
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Физтех-школа Аэрокосмических Технологий

Кафедра космических летательных аппаратов

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика

Направленность (профиль) подготовки: Геокосмические науки и технологии

**КОМПЛЕКС ТЕСТОВЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ
ДИНАМИЧЕСКОЙ И УДАРНОЙ ПРОЧНОСТИ
КОНСТРУКЦИЙ ДЛЯ ВЕРИФИКАЦИИ ЧИСЛЕННЫХ
РАСЧЕТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММНЫХ КОДОВ**

(бакалаврская работа)

Студент:

Валиуллин Айрат Анасович

(подпись студента)

Научный руководитель:

Фельдштейн Валерий Адольфович,
д-р техн. наук

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2022

Аннотация

Развитие цифровых технологий открывает перспективу широкого внедрения в практику инженерных расчетов в области динамики и прочности машин численных методов решения задач математической физики. Обеспечение достоверности результатов требует верификации численных решений, которые по своей природе являются приближенными. Один из эффективных способов верификации состоит в сопоставлении численных решений с аналитическими, по возможности математически точными. Для этого необходима база точных решений физически содержательных задач.

Целью данной работы является получение точных решений комплекса тестовых задач, предназначенных для верификации численных расчетов в области динамической прочности тонкостенных конструкций. На основе систематического применения интегральных преобразований (Лапласа, Фурье, Ханкеля) получены аналитические точные решения задач о динамическом и ударном нагружении стержней, пластин и оболочек.

Полученные решения реализованы в виде программных кодов и могут быть использованы для контроля точности численных решений задач динамической прочности, а также непосредственно в практике прочностных расчетов.

Для составления упомянутых программных кодов был использован язык программирования Python со следующими сторонними библиотеками: SciPy (для численного интегрирования), NumPy (для эффективной работы с математическими объектами: векторами и матрицами), Matplotlib (для построения графиков решений) и SymPy (для символьного дифференцирования громоздких выражений). Коды, файлы с которыми размещены в публичном репозитории на GitHub, были написаны в среде Jupyter Notebook.

Содержание

1	Введение	5
2	Продольные колебания стержня с закрепленным концом	7
2.1	Получение аналитического решения	7
2.2	Результаты аналитического решения	9
3	Продольные колебания стержня со свободным концом	13
3.1	Получение аналитического решения	13
3.2	Результаты аналитического решения	13
4	Продольный удар твердого тела по закрепленному стержню	15
4.1	Получение аналитического решения	15
4.2	Результаты аналитического решения	17
5	Продольный удар твердого тела по свободному стержню	19
5.1	Получение аналитического решения	19
5.2	Численная визуализация аналитического решения	19
6	Изгибные волны в цилиндрической оболочке и балке на упругом основании	21
6.1	Получение аналитического решения для нормальной динамической нагрузки	21
6.2	Получение аналитического решения для точечной постоянной нагрузки	23
6.3	Численная визуализация аналитических решений	24
7	Поперечные волны ускорения упругой тонкой пластины	26
7.1	Получение аналитического решения	26
7.2	Метод стационарной фазы	28
7.3	Численная визуализация аналитического решения	29

8 Поперечные волны ускорения упругой сферической оболочки	32
8.1 Получение аналитического решения	32
8.2 Метод стационарной фазы	34
8.3 Численная визуализация аналитического решения	34
9 Заключение	36
Список литературы	37

1 Введение

Цифровые технологии — одно из наиболее значимых направлений научно-технического прогресса. Применительно к таким разделам механики, как механика сплошной среды, прочность, аэродинамика, теплотехника, непосредственно связанным с современной техникой, цифровые технологии открывают широкие и еще до конца не осознанные перспективы. Основу этих перспектив составляет широкое внедрение в инженерную практику численных методов решения задач математической физики. В основе этих методов лежит, по преимуществу, сведение континуальной системы (конструкции, потока газа или жидкости, тепловых полей) к дискретной. В результате сложная, как правило нелинейная система дифференциальных уравнений с частными производными сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (в нестационарном случае) или к системе алгебраических уравнений (в стационарном случае). Это достигается по преимуществу разбиением лагранжева многообразия на конечные элементы или эйлерова многообразия на конечные объемы. При этом возникают три базовые стадии решения задачи:

- **препроцессор:** формирование систем алгебраических или дифференциальных уравнений;
- **процессор:** решение полученной системы, порядок которой может достигать миллионов;
- **постпроцессор:** анализ результатов, представляемых массивами чисел большой размерности.

Однако прогресс коснулся этих этапов в различной степени. В том, что касается первого и третьего этапов, цифровые технологии совершили революцию, которая позволила с одной стороны автоматизировать процесс дискретизации (к примеру, разбить на конечные элементы обыкновенную шестерню вручную — необыкновенно сложная задача); а с другой — дала возможность визуализации полученного решения задачи, представленного массивом чисел огромной размерности, без которой его было бы невозможно «прочитать» (то, что сегодня является возможным даже с использованием персональных компьютеров). Что касается основного (второго) этапа, то здесь прогресс существенно скромнее. Вопросы сходимости решений, точности и устойчивости процесса пошагового интегрирования уравнений, остаются открытыми. Проблемы численного решения задач, всесторонне рассмотренные в [4], в том числе применительно к задачам прочности [5], до сих пор остаются актуальными. По-видимому, эти вопросы не могут быть решены исчерпывающим образом.

Даже самые популярные и эффективные программные пакеты типа NASTRAN, ABACUS, ANSYS, SolidWorks, FlowVision и др. [8] не дают гарантии точности решения. В связи с этим на практике, в частности, при разработке и использовании такого программного обеспечения, возникает необходимость верификации результатов расчета. Сложилась практика тестирования решений путем варьирования количества конечных элементов, шагов интегрирования, контроля аппроксимации. Недостатком этого способа является то, что одно приближенное решение сравнивается с другим, тоже приближенным. От этого недостатка свободен другой способ — сравнение численного решения с аналитическим, если последнее возможно получить. Этому способу тоже присущ очевидный недостаток: аналитические решения можно получить в сравнительно редких случаях при сильном упрощении постановки задачи. Следовательно, при выборе тестовых задач необходимо руководствоваться двумя базовыми требованиями:

- задача должна быть физически представительной, основанной на модели, к которой с различной степенью приближения сводится как можно более широкий класс технических задач,
- задача должна иметь точное в математическом смысле решение.

Целью настоящей работы является разработка комплекса тестовых задач, предназначенных для верификации численных решений задач динамической прочности конструкций.

При выборе задач учитывались перечисленные выше требования. Первое требование выполнено тем, что в качестве объектов расчета выбраны базовые расчетные модели конструкций: стержни, пластины и оболочки [3, 7]. Эти модели используются в практике расчетов на динамическую прочность, так как отражают многие базовые свойства конструкций.

Второе требование учтено тем, что для решения задач использовались строгие аналитические методы, основанные на интегральных преобразованиях Лапласа, Фурье и Ханкеля [1, 6]. Благодаря этому для всех рассмотренных задач получены точные решения, доведенные до квадратур. Известные трудности вычисления квадратур при обращении интегральных преобразований эффективно решены с использованием асимптотического метода стационарной фазы.

Были рассмотрены следующие задачи:

1. продольные колебания закрепленного стержня под действием динамической нагрузки (глава 2);
2. продольные колебания свободного стержня под действием динамической нагрузки (глава 3);
3. продольные колебания закрепленного стержня, вызванные ударом твердого тела (глава 4);
4. продольные колебания свободного стержня, вызванные ударом твердого тела (глава 5);
5. изгибные волны в цилиндрической оболочке и балке на упругом основании (глава 6);
6. поперечные волны ускорения упругой тонкой пластины под действием динамической нормальной и точечной нагрузок (глава 7);
7. поперечные волны ускорения упругой тонкой сферической оболочки под действием динамической нормальной и точечной нагрузок (глава 8).

Полученные аналитические решения доведены до численных значений: для всех них разработаны и апробированы программные коды.

2 Продольные колебания стержня с закрепленным концом

2.1 Получение аналитического решения

Рассмотрим продольные колебания стержня с закрепленным концом (см. рис. 1), вызванные динамической нагрузкой. Функция перемещения $u(x, t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \ddot{u}(x, t) = c^2 u''(x, t), \\ u(0, t) = 0, \quad u'(l, t) = -\frac{Q}{ES} f(t), \\ u(x, 0) = 0, \quad \dot{u}(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

В (2.1) E — модуль упругости, ρ — плотность, $c^2 = E/\rho$ — фазовая скорость волны, $f(t)$ — составляющая торцевой силы, Q — суммарная по сечению сила, l , S — длина стержня и площадь его поперечного сечения соответственно.

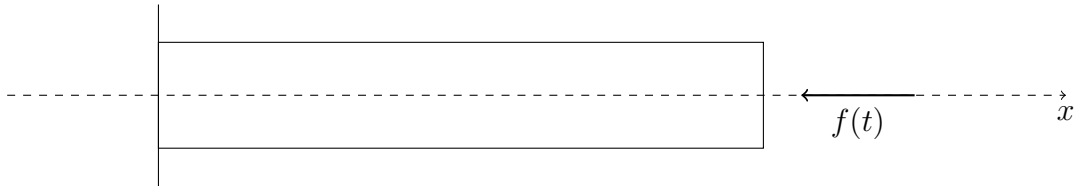


Рис. 1: Продольно нагружаемый закрепленный стержень

Для отыскания решений воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа-Карсона, обозначив изображение искомой функции $u(x, t)$ за $U(x, p)$:

$$U(x, p) := \mathcal{L}_K[u(x, t)](p) = p \int_0^\infty u(x, t) e^{-pt} dt \quad (2.2)$$

или в упрощенном виде:

$$u(x, t) \xrightarrow{\mathcal{L}_K} U(x, p).$$

Из выражений для изображения производной с учетом начальных условий из (2.1) имеем:

$$\ddot{u}(x, t) \xrightarrow{\mathcal{L}_K} p^2 U(x, p) - p^2 u(x, 0) - p \dot{u}(x, 0) = p^2 U(x, p). \quad (2.3)$$

Продифференцируем интеграл (2.2) дважды по x :

$$U''(x, p) := \mathcal{L}_K[u''(x, y)](p) = p \int_0^\infty u''(x, t) e^{-pt} dt,$$

следовательно,

$$u''(x, t) \xrightarrow{\mathcal{L}_K} U''(x, p). \quad (2.4)$$

Введем безразмерные переменные. Масштабы координат и времени:

$$\begin{cases} [p] = c/l, \\ [x] = l, \\ [t] = l/c, \\ q = \frac{Q}{ES}. \end{cases} \quad (2.5)$$

С учетом (2.5) запишем безразмерные уравнения (2.1):

$$\begin{cases} \ddot{u}(x, t) = u''(x, t), \\ u(0, t) = 0, \quad u'(l, t) = -qf(t), \\ u(x, 0) = 0, \quad \dot{u}(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

где в связи с линейностью задачи можно принять $q = 1$; в качестве продольного (возмущающего) усилия возьмем функцию вида

$$f(t) = e^{-\alpha t} \cos(\beta t) \quad (2.7)$$

с параметрами нагружения $\alpha > 0, \beta > 0$.

Используя (2.3) и (2.4), перейдем от волнового уравнения (2.6) на функцию продольного перемещения к краевой задаче на изображение перемещения $U(x, p)$:

$$\begin{cases} U''(x, p) - p^2 U(x, p) = 0, \\ U(0, p) = 0, \\ U'(l, p) = -F(p). \end{cases} \quad (2.8)$$

Условия получаются применением преобразования Л-К к граничным условиям из (2.1). Здесь $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}_K} F(p)$.

Тогда общее решение этого уравнения:

$$U(x, p) = A \operatorname{ch}(px) + B \operatorname{sh}(px).$$

Из второго уравнения системы (2.8) получаем $A = 0$, а из третьего следует, что

$$U'(x, p)|_{x=l} = Bp \operatorname{ch}(p) = -F(p)$$

и

$$B = -\frac{F(p)}{p} \frac{1}{\operatorname{ch}(p)}.$$

И тогда изображение примет вид:

$$U(x, p) = -\frac{F(p)}{p} \frac{\operatorname{sh}(px)}{\operatorname{ch}(p)}. \quad (2.9)$$

При этом безразмерное изображение функции $u(x, t)$ имеет масштаб $[U(x, p)] = \frac{ES}{ql}$.

Перейдем теперь от изображения решения к оригиналу.

