

Изучение дифракции

Валиуллин Айрат, Нугуманов Динар

Вопрос по выбору



Московский физико-технический институт

Долгопрудный, 2021

Цель работы: изучить дифракцию в зоне Фраунгофера, экспериментальным путем определить длину волны лазера.

Оборудование и материалы: CD-диск, DVD-диск, красный и зеленый лазеры, рулетка измерительная, фольга, подставка, лист бумаги А4.

1 Дифракция на компакт-дисках: получение длин волн различных лазеров

1.1 Теоретические сведения

Рассмотрим дифракционную решетку, на которую падает свет под прямым углом.

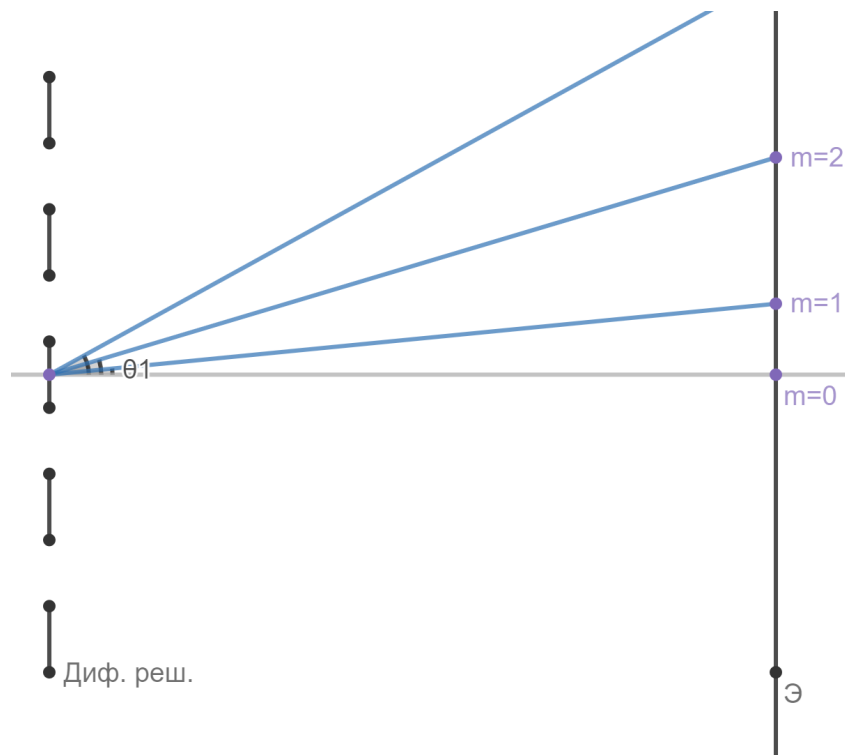


Рис. 1. Дифракционная решетка

Воспользуемся интегралом Френеля, чтобы найти поле:

$$E(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x)e^{ikx\sin(\theta)}dx = \int_0^D E(x)e^{ikx\sin(\theta)}dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{jd}^{(j+1)d} E(x)e^{ikx\sin(\theta)}dx \quad (1)$$

В интеграле делаем замену $\tilde{x} = x - jd$. $E(\tilde{x} + jd) = E(\tilde{x})$, так как jd — это период. Выносим из под интеграла $e^{ikjd\sin(\theta)}$, а сам интеграл выносим из-под суммирования. Получаем:

$$E(\theta) = \int_0^d E(\tilde{x})e^{ik\tilde{x}\sin(\theta)}d\tilde{x} \sum_{j=0}^{N-1} e^{ikjd\sin(\theta)} \quad (2)$$

Используя формулу для геометрической прогрессии, найдем сумму:

$$E(\theta) = e^{i\psi} \int_0^d E(\tilde{x}) e^{ik\tilde{x}\sin(\theta)} d\tilde{x} \frac{\sin(\frac{Nkd}{2}\sin(\theta))}{\sin(\frac{kd}{2}\sin(\theta))} \quad (3)$$

Интергрируем от 0 до a , где a — это ширина отверстия:

$$E(\theta) = e^{i\delta} E_0 a \operatorname{sinc} \left(\frac{ka\sin(\theta)}{2} \right) \frac{\sin(\frac{Nkd}{2}\sin(\theta))}{\sin(\frac{kd}{2}\sin(\theta))} \quad (4)$$

