Contents

Fonctions elliptiques

13 aout 2023

Quelques rappels ducoup sur la fct $\wp$ de weierstrass.

1 fonctions elliptiques et multiplication complexe

Là le but c'est de lier corps quadratiques imaginaires et courbes elliptiques.
En gros ce sera les fonctions régulières sur la courbe je crois. Une fonction est elliptique pour un réseau L si meromorphe sur $\mathbb{C}$ et périodique sur L.

- En gros si $L = [\omega_1, \omega_2]$ et f est elliptique pour L, f est holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash L$ et $\forall z \ f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2) = f(z)$.

1.1 fonction rho de Weierstrass

Via le Cox p.182. On pose $\wp(z; L) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \backslash 0} \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$. D'abord la convergence, l'holomorphie tout ça c'est donné par :

- $G_r(L) := \sum_{L \backslash 0} \frac{1}{\omega^r}$ converge absolument pour $r > 2$. Via

$$|G_r(L)| \leq \frac{1}{M^r} \sum_{m,n} \frac{1}{|m^2 + n^2|^r}$$

  et en comparant à l'intégrale de Riemann convergente corresp : $\square$

- Ensuite ça permet de majorer le terme de la $\wp$ par G_3 et conclure.

- $\wp$ est paire.

- $\wp$ est périodique : $\wp'$ l'est trivialement ducoup écrire $\wp(\omega_1/2) = \wp(-\omega_1/2) + C$ puis $C = 0$.

On cherche la relation qui donne la courbe elliptique : l'idée est souvent la même, Supprimer les poles puis trouver des 0. Comme pour $x < 1$: $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + \sum_{n \geq 1}(n+1)x^n$. On a :

- Autour de 0 : $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}(2n+1)G_{2n+2}z^{2n}$, le 2 vient de la parité.
- Autour de 0 : $\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + \sum_{n=1}(2n+1)(2n)G_{2n+2}z^{2n-1}$.
- D'où en comparant les coeffs de $\wp^3$ et $(\wp')^2$ et en posant $g_2(L) = 60G_4(L)$ et $g_3(L) = 140G_6(L)$ on obtient que:

  $$F(z) = \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + g_2\wp(z) + g_3$$

  s'annule en 0 et donc sur tout L mais par periodicité reste bornée donc constante. i.e.

  $$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

- Enfin : $\wp(z) = \wp(w) \;\leftrightarrow\; z \equiv w \; mod \; L$ (utiliser la formule de weierstrass, voir poly).
- D'où $\wp'(z) = 0 \leftrightarrow 2z \in L$, c'est les points d'ordre 2.
- Formule de l'addition : $\wp(z+w) = -\wp(z) - \wp(w) + \frac{1}{4}(\frac{\wp'(z)-\wp'(w)}{\wp(z)-\wp(w)})^2$. A nouveau y faut écrire les développements de Laurent et supprimer les pôles. (cas $P \neq -Q$: l'hospital, cas $2P \in L$ a faire).

1.2 j-invariant

On pose :

- $\Delta(L) = \text{Disc}(4x^3 - g_2(L)x - g_3(L)) = g_2(L)^3 - 27g_3(L)^2$.
- $j(L) = 1728\frac{g_2(L)^3}{\Delta(L)}$.

La dèf de j est valable car Δ est nulle ssi la courbe est singulière sauf que, les points d'ordres 2 sont on a vu :

$$\omega_1/2, \; \omega_2/2 \; , \; \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

Le point important est que :

- $j(L) = j(L') \leftrightarrow L' = \lambda L$.

En fait on regarde ce qu'y se passe quand on a seulement $g_2(L') = \lambda^{-4} g_2(L)$ et $g_3(L') = \lambda^{-6} g_3(L)$. Comme

- Les coeffs du développements de Laurent $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}(2n+1)G_{2n+2}z^{2n}$ sont des polynomes à coefficients rationnels indép de L en les $g_2,\ g_3$. (dériver l'équa diff et comparer les coeffs)

Ducoup $\wp(z; L') = \wp(z; \lambda L)$ puis $L' = \lambda L$ car les pôles de $\wp$ sont le réseau associé !

1.3 Multiplication complexe

Bon la ca se corse, y faut parler de corps quadratiques et d'ordres. Puis de corps de classe de Hilbert. Du coup, je fais un autre Latex qui se concentre dessus.