Расписав последнюю дробь в (2.9) по определению гиперболических синуса и косинуса и разложив полученное выражение по степеням e^{-2p} , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sh}(px)}{\operatorname{ch}(p)} &= \frac{e^{px} - e^{-px}}{e^p + e^{-p}} = \frac{e^{-p(1-x)} - e^{-p(1+x)}}{1 + e^{-2p}} = \\ &= e^{-p(1-x)} - e^{-p(1+x)} - e^{-p(3-x)} + e^{-p(3+x)} + e^{-p(5-x)} - e^{-p(5+x)} - \dots \end{aligned}$$

Поскольку $\sigma(t - \tau_0) \xrightarrow{\mathcal{L}_K} e^{-p\tau_0}$, где $\sigma(t - \tau_0)$ — смещенная вправо на τ_0 функция Хевисайда, согласно свойствам последней оригинал перемещения $u(x, t)$ примет вид:

$$u(x, t) = - \left(\int_0^t \sigma(\zeta - (1 - x)) f(t - \zeta) d\zeta - \int_0^t \sigma(\zeta - (1 + x)) f(t - \zeta) d\zeta - \right. \\ \left. - \int_0^t \sigma(\zeta - (3 - x)) f(t - \zeta) d\zeta + \int_0^t \sigma(\zeta - (3 + x)) f(t - \zeta) d\zeta - \dots \right). \quad (2.10)$$

Рассмотрим каждое слагаемое в (2.10) в подстановке (2.7):

$$I(\zeta_0, t) := \int_0^t \sigma(\zeta - \zeta_0) f(t - \zeta) d\zeta = \sigma(t - \zeta_0) \int_{\zeta_0}^t f(t - \zeta) d\zeta = \\ = \sigma(t - \zeta_0) \int_0^{t-\zeta_0} f(\chi) d\chi = \sigma(t - \zeta_0) \int_0^{t-\zeta_0} e^{-\alpha\chi} \cos(\beta\chi) d\chi = \\ = \sigma(t - \zeta_0) (\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2} \left((\beta \sin(\beta\chi) - \alpha \cos(\beta\chi)) e^{-\alpha\chi} \right) \Big|_0^{t-\zeta_0} = \\ = \sigma(t - \zeta_0) (\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2} \left[(\beta \sin(\beta(t - \zeta_0)) - \alpha \cos(\beta(t - \zeta_0))) e^{-\alpha(t-\zeta_0)} + \alpha \right]. \quad (2.11)$$

Используя введенное в (2.11) обозначение, окончательно:

$$u(x, t) = - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [I(2k + 1 - x, t) - I(2k + 1 + x, t)], \quad (2.12)$$

$$\varepsilon(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [I'(2k + 1 - x, t) + I'(2k + 1 + x, t)],$$

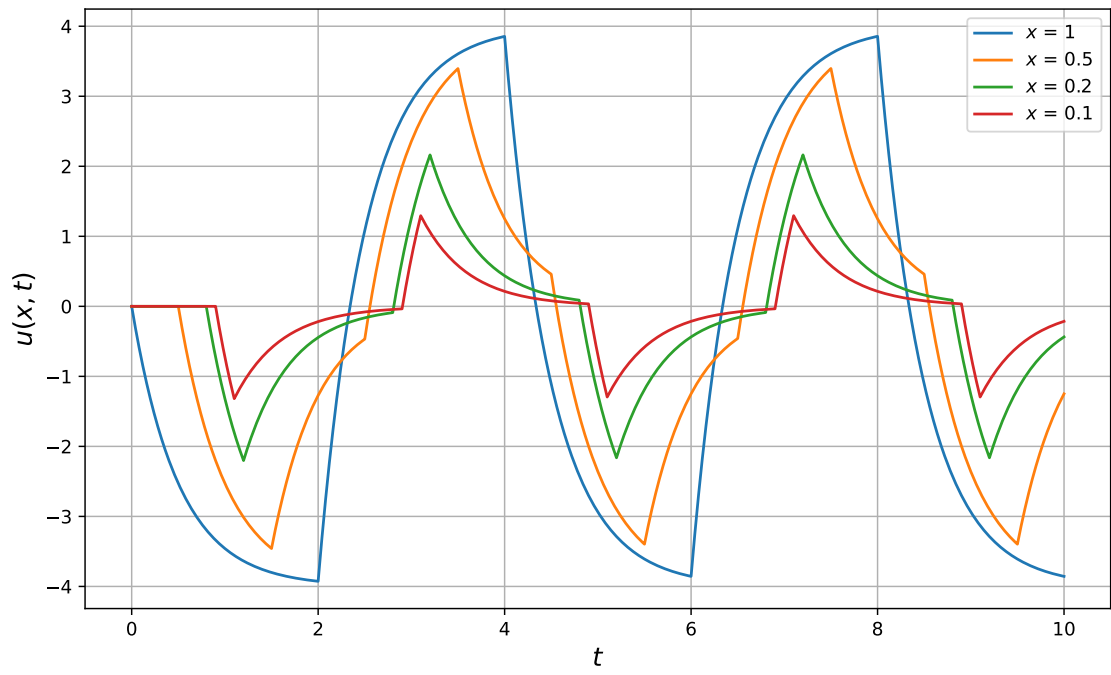
$$\ddot{u}(x, t) = - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [\ddot{I}(2k + 1 - x, t) - \ddot{I}(2k + 1 + x, t)],$$

причем

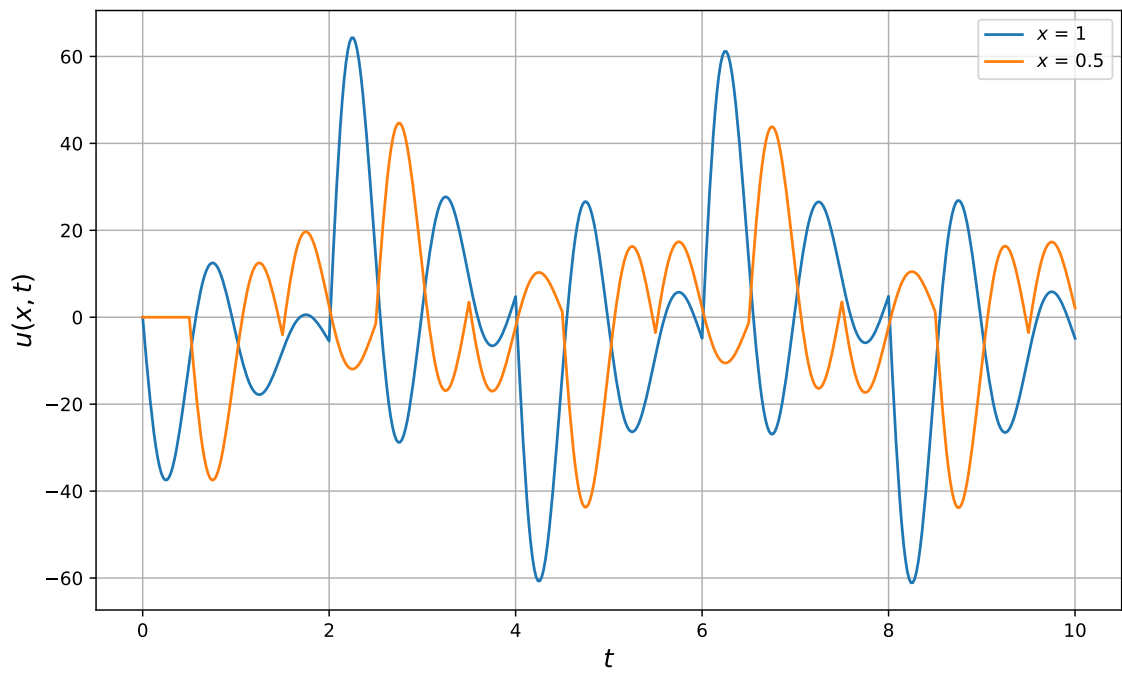
$$I'(\zeta_0, t) = -\sigma(t - \zeta_0) \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\alpha(t-\zeta_0)} \cos(\beta(t - \zeta_0)), \\ \ddot{I}(\zeta_0, t) = -\sigma(t - \zeta_0) \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\alpha(t-\zeta_0)} (\alpha \cos(\beta(t - \zeta_0)) + \beta \sin(\beta(t - \zeta_0)))$$

2.2 Результаты аналитического решения

Пользуясь формулой (2.12), представим графики перемещения $u(x, t)$, деформации $\varepsilon(x, t)$ и ускорения $\ddot{u}(x, t)$ в разных поперечных сечениях стержня, в качестве внешней нагрузки взяв функцию (2.7) с коэффициентами $\alpha = 2$, $\beta = 0$ (рис. 2(а)) и с коэффициентами $\alpha = 1$, $\beta = 2\pi$ (рис. 2(б)).

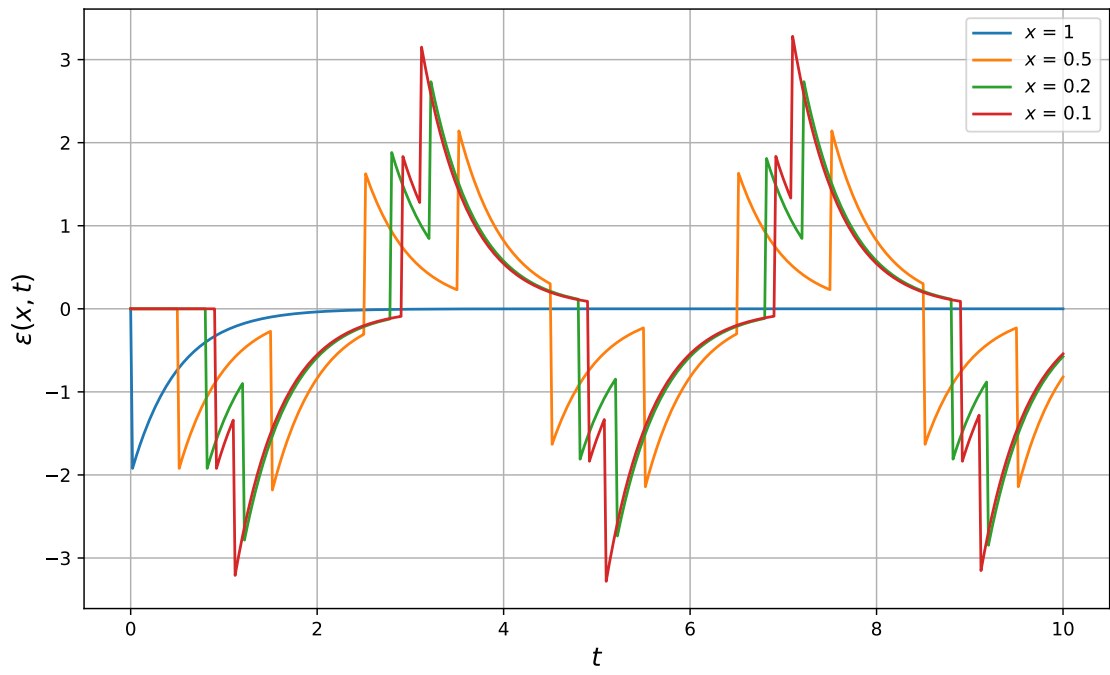


(a)

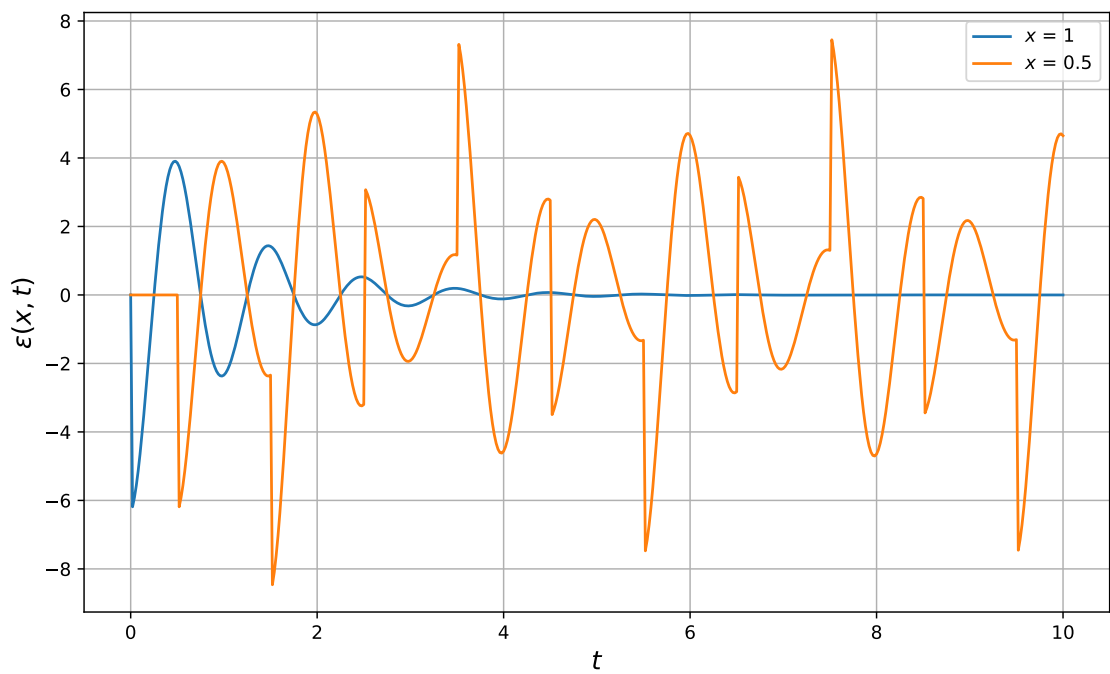


(b)

Рис. 2: Перемещения $u(x, t)$ для закрепленного стержня при различных торцевых нагрузках: $f(t) = e^{-2t}$ (a), $f(t) = e^{-t} \cos(2\pi t)$ (b)