Отсюда находим интенсивность:

$$I(\theta) = E_0^2 a^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{ka\sin(\theta)}{2} \right) \frac{\sin^2(\frac{Nkd}{2}\sin(\theta))}{\sin^2(\frac{kd}{2}\sin(\theta))} \quad (5)$$

Выражение в знаменателе отвечает за максимумы. Когда знаменатель равен нулю, числитель также обнуляется, однако дифференцированием можно доказать, что при обнулении знаменателя получаем максимум интенсивности:

$$\frac{kd}{2}\sin(\theta) = \pi m \Rightarrow d\sin(\theta) = m\lambda \quad (6)$$

Из прямоугольного треугольника имеем:

$$\sin(\theta) = \frac{l_1}{\sqrt{l^2 + l_1^2}} \quad (7)$$

где l — расстояние от дифракционной решетки до экрана, d — период решетки, l_1 — расстояние от $m = 0$ до $m = 1$, θ — угол между направлениями на нулевой и первый максимумы.

Получаем выражение для длины волны λ ($m=1$):

$$\lambda = \frac{l_1 d}{\sqrt{l^2 + l_1^2}} \quad (8)$$

1.2 Строение компакт-дисков

Роль дифракционной решетки в нашем случае играют CD и DVD диски. Информация на них записывается в виде спиральной дорожки из питов — углублений, выдавленных в поликарбонатной основе (рис 2). Каждый из них имеет примерно 100 нм в глубину и 500 нм в ширину, а длина варьируется от 850 нм до 3,5 мкм. Промежутки между ними называются лендом. Шаг дорожек в спирали CD-диска составляет 1,6 мкм, а DVD-диска — 0,74 мкм. Питы рассеивают или поглощают падающий на них свет, а подложка — отражает, поэтому записанный диск — пример отражательной дифракционной решётки с соответствующим периодом.

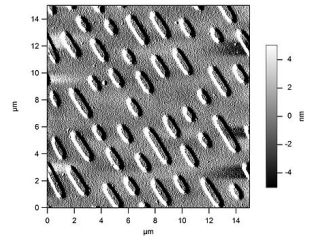


Рис. 2. Спиральные дорожки из питов

1.3 Проведение экспериментов

В рамках эксперимента воспользуемся тем фактом, что диск с хорошей преемственностью является отражательной дифракционной решеткой. В нашем распоряжении имеется два диска: CD и DVD с шагами дорожек 1,6 и 0,74 мкм соответственно, а также два лазера: красный и зеленый. Нахождение длин волн последних — цель данной части настоящей работы. Для каждой пары "лазер-диск" с целью увеличения точности снимем зависимости l_1 (расстояния между центральным и первым максимумами) от l (расстояния между плоскостями диска и экрана). Эти зависимости априори линейны, поскольку измеряемые величины являются катетами прямоугольного треугольника (рис 3). Также прикрепим фотографии примеров работы собранной экспериментальной установки (рис. 4).

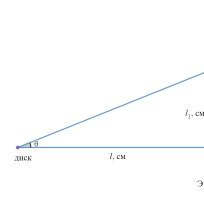
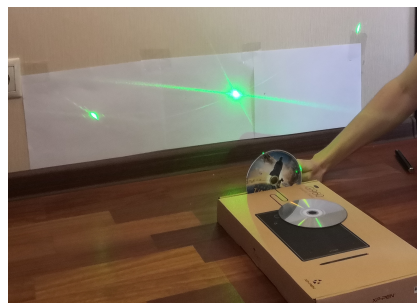


Рис. 3. Оптическая схема



(a)



(b)

Рис. 4. Экспериментальная установка с использованием: (a) CD диска; (b) DVD диска.

Итак, закрепим CD-диск на подставке и снимем последовательность пар значений (l, l_1) для красного лазера; запишем их в таблицу 1. Аналогичные измерения проведем для зеленого лазера, выбирая расстояния l так, чтобы обеспечить разумные погрешности; данные запишем в таблицу 2. Зависимости отразим на рисунке 5.

Таблица 1. Значения измеренных l и l_1 для пары "CD-зеленый"

l , см	l_1 , см	Δ , см
20	8,1	0,3
25	9,8	0,3
30	11,6	0,3
35	13,4	0,3
40	15,2	0,3
45	17,0	0,3

Таблица 2. Значения измеренных l и l_1 для пары "CD-красный"

l , см	l_1 , см	Δ , см
20	10,2	0,2
25	12,6	0,2
30	14,0	0,2
35	16,8	0,2
40	19,5	0,2
45	21,5	0,2

При установлении погрешности отдельного измерения учитывается факт того, что максимумы дифракционной картины — не точки.

