Modular forms

13 aout 2023

Contents

1 formes modulaires **1**
1.1 Le formalisme 1
1.1.4 Remarques sur la preuve 3
1.2 La courbe modulaire 4
1.3 La topologie de X(1) 4
1.4 La structure de surface de Riemann 6
1.5 fonctions modulaires 9
1.5.4 Les formes Eisenstein 10
1.6 k-formes différentielles et formes modulaires 10

2 q-expansions de courbes elliptiques et formes modulaires **13**
2.1 Des fonctions quasi elliptiques 13

1 formes modulaires

1.1 Le formalisme

D'abord les objets : on va considérer

- $SL_2(\mathbb{Z})$ le groupe spécial linéaire.
- $\mathfrak{h} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid Im(\tau) > 0\}$ le demi plan de poincaré.
- $\mathfrak{h}/SL_2(\mathbb{Z})$ le quotient de $\mathfrak{h}$ par l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$.

Ensuite les morphismes :

- Avec $\mathcal{L} := \{\Lambda \mid \Lambda \text{ est un reseau sur } \mathbb{C}\}$:

$$\mathcal{L}/\mathbb{C}^* \approx \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{h}$$

- Et :

$$\mathcal{L}/\mathbb{C}^* \approx \frac{\{\text{elliptic curves over } \mathbb{C}\}}{\mathbb{C} - \text{isomorphism}}$$

La deuxième fleche est injective et bijective via le théorème **d'uniformisation**.

Comme $\pm I$ agit trivialement sur un réseau, on considère en fait :

Définition 1.1.1. On définit $\Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$.

Remarque 1. On définit $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors on verra que $\Gamma(1) =< S, T >$. En plus S est d'ordre 2 et ST d'ordre 3. L'action est donnée par :

- $S(\tau) = -1/\tau$ et $T(\tau) = \tau + 1$.

Le domaine fondamental :

Proposition 1.1.2. *$\mathcal{F} := \{\tau \in \mathfrak{h} : |\tau| \geq 1$ et $|Re(\tau)| \leq 1/2\}$ définit un bon domaine fondamental au sens ou $\gamma\tau, \tau \in \mathcal{F}$ implique que*

- *$Re(\tau) = \pm 1/2$(chelou).*
- *$|\tau| = 1$.*

Et pour tout τ il existe γ tq $\gamma\tau \in \mathcal{F}$. En plus les stabilisateurs sont triviaux SAUF pour :

- *i, $\rho = e^{2i\pi/3}$, $-\overline{\rho}$.*

Corollaire 1.1.3. *$\Gamma(1) =< S, T >$.*

Ca tombe direct psq pour $\gamma \in< S, T >$: il existe $\gamma' \in< S, T >$ tq $\gamma'(\gamma\tau) \in \mathcal{F}$. En prenant un élément de stabilisateur trivial on a fini.

1.1.4 Remarques sur la preuve

Deux points :

- $T^n\tau = \tau + n$ d'ou on peut supp $\mathrm{Re}(\tau) \leq 1/2$.
- $\mathrm{Im}(\gamma\tau) = \frac{\mathrm{Im}(\tau)}{|c\tau+d|^2}$ et $|c\tau + d|^2 = (cs + d)^2 + (ct)^2$ d'ou le module croit vers ∞ avec c, d. On peut donc minimiser $\mathrm{Im}(\gamma\tau)$. D'ou si $|\tau| < 1$ comme

$$\mathrm{Im}(S\gamma\tau) = \frac{\mathrm{Im}(\tau)}{|\gamma\tau|^2} > \mathrm{Im}\gamma\tau$$

On a une contradiction.

1.2 La courbe modulaire

En regardant $\mathcal{F}$, on remarque que les deux droites verticales sont identifiées par T et les deux arcs de l'arc formant le côté borné de $\mathcal{F}$ sont identifié par S. D'ou en recollant On obtient une 2-sphere privée d'un point !
On rajoute des points pour en faire une surface de Riemann intéressante :

Définition 1.2.1. On définit $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \mathfrak{h} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Ou les points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ sont les **pointes**.(cusps) Et on étend l'action de $\Gamma(1)$ à $\mathfrak{h}^*$ via :

- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} [x, y] = [ax + by, cx + dy]$. (par homographie)

  Puis on définit :

Définition 1.2.2. $Y(1) = \Gamma(1)\backslash\mathfrak{h}$ et $X(1) = \Gamma\backslash\mathfrak{h}^*$.

