

Valuations/Complete fields

21 septembre 2023

Contents

1 les nombres p-adiques	1
--------------------------------	----------

1 les nombres p-adiques

On définit \mathbb{Z}_p par

1. $\varprojlim \mathbb{Z}/p^{\mathbb{Z}}$ muni de la topologie induite du produit des topologies discrètes, la structure d'anneau est alors évidente. La structure un peu moins.
2. L'espace des séries formelles $\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ ou la l'injection de \mathbb{Z} est donnée par l'écriture en base p La complétude est plus claire mais la structure d'anneau un peu moins.

\mathbb{Q}_p est donné par les corps de fraction. Qui sont en fait isomorphes à la complétion de \mathbb{Q} en v_p . L'utilité vient en partie de la réduction :

- Etant donné une équation $F(x_1, \dots, x_n) = 0$.
- On la réduit modulo m puis par le CRT modulo $p^{\nu} \forall \nu$.

Et en fait :

- $\forall \nu$ il existe une solution mod p^{ν} ssi il en existe une primitive dans \mathbb{Q}_p , ou une dans \mathbb{Z}_p (équivalent).
- En fait il suffit d'un ν par le lemme de Hensel.