# résumé outils importants

13 aout 2023

## 1 Cauchy

Là on regarde des chemins de Jordan, $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et $f \in H(\Omega)$. Dans l'ordre :

- $I(a, \gamma) = \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ =nb de tours de $\gamma$ autour de a.
- $\int_{triangle} f = 0$ via la preuve ou on réduit la taille du triangle.
- Le point précedent implique l'existence d'une primitive ! d'où :
- $\int_\gamma f = 0$ pour tout chemin fermé.
- Ensuite on intègre $\frac{f(z)-f(w)}{z-w}$ pour obtenir la formule de Cauchy pour un chemin de Jordan orienté positivement :

$$f(z) = \int_\gamma \frac{f(w)dw}{w-z}$$

- d'où on peut dériver indéfiniment sous l'intégrale ! (on dérive 1/z).

De l'holomorphie on déduit :

- Borne sur les coefficients du développement en série entière : $|c_n| \leq M(r)/r^n$ où $M(r)$ est le sup au bord du cercle.
- La borne implique Liouville, $f$ entière bornée $\implies$ constante.
- principe du maximum, le maximum est atteint au bord de l'ouvert de définition.

## 2 Résidus

On note $M(\Omega)$ les fonctions méromorphes sur $\Omega$.

- Y'a un développement de Laurent $\sum_{n=-m}^{+\infty} c_n(z-a)^n$.
- $Res(a, f)$=terme de degré $-1$ dans le développement. Terme important à l'intégration sur un chemin fermé !
- $Res(a, f') = 0$ !
- Pour un cycle $\gamma$ homologue à zéro : $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)dw}{w-z} = \sum_{a \in poles} I(a,\gamma)Res(a, f)$
- $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \#Z(f) - P(f)$. Ou les $Z$ et $P$ sont ceux à l'intérieur de $\gamma^*$.