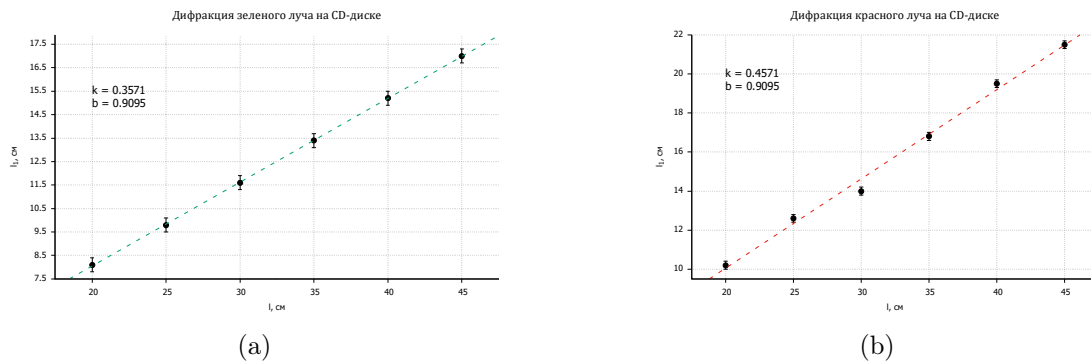


Рис. 5. Графики зависимости расстояния между максимумами от расстояния между дифракционной решеткой и экраном для: (а) зеленого лазера; (б) красного лазера.

Полученные коэффициенты наклона используем для вычисления длин волн. Для этого преобразуем формулу (8). Результат укажем в таблице 3.

$$\lambda = \frac{kd}{\sqrt{1+k^2}} \quad (9)$$

где k — коэффициент наклона соответствующих прямых.

Таблица 3. Значения k и λ для CD-диска

	k	λ , нм
Красный	$0,46 \pm 0,02$	665 ± 22
Зеленый	$0,357 \pm 0,002$	538 ± 2

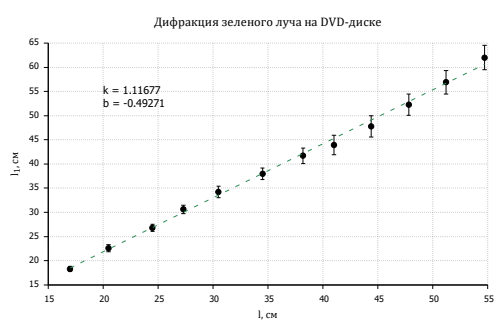
Проведем аналогичный эксперимент с использованием DVD-диска. Закрепим диск на подставке и снимем последовательность пар значений (l , l_1) для красного и зеленого лазеров; запишем данные в таблицу 4 и в таблицу 5. Зависимости отразим на рисунке 6.

Таблица 4. Значения измеренных l и l_1 для пары "DVD-зеленый"

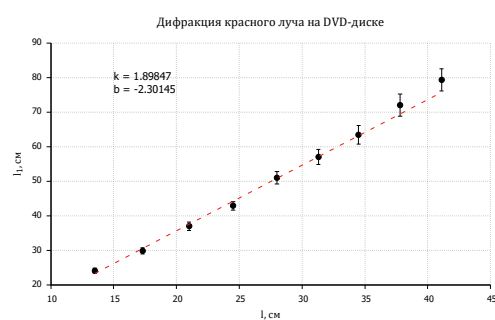
l , см	l_1 , см	Δ , см
17,0	18,3	0,5
20,5	22,6	0,7
24,5	26,8	0,7
27,3	30,6	0,9
30,5	34,2	1,2
34,5	38,0	1,2
38,2	41,7	1,6
41,0	43,9	2,0
44,4	47,8	2,2
47,8	52,3	2,2
51,2	56,9	2,4
54,7	62,0	2,5

Таблица 5. Значения измеренных l и l_1 для пары "DVD-красный"

l , см	l_1 , см	Δ , см
13,5	24,1	0,7
17,3	29,8	0,9
21,0	37,0	1,2
24,5	42,9	1,2
28,0	51,0	1,8
31,3	57,0	2,2
34,5	63,4	2,7
37,8	72,0	3,2
41,1	79,3	3,2



(а)



(б)

Рис. 6. Графики зависимости расстояния между максимумами от расстояния между дифракционной решеткой и экраном для: (а) зеленого лазера; (б) красного лазера.

