Université de Bouira
Faculté des sciences
Département d'Informatique
2éme Année Licence LMD

Module : Logique Mathematique, **S1**
Date : 15 Janvier 2023
Durée : 1h30

Examen Final

♦ Documents interdits ♦ Tout appareil électronique doit être éteint

Exercice 1 : 7pts

Soient les formules:

- **F1** : $p \vee q \rightarrow r$
- **F2** : $p \vee q \vee r$
- **F3** : $\neg p \wedge q \vee r$
- **F4** : $\neg p \wedge \neg q \rightarrow r$

1. Dire si la formule F1 est valide, satisfiable, insatisfiable ?
2. Utiliser la table de vérité pour vérifier que **F1** ⊨ F3 ?
3. Montrer que « **F2** → **F4** » est tautologie sans utiliser la table de vérité .
4. Transformer « ¬p ∧ p » en une formule équivalente qui n'utilise que ¬ et →.
5. Mettre sous la forme normale disjonctive la formule « **F1** → F2 ».
6. Construire l'arbre de décomposition de la formule « **F1** → **F4** ».
7. Représenter la formule « **F1** → **F4** » par la notation polonaise.

REPONSE

p	q	r	F1	F2	F3	F1 ⇒ F3
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1

1) Dire si la formule F1 est valide, satisfiable, insatisfiable ? **(1pt)**

La formule **n'est pas valide** : (une ligne de la table où elle est fausse).
Elle est **satisfiable** : (une ligne où elle est vraie) et donc elle **n'est pas insatisfiable**.

2) Utiliser la table de vérité pour vérifier que F1 ⊨ F3 ? **(1pt)**

On ajoute une colonne pour F1⇒F3 dans la table de vérité pour calculer ses valeurs de vérité. Alors F1 ⊭ F3 parce que F1 ⇒ F3 n'est pas tautologie.

3) Montrer que F2 ⇒ F4 est tautologie sans utiliser la table de vérité **(1pt)**

$$
\begin{aligned}
F2 \Rightarrow F4 \quad &\equiv (p \vee q \vee r) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q \rightarrow r) \\
&\equiv (p \vee q \vee r) \Rightarrow (\neg(\neg p \wedge \neg q) \vee r) \\
&\equiv (p \vee q \vee r) \Rightarrow (p \vee q \vee r)
\end{aligned}
$$

$\equiv \neg(p \vee q \vee r) \vee (p \vee q \vee r)$

On suppose que $P=(p \vee q \vee r)$ alors $F2 \Rightarrow F4 \equiv \neg P \vee P$

Cette formule toujours valide alors $F2 \Rightarrow F4$ est tautologie

4) Transformer $\neg p \wedge p$ en une formule équivalente qui n'utilise que $\neg$ et $\Rightarrow$. **(1pt)**

$\neg p \wedge p \equiv \neg\neg(\neg p \wedge p)$

$\equiv \neg(p \vee \neg p)$

$\equiv \neg(\neg p \Rightarrow \neg p)$ **ou** $\neg(p \Rightarrow p)$

5) En utilisant les règles d'équivalence, mettre sous la forme normale disjonctive la formule $F1 \Rightarrow F2$ **(1pt)**

$F1 \Rightarrow F2 \equiv ((p \vee q \rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \vee r)$

$\equiv ((\neg(p \vee q) \vee r) \Rightarrow (p \vee q \vee r)$

$\equiv ((\neg p \wedge \neg q) \vee r) \Rightarrow (p \vee q \vee r)$

$\equiv \neg((\neg p \wedge \neg q) \vee r) \vee (p \vee q \vee r)$

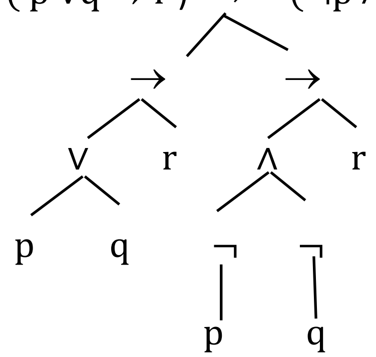
$\equiv (\neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg r) \vee (p \vee q \vee r)$

$\equiv ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee (p \vee q \vee r)$

$\equiv (p \wedge \neg r) \vee (q \neg r) \vee (p \vee q \vee r)$

6) Construire l'arbre de décomposition de la formule « F1 $\Rightarrow$ F4 ».

$(p \vee q \rightarrow r) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q \rightarrow r)$



7) Représenter la formule « $\mathbf{F1} \rightarrow \mathbf{F4}$ » par la notation polonaise.

$\rightarrow\rightarrow \vee pqr \rightarrow \wedge \neg p \neg qr$

Exercice 2 : ✍7pts

a) Traduisez les phrases suivantes en logique propositionnelle:

1. Il n'est pas vrai qu'Amine a réussi son examen si Brahim est contente.
2. Si Amine est un étudiant mais pas Salim, alors Brahim est un étudiant.
3. Je fais de sport seulement si je ne suis pas content et je dors.

b) Traduisez les phrases suivantes en logique des prédicats:

4. Tout ce qui est logique peut être démontrable.
5. Un livre de logique a été lu par tout le monde.
6. Tout étudiant qui se consacre aux loisirs échoue ou qui se consacre à ses études réussies.

c) Pour les formules 4 et 5, écrire la négation de ces formules.