Remarque 2. En fait, $X(1)$ a une seule pointe : ∞. On prend $[x, y]$ tq $ax + by = 1$, alors

- $\begin{pmatrix} a & b \\ -y & x \end{pmatrix} [x, y] = [1, 0] = \infty$.

1.3 La topologie de X(1)

On veut une topologie qui ressemble à une 2-sphere.

Définition 1.3.1. On prend comme base de la topologie :

- Sur $\mathfrak{h}$ les ouverts de $\mathbb{C}$.
- Pour ∞ les ensembles du type $\{\mathrm{Im}(\tau) > \kappa\} \cup \{\infty\}$ pour tout κ.
- Pour les autres pointes les boules ouvertes tangentes à l'axe réel contenues dans $\mathfrak{h}$ + la pointe : $B(a, r) \cup \{\tau\}$

Remarque 3. La topologie est Hausdorff (clair) et l'action est transitive sur les ouverts des pointes.

Maintenant un lemme important :

Définition 1.3.2. On définit

- $\forall \tau_1, \tau_2$ on def $I(\tau_1, \tau_2) = \{\gamma : \gamma\tau_1 = \tau_2\}$.
- $\forall U_1, U_2$ on def $I(U_1, U_2) = \{\gamma : \gamma U_1 \cap U_2 \neq \emptyset\}$.

Lemme 1.3.3. *Pour tout τ_1, τ_2 il existe U_1, U_2 tq*

$$I(U_1, U_2) = I(\tau_1, \tau_2)$$

En particulier si on peut rendre U_1, U_2 suffisamment petits alors $\tau_1 = \gamma\tau_2$.

Preuve : Le cas (nombre, nombre) : la preuve consiste à remarquer que $I(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ est fini d'ou si $G = \text{Interior}\left(\cup_{\gamma \in I(\mathcal{F},\mathcal{F})} \quad \gamma\mathcal{F}\right)$, $I(G, G)$ aussi.

On prend $\gamma \in I(G, G) \backslash I(\tau_1, \tau 2)$ et des ouverts V_γ, W_γ qui les séparent. Puis

$$U_1 = G \cap \bigcap_{\gamma \in I(G,G) \backslash I(\tau_1, \tau_2)} \gamma V_\gamma$$

et

$$U_2 = G \cap \bigcap_{\gamma \in I(G,G) \backslash I(\tau_1, \tau_2)} \gamma W_\gamma$$

Alors $I(\tau_1, \tau_2) \subseteq I(U_1, U_2)$, l'égalité se montre par contradiction. Quand $\tau_1 = \tau_2$ sont la pointe on a $I(\infty, \infty) = I(\{\text{Im}(\tau) > 2\}, \{\text{Im}(\tau) > 2\}) = \{T^k : k\}$.

Dans le cas (pointe,nombre) $I(pointe, nombre) = \emptyset$! $\square$

Remarque 4. Le G est le gros contour du dessin usuel et $I(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ est fini via le dessin aussi.

On prend définit

Définition 1.3.4. La topologie de $X(1)$ comme la topologie quotient donnée par

$$\phi : \mathfrak{h}^* \to \Gamma(1)\backslash\mathfrak{h}^* = X(1)$$

Alors

Proposition 1.3.5. *$X(1)$ est compacte Hausdorff.*

Remarque 5. L'idée pour la compacité est de remarquer que d'un ouvert contenant ∞, $\phi^{-1}(\infty)$ contient un ouvert non borné, en fait LE ouvert non borné. Hausdorff c'est clair.

1.4 La structure de surface de Riemann

Celle la va être longue mais nécessaire.

On prend la structure suivante :

Définition 1.4.1. Le recouvrement : pour chaque $\phi(\tau_x) = x \in X(1)$ il existe U_x tq $I(U_x, U_x) = I(\tau_x)$ alors on prend $I(\tau_x)\backslash U_x$ comme voisinage de x.

