Q}_p(\zeta_p) = \mathbb{Q}_p((-p)^{\frac{1}{p-1}})$

C'est dingo : On peut montrer que si $\alpha = (-p)^{\frac{1}{p-1}}$ alors il existe j tel que

$$v_p(\alpha - (\zeta_p^j - 1)) \geq \frac{1}{p-1} + \epsilon$$

pour $0 < \epsilon$ sachant que $v_p(\zeta_p^j - \zeta_p^k) = \frac{1}{p-1}$ si $j \neq k \mod p$. Pour ça on peut remarquer que

$$\prod_{j=1}^{p-1}(1 - \zeta_p^j) = p = -\alpha^{p-1}$$

d'où

$$\prod_{j=1}^{p-1} \frac{1 - \zeta_p^j}{\alpha} = -1.$$

Maintenant si on calcule $\prod_{j=1}^{p-1}(\alpha - (1 - \zeta_p^j))$ on remarque que en notant J_i les sous-ensembles de $\{1, \dots, p-1\}$ de taille i :

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{p-1}(\alpha - (1 - \zeta_p^j)) = 1 + S + (-1)\\ = \sum_{i=1}^{p-2} \sum_{(j_1, \dots, j_i) \in J_i} \alpha^i (1 - \zeta_p^{j_1}) \dots (1 - \zeta_p^{j_i})\end{aligned}$$

maintenant la valuation est donnée par les sommes de produits de taille 1 (trace= p) et on a

$$v_p(\prod_{j=1}^{p-1}(\alpha-(1-\zeta_p^j)) \geq v_p(\alpha)+v_p(p)$$

en particulier il doit exister j tel que

$$v_p(\alpha-(1-\zeta_p^j)) \geq \frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1}{p-1}$$

d'où ce qu'on veut.

Remarque 1. *En fait je m'étais trompé sur le calcul mais j'ai mieux : On évalue $\phi_p(X+1)$ presque en α et comme $X\phi_p(X+1)=(X+1)^p-1$ comme d'hab chaque coeff est divisible par p (!) d'où les autres sommes sont de valuations $\geq v_p(\alpha^i)+v_p(p)$ et le résultat. Attention nous on a une cancellation alors que $v_p(\phi_p(\alpha+1))$ y'a le coeff dominant qui est 1.*