REPONSE

a) Traduisez les phrases suivantes en logique propositionnelle:

1. Il n'est pas vrai qu'Amine a réussi son examen si Brahim est contente. (1 pt)

$$F1: \neg(B \Rightarrow A)$$

B: Brahim est contente, A : Amine a réussi son examen

2. Si Amine est un étudiant mais pas Salim, alors Brahim est un étudiant. (1 pt)

$$F2: (A \wedge \neg S) \Rightarrow B$$

A: Amine est un étudiant, B: Brahim est un étudiant, S: Salim est un étudiant

3. Je fais de sport seulement si je ne suis pas content et je dors. (1 pt)

$$F3: S \Rightarrow (\neg C \wedge D)$$

S: Je fais de sport, C: je suis content, D: je dors

b) Traduisez les phrases suivantes en logique des prédicats:

4. Tout ce qui est logique peut être démontrable. (1 pt)

$$F4: \forall x\, L(x) \Rightarrow D(x)$$

L(x): x est logique, D(x): x est démontrable

5. Un livre de logique a été lu par tout le monde. (1 pt)

$$F5: \exists x \forall y((LdL(x) \wedge P(y)) \Rightarrow L(x,y))$$

LdL(x): x est un livre de logique, P(x):x est une personne, L(x,y): x a été lu par y ;

6. Tout étudiant qui se consacre aux loisirs échoue ou qui se consacre à ses études réussies. (1 pt)

$$F6: \forall x(((CL(x) \wedge E(x)) \Rightarrow \neg R(x)) \vee ((CE(x) \wedge E(x)) \Rightarrow R(x)))$$

CL(x): x est consacré aux loisirs E(x): x est étudiant, R(x): x est réussi,
EC(x): x est échoué CE(x): x est consacré aux études

c) Pour les formules 4 et 5, écrire la négation de ces formules. (0.5+0.5)

$$F4: \forall x\, L(x) \Rightarrow D(x)$$

$$\neg F4: \neg(\forall x\, L(x) \Rightarrow D(x)) \equiv \neg(\forall x\, \neg L(x) \vee D(x))$$

$$\equiv \exists x\, L(x) \wedge \neg D(x))$$

$$F5: \exists x \forall y((LdL(x) \wedge P(y)) \Rightarrow L(x,y))$$

$$\neg F5: \neg(\exists x \forall y((LdL(x) \wedge P(y)) \Rightarrow L(x,y))) \equiv \neg(\exists x \forall y(\neg(LdL(x) \wedge P(y)) \vee L(x,y)))$$

$$\equiv \neg(\exists x \forall y(\neg LdL(x) \vee \neg P(y)) \vee L(x,y)))$$

$$\equiv \forall x \exists y(\neg(\neg LdL(x) \vee \neg P(y)) \vee L(x,y)))$$

$$\equiv \forall x \exists y(LdL(x) \wedge P(y)) \wedge \neg L(x,y)))$$

Exercice 3 : ✍6pts

Soient les hypothèses suivantes :

- Si je n'étudie pas j'aurai des remords.
- Si je ne fais pas de sport, j'aurai aussi des remords
- Or, je n'ai pas de remords

1. Montrer alors que de ces hypothèses on peut prouver que :
« J'arrive à étudier et Je fais du sport »

لدينا الفرضيات التالية:

- إذا لم أدرس فسوف أشعر بالندم.
- إذا لم أمارس الرياضة ، فسوف أشعر أيضا بالندم
- حسنا ، ليس لدي أي ندم

1. برهن أنه من خلال هذه الفرضيات يمكننا إثبات ما يلي:

REPONSE

Les propositions :

E : J'arrive à étudier
R : j'aurai des remords
S : Je fais du sport

Les formules (les hypothèses):

- $\neg E \to R$
- $\neg S \to R$
- $\neg R$

Problème :

$$\{\neg E \to R\,,\ \neg S \to R\,, \neg R\} \vdash E \wedge S\ ?$$

Résolution

on a : $\{\neg \mathbf{E} \to \mathbf{R}\,,\ \neg \mathbf{S} \to \mathbf{R}\,, \neg \mathbf{R}\} \vdash \mathbf{E} \wedge \mathbf{S}\ ?$

- $\neg E \to R \equiv E \vee R$; $\neg S \to R \equiv S \vee R$
- $\{\mathbf{E} \vee \mathbf{R}\,,\ \mathbf{S} \vee \mathbf{R}\,, \neg \mathbf{R}\} \vdash \mathbf{E} \wedge \mathbf{S}\ ?$

1) $E \vee R$	hyp
2) $S \vee R$	hyp
3) $\neg R$	hyp
4) E	RR(1,3)
5) S	RR(2,3)
6) $E \wedge S$	Addition(4,5)