Les homéomorphismes :

- Pour $x \in X(1)\backslash\{\infty\}$ tel que $\#I(\tau_x) = r$: On définit

$$\begin{aligned}\psi_x \ : \ I(\tau_x)\backslash U_x &\to \mathbb{C} \\ \phi(\tau) &\mapsto \left(\frac{\tau - \tau_x}{\tau - \overline{\tau_x}}\right)^r\end{aligned}$$

- Pour $x = \infty$ on prend $\tau_x = \infty$ d'ou $I(\tau_x) = \{T^k\}$ et on pose:

$$\begin{aligned}\psi_x \ : \ I(\tau_x)\backslash U_x \to &\mathbb{C} \\ \phi(\tau) \mapsto \ & e^{2\pi i\tau} \text{ si } \phi(\tau) \neq \infty \\ & 0 \qquad \text{si } \phi(\tau) = \infty\end{aligned}$$

On a les deux diagrammes :

- Pour $x \neq \infty$

$$\begin{tikzcd}
U_x \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g_x"] & I(\tau_x)\backslash U_x \arrow[d, "\psi_x"] \\
\mathbb{C} \arrow[r, "z \mapsto z^r"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

- Pour $x = \infty$:

$$\begin{tikzcd}
U_x \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "g_\infty"'] & I(\tau_x)\backslash U_x \arrow[d, "\psi_x"] \\
 & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

- Pourquoi ca marche ?

Les étapes, d'abord les ψ_x sont des homéomorphismes :

1. $I(\tau_x)$ est cyclique engendré par γ.
2. $g_x \circ \gamma \circ g_x^{-1}(z)$ est un conjugué d'homographies ayant pour points fixes $0, \infty$.
3. D'ou $G(z) = g_x \circ \gamma \circ g_x^{-1}(z) = cz$ (voir wiki) puis $G \circ ... \circ G(z) = z$ d'ou
$$g_x(\gamma\tau) = \zeta_r g_x(\tau)$$
.
4. alors ψ_x est bien définie et clairement continue, ouverte.
5. l'injectivé est assez claire faut bien écrire les defs.

Les changements de cartes sont biholomorphes :

1. L'idée est que pour $x, y \in X(1)\backslash\{\infty\}$ on écrit :
$$\phi_y \circ \phi_x^{-1}(z) = g_y^{r_y} \circ g_x^{-1}(z^{1/r_x})$$
2. Le problème vient de la puissance inverse. Mais
$$\phi_y \circ \phi_x^{-1}(\zeta_{r_x} z) = g_y^{r_y} \circ g_x^{-1}(z)$$
3. On en déduit en comparant les séries entières que on a une série entière en z^{r_x}. D'ou la biholomorphie.
4. Pour x, ∞ c'est le même genre d'idée avec un log.

1.5 fonctions modulaires

L'intuition des definitions viendra plus tard. (formes différentielles sur la courbe modulaire)

Définition 1.5.1. Faible modularité de poids $2k$ de f :

- Méromorphie sur $\mathfrak{h}$
- $f(\gamma\tau) = (c\tau + d)^{2k} f(\tau)$ pour tout γ dans $\Gamma(1)$.

Remarque 6. En fait il suffit que :

- $f(\tau + 1) = f(\tau)$
- $f(-1/\tau) = \tau^{-2k} f(\tau)$

Remarque 7. Ducoup la periodicité fournit un développement de fourier en $q = e^{2i\pi\tau}$, $\overline{f}(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n q^n$.

Définition 1.5.2. f est :

- meromorphe à l'infini si y'a un $n = n_0$ minimal tq $a_n = 0$ pour $n < n_0$.
- holomorphe à l'infini si $n_0 = 0$.

Quand f est méromorphe à l'infini son ordre est donné par :

- $ord_\infty(f) = -n_0$

Quand f est holomorphe à l'infini on peut l'évaluer via :

- $f(\infty) = \overline{f}(0) = a_0$

Définition 1.5.3. Une fonction

- faiblement modulaire
- meromorphe à l'∞

est appelée une fonction modulaire. Si en plus elle est

- holomorphe à l'∞

alors on l'appelle une **forme modulaire**. Enfin si en plus

- $f(\infty) = 0$

on dit que la forme est **cuspidale**.