Полученные коэффициенты наклона используем для вычисления длин волн. Для этого воспользуемся формулой (9). Результат укажем в таблице 6.

Таблица 6

	k	λ , нм
Красный	$1,90 \pm 0,05$	654 ± 4
Зеленый	$1,12 \pm 0,02$	551 ± 3

1.4 Промежуточный вывод

Подводя итоги, стоит отметить, что компакт-диски, в связи с их строением и информационной структурой, обладают оптическими свойствами отражательных дифракционных решеток и позволяют по известному "периоду" с хорошей точностью определить длину волны источника света, близкого к монохроматическому, коим в настоящей работе являются лазерные указки. Наши измерения показали достоверные результаты (таблица 7): почти все полученные длины волн располагаются в пределах, указанных в паспорте лазеров.

Таблица 7. Результаты вычисления длин волн

	Красный	Зеленый
CD	665 ± 22	538 ± 2
DVD	654 ± 4	551 ± 3
Паспорт	660 ± 10	532 ± 10

Для следующей части данного исследования возьмем значения с меньшими погрешностями.

2 Дифракция на круглом отверстии и на системе круглых отверстий

2.1 Теоретические сведения

Рассмотрим дифракцию на щели. На щель падает волна с длиной волны λ , ширина щели — D , угол между горизонтальной осью z и падающим лучем — θ . Запишем интеграл Френеля:

$$E(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x)e^{ikx\sin(\theta)}dx \quad (10)$$

Интегрируем от $-\frac{D}{2}$ до $\frac{D}{2}$:

$$E(\theta) = \int_{-D/2}^{D/2} E(x)e^{ikx\sin(\theta)}dx = DE_0 \text{sinc}\left(\frac{kD}{2}\sin(\theta)\right) \quad (11)$$

Получаем выражение для интенсивности:

$$I(\theta) = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{kD}{2}\sin(\theta)\right) \quad (12)$$

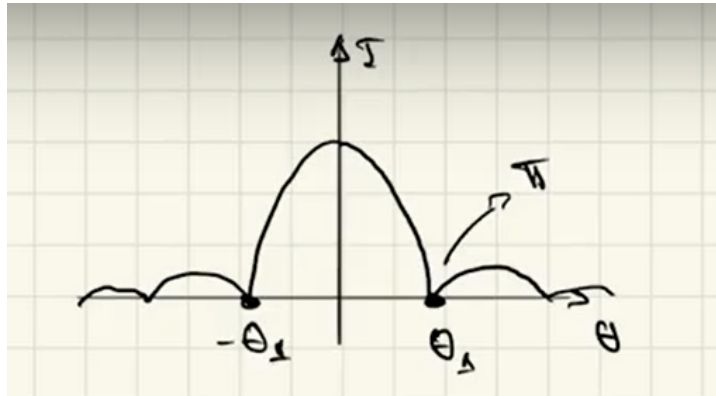


Рис. 7. График зависимости $I(\theta)$

Найдем θ дифракционное (угол, допускающий минимум интенсивности), учитывая то, что θ очень мал $\Rightarrow \sin(\theta) \approx \theta$:

$$\frac{KD}{2}\theta = \pi \Rightarrow \theta = \frac{\lambda}{D} \quad (13)$$

В нашем случае происходит дифракция на круглом отверстии, распределение будет описываться функцией Бесселя. В выражении для θ дифракционное появится множитель 1,22:

$$\theta = \frac{1,22\lambda}{D} \quad (14)$$

2.2 Проведение опыта: дифракция на круглом отверстии

На неизвестного диаметра круглое отверстие, проделанное в фольге, светим красным и зеленым лазерами. Наблюдаем дифракционные картины, указанные на рисунках 8 и 9:

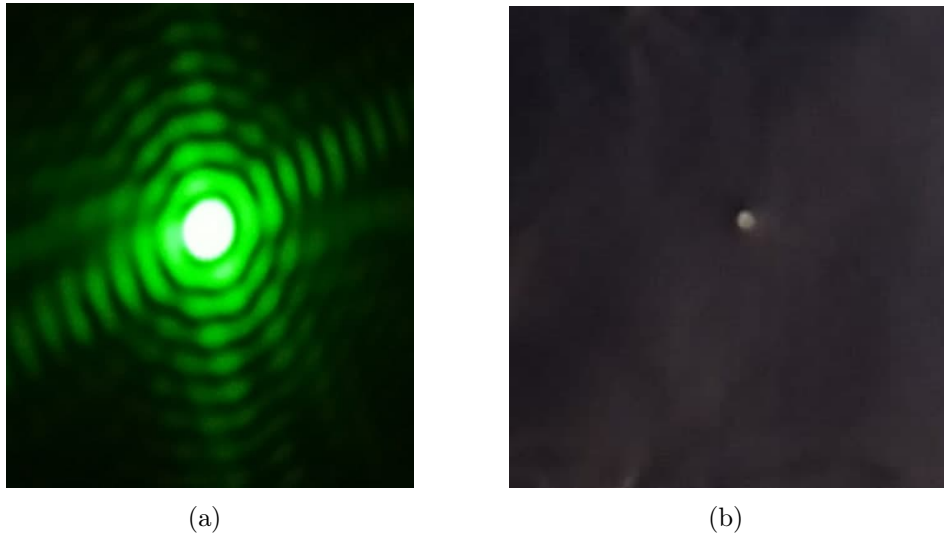


Рис. 8. Эксперимент с зеленым лазером: (a) дифракционная картина; (b) отверстие.

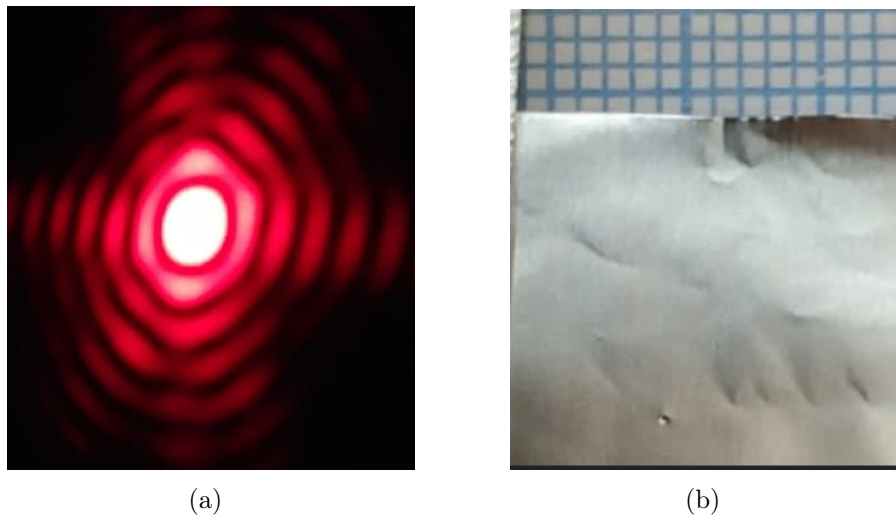


Рис. 9. Эксперимент с красным лазером: (a) дифракционная картина; (b) отверстие.

Из формулы (14) получим выражение для вычисления диаметра отверстия D . А также с помощью миллиметровки измерим диаметры данных отверстий D' . Результаты сведем в таблице 8.

$$\theta = \frac{r}{L} \Rightarrow D = \frac{1,22\lambda L}{r} \quad (15)$$

где L — расстояние от плоскости отверстия до плоскости экрана, r — радиус пятна.

Таблица 8. Результаты вычисления диаметров отверстий

	Зеленый	Красный
L , мм	$2070,00 \pm 0,05$	$1780,00 \pm 0,05$
r , мм	$4,75 \pm 0,05$	$6,00 \pm 0,05$
λ , нм	538 ± 2	654 ± 4
D , мм	$0,29 \pm 0,03$	$0,24 \pm 0,03$
D' , мм	0,34	0,25

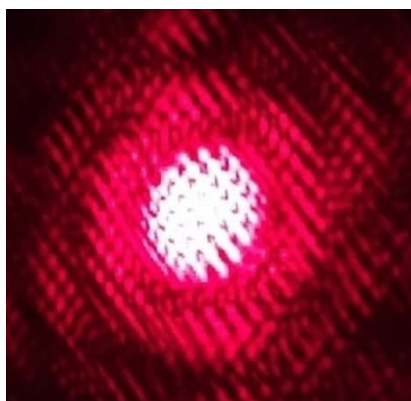
Это дифракция Фраунгофера, так как экран расположен дальше, чем z_d (дифракционное):

$$z_d = \frac{r^2}{\lambda} = \frac{D^2}{4\lambda}$$

$z_d = 3,9$ см; $L = 207$ см — для эксперимента с зеленым лазером,
 $z_d = 2,3$ см; $L = 178$ см — для эксперимента с красным лазером,
 $L \gg z_d$

2.3 Дифракция на системе круглых отверстий

Проведя этот же эксперимент, но не с одним отверстием, а с системой отверстий, мы получаем "рябь", так как происходит наложение волн от каждого отверстия:



(a)



(b)

Рис. 10. Эксперимент с красным лазером: (a) дифракционная картина; (b) система отверстий 3x3.

