Contents

Module de Tate, notes 1

5 juillet 2023

1 Définitions

Module de Tate : On rappelle que (**avec choix de base**)

$$E[l] \cong \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \tag{1}$$

$$E[p^e] \cong O \ ou \ \cong \mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z} \tag{2}$$

En char p pour $l \neq p$. En plus, si $P \in E[l]$ et $\sigma \in Gal(\overline{k}/k)$ alors $P^\sigma \in E[l]$ car les polynômes à division sont définis sur k si E est déf sur k (voir Schoof). C'est à dire que $E[l]$ est munit d'une action de $Gal(\overline{k}/k)$ et ce sera de même pour le module de Tate. On definit le module de Tate via :

$$T_l(E) = \varprojlim_n E[l]$$

Où :

$$\begin{tikzcd}
T_l(E) \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] \arrow[drrrr] & & & & & \\
\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/l^2\mathbb{Z} \arrow[l, "p_1"'] & \mathbb{Z}/l^3\mathbb{Z} \arrow[l, "p_2"'] & \cdots \arrow[l, "p_3"'] & \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z} \arrow[l, "p_{n-1}"'] & \cdots \arrow[l, "p_n"']
\end{tikzcd}$$

On a via (1) et (2) : (**avec choix de base**)

$$T_l(E) \cong \mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_l \tag{3}$$

$$T_p(E) \cong O \ ou \ \mathbb{Z}_p \tag{4}$$

Et l'action de $Gal(\overline{k}/k)$ sur $T_l(E)$ fournit une représentation : (**avec choix de base encore**)

$$\rho_l \ : \ Gal(\overline{k}/k) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_l) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_l)$$

On peut éviter le choix de base avec :

$$\rho_l \ : \ Gal(\overline{k}/k) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(T_l(E)) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$$

Ensuite $\phi \in \mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ induit $\phi \in \mathrm{Hom}(E_1[l], E_2[l])$ puis $\phi_l \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_l}(T_l(E_1), T_l(E_2))$.

Où en fait : **Le premier résultat important**

$$\mathrm{Hom}(E_1, E_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_l}(T_l(E_1), T_l(E_2)) \qquad (*)$$

est une injection.

Preuve : On regarde

- ϕ tel que $\phi_l = 0$ et $\phi \in M \otimes \mathbb{Z}_l \subset \mathrm{Hom}(E_1, E_2) \otimes \mathbb{Z}_l$ un sous groupe de type fini (qui est alors libre).
- Et $M_{div} \otimes \mathbb{Z}_l$ (les fractions contenues dans le Hom) est alors de t.f donc libre aussi (le Hom est sans torsion). On le montre en tensorisant avec $\mathbb{R}$. Alors $\deg \ : \ M_{div} \otimes \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et $\deg^{-1}\big(]-\infty, 1[\big) \bigcap M_{div} \otimes \mathbb{R} = \{0\}$, i.e. M_{div} est un reseau !.

  Ensuite, suffit d'écrire $\phi = \sum_i \alpha_i \otimes \psi_i$ de sorte qu'on ait $\psi = \sum a_i \psi_i$ et

  $$a_i \equiv \alpha_i \ mod \ l^n$$

  Alors $\phi = \lambda \circ [l^n]$ et $\lambda = \sum b_i \psi_i$ d'où $a_i = l^n b_i$ i.e.

  $$\alpha_i \equiv 0 \ mod \ l^n$$

  Puis $\alpha_i = 0$. □

Avec le choix de base et comme End(E) est sans torsion,

$$\mathbf{rg}_{\mathbb{Z}}\mathbf{End}(E) \leq \mathbf{rg}_{\mathbb{Z}_l}\mathbf{End}(T_l(E)) \leq 4.$$

On déf $End_k(T_l(E))$ pour les endomorphismes commutant avec $Gal(\overline{k}/k)$.

Theoreme d'Isogénie : L'injection $(*)_k$ est un isomorphisme quand

- k est un corps de nombres. (Faltings)
- k est un corps fini. (Tate)

Apparemment on peut voir le module de Tate comme un H_1 et le théorème veut alors dire qu'on cherche à savoir quand est-ce qu'un de ces morphismes provient d'un vrai morphisme géométrique.