1.5.4 Les formes Eisenstein

Les séries d'Eisenstein, $G_{2k}(\Lambda) := \sum_{\omega\in\Lambda^*} \frac{1}{(\omega)^{2k}}$ (ou $G_{2k}(\tau) = G_{2k}([1,\tau])$), sont un type important de formes modulaires. Pour le voir : (on note $\rho = e^{2i\pi/3}$)

1. C'est clair que $G_{2k}(c\Lambda) = c^{-2k}G_{2k}(\Lambda)$ d'ou $G_2k(\gamma\tau) = G_{2k}((c\tau+d)^{-1}[1,\tau]) = (c\tau+d)^{2k}G_{2k}(\tau)$

2. Sur $\mathcal{F}$, on a
$$|m\tau+n|^2 \geq m^2 - mn + n^2 = |m\rho - n|^2$$
d'ou une majoration uniforme et l'holomorphie sur $\mathcal{F}$ L'holomorphie suit via la modularité qui lie les translatés de $\mathcal{F}$.

3. Quand $\tau \to i\infty$, les termes ou $m \neq 0$ tendent vers 0 d'ou
$$\lim_{\tau\to i\infty} G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k)$$
et l'holomorphie à l'∞.

Remarque 8. On pose $g_2(\tau) = 60G_4(\tau)$ et $g_3(\tau) = 140G_6(\tau)$.

On voit facilement que $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ est une forme modulaire de poids 12. Via la formule pour $G_{2k}(\infty)$ et les valeurs connnues de

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

on obtient $\Delta(\infty) = 0$. D'ou Δ est une forme cuspidale de poids 12.

1.6 k-formes différentielles et formes modulaires

D'abord sur $X/\mathbb{C}$ une courbe projective lisse :

Définition 1.6.1. On note

$$\Gamma_X^k = \Gamma_X \otimes_{C(X)} ... \otimes_{C(X)} \Gamma_X$$

L'espace des k-formes différentielles ou Γ_X est l'espace des 1-formes.

Bon la je crois que vu qu'on prend pas le produit exterieur c'est de dim 1.

Définition 1.6.2. Pour $\omega \in \Gamma_X^k$ et t d'ordre 1 en $x \in X$ on a

$$\omega = g(dt)^k$$

on def

$$ord_x(\omega) = ord_x(g)$$

et

$$div(\omega) = \sum_{x \in X} ord_x(\omega)(x) \in Div(X)$$

Proposition 1.6.3. *On supp que X est de genre g.*

1. $div(\omega) \sim kK_X$. *($div(\omega) = kdiv(\eta) + div(\omega/\eta^k)$ et $\omega/eta^k \in \mathbb{C}(X)$)*
2. $deg(div(\omega)) = k(2g-2)$. *(Riemann-Roch)*

Le lien entre les différentielles et les forme modulaire et comportement local de ω_f.

Proposition 1.6.4. *f une fonction modulaire de poids $2k$.*

1. *Il existe $\omega_f \in \Gamma_{X(1)}^k$ tq $\phi^*(\omega_f) = f(\tau)(d\tau)^k$.*
2. $ord_x(\omega_f) = \begin{cases} ord_{\tau_x}(f) & if\ x \neq \phi(i), \phi(\rho), \phi(\infty); \\ \frac{1}{2}ord_i(f) - \frac{1}{2}k & if\ x = \phi(i); \\ \frac{1}{3}ord_\rho(f) - \frac{2}{3}k & if\ x = \phi(\rho); \\ ord_\infty(f) - k & if\ x = \phi(\infty). \end{cases}$

La preuve est un peu longue j'essaie de résumer les étapes.

Remarque 9. A noter avant :

1. $(d\gamma\tau)^k = (c\tau + d)^{-k}(d\tau)^k$ d'ou $f(\tau)(d\tau)^k$ est $\Gamma(1)$-invariante !
2. Si $z = g_x(\tau) = \frac{\tau - \tau_x}{\tau - \bar{\tau}_x}$ alors

$$\begin{aligned} & g_x(R\tau) = \zeta g_x(\tau) \\ & \leftrightarrow R\tau = g_x^{-1}(\zeta z) = g_x^{-1}(\zeta z) \end{aligned}$$