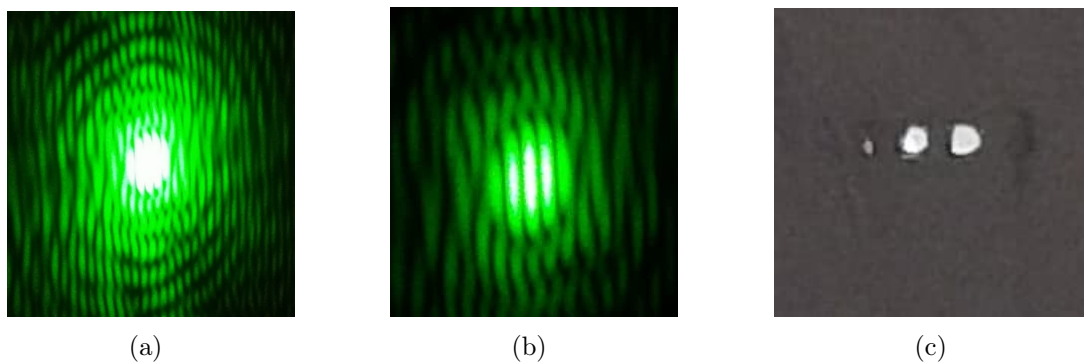


Рис. 11. Эксперимент с зеленым лазером: (a) дифракционная картина (1); (b) дифракционная картина (2); (c) система отверстий 1x2

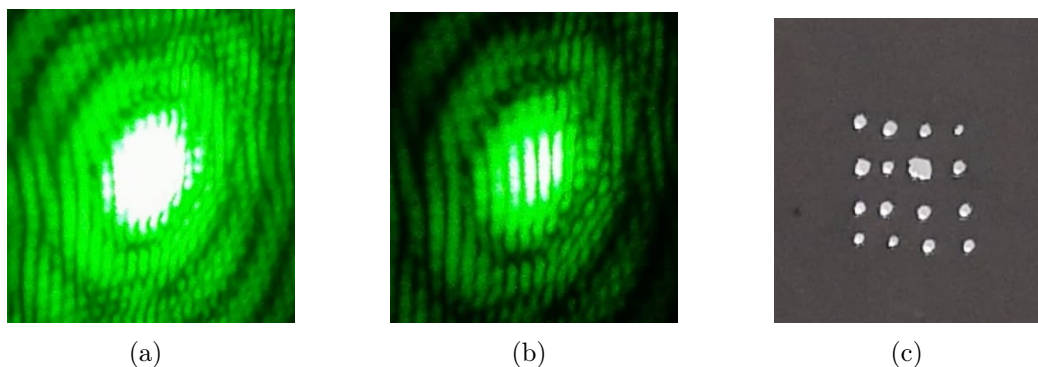


Рис. 12. Эксперимент с зеленым лазером: (a) дифракционная картина (1); (b) дифракционная картина (2); (c) система отверстий 4x4

2.4 Промежуточный вывод

В ходе эксперимента ”дифракция на круглом отверстии” нам удалось найти диаметры проделанных отверстий. Посчитав эти диаметр с помощью миллиметровки, мы убедились, что значения соответствуют тем, что были получены в рамках опыта.

Наблюдая за центральным максимумом дифракционной картины при перемещении экрана, мы убедились, что эксперимент проводится в зоне Фраунгофера; мы подтвердили это, посчитав дифракционную длину z_d .

3 Заключение

В рамках настоящей работы с качественно различных точек зрения было изучено явление дифракции. В первой части эмпирическим путем были установлены длины волн зеленого и красного лазеров с помощью изучения дифракции на CD- и DVD-дисках. При этом использовалась их физическая эквивалентность отражающим дифракционным решеткам. Результаты первой части сведены в таблицу 7. Целью второй части стояло определение диаметров проделанных в фольге отверстий. Исследование дифракции Фраунгофера на последних позволило проделать это

с хорошей точностью. Значения размеров отверстий были сравнены со значениями, вычисленными путем подсчета пикселей на фотографиях отверстий. Результаты второй части указаны в таблице 8.