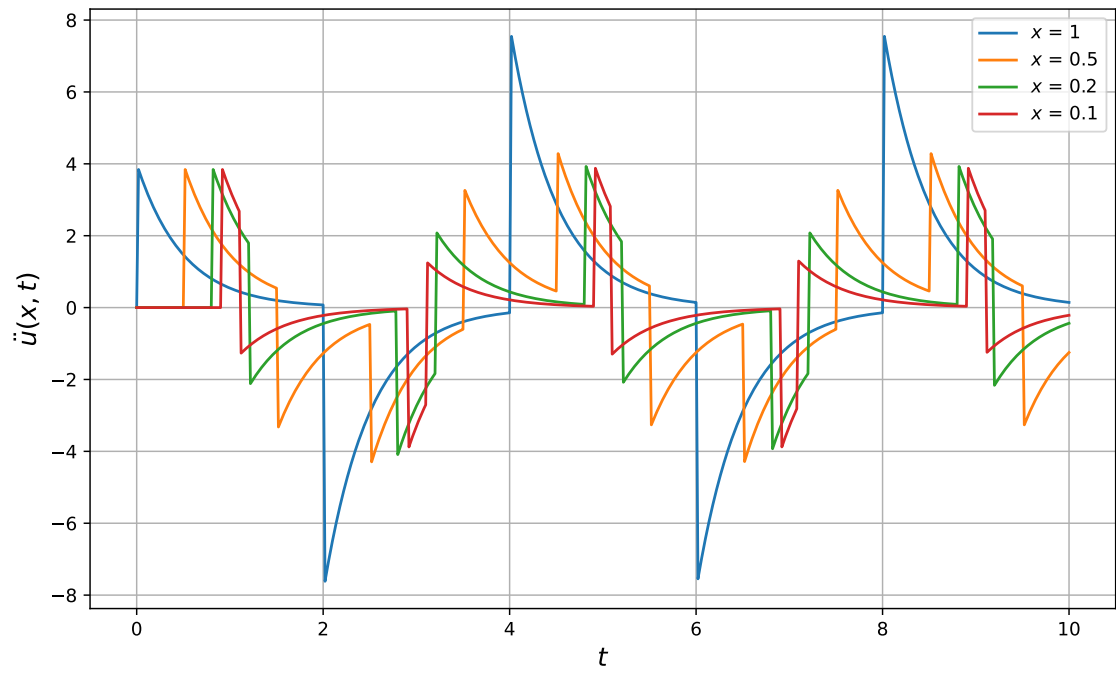


(a)

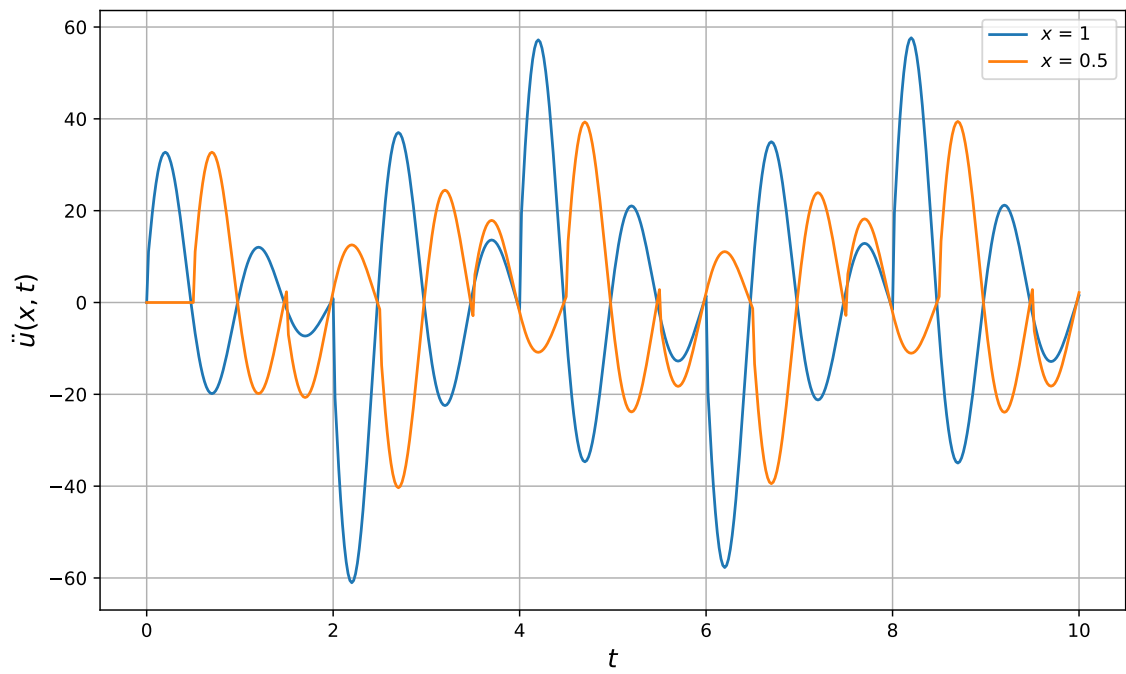


(b)

Рис. 3: Деформации $\varepsilon(x, t)$ для закрепленного стержня при различных торцевых нагрузках: $f(t) = e^{-2t}$ (a), $f(t) = e^{-t} \cos(2\pi t)$ (b)



(a)



(b)

Рис. 4: Ускорения $\ddot{u}(x, t)$ для закрепленного стержня при различных торцевых нагрузках: $f(t) = e^{-2t}$ (a), $f(t) = e^{-t} \cos(2\pi t)$ (b)

3 Продольные колебания стержня со свободным концом

3.1 Получение аналитического решения

Рассмотрим теперь продольные колебания стержня с незакрепленным (свободным) концом. Уравнение и начальные условия при этом совпадут с соответствующими выражениями из (2.1); граничное условие на ненагруженном конце изменится следующим образом:

$$u'(0, t) = 0.$$

Аналогичными рассуждениями получается краевая задача на изображение $U(x, p)$:

$$\begin{cases} U''(x, p) - p^2 U(x, p) = 0, \\ U'(0, p) = 0, \\ U'(l, p) = -F(p), \end{cases}$$

имеющая решение:

$$U(x, p) = -\frac{F(p)}{p} \frac{\operatorname{ch}(px)}{\operatorname{sh}(p)}.$$

Тогда, аналогично предыдущему пункту перейдя к оригиналу, с использованием обозначения (2.11) решение для свободного стержня примет вид:

$$u(x, t) = -\sum_{k=0}^{\infty} [I(2k+1-x, t) + I(2k+1+x, t)].$$

Выражения для деформации и перемещения получаются аналогично главе 2.

3.2 Результаты аналитического решения

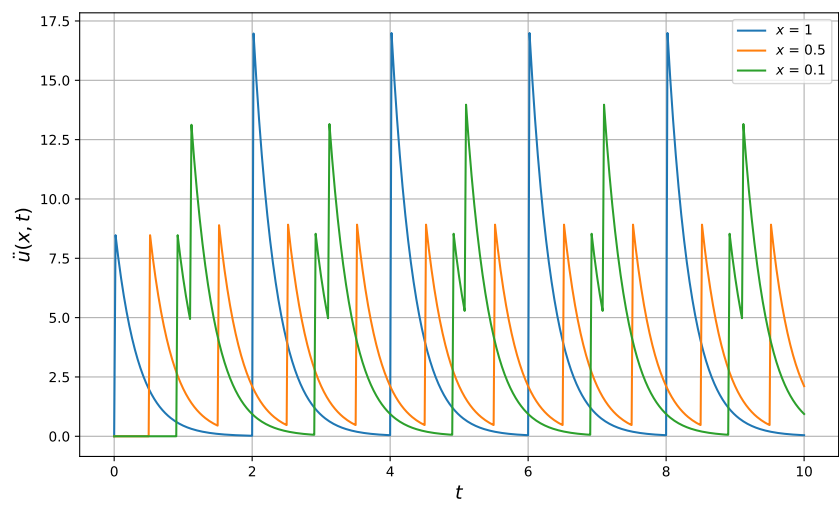
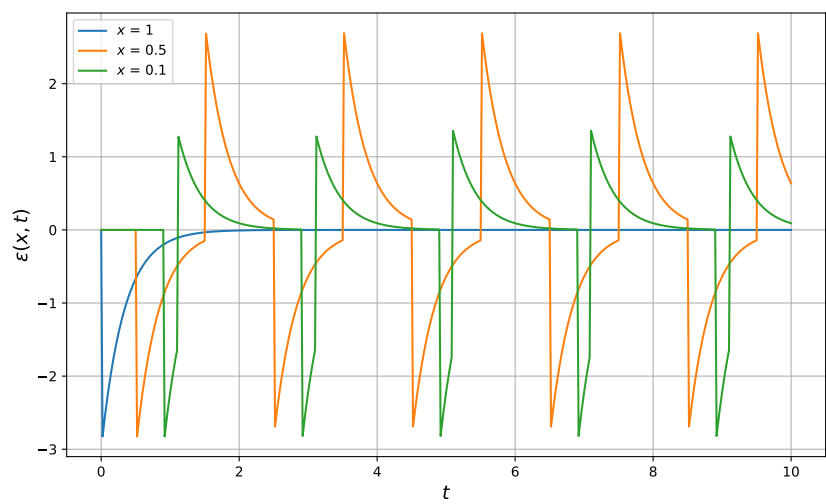
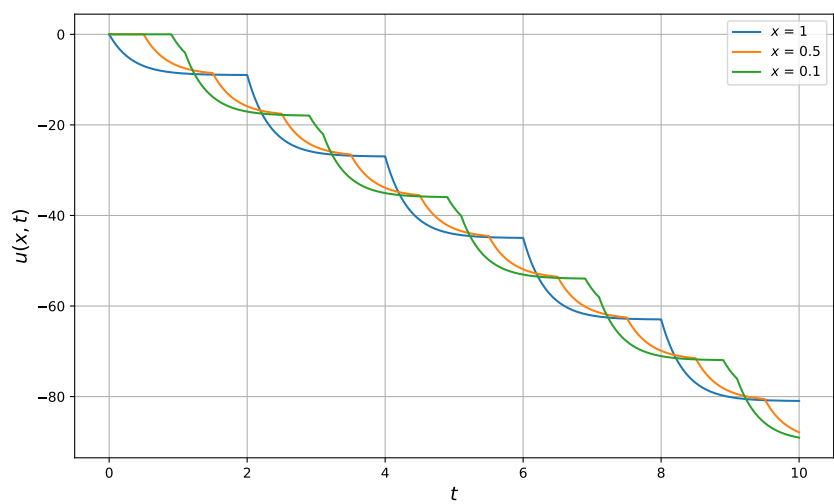


Рис. 5: Перемещение $u(x, t)$, деформация $\varepsilon(x, t)$ и ускорение $\ddot{u}(x, t)$ для свободного стержня, $f(t) = e^{-3t}$

4 Продольный удар твердого тела по закрепленному стержню

4.1 Получение аналитического решения

Рассмотрим теперь задачу об ударе твердого тела по закрепленному стержню (см. рис. 6). Заметим, что ударник при этом «прилипает» к последнему.

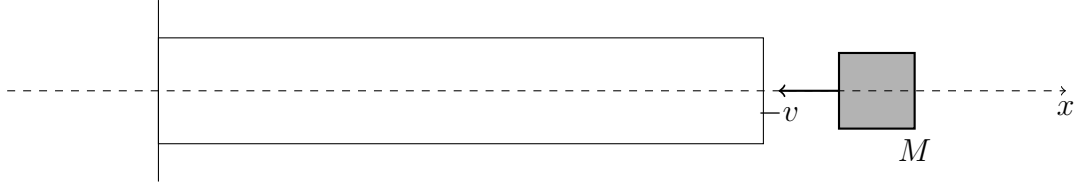


Рис. 6: Схема задачи

Аналогично, волновое уравнение продольных колебаний упругого стержня (2.1) остается неизменным; левый край стержня закреплён. В момент времени $t = 0$ движущееся со скоростью v твердое тело массой M ударяет по правому краю, вследствие чего начальные условия приобретают вид:

$$u(x, 0) = 0, \quad \dot{u}(x, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < l, \\ -v, & x = l, \end{cases}$$

а граничные условия:

$$u(0, t) = 0, \quad M\ddot{u}(l, t) = -ESu'(l, t). \quad (4.1)$$

Условие незакрепленного конца в (4.1) учитывает равенство по модулю силы инерции ударника и упругой силы стержня.

Применив преобразование Лапласа-Карсона к волновому уравнению и граничным условиям, снова получим краевую задачу на изображение перемещения:

$$\begin{cases} U''(x, p) - \frac{p^2}{c^2}U(x, p) = 0, \\ U(0, p) = 0, \\ U'(l, p) = -\frac{M}{ES}(p^2U(l, p) + pv). \end{cases}$$

Ее решение:

$$U(x, p) = -\frac{Mv}{ES} \frac{\frac{1}{c} \operatorname{ch}\left(\frac{p}{c}l\right) + \frac{M}{ES}p \operatorname{sh}\left(\frac{p}{c}l\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{p}{c}x\right)}.$$

Перейдем к безразмерным переменным (2.5), введя масштаб безразмерного перемещения $[U(x, p)] = \frac{vl}{c}$. Тогда:

$$U(x, p) = -\frac{\operatorname{sh}(px)}{\alpha \operatorname{ch}(p) + p \operatorname{sh}(p)},$$

где $\alpha := \frac{\rho Sl}{M}$ — безразмерный параметр.

Рассмотрим $-U(x, p)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sh}(px)}{\alpha \operatorname{ch}(p) + p \operatorname{sh}(p)} &= \frac{e^{px} - e^{-px}}{(\alpha + p)e^p + (\alpha - p)e^{-p}} = \frac{1}{\alpha + p} \frac{e^{-p(1-x)} - e^{-p(1+x)}}{1 + \frac{\alpha - p}{\alpha + p}e^{-2p}} = \\
&= (e^{-p(1-x)} - e^{-p(1+x)}) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha - p}{\alpha + p} \right)^k (-1)^k e^{-2kp} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p - \alpha)^k}{(p - \alpha)^{k+1}} e^{-p(2k+1-x)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p - \alpha)^k}{(p - \alpha)^{k+1}} e^{-p(2k+1+x)}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Каждое слагаемое в (4.2) имеет вид:

$$\frac{(p - \alpha)^k}{(p - \alpha)^{k+1}} e^{-p\zeta_0} = \frac{1}{p} \frac{p(p - \alpha)^k}{(p - \alpha)^{k+1}} e^{-p\zeta_0}.$$

Поскольку

$$e^{-\alpha t} L_k(2\alpha t) \xrightarrow{\mathcal{L}_K} \frac{p(p - \alpha)^k}{(p - \alpha)^{k+1}},$$

где $L_k(x)$ — полиномы Лагерра порядка k [1], по теореме о свертывании оригинал такого слагаемого примет вид:

$$\begin{aligned}
I_k(\zeta_0, t) &:= \int_0^t \sigma(\zeta - \zeta_0) L_k(2\alpha(t - \zeta)) e^{-\alpha(t - \zeta)} d\zeta. \\
&= \frac{\sigma(t - \zeta_0)}{\alpha} \int_0^{\alpha(t - \zeta_0)} e^{-\chi} L_k(2\chi) d\chi.
\end{aligned}$$

Для целого неотрицательного k неопределенный интеграл произведения экспоненты и полинома Лагерра представится в виде двойной суммы:

$$\begin{aligned}
G_k(x) &:= \int e^{-x} L_k(2x) dx = \int e^{-x} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{(-1)^i}{i!} (2x)^i dx = \\
&= \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{(-1)^i}{i!} (2x)^i \int e^{-x} x^i dx = \\
&= e^{-x} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i \frac{(-1)^{i+1} 2^i k!}{i!(k-i)!(i-j)!} x^{i-j}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Учитывая, что $G_k(0) = (-1)^{k+1}$, можно написать:

$$I_k(\zeta_0, t) = \frac{\sigma(t - \zeta_0)}{\alpha} (G_k(\alpha(t - \zeta_0)) + (-1)^k), \tag{4.4}$$

где $G_k(x)$ — функция из (4.3).

Окончательно, безразмерное перемещение точек стержня, вызванное ударом твердого тела:

$$u(x, t) = - \sum_{k=0}^{\infty} [I_k(2k + 1 - x, t) - I_k(2k + 1 + x, t)], \tag{4.5}$$

$$\varepsilon(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} [I'_k(2k+1-x, t) + I'_k(2k+1+x, t)], \quad (4.6)$$

$$\ddot{u}(x, t) = - \sum_{k=0}^{\infty} \left[\ddot{I}_k(2k+1-x, t) - \ddot{I}_k(2k+1+x, t) \right], \quad (4.7)$$

причем

$$\begin{aligned} I'_k(\zeta_0, t) &= \sigma(t - \zeta_0) G'_k(\alpha(t - \zeta_0)), \\ \ddot{I}_k(\zeta_0, t) &= \alpha \sigma(t - \zeta_0) G''_k(\alpha(t - \zeta_0)) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} G'_k(x) &= L_k(2x) e^{-x}, \\ G''_k(x) &= e^{-x} (2L'_k(2x) - L(2x)). \end{aligned}$$

4.2 Результаты аналитического решения

Изобразим решения (4.5), (4.6) и (4.7) на рисунке 7. Заметим, что из-за ударной нагрузки деформации и ускорения точек стержня терпят разрывы.

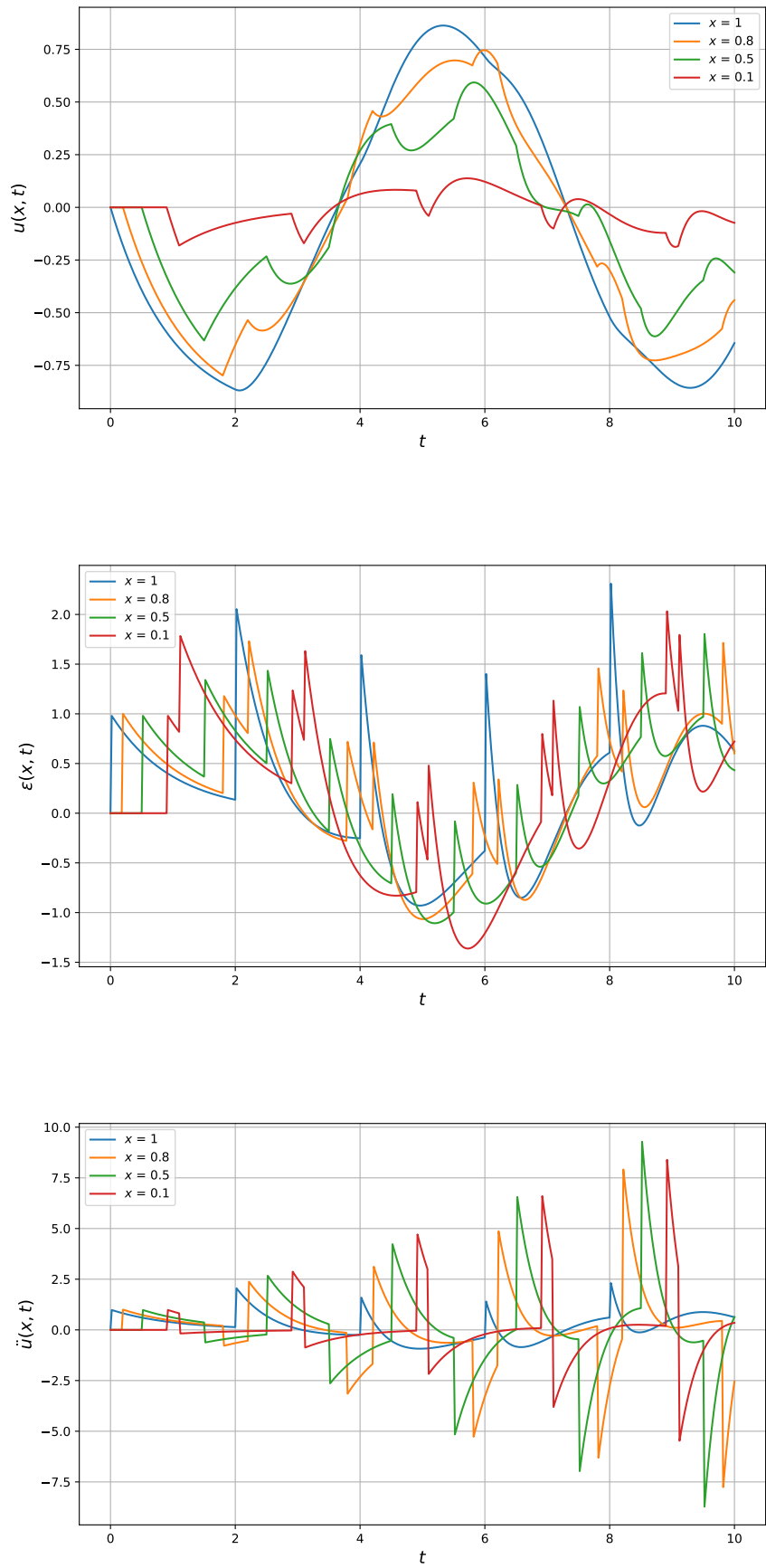


Рис. 7: Перемещение $u(x, t)$, деформация $\varepsilon(x, t)$ и ускорение $\ddot{u}(x, t)$ для закрепленного стержня в результате удара твердым телом

5 Продольный удар твердого тела по свободному стержню

5.1 Получение аналитического решения

Найдем теперь поле перемещений для незакрепленного стержня, возбужденное ударом твердого тела. Постановка задачи аналогична приведенной в предыдущем пункте: волновое уравнение из (2.1) не изменяется, начальные и граничные условия приобретают вид:

$$u(x, 0) = 0, \quad \dot{u}(x, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < l, \\ -v, & x = l, \end{cases}$$

$$u'(0, t) = 0, \quad M\ddot{u}(l, t) = -ESu'(l, t).$$

Тогда краевая задача на изображение перемещения $U(x, p)$:

$$\begin{cases} U''(x, p) - \frac{p^2}{c^2}U(x, p) = 0, \\ U'(0, p) = 0, \\ U'(l, p) = -\frac{M}{ES}(p^2U(l, p) + pv). \end{cases} \quad (5.1)$$

Аналогично, решая (5.1), получим изображение $U(x, p)$. Запишем его через безразмерные переменные (2.5) и избавимся от размерностей. Тогда

$$U(x, p) = -\frac{\operatorname{ch}(px)}{\alpha \operatorname{sh}(p) + p \operatorname{ch}(p)},$$

а решение:

$$u(x, t) = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [I_k(2k+1-x, t) + I_k(2k+1+x, t)],$$

где $I_k(\zeta, t)$ — функция из (4.4).

Выражения для деформации и перемещения получаются аналогично главе 4.

5.2 Численная визуализация аналитического решения

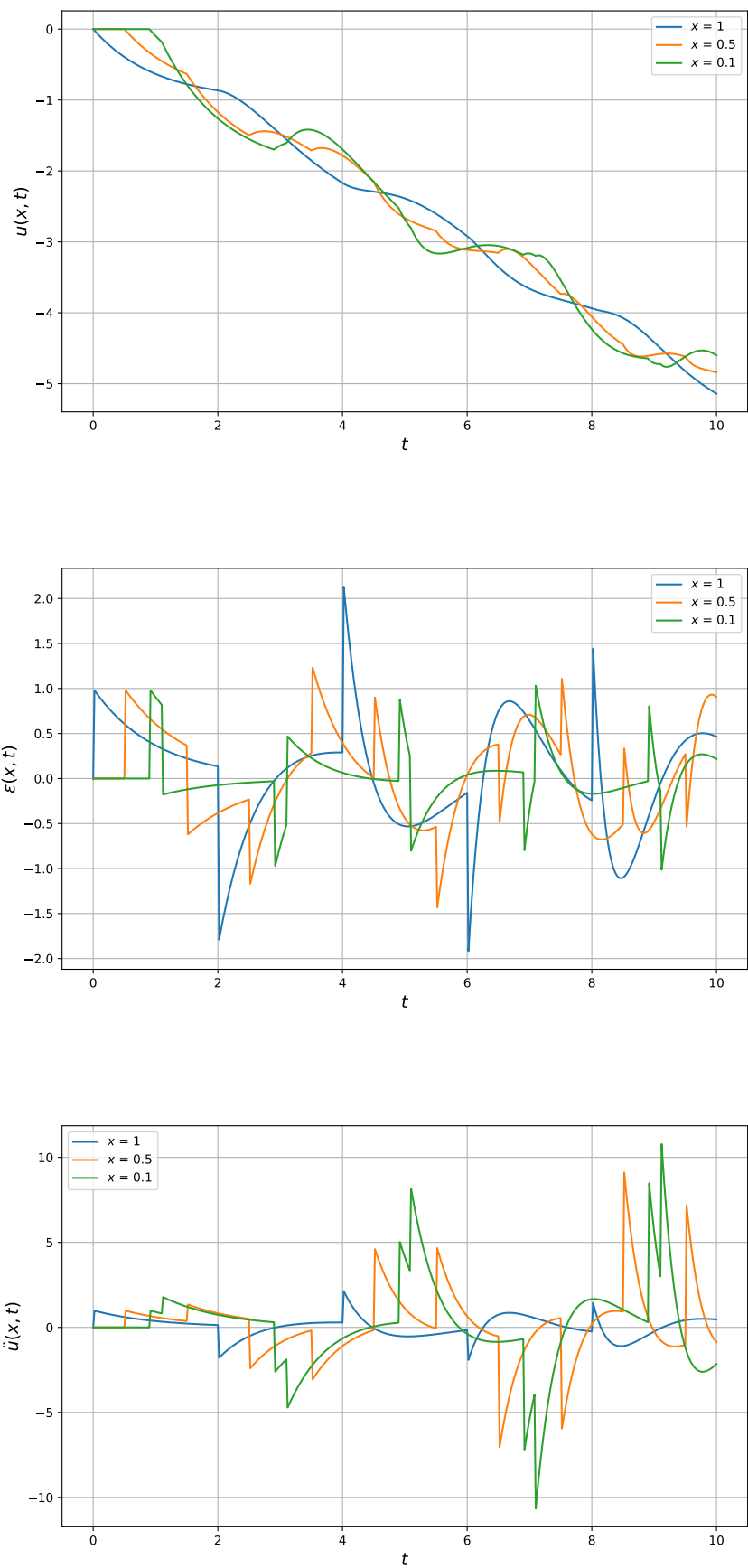


Рис. 8: Перемещение $u(x, t)$, деформация $\varepsilon(x, t)$ и ускорение $\ddot{u}(x, t)$ для свободного стержня в результате удара твердым телом

6 Изгибные волны в цилиндрической оболочке и балке на упругом основании

6.1 Получение аналитического решения для нормальной динамической нагрузки

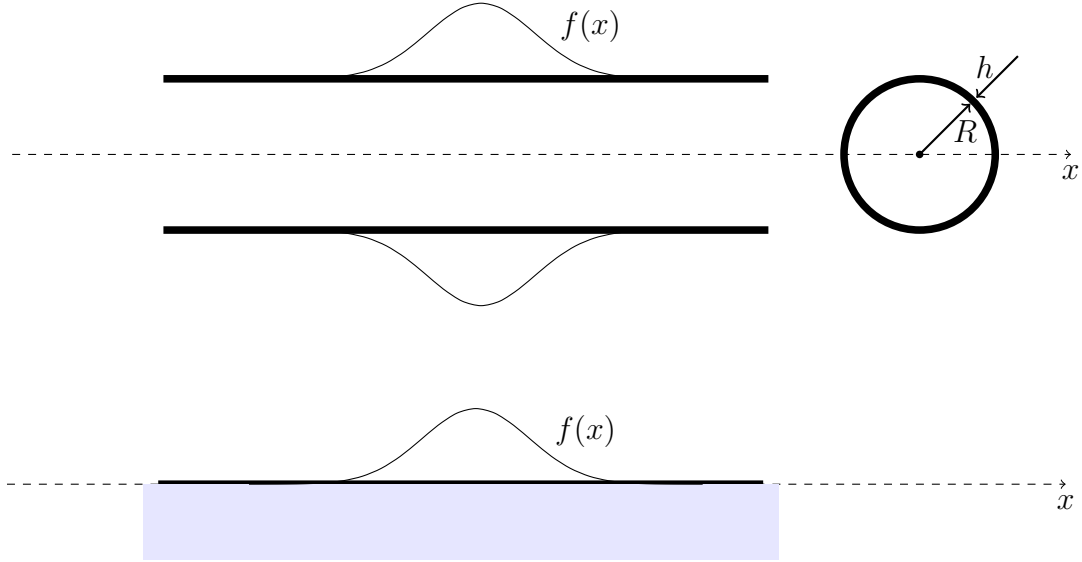


Рис. 9: Бесконечные цилиндрическая оболочка и балка на упругом основании

Рассмотрим осесимметричные изгибные волны в бесконечно длинной цилиндрической оболочке и в балке на упругом основании под действием динамической поперечной нагрузки. Уравнение, задающее поперечные перемещения точек оболочки $w(x, t)$:

$$\rho h \ddot{w}(x, t) = -D w^{(IV)}(x, t) - \frac{Eh}{R^2} w(x, t) + Q f(x) g(t), \quad (6.1)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая изгибная жесткость, $f(x)$ и $g(t)$ — безразмерные составляющие нагрузки из (6.3), Q — амплитуда нагрузки; R и h — внутренний радиус и толщина оболочки соответственно.

Уравнение движения точек балки на упругом основании:

$$\rho S \ddot{w}(x, t) = -EJ w^{(IV)}(x, t) - Kw(x, t) + Q f(x) g(t), \quad (6.2)$$

где K — коэффициент основания, J — момент инерции сечения.

Функции безразмерной нагрузки:

$$f(x) = e^{-\alpha^2 x^2}, \quad g(t) = \frac{t}{t_m} e^{-t/t_m}, \quad (6.3)$$

где t_m — время выхода на максимум нагрузки, а параметры нагрузки приняты так, чтобы их можно было выразить через импульс давления I и время нарастания t_m ($Q = I/t_m$). Таким образом обеспечивается постоянство импульса давления при любом времени нарастания.

Для переменных x, t, Q и функции $w(x, t)$ введем безразмерные масштабы (для оболочки

(слева) и для балки (справа)):

$$\begin{cases} [w] = h, \\ [x] = \sqrt{Rh}/\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}, \\ [t] = R\sqrt{\rho/E}, \\ [Q] = Eh^2/R^2, \end{cases} \quad \begin{cases} [w] = \sqrt{J/S}, \\ [x] = \sqrt[4]{EJ/K}, \\ [t] = \rho S/K, \\ [Q] = K\sqrt{J/S}. \end{cases} \quad (6.4)$$

Перейдя для (6.1) и (6.2) к безразмерным переменным (6.4), получим совпадающие для обеих задач безразмерные уравнения на $w(x, t)$:

$$\ddot{w} + w^{(IV)} + w = \frac{I}{t_m} f(x)g(t), \quad (6.5)$$

где I — безразмерный импульс давления, t_m — безразмерное время максимума нагрузки.

Применим к (6.5) последовательно преобразования Лапласа-Карсона (2.2) с параметром p по времени и Фурье (6.6) с параметром q по координате. Тогда поскольку

$$w^{\mathcal{F}}(q, t) := \mathcal{F}[w(x, t)](q, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, t) \cos(qx) dx \quad (6.6)$$

или то же в упрощенном виде

$$w(x, t) \xrightarrow{\mathcal{F}} w^{\mathcal{F}}(q, t),$$

и Фурье-образ производной функции перемещения при нулевом граничном условии

$$w^{(IV)}(x, t) \xrightarrow{\mathcal{F}} q^4 w^{\mathcal{F}}(q, t),$$

получаем выражение для изображения $w^{\mathcal{LF}}(q, p) := \mathcal{L}[\mathcal{F}[w(x, t)]](q, p)$:

$$(p^2 + q^4 + 1) w^{\mathcal{LF}}(q, p) = \frac{I}{t_m} f^{\mathcal{F}}(q) g^{\mathcal{L}}(p),$$

$$w^{\mathcal{LF}}(q, p) = \frac{I f^{\mathcal{F}}(q) g^{\mathcal{L}}(p)}{t_m (p^2 + q^4 + 1)}.$$

С учетом вида функций $f(x)$ и $g(t)$, заданных в (6.3), найдем их изображения:

$$f^{\mathcal{F}}(q) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-q^2/4\alpha^2}, \quad g^{\mathcal{L}}(p) = \frac{p}{t_m (p + t_m^{-1})^2}.$$

Тогда

$$w^{\mathcal{LF}}(q, p) = \frac{I}{t_m^2} \cdot \frac{e^{-q^2/4\alpha^2}}{\sqrt{2\alpha}} \cdot \frac{p}{(p^2 + q^4 + 1)(p + t_m^{-1})^2}. \quad (6.7)$$

Применим к выражению (6.7) последовательно обратные преобразования Лапласа-Карсона и Фурье. После обратного преобразования Лапласа имеем

$$w^{\mathcal{F}}(q, t) = \frac{I}{t_m^2} \cdot \frac{e^{-q^2/4\alpha^2}}{\sqrt{2\alpha}} \cdot M(q, t), \quad (6.8)$$

где \mathcal{L}_K^{-1} от третьего сомножителя в (6.7):

$$M(q, t) = \frac{\sin\left(t\sqrt{1+q^4} - \lambda(q)\right)}{\sqrt{1+q^4}(1+q^4+t_m^{-2})} + e^{-t/t_m} \left(\frac{t}{1+q^4+t_m^{-2}} + \frac{2}{t_m(1+q^4+t_m^{-2})^2} \right), \quad (6.9)$$

где $\lambda(q) := 2 \arctan(t_m \sqrt{1+q^4})$.

Применим теперь к (6.8) обратное преобразование Фурье, и тогда функции прогиба и ускорений точек оболочки/балки примут окончательный вид:

$$w(x, t) = \frac{I}{t_m^2 \alpha \sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-q^2/4\alpha^2} M(q, t) \cos(qx) dq; \quad (6.10)$$

$$\ddot{w}(x, t) = \frac{I}{t_m^2 \alpha \sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-q^2/4\alpha^2} \ddot{M}(q, t) \cos(qx) dq; \quad (6.11)$$

здесь $M(q, t)$ — функция из (6.9), причем

$$\begin{aligned} \ddot{M}(q, t) = & -\sqrt{q^4+1} \sin\left(t\sqrt{q^4+1} - \lambda(q)\right) \cdot \left(q^4+1 + \frac{1}{t_m^2}\right)^{-1} - \\ & - \left(2e^{-t_m \frac{t}{t_m}} t_m - \left(t + \frac{2}{t_m \left(q^4+1 + \frac{1}{t_m^2}\right)}\right) e^{-\frac{t}{t_m}}\right) \cdot (t_m^2(q^4+1) + 1)^{-1}. \end{aligned}$$

6.2 Получение аналитического решения для точечной постоянной нагрузки

Нагрузим теперь оболочку функцией следующего вида:

$$Q(x, t) = \sigma(t) \delta(x),$$

где $\sigma(t)$ и $\delta(x)$ — функции Хевисайда и Дирака соответственно.

$$\begin{cases} \ddot{w}(x, t) + w(x, t) + w^{(IV)}(x, t) = \sigma(t) \delta(x), \\ w(x, 0) = \dot{w}(x, 0) = 0, \\ \text{остальные условия.} \end{cases} \quad (6.12)$$

Применим к (6.12) косинус-преобразование Фурье (6.6). Тогда уравнение и начальные условия на изображение $w^{\mathcal{F}}$ примут вид:

$$\begin{cases} \ddot{w}^{\mathcal{F}}(q, t) + w^{\mathcal{F}}(q, t) + q^4 w^{\mathcal{F}}(q, t) = \sigma(t), \\ w^{\mathcal{F}}(q, 0) = \dot{w}^{\mathcal{F}}(q, 0) = 0. \end{cases}$$

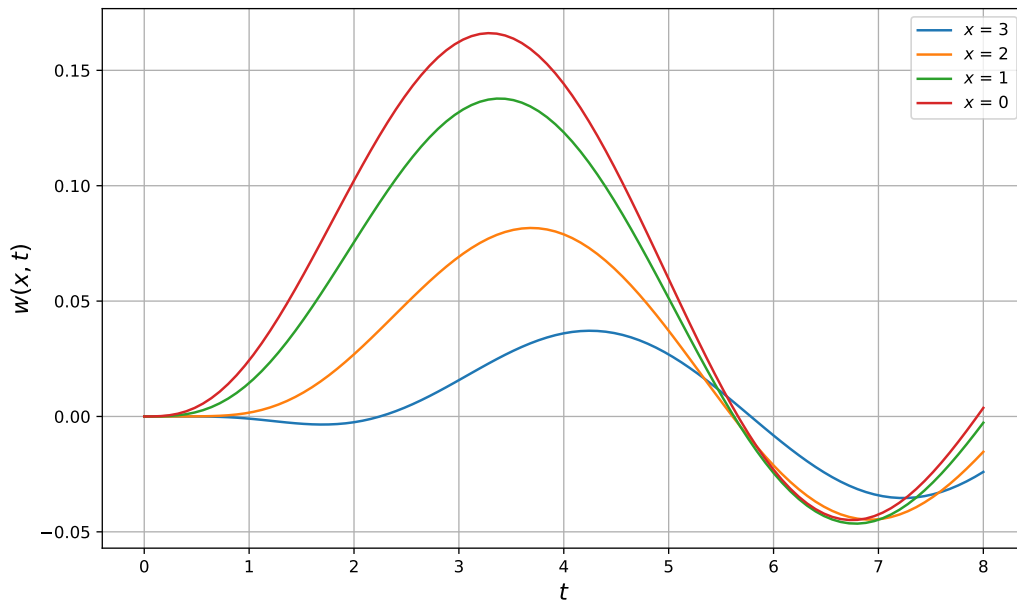
Учитывая точное решение этой задачи Коши, запишем выражение для перемещений через интеграл обратного преобразования Фурье:

$$w(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos\left(t\sqrt{1+q^4}\right)}{1+q^4} \cos qx \, dq. \quad (6.13)$$

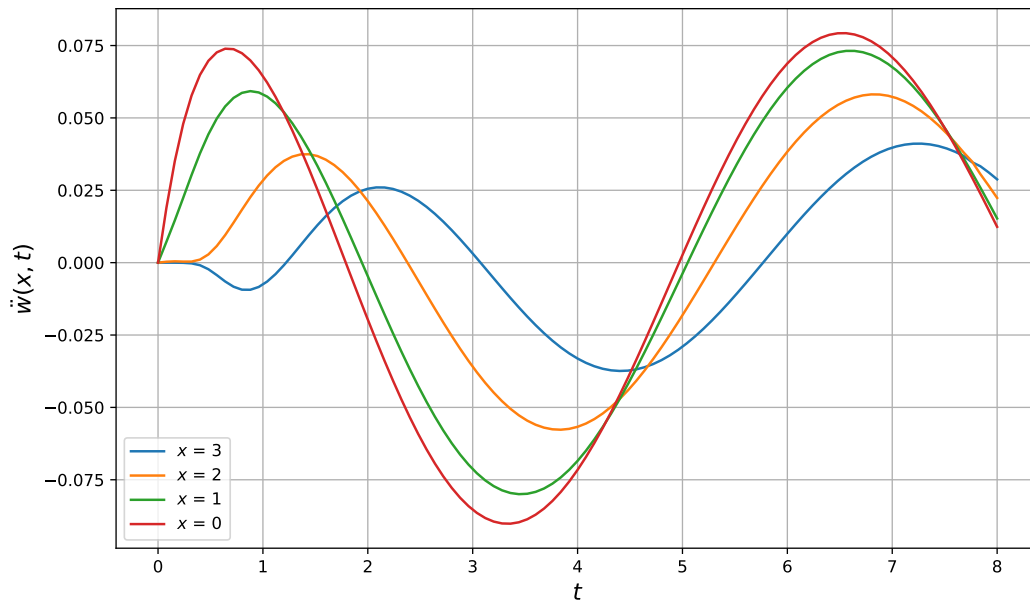
$$\ddot{w}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \cos\left(t\sqrt{1+q^4}\right) \cos qx \, dq. \quad (6.14)$$

6.3 Численная визуализация аналитических решений

Представим графики решений (6.10), (6.11) и (6.13), (6.14) взяв интегралы численно.

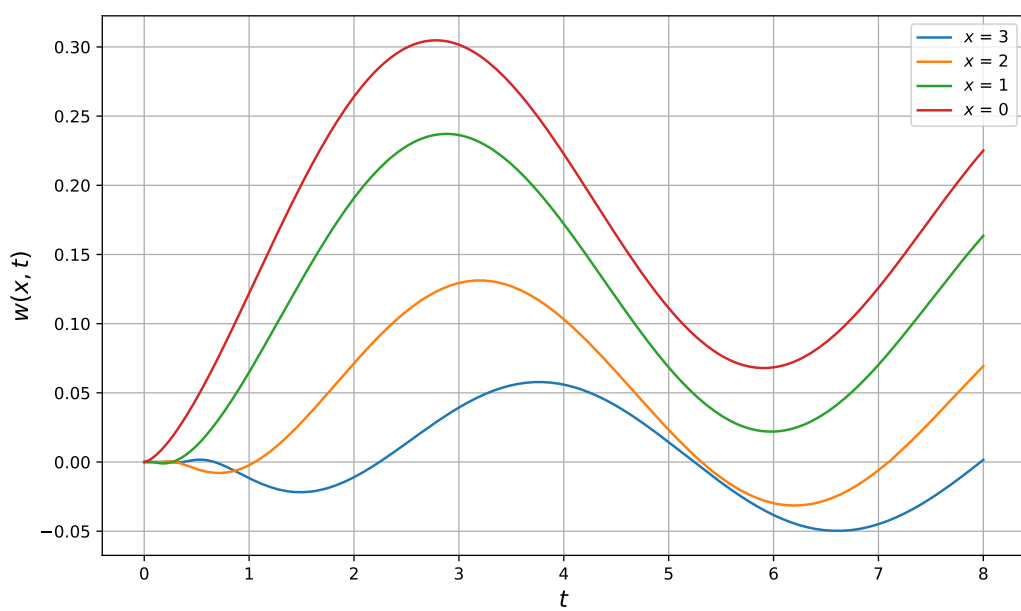


(a)

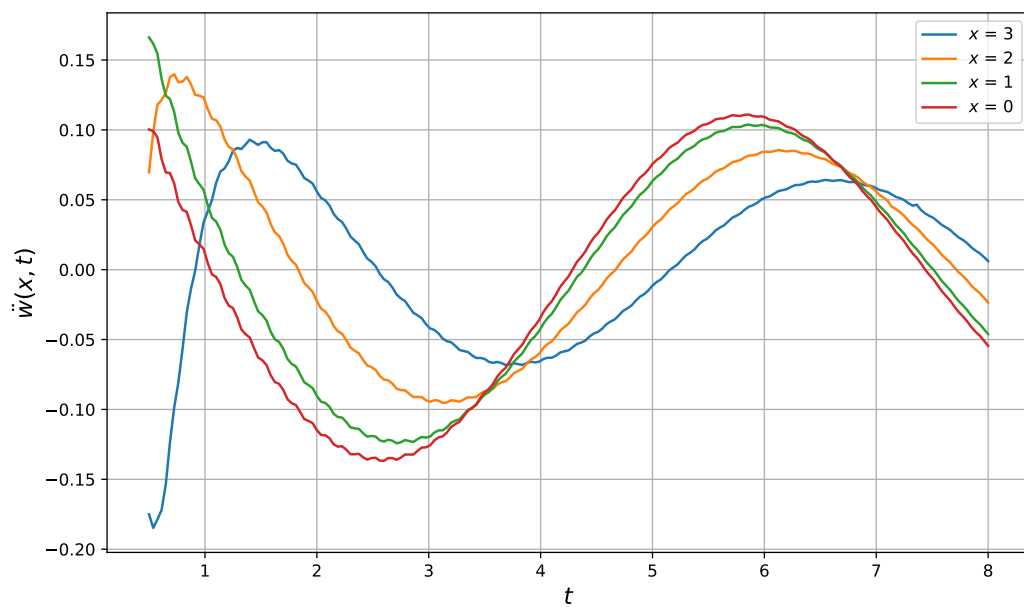


(b)

Рис. 10: Поперечные перемещение $w(x, t)$ и ускорение $\ddot{w}(x, t)$ точек бесконечной упругой цилиндрической оболочки или балки под действием динамической неравномерной нагрузки с $\alpha = 1$, $t_m = 2$, $I = 1$



(a)



(b)

Рис. 11: Поперечные перемещение $w(x, t)$ и ускорение $\ddot{w}(x, t)$ точек бесконечной упругой цилиндрической оболочки или балки под действием точечной нагрузки

7 Поперечные волны ускорения упругой тонкой пластины

7.1 Получение аналитического решения

Рассматривается упругая тонкая пластина толщины h , на которую действует динамическая нагрузка в виде нормального распределения, сосредоточенная в области, размеры которой одного порядка с толщиной (см. рис. 12).

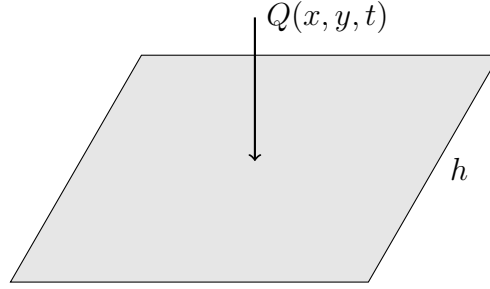


Рис. 12: Схема задачи

Классические уравнения пластины (С. Жермен–Лагранжа):

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\Delta^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Q(x, y, t). \quad (7.1)$$

В рамках поставленной задачи используется следующая аппроксимация внешней нагрузки:

$$Q(x, y, t) = Q_{max} f_1(x, y) f_2(t), \quad (7.2)$$

где $f_1(x, y) = e^{-\left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2}\right)}$, $f_2(t) = e^{-t/T}$ — координатная и временная части нагрузки. Здесь A и B — коэффициенты размерности длины (порядка толщины пластины h).

Равнодействующая нагрузки и суммарный импульс:

$$P = \pi AB Q_{max},$$

$$I = Q_{max} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{t}{T}\right)} dx dy dt = \pi AB Q_{max} T = PT.$$

Рассмотрим осесимметричный случай. Тогда координатная часть нагрузки:

$$f_1(r) = e^{-\frac{r^2}{A^2}},$$

причем в этом случае равнодействующая нагрузки $P = Q_{max} \pi A^2$, что дает основание считать A радиусом области нагружения.

Введем безразмерные величины: в качестве масштаба координаты выберем толщину

пластины (переход осуществляется по формулам из (7.3)).

$$\begin{cases} [w] = h, \\ [t] = h\sqrt{12}/c_n, \\ [r] = h, \\ \tau = \frac{T}{h\sqrt{12}/c_n}, \\ q = \frac{Q}{E/12(1-\nu^2)}, \\ j = \frac{I}{\rho c_n h^3/\sqrt{12}}, \\ a = \frac{A}{h}. \end{cases} \quad (7.3)$$

В новых переменных уравнение (7.1) примет вид:

$$\Delta^2 w(r, t) + \frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial t^2} = q(r, t), \quad (7.4)$$

где $q(r, t) = q_{max} f_1(r) f_2(t)$, $f_1(r) = e^{-r^2/a^2}$, $f_2(t) = e^{-t/\tau}$.

Равнодействующая сила и ее суммарный импульс связаны с максимальным давлением и параметрами его пространственно-временного распределения следующим образом:

$$p = \pi a^2 q_{max}, \quad j = p\tau.$$

В осесимметричной задаче удобно использовать полярные координаты и преобразование Ханкеля:

$$f^{\mathcal{H}}(\lambda, t) := \mathcal{H}[f(r, t)](\lambda, t) = \int_0^\infty f(r, t) J_0(\lambda r) r dr, \quad (7.5)$$

где $J_0(\lambda r)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Применим к (7.4) преобразование Ханкеля по радиальной координате. Поскольку $\mathcal{H}[\Delta^2 w] = \lambda^4 w^{\mathcal{H}}$, уравнение в частных производных с нулевыми начальными условиями перейдет в обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $w^{\mathcal{H}}$:

$$\ddot{w}^{\mathcal{H}}(\lambda, t) + \lambda^4 w^{\mathcal{H}}(\lambda, t) = q_{max} f_1^{\mathcal{H}}(\lambda) f_2(t). \quad (7.6)$$

Здесь для образов функций $w(r, t)$ и $f_1(r)$ ввели обозначения:

$$w(r, t) \xrightarrow{\mathcal{H}} w^{\mathcal{H}}(\lambda, t), \quad f_1(r) \xrightarrow{\mathcal{H}} f_1^{\mathcal{H}}(\lambda).$$

Общее решение дифференциального уравнения (7.6) представляется в общем виде интегралом Дюамеля:

$$w^{\mathcal{H}}(\lambda, t) = \frac{P}{2\pi\lambda^2} e^{-a^2\lambda^2/4} \int_0^t f_2(\xi) \sin(\lambda^2(t - \xi)) d\xi$$

и решение задачи дается обращением преобразования Ханкеля:

$$w(r, t) = \frac{P}{2\pi} \int_0^\infty f_2(\xi) \int_0^\infty \lambda^{-1} e^{-a^2\lambda^2/4} \sin(\lambda^2(t - \xi)) J_0(\lambda r) d\lambda d\xi.$$

В случае нагружения, заданного по времени в экспоненциальном виде, получим:

$$w(r, t) = \frac{P}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-a^2\lambda^2/4}}{\lambda^4 + \tau^{-2}} \lambda \left(e^{-t/\tau} - \cos(\lambda^2 t) + \frac{\sin(\lambda^2 t)}{\lambda^2 \tau} \right) J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (7.7)$$

Отдельно рассмотрим случай, в котором длительность действия нагрузки уменьшается при одновременном увеличении максимального значения так, что общий импульс остается неизменным. Такой переход предполагает $\tau \rightarrow 0$ и $p \rightarrow \infty$ и эквивалентен заданию гауссовой нагрузки по координате и дельта-функции по времени ($f_1(r) = e^{-r^2/a^2}$, $f_2(t) = \delta(t)$).

Из решения (7.7) с учетом указанного предельного перехода получаем:

$$\begin{aligned} w(r, t) &= \frac{j}{2\pi} \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2/4} \lambda^{-1} \sin(\lambda^2 t) J_0(\lambda r) d\lambda, \\ \ddot{w}(r, t) &= -\frac{j}{2\pi} \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2/4} \lambda^3 \sin(\lambda^2 t) J_0(\lambda r) d\lambda. \end{aligned} \quad (7.8)$$

7.2 Метод стационарной фазы

Суть метода стационарной фазы состоит в замене интегрирования по всей области приближенным интегрированием быстро осциллирующих функций в малых окрестностях стационарных точек λ_s таких, что $f'(\lambda_s) = 0$:

$$\int_0^\infty \varphi(\lambda) e^{if(\lambda)} d\lambda \approx \sum_s \varphi(\lambda_s) \int_{\lambda_s-\delta}^{\lambda_s+\delta} \exp\left(i\left(f(\lambda_s) + \frac{(\lambda - \lambda_s)^2}{2} f''(\lambda_s)\right)\right) d(\lambda_s - \lambda). \quad (7.9)$$

Так как основной вклад в значение интеграла дает окрестность стационарной точки, пределы интегрирования можно без больших потерь расширить, сведя интеграл к табличному:

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_s-\delta}^{\lambda_s+\delta} e^{if(\lambda)} d\lambda &\approx e^{if(\lambda_s)} \int_{-\infty}^\infty e^{\frac{i}{2} f''(\lambda_s)(\lambda - \lambda_s)^2} d(\lambda - \lambda_s) = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(\lambda_s)|}} \exp\left(i\left(f(\lambda_s) + \frac{\pi}{4} \operatorname{sign}(f''(\lambda_s))\right)\right). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Кроме того, функция Бесселя $J_0(x)$ имеет асимптотическое представление

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x + \pi/4),$$

точность которого велика уже при $x > 3$. Поскольку в настоящей работе рассматриваются поперечные колебания в дальней зоне (вдали от точки приложения нагрузки), использование данного приближения более чем оправдано.

С учетом последнего имеем:

$$\begin{aligned} \ddot{w}(r, t) &= \frac{j}{\sqrt{2\pi^3 r}} \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2/4} \lambda^{5/2} \sin(\lambda^2 t) \sin(\lambda r + \pi/4) d\lambda = \\ &= \frac{j}{\sqrt{8\pi^3 r}} \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty \varphi(\lambda) (e^{if_-(\lambda)} - e^{if_+(\lambda)}) d\lambda \right], \end{aligned} \quad (7.11)$$

где $\varphi(\lambda) := \lambda^{5/2} e^{-a^2\lambda^2/4}$ — медленно меняющаяся функция, $f_\pm(\lambda) := \lambda^2 t \pm \lambda r \pm \pi/4$ — быстро меняющиеся фазы, из которых только $f_-(\lambda)$ имеет единственную стационарную точку $\lambda_s = \frac{r}{2t}$.

В стационарной точке имеем:

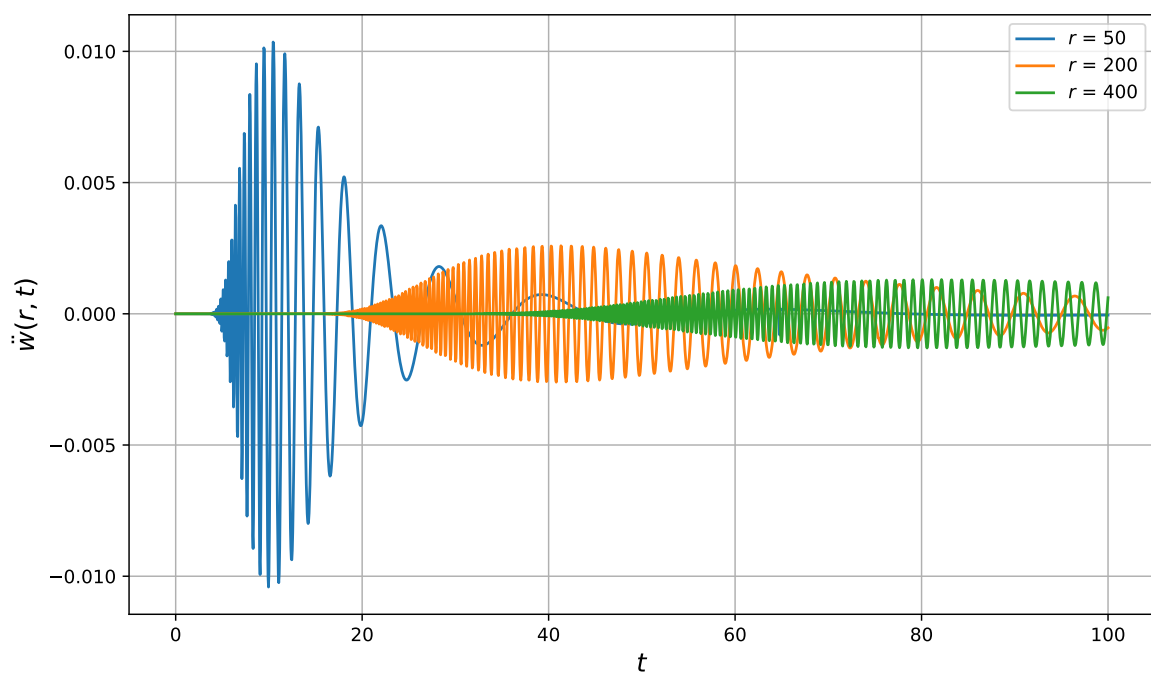
$$f_-(\lambda_s) = -r^2/4t - \pi/4, \quad f'_-(\lambda_s) = 0, \quad f''_-(\lambda_s) = 2t > 0; \quad \varphi(\lambda_s) = \left(\frac{r}{2t}\right)^{5/2} e^{-a^2 r^2/16t^2}.$$

Таким образом, применение к (7.11) метода стационарной фазы (7.9) и (7.10) дает следующее приближенное решение квадратуры (7.8):

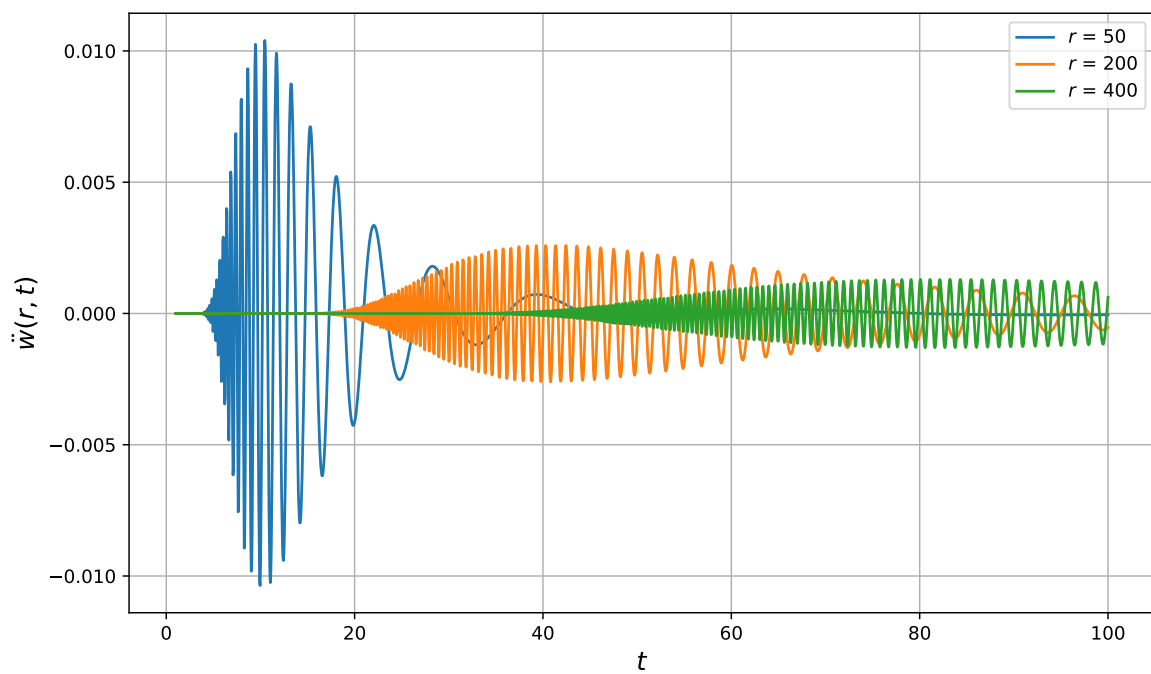
$$\ddot{w}(r, t) = -\frac{j}{4\pi t^2} \exp\left(-\frac{a^2 r^2}{16t^2}\right) \cdot \frac{r^2}{4t} \cos\left(\frac{r^2}{4t}\right). \quad (7.12)$$

7.3 Численная визуализация аналитического решения

Изобразим зависимость ускорения смещения точек пластины $\ddot{w}(r, t)$ от времени (используя численное интегрирование (7.8), а также приближенное решение методом стационарной фазы (7.12)) для разных сечений r (рис. 13) и зависимость от радиальной координаты для разных значений времени t (рис. 14).

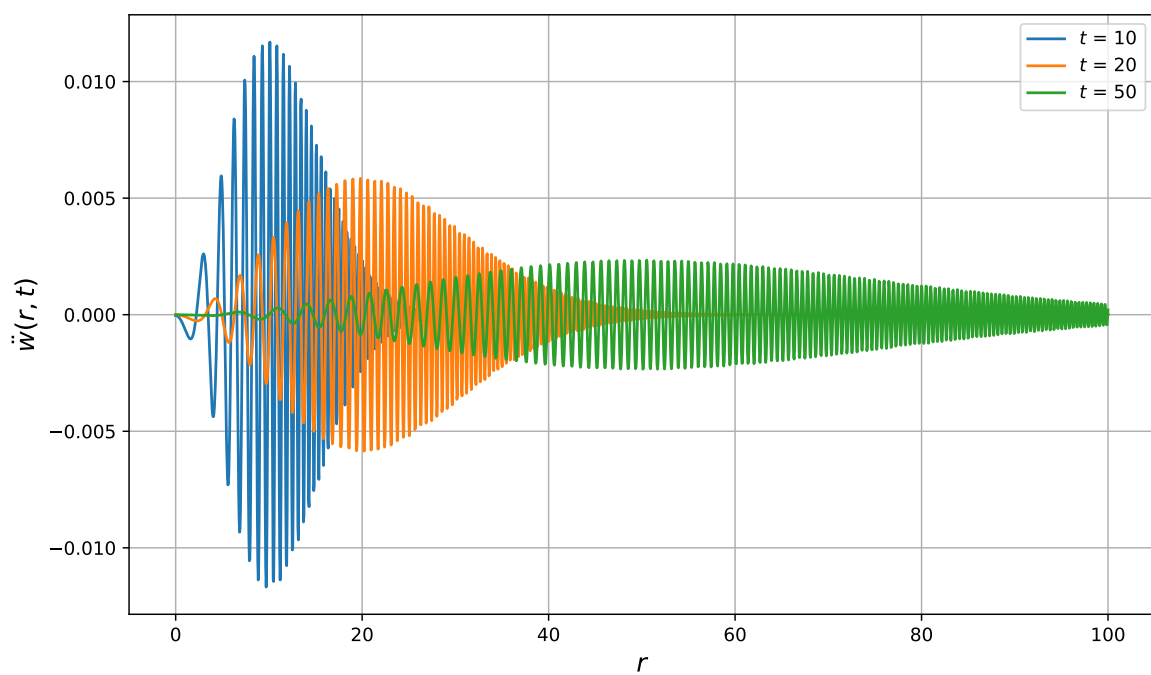


(a)

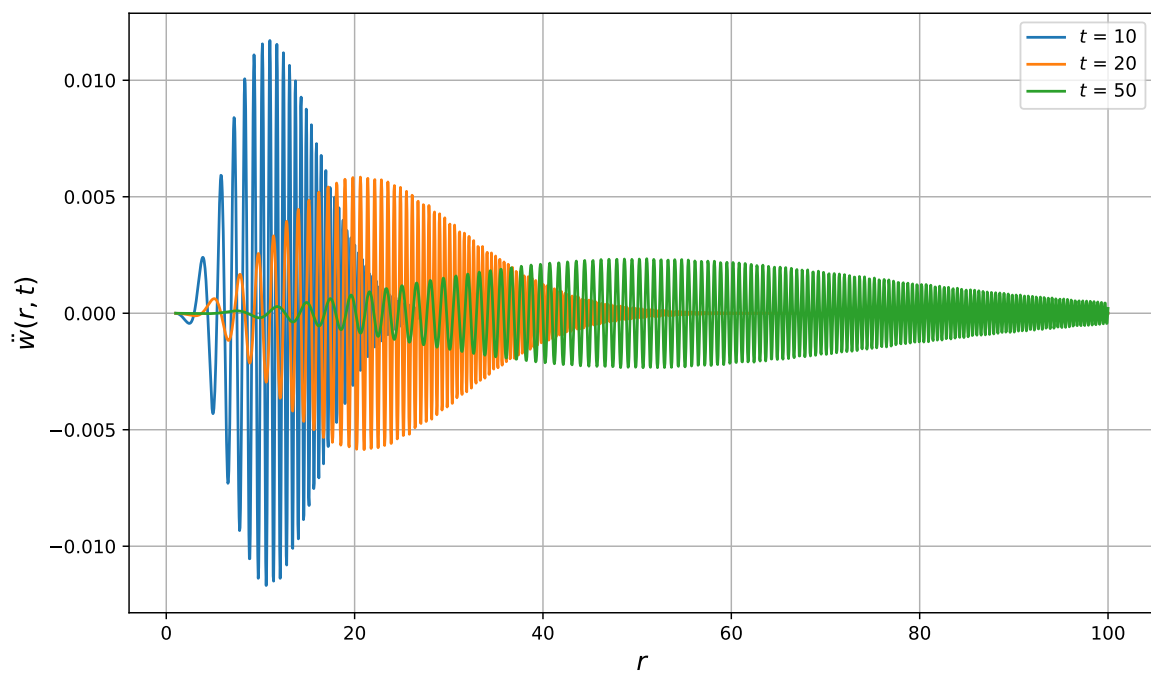


(b)

Рис. 13: Ускорение точек пластины $\ddot{w}(r, t)$ в зависимости от времени для разных радиальных сечений $r = \{50, 200, 400\}$; значения параметров: $j = 1$, $a = 1$; здесь (a) — численное интегрирование, (b) — метод стационарной фазы



(a)



(b)

Рис. 14: Ускорение точек пластины $\ddot{w}(r, t)$ в зависимости от радиальной координаты r для разных моментов времени $t = \{10, 20, 50\}$; значения параметров: $j = 1$, $a = 1$; здесь (a) — численное интегрирование, (b) — метод стационарной фазы

8 Поперечные волны ускорения упругой сферической оболочки

8.1 Получение аналитического решения

Решим теперь задачу о колебаниях точек сферической оболочки под действием динамической нагрузки (см. рис. 15).

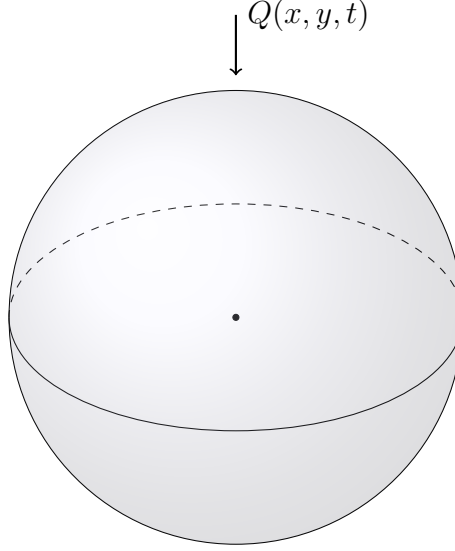


Рис. 15: Схема задачи

Линеаризованные уравнения движения точек пологих оболочек (см [3]):

$$\begin{cases} \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y}, \\ \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y}, \\ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \Delta^2 w - \frac{1}{R_x} T_x - \frac{1}{R_y} T_y = Q(x, y, t). \end{cases} \quad (8.1)$$

Здесь u, v — тангенциальные компоненты перемещения, w — нормальное перемещение, T_x, T_y, T_{xy} — тангенциальные усилия, D — изгибная жесткость, ρ — плотность материала, h — толщина оболочки, $p_{x,y,z}$ — компоненты внешней распределенной нагрузки, $R_{x,y}$ — главные радиусы кривизны.

Если пренебречь тангенциальными составляющими сил инерции и внешних сил, то первым двум уравнениям из (8.1) можно удовлетворить, введя функцию усилий $\varphi(x, y)$ так, что

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (8.2)$$

Уравнение, которому должна удовлетворять введенная функция, следуют из условий совместности деформаций, которые в линейном приближении для пологих оболочек имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R_x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R_y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

где принято

$$\varepsilon_x = \frac{1 - \nu^2}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1 - \nu^2}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad \varepsilon_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma_{xy}. \quad (8.3)$$

Замена в (8.3) напряжений через (8.2) и подстановка в соотношении совместности приводит к уравнению относительно функции усилий, которое совместно с третьим уравнением (8.1) дает полную систему уравнений движения:

$$\begin{cases} \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \Delta^2 w - h \left(\frac{1}{R_x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{R_y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = Q(x, y, t), \\ \Delta^2 \varphi + E \left(\frac{1}{R_x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0. \end{cases}$$

В случае сферической оболочки (при $R_x = R_y := R$) последняя принимает вид:

$$\begin{cases} \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \Delta^2 w - \frac{h}{R} \Delta \varphi = Q(x, y, t), \\ \Delta^2 \varphi + \frac{E}{R} \Delta w = 0. \end{cases} \quad (8.4)$$

Приведем уравнения (8.4) к безразмерной форме, введя масштаб и параметры:

$$\begin{cases} [w] = R, \\ [\varphi] = ER^2/(1 - \nu^2), \\ [p] = ERh/(1 - \nu^2), \\ q = \frac{Q}{Eh/R(1 - \nu^2)}, \\ \varepsilon = h^2/12R^2, \\ j = \frac{I}{\rho c_n h R^2}, \\ a = \frac{A}{R}, \\ \tau = \frac{T}{R/c_n}. \end{cases}$$

Внешнюю нагрузку примем в виде (7.2), $q_{max} = p/2\pi$.

В соответствии с этим и с учетом осесимметричного характера задачи уравнения примут вид:

$$\begin{cases} \varepsilon \Delta^2 w(r, t) + \frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial t^2} - \Delta \varphi(r) = q(r, t), \\ \Delta^2 \varphi + (1 - \nu^2) \Delta w(r, t) = 0. \end{cases} \quad (8.5)$$

Применим к (8.5) преобразование Ханкеля (7.5):

$$\begin{cases} \ddot{w}^{\mathcal{H}} + \varepsilon \lambda^4 w^{\mathcal{H}} + \lambda^2 \varphi^{\mathcal{H}} = q_{max} f_1^{\mathcal{H}}(\lambda) f_2(t), \\ (1 - \nu^2) w^{\mathcal{H}} - \lambda^2 \varphi^{\mathcal{H}}. \end{cases}$$

Исключив функцию $\varphi^{\mathcal{H}}$, придем к уравнению, аналогичному (7.6):

$$\ddot{w}^{\mathcal{H}}(\lambda, t) + \omega^2(\lambda) w^{\mathcal{H}}(\lambda, t) = q_{max} f_1^{\mathcal{H}}(\lambda) f_2(t),$$

где обозначили $\omega^2(\lambda) := 1 + \varepsilon \lambda^4 - \nu^2$. Решение этого уравнения совпадает с (7.7) при замене λ^4 на $\omega^2(\lambda)$.

В случае импульсного нагружения (то есть при $p \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow 0$; $j = p\tau$) изображение окончательно принимает вид:

$$w^{\mathcal{H}}(\lambda, t) = \frac{j}{2\pi} e^{-a^2\lambda^2/4} \omega(\lambda) \sin(\omega t).$$

После обратного преобразования Ханкеля получим следующую квадратуру безразмерного поперечного ускорения точек сферической оболочки:

$$\ddot{w}(r, t) = \frac{j}{2\pi} \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2/4} \lambda \omega(\lambda) \sin(\omega(\lambda)t) J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (8.6)$$

8.2 Метод стационарной фазы

Для аппроксимации решения снова применим метод стационарной фазы (7.9) и (7.10):

$$\ddot{w}(r, t) = \frac{j}{\sqrt{8\pi^3 r}} \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty \varphi(\lambda) e^{if(\lambda)} d\lambda \right],$$

где теперь медленно меняющаяся и фазовая функции:

$$\varphi(\lambda) := e^{-a^2\lambda^2/4} \omega(\lambda) \sqrt{\lambda}, \quad f(\lambda) = \omega(\lambda)t - \lambda r - \pi/4.$$

Стационарные точки определяются из уравнения $\omega(\lambda)r = 2\varepsilon t\lambda^3$ при $\varepsilon\lambda^4 \gg 1$. В стационарной точке имеем:

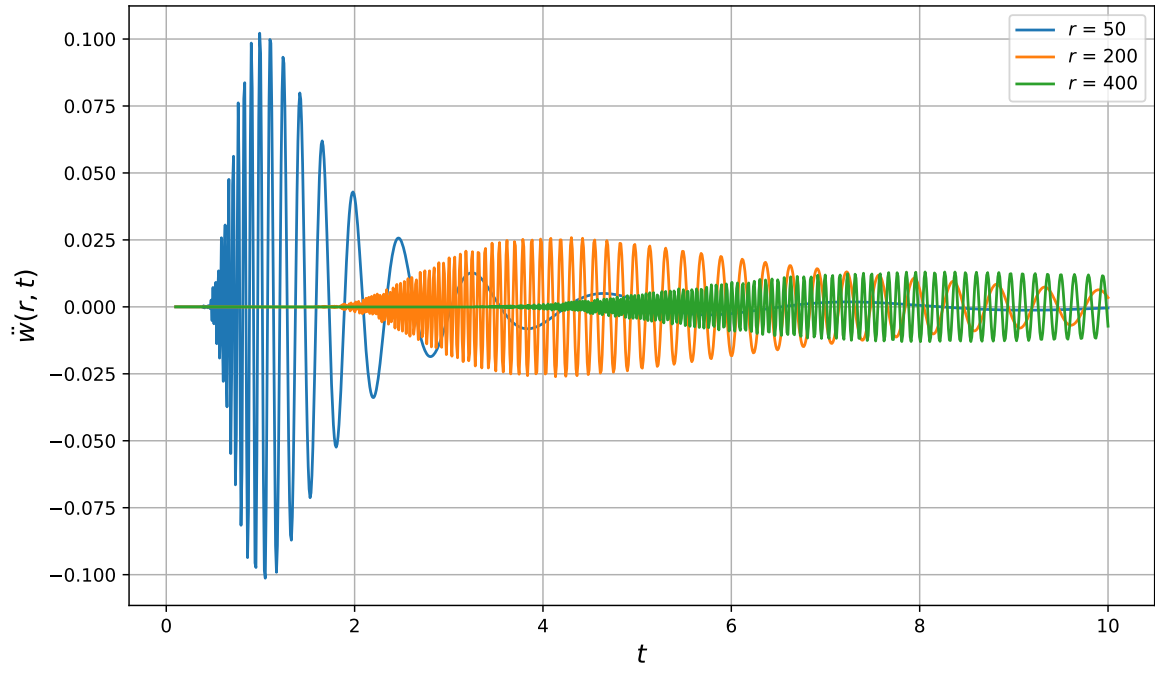
$$\begin{aligned} \lambda_s &= \frac{r}{2t\sqrt{\varepsilon}}, \quad \omega_s = \frac{r^2}{4t^2\sqrt{\varepsilon}}, \quad f_s = -\frac{r^2}{4t\sqrt{\varepsilon}}, \quad f_s'' = 2t\sqrt{\varepsilon} > 0; \\ \varphi_s &= \frac{1}{\varepsilon^{3/4}} \left(\frac{r}{2t} \right)^{5/2} \exp\left(-\frac{a^2 r^2}{16t^2 \varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, приближенное решение квадратуры (8.6) примет следующий вид:

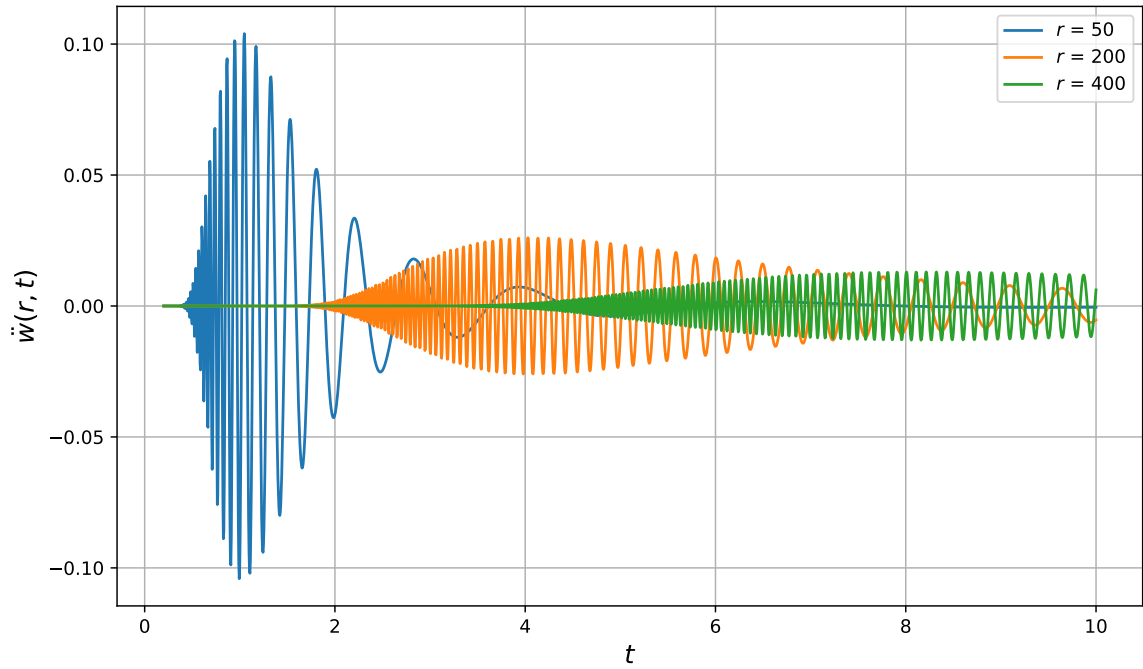
$$\ddot{w}(r, t) = \frac{j}{4\pi t^2 \varepsilon} \exp\left(-\frac{a^2 r^2}{16t^2 \varepsilon}\right) \cdot \frac{r^2}{4t} \cos\left(\frac{r^2}{4t\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

8.3 Численная визуализация аналитического решения

Изобразим ускорения точек сферической оболочки (аналитическое решение и решение МСФ) на рисунке 16.



(a)



(b)

Рис. 16: Ускорение точек сферической оболочки; здесь (a)— численное интегрирование, (b) — метод стационарной фазы при $\varepsilon = 100$

9 Заключение

1. Разработан комплекс тестовых задач, предназначенных для тестирования численных решений задач, возникающих при расчетах конструкций на динамическую прочность.
2. Комплекс включает набор базовых задач о динамическом нагружении типовых конструктивных элементов: стержней, пластин и оболочек (в общей сложности 7 задач).
3. Получены точные аналитические решения задач на основе использования интегральных преобразований.
4. Полученные решения могут быть использованы для контроля точности численных решений задач динамической прочности, а также непосредственно в практике прочностных расчетов.

Список литературы

- [1] Лурье А.И. Операционное исчисление и его приложение к задачам механики (2 изд.). ГИТТЛ. 1951.
- [2] SciPy 1.0 Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. Nature Methods, 17(3), 261-272, 2020.
- [3] В.А. Фельдштейн. Основы механики и динамической прочности тонкостенных конструкций (учебное пособие в двух частях). 2016.
- [4] И.И. Блехман, А.Д. Мышкис, Я.Г. Пановко. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. «Наукова думка», Киев. 1976.
- [5] В.И. Феодосьев. Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. М. «Наука». 1969.
- [6] Л.И. Слепян. Нестационарные упругие волны. Л. «Судостроение». 1973.
- [7] А.В. Кармишин, Э.Д. Скурлатов, В.Г. Старцев, В.А. Фельдштейн. Методы динамических расчетов и испытаний тонкостенных конструкций. М. «Машиностроение». 1989.
- [8] I. Magomedov, Z. Sebaeva. Comparative study of finite element analysis software packages. Journal of Physics: Conference Series. 2020.