Etapes de la preuve : D'abord $x \neq \infty$

1. $f(\tau)(d\tau)^k = f(g_x^{-1}(z))((g_x^{-1})')^k(dz)^k = F(z)(dz)^k$
2. $F(z)(dz)^k = f(\tau)(d\tau)^k = f(R\tau)(dR\tau)^k = F(\zeta z)(d\zeta z)^k = F(\zeta z)\zeta^k(dz)^k$
3. D'ou $F(z)z^k$ est invariante par $z \mapsto \zeta z$ puis $F(z)z^k = F_1(z^r)$.
4. Enfin on peut réecrire, en posant $w = z^r$, $F(z)(dz)^k = r^{-k}z^{k(1-r)}F(z)(dz^r)^k = r^{-k}w^{-k}F_1(w)(dw)^k$

Et le calcul des ordres est direct on obtient :

- $ord_x\omega_f = \frac{1}{r}ord_{\tau_x}f - (1-\frac{1}{r})k$
- ou via le cardinal des stabilisateurs $r = 1, 2$ ou 3

Le calcul pour $x = \infty$ est aussi direct. □

Le comportement global de ω_k est donné par le

Corollaire 1.6.5. *f une fonction modulaire de poids $2k$. Alors*

- $\frac{1}{2}ord_i(f) + \frac{1}{3}ord_\rho + ord_\infty(f) + \sum_{autres\ \tau} ord_\tau(f) = \frac{k}{6}$

Idée : Simple conséquence de la prop précedente et du fait que

$$deg(div(\omega_f)) = -2k$$

. □

On pourra mtn donner de bonne description des espaces de forme modulaires d'un poids donné.

Définition 1.6.6. On pose :

- $M_{2k} = \{$formes modulaires de poids 2k pour $\Gamma(1)\}$
- $M_{2k}^0 = \{$formes cuspidales de poids 2k pour $\Gamma(1)\}$

Remarque 10. $M = \bigoplus_{k=0}^{\infty} M_{2k}$ est un anneau gradué intègre.

Théorème 1.6.7. *On a :*

1. *$M_{2k} \cong M_{2k}^0 \bigoplus \mathbb{C}G_{2k}$ via*

$$\begin{aligned} M_{2k} &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(\infty) \end{aligned}$$

2. *$M_{2k} \cong M_{2k+12}^0$ via $f \mapsto f\Delta$. (facile)*
3. *$dim(M_{2k}) = \begin{cases} [k/6] & if\ k \equiv 1\ mod\ 6 \\ [k/6]+1 & if\ k \not\equiv 1\ mod\ 6 \end{cases}$, Ca se prouve en calculant les 6 premiers k et par recurrence.*

2 q-expansions de courbes elliptiques et formes modulaires

2.1 Des fonctions quasi elliptiques

On remarque que $\wp$ n'a pas de résidu on peut l'intégrer terme à terme et ajuster à chaque fois la constante pour avoir la convergence.

Définition 2.1.1. Fonction ζ de Weierstrass :

$$\zeta(z;\Lambda) := \frac{1}{z} + \sum_{\omega\in\Lambda^*}\left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right)$$

Et son développement en 0 :

$$\zeta(z;\Lambda) = \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} G_{2k+2} z^{2k+1}$$

A remarquer que $\zeta' = -\rho$ en z et ducoup la dérivée est périodique. On regarde l'implication de $(\zeta(z+w;\Lambda) - \zeta(z;\Lambda))' = 0$ sur ζ.

Proposition 2.1.2. *On def $\eta(\omega) = \zeta(z+\omega) - \zeta(z)$ (la quasi-periode) alors*

1. *η est un homomorphisme (clair)*
2. *si ω est pas dans 2Λ (d'ou $\frac{w}{2}$ est pas un pole pour ζ) :*

$$\eta(\omega) = 2\zeta(\frac{w}{2};\Lambda)$$

3. *Si $\Lambda = [\omega_1, \omega_2]$ tq $\frac{\omega_1}{\omega_2} > 0$ alors*

$$\omega_1\eta(\omega_2) - \omega_2\eta(\omega_1) = 2\pi i$$

C'est la relation de Legendre. (résidu autour de 0)

Y s'avère que si on écrit $E := E_\Lambda$ alors $\wp(z;\Lambda)dz = x\omega_E$ et $\gamma \mapsto \int_\gamma x\omega_E$ Fournit un autre morphisme $H^1(E(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ donné par

